

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

MICHEL TESTON SEMENSATO

Álgebras de Lie, grupos de Lie e aplicações à teoria de ações de
semigrupos

Maringá-PR

2010

MICHEL TESTON SEMENSATO

Álgebras de Lie, grupos de Lie e aplicações à teoria de ações de semigrupos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria

Orientador: Prof. Dr. Carlos José Braga Barros

Maringá

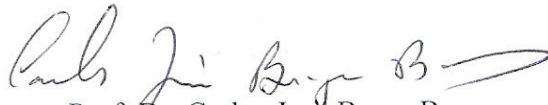
2010

MICHEL TESTON SEMENSATO

Álgebras de Lie, grupos de Lie e aplicações a teoria de ações de semigrupos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática pela Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:



Prof. Dr. Carlos José Braga Barros
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)



Prof. Dr. Mauro Moraes Alves Patrão
Universidade de Brasília



Prof. Dr. Josiney Alves de Souza
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 09 de abril de 2010.

Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

À minha família.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos a todos que de alguma forma contribuíram para o êxito deste trabalho, e em especial:

- À Deus, que me permitiu estar aqui hoje;
- Aos meus pais, Lúcia e Devair, que sempre me apoiaram e incentivaram os meus estudos.
- Aos meus irmãos, Alexandre e Ricardo, que indiretamente me incentivaram, encorajando-me a prosseguir e dando-me forças para vencer cada etapa.
- À minha namorada, companheira, amiga e princesa linda Maria Cláudia, por estar sempre ao meu lado quando precisei, e por me fazer feliz durante todo esse tempo.
- Ao professor Carlos, pela orientação, paciência e incentivos.
- Ao professor Josiney, que acompanhou todo esse trabalho, pela paciência e amizade, ajudando e incentivando sempre que precisei.
- Aos amigos e colegas do mestrado pela força nas horas difíceis, conversas e trocas de conhecimento.
- Aos professores Josiney Alves de Souza, Mauro Moraes Alves Patrão e Carlos José Braga Barros que atenciosamente colaboraram na correção deste trabalho.
- Ao CNPq, pelo importante apoio financeiro.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo das álgebras de Lie e dos grupos de Lie, assim como a ligação entre os dois conceitos, afim de aplicar essa teoria na teoria de ações de semigrupos. Inicialmente, estudaremos os grupos de Lie e as relações desse conceito com as álgebras de Lie. Por fim, apresentaremos uma revisão dos principais resultados sobre conjuntos controláveis para ações de subsemigrupos de grupos de Lie semisimples, nas suas variedades "flag" e, de acordo com o tipo de sistema simples de raízes, encontraremos um limitante superior para o número de conjuntos controláveis efetivos em variedades "flag" de grupos de Lie reais simples não compactos.

Abstract

The objective of this work is to present a study of álgebras of Lie and the groups of Lie, as well as the linking between the two concepts, with the objective to apply this theory in the theory of action of semigroups. Initially, we will study the groups of Lie and the relations of this concept with álgebras of Lie. Finally, we will present a revision of the main results on control sets for action of subsemigroups of semisimple Lie groups, in its flag manifolds. In accordance with the type of simple system of roots, we will find upper bounds for the number of effective control sets on the flag manifolds of the real simple non-compact Lie groups.

SUMÁRIO

Introdução	8
1 Grupos de Lie	12
1.1 Conceitos básicos	12
1.2 Aplicação exponencial	27
1.3 Variedades homogêneas	44
2 Conjuntos controláveis	56
2.1 Preliminares	56
2.2 Conjuntos controláveis em variedades flag	61
2.3 Número máximo de conjuntos controláveis efetivos	74
2.3.1 O caso $\Pi = A_l$	75
2.3.2 O caso $\Pi = C_l$	76
2.3.3 O caso $\Pi = B_l$	77
2.3.4 O caso $\Pi = D_l$	78
2.3.5 O caso $\Pi = G_2$	79
2.3.6 O caso $\Pi = F_4$	80
2.3.7 O caso $\Pi = E_8$	82
2.3.8 O caso $\Pi = E_7$	83
2.3.9 O caso $\Pi = E_6$	83
2.4 Os grupos de Lie simples não compactos	83
A Álgebras de Lie	88
A.1 Conceitos básicos de álgebras de Lie	88
A.1.1 Representações de álgebras de Lie.	100
A.1.2 Derivações	106
A.1.3 Álgebras solúveis	108

A.1.4	Álgebras nilpotentes	111
A.1.5	Álgebras simples e álgebras semisimples	117
A.2	Álgebras nilpotentes	117
A.3	Álgebras solúveis	130
A.4	Critérios de Cartan	132
A.5	Subálgebras de Cartan	147
B	Álgebras semisimples	153
B.1	Representações de $\mathfrak{sl}(2)$	153
B.2	Subálgebras de Cartan	156
B.3	Fórmula de Killing	162
B.4	Sistema simples de raízes	166
B.5	Matrizes de Cartan	171
B.6	Diagramas de Dynkin	175
C	Álgebras de Lie semisimples reais e variedades flag.	183
C.1	Fundamentos da teoria de Lie semisimples real	183
C.1.1	Sistema de raízes e decomposição de Iwasawa	184
C.1.2	Grupo de Weyl	186
C.1.3	Sistema simples de raízes	187
C.1.4	Subálgebra e subgrupo parabólicos	188
C.2	Objetos canônicos e variedades flag	189

INTRODUÇÃO

Em nosso trabalho estudamos as álgebras de Lie e os grupos de Lie, fazendo a relação entre os dois conceitos. Assim, inserimos um apêndice com o estudo das álgebras de Lie de dimensão finita, desde as primeiras noções até o estudo de como classificar as álgebras de Lie semisimples por um diagrama de Dynkin e os fundamentos da teoria das álgebras semisimples reais. Nosso objetivo é aplicar essas teorias na teoria de ações de semigrupos, encontrando um limitante superior para o número de conjuntos controláveis efetivos em variedades "flag" de grupos de Lie reais simples não compactos.

Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável G com estrutura de grupo, onde as operações multiplicação e inversão são deriváveis. Os grupos de Lie são objetos não lineares, e assim um dos fatores importantes da teoria dos grupos de Lie está baseada na existência das álgebras de Lie associadas aos grupos. As álgebras de Lie possibilitam transportar métodos da álgebra linear ao estudo dos grupos de Lie. Assim, o primeiro passo no estudo dos grupos de Lie consiste na construção das álgebras de Lie associadas aos grupos. Os grupos de Lie tem uma natureza geométrica enquanto as álgebras de Lie são objetos algébricos.

Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial \mathfrak{g} , munido de uma operação bilinear $[\cdot, \cdot]$, denominada colchete de Lie, satisfazendo as propriedades de antisimetria e identidade de Jacobi. A álgebra de Lie \mathfrak{g} de um grupo de Lie G é definida como o espaço dos campos invariantes (à esquerda ou à direita), com o colchete dado pelo colchete de Lie de campos de vetores. Essa álgebra de Lie é isomorfa ao espaço tangente de G na origem e .

Os fluxos dos campos invariantes estabelecem a aplicação exponencial $\exp: \mathfrak{g} \longrightarrow G$, que é o principal elo de ligação entre \mathfrak{g} e G . A idéia de sua construção é que, por definição, os elementos de \mathfrak{g} são campos de vetores em G (campos invariantes), que possuem fluxos, os quais são formados por difeomorfismos locais de G . Os elementos que formam esses fluxos se identificam naturalmente a elementos de G , permitindo construir, a partir de X

$\in \mathfrak{g}$, um subgrupo de G parametrizado por $t \in \mathbb{R}$. Dado um grupo de Lie G com álgebra de Lie \mathfrak{g} , tome $X \in \mathfrak{g}$ um campo invariante. A aplicação $\exp X$ é o valor em $t = 1$ da solução de X que passa pelo elemento neutro quando $t = 0$.

San Martin L.A.B e Tonelli P.A estudaram em [20] os conjuntos controláveis para ações de semigrupos de Lie semisimples, nas variedades "flag" destes grupos. A análise destes conjuntos controláveis mostrou-se uma ferramenta útil ao entendimento de algumas propriedades dos semigrupos nos grupos de Lie semisimples. Por exemplo, em [20] um subgrupo $W(S)$ do grupo de Weyl W do grupo de Lie G foi construído a partir de um semigrupo $S \subset G$ com interior não vazio em G . Este subgrupo $W(S)$ determina o número de conjuntos controláveis numa variedade "flag" de G e o número de tais conjuntos é dado através da ordem do espaço quociente duplo $W(S) \backslash W/W_\Theta$, onde W_Θ é o subgrupo de W gerado pelas reflexões definidas por raízes simples em Θ . Conseqüentemente um limitante superior para o número de conjuntos controláveis efetivos numa variedade "flag" é dado pela ordem de W/W_Θ . Iremos utilizar este resultado e determinar um limitante superior para o número de conjuntos controláveis efetivos numa variedade "flag" de um grupo de Lie real simples não compacto. Encontraremos esse limitante superior de acordo com o tipo de sistema simples de raízes, como em [4]. O diagrama de Dynkin associado ao sistema simples de raízes nos permite determinar a ordem de W_Θ . O diagrama de Dynkin correspondente para Θ é composto por diagramas de tipos conhecidos, A_l , B_l , C_l , D_l , G_2 , F_4 , E_6 , E_7 e E_8 . Assim a ordem de W_Θ é o produto das ordens dos grupos de Weyl correspondente aos diagramas.

O desenvolvimento dessa dissertação se dará da seguinte maneira:

No primeiro capítulo, iniciaremos introduzindo alguns conceitos básicos da teoria de grupos de Lie e, em seguida, faremos uma correspondência entre subgrupos de Lie e subálgebras de Lie. Posteriormente estudaremos o conceito e algumas propriedades da aplicação exponencial e a relação entre grupos de Lie e álgebras de Lie. Em seguida estudaremos os espaços quocientes G/H de grupos de Lie G por subgrupos fechados H , denominadas variedades homogêneas, definiremos ação transitiva de um grupo de Lie numa variedade e subgrupo de isotropia de um elemento p_0 de uma variedade e finalmente identificaremos algumas variedades diferenciáveis como sendo variedades homogêneas. O estudo deste capítulo foi baseado em [8], [12] e [24]. Outros trabalhos como [2], [9] e [13] também apresentam estudos neste contexto.

No segundo capítulo nosso objetivo é encontrar um limitante superior para o número de conjuntos controláveis efetivos numa variedade "flag" de um grupo de Lie real simples não compacto, tendo como base o trabalho de Braga Barros [4]. Para isso, usaremos alguns resultados de [20]. Na primeira seção enunciaremos alguns resultados básicos sobre conjuntos controláveis para ações de semigrupos, encontrados em [1], [10] e [20]. Em seguida, apresentaremos uma revisão dos principais resultados sobre conjuntos controláveis para ações de subsemigrupos de grupos de Lie semisimples nas suas variedades "flag", encontrados em [3]. Posteriormente, encontraremos um limitante superior para o número de conjuntos controláveis efetivos numa variedade "flag" de um grupo de Lie real simples não compacto. Esses limitantes superiores serão encontrados analisando separadamente o tipo de sistema de raízes, como feito por Braga Barros em [4]. Finalmente, os diagramas de Satake, encontrados em [13], nos possibilitam apresentar uma tabela onde é dado o número máximo de conjuntos controláveis nas variedades "flag" dos grupos de Lie simples reais e não compactos.

Por fim, introduzimos alguns apêndices. No apêndice A, estudaremos os princípios fundamentais das álgebras de Lie de dimensão finita, baseado em [5], [11], [18]. Na primeira seção apresentaremos as definições dos conceitos que formam a linguagem básica da teoria das álgebras de Lie. Em seguida faremos um estudo mais detalhado sobre as álgebras solúveis e nilpotentes, mostrando os teoremas de Engel e de Lie, que garantem que para álgebras solúveis e nilpotentes de transformações lineares, pode-se encontrar uma base que triangularize os elementos dessas álgebras. O estudo das álgebras nilpotentes, através do Teorema de Engel, serve de base para as subálgebras de Cartan, que é essencial para a classificação das álgebras semisimples. Posteriormente estudaremos a forma de Cartan-Killing, os critérios de Cartan e as subálgebras de Cartan. A forma de Cartan-Killing de uma álgebra de Lie de dimensão finita atua como instrumento que nos permite investigar, através dos critérios de Cartan, se uma álgebra de Lie é solúvel ou semisimples.

No apêndice B, com base em [11] e [18], iremos nos concentrar apenas no estudo das álgebras semisimples e suas representações. O primeiro passo é ver como se comportam as representações irredutíveis da álgebra $\mathfrak{sl}(2)$. Também demonstraremos alguns resultados das subálgebras de Cartan de uma álgebra semisimples, sua representação adjunta e os pesos relacionados a essa representação. Em seguida estudaremos os pesos, fórmula de Killing, sistemas simples de raízes e seus diagramas de Dynkin associados. Cada peso irá

corresponder a uma subálgebra isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)$, assim sempre poderemos ver a álgebra $\mathfrak{sl}(2)$ incluída na álgebra semisimples. Por fim, vamos mostrar como representar uma álgebra semisimples por um diagrama de Dynkin.

Por último, no apêndice C, apresentamos um esboço sobre o conteúdo básico da teoria de Lie semisimples real e definimos o conceito de variedade "flag". Os resultados e afirmações que enunciamos podem ser conferidos com todos os detalhes nos trabalhos de Braga Barros-San Martin [6] e [7], Patrão [14] e San Martin [17]. Observamos também que as definições e objetos relacionados aos conceitos de álgebra de Lie e de grupo de Lie podem ser consultadas nos textos de San Martin [18] e [19].

Grupos de Lie

Estudaremos aqui os conceitos básicos da teoria de Grupos de Lie e sua relação com as álgebras de Lie. Na primeira seção apresentaremos os conceitos básicos e faremos uma correspondência entre subgrupos de Lie e subálgebras de Lie. Na segunda seção introduziremos o conceito e algumas propriedades da aplicação exponencial que vai relacionar os conceitos de grupos de Lie e álgebras de Lie. Na terceira seção estudaremos as variedades homogêneas que são espaços quocientes de grupos de Lie por subgrupos fechados. Ao longo deste capítulo, as variedades diferenciáveis que aparecem serão de Hausdorff e com base enumerável. Como referência indicamos [8], [12] e [24].

1.1 Conceitos básicos

De maneira natural, começaremos definindo grupo de Lie.

Definição 1.1 *Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável G com uma estrutura de grupo, de tal modo que a aplicação*

$$(x, y) \in G \times G \longrightarrow xy^{-1} \in G$$

é diferenciável. Equivalentemente se as aplicações

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \rightarrow & G \\ (x, y) & \mapsto & x \cdot y \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & G \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

são diferenciáveis.

Em um grupo de Lie as aplicações

$$\begin{array}{ccc} L_x : G & \rightarrow & G \\ y & \mapsto & xy \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} R_x : G & \rightarrow & G \\ y & \mapsto & yx \end{array}$$

são difeomorfismos para cada $x \in G$. Estas aplicações são chamadas respectivamente de **translação à esquerda** e **translação à direita** por x .

No decorrer desse capítulo indicaremos por e o elemento identidade de G .

Vejamos alguns exemplos clássicos de grupos de Lie.

Exemplo 1.1 *O conjunto dos números reais com a operação soma e estrutura diferenciável usual é um grupo de Lie, pois as aplicações*

$$f(x, y) = x.y \quad e \quad g(x) = x^{-1}$$

são diferenciáveis, onde $x, y \in \mathbb{R}$

Exemplo 1.2 *Seja $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ com a estrutura de grupo multiplicativo. Temos que as aplicações*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \mapsto & x.y \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} - \{0\} & \rightarrow & \mathbb{C} - \{0\} \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

são diferenciáveis e suas restrições a S^1 tem imagem em S^1 . Portanto S^1 é um grupo de Lie.

Exemplo 1.3 *Sejam G e H dois grupos de Lie. O produto $G \times H$ é um grupo de Lie com a estrutura de variedade produto e com a estrutura de produto direto de grupos*

$$(g_1, h_1) \odot (g_2, h_2) = (g_1.g_2, h_1.h_2),$$

quaisquer que sejam $g_1, g_2 \in G$ e $h_1, h_2 \in H$. Consequentemente $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ e $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ são grupos de Lie.

Exemplo 1.4 *A variedade $GL(n, \mathbb{R})$ das matrizes reais $n \times n$ inversíveis, munido da multiplicação de matrizes é um grupo de Lie. Para isso devemos mostrar que as aplicações*

$$\begin{array}{l} f : GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \text{ dada por } f(A, B) = A.B \text{ e} \\ g : GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \text{ dada por } g(A) = A^{-1} \end{array}$$

*são diferenciáveis. A diferenciabilidade de f decorre da diferenciabilidade da multiplicação em \mathbb{R} . Já a diferenciabilidade de g decorre da regra de Cramer para a inversa de uma matriz. De forma análogo pode-se mostrar que $GL(n, \mathbb{C})$ admite a estrutura de grupo de Lie. Os grupos $GL(n, \mathbb{R})$ e $GL(n, \mathbb{C})$ são chamados **grupos lineares**.*

Os grupos lineares contêm os seguintes subgrupos:

$$\begin{aligned}
 U(n) &= \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : A\bar{A}^t = I\} \quad (\text{grupo unitário}) \\
 SL(n, \mathbb{C}) &= \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : \det A = 1\} \quad (\text{grupo linear especial}) \\
 O(n, \mathbb{C}) &= \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : AA^t = I\} \quad (\text{grupo ortogonal complexo}) \\
 SU(n) &= U(n) \cap SL(n) \quad (\text{grupo unitário especial}) \\
 SL(n, \mathbb{R}) &= \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\} \quad (\text{grupo linear especial real}) \\
 O(n) &= \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : AA^t = I\} \quad (\text{grupo ortogonal real}) \\
 SO(n) &= O(n) \cap SL(n, \mathbb{R}) \quad (\text{grupo ortogonal especial})
 \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $O(n)$ é um grupo de Lie. Para isso vamos mostrar primeiro que $O(n)$ é uma subvariedade de $GL(n, \mathbb{R})$. Seja $\mathfrak{s}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) : A = A^t\}$ o conjunto das matrizes reais simétricas de ordem n . Temos que $\dim \mathfrak{s}(n, \mathbb{R}) = \frac{n}{2}(n+1)$. Definimos a aplicação

$$\begin{aligned}
 f : M(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathfrak{s}(n, \mathbb{R}) \\
 A &\longmapsto A.A^t
 \end{aligned}$$

Essa aplicação está bem definida pois, dado $A \in M(n, \mathbb{R})$, temos

$$(A.A^t)^t = (A^t)^t . A^t = A.A^t,$$

ou seja, $A.A^t \in \mathfrak{s}(n, \mathbb{R})$. Além disso, f é diferenciável e

$$f^{-1}(I) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) : A.A^t = I\} = O(n).$$

Em [12] página 58 temos o seguinte resultado: “Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ de classe C^k , $k \geq 1$. Se c é um valor regular de f , então ou $f^{-1}(c)$ é vazio ou é uma superfície m -dimensional de classe C^k em \mathbb{R}^n ”.

Em nosso caso podemos escrever

$$f : M(n, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathfrak{s}(n, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)},$$

bastante provar que a matriz identidade I é valor regular de f . Se $X, Y \in M(n, \mathbb{R})$ temos que

$$\begin{aligned}
 df_X(Y) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(X + rY) - f(X)}{r} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(X + rY)(X + rY)^t - XX^t}{r} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{XX^t + rXY^t + rYX^t + r^2YY^t - XX^t}{r} \\
 &= XY^t + YX^t.
 \end{aligned}$$

Se $X \in O(n)$ e $S \in \mathfrak{s}(n, \mathbb{R})$, tomando $Y = \frac{SX}{2} \in M(n, \mathbb{R})$ temos que

$$df_X(Y) = X\left(\frac{SX}{2}\right)^t + \frac{SX}{2} \cdot X^t = \frac{S^t}{2} + \frac{S}{2} = S,$$

ou seja, df_X é sobrejetora para todo $X \in f^{-1}(I) = O(n)$. Logo I é valor regular de f e $O(n)$ é uma variedade diferenciável de classe C^∞ e dimensão $n^2 - \frac{n}{2}(n+1) = \frac{n}{2}(n-1)$. Portanto $O(n)$ é uma subvariedade de $GL(n, \mathbb{R})$. Agora tome as aplicações

$$\begin{aligned} g: O(n) \times O(n) &\longrightarrow O(n) \\ (A, B) &\longmapsto AB \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h: O(n) &\longrightarrow O(n) \\ A &\longmapsto A^{-1} \end{aligned}.$$

Como essas aplicações são também diferenciáveis concluímos que $O(n)$ é um grupo de Lie.

Definiremos agora campos invariantes pela esquerda de um grupo de Lie G . Mais adiante mostraremos que o conjunto desses campos invariantes é a álgebra de Lie associada ao grupo de Lie G .

Definição 1.2 Um *campo X de vetores tangente* a um grupo de Lie G é uma aplicação que a cada ponto $p \in G$ corresponde um vetor X_p de T_pG , onde X_p denota o valor do campo X no ponto $p \in G$. Um campo X de vetores tangentes a um grupo de Lie G se diz *invariante pela esquerda* quando $X_{xy} = dL_x(X_y)$ quaisquer que sejam $x, y \in G$. Os conjuntos dos campos invariantes pela esquerda de um grupo de Lie será denotado por LG ou por \mathfrak{g} .

Um campo invariante a esquerda fica completamente determinado quando se conhece X_e , pois $X_{xe} = dL_x(X_e)$. Temos também que LG é um espaço vetorial, pois dados $X, Y \in LG$ e α pertencente ao corpo de escalares tem-se

$$\begin{aligned} (X + \alpha Y)_{xy} &= X_{xy} + \alpha Y_{xy} \\ &= dL_x(X_y) + \alpha dL_x(Y_y) \\ &= dL_x(X_y + \alpha Y_y) \\ &= dL_x(X + \alpha Y)_y. \end{aligned}$$

Mostraremos agora que o conjunto dos campos invariantes à esquerda LG é isomorfo ao espaço tangente de G em e e que se $X \in LG$, então X é diferenciável.

Proposição 1.3 *i) A aplicação*

$$\begin{aligned}\alpha : LG &\rightarrow T_e(G) \\ X &\mapsto \alpha(X) = X_e,\end{aligned}$$

onde $T_x(G)$ indica o espaço tangente a G no ponto x , é um isomorfismo entre espaços vetoriais.

ii) Se $X \in LG$, então X é diferenciável.

Demonstração: *i)* α é claramente linear, pois

$$\alpha(X + bY) = (X + bY)_e = X_e + bY_e = \alpha(X) + b\alpha(Y).$$

Mostraremos agora que α é sobrejetora. Tome $Z \in T_e(G)$. Definamos um campo X em G por $X_x = dL_x(Z)$. Logo

$$X_{xy} = dL_{xy}(Z) = dL_x(dL_y(Z)) = dL_x(X_y).$$

Assim $X \in LG$ e

$$\alpha(X) = X_e = dL_e(Z) = I(Z) = Z.$$

Finalmente, α é injetora, pois se $\alpha(X) = \alpha(Y)$ temos $X_e = Y_e$. Logo dado $x \in G$ tem-se

$$X_x = dL_x(X_e) = dL_x(Y_e) = Y_x.$$

Portanto α é um isomorfismo entre espaços vetoriais.

ii) Como $L_{x^{-1}}$ é um difeomorfismo de classe \mathcal{C}^∞ , para mostrar que X é diferenciável em $x \in G$, basta fazer a demonstração para x em uma vizinhança coordenada de e . Tome $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma vizinhança coordenada de e , com $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ e $x \in U$. Temos

$$X_x(x^i) = (dL_x(X_e))(x^i) = X_e.(x^i \circ L_x).$$

Nesta última passagem deveríamos ter $L_x(U) \subset U$. Tomamos então $V \subset U$ uma vizinhança de e tal que $x, y \in V$ implica que $xy^{-1} \in U$, o que ocorre devido a continuidade das operações de grupo. Fazemos agora para V , o mesmo processo que para U . Seja $X_e = \sum_j c_j \frac{\partial}{\partial x^j}(e)$ onde c_j são constantes. Temos

$$X_x(x^i) = \sum_j c_j \frac{\partial(x^i \circ L_x)}{\partial x^j}(e).$$

Seja agora $f^i : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f^i(x, y) = x^i(xy)$, ou seja, $f^i(x, y)$ é a i -ésima coordenada do produto $xy = L_x(y)$. Logo

$$X_x(x^i) = \sum_j c_j \frac{\partial(x^i \circ L_x(e))}{\partial x^j} = \sum_j c_j \frac{\partial(x^i(xe))}{\partial x^j} = \sum_j c_j \frac{\partial(f^i(x, e))}{\partial x^j}.$$

Assim $X(x^i)$ é uma função diferenciável de x pois as f^i são funções diferenciáveis de x . Portanto X é diferenciável em $x \in V$. \square

Sejam M uma variedade diferenciável e $\mathfrak{X}(M)$ o espaço vetorial dos campos \mathcal{C}^∞ tangentes a M . Para $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, definimos $[X, Y]$ como o campo

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf), \quad (1.1)$$

onde Xf significa a derivada direcional de f na direção de X , isto é, $Xf(x) = df_x(X(x))$. Com esta operação $\mathfrak{X}(M)$ é uma álgebra de Lie.

Este fato auxilia na demonstração de que o conjunto dos campos invariantes à esquerda é uma álgebra de Lie.

Sejam G um grupo de Lie e LG o espaço dos campos invariantes à esquerda. Se mostrarmos que LG é fechado relativamente a operação definida em (1.1), teremos induzida uma estrutura de álgebra de Lie em LG . Para isso devemos mostrar que

$$[X, Y]_{xy} = dL_x[X, Y]_y$$

para quaisquer $X, Y \in LG$ e $x, y \in G$. Antes de mostrar este fato precisamos introduzir um novo conceito.

Definição 1.4 *Sejam M, N variedades diferenciáveis e $\varphi : M \rightarrow N$ de classe \mathcal{C}^∞ . Dizemos que os campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ são φ -relacionados se $d\varphi \circ X = Y \circ \varphi$.*

Proposição 1.5 *Seja $\varphi : M \rightarrow N$ de classe \mathcal{C}^∞ , onde M, N são variedades diferenciáveis. Se $X, X_1 \in \mathfrak{X}(M)$ são φ -relacionados respectivamente com $Y, Y_1 \in \mathfrak{X}(N)$, então $[X, X_1]$ é φ -relacionado com $[Y, Y_1]$.*

Demonstração: Vamos mostrar que $d\varphi \circ [X, X_1] = [Y, Y_1] \circ \varphi$. Sejam $m \in M$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$, onde $\mathcal{C}^\infty(N)$ indica o conjunto das funções de classe \mathcal{C}^∞ de N em \mathbb{R} . Mostraremos que

$$d\varphi([X, X_1]_m)(f) = [Y, Y_1]_{\varphi(m)}(f).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
d\varphi([X, X_1]_m)(f) &= [X, X_1]_m(f \circ \varphi) \\
&= X_m(X_1(f \circ \varphi)) - X_1|_m(X(f \circ \varphi)) \\
&= X_m((d\varphi \circ X_1)(f)) - X_1|_m((d\varphi \circ X)(f)) \\
&= X_m(Y_1(f) \circ \varphi) - X_1|_m(Y(f) \circ \varphi) \\
&= d\varphi(X_m)(Y_1(f)) - d\varphi(X_1|_m)(Y(f)) \\
&= Y_{\varphi(m)}(Y_1(f)) - Y_1|_{\varphi(m)}(Y(f)) \\
&= [Y, Y_1]_{\varphi(m)}(f).
\end{aligned}$$

Portanto $[X, X_1]$ é φ -relacionado com $[Y, Y_1]$. □

Finalmente, o próximo resultado mostra que o conjunto dos campos invariantes a esquerda LG , é uma álgebra de Lie. Essa álgebra de Lie é denominada álgebra de Lie associada ao grupo de Lie G .

Corolário 1.6 *Se $X, Y \in LG$, então $[X, Y] \in LG$, ou seja, LG é uma álgebra de Lie.*

Demonstração: Tome $X \in LG$ e $x \in G$. Então X é L_x -relacionado com si mesmo. De fato

$$\begin{aligned}
dL_x \circ X(y) &= dL_x(X_y) = X_{xy} \\
X \circ L_x(y) &= X(xy) = X_{xy},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$dL_x \circ X = X \circ L_x.$$

Assim, pela proposição anterior temos que $[X, Y]$ é L_x -relacionado com $[X, Y]$, ou seja

$$dL_x[X, Y](y) = [X, Y] \circ L_x(y).$$

Isso implica que

$$dL_x[X, Y]_y = [X, Y](xy) = [X, Y]_{xy}.$$

Portanto, $[X, Y] \in LG$, e assim LG é uma álgebra de Lie. □

Definição 1.7 Se G e H são grupos de Lie e se $\varphi : G \rightarrow H$ é C^∞ e também homomorfismo de grupos, chamamos φ de **homomorfismo de Lie**. Se φ é difeomorfismo e um isomorfismo de grupos, então φ é chamado **isomorfismo de Lie**. Se $\varphi : V \subset G \rightarrow H$ é diferenciável, onde V é uma vizinhança em G tal que $x, y, x.y \in V$ implica $\varphi(x.y) = \varphi(x).\varphi(y)$, então φ é chamado de **homomorfismo local de Lie**. Analogamente, definimos **isomorfismo local de Lie**.

Definiremos agora o conceito de subgrupos de Lie.

Definição 1.8 Um par (H, φ) é chamado **subgrupo de Lie** do grupo de Lie G , se

- i) H é um grupo de Lie.
- ii) $\varphi : H \rightarrow G$ é uma imersão injetora e é um homomorfismo.

Os subgrupos de Lie são grupos de Lie com uma estrutura de subvariedade. A álgebra de Lie LH de um subgrupo de Lie H de G é uma subálgebra da álgebra de Lie LG do grupo de Lie G e coincide com o espaço tangente da subvariedade no elemento neutro. A partir de agora, denotaremos LG e LH respectivamente por \mathfrak{g} e \mathfrak{h} .

Seja (H, φ) um subgrupo de Lie de um grupo de Lie G . Sejam \mathfrak{h} e \mathfrak{g} as respectivas álgebras de Lie de H e G . Segue diretamente do próximo lema que \mathfrak{h} é subálgebra de Lie de \mathfrak{g} .

Lema 1.9 Sejam G e H grupos de Lie e $\varphi : V \rightarrow H$ um homomorfismo local de Lie, onde $V \subset G$ é vizinhança da identidade. Então, a aplicação $d\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ induzida por $d\varphi : T_e(G) \rightarrow T_e(H)$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Demonstração: Como G é um grupo de Lie, o produto em G é contínuo. Logo existe uma vizinhança da identidade $U \subset V$ tal que para todo $x, y \in U$ tem-se $x.y \in V$. Assim para todo $x, y \in V$ temos

$$(L_{\varphi(x)} \circ \varphi)(y) = (\varphi \circ L_x)(y).$$

Daí temos que

$$\begin{aligned} d\varphi(X)_{\varphi(x)} &= dL_{\varphi(x)} \circ d\varphi(X_e) \\ &= d(L_{\varphi(x)} \circ \varphi)(X_e) \\ &= d(\varphi \circ L_x)(X_e) \\ &= d\varphi \circ dL_x(X_e) \\ &= d\varphi(X_x), \end{aligned}$$

para todo $x \in G$ e todo $X \in \mathfrak{g}$. Logo X e $d\varphi(X)$ são φ -relacionados em U . Assim da Proposição 1.5, dados $X, Y \in \mathfrak{g}$ temos

$$d\varphi([X, Y])_e = [d\varphi(X), d\varphi(Y)]_{\varphi(e)}.$$

Portanto $d\varphi$ é um homomorfismo de Lie. □

Como consequência direta desse resultado temos os seguintes corolários:

Corolário 1.10 *Grupos de Lie localmente isomorfos tem álgebras de Lie isomorfas.*

Corolário 1.11 *Se (H, φ) é um subgrupo de Lie de um grupo de Lie G , com álgebra de Lie \mathfrak{h} e \mathfrak{g} é álgebra de Lie de G , então \mathfrak{h} é isomorfa a uma subálgebra de Lie de \mathfrak{g} .*

O objetivo agora é estudar a recíproca desse corolário, ou seja, dada uma subálgebra de Lie $\tilde{\mathfrak{h}}$ da álgebra de Lie \mathfrak{g} de um grupo de Lie G , existe um subgrupo de Lie (H, φ) de G tal que \mathfrak{h} é isomorfo a $\tilde{\mathfrak{h}}$. Antes introduziremos alguns conceitos novos.

Definição 1.12 *Sejam (H_1, φ_1) e (H_2, φ_2) subgrupos de Lie do grupo de Lie G . Dizemos que (H_1, φ_1) é **equivalente a** (H_2, φ_2) se, e somente se, existe um isomorfismo de Lie $\varphi : H_1 \rightarrow H_2$ tal que $\varphi_2 \circ \varphi = \varphi_1$, ou seja, o diagrama abaixo comuta.*

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ \varphi_1 \nearrow & & \nwarrow \varphi_2 \\ H_1 & \xrightarrow{\varphi} & H_2 \end{array}$$

Cada classe de equivalência desta relação possui um representante em G , que chamaremos de (H, i) , onde $i : H \rightarrow G$ é a inclusão.

No decorrer do texto quando mencionado a unicidade de subgrupos de Lie, estaremos nos referindo a estas classes de equivalência acima.

Definição 1.13 *Seja M uma variedade diferenciável n -dimensional. Uma **distribuição k -dimensional em M** é uma escolha que associa a cada $m \in M$ um subespaço k -dimensional de $T_m(M)$. Diremos que a distribuição é diferenciável quando para cada $m \in M$ existe uma vizinhança V de m onde se definem k campos de vetores diferenciáveis que geram a distribuição.*

Se \mathfrak{D} é uma distribuição e se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é tal que para todo $x \in M$ tivermos $X_x \in \mathfrak{D}(x)$, diremos que $X \in \mathfrak{D}$, onde $\mathfrak{D}(x)$ indica o subespaço de $T_x(M)$ determinado por \mathfrak{D} .

Definição 1.14 Dizemos que uma distribuição é **involutiva** se, e somente se, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{D}$ tivermos $[X, Y] \in \mathfrak{D}$.

Definição 1.15 Uma **variedade integral para \mathfrak{D}** é qualquer subvariedade imersa $N \subset M$ tal que $T_x(N) \subset \mathfrak{D}(x)$, para todo $x \in N$. Diremos que \mathfrak{D} é **integrável** se por cada $x \in M$ passa uma variedade integral de \mathfrak{D} .

O próximo resultado fornece uma condição suficiente para que uma distribuição diferenciável seja integrável. Esse resultado é o conhecido Teorema de Frobenius, que será apenas enunciado. Para uma demonstração deste teorema veja o capítulo 1 de [24].

Teorema 1.16 (de Frobenius) *Seja \mathfrak{D} uma distribuição k -dimensional, involutiva e C^∞ em M . Então existe uma variedade integral de \mathfrak{D} passando por m , para todo $m \in M$. Melhor dizendo, existe um sistema cúbico de coordenadas (U, φ) que está centrado em m , com funções coordenadas x_1, \dots, x_n tal que as fatias x_i , que são constantes, com $i \in \{k+1, \dots, n\}$ são variedades integrais de \mathfrak{D} . Se (N, ψ) é uma variedade integral conexa de \mathfrak{D} tal que $\psi(N) \subset U$, então $\psi(N)$ está contida em uma dessas fatias.*

Demonstração: Veja Teorema 1.6 em [24]. □

O Teorema de Frobenius possui carácter local, no sentido que a existência de variedades integrais para \mathfrak{D} é garantida nas vizinhanças de qualquer ponto de M .

Para uma globalização desse teorema, temos o seguinte resultado, cuja demonstração também pode ser encontrada no capítulo 1 de [24].

Teorema 1.17 (de Frobenius global) *Se \mathfrak{D} é uma distribuição k -dimensional, involutiva e C^∞ em M , então por todo ponto $m \in M$ passa uma única variedade integral conexa maximal de \mathfrak{D} .*

Demonstração: Veja Teorema 1.64 em [24]. □

Para demonstrar o próximo resultado, usaremos o Teorema da forma local para imersões em variedades, que pode ser encontrado em [12], capítulo 6, Proposição 1.

Lema 1.18 *Sejam M, N e P variedades diferenciáveis. Sejam ainda $\psi : M \rightarrow N$ de classe \mathcal{C}^∞ e $\varphi : P \rightarrow N$ uma imersão injetora \mathcal{C}^∞ , com $\psi(M) \subset \varphi(P)$. Se $\xi : M \rightarrow P$ é a única aplicação tal que $\varphi\xi = \psi$, então ξ é \mathcal{C}^∞ se, e só se, for contínua.*

Demonstração: Suponhamos sem perda de generalidade que $P = \mathbb{R}^p$ e $N = \mathbb{R}^n$. Dado $m \in M$ temos que $\xi(m) \in P$. Como φ é uma imersão temos que $\psi(m)$ é valor regular de $\varphi : P \rightarrow N$. Logo, pelo Teorema da forma local para imersões em variedades, existe um sistema de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ em P com $\xi(m) \in U$ e um difeomorfismo de classe \mathcal{C}^∞ , $y : V \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ ($V \subset N$ aberto) tal que $\varphi(U) \subset V$ e

$$\varphi_{xy} = y \circ \varphi \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$$

é da forma $\varphi_{xy}(W) = (W, 0)$. Como ξ é contínua, podemos encontrar um sistema de coordenadas $z : Z \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M com $m \in Z$ tal que $\xi(Z) \subset U$. Logo,

$$(\varphi \circ \xi)_{zy} = y \circ \varphi \circ \xi \circ z^{-1} : z(Z) \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$$

é da forma

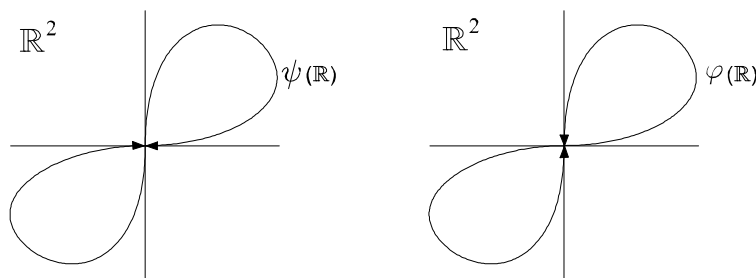
$$(\varphi \circ \xi)_{zy} = \varphi_{xy}(\xi_{zx}) = (\xi_{zx}, 0).$$

Como $\varphi \circ \xi \in \mathcal{C}^\infty$, temos que $(\varphi \circ \xi)_{zy} \in \mathcal{C}^\infty$ e assim $\xi_{zx} \in \mathcal{C}^\infty$. Portanto, $\xi \in \mathcal{C}^\infty$.

A recíproca é imediata. □

Vejamos um exemplo onde esse lema não se aplica.

Exemplo 1.5 *Sejam $M = P = \mathbb{R}$ e $N = \mathbb{R}^2$. Tome $\psi, \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dadas nos gráficos abaixo, tal que quando t tende a $\pm\infty$ tem-se que $\psi(t)$ tende a 0 ao longo do eixo horizontal e $\varphi(t)$ tende a 0 ao longo do eixo vertical. Suponhamos que $\varphi(0) = \psi(0) = 0$.*



Temos que φ e ψ possuem exatamente a mesma imagem. Tome ξ a única aplicação tal que $\varphi\xi = \psi$. Assim $\xi = \varphi^{-1} \circ \psi$. Temos que ξ não é contínua, pois

$$\xi^{-1}(-1, 1) = \psi^{-1} \circ \varphi(-1, 1)$$

é a união da origem e de dois conjuntos abertos da forma (a, ∞) e $(-\infty, -a)$, ou seja, a imagem inversa de aberto não é aberto.

Vamos mostrar agora que todo grupo de Lie é gerado por uma vizinhança da identidade.

Lema 1.19 *Seja G um grupo de Lie conexo e U uma vizinhança da identidade e . Então $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$, onde U^n consiste de todos os produtos de n fatores de U .*

Demonstração: Seja $V = U \cap U^{-1}$. Logo V também é uma vizinhança de e . É claro que $V^{-1} = V$. Seja

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n \subset G,$$

onde $V^{n+1} = \bigcup_{x \in V} xV^n$. É imediato que H é subgrupo de G e é aberto. Assim o conjunto gH , chamado de classe lateral à esquerda de H em G , determinada por g , é aberto para todo $g \in G$. Por outro lado,

$$G = \bigcup_{g \in G} gH = H \dot{\cup} \left(\bigcup_{g \notin H} gH \right).$$

Assim $H = G - \bigcup_{g \notin H} gH$. Portanto H é fechado em G . Logo H é fechado e aberto em G . Como G é conexo temos que $G = H$. Portanto

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n.$$

□

Agora podemos mostrar a recíproca do Corolário 1.11.

Teorema 1.20 *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Seja $\tilde{\mathfrak{g}}$ subálgebra de Lie de \mathfrak{g} . Então existe um único subgrupo de Lie conexo $(H, \varphi) \subset G$, onde φ é a inclusão, com álgebra de Lie \mathfrak{h} de modo que $d\varphi(\mathfrak{h}) = \tilde{\mathfrak{g}}$.*

Demonstração: Primeiramente vamos mostrar a existência do subgrupo de Lie conexo H de G . Definamos uma distribuição \mathfrak{D} em G da seguinte forma

$$\mathfrak{D}(x) = \{X_x; X \in \tilde{\mathfrak{g}}\}.$$

Mostraremos que \mathfrak{D} é involutiva. Assim a variedade integral conexa maximal de \mathfrak{D} passando por e , dada pelo Teorema 1.17 será um candidato a ser o subgrupo (H, φ) , que estamos procurando. Aqui φ é a aplicação inclusão.

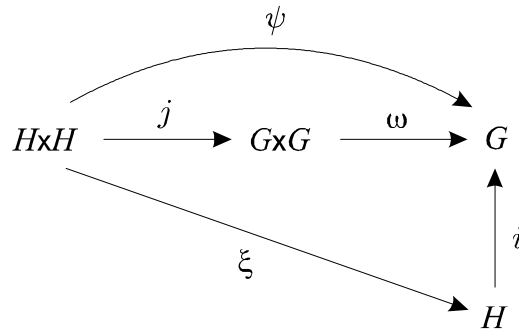
Afirmamos que \mathfrak{D} é involutiva. De fato, tome $X, Y \in \mathfrak{D}$, assim $X, Y \in \tilde{\mathfrak{g}}$. Como $\tilde{\mathfrak{g}}$ é fechado para o colchete $[\cdot, \cdot]$, temos que $[X, Y] \in \tilde{\mathfrak{g}}$. Pela definição de \mathfrak{D} temos que $[X, Y]_x \in \mathfrak{D}(x)$ para todo $x \in G$. Logo $[X, Y] \in \mathfrak{D}$. Assim a dimensão de \mathfrak{D} é igual a dimensão de $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Temos que a variedade integral conexa maximal de \mathfrak{D} passando por e é um subgrupo de G . De fato, seja H tal variedade e seja $x \in H$. Então

$$L_{x^{-1}}(H) = \{x^{-1}h; h \in H\}$$

é também subvariedade integral de \mathfrak{D} passando por e , pois \mathfrak{D} é invariante por translações à esquerda. Como H é uma variedade integral conexa maximal temos que $x^{-1}H \subset H$. Portanto H é um subgrupo de G .

Resta mostrarmos que a estrutura de grupo induzida por G em H , é compatível com a estrutura diferenciável de H como variedade integral de \mathfrak{D} . Sejam ω e ξ os produtos de G e H respectivamente, e i e j as inclusões $H \subset G$ e $H \times H \subset G \times G$. Denotemos $\omega \circ j = \psi$. Temos que i é uma imersão injetora e que $i \circ \xi = \psi$ é \mathcal{C}^∞ .



Para mostrar que ξ é \mathcal{C}^∞ , pelas considerações acima e pelo Lema 1.18, devemos mostrar apenas que ξ é contínua. Como se trata de um problema local, podemos supor que $G = \mathbb{R}^n$, onde n é a dimensão de G . Seja $h \in H^k$, onde k é a dimensão de H e $m \in \xi^{-1}(h)$. Em torno de h tome uma fatia V , também contida numa vizinhança U de $i(h)$ em G , dada pelo Teorema 1.16. Pelo teorema da forma local das imersões temos que $i(H)$ intercepta U numa certa quantidade de componentes conexas abertas, cada uma numa fatia de U . Como H possui base enumerável, essa quantidade é enumerável. Diante disso, mostraremos que ξ é contínua.

Como ψ é contínua, existe um aberto $W \subset H \times H$ tal que $m \in W$ e $\psi(W) \subset U$. Tomemos a componente conexa de m neste aberto, a qual será um aberto, que ainda chamaremos de W . Assim temos que $\xi(W) \subset V$. De fato, $\psi(W)$ é conexo e está contido numa quantidade enumerável de fatias. Consideramos a projeção

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \\ (u, v) &\mapsto u. \end{aligned}$$

Temos que o conjunto $\pi \circ \psi(W)$ reduz-se a um ponto, pois este conjunto é conexo e enumerável. Logo, $\psi(W)$ está contido em uma única fatia de U , a qual deve ser V , pois $h \in V$. Portanto ξ é contínua.

Assim, concluímos que o produto induzido em H por G é compatível com a estrutura de variedade de H , de modo que H é um grupo de Lie, e assim um subgrupo de Lie de G . Vamos mostrar agora, a unicidade do subgrupo de Lie conexo H de G .

Suponhamos que (K, α) seja um outro subgrupo de Lie conexo de G , com $d\alpha(\mathfrak{k}) = \tilde{\mathfrak{g}}$, onde \mathfrak{k} é a álgebra de Lie de K . Por definição, (K, α) é uma variedade integral de \mathfrak{D} definida na demonstração da existência. Do fato de (H, i) ser maximal, segue que $\alpha(K) \subset i(H)$. Portanto existe uma única aplicação $\eta : K \rightarrow H$ tal que $i \circ \eta = \alpha$. Claramente, η é diferenciável e assim um homomorfismo de Lie injetor. Temos ainda que η não é singular, e assim é um difeomorfismo numa vizinhança de e . Pelo Lema 1.19 concluímos que η é sobrejetora. Portanto, η é um isomorfismo entre grupos de Lie e isto prova a unicidade de H . \square

É imediato desse teorema que:

Corolário 1.21 *Existe uma correspondência bijetora entre subgrupos de Lie conexos de um grupo de Lie e as subálgebras da sua álgebra de Lie.*

Proposição 1.22 *Sejam G e H grupos de Lie com as respectivas álgebras de Lie \mathfrak{g} e \mathfrak{h} . Se $\Gamma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um homomorfismo, então existe uma vizinhança V de e em G e uma aplicação diferenciável $\varphi : V \rightarrow H$ tal que $\varphi(a.b) = \varphi(a).\varphi(b)$ sempre que $a, b, a.b \in V$ e tal que para todo $X \in \mathfrak{g}$ tem-se que $d\varphi(X) = \Gamma(X)$. Além disso, se existirem dois homomorfismos diferenciáveis $\varphi, \psi : G \rightarrow H$ com $d\varphi = d\psi = \Gamma$ e se G for conexo, então temos que $\varphi = \psi$.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ a álgebra de Lie de $G \times H$ e

$$\mathfrak{k} = \{(X, \Gamma(X)); X \in \mathfrak{g}\} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}.$$

Temos que \mathfrak{k} é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$. De fato, tome $(X, \Gamma(X))$ e $(Y, \Gamma(Y))$ em \mathfrak{k} . Logo

$$[(X, \Gamma(X)), (Y, \Gamma(Y))] = ([X, Y], [\Gamma(X), \Gamma(Y)]) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}.$$

Portanto \mathfrak{k} é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$.

Pelo Teorema 1.20, existe um único subgrupo de Lie conexo $K \subset G \times H$ com álgebra de Lie igual a \mathfrak{k} . Tome a projeção

$$\begin{aligned} \pi_1 : G \times H &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto g \end{aligned}$$

e definamos $\theta = \pi_1|_K$. Então, se $(X_e, \Gamma(X)_e) \in T_e(K)$ temos que

$$d\theta_{(e,e)}(X_e, \Gamma(X)_e) = X_e \in T_e(G).$$

Portanto, $d\theta(X, \Gamma(X)) = X \in \mathfrak{g}$, onde $d\theta : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{g}$ é definido como no Lema 1.9. Assim, temos que $d\theta_{(e,e)}$ é um isomorfismo e então existe uma vizinhança aberta W de (e, e) em K tal que θ leva W difeomorficamente sobre V , com $e \in V \subset G$. Agora, tome

$$\begin{aligned} \pi_2 : G \times H &\rightarrow H \\ (g, h) &\mapsto h. \end{aligned}$$

Logo a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : V &\longrightarrow H \\ x &\longmapsto \pi_2 \circ \theta^{-1}(x) \end{aligned}$$

é diferenciável, $\theta^{-1}(x) = (x, \varphi(x))$ e

$$W = \{(x, \varphi(x)); x \in V\}.$$

Desse modo, tomando, $a, b, ab \in V$, temos que

$$\begin{aligned} \varphi(ab) &= \pi_2 \circ \theta^{-1}(ab) \\ &= \pi_2(ab, \varphi(a)\varphi(b)) \\ &= \varphi(a)\varphi(b). \end{aligned}$$

Definindo $d\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ por $d\varphi(X)_e = d\varphi_e(X_e)$, temos

$$d\varphi_e(X_e) = d\pi_2 \circ d\theta_e^{-1}(X_e) = d\pi_2(X_e, \Gamma(X)_e).$$

Logo

$$\Gamma(X)_e = d\varphi(X)_e$$

e da unicidade temos $\Gamma(X) = d\varphi(X)$. Portanto, demonstramos a existência de φ .

Para mostrar a unicidade tome $\varphi, \psi : G \rightarrow H$ satisfazendo as condições acima. Defina as imersões injetoras, $\phi, \mu : G \rightarrow G \times H$ por

$$\phi(x) = (x, \varphi(x)) \quad \text{e} \quad \mu(x) = (x, \psi(x)).$$

Como G é conexo, as imagens $\phi(G) = K$ e $\mu(G) = L$ são subgrupos de Lie conexos de $G \times H$ com álgebras de Lie \mathfrak{k} e \mathfrak{l} respectivamente. Temos que as aplicações

$$d\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{k} \quad \text{e} \quad d\mu : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{l}$$

são isomorfismos. Sabendo que $d\varphi = d\psi$, concluímos que $d\phi = d\mu$. Logo $\mathfrak{k} = \mathfrak{l}$. Daí, $K = L$ pois K e L são grupos de Lie conexos associados à mesma álgebra de Lie. Assim $(x, \varphi(x)) = (x, \psi(x))$ para todo $x \in G$. Portanto $\varphi = \psi$. \square

Corolário 1.23 *Se dois grupos de Lie possuem álgebras de Lie isomorfas, então eles são localmente isomorfos.*

Demonstração: Seja Γ o isomorfismo entre as álgebras de Lie. Para demonstrar o corolário, basta aplicar o teorema acima para Γ e Γ^{-1} . \square

Para finalizar iremos enunciar o conhecido Teorema de Ado, porém não convém demonstra-lo aqui. Uma demonstração para esse teorema pode ser encontrada na seção 7 de [2]. Este teorema nos permite ter uma visão mais geral de uma álgebra de Lie.

Teorema 1.24 (de Ado) *Toda álgebra de Lie é isomorfa a uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.*

Segue diretamente do Teorema de Ado e do Corolário 1.23 que todo grupo de Lie é localmente isomorfo a um subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$.

1.2 Aplicação exponencial

A aplicação exponencial é uma ferramenta muito importante que nos permite estabelecer um vínculo entre os grupos de Lie e suas respectivas álgebras de Lie. Com essa ferramenta podemos transportar algumas propriedades das álgebras de Lie para os grupos

de Lie. Nesta seção apresentaremos algumas propriedades e resultados importantes sobre a aplicação exponencial. Estas propriedades nos permitem provar o teorema de Cartan que mostra que todo subgrupo fechado de um grupo de Lie é um grupo de Lie. No final da seção mostraremos algumas propriedades da representação adjunta.

Seja \mathfrak{g} a álgebra de Lie associada ao grupo de Lie G e tome $X \in \mathfrak{g}$. Sabemos da teoria das equações diferenciáveis ordinárias, que dado $x \in G$, existem abertos $U \subset G$ e $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ com $x \in U$ e $\varepsilon > 0$ e uma aplicação diferenciável $\varphi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ tal que para todo y em U tem-se

$$\varphi(y, 0) = y \quad \text{e} \quad \frac{d\varphi}{dt}(y, t) = X_{\varphi(y, t)}.$$

A aplicação φ é chamada **fluxo local do campo** X . Agora, tomaremos $x = e$ e adotaremos a notação $\varphi(e, t) = \varphi(t) = \varphi_t$ para trajetória única de X em e . Com essas notações temos o seguinte resultado:

Proposição 1.25 *Num grupo de Lie G , φ_t é definido para todo $t \in \mathbb{R}$ e a aplicação $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$ assim definida é um subgrupo de Lie.*

Demonstração: Devemos mostrar que $(\varphi(\mathbb{R}), i)$ é um subgrupo de Lie de G . Claramente temos que $i : \varphi(\mathbb{R}) \rightarrow G$ é uma imersão injetora e é um homomorfismo. Agora resta mostrar que $\varphi(\mathbb{R})$ é grupo de Lie, ou seja, dados $\varphi_t, \varphi_s \in \varphi(\mathbb{R})$ tem-se que $\varphi_t \cdot \varphi_s$ e φ_t^{-1} são diferenciáveis em $\varphi(\mathbb{R})$.

Tome $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Seja $\varphi_{t_0} = z$ e defina $\bar{\varphi}_t = z^{-1} \circ \varphi_t$. Logo $\bar{\varphi}_{t_0} = e$. Como $X \in \mathfrak{g}$, temos

$$X_{\bar{\varphi}_t} = X_{z^{-1} \circ \varphi_t} = dL_{z^{-1}} \circ X_{\varphi_t} = dL_{z^{-1}} \circ d\varphi_t = \frac{d\bar{\varphi}_t}{dt}.$$

Logo $\bar{\varphi}_t$ é uma solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= X_x \\ x(t_0) &= e. \end{cases} \quad (1.2)$$

Suponhamos que $t_0 > 0$. Claramente temos que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \psi : & (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) & \longrightarrow & G \\ & t & \longmapsto & \varphi_{t-t_0} \end{array}$$

também é uma solução de 1.2. Logo, como o sistema possui solução única, segue que $\bar{\varphi}_t = \varphi_{t-t_0}$ pode ser estendida a $(-\varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ e conseqüentemente $\varphi_t = \varphi_{t_0} \circ \bar{\varphi}_t$ pode ser

estendida a $(-\varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, logo a todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, temos que para todo $t \in \mathbb{R}$

$$(\varphi_{t_0})^{-1}\varphi_t = \varphi_{t-t_0}.$$

Logo

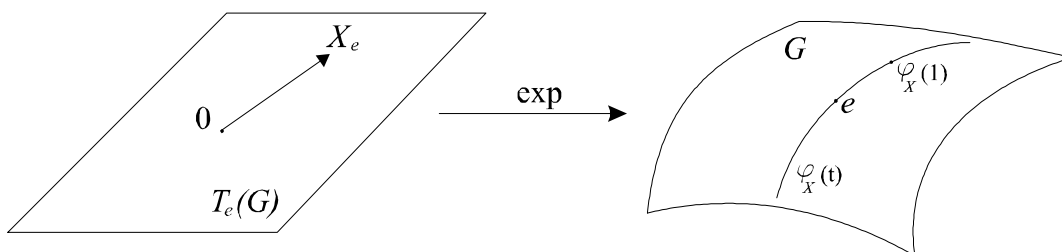
$$\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t} \text{ e } \varphi_{t+s} = \varphi_t \cdot \varphi_s.$$

Como o fluxo φ é diferenciável, segue o desejado. \square

Agora introduziremos o conceito de aplicação exponencial.

Definição 1.26 *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Tome $X \in \mathfrak{g}$. Se indicarmos por φ_X a trajetória de X pela origem e , então definiremos a **aplicação exponencial de G** , por*

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} \approx T_e G &\rightarrow G \\ X &\mapsto \varphi_X(1). \end{aligned}$$



Antes de apresentarmos algumas propriedades da aplicação exponencial, mostraremos que $\varphi_{sX}(t) = \varphi_X(st)$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$. De fato, se $\psi(t) = \varphi_X(st)$ teremos que $\psi(0) = \varphi_X(0) = e$ e ainda,

$$\frac{d\psi}{dt}(t) = s \frac{d\varphi_X}{dt}(st) = sX_{\varphi_X(st)} = sX_{\psi(t)}.$$

Logo, ψ é solução da equação diferencial ordinária

$$\begin{cases} x(0) = e \\ \frac{dx}{dt} = sX_{X(t)} \end{cases}.$$

Portanto como φ_{sX} também é solução do sistema, temos que $\psi = \varphi_{sX}$.

Apresentaremos agora algumas propriedades da aplicação exponencial. Essas propriedades serão essenciais para a demonstrações de alguns resultados.

Proposição 1.27 *Sejam $s, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathfrak{g}$, onde \mathfrak{g} é a álgebra de Lie do Grupo de Lie G . A aplicação exponencial satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) $\exp(t_1 + t_2)X = (\exp t_1 X)(\exp t_2 X)$.
- (ii) $\exp(-sX) = (\exp sX)^{-1}$.
- (iii) \exp é diferenciável.
- (iv) \exp é um difeomorfismo numa vizinhança de e .

Demonstração: (i) Temos que

$$\begin{aligned}\exp(t_1 + t_2)X &= \varphi_{(t_1+t_2)X}(1, e) = \varphi_X(t_1 + t_2, e) = \varphi_X(t_1, \varphi_X(t_2, e)) \\ (\exp t_1 X)(\exp t_2 X) &= \varphi_{t_1 X}(1, e)\varphi_{t_2 X}(1, e) = \varphi_X(t_1, e)\varphi_X(t_2, e).\end{aligned}$$

Agora, definamos as curvas

$$\psi_1(t) = \varphi_X(t_1, e)\varphi_X(t, e) \quad \text{e} \quad \psi_2(t) = \varphi_X(t_1, \varphi_X(t, e)).$$

Devemos mostrar que $\psi_1(t) = \psi_2(t)$. Como X é invariante à esquerda, pois $X \in \mathfrak{g}$, temos que ψ_1 e ψ_2 são soluções de

$$\begin{cases} x(0) &= e \\ \frac{dx}{dt} &= X_{X(t)} \end{cases}.$$

Logo $\psi_1(t) = \psi_2(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pois o sistema acima tem solução única. Portanto $\exp(t_1 + t_2)X = (\exp t_1 X)(\exp t_2 X)$.

(ii) Temos que

$$e = \exp 0 = \exp(s - s)X = (\exp sX)(\exp(-sX)).$$

Logo $\exp(-sX) = (\exp sX)^{-1}$.

(iii) Considere o campo vetorial

$$\begin{aligned}V : G \times \mathfrak{g} &\rightarrow TG \times \mathfrak{g} \\ (y, X) &\mapsto (X_y, 0)\end{aligned}$$

onde TG é o fibrado tangente de G . A trajetória ψ de V por $(e, X) \in G \times \mathfrak{g}$ é dada por

$$\psi(t, X) = (\varphi_X(t), X) = (\exp tX, X)$$

pois $\psi'(t) = (X_{\varphi_X(t)}, 0) = V(\varphi_X(t), X)$. Tomando agora a projeção

$$\begin{aligned}\pi_1 : G \times \mathfrak{g} &\rightarrow G \\ (x, X) &\mapsto x\end{aligned}$$

a aplicação

$$\begin{aligned} \text{Exp} : \mathbb{R} \times \mathfrak{g} &\rightarrow G \\ (t, X) &\mapsto \exp tX \end{aligned}$$

pode ser expressa como a composta das aplicações ψ e π_1 . Temos que Exp é diferenciável pois o fluxo ψ e π_1 são diferenciáveis. Portanto \exp é diferenciável em \mathfrak{g} .

(iv) Seja $X \in \mathfrak{g}$ e $\gamma(t) = tX$. Temos que $\gamma(0) = 0$ e $\frac{d\gamma}{dt}(0) = X$. Logo

$$(d\exp)_0 X = (d\exp)_0 \frac{d\gamma}{dt}(0) = \frac{d(\exp tX)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d\varphi_X(t)}{dt} \Big|_{t=0} = X_{\varphi_X(0)} = X_e.$$

Então $(d\exp)_0 X = X$, ou seja, $(d\exp)_0$ é não singular. Portanto, pelo teorema da função inversa, \exp é um difeomorfismo local. \square

Sabemos que todo homomorfismo contínuo $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável. Queremos mostrar agora, que todo homomorfismo contínuo entre grupos de Lie é diferenciável. Para isso precisaremos do seguinte lema.

Lema 1.28 *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Se $\{X_1, \dots, X_n\}$ é uma base de \mathfrak{g} , então a aplicação*

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^n &\rightarrow G \\ (t_1, \dots, t_n) &\mapsto (\exp t_1 X_1) \cdots (\exp t_n X_n). \end{aligned}$$

é diferenciável e é não singular em $0 \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Como \exp é diferenciável, é fácil ver que ψ é diferenciável. Tome $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Logo

$$\psi(t) = R_{a_i} \circ L_{b_i} \circ \exp t_i X_i,$$

onde

$$a_i = \exp(t_{i+1} X_{i+1}) \cdots (\exp t_n X_n) \text{ e}$$

$$b_i = (\exp t_1 X_1) \cdots \exp(t_{i-1} X_{i-1})$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Temos ainda que

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_i}(t) = dR_{a_i} \circ dL_{b_i} \circ \frac{d(\exp t_i X_i)}{dt_i}.$$

Logo

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_i}(t) \Big|_{t=0} = dR_e \circ dL_e \circ X_i \Big|_e = X_i \Big|_e.$$

Assim, $d\psi_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow T_e G$ tem por matriz jacobiana $(X_1 |_e \cdots X_n |_e)$ onde os $X_i |_e$ denotam os vetores colunas da matriz. Portanto $d\psi_0$ é não singular. \square

Um outro resultado que precisamos para mostrar que todo homomorfismo contínuo entre grupos de Lie é diferenciável é o seguinte teorema:

Teorema 1.29 *Seja G um grupo de Lie. Se $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$ é um homomorfismo contínuo, então φ é diferenciável.*

Demonstração: Vamos mostrar que φ é diferenciável numa vizinhança de $0 \in \mathbb{R}$. Isso é suficiente para demonstrar o teorema.

Seja $V \subset G$ uma vizinhança de $e \in G$. Essa vizinhança é difeomorfa a uma vizinhança de zero $U \subset \mathfrak{g}$ através da aplicação exponencial. Aqui \mathfrak{g} denota a álgebra de Lie de G . Suponhamos que U é estrelado, ou seja, se $X \in U$, então $tX \in U$ para todo $t \in [0, 1]$. Seja agora

$$U' = \{\frac{1}{2}X; X \in U\} \subset U.$$

Tome $t_0 \geq 0$ suficientemente pequeno para que $|t| \leq t_0$ implique que $\varphi(t) \in \exp U'$. Assim, dado qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos que $\varphi(\frac{t_0}{n}) \in \exp U'$. Assim temos X e Y em U' tais que

$$\exp X = \varphi(\frac{t_0}{n}) \quad \text{e} \quad \exp Y = \varphi(t_0).$$

Logo

$$\exp(X)^n = \exp X \dots \exp X = \exp(nX).$$

Como $\exp(X)^n = \varphi(t_0)$, temos

$$\exp(nX) = \varphi(t_0) = \exp(Y).$$

Vamos provar que $nX = Y$. Para isso basta mostrarmos que $nX \in U'$. Faremos isso por indução.

Suponha que $jX \in U'$ para todo $j = 1, \dots, n-1$. Então para $j = 1$ o resultado é óbvio. Para $j > 1$, temos que $2jX \in U$ e como U é estrelado, tem-se que

$$(1+j)X = (\frac{j+1}{2j})2jX \in U.$$

Porém,

$$\exp(j+1)X = \varphi((j+1)\frac{t_0}{n}).$$

Como $\frac{j+1}{n}t_0 \leq t_0$, temos que

$$\exp(j+1)X \in \exp U'.$$

Logo pela hipótese de indução temos que $nX \in U'$ e portanto $nX = Y$. Seja agora $m \in \mathbb{Z}$, com $0 < |m| < n$. Caso $m > 0$ tem-se que

$$\varphi\left(\frac{m}{n}t_0\right) = \left(\varphi\left(\frac{t_0}{n}\right)\right)^m = (\exp X)^m = \exp\left(\frac{Y}{n}\right)^m = \exp\left(\frac{m}{n}Y\right).$$

Por outro lado se $m < 0$, tem-se que

$$\varphi\left(\frac{m}{n}t_0\right) = \left(\varphi\left(-\frac{m}{n}t_0\right)\right)^{-1} = \left(\exp\left(-\frac{m}{n}Y\right)\right)^{-1} = \exp\left(\frac{m}{n}Y\right).$$

Como φ é contínua, temos que para todo $r \in \mathbb{R}$ com $0 < |r| \leq 1$

$$\varphi(rt_0) = \exp\left(rt_0 \frac{Y}{t_0}\right) = \exp rY.$$

Temos que para todo $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| \leq t_0$, existe $r \in \mathbb{R}$ com $0 < |r| \leq 1$ tal que $t = rt_0$.

Logo

$$\varphi(t) = \exp\left(rt_0 \frac{Y}{t_0}\right) = \exp rY = \exp\left(\frac{t}{t_0}Y\right).$$

Portanto φ é diferenciável. □

Agora mostraremos então, que todo homomorfismo contínuo entre grupos de Lie é diferenciável.

Teorema 1.30 *Todo homomorfismo contínuo $\varphi : H \rightarrow G$ entre grupos de Lie é diferenciável.*

Demonstração: Suponha que $\dim(H) = n$. Seja \mathfrak{h} a álgebra de Lie de H . Tome uma base $\{X_1, \dots, X_n\}$ de \mathfrak{h} e a aplicação $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow H$ como no Lema 1.28. Sejam $V \subset \mathbb{R}^n$ uma vizinhança de zero e $U \subset H$ vizinhança de e tais que $\psi : V \rightarrow U$ seja um difeomorfismo. Pelo teorema anterior, temos que as aplicações

$$\begin{aligned} \varphi_i : \mathbb{R} &\longrightarrow G \\ t &\longmapsto \varphi(\exp tX_i) \end{aligned}$$

são contínuas e portanto são diferenciáveis. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi(t_1, \dots, t_n) &= \varphi((\exp t_1X_1) \cdots (\exp t_nX_n)) \\ &= \varphi(\exp t_1X_1) \cdots \varphi(\exp t_nX_n) \\ &= \varphi_1(t_1) \cdots \varphi_n(t_n) \end{aligned}$$

é diferenciável para todo $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Se $x \in U$ temos $x = \psi \circ \psi^{-1}(x)$. Logo

$$\varphi(x) = \varphi(\psi \circ \psi^{-1}(x))$$

ou seja $\varphi|_U = (\varphi \circ \psi) \circ \psi^{-1}|_U$ é diferenciável. Por outro lado, se x é um elemento qualquer de H , não necessariamente em U , tem-se que

$$x \in xU = \{xu ; u \in U\},$$

o qual é difeomorfo a U por translação à esquerda. Assim, para todo $xy \in xU$ temos que

$$\begin{aligned} \varphi(xy) &= \varphi(x) \cdot \varphi(y) \\ &= L_{\varphi(x)} \circ \varphi(y) \\ &= L_{\varphi(x)} \circ \varphi(L_{x^{-1}}(xy)) \\ &= L_{\varphi(x)} \circ \varphi \circ L_{x^{-1}}(xy). \end{aligned}$$

Logo,

$$\varphi|_{xU} = L_{\varphi(x)} \circ \varphi \circ L_{x^{-1}}|_{xU}.$$

Como $L_{\varphi(x)} \circ \varphi \circ L_{x^{-1}}|_{xU}$ é diferenciável, temos que $\varphi|_{xU}$ é diferenciável. \square

No próximo lema e em sua demonstração, usaremos a notação $O(t^3)$ para o fato de uma aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow T_e G$ ter a propriedade de que $\frac{\varphi(t)}{t^3}$ é limitado para todo t em \mathbb{R} suficientemente pequeno. Além disso, se $X \in T_e G$, então \tilde{X} denotará o campo de \mathfrak{g} tal que $\tilde{X}_e = X$.

Lema 1.31 *Se G é um grupo de Lie e se $X, Y \in T_e G$, então*

- (a) $(\exp tX)(\exp tY) = \exp(t(X + Y) + \frac{t^2}{2}[X, Y] + O(t^3))$.
- (b) $(\exp -tX)(\exp -tY)(\exp tX)(\exp tY) = \exp(t^2[X, Y] + O(t^3))$.
- (c) $(\exp tX)(\exp tY)(\exp -tX) = \exp(tY + t^2[X, Y] + O(t^3))$.

Demonstração: Sejam $f \in C^\infty(G)$ e $a \in G$. Temos que

$$\tilde{X}f(a) = \tilde{X}_a(f) = dL_a \circ X(f) = X(f \circ L_a) = \frac{d(f \circ L_a \circ \alpha)}{du} \Big|_{u=0}.$$

onde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ é uma curva tal que $\alpha(0) = e$ e $\alpha'(0) = X$. Em particular, a curva $\alpha(u) = \exp uX$. Assim,

$$\tilde{X}f(a) = \frac{d(f \circ L_a \circ \exp uX)}{du} \Big|_{u=0} = \frac{d}{du} f(a \exp uX) \Big|_{u=0}.$$

Analogamente temos que

$$\tilde{Y}f(a) = \frac{d}{du}f(a \exp uY) \Big|_{u=0}. \quad (1.3)$$

Fixando s em \mathbb{R} , seja

$$\varphi(t) = f(\exp sX. \exp tY).$$

Logo

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}f(\exp sX. \exp tY) = \frac{d}{dt}(f \circ L_{\exp sX} \circ \exp tY) = d(f \circ L_{\exp sX})_{\exp tY} \circ (d \exp)_{tY} \circ Y.$$

Por outro lado, por 1.3 temos que

$$\tilde{Y}(f)(\exp sX. \exp tY) = \frac{d}{du}f(\exp sX. \exp tY. \exp uY) \Big|_{u=0} = d(f \circ L_{\exp sX})_{\exp tY} \circ (d \exp)_{tY} \circ Y.$$

Assim,

$$\varphi'(t) = \tilde{Y}(f)(\exp sX. \exp tY).$$

Agora em vez de f usamos o mesmo raciocínio para $\tilde{Y}f$. Assim obtemos

$$\varphi''(t) = [\tilde{Y}(\tilde{Y}f)](\exp sX. \exp tY).$$

Aplicando o teorema de Taylor a φ temos

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{\varphi''(0)}{2!}t^2 + O(t^3),$$

e assim, substituindo $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ e $\varphi''(t)$ a essa última igualdade, tem-se que

$$f(\exp sX. \exp tY) = f(\exp sX) + \tilde{Y}(f)(\exp sX)t + \frac{t^2}{2}[\tilde{Y}(\tilde{Y}f)](\exp sX) + O(t^3). \quad (1.4)$$

Analogamente, para qualquer $F \in C^\infty(G)$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}F(\exp sX) &= (\tilde{X}F)(\exp sX) \\ \frac{d^2}{ds^2}F(\exp sX) &= [\tilde{X}(\tilde{X}F)](\exp sX) \end{aligned}$$

$$F(\exp sX) = F(e) + s(\tilde{X}F)(e) + \frac{s^2}{2}[\tilde{X}(\tilde{X}F)](e) + O(s^3). \quad (1.5)$$

Suponhamos que $f(e) = 0$, e aplicamos a última expressão em 1.4 para $F = f$, $F = \tilde{Y}f$ e $F = \tilde{Y}(\tilde{Y}f)$. Assim obtemos

$$\begin{aligned} f(\exp sX. \exp tY) &= s(\tilde{X}f)(e) + t(\tilde{Y}f)(e) + \frac{s^2}{2}[\tilde{X}(\tilde{X}f)](e) + \frac{t^2}{2}[\tilde{Y}(\tilde{Y}f)](e) + \\ &+ st[\tilde{X}(\tilde{Y}f)](e) + O(s^3) + O(s^2t) + O(st^2). \end{aligned}$$

Para $s = t$ temos

$$f(\exp sX \cdot \exp tY) = t[(\tilde{X} + \tilde{Y})f](e) + t^2\left[\left(\frac{\tilde{X}\tilde{X}}{2} + \tilde{X}\tilde{Y} + \frac{\tilde{Y}\tilde{Y}}{2}\right)f\right](e) + O(t^3). \quad (1.6)$$

Como a exponencial é um difeomorfismo numa vizinhança de $0 \in T_e G$ e o produto em G é contínuo, podemos escrever para t pequeno

$$(\exp tX)(\exp tY) = \exp Z(t),$$

para alguma função diferenciável $Z : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T_e G$. Aplicando a fórmula de Taylor a Z obtemos,

$$Z(t) = tZ_1 + t^2Z_2 + O(t^3),$$

onde $Z_1, Z_2 \in T_e G$.

Tome $A : \mathbb{R} \rightarrow T_e G$ uma aplicação diferenciável tal que $A(0) = 0$. Pela fórmula de Taylor temos que

$$\begin{aligned} (f \circ \exp)(A(t) + O(t^3)) &= (f \circ \exp)(A(t)) + \int_0^1 \frac{d}{ds}(f \circ \exp)(A(t) + sO(t^3)).O(t^3)ds \\ &= (f \circ \exp)(A(t)) + \left(\int_0^1 \frac{d}{ds}(f \circ \exp)(A(t) + sO(t^3))ds\right).O(t^3). \end{aligned}$$

Temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^1 \frac{d}{ds}(f \circ \exp)(A(t) + sO(t^3))ds\right).O(t^3)}{t^3} = 0,$$

assim podemos escrever

$$(f \circ \exp)(A(t) + O(t^3)) = (f \circ \exp)(A(t)) + O(t^3). \quad (1.7)$$

Suponha que $f(e) = 0$. Por 1.7 e pela equação 1.5 temos que

$$\begin{aligned} f(\exp Z(t)) &= f(\exp t(Z_1 + tZ_2)) + O(t^3) \\ &= f(e) + t[(\tilde{Z}_1 + t\tilde{Z}_2)(f)](e) + \frac{t^2}{2}[(\tilde{Z}_1 + t\tilde{Z}_2)(\tilde{Z}_1 + t\tilde{Z}_2)(f)](e) + \\ &\quad + O(t^3) + O(t^3) \\ &= t(\tilde{Z}_1 f)(e) + t^2(\tilde{Z}_2 f)(e) + \frac{t^2}{2}[(\tilde{Z}_1(\tilde{Z}_1 f)](e) + \frac{t^3}{2}[(\tilde{Z}_1(\tilde{Z}_2 f)](e) + \\ &\quad + \frac{t^3}{2}[(\tilde{Z}_2(\tilde{Z}_1 f)](e) + \frac{t^4}{2}[(\tilde{Z}_2(\tilde{Z}_2 f)](e) + O(t^3) \\ &= t(\tilde{Z}_1 f)(e) + t^2(\tilde{Z}_2 f)(e) + \frac{t^2}{2}[(\tilde{Z}_1(\tilde{Z}_1 f)](e) + O(t^3). \end{aligned}$$

Dessa última equação e de 1.6 temos

$$\begin{aligned}\tilde{X} + \tilde{Y} &= \tilde{Z}_1 \\ \frac{\tilde{Z}_1 \tilde{Z}_1}{2} + \tilde{Z}_2 &= \frac{\tilde{X} \tilde{X}}{2} + \tilde{X} \tilde{Y} + \frac{\tilde{Y} \tilde{Y}}{2}.\end{aligned}$$

Logo $Z_1 = X + Y$, $Z_2 = \frac{1}{2}[X, Y]$, o que conclui a demonstração de (a).

Para provar (b), basta aplicar (a) :

$$\begin{aligned}(\exp -tX)(\exp -tY)(\exp tX)(\exp tY) \\ = \exp(-t(X + Y) + \frac{t^2}{2}[X, Y] + O(t^3)). \exp(t(X + Y) + \frac{t^2}{2}[X, Y] + O(t^3)) \\ = \exp(t^2[X, Y] + O(t^3)),\end{aligned}$$

pois os demais termos que aparecem no desenvolvimento acima, são de ordem no mínimo três. Isso demonstra (b).

Para demonstrar (c) também aplicamos (a), ou seja

$$\begin{aligned}(\exp tX)(\exp tY)(\exp -tX) &= \exp(t(X + Y) + \frac{t^2}{2}[X, Y] + O(t^3)).(\exp -tX) \\ &= \exp(tY + t^2[X, Y] + O(t^3)).\end{aligned}$$

□

Como aplicação desse lema, daremos uma interpretação geométrica da operação colchete na álgebra de Lie.

Corolário 1.32 *Sejam G um grupo de Lie e $X, Y \in T_e G \approx \mathfrak{g}$ e sejam as curvas*

$x, y, \gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ dadas por

$$\begin{aligned}x(t) &= \exp tX \\ y(t) &= \exp tY \\ \gamma(t) &= x(\sqrt{t}).y(\sqrt{t}).x(\sqrt{t})^{-1}.y(\sqrt{t})^{-1}.\end{aligned}$$

Então, $\gamma(0) = e$ e $\gamma'(0) = [X, Y]$.

Demonstração: Pela parte (ii) da Proposição 1.27 temos que $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$.

Assim pela parte (b) do lema anterior temos que

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (\exp \sqrt{t}X)(\exp \sqrt{t}Y)(\exp -\sqrt{t}X)(\exp -\sqrt{t}Y) \\ &= \exp(t[X, Y] + O(t^3)).\end{aligned}$$

Logo, $\gamma(0) = e$ e

$$\frac{d\gamma}{dt}(0) = (d\exp)_0([X, Y] + \frac{d}{dt}O(t^3) |_{t=0}) = I([X, Y]) = [X, Y].$$

□

Como outra aplicação do Lema 1.31 mostraremos mais adiante um importante resultado, que garante que todo subgrupo fechado de um grupo de Lie é um grupo de Lie. Esse resultado é conhecido como Teorema de Cartan. Para demonstrar esse teorema tentaremos encontrar uma vizinhança $V \subset \mathfrak{g}$ de zero, tal que

$$\exp(V \cap \mathcal{H}) = H \cap \exp V,$$

onde \mathfrak{g} é a álgebra de Lie de G e

$$\mathcal{H} = \{X \in \mathfrak{g}; \exp tX \in H \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}.$$

Para isso precisaremos dos seguintes lemas:

Lema 1.33 *Seja H um subgrupo fechado de um grupo de Lie G . O conjunto \mathcal{H} definido acima, é um subespaço vetorial de \mathfrak{g} .*

Demonstração: Tome $X, Y \in \mathcal{H}$. Então $\exp \frac{t}{n}X, \exp \frac{t}{n}Y \in H$ para todo número inteiro n . Logo

$$[(\exp \frac{t}{n}X)(\exp \frac{t}{n}X)]^n \in H$$

pois H é subgrupo. Pela parte (a) do Lema 1.31 temos que

$$\begin{aligned} (\exp \frac{t}{n}X)(\exp \frac{t}{n}X)^n &= (\exp(\frac{t}{n}X + \frac{t}{n}Y + \frac{2}{2n^2}[X, Y] + O(\frac{t^3}{n^3})))^n \\ &= \exp(tX + tY + \frac{2}{2n}[X, Y] + O(\frac{t^3}{n^2})) \in H. \end{aligned}$$

Como H é fechado, temos para todo $t \in \mathbb{R}$ que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(tX + tY + \frac{2}{2n}[X, Y] + O(\frac{t^3}{n^2})) = \exp t(X + Y) \in H.$$

Logo, pela definição de \mathcal{H} temos que $X + Y \in \mathcal{H}$. Portanto \mathcal{H} é um subespaço vetorial de \mathfrak{g} . □

Lema 1.34 *Seja H um subgrupo fechado de um grupo de Lie G e \mathcal{H} como definido acima. Tome $(t_i X_i)_i$ uma sequência em \mathfrak{g} tal que*

$$X_i \rightarrow X \in \mathfrak{g}, \quad t_i \rightarrow 0 \text{ e } t_i \neq 0.$$

Se $\exp t_i X_i \in H$ para todo i , então $\exp tX \in H$ para todo t , isto é $X \in \mathcal{H}$.

Demonstração: Como $(\exp -t_i X_i) = (\exp t_i X_i)^{-1} \in H$, podemos supor que $t_i > 0$.

Então, para $t > 0$ definimos para cada $i \in \mathbb{N}$ a função

$$k_i(t) = \left[\frac{t}{t_i} \right] = \text{maior inteiro} \leq \frac{t}{t_i}.$$

Logo,

$$\frac{t}{t_i} - 1 \leq k_i(t) \leq \frac{t}{t_i}$$

o que implica

$$t - t_i \leq t_i k_i(t) \leq t$$

Como por hipótese $t_i \rightarrow 0$, usando o teorema do confronto temos que

$$t_i k_i(t) \rightarrow t.$$

Como $\exp t_i X_i \in H$ temos

$$\exp t_i k_i(t) X_i = (\exp t_i X_i)^{k_i(t)} \in H.$$

Como H é fechado e $\lim t_i k_i(t) X_i = tX$ temos que

$$\exp tX = \exp\left(\lim_{i \rightarrow \infty} t_i k_i(t) X_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \exp t_i k_i(t) X_i \in H$$

como queríamos. □

Lema 1.35 *Seja H um subgrupo fechado de um grupo de Lie G e \mathcal{H} como definido acima. Tome $\mathcal{H}' \subset \mathfrak{g}$ tal que $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}' = \mathfrak{g}$, onde \oplus significa soma direta. Então existe uma vizinhança V' de $0 \in \mathcal{H}'$ tal que para todo $X' \in V'$, onde $X' \neq 0$, tem-se que $\exp X' \notin H$.*

Demonstração: Tome um produto interno \langle, \rangle em \mathcal{H}' . Suponhamos por absurdo que para toda vizinhança V' de $0 \in \mathcal{H}'$, exista $X' \neq 0$ em V' tal que $\exp X' \in H$. Logo,

existe uma sequência $(X_i)_i$ com $X_i \in \mathcal{H}'$ e $0 < |X_i| \leq 1$ tal que X_i converge para 0 e $\exp X_i \in H$. Tomamos o conjunto compacto

$$K = \{X' \in \mathcal{H}'; 1 \leq |X'| \leq 2\}.$$

Podemos escolher $n_i \in \mathbb{Z}$ tal que $n_i X_i = Y_i \in K$ onde $n_i \rightarrow \infty$. Como K é compacto, existe uma subsequência que ainda indicaremos por Y_i tal que $Y_i \rightarrow Y \in K \subset \mathcal{H}'$. Como $X_i = \frac{1}{n_i} Y$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_i} &\rightarrow 0, \quad Y_i \rightarrow Y \text{ e} \\ \exp \frac{1}{n_i} Y_i &= \exp X_i \in H \text{ para todo } i. \end{aligned}$$

Logo, pelo lema anterior, $Y \in \mathcal{H}'$ e assim temos uma contradição. Portanto $\exp X' \notin H$. \square

Lema 1.36 Tome $\mathcal{H}' \subset \mathfrak{g}$ tal que $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}' = \mathfrak{g}$. A aplicação $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow G$ dada por $\varphi(X + X') = (\exp X)(\exp X')$ com $X \in \mathcal{H}$ e $X' \in \mathcal{H}'$ é um difeomorfismo em uma vizinhança de $0 \in \mathfrak{g}$.

Demonstração: Tomemos X e X' numa vizinhança do $0 \in \mathfrak{g}$ tal que \exp seja um difeomorfismo nesta vizinhança. Logo, $\exp X$ e $\exp X'$ estão contidas em uma vizinhança coordenada de e . Assim, podemos escrever

$$\exp X = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\exp X' = (x'_1, \dots, x'_n).$$

Logo

$$\begin{aligned} \varphi(X + X') &= f(\exp X, \exp X') \\ &= (f_1(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n) + \dots + f_n(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n)), \end{aligned}$$

onde $f : G \times G \rightarrow G$ é definida por $f(x, y) = xy$. Definindo uma curva $\alpha(t) = t(X + X')$ temos $\alpha(0) = 0$ e $\alpha'(0) = X + X'$. Temos ainda que

$$d\varphi_e(X + X') = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)(t) |_{t=0}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 d\varphi_e(X + X')^i &= \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)^i(t) \Big|_{t=0} \\
 &= \frac{d}{dt}(\exp tX \cdot \exp tX')^i \Big|_{t=0} \\
 &= \frac{d}{dt}f^i(tx_1, \dots, tx_n, tx'_1, \dots, tx'_n) \Big|_{t=0} \\
 &= x_i + x'_i \\
 &= (X + X')^i.
 \end{aligned}$$

Então, $d\varphi_e(X + X') = 0$ se, e somente se, $X + X' = 0$. Isso mostra que $d\varphi_e$ é injetora. Logo pelo teorema da função inversa temos o desejado. \square

Agora podemos demonstrar o teorema de Cartan.

Teorema 1.37 (de Cartan) *Todo subgrupo fechado de um grupo de Lie é um grupo de Lie.*

Demonstração: Seja H um subgrupo fechado de um grupo de Lie G e

$$\mathcal{H} = \{X \in \mathfrak{g}; \exp tX \in H \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$$

onde \mathfrak{g} é a álgebra de Lie de G .

Tomemos $V = W \times W'$ vizinhança de $0 \in \mathfrak{g}$ com $W \subset \mathcal{H}$ e $W' \subset \mathcal{H}'$ tais que as seguintes propriedades são satisfeitas:

- (i) \exp é um difeomorfismo em V ,
- (ii) W' satisfaz as condições do Lema 1.35,
- (iii) A aplicação φ do Lema 1.36 é um difeomorfismo em V .

Mostraremos então que $\exp(V \cap \mathcal{H}) = H \cap \exp V$.

É imediato que $\exp(V \cap \mathcal{H}) \subset H \cap \exp V$. Para mostrar a inclusão contrária, tome $x \in H \cap \exp V$. Assim temos que

$$x = (\exp X) \cdot (\exp X') \text{ onde } X \in W \text{ e } X' \in W'.$$

Como x e $\exp X$ estão em H temos que $\exp X' \in H$ e então $X' \in \mathcal{H}$. Logo $X' = 0$. Assim $x = \exp X$, onde $X \in V \cap \mathcal{H}$. Logo, $x \in \exp(V \cap \mathcal{H})$ e, então

$$H \cap \exp V \subset \exp(V \cap \mathcal{H}).$$

Portanto $\exp(V \cap \mathcal{H}) \subset H \cap \exp V$.

Como V é uma vizinhança de 0 em \mathfrak{g} , onde \exp é um difeomorfismo, segue que $H \cap \exp V$ é uma subvariedade de G . Logo H é localmente uma subvariedade de G . Podemos estender o resultado para todo H por translações à esquerda. Portanto H é um grupo de Lie. \square

Definimos no apêndice A, a representação adjunta de álgebras de Lie. Vejamos agora o conceito de representação adjunta de grupos de Lie, bem como algumas relações existentes entre esses conceitos.

Seja G um grupo de Lie e \mathfrak{g} sua álgebra de Lie. Para todo $y \in G$ definimos

$$C_y : G \longrightarrow G \\ x \longmapsto yxy^{-1}.$$

Temos que C_y é um difeomorfismo e deixa fixa a identidade $e \in G$. Logo a diferencial de C_y em e é a aplicação linear invertível de \mathfrak{g} em \mathfrak{g}

$$d(C_y)_e : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

que denotaremos por $\text{Ad}(y) = d(C_y)_e$. Assim temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{Ad}(\mathfrak{g})} & \mathfrak{g} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{C_{\mathfrak{g}}} & G \end{array}$$

Esse diagrama comuta e assim

$$g \exp(X) g^{-1} = \exp(\text{Ad}(g)(X)).$$

Definimos a aplicação

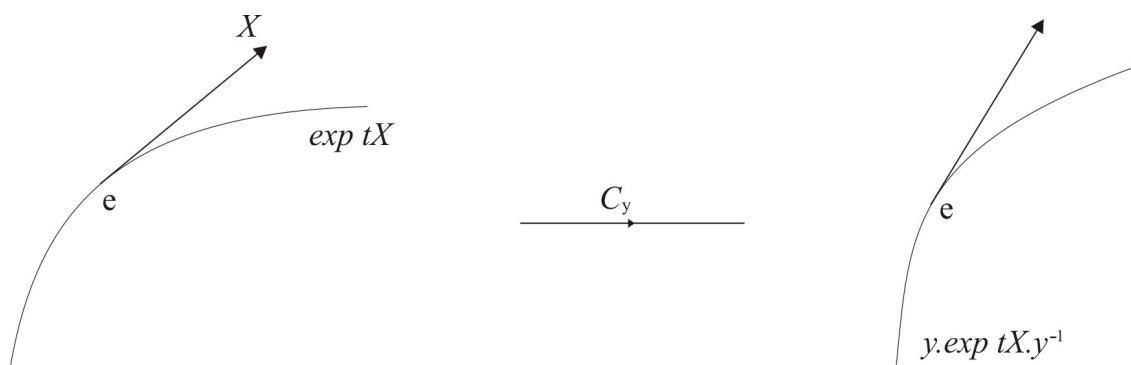
$$\text{Ad} : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g}) \\ y \longmapsto \text{Ad}(y)$$

onde $GL(\mathfrak{g})$ é o grupo das aplicações lineares invertíveis do espaço vetorial \mathfrak{g} .

Visto que C_y é diferenciável, a aplicação Ad é diferenciável. É imediato verificar que Ad é um homomorfismo de Lie de G em $GL(\mathfrak{g})$. A esse homomorfismo chamaremos de **representação adjunta do grupo G** .

Tome um vetor $X \in \mathfrak{g}$. Para ter uma idéia geométrica de como obter $\text{Ad}(y)(X)$ note que X pode ser considerado como vetor tangente a e da curva $\exp tX$ em G . A aplicação C_y leva esta curva na curva $y \cdot \exp tX \cdot y^{-1}$. Logo

$$\text{Ad}(y)(X) = d((C_y)_e)X = \left. \frac{d}{dt}(y \cdot \exp tX \cdot y^{-1}) \right|_{t=0}.$$



Visto que a aplicação Ad é diferenciável podemos tomar a sua diferencial em e , a qual é chamada representação adjunta de \mathfrak{g} e indicada por

$$\text{ad} = d(\text{Ad})_e : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),$$

onde $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, o conjunto das transformações lineares de \mathfrak{g} , é a álgebra de Lie do grupo $GL(\mathfrak{g})$. Podemos descrever esta situação pelo diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{d(\text{Ad})_e = \text{ad}} & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ \text{exp} \downarrow & & \downarrow \text{exp} \\ G & \xrightarrow{\text{Ad}} & GL(\mathfrak{g}) \end{array}$$

Mostraremos agora que este diagrama é comutativo.

Proposição 1.38 *O diagrama acima é comutativo.*

Demonstração: Devemos mostrar que

$$\text{Ad}(\exp Y) = \exp(\text{ad}(Y)) \quad \text{para todo } Y \in \mathfrak{g}.$$

Tome a curva $s \mapsto \text{Ad}(\exp sY)$ em $GL(\mathfrak{g})$. Assim podemos pensar em Y como sendo o vetor tangente em e dessa curva. Denotando $\phi(s) = \text{Ad}(\exp sY)$ e R_x a translação à direita por

x , temos

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi}{ds} &= d(\text{Ad})_{\exp sY} Y(\exp sY) \\
&= d(\text{Ad})_{\exp sY} d(\text{R}_{\exp sY})_e(Y) \\
&= d(\text{Ad} \circ \text{R}_{\exp sY})_e(Y) \\
&= d(\text{R}_{\text{Ad}(\exp sY)} \circ \text{Ad})_e(Y) \\
&= d(\text{R}_{\text{Ad}(\exp sY)})_1 d(\text{Ad})_e(Y) \\
&= d(\text{Ad})_e(Y) (\text{Ad}(\exp sY)) \\
&= \text{ad}(Y)(\phi(s)).
\end{aligned}$$

Portanto $\phi(s)$ é curva integral do campo $\text{ad}(Y) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ e $\phi(0) = 1$ em $GL(\mathfrak{g})$. Por unicidade de solução, $\phi(s) = \exp(s \text{ad}(Y))$. Em particular, para $s = 1$, tem-se

$$\exp(\text{ad}(Y)) = \text{Ad}(\exp Y).$$

Portanto o diagrama acima comuta. □

Proposição 1.39 *Se $X, Y \in \mathfrak{g}$, $\text{ad}(Y)X = [Y, X]$.*

Demonstração: Com as mesmas notações da proposição acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\text{ad}(Y)(X) &= \frac{d}{ds} ((\text{Ad}(\exp sY))|_{s=0}) \cdot X \\
&= \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} ((\exp sY)(\exp tX)(\exp sY)^{-1}) \Big|_{\substack{s=0 \\ t=0}},
\end{aligned}$$

onde X é o vetor tangente em e à curva $t \mapsto \exp tX$.

Tomando $s = t$ na equação acima, e usando a parte (c) do Lema 1.31, obtemos $\text{ad}(Y)X = [Y, X]$. □

1.3 Variedades homogêneas

Faremos nesta seção, um breve estudo sobre variedades homogêneas, que são espaços quocientes de grupos de Lie por subgrupos fechados, com uma certa estrutura de variedade diferenciável. Veremos ainda as definições de ação de um grupo de Lie em uma variedade, ação transitiva e grupo de isotropia.

Primeiramente vamos construir uma estrutura de variedade diferenciável em um espaço homogêneo.

Teorema 1.40 *Seja H um subgrupo fechado de um grupo de Lie G e seja*

$$G/H = \{xH; x \in G\}.$$

Seja ainda

$$\begin{aligned} \pi : G &\longrightarrow G/H \\ x &\longmapsto xH \end{aligned}$$

a aplicação quociente. Existe uma única estrutura de variedade diferenciável em G/H satisfazendo:

- (a) π é diferenciável;
- (b) Para todo xH em G/H existe uma vizinhança de xH em G/H e uma aplicação diferenciável $\tau : W \rightarrow G$ tal que $\pi \circ \tau = id_W$. A aplicação τ é chamada uma **secção local da aplicação** π .

Demonstração: Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo fechado de G , com $\dim G = n$, $\dim H = k$ e $(G/H)_1$ o mesmo conjunto G/H munido de outra estrutura diferenciável satisfazendo também (a) e (b).

Vamos mostrar primeiramente a unicidade.

Consideremos a aplicação

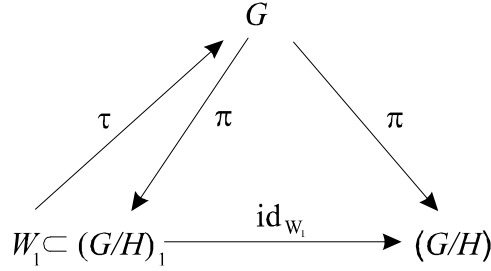
$$id : G/H \rightarrow (G/H)_1,$$

e para $xH \in G/H$, tomamos o par (W, τ) dado pela condição (b). Escrevendo $id_W = \pi \circ \tau$, temos uma composição de aplicações diferenciáveis. Portanto id_W é diferenciável e então id é diferenciável em xH .

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ \tau \nearrow & & \searrow \pi \\ W \subset G/H & & (G/H)_1 \\ \pi \searrow & & \nearrow \pi \\ & id_W & \end{array}$$

Da mesma forma, considerando $id : (G/H)_1 \rightarrow G/H$ e para cada $(xH)_1 \in (G/H)_1$, tomando-se o par (W_1, τ) da condição (b), com o mesmo raciocínio, concluímos que id_{W_1}

é diferenciável e portanto id é diferenciável em $(xH)_1$.



Daí concluímos que $id : G/H \rightarrow (G/H)_1$ é um difeomorfismo. Como duas estruturas diferenciáveis são equivalentes se a identidade for um difeomorfismo, fica provada a unicidade da estrutura diferenciável em G/H que satisfaz (a) e (b).

Para provar a existência, vamos considerar em G/H a topologia co-induzida pela aplicação π , isto é, é aberto de G/H o conjunto cuja imagem inversa é um aberto de G . Como G tem base enumerável, temos que G/H tem base enumerável. Além disso sendo G de Hausdorff e $H \subset G$ fechado, temos que G/H é de Hausdorff.

Vamos resolver agora, o problema para uma vizinhança de $H \in G/H$. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}'$, onde \mathfrak{h} e \mathfrak{g} são as álgebras de Lie de H e G respectivamente e \mathfrak{h}' é um subespaço complementar de \mathfrak{h} em \mathfrak{g} . Agora aplicamos o Lema 1.36 para a aplicação $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow G$ dada por $\varphi(X+X') = (\exp X').(\exp X)$. Sejam então

$$V = V_1 \times V'_1 \subset \mathfrak{g} \text{ tal que } V_1 \subset \mathfrak{h} \text{ e } V'_1 \subset \mathfrak{h}', U = \varphi(V),$$

onde $\varphi|_V$ é um difeomorfismo. Tomando $W = \pi(U)$ temos que

$$\pi^{-1}(W) = \bigcup_{xH \in W} \pi^{-1}(xH) = \bigcup_{u \in U} uH = \bigcup_{h \in H} Uh$$

é um conjunto aberto em G , pois Uh é aberto. Logo, pela definição de topologia co-induzida, W é um aberto de G/H . Definamos agora

$$\begin{aligned}
 \sigma : W &\longrightarrow \mathfrak{h}' \approx \mathbb{R}^{n-k} \\
 xH &\longmapsto X'
 \end{aligned}$$

onde $x = (\exp X').(\exp X) \in U$ com $X' \in \mathfrak{h}'$ e $X \in \mathfrak{h}$.

(i) σ está bem definida. Para provar este resultado, basta mostrar que se $x \in U \subset G$ e $y \in H \cap \exp V$, tem-se $\sigma(xyH) = \sigma(xH)$. Tomamos então $x = (\exp X').(\exp X) \in U$ e $y = \exp Y \in H \cap \exp V$. Segue-se daí que

$$xy = (\exp X').(\exp X)(\exp Y) = (\exp X').(\exp Z)$$

para algum $Z \in \mathfrak{h} \cap V$ pois $\varphi|_V$ é um difeomorfismo. Logo $\sigma(xyH) = X' = \sigma(xH)$, confirmando que σ está bem definida.

(ii) σ é injetora. De fato, Sejam $x = (\exp X').(\exp X)$ e $y = (\exp Y').(\exp Y)$ tais que $X' = Y'$ ou seja $\varphi(xH) = \varphi(yH)$. Então

$$\begin{aligned} y^{-1}x &= (\exp Y)^{-1}(\exp Y')^{-1}(\exp X')(\exp X) \\ &= (\exp Y)^{-1}(\exp X) \in H. \end{aligned}$$

Portanto $xH = yH$ o que mostra que σ é injetora.

Tomamos agora em W a estrutura diferenciável que torna σ um difeomorfismo, isto é, fazemos (σ, W) uma carta local. Mostraremos que esta estrutura diferenciável em W satisfaz (a) e (b).

(a) A aplicação

$$\begin{aligned} p: \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}' &\longrightarrow \mathfrak{h}' \\ X + X' &\longmapsto X' \end{aligned}$$

é claramente diferenciável e a aplicação $\varphi^{-1}: U \rightarrow V$ também o é, pois φ é difeomorfismo. Daí temos que $\rho: U \rightarrow V'_1$ dada por

$$\rho(\exp X'. \exp X) = X' \in V'_1$$

é diferenciável, pois ρ é a composição de aplicações diferenciáveis $\rho = p \circ \varphi^{-1}$. Temos então que $\sigma^{-1} \circ \rho: U \rightarrow W$ é diferenciável e além disso,

$$\sigma^{-1} \circ \rho(x) = \sigma^{-1} \circ \rho((\exp X').(\exp X)) = \sigma^{-1}(X') = X.$$

Portanto

$$\sigma^{-1} \circ \rho(x) = \pi(x).$$

Logo $\pi|_U$ é diferenciável, o que demonstra (a).

Para mostrar (b) tome $\tau: W \rightarrow G$ dado por

$$\tau = \exp \circ \sigma.$$

Assim definida, τ é diferenciável. Além disso,

$$\begin{aligned} \pi \circ \tau(xH) &= \pi \circ \exp \circ \sigma(xH) = \pi(\exp X') = (\exp X')H \\ &= (\exp X').(\exp X)H = xH, \end{aligned}$$

pois $\exp X \in H$. Portanto $\pi \circ \tau = id_W$, provando localmente (b), ou melhor, provando (b) para uma vizinhança coordenada de $H \subset G/H$. Mas podemos obter vizinhanças coordenadas de outros pontos de G/H através de translações à esquerda. De fato, se $x \in G$, definimos \tilde{L}_x como sendo o homeomorfismo de G/H , induzido pela translação à esquerda L_x em G , isto é,

$$\tilde{L}_x(yH) = xyH, \quad y \in G.$$

Definimos também a aplicação

$$\sigma_{xH} = \sigma \circ \tilde{L}_{x^{-1}} \big|_{\tilde{L}_x(W)}$$

e obtemos $(\sigma_{xH}, \tilde{L}_x(W))$ uma vizinhança coordenada de xH . Observe que nesta notação, σ_H é justamente a aplicação σ . Fazendo x percorrer G temos que

$$\{(\sigma_{xH}, \tilde{L}_x(W)); x \in G\}$$

fornece uma estrutura diferenciável em G/H .

A mudança de coordenadas é diferenciável pois na intersecção das vizinhanças coordenadas de um ponto xH os homomorfismos locais do atlas correspondente gozam de uma mesma estrutura diferenciável, demonstrando assim o teorema. \square

Podemos introduzir agora o conceito de variedades homogêneas.

Definição 1.41 Chamam-se **variedades homogêneas**, as variedades diferenciáveis da forma G/H onde G é um grupo de Lie, $H \subset G$ é um subgrupo fechado, e existe uma estrutura diferenciável dada pelo teorema anterior.

Definição 1.42 Dizemos que um grupo de Lie **age em uma variedade** M , se existe uma aplicação diferenciável $\eta : G \times M \rightarrow M$ dada por $\eta(x, p) = xp$ tal que

$$(a) \quad ep = p;$$

$$(b) \quad (xy)p = x(y p).$$

Neste caso, η é chamada **ação** de G em M .

Definição 1.43 Dada uma ação η de G em M , definimos a **órbita** de um ponto $p \in M$ como sendo o conjunto

$$Gp = \{xp; x \in G\}.$$

Em outras palavras, a órbita de um ponto $p \in M$ é a imagem da aplicação

$$\begin{aligned} G \times \{p\} &\longrightarrow M \\ (x, p) &\longmapsto \eta(x, p) \end{aligned}$$

Definição 1.44 Dizemos que a ação η é **transitiva** ou que G **age transitivamente em** M através de η se $Gp = M$, para todo $p \in M$, isto é, para todo $p, q \in M$ existe $x \in G$ tal que $xp = q$. Para todo $p_0 \in M$, definimos o **grupo de isotropia do ponto** p_0

$$G_{p_0} = \{x \in G; xp_0 = p_0\}.$$

Mostraremos que G_{p_0} é um subgrupo fechado de G . É imediato que $G_{p_0} \subset G$. Além disso, $e \in G_{p_0}$ pois $ep_0 = p_0$. Por outro lado, se $x, y \in G_{p_0}$ então $xp_0 = p_0$ e $yp_0 = p_0$. Daí $xp_0 = yp_0$ e assim $y^{-1}xp_0 = p_0$. Logo por definição $y^{-1}x \in G_{p_0}$. Portanto G_{p_0} é subgrupo de G . Para mostrar que G_{p_0} é fechado consideramos a translação à direita $R_{p_0} : G \rightarrow G$ tal que $R_{p_0}(x) = xp_0$. Como R_{p_0} é contínua e $G - \{p_0\}$ é um aberto, temos que $R_{p_0}^{-1}(G - \{p_0\})$ é um aberto de G . Como G_{p_0} é o complementar de $R_{p_0}^{-1}(G - \{p_0\})$ temos que G_{p_0} é fechado.

Proposição 1.45 Se $\eta : G \times M \rightarrow M$ é uma ação transitiva, então G_p é isomorfo a G_q , para todo $p, q \in M$.

Demonstração: Como η é transitiva, dado p e q em M , existe $a \in G$ tal que $ap = q$, e daí

$$p = ep = (a^{-1}a)p = a^{-1}(ap) = a^{-1}q.$$

Definimos as aplicações

$$\begin{aligned} \varphi : G_p &\longrightarrow G_q & \text{e} & \quad \psi : G_q &\longrightarrow G_p \\ x &\longmapsto axa^{-1} & & \quad y &\longmapsto a^{-1}ya \end{aligned}$$

Tanto φ quanto ψ estão bem definidas, pois se $x \in G_p$ então

$$axa^{-1}q = axp = ap = q,$$

logo $axa^{-1} \in G_q$. Se $y \in G_q$ então

$$a^{-1}yap = a^{-1}yq = a^{-1}q = p,$$

logo $a^{-1}ya \in G_p$. É imediato verificar também que φ e ψ são homomorfismos e que $\varphi = \psi^{-1}$. Temos ainda que

$$L_a \circ R_{a^{-1}}|_{G_p}(x) = L_a(xa^{-1}) = axa^{-1} = \varphi(x)$$

e

$$R_a \circ L_{a^{-1}}|_{G_q}(y) = R_a(a^{-1}y) = a^{-1}ya = \psi(x),$$

ou seja $L_a \circ R_{a^{-1}} = \varphi$ e $R_a \circ L_{a^{-1}} = \psi$ nas órbitas G_p e G_q . Por serem composições de funções contínuas e diferenciáveis, adicionando o fato de serem inversas, concluímos que G_p e G_q são isomorfos para todo p e q em M . \square

Mostraremos agora, que se $\eta : G \times M \rightarrow M$ é uma ação transitiva de um grupo de Lie G na variedade M , e H é o subgrupo de isotropia em p_0 , então a variedade M é difeomorfa ao espaço quociente G/H .

Teorema 1.46 *Seja $\eta : G \times M \rightarrow M$ uma ação transitiva de um grupo de Lie G na variedade M . Seja $p_0 \in M$ e seja H o subgrupo de isotropia em p_0 . Então a aplicação*

$$\begin{aligned} \alpha : G/H &\longrightarrow M \\ xH &\longmapsto \eta(x, p_0) = xp_0 \end{aligned}$$

é um difeomorfismo.

Demonstração: Vamos mostrar inicialmente que α está bem definida. Se $xH = yH$, então $y^{-1}x \in H$ logo $(y^{-1}x)p_0 = p_0$, pois $H = G_{p_0}$. Segue então que $y^{-1}(xp_0) = p_0$, ou seja, $xp_0 = yp_0$, e assim α está bem definida.

Temos também que α é sobrejetora pois, dado $q \in M$ existe $x \in G$ tal que $xp_0 = q$ em virtude de η ser uma ação transitiva.

Suponhamos agora que $xp_0 = yp_0$. Então $y^{-1}xp_0 = p_0$, ou seja $y^{-1}x \in H$. Assim temos que $xH = yH$, o que mostra que α é injetora.

Para mostrar que α é diferenciável, utilizaremos o seguinte resultado: $\alpha : G/H \rightarrow M$ é diferenciável se, e somente se, $\alpha \circ \pi : G \rightarrow M$ é diferenciável, onde $\pi : G \rightarrow G/H$ é a aplicação quociente. Demonstraremos tal resultado. Suponhamos que $\alpha \circ \pi$ é diferenciável e seja $xH \in G/H$. Consideremos o par (W, τ) dado pela parte (b) do Teorema 1.40.

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ \tau \nearrow & & \searrow \alpha \circ \pi \\ & & M \\ \pi \searrow & & \nearrow \alpha \\ W \subset G/H & \xrightarrow{\alpha} & M \end{array}$$

Em W temos

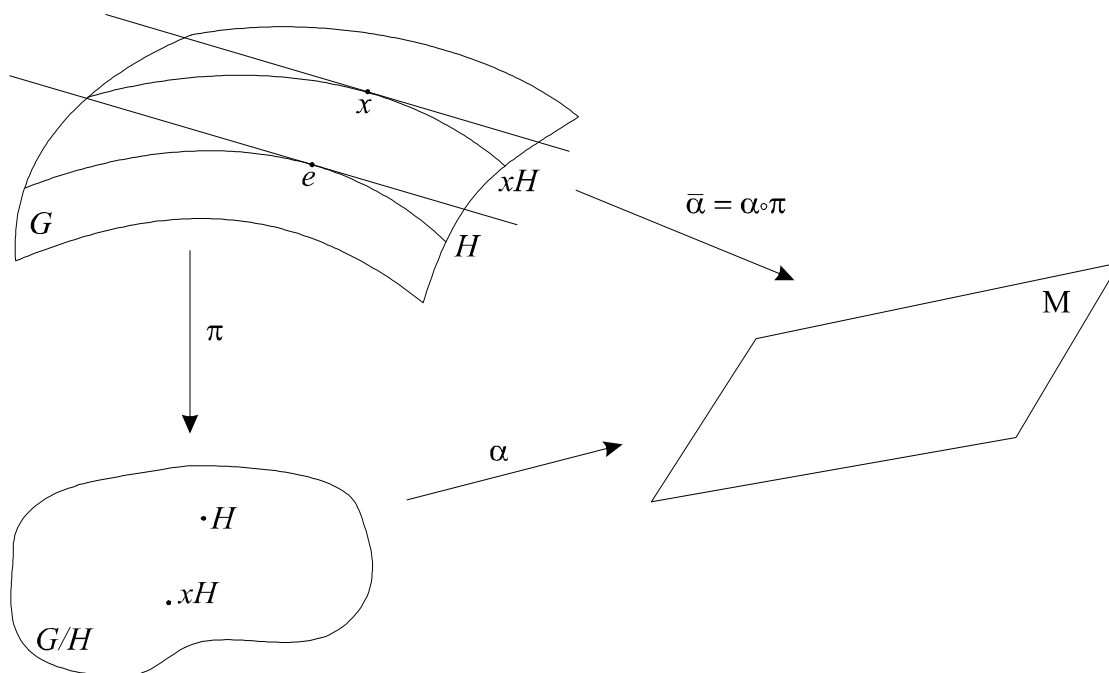
$$\alpha = \alpha \circ id_W = \alpha \circ (\pi \circ \tau) = (\alpha \circ \pi) \circ \tau,$$

que é diferenciável pois $(\alpha \circ \pi) \circ \tau$ é diferenciável, o que demonstra o resultado. Observe agora que a aplicação

$$\begin{aligned} \xi : G &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto xp_0 \end{aligned}$$

é diferenciável pois equivale a restrição de η a $G \times \{p_0\} \approx G$. Mas $\xi = \alpha \circ \pi$. Logo α é diferenciável.

Para completarmos a demonstração, resta provarmos que α é um difeomorfismo. Para isso devemos mostra que $d\alpha_{xH}$ é não singular para todo $x \in G$, isto é $\ker d\alpha_{xH} = \{0\}$.



Consideremos as derivações

$$d\pi_x : T_x(G) \rightarrow T_{xH}(G/H)$$

$$d\alpha_{xH} : T_{xH}(G/H) \rightarrow T_{xp_0}(M)$$

$$d\bar{\alpha}_x : T_x(G) \rightarrow T_{xp_0}(M),$$

onde $\bar{\alpha} = \alpha \circ \pi$. Temos que $\ker d\pi_x = T_x(xH)$ e que $d\pi_x$ é sobrejetora. Suponhamos agora que $\ker d\bar{\alpha}_x = T_x(xH)$, ou seja, $d\bar{\alpha}_x(Y) = 0$ se, e somente se, $Y \in T_x(xH)$. Seja $X \in T_{xH}(xH)$, então $X = d\pi_x(Y)$ para algum $Y \in T_x(G)$. Temos que

$$d\alpha_{xH}(X) = d\alpha_{xH}(d\pi_x(Y)) = d(\alpha \circ \pi)_x(Y) = d\bar{\alpha}_x(Y).$$

Assim, se $d\alpha_{xH}(X) = 0$, então $d\bar{\alpha}_x(Y) = 0$, o que implica que $Y \in T_x(G)$. Mas então $d\pi_x(Y) = 0$ e portanto $X = 0$, ou seja, $d\alpha_{xH}$ é não singular. Logo só devemos mostrar que $\ker d\bar{\alpha}_x = T_x(xH)$. Para $x \in G$ definamos

$$\begin{aligned}\eta_x : M &\rightarrow M, \\ m &\mapsto xm\end{aligned}$$

então temos que

$$\eta_x \circ \bar{\alpha} \circ L_{x^{-1}}(y) = \eta_x \circ \bar{\alpha}(x^{-1}y) = \eta_x(x^{-1}yp_0) = yp_0 = \bar{\alpha}(y),$$

para todo $y \in G$. Logo $\bar{\alpha} = \eta_x \circ \bar{\alpha} \circ L_{x^{-1}}$ e então é suficiente mostrar que $\ker d\bar{\alpha}_e = T_e(H)$, ou seja, basta mostrar que se \mathfrak{g} e \mathfrak{h} são as álgebras de Lie de G e H respectivamente, então $d\bar{\alpha}(x) = 0$ se, e somente se, $X \in \mathfrak{h}$. Se $X \in \mathfrak{h}$, temos $d\pi(X) = 0$, isto é, $d\bar{\alpha}(X) = d\alpha \circ d\pi(X) = 0$, o que demonstra uma das implicações. Para demonstrar a outra implicação tome $X \in \mathfrak{g}$ com $d\bar{\alpha}(x) = 0$ e seja $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow M$ dada por

$$\lambda(t) = \bar{\alpha}(\exp tX) = \bar{\alpha} \circ \varphi_X(t).$$

Daí temos que

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda}{dt}(t) &= d\bar{\alpha} \circ \frac{d\varphi_X}{dt}(t) = d\bar{\alpha}(X_{\varphi_X(t)}) = d\bar{\alpha} \cdot (X_{\exp tX}) \\ &= d(\eta_{\exp tX} \circ \bar{\alpha} \circ L_{\exp -tX}) \cdot (X_{\exp tX}) \\ &= d\eta_{\exp tX} \circ d\bar{\alpha} \circ dL_{\exp -tX}(X_{\exp tX}) \\ &= d\eta_{\exp tX} \circ d\bar{\alpha}(X) = 0,\end{aligned}$$

e assim concluímos que o caminho $\lambda(t) = (\exp tX).p_0$ é constante e como $\lambda(0) = p_0$, temos que $(\exp tX).p_0 = p_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ o que significa dizer que $\exp tX \in Gp_0$, ou seja, $X \in \mathfrak{h}$. Provamos então que $d\bar{\alpha}(x) = 0$ se, e somente se, $X \in \mathfrak{h}$, ou seja $\ker d\bar{\alpha}(x) = T_x(xH)$. Seja $X \in T_{xH}(G/H)$, então $X = d\pi_x(Y)$ para algum $Y \in T_x(H)$ pois $d\pi_x$ é sobrejetora. Daí

$$\begin{aligned}d\alpha_{xH}(X) &= d\alpha_{xH}(d\pi_x(Y)) \\ &= d(\alpha \circ \pi)_x(Y) \\ &= d\bar{\alpha}_x(Y).\end{aligned}$$

Logo, se $d\alpha_{xH}(X) = 0$ é porque $d\bar{\alpha}_x(Y) = 0$, ou seja, $Y \in \mathfrak{h}$, donde $d\pi_x(Y) = 0$, o que significa dizer que $X = 0$. Concluímos então que $\ker d\alpha_{xH} = \{0\}$, equivalendo a $d\alpha_{xH}$ ser

não singular. Portanto α é um difeomorfismo, demonstrando o teorema. \square

Vejamos alguns exemplos onde se aplica o teorema acima.

Exemplo 1.6 Definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \eta: SO(n) \times S^{n-1} &\longrightarrow S^{n-1} \\ (A, v) &\longmapsto A.v \end{aligned}$$

Claramente vemos que η é uma ação. Vamos mostrar que η é transitiva. Dado $u_1 \in S^{n-1}$, escolhemos $u_2, \dots, u_n \in S^{n-1}$ tal que

$$\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

seja uma base ortonormal do \mathbb{R}^n com a mesma orientação da sua base canônica $\varepsilon = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Cada elemento dessa nova base pode ser escrito da forma

$$u_i = (u_{1i}, \dots, u_{ni}) = \sum_{j=1}^n u_{ji} e_j, u_{ji} \in \mathbb{R}.$$

Tomando-se as coordenadas dos vetores de β , na ordem da base, construímos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Como a base β é formada a partir da base canônica, a menos de uma rotação, temos que A é ortogonal e $\det A = 1 = \det A^t$. Logo $A \in SO(n)$. De um modo mais geral, A é a matriz de mudança de base β para a base canônica $\{Ae_i = u_i, i = 1, 2, \dots, n\}$. Em particular $A(e_1) = u_1$. Portanto dados $u, v \in S^{n-1}$, basta tomar $A, B \in SO(n)$ tais que $A(e_1) = u$ e $B(e_1) = v$ que temos $AB^{-1} \in SO(n)$ e $AB^{-1}v = u$ mostrando que η é transitiva. Vamos provar agora que o conjunto

$$SO(n-1) = \left\{ A \in SO(n); A = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \tilde{A} & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \tilde{A} \in SO(n-1) \right\}$$

é o grupo de isotropia da ação η no ponto e_n , isto é, $SO(n-1) = SO(n)_{e_n}$. É imediato que $SO(n-1) \subset SO(n)_{e_n}$. Seja agora $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in SO(n)$ tal que $A.e_n = e_n$. Temos

daí que $\sum_{i=1}^n a_{in} \cdot e_n = a_{1n} \cdot 0 + a_{2n} \cdot 0 + \dots + a_{nn} \cdot 1 = 1$ o que implica que $a_{in} = 0$ para $i = 1, \dots, n-1$ e $a_{nn} = 1$. Como $AA^t = 1$ segue-se que $\sum_{i=1}^n a_{ni}^2 = 1$ e como $a_{nn}^2 = 1$ temos que $a_{ni} = 0$ para todo $i = 1, \dots, n-1$ e portanto

$$A = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \tilde{A} & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in SO(n)$ pois $\det \tilde{A} = 1$. Portanto pelo teorema anterior $SO(n)/SO(n-1)$ é difeomorfo a S^{n-1} . Usando o mesmo argumento acima podemos mostrar que $O(n)/O(n-1)$ é difeomorfo a S^{n-1} , porém sem a necessidade de tomar β na mesma direção da base canônica.

Exemplo 1.7 Primeiramente vamos indentificar os pontos de uma mesma reta que passa pela origem do \mathbb{R}^n , exceto a própria origem, através da seguinte relação: se $a, b \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, então $a \sim b$ se, e somente se, $a = \lambda b$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Consideremos a aplicação quociente $\pi : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\} / \sim$, e em $\mathbb{R}^n - \{0\} / \sim$ a topologia co-induzida por π . Desta forma, π é uma aplicação contínua. A restrição de π à esfera S^{n-1} é um recobrimento de duas folhas de $\mathbb{R}^n - \{0\} / \sim$. Como S^{n-1} é um subgrupo fechado de $\mathbb{R}^n - \{0\}$, pelo Teorema 1.40, existe uma única estrutura diferenciável em $\mathbb{R}^n - \{0\} / \sim$ tal que π é um difeomorfismo local. Assim podemos escrever $\mathbb{R}^n - \{0\} / \sim$ como sendo o espaço

$$\mathbb{P}^{n-1} = \{\bar{x} = \{x, -x\} : x \in S^{n-1}\}$$

chamado espaço projetivo real. A aplicação

$$\begin{aligned} \eta : SO(n) \times \mathbb{P}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{P}^{n-1} \\ (A, \bar{x}) &\longmapsto \overline{Ax} = \{Ax, -Ax\} \end{aligned}$$

está bem definida pois, se $(A, \bar{x}) = (A, \bar{y})$, então $\overline{Ax} = \overline{Ay}$, ou seja, $Ax = Ay$ ou $Ax = -Ay$, mas se isto ocorre, temos $x = y$ ou $x = -y$, ou seja $\bar{x} = \bar{y}$. Além disso, η é uma ação transitiva, ou seja, dados $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{P}^{n-1}$, existe $A \in SO(n)$, tal que $A\bar{x} = \bar{y}$. Para provarmos este resultado, tomemos $X, Y \in SO(n)$, tais que $Xe_1 = x$ ou $Xe_1 = -x$, e $Ye_1 = y$ ou $Ye_1 = -y$. Daí $X^{-1}x = e_1$ ou $X^{-1}(-x) = e_1$ e então

$$y = Ye_1 = Y(X^{-1}x) = (YX^{-1})x \text{ ou } y = Ye_1 = Y(X^{-1}(-x)) = (YX^{-1})(-x).$$

Logo, existe $A = YX^{-1} \in SO(n)$ tal que $Ax = y$ ou $A(-x) = y$, ou seja, $A\bar{x} = \bar{y}$, provando que a ação η é transitiva. O grupo de isotropia de $\bar{e}_n \in \mathbb{P}^{n-1}$ é o conjunto

$$O(n-1) = \left\{ A \in SO(n) : A = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \tilde{A} & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \det \tilde{A} \end{pmatrix} \text{ e } \tilde{A} \in O(n-1) \right\}.$$

De fato, se $A \in O(n-1)$, é fácil ver que $\overline{Ae_n} = \bar{e}_n$, pois neste caso $\det \tilde{A} = \pm 1$. Por outro lado, se $A \in SO(n)$ é tal que $\overline{Ae_n} = \bar{e}_n$, então $Ae_n = e_n$ ou $Ae_n = -e_n$, de onde se conclui que A é do tipo acima, o que demonstra a afirmação acima. Portanto pelo teorema anterior temos que \mathbb{P}^{n-1} é difeomorfo a $SO(n)/O(n-1)$.

Conjuntos controláveis

Neste capítulo apresentaremos limitantes superiores para o número de conjuntos controláveis em variedades "flag" de grupos de Lie reais simples não compactos. As estimativas apresentadas aqui para o número de conjuntos controláveis são baseados nos resultados de San Martin e Tonelli [20]. Estas estimativas são determinadas através da ordem do grupo de Weyl.

Na primeira seção veremos uma revisão dos principais resultados sobre ações de semigrupos e os conceitos de conjuntos controláveis e conjuntos controláveis invariantes para ações de semigrupos. Na seqüência estudaremos as variedades "flag", apresentando algumas decomposições canônicas de uma álgebra de Lie. Por fim apresentaremos uma estimativa para o número de conjuntos controláveis em variedades "flag" de grupos de Lie reais simples não compactos. Como referência principal indicamos [4]. Como referência para conjuntos controláveis para ações de semigrupos indicamos [16], [20], e [22].

2.1 Preliminares

Apresentaremos inicialmente alguns conceitos básicos e resultados sobre semigrupos e subsemigrupos de grupos topológicos e os conceitos de conjuntos controláveis e conjuntos controláveis invariantes.

Começamos definindo semigrupo.

Definição 2.1 *Um conjunto não vazio S com uma operação associativa é chamado de **semigrupo**.*

Definição 2.2 *Seja G um grupo. Um subconjunto $S \subset G$ é um **subsemigrupo** de G se S é fechado para a operação de G .*

Definição 2.3 Seja $S \neq \emptyset$ um espaço topológico munido com uma operação associativa

$$\begin{aligned} \mu : S \times S &\longrightarrow S \\ (x, y) &\longmapsto \mu(x, y) = xy \end{aligned}$$

Então, S é chamada um **semigrupo topológico** se μ é contínua como uma aplicação entre o espaço topológico produto $S \times S$ e o espaço topológico S .

Estudaremos o caso em que o semigrupo S está contido em um grupo topológico G . Neste caso, dizemos que S é um subsemigrupo topológico de G , mais precisamente temos a seguinte definição.

Definição 2.4 Seja G um grupo topológico. Um **subsemigrupo topológico** de G é um subconjunto $S \subset G$ com a topologia induzida e fechado para a operação de G .

Evidentemente, um subsemigrupo topológico é um semigrupo topológico.

Em particular em nosso trabalho o objetivo é estudar o caso em que G é um grupo de Lie.

Definiremos agora a ação de um semigrupo topológico em um espaço topológico.

Definição 2.5 Um semigrupo topológico S **age continuamente** em um espaço topológico M se a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : S \times M &\longrightarrow M \\ (g, x) &\longmapsto \phi(g, x) = gx \end{aligned}$$

é contínua e $\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x))$, para todo $g, h \in S$ e todo $x \in M$.

Dessa forma, quando fixamos $g \in S$, a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_g : M &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto \phi_g(x) = gx \end{aligned}$$

é também contínua.

Denote por $\text{int}(S)$ o conjunto dos pontos interiores de S em G . Sobre $\text{int}(S)$ temos o seguinte resultado:

Proposição 2.6 Sejam G um grupo topológico e $S \subset G$ um subsemigrupo com $\text{int}(S) \neq \emptyset$. Então:

- 1) $(\text{int}(S))S \cup S(\text{int}(S)) \subset \text{int}(S)$, isto é, $\text{int}(S)$ é um ideal de S .
- 2) Se G é conexo e a identidade $1 \in \text{int}(S)$, então $S = G$.

Demonstração: Veja Proposição V.0.15 em [10]. □

Como consequência desta proposição segue que não existem subsemigrupos próprios com interior não vazio em um grupo topológico compacto e conexo.

Proposição 2.7 *Seja G um grupo topológico compacto metrizável e $S \subset G$ um subsemigrupo com $\text{int}(S) \neq \emptyset$. Então, $1 \in \text{int}(S)$ e S é um subgrupo aberto e compacto de G . Além disso, se G for conexo, então $S = G$.*

Demonstração: Veja Proposição V.0.18 em [10] □

Vejam agora o conceito de subsemigrupo maximal.

Definição 2.8 *Seja G um grupo. Dizemos que um subsemigrupo $S \subset G$ é **maximal** se satisfaz:*

- 1) *Os únicos subsemigrupos contendo S são S e G ,*
- 2) *S não é um grupo.*

Sejam G um grupo topológico agindo num espaço topológico M e S um subsemigrupo de G . Dado $x \in M$ definimos os conjuntos:

$$\begin{aligned} Sx &= \{y \in M: \text{existe } g \in S \text{ com } gx = y\} \\ S^{-1}x &= \{y \in M: \text{existe } g \in S \text{ com } gy = x\}. \end{aligned}$$

O conjunto Sx é denominado órbita de x por S .

Vamos introduzir agora os conceitos de acessibilidade e transitividade para a ação de semigrupos topológicos.

Definição 2.9 *Um semigrupo topológico S é dito **acessível** a partir de $x \in M$ se $\text{int}(Sx) \neq \emptyset$. O semigrupo é dito **acessível** se for acessível a partir de todo $x \in M$.*

Definição 2.10 *Um semigrupo topológico S é dito **transitivo** ou que **age transitivamente** em M se $Sx = M$ para todo $x \in M$.*

Vejamos agora o conceito de transitividade aproximada.

Considere o conjunto $\mathcal{R}_{ap} = \{x \in M : x \in fe(Sx)\}$ denominado **conjunto de recorrência** para a ação do semigrupo S . Aqui $fe(Sx)$ denota o fecho de Sx .

Dados dois pontos $x, y \in \mathcal{R}_{ap}$ dizemos que $x \simeq y$ se, e somente se, $x \in fe(Sy)$ e $y \in fe(Sx)$. A relação \simeq é uma relação de equivalência em \mathcal{R}_{ap} .

Para cada $x \in \mathcal{R}_{ap}$, denotaremos por D_x a classe de equivalência da relação \simeq a qual x pertence e denominaremos esta classe de **conjunto de transitividade aproximada de x** .

A proposição abaixo nos dá uma condição necessária e suficiente para que um subconjunto do espaço X seja um conjunto de transitividade aproximada.

Proposição 2.11 *Seja D um subconjunto de M . Então D é um conjunto de transitividade aproximada para S se, e somente se, D satisfaz as seguintes propriedades:*

- 1) $D \subset fe(Sx)$, para todo $x \in D$ e
- 2) D é maximal satisfazendo a propriedade 1)

Demonstração: Veja Proposição 3.14 em [21] □

Definiremos agora o conceito de conjunto controlável.

Definição 2.12 *Um subconjunto $D \subset M$ é dito um **conjunto controlável** para S se:*

- 1) $int(D) \neq \emptyset$;
- 2) $D \subset fe(Sx)$, para todo $x \in D$ e
- 3) D é maximal satisfazendo essas duas propriedades.

Pela condição 2) os conjuntos controláveis são subconjuntos onde o semigrupo é aproximadamente transitivo. Esta transitividade aproximada pode ser melhorada para transitividade exata dentro de um subconjunto denso de D , definido da seguinte maneira:

$$D_0 = \{x \in D : x \in int(Sx) \cap int(S^{-1}x)\}.$$

Já que o semigrupo S é transitivo neste conjunto, dizemos que D_0 é o **conjunto de transitividade** de D . Quando $D_0 \neq \emptyset$ dizemos que D é um **conjunto controlável efetivo** para S .

Recordaremos agora algumas propriedades dos conjuntos controláveis.

Proposição 2.13 *Suponha que D é um conjunto controlável efetivo para S , isto é, $D_0 \neq \emptyset$. Então*

- 1) $D \subset \text{int}(S^{-1}x)$ para todo $x \in D_0$;
- 2) $D_0 = \text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x)$, para todo $x \in D_0$;
- 3) Para todo $x, y \in D_0$, existe $g \in S$ tal que $gx = y$;
- 4) D_0 é denso em D , ou seja $fe(D_0) = D$;
- 5) D_0 é S -invariante em D , isto é, $gx \in D_0$ se $g \in S$, $x \in D_0$ e $gx \in D$.

Demonstração: Veja Proposição 2.2 em [7]. □

Se M é uma variedade homogênea de um grupo topológico G , e se $\text{int}(S) \neq \emptyset$ então pode-se mostrar que $D_0 = (\text{int}(S))D \cap D$. Para maiores detalhes veja Proposição 2.2 em [20].

Recordaremos agora a definição de conjunto controlável invariante para S . Para mais informações sobre estes conjuntos indicamos [17].

Definição 2.14 *Um subconjunto $C \subset M$ é dito um **conjunto controlável invariante** para S se:*

- 1) $\text{int}(C) \neq \emptyset$;
- 2) $fe(C) = fe(Sx)$, para todo $x \in C$ e
- 3) C é maximal satisfazendo essas duas propriedades.

Em outras palavras, C é um conjunto controlável invariante para S em M se C é um conjunto controlável com $fe(C) = fe(Sx)$, para todo $x \in C$.

Sabemos de [17] que se S é um semigrupo de interior não vazio agindo num espaço homogêneo compacto G/H , então todo conjunto controlável invariante é efetivo.

Os conjuntos controláveis podem não existir para ações de semigrupos em espaços homogêneos quaisquer. Tomemos, como exemplo, o semigrupo das translações $\{g : g(x) = x + t : t \geq 0\}$ agindo na reta real.

Temos então, a seguinte proposição sobre a existência de conjuntos controláveis invariantes.

Proposição 2.15 *Sejam G um grupo topológico e $S \subset G$ um subsemigrupo com $\text{int}(S) \neq \emptyset$. Suponha que G age continuamente sobre um espaço topológico M . Se*

$$C = \bigcap_{x \in M} fe(Sx) \neq \emptyset,$$

então C é o único conjunto controlável invariante para S em M .

Demonstração: Veja Lema 3.1 em [1]. □

2.2 Conjuntos controláveis em variedades flag

Estudaremos agora, ações de semigrupos em **variedades "flag"** (também chamadas de fronteiras de G), ou seja, em espaços homogêneos G/H , onde G é um grupo de Lie semisimples real e não compacto, e H é um subgrupo parabólico de G . Para uma teoria mais detalhada sobre subgrupos parabólicos e variedades "flag" tome como referência [23] e [25].

Em seguida consideraremos os conjuntos controláveis para ações de semigrupos em variedades "flag". Isto será feito em termos do grupo de Weyl. Para mais detalhes indicamos [20].

Seja G grupo de Lie semisimples real com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Tomemos uma decomposição de Cartan de \mathfrak{g} dada pela soma direta

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$$

onde \mathfrak{k} é uma subálgebra compacta imersa de \mathfrak{g} e \mathfrak{s} é o seu complementar ortogonal em relação a forma de Cartan-Killing.

Seja \mathfrak{a} um álgebra abeliana maximal contida em \mathfrak{s} e denote por Δ o conjunto de raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$.

Fixe um sistema simples de raízes $\Pi \subset \Delta$ e denote por Δ^+ o conjunto das raízes positivas e por \mathfrak{a}^+ a câmara de Weyl dada por

$$\mathfrak{a}^+ = \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) > 0 \text{ para todo } \alpha \in \Delta\}.$$

Agora considere a decomposição de Iwasawa

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$$

onde $\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$ é uma subálgebra nilpotente de \mathfrak{g} , com os \mathfrak{g}_α definidos anteriormente.

A subálgebra parabólica minimal canônica de \mathfrak{g} é definida por

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$$

onde \mathfrak{m} é o centralizador de \mathfrak{a} em \mathfrak{k} , isto é

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}\mathfrak{a} = \{X \in \mathfrak{k} : [X, H] = 0 \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}.$$

Agora dado um subconjunto $\Theta \subset \Pi$, denotemos por $\langle \Theta \rangle^+$ o subconjunto das raízes em Δ^+ gerado por Θ . Seja

$$\mathfrak{n}^-(\Theta) = \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

a subálgebra de \mathfrak{n}^- gerada pelos espaços de raízes $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ com $\alpha \in \langle \Theta \rangle^+$.

A subálgebra parabólica \mathfrak{p}_Θ é definida por

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{n}^-(\Theta) \oplus \mathfrak{p}.$$

O subgrupo parabólico P_Θ de G é o normalizador de \mathfrak{p}_Θ em G , isto é,

$$P_\Theta = \{g \in G : \text{Ad}(g)\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p}_\Theta\}.$$

Denotaremos por $\mathbb{B}_\Theta = G/P_\Theta$ a variedade flag correspondente. Em particular se Θ é vazio o subscrito é omitido e assim $\mathbb{B} = G/P$ é chamada **variedade "flag" maximal** de G .

Tome agora a decomposição global de Iwasawa de G dada pelo produto

$$G = KAN^+$$

onde $K = \langle \exp \mathfrak{k} \rangle$, $A = \exp \mathfrak{a}$ e $N^+ = \exp \mathfrak{n}^+$. Coloquemos $A^+ = \exp \mathfrak{a}^+$.

Seja M o centralizador de A em K , isto é

$$\begin{aligned} M &= \{u \in K : uhu^{-1} = h \text{ para todo } h \in A\} \\ &= \{u \in K : \text{Ad}(u)H = H \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\} \end{aligned}$$

e M^* o normalizador de \mathfrak{a} em K , ou seja,

$$\begin{aligned} M^* &= \{u \in K : uAu^{-1} = A\} \\ &= \{u \in K : \text{Ad}(u)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}. \end{aligned}$$

O grupo finito $W = M^*/M$ é o **grupo de Weyl** do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$.

Vamos considerar a seguir a ação dos elementos regulares em \mathbb{B} . No caso de outras variedades flag \mathbb{B}_Θ o procedimento é análogo. Um elemento $X \in \mathfrak{g}$ é **regular** em \mathfrak{g} se ele é da forma $X = \text{Ad}(g)(H)$, para algum $g \in G, H \in \mathfrak{a}^+$. Analogamente, um elemento $h \in G$ é regular em G se ele é um exponencial $h = \exp H$, onde H é regular em \mathfrak{g} . Um elemento regular H em \mathfrak{g} pertence a uma única câmara de Weyl em \mathfrak{g} , a menos de uma conjugação de W .

Denotemos por $b_0 = P$ a origem em \mathbb{B} . Assim a órbita $N^-b_0 = \text{Ad}(N^-)b_0$ é aberta e densa em \mathbb{B} . Esta órbita é chamada de **componente aberta de Bruhat**. Tem-se também que b_0 é o único atrator para $h \in A^+$ com variedade estável dada por N^-b_0 no sentido que se $x \in N^-b_0$ então $h^i x \rightarrow b_0$ para todo $h \in A^+$. No caso de uma variedade "flag" arbitrária \mathbb{B}_Θ , usando notações análogas, temos que a órbita N^-b_Θ é aberta e densa em \mathbb{B}_Θ , onde b_Θ denota a origem em \mathbb{B}_Θ e b_Θ é o único atrator para $h \in A^+$ com variedade estável N^-b_Θ .

Sobre os pontos fixos de um elemento regular $h_0 \in A^+$, temos que eles são dados por wb_0 com $w \in W$. Estes são um número finito pois W é um grupo finito. Aqui wb_0 é um elemento da órbita Wb_0 , de b_0 que é dada pela ação natural a esquerda de W em \mathbb{B} . Da mesma forma, os pontos fixos em \mathbb{B} de um elemento regular $h = gh_0g^{-1}$ com $g \in G, h_0 \in A^+$ são finitos e dados pelos pontos gwP .

Dizemos que gwP é o **ponto fixo do tipo w para h em \mathbb{B}** e iremos denotá-los por $\text{fix}(h, w)$. Estes pontos fixos desempenham um papel central na descrição dos conjuntos controláveis para ações de semigrupos em \mathbb{B} como veremos na proposição abaixo.

Agora tome $S \subset G$ um subsemigrupo com $\text{int}(S) \neq \emptyset$. Denote por $\text{Re}(S)$ o conjunto dos elementos regulares em $\text{int}(S)$, ou seja,

$$\text{Re}(S) = \{h \in G : h \in gA^+g^{-1} \cap \text{int}(S)\}.$$

Temos que S age numa variedade "flag" de G . Em [20], os conjuntos controláveis efetivos para ação de um semigrupo S sobre as variedades "flag" foram descritos através

do grupo de Weyl W . Aqui, vamos considerar somente os conjuntos controláveis efetivos sobre o flag maximal, já que sobre as outras variedades "flag" eles podem ser estudados mediante fibrações.

Considere então a involução principal w_0 em relação ao sistema simples de raízes, isto é, w_0 é o único elemento em W tal que

$$w_0(\Pi) = -\Pi$$

onde Π é o sistema simples de raízes associado a A^+ .

Assim temos a seguinte proposição:

Proposição 2.16 *Com as notações acima, tem-se:*

1) Para todo $w \in W$, existe um conjunto controlável efetivo $D_w = D_w(S)$, em \mathbb{B} tal que o seu conjunto de transitividade é dado por

$$(D_w)_0 = \{\text{fix}(h, w) \in \mathbb{B} : h \in \text{Re}(S)\}.$$

2) Temos que $\text{fix}(h, 1)$ é o atrator para os elementos $h \in \text{Re}(S)$ e D_1 é o único conjunto controlável invariante para S em \mathbb{B} .

3) Seja w_0 a involução de Cartan. Então, $\text{fix}(h, w_0)$ é o repulsor para os elementos $h \in \text{Re}(S)$. Além disso, temos que $(D_{w_0})_0$ é o conjunto de transitividade do conjunto controlável invariante $D(S^{-1})$ para S^{-1} , ou seja, $(D_{w_0})_0 = D_0(S^{-1})$.

4) Reciprocamente, se D é um conjunto controlável efetivo para S em \mathbb{B} , então $D = D_w$ para algum $w \in W$.

Demonstração: Veja [20], Teoremas 3.2 e 3.5. □

Do resultado acima temos uma aplicação

$$w \longrightarrow D_w$$

que associa, a cada $w \in W$, um conjunto controlável efetivo D_w na variedade "flag" maximal \mathbb{B} .

Consideremos o subconjunto de W definido por

$$W(S) = \{w \in W : D_w = D_1\}.$$

Temos que $W(S)$ é o subconjunto de elementos w tal que D_w é um conjunto controlável invariante para S . Em [20] foi demonstrado que $W(S)$ é um subgrupo de W .

Uma descrição dos conjuntos controláveis em termos do grupo de Weyl é dado por:

Proposição 2.17 *Com as notações acima temos que para $w_1, w_2 \in W$, tem-se $D_{w_1} = D_{w_2}$ em \mathbb{B} se, e somente se, $w_1 w_2^{-1} \in W(S)$.*

Demonstração: Veja Proposição 4.2 em [20]. □

Como uma consequência da proposição anterior podemos contar o número de conjuntos controláveis efetivos nas variedades "flag" \mathbb{B}_Θ .

Proposição 2.18 *Seja S um semigrupo com pontos interiores em G . O número de conjuntos controláveis na variedade "flag" \mathbb{B}_Θ é igual a ordem do conjunto*

$$W(S) \backslash W/W_\Theta$$

onde W_Θ é o subgrupo de W gerado pelas reflexões com respeito as raízes simples em Θ . Consequentemente, um limitante superior para o número de conjuntos controláveis efetivos sobre a variedade "flag" \mathbb{B}_Θ é a ordem de W/W_Θ .

Demonstração: Corolário 5.2 em [20]. □

Podemos encontrar aplicações deste resultado em [6] e [15].

Apresentamos agora, o exemplo em que $G = Sl(n, \mathbb{R})$ que foi desenvolvido em [20].

Exemplo 2.1 *Seja $G = Sl(n, \mathbb{R})$, o grupo de Lie das matrizes reais com determinante igual a 1.*

A álgebra de Lie de G é $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, a álgebra de Lie das matrizes de traço zero.

Uma decomposição de Cartan de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ é

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{s}(n, \mathbb{R})$$

onde $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ é a subálgebra das matrizes anti-simétricas em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, e $\mathfrak{s}(n, \mathbb{R})$ é o subespaço das matrizes simétricas em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$.

Como $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ é a forma real normal da álgebra de Lie semisimples complexa $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, as subálgebras abelianas maximais de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ são as subálgebras de Cartan. Uma dessas subálgebras é a subálgebra $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}(n, \mathbb{R})$ dada pelas matrizes reais diagonais com traço zero.

As raízes são dadas por

$$\alpha_{i,j} = \lambda_i - \lambda_j, \quad i \neq j,$$

onde os λ_i são funcionais lineares definidos por $\lambda_i(H) = a_i$ com $H = \text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$, ou seja $\Delta = \{\alpha_{i,j} : i \neq j\}$.

Um sistema simples de raízes é dado por

$$\Pi = \{\alpha_{i,i+1} : i = 1, \dots, n-1\}.$$

Escreveremos $\alpha_i = \alpha_{i,i+1}$. Logo toda raiz $\alpha_{i,j}$ é escrita como combinações lineares inteiras de mesmo sinal de elementos α_i de Π . Em relação a esse sistema simples de raízes, um sistema de raízes positivas é dada por

$$\Delta^+ = \{\alpha_{i,j} : i < j\}.$$

A decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ é

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$$

onde \mathfrak{n}^+ é a subálgebra nilpotente das matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal.

A nível de grupo, a decomposição global de Iwasawa é dada por

$$Sl(n, \mathbb{R}) = SO(n, \mathbb{R}).A.N^+$$

onde $SO(n, \mathbb{R})$ é o subgrupo compacto das matrizes ortogonais com determinante 1, A é o subgrupo de Lie das matrizes diagonais cujo produto dos elementos da diagonal é 1 e N^+ é o grupo de Lie nilpotente dado pelas matrizes triangulares superiores com os elementos da diagonal iguais a 1..

O subgrupo parabólico minimal é dado por

$$P = MAN^+$$

onde M é o grupo das matrizes diagonais em $Sl(n, \mathbb{R})$ cujos elementos nas diagonais são ± 1 .

O grupo de Weyl age em \mathfrak{a} como o grupo das permutações de n elementos,

$$\text{diag}\{a_1, \dots, a_n\} \longrightarrow \text{diag}\{a_{i_1}, \dots, a_{i_n}\}.$$

Os intervalos em Π são os conjuntos do tipo

$$\Pi(i, j) = \{\alpha_{r, r+1} : i \leq r \leq j\}.$$

Assim qualquer subconjunto $\Theta \subset \Pi$ pode ser escrito como a união disjunta

$$\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k)$$

onde $j_l + 1 < i_{l+1}$ para todo $l = 1, \dots, k-1$. Dado Θ desta maneira, W_Θ será então o produto direto dos grupos de permutação dos subconjuntos $\{i_1, \dots, j_{l+1}\}$, $l = 1, \dots, k$. Temos também que \mathbb{B}_Θ pode ser visto como

$$F^n(1, \dots, i_1 - 1, j_1 + 1, \dots, i_k - 1, j_k + 1, j_k + 2, \dots, n)$$

onde $F^n(r_1, \dots, r_s)$ é a variedade de "flags" $V_1 \subset \dots \subset V_s$ com V_i subespaço euclidiano de dimensão r_i .

A ordem de W_Θ é dado por

$$|W_\Theta| = (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!.$$

Assim pela Proposição 2.18 temos que o número de conjuntos controláveis efetivos em \mathbb{B}_Θ é no máximo a ordem de W/W_Θ que é

$$\frac{n!}{(j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!}.$$

Em particular se \mathbb{B}_Θ é o espaço projetivo RP^{n-1} , temos que $\Theta = \Pi(2, n-1)$ e portanto existem no máximo

$$n = \frac{n!}{(n-1)!}$$

conjuntos controláveis efetivos em RP^{n-1} para a ação de qualquer semigrupo $S \subset Sl(n, \mathbb{R})$, com $\text{int}(S) \neq \emptyset$.

Se $\mathbb{B}_\Theta = Gr_k(n)$ é a grassmanniana dos subespaços de dimensão k em \mathbb{R}^n , temos que $\Theta = \Pi(1, k-1) \cup \Pi(k+1, n-1)$ é maximal e portanto existem no máximo

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

conjuntos controláveis efetivos nos flags minimais $Gr_k(n)$ para a ação de qualquer semigrupo de $Sl(n, \mathbb{R})$ de interior não vazio.

Vejamos mais especificamente:

Seja $G = Sl(5, \mathbb{R})$. Tome $\Theta = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_3 - \lambda_4, \lambda_4 - \lambda_5\}$. Temos que $\Theta = \Pi(1, 1) \cup \Pi(3, 4)$ e W_Θ é o produto direto do grupo de permutações dos conjuntos $\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$. Temos também $B_\Theta = Gr_2(5)$ é a grassmanniana dos subespaços de dimensão 2 em \mathbb{R}^5 . Portanto existem no máximo

$$|W/W_\Theta| = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

conjuntos controláveis efetivos em $Gr_2(5)$.

Se tomarmos $G = Sl(3, \mathbb{R})$, as possibilidades para Θ nos fornecem o flag maximal $F^3(1, 2)$, o espaço projetivo RP^2 e a grassmanniana $Gr_2(3)$. Para $\Theta_1 = \Pi(1, 1)$ e $\Theta_2 = \Pi(2, 2)$ temos que $B_{\Theta_1} = Gr_2(3)$ e $B_{\Theta_2} = RP^2$. Logo $W_{\Theta_1} = \{1, (1, 2)\}$ e $W_{\Theta_2} = \{1, (2, 3)\}$. Existem três possibilidades para $W(S)$ que são $W_{\Theta_1}, W_{\Theta_2}$ e $\{1\}$. No flag maximal temos $W_\Theta = \{1\}$ e portanto $W = W/W_\Theta$ tem 6 elementos. Logo assumindo que $W(S) = W_{\Theta_2}$ existem

$$|W(S) \setminus W| = \frac{6}{2!} = 3$$

conjuntos controláveis efetivos no flag maximal. Pela Proposição 2.17 temos que $D_{(1,2)} = D_{(1,3,2)}$, $D_{(1,3)} = D_{(1,2,3)}$ e $D_1 = D_{(2,3)}$. Estes são os conjuntos controláveis efetivos no flag maximal.

Analisaremos agora o caso em que o grupo de Lie é o grupo simplético $Sp(n, \mathbb{R})$.

Exemplo 2.2 O grupo simplético é definido por

$$Sp(n, \mathbb{R}) = \{g \in Gl(2n, \mathbb{R}) : g^t J g = J\}$$

onde J é uma matriz $2n \times 2n$ escrito em blocos $n \times n$ como

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seja \mathbb{R}^{2n} um espaço euclidiano de dimensão par. Em blocos $n \times n$ os elementos de $Sp(n, \mathbb{R})$ são da forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

com $ba^t = ab^t$, $dc^t = cd^t$ e $da^t - cb^t = 1$. De fato, basta resolver a equação

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A álgebra de Lie do grupo simplético é

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) = \{X : XJ + JX^t = 0\}$$

e pode ser vista em blocos $n \times n$ como a subálgebra das matrizes $2n \times 2n$ da forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$$

com A, B, C matrizes reais e B e C matrizes simétricas.

Uma decomposição de Cartan de $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ é dada por

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s},$$

onde \mathfrak{k} é a álgebra das matrizes anti-simétricas em $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$, ou seja,

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} ; A \text{ é anti-simétrica e } B \text{ é simétrica} \right\}$$

e \mathfrak{s} é o subespaço das matrizes simétricas em $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$, ou seja,

$$\mathfrak{s} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} : A, B \text{ são matrizes simétricas} \right\}.$$

A involução de Cartan é definida por $\theta(X) = -X^t$. A álgebra \mathfrak{k} é isomorfa a $\mathfrak{u}(n)$ que é a álgebra das matrizes complexas $n \times n$ que são anti-hermitianas (isto é, $X^* = \overline{X}^t = -X$).

O isomorfismo é dado da seguinte maneira. Se X é uma matriz complexa $n \times n$, podemos escrever $X = A + iB$, com A e B matrizes reais e $X = A + iB$ é anti-hermitiana se, e somente se, A é anti-simétrica e B é simétrica. Assim, o isomorfismo é dado por

$$A + iB \longleftrightarrow \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Seja K o grupo conexo cuja álgebra é \mathfrak{k} . A decomposição de Cartan de $Sp(n, \mathbb{R})$ é

$$Sp(n, \mathbb{R}) = KS$$

onde S é conjunto das matrizes simétricas positivas definidas em $Sp(n, \mathbb{R})$. Como $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(2n, \mathbb{R}) \cap \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ temos que $K = SO(2n, \mathbb{R}) \cap Sp(n, \mathbb{R})$. Mas, $SO(2n, \mathbb{R}) \cap Sp(n, \mathbb{R})$ é isomorfo a $U(n)$, o grupo das matrizes complexas g que são $n \times n$ e que satisfazem $g^*g = 1$, onde $g^* = \overline{g}^t$. O isomorfismo é dado da mesma forma por

$$g = a + ib \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

De fato, se $g \in SO(2n, \mathbb{R}) \cap Sp(n, \mathbb{R})$, então $gg^t = 1$ e $g^t J g = J$ e portanto,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K \text{ se, e somente se, } b = -c, a = d, aa^t + bb^t = 1 \text{ e } ab^t = ba^t.$$

Por outro lado, uma matriz complexa $g = a + bi$ é unitária se, e só se,

$$gg^* = (a + bi)(a^t - ib^t) = 1.$$

Logo, g é unitária se, e somente se,

$$aa^t + bb^t = 1 \text{ e } ab^t = ba^t$$

e estas são também as condições para que uma matriz

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

pertença a K .

As subálgebras abelianas maximais de \mathfrak{s} são as subálgebras de Cartan, pois $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ é uma forma real normal da álgebra complexa simples $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$. Uma dessas subálgebras é a subálgebra \mathfrak{a} das matrizes diagonais

$$\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & -H \end{pmatrix}$$

em $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$, onde H é uma matriz diagonal $n \times n$.

Seja $\mathfrak{a}^+ = \{\text{diag}(a_1, \dots, a_n, -a_1, \dots, -a_n) : a_1 > \dots > a_n > 0\}$ uma câmara de Weyl em \mathfrak{a} .

Seja $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n, -a_1, \dots, -a_n)$. Definamos o funcional linear λ_i por $\lambda_i(A) = a_i$. Um sistema de raízes positivas será

$$\Delta^+ = \{\lambda_i - \lambda_j : 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\lambda_i + \lambda_j : 1 \leq i, j \leq n\}.$$

Um sistema simples de raízes gerando Δ^+ é dado por

$$\Pi = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_n, 2\lambda_n\}.$$

Sejam Ξ o grupo de permutações de $\{1, \dots, n\}$ e Γ o grupo multiplicativo das n -uplas $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, onde os ϵ_i 's são ± 1 e a multiplicação é feita componente a componente. Temos que Ξ age em \mathfrak{a} como o grupo de permutações

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n, -a_1, \dots, -a_n) \longrightarrow \text{diag}(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}, -a_{i_1}, \dots, -a_{i_n})$$

Temos também que Γ age em \mathfrak{a} como o grupo

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n, -a_1, \dots, -a_n) \longrightarrow \text{diag}(\epsilon_1 a_1, \dots, \epsilon_n a_n, -\epsilon_1 a_1, \dots, -\epsilon_n a_n).$$

O grupo de Weyl é o grupo correspondente a ação de $\Xi\Gamma = \Gamma\Xi$ em \mathfrak{a} e tem $2^n n!$ elementos.

O subespaço de raízes associado a $\lambda_i - \lambda_j$ são as matrizes em $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ cujas únicas entradas não nulas são i, j e $j + n, i + n$ que aparecem nos blocos diagonais (em A e $-A^t$). O subespaço de raízes associado a $\lambda_i + \lambda_j$ são as matrizes em $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ cujas únicas entradas não nulas são $i, j + n$ e $j, i + n$ que aparecem no bloco superior direito (em B). Assim \mathfrak{n}^+ é dado pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^t \end{pmatrix}$$

onde A é uma matriz triangular superior com diagonal nula e B simétrica.

Como \mathfrak{a} é uma subálgebra de Cartan temos que o centralizador \mathfrak{m} de \mathfrak{a} em \mathfrak{k} é nulo.

A subálgebra parabólica minimal é $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$.

Se $\mathfrak{n}^- = \sum_{-\alpha \in \Delta^+} g_\alpha$, então

$$\mathfrak{n}^- = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & -A^t \end{pmatrix} : A \text{ é triangular inferior com diagonal nula e } B \text{ é simétrica} \right\}.$$

Dado um subconjunto $\Theta \subset \Pi$ temos a subálgebra parabólica $\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{n}_\Theta^- + \mathfrak{p}$, onde \mathfrak{n}_Θ^- é a subálgebra de \mathfrak{n}^- gerada pelo espaço de raízes de $-\Theta$. Vamos determinar as subálgebras parabólicas maximais, que são aquelas em que Θ é maximal, ou seja, em que Θ é o complementar de um subconjunto unitário de Π . As subálgebras parabólicas maximais então associadas aos "flags" minimais. Explicitamente temos:

- $\mathfrak{p}_{\Pi - 2\lambda_n}$ é a subálgebra de matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^t \end{pmatrix},$$

onde A é uma matriz qualquer e B é uma matriz simétrica. Isto ocorre já que os espaços de raízes associadas a $\lambda_i - \lambda_j$ estão contidos nos blocos diagonais. Como $\Pi - 2\lambda_n$ contém todas as raízes simples dessa forma, temos que $\mathfrak{n}_{\Pi - 2\lambda_n}^-$ são as matrizes em que A é triangular inferior com diagonal nula.

- $\mathfrak{p}_{\Pi - \{\lambda_i - \lambda_{i+1}\}}$, $i \leq n - 1$ é a álgebra das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$$

onde

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} : \alpha \text{ é uma matriz } i \times i \text{ arbitrária} \right\},$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : d \text{ é } n - i \times n - i \text{ e simétrica} \right\}$$

e B é simétrica. Assim, $\mathbf{p}_{\Pi - \{\lambda_i - \lambda_{i+1}\}}$ é a subálgebra das matrizes simpléticas das forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

onde α é uma matriz $i \times i$. Para se obter a subálgebra parabólica $\mathbf{p}_{\Pi - \{\lambda_i - \lambda_{i+1}\}}$ deve-se olhar todas as raízes que podem ser obtidas por combinações (somadas) de $\lambda_{j+1} - \lambda_j = -(\lambda_j - \lambda_{j+1})$, $j \neq i$, $j \leq n - 1$ e $-2\lambda_n$ e, a partir daí olhar os espaços das matrizes correspondentes. Fazendo apenas combinações de $\lambda_{j+1} - \lambda_j$, obtemos espaços de pesos apenas nos blocos diagonais e, como $j \neq i$, as entradas de A que são cobertas são apenas as indicadas.

Já para determinar C , suponhamos inicialmente que $i = n - 1$. Assim, nenhuma combinação de $\lambda_{j+1} - \lambda_j$, $j < n - 1$ com $-2\lambda_n$ nos fornece raiz. Logo, a única raiz que não é da forma $\lambda_r - \lambda_s$ (cujo espaço de raízes está fora dos blocos diagonais) que aparece é $-2\lambda_n$. O espaço dessa raiz é o que tem entrada em $2n \times n$ e isso nos fornece C , como foi indicado, e com d matriz 1×1 . Para $i \neq n - 1$ as raízes fora dos blocos diagonais que são obtidas por combinações, são obtidas reiteradamente como

$$(\lambda_n - \lambda_{n-1}) - 2\lambda_n = -\lambda_{n-1} - \lambda_n$$

⋮

$$(\lambda_{j+1} - \lambda_j) - (\lambda_{j+1} + \lambda_n) = -\lambda_j - \lambda_n$$

e

$$-(\lambda_{n-2} + \lambda_n) + (\lambda_n - \lambda_{n-1}) = -\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1}$$

⋮

$$-(\lambda_j + \lambda_{j+2}) + (\lambda_{j+2} - \lambda_{j+1}) = -\lambda_j - \lambda_{j+1}.$$

Logo as raízes que são obtidas por combinações são $-(\lambda_r + \lambda_s)$ com $r, s > i$ e os espaços de raízes preenchem C como indicado, com d uma matriz $n - i \times n - i$.

O subgrupo parabólico minimal é dado por

$$P = MAN^+$$

onde A e N^+ são os grupos exponenciais de \mathfrak{a} e \mathfrak{n}^+ respectivamente. Assim,

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h^{-1} \end{pmatrix} : h \text{ é uma matriz } n \times n \text{ e diagonal} \right\},$$

$$N^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & (a^{-1})^t \end{pmatrix} \right\}$$

onde a é triangular superior com 1's na diagonal principal e b é tal que $ba^t = ab^t$. M é o conjunto das matrizes

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

onde a é diagonal com entradas ± 1 .

Seja $L_k(n)$ a Grasmanniana dos subespaços isotrópicos de dimensão k em \mathbb{R}^{2n} para $k \leq n$.

Em [3] mostra-se que os "flags" minimais de $Sp(n, \mathbb{R})$ associados aos conjuntos

$\Pi - \{\lambda_k - \lambda_{k+1}\}$ se $k \leq n - 1$ e a $\Pi - \{2\lambda_n\}$ se $k = n$ são $L_k(n)$.

Vamos analisar agora o número de conjuntos controláveis.

Como vimos acima, o grupo de Weyl W possui $2^n n!$ elementos.

Para $\Theta = \Pi - \{\lambda_k - \lambda_{k+1}\}$ com $k \leq n - 1$ temos que a ordem de W_Θ é $k! 2^{n-k} (n - k)!$.

Logo pela Proposição 2.18 existem no máximo

$$\frac{2^n n!}{k! 2^{n-k} (n - k)!} = \frac{2^k n!}{k! (n - k)!} = 2^k \binom{n}{k}$$

conjuntos controláveis efetivos em $L_k(n)$ para a ação de qualquer semigrupo $S \subset Sp(n, \mathbb{R})$ com pontos interiores.

Para $\Theta = \Pi - \{2\lambda_n\}$ temos que W_Θ é o grupo de permutações em n elementos.

Portanto pela Proposição 2.18 existem no máximo

$$\frac{2^n n!}{n!} = 2^n$$

conjuntos controláveis efetivos em $L_k(n)$ para a ação de qualquer semigrupo $S \subset Sp(n, \mathbb{R})$ com pontos interiores.

Agora analisaremos o número máximo de conjuntos controláveis efetivos em qualquer flag \mathbb{B}_Θ .

Seja $\Pi(i, j) = \{\lambda_r - \lambda_{r+1} : i \leq r \leq j \text{ e } j < n\}$. Qualquer subconjunto $\Theta \subset \Pi$ é uma das uniões disjuntas

$$\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k) \cup \{2\lambda_n\}$$

ou

$$\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k)$$

com $j_l + 1 < i_{l+1}$ para todo $l = 1, \dots, k - 1$ e $k \leq n - 1$.

Se $\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k)$ temos que W_Θ é o produto direto dos grupos de permutações dos conjuntos $\{i_l, \dots, j_l + 1\}$. Logo a ordem de W_Θ é

$$|W_\Theta| = (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!.$$

Portanto o número de conjuntos controláveis efetivos em \mathbb{B}_Θ é no máximo

$$|W/W_\Theta| = \frac{2^n n!}{(j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!}.$$

Se $\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k) \cup \{2\lambda_n\}$ temos duas possibilidades a considerar:

$$j_k = n - 1 \text{ ou } j_k < n - 1.$$

Caso $j_k = n - 1$ temos que

$$|W_\Theta| = (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_{k-1} - i_{k-1} + 2)! (n - i_k)! 2^{n-i_k}.$$

Logo existem no máximo

$$\frac{2^{i_k} n!}{(j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_{k-1} - i_{k-1} + 2)! (n - i_k)!}$$

conjuntos controláveis efetivos em \mathbb{B}_Θ .

Já se $j_k < n - 1$ a ordem de W_Θ será $(j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)! 2$ e existem no máximo

$$\frac{2^{n-1} n!}{(j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!}$$

conjuntos controláveis efetivos em \mathbb{B}_Θ .

2.3 Número máximo de conjuntos controláveis efetivos

Determinaremos agora um limitante superior para o número de conjuntos controláveis efetivos em variedades "flag" de um grupo de Lie simples real não compacto para ação

de um semigrupo S de interior não vazio contido neste grupo. Isso será feito analisando o tipo de sistema simples de raízes, como em [4].

O diagrama de Dynkin associado ao sistema de raízes nos permite determinar a ordem de W_Θ , o subgrupo do grupo de Weyl gerado pelas reflexões com respeito as raízes simples em Θ . O fato é que o diagrama de Dynkin correspondente para Θ é composto por diagramas de tipos conhecidos, os quais são mencionados no apêndice B. A ordem de W_Θ é o produto das ordens dos grupos de Weyl correspondente aos diagramas.

2.3.1 O caso $\Pi = A_l$

A_l é um sistema simples de raízes da álgebra de Lie simples $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{R})$ das matrizes de traço zero. Uma decomposição de Cartan de $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{R})$ é

$$\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(l+1, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{s}(l+1, \mathbb{R})$$

onde $\mathfrak{so}(l+1, \mathbb{R})$ é a subálgebra de Lie das matrizes anti-simétricas e $\mathfrak{s}(l+1, \mathbb{R})$ é o subespaço das matrizes simétricas. Como $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{R})$ é a forma real normal da álgebra de Lie simples complexa $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C})$, as subálgebras abelianas maximais são as subálgebras de Cartan. Uma dessas subálgebras de Cartan é a subálgebra $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}(l+1, \mathbb{R})$ das matrizes diagonais com traço zero. Definimos o funcional linear λ_i de \mathfrak{a} como

$$diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longrightarrow \lambda_i.$$

Um sistema simples de raízes é $\Pi = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_l - \lambda_{l+1}\}$. Usaremos a notação $\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ $i = 1, \dots, l$.

O diagrama de Dynkin é

$$A_l, l \geq 1 \quad \begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \text{---} \cdots \text{---} \circ \text{---} \circ \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \quad \quad \alpha_{l-1} \quad \alpha_l \end{array}$$

O grupo de Weyl age em \mathfrak{a} como o grupo de permutações

$$diag(a_1, \dots, a_{l+1}) \longrightarrow diag(a_{i_1}, \dots, a_{i_{l+1}}).$$

Portanto o grupo de Weyl W é o grupo de permutações de $l+1$ elementos e tem $(l+1)!$ elementos.

Um intervalo em Π é o conjunto $\Pi(i, j) = \{\alpha_r : i \leq r \leq j\}$. Assim qualquer subconjunto $\Theta \subset \Pi$ é da forma

$$\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k)$$

com $j_n + 1 < i_{n+1}$ para todo $n = 1, \dots, k - 1$. Dado Θ desta maneira, W_Θ será então o produto direto dos grupos de permutações dos subconjuntos $\{i_n, \dots, j_n + 1\}$, $n = 1, \dots, k$.

O diagrama correspondente para Θ é composto de k diagramas do tipo $A_{j_n - i_n + 1}$. Conseqüentemente a ordem de W_Θ é

$$|W_\Theta| = (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!$$

Pela Proposição 2.18 temos que o número de conjuntos controláveis efetivos para S em \mathbb{B}_Θ é no máximo

$$|W/W_\Theta| = (l + 1)! / (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!$$

2.3.2 O caso $\Pi = C_l$

C_l é um sistema simples de raízes da álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(l, \mathbb{R})$. O conjunto de raízes simples é

$$\Pi = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l\}.$$

Usaremos a notação $\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ $i = 1, \dots, l - 1$ e $\alpha_l = 2\lambda_l$.

O diagrama de Dynkin é

$$C_l, l \geq 3 \quad \alpha_1 \text{---} \alpha_2 \text{---} \dots \text{---} \alpha_{l-1} \text{---} \alpha_l$$

O grupo de Weyl W tem $2^l l!$ elementos. Consideremos os intervalos

$$\Pi(i, j) = \{\lambda_r - \lambda_{r+1} : i \leq r \leq j \text{ e } j < l\}.$$

Qualquer subconjunto $\Theta \subset \Pi$ pode ser escrito como uma soma das uniões disjuntas

$$\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k) \cup \{2\lambda_l\}$$

ou

$$\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k)$$

onde $j_n + 1 < i_{n+1}$ para todo $n = 1, \dots, k - 1$ e $k \leq l - 1$.

Se tomarmos $\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k)$ o diagrama de Dynkin se decompõe em k diagramas do tipo $A_{j_n - i_n + 1}$ e conseqüentemente

$$|W_\Theta| = (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!$$

Logo um limitante superior para o número de conjuntos controláveis efetivos para S em \mathbb{B}_Θ é

$$|W/W_\Theta| = 2^l l! / (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!$$

Se tomarmos $\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k) \cup \{2\lambda_l\}$ temos duas possibilidades: $j_k = l - 1$ ou $j_k < l - 1$.

(i) Se $j_k = l - 1$ o diagrama de Dynkin se decompõe em $k - 1$ diagramas do tipo $A_{j_n - i_n + 1}$ e um diagrama do tipo $C_{l - i_k + 1}$ correspondente para $\Pi(i_k, j_k) \cup \{2\lambda_l\}$. Assim

$$|W_\Theta| = (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)! (l - i_k + 1)! 2^{l - i_k + 1}.$$

Logo o número de conjuntos controláveis efetivos em \mathbb{B}_Θ é no máximo

$$|W/W_\Theta| = 2^{i_k - 1} l! / (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)! (l - i_k + 1)!$$

(ii) Se $j_k < l - 1$ o diagrama de Dynkin se decompõe em k diagramas do tipo $A_{j_n - i_n + 1}$ e uma raiz isolada $2\lambda_l$. Logo a ordem de W_Θ é

$$|W_\Theta| = (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)! \cdot 2$$

e o número máximo de conjuntos controláveis efetivos em \mathbb{B}_Θ é

$$|W/W_\Theta| = 2^{l-1} l! / (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!$$

2.3.3 O caso $\Pi = B_l$

B_l é um sistema simples de raízes da álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2l + 1, \mathbb{R})$. O conjunto de raízes simples é

$$\Pi = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_l\}.$$

Aqui usaremos a notação $\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ $i = 1, \dots, l - 1$ e $\alpha_l = \lambda_l$.

O diagrama de Dynkin é

$$B_l, l \geq 2 \quad \alpha_1 \text{---} \alpha_2 \text{---} \dots \text{---} \alpha_{l-1} \text{---} \alpha_l$$

Do mesmo modo que em C_l , a ordem do grupo de Weyl é $2^l l!$. A análise do número de conjuntos controláveis é a mesma que no caso $\Pi = C_l$.

No caso de $\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k)$ o número máximo de conjuntos controláveis efetivos para S em \mathbb{B}_Θ é

$$|W/W_\Theta| = 2^l l! / (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!.$$

Caso $\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k) \cup \{\lambda_l\}$ temos:

(i) Se $j_k = l - 1$ o número de conjuntos controláveis efetivos é no máximo

$$|W/W_\Theta| = 2^{i_k - 1} l! / (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)! (l - i_k + 1)!.$$

(ii) Se $j_k < l - 1$ o número de conjuntos controláveis efetivos para S em \mathbb{B}_Θ é no máximo

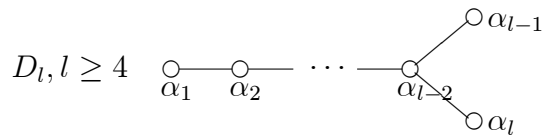
$$|W/W_\Theta| = 2^{l-1} l! / (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!.$$

2.3.4 O caso $\Pi = D_l$

D_l é um sistema simples de raízes da álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2l, \mathbb{R})$. O conjunto de raízes simples é

$$\Pi = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_{l-1} + \lambda_l\}.$$

O diagrama de Dynkin é



O grupo de Weyl W tem $2^{l-1} l!$ elementos.

Novamente consideremos $\Pi(i, j) = \{\lambda_r - \lambda_{r+1} : i \leq r \leq j \text{ e } j < l\}$. Qualquer subconjunto $\Theta \subset \Pi$ pode ser escrito como uma das uniões disjuntas

$$\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k) \cup \{\lambda_{l-1} + \lambda_l\}$$

ou

$$\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k)$$

onde $j_n + 1 < i_{n+1}$ para cada $n = 1, \dots, k - 1$ e $k \leq l - 1$.

Se tomarmos $\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k)$ o número máximo de conjuntos controláveis efetivos para S em \mathbb{B}_Θ é

$$2^{l-1}l! / (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!.$$

Se considerarmos $\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k) \cup \{\lambda_{l-1} + \lambda_l\}$ teremos dois casos para considerar: $j_k = l - 1$ ou $j_k < l - 1$.

(i) Caso $j_k = l - 1$ o diagrama de Dynkin correspondente se decompõe em $k - 1$ diagramas do tipo $A_{j_n - i_n + 1}$ e um diagrama do tipo $D_{l - i_k + 1}$ correspondente para $\Pi(i_k, j_k) \cup \{\lambda_{l-1} + \lambda_l\}$. Consequentemente

$$|W_\Theta| = (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)! (l - i_k + 1)! 2^{l - i_k}$$

e o número de conjuntos controláveis efetivos é no máximo

$$|W/W_\Theta| = 2^{i_k - 1}l! / (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)! (l - i_k + 1)!.$$

(ii) No caso em que $j_k < l - 1$, o diagrama de Dynkin se decompõe em k diagramas do tipo $A_{j_n - i_n + 1}$ e uma raiz isolada $\lambda_{l-1} + \lambda_l$. Daí segue que

$$|W_\Theta| = (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)! \cdot 2$$

e o número máximo de conjuntos controláveis efetivos em \mathbb{B}_Θ é

$$|W/W_\Theta| = 2^{l-2}l! / (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!.$$

2.3.5 O caso $\Pi = G_2$

Uma subálgebra de Cartan de G_2 é a subálgebra \mathfrak{a} das matrizes diagonais em $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$. Seja λ_i o funcional linear dado por

$$\lambda_i : \text{diag}(a_1, a_2, a_3) \longrightarrow a_i.$$

As raízes simples são $\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2$ e $\alpha_2 = \lambda_2$.

O diagrama de Dynkin para G_2 é

$$G_2 \begin{array}{c} \circ \\ \parallel \\ \circ \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \end{array}$$

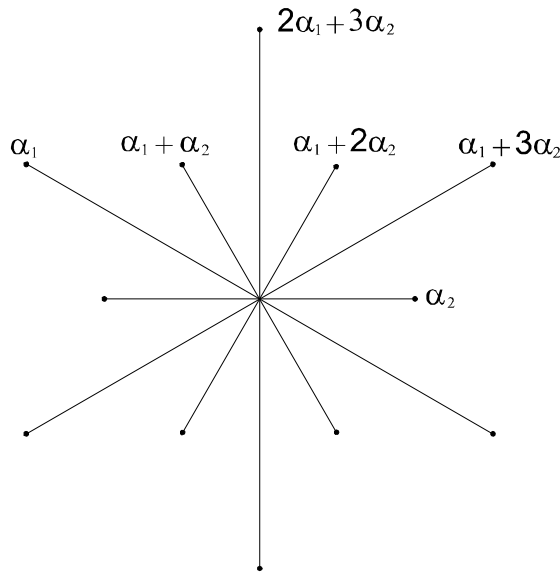
As raízes positivas são

$$\alpha_1, \alpha_2$$

$$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2$$

$$2\alpha_1 + 3\alpha_2.$$

Graficamente as raízes são

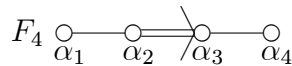


No gráfico acima vemos que existem 12 câmaras de Weyl. Mas o número de câmaras de Weyl é a ordem do grupo de Weyl. Assim a ordem do grupo de Weyl é 12.

Se $\Theta = \alpha_1$ ou $\Theta = \alpha_2$ existem somente duas câmaras de Weyl e assim a ordem de W_Θ é 2. Portanto existem no máximo $12/2 = 6$ conjuntos controláveis para S em \mathbb{B}_Θ .

2.3.6 O caso $\Pi = F_4$

O diagrama de Dynkin é



Um sistema simples de raízes é

$$\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}.$$

A ordem do grupo de Weyl é 1152.

Se $\Theta = \Pi - \{\alpha_4\}$ obtemos o diagrama de Dynkin de B_3 . Assim o máximo de conjuntos controláveis efetivos para S em \mathbb{B}_Θ é

$$1152/2^3 \cdot 3! = 24.$$

Para $\Theta = \Pi - \{\alpha_1\}$ obtemos o digrama de Dynkin de C_3 e assim existem no máximo

$$1152/2^3 \cdot 3! = 24$$

conjuntos controláveis efetivos para S em \mathbb{B}_Θ .

Se tomarmos $\Theta = \Pi - \{\alpha_3\}$ ou $\Theta = \Pi - \{\alpha_2\}$, teremos para ambos os casos que o diagrama de Dynkin correspondente para Θ consiste de um ponto isolado e de um diagrama do tipo A_2 . Consequentemente o número máximo de conjuntos controláveis efetivos em \mathbb{B}_Θ será

$$1152/2 \cdot 3! = 96.$$

Para $\Theta = \Pi - \{\alpha_1, \alpha_2\}$ ou $\Theta = \Pi - \{\alpha_3, \alpha_4\}$ o diagrama de Dynkin correspondente para Θ é do tipo A_2 e o número de conjuntos controláveis efetivos para S em \mathbb{B}_Θ será no máximo

$$1152/3! = 192.$$

Para $\Theta = \Pi - \{\alpha_1, \alpha_3\}$, $\Theta = \Pi - \{\alpha_2, \alpha_3\}$ ou $\Theta = \Pi - \{\alpha_2, \alpha_4\}$ teremos duas raízes isoladas e a ordem de W_Θ será 4. Assim o número máximo de conjuntos controláveis efetivos em \mathbb{B}_Θ será

$$1152/4 = 288.$$

Se tomarmos $\Theta = \Pi - \{\alpha_1, \alpha_4\}$ então o diagrama de Dynkin para Θ é do tipo B_2 e existirá no máximo

$$1152/2^2 \cdot 2 = 144$$

conjuntos controláveis efetivos em \mathbb{B}_Θ .

Resta verificar agora, somente o caso onde Θ consiste de uma única raiz. Neste caso a ordem de W_Θ é 2 e existirão no máximo

$$1152/2 = 576$$

conjuntos controláveis efetivos em \mathbb{B}_Θ .

2.3.7 O caso $\Pi = E_8$

A subálgebra \mathfrak{a} das matrizes diagonais em $\mathfrak{sl}(9, \mathbb{R})$ é uma subálgebra de Cartan. Denote por λ_i o funcional

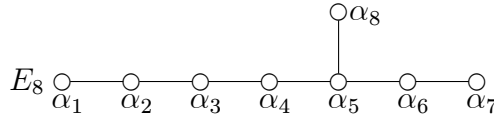
$$\lambda_i : \text{diag}(a_1, \dots, a_9) \longrightarrow a_i.$$

O sistema simples de raízes é

$$\Pi = \{\lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_8 - \lambda_9, -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\}.$$

Aqui, denotaremos $\alpha_1 = \lambda_8 - \lambda_9, \dots, \alpha_7 = \lambda_2 - \lambda_3$ e $\alpha_8 = -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)$.

O diagrama de Dynkin é



Existem vários casos a serem examinados. Discutiremos somente alguns desses casos.

A ordem do grupo de Weyl é 696729600.

Consideramos $\Pi(i, j) = \{\alpha_r : i \leq r \leq j \text{ e } j < 8\}$.

Suponhamos que $\Theta = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k)$ com $j_n + 1 < i_{n+1}$ para cada $n = 1, \dots, k - 1$. Neste caso o diagrama de Dynkin se decompõe em k diagramas do tipo $A_{j_n - i_n + 1}$ e conseqüentemente

$$|W_\Theta| = (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!.$$

Logo o número máximo de conjuntos controláveis efetivos para S em \mathbb{B}_Θ é

$$|W/W_\Theta| = 696729600 / (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!.$$

Se $\Theta = \{\lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_7 - \lambda_8, -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\}$ o subgrupo W_Θ é o grupo de Weyl de E_7 e a ordem é 2903040. Conseqüentemente o número de conjuntos controláveis efetivos para S em \mathbb{B}_Θ é no máximo

$$696729600 / 2903040 = 240.$$

Se $\Theta = \{\lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_6 - \lambda_7, -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\}$ o subgrupo W_Θ é o grupo de Weyl de E_6 e a ordem é 51840. Logo o número de conjuntos controláveis efetivos para S em \mathbb{B}_Θ é no máximo

$$696729600 / 51840 = 13440.$$

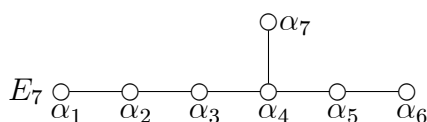
Para $\Theta = \{\lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_5 - \lambda_6, -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\}$ o diagrama de Dynkin correspondente é do tipo D_5 e assim existem no máximo

$$696729600/(2^4 \cdot 5) = 362880$$

conjuntos controláveis efetivos para S em \mathbb{B}_Θ .

2.3.8 O caso $\Pi = E_7$

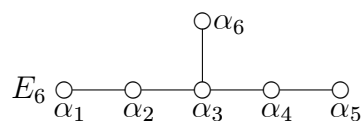
O diagrama de Dynkin é



com sistema de raízes simples $\Pi = \{\lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_7 - \lambda_8, -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\}$. Aqui $\alpha_1 = \lambda_7 - \lambda_8, \dots, \alpha_6 = \lambda_2 - \lambda_3$ e $\alpha_7 = -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)$. A análise é feita como em E_8 . A ordem do grupo de Weyl é 2903040.

2.3.9 O caso $\Pi = E_6$

O diagrama de Dynkin é



com sistema de raízes simples $\Pi = \{\lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_6 - \lambda_7, -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\}$. O grupo de Weyl tem ordem 51840. A análise é feita novamente como em E_8 .

2.4 Os grupos de Lie simples não compactos

Iremos apresentar agora uma tabela que consta o número máximo de conjuntos controláveis numa variedade "flag" de um grupo de Lie simples não compacto e real para a ação de um semigrupo de interior não vazio contido neste grupo. Para isto, utilizaremos do diagrama de Satake que é apresentado em [13] Tabela 9 na seção de tabelas.

Na tabela abaixo G denotará o grupo de Lie simples não compacto e \mathfrak{g} sua álgebra de Lie. Estas álgebras de Lie são formas reais das álgebras de Lie simples complexas. Na coluna Π colocaremos o tipo do sistema Π de raízes reais. Denotaremos $\Pi_k = \Pi(i_1, j_1) \cup \dots \cup \Pi(i_k, j_k)$ onde $\Pi(i, j) = \{\lambda_r - \lambda_{r+1} : i \leq r \leq j\}$. O número máximo de conjuntos controláveis efetivos na variedade "flag" \mathbb{B}_Θ pela ação de um semigrupo de interior não vazio em G será denotado por $|W/W_\Theta|$. Usaremos também a notação $n_p^k = p! / (j_1 - i_1 + 2)! \dots (j_k - i_k + 2)!$.

Para os grupos reais clássicos usaremos a seguinte notação:

$$U(p, q) = \{g \in Gl(p + q, \mathbb{C}) : g^t I_{p,q} \bar{g} = I_{p,q}\},$$

onde $I_{p,q}$ é a matriz

$$\begin{pmatrix} -I_p & \\ & I_q \end{pmatrix}$$

onde I_n é a matriz identidade $n \times n$. Temos então $SU(p, q) = U(p, q) \cap Sl(p + q, \mathbb{C})$.

Definamos também

$$SO(p, q) = \{g \in Sl(p + q, \mathbb{R}) : g^t I_{p,q} g = I_{p,q}\}$$

e

$$Sp(p, q) = \{g \in Sp(p + q, \mathbb{C}) : g^t K_{p,q} \bar{g} = K_{p,q}\}$$

onde

$$K_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_{p,q} & & & \\ & I_q & & \\ & & -I_p & \\ & & & I_q \end{pmatrix}.$$

As álgebras de Lie correspondentes são

$$\mathfrak{su}(p, q) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B}^t & C \end{pmatrix} : \begin{array}{l} A \text{ e } C \text{ são anti-hermitianas, de ordem } p \text{ e } q \\ \text{tr}(A) + \text{tr}(C) = 0 \text{ e } B \text{ arbitrária} \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{so}(p, q) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix} : \begin{array}{l} A \text{ e } C \text{ são anti-simétricas, de ordem } p \text{ e } q \\ A, B \text{ e } C \text{ reais, } B \text{ arbitrária} \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{sp}(p, q) = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} \\ \bar{Z}_{12}^t & Z_{22} & Z_{14}^t & Z_{24} \\ -\bar{Z}_{13} & \bar{Z}_{14} & \bar{Z}_{11} & -\bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{14}^t & -\bar{Z}_{24} & -Z_{12}^t & \bar{Z}_{22} \end{array} \right) : \begin{array}{l} Z_{ij} \text{ matrizes complexas, } Z_{11} \text{ e } Z_{13} \\ \text{de ordem } p, Z_{12} \text{ e } Z_{14} \text{ matrizes } p \times q \\ Z_{11} \text{ e } Z_{22} \text{ anti-hermitianas,} \\ Z_{13} \text{ e } Z_{24} \text{ são simétricas} \end{array} \right\}.$$

Temos ainda a álgebra de Lie

$$\mathfrak{u}^*(n, H) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{array} \right) : A \text{ e } B \text{ são } n \times n \text{ quaternionicas, } A^t = -A, B^t = \bar{B} \right\}.$$

G	\mathfrak{g}	Π	Θ	j_k	$ W/W_\Theta $
$Sp(p,p)$ ($l = 2p$)	$\mathfrak{sp}(p,p)$	C_p	$\Pi_k \cup \{2\lambda_p\}$	$p - 1$	$(2^{i_k-1}/(p - i_k + 1)!)n_p^{k-1}$
				$< p - 1$	$2^{p-1}n_p^k$
			Π_k		$2^p n_p^k$
$SO(p,2l-p)$ ($1 \leq p \leq l-2$)	$\mathfrak{so}(p,2l-p)$	B_p	$\Pi_k \cup \{\lambda_p\}$	$p - 1$	$(2^{i_k-1}/(p - i_k + 1)!)n_p^{k-1}$
				$< p - 1$	$2^{p-1}n_p^k$
			Π_k		$2^p n_p^k$
$SO(l-1,l+1)$	$\mathfrak{so}(l-1,l+1)$	B_{l-1}	$\Pi_k \cup \{\lambda_{l-1}\}$	$l - 2$	$(2^{i_k-1}/(l - i_k + 1)!)n_{l-1}^{k-1}$
				$< l - 2$	$2^{l-2}n_{l-1}^k$
			Π_k		$2^{l-1}n_{l-1}^k$
$SO(l,l)$	$\mathfrak{so}(l,l)$	D_l	$\Pi_k \cup \{\lambda_{l-1} + \lambda_l\}$	$l - 1$	$(2^{i_k-1}/(l - i_k + 1)!)n_l^{k-1}$
				$< l - 1$	$2^{l-2}n_l^k$
			Π_k		$2^{l-1}n_l^k$
$U^*(2p,H)$	$\mathfrak{u}^*(2p,H)$	C_p	$\Pi_k \cup \{2\lambda_p\}$	$p - 1$	$(2^{i_k-1}/(p - i_k + 1)!)n_p^{k-1}$
				$< p - 1$	$2^{p-1}n_p^k$
			Π_k		$2^p n_p^k$
$U^*(2p+1,H)$	$\mathfrak{u}^*(2p+1,H)$	C_p	$\Pi_k \cup \{2\lambda_p\}$	$p - 1$	$(2^{i_k-1}/(p - i_k + 1)!)n_p^{k-1}$
				$< p - 1$	$2^{p-1}n_p^k$
			Π_k		$2^p n_p^k$
$Sl(l+1, \mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{R})$	A_l	Π_k		n_{l+1}^k

G	\mathfrak{g}	Π	Θ	j_k	$ W/W_\Theta $
$Sl(p+1, H)$ ($l = 2p + 1, p \geq 1$)	$\mathfrak{sl}(p+1, H)$	A_p	Π_k		n_{p+1}^k
$SU(p, l+1-p)$ ($1 \leq p \leq l/2$)	$\mathfrak{su}(p, l+1-p)$	C_p	$\Pi_k \cup \{2\lambda_p\}$	$p-1$	$(2^{i_k-1}/(p-i_k+1)!)n_p^{k-1}$
				$< p-1$	$2^{p-1}n_p^k$
$SU(p, p)$ ($l = 2p-1, p \geq 2$)	$\mathfrak{su}(p, p)$	C_p	$\Pi_k \cup \{2\lambda_p\}$	$p-1$	$(2^{i_k-1}/(p-i_k+1)!)n_p^{k-1}$
				$< p-1$	$2^{p-1}n_p^k$
$SO(p, 2l+1-p)$ ($1 \leq p \leq l$)	$\mathfrak{so}(p, 2l+1-p)$	B_p	$\Pi_k \cup \{\lambda_p\}$	$p-1$	$(2^{i_k-1}/(p-i_k+1)!)n_p^{k-1}$
				$< p-1$	$2^{p-1}n_p^k$
$Sp(2l, \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(2l, \mathbb{R})$	C_l	$\Pi_k \cup \{2\lambda_l\}$	$l-1$	$(2^{i_k-1}/(l-i_k+1)!)n_l^{k-1}$
				$< l-1$	$2^{l-1}n_l^k$
$Sp(p, l-p)$ ($1 \leq p \leq \frac{1}{2}(l-1)$)	$\mathfrak{sp}(p, l-p)$	C_p	$\Pi_k \cup \{2\lambda_p\}$	$p-1$	$(2^{i_k-1}/(p-i_k+1)!)n_p^{k-1}$
				$< p-1$	$2^{p-1}n_p^k$
			Π_k		$2^p n_p^k$

Álgebras de Lie

Neste apêndice introduziremos os conceitos e a terminologia, da teoria de álgebras de Lie. Aqui serão estudados vários conceitos básicos das álgebras de Lie de dimensão finita. Na primeira seção apresentaremos as definições dos conceitos básicos da teoria das álgebras de Lie, tais como ideais, subálgebras, representações, álgebras solúveis, álgebras nilpotentes e finalmente álgebras simples e semisimples. Na segunda e terceira seção faremos um estudo um pouco mais elaborado sobre as álgebras nilpotentes e solúveis, mostrando que podemos encontrar bases que triangulariza os elementos dessas álgebras para o caso de álgebras de Lie de transformações lineares. Na quarta e quinta seção estudaremos, respectivamente, os critérios de Cartan e as subálgebras de Cartan. A referência principal para este apêndice é [18]. Indicamos também [2] e [24].

A.1 Conceitos básicos de álgebras de Lie

Começaremos, de forma natural, definindo uma álgebra de Lie.

Uma **álgebra de Lie** é um espaço vetorial \mathfrak{g} sobre um corpo \mathbb{K} munido de uma operação

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] \end{aligned}$$

chamada **colchete de Lie**, que satisfaz as seguintes propriedades:

1. O colchete de Lie é bilinear, ou seja,

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$

e

$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{K}$ e quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

2. O colchete de Lie é anti-simétrico, ou seja,

$$[X, X] = 0$$

para qualquer $X \in \mathfrak{g}$.

3. O colchete de Lie satisfaz a identidade de Jacobi, ou seja,

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Esta igualdade pode ser reescrita alternativamente de uma das duas formas

$$(a) [X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$$

$$(b) [[X, Y], Z] = [[X, Z], Y] + [X, [Y, Z]].$$

Existem razões especiais para escrever a identidade de Jacobi nestas formas alternativas como veremos em representações adjuntas e derivações de álgebras de Lie.

Definição A.1 Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita **abeliana** se $[X, Y] = 0$, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Ilustraremos a definição de álgebra de Lie com alguns exemplos.

Exemplo A.1 Consideremos o espaço vetorial \mathbb{R}^3 e para $u, v \in \mathbb{R}^3$ definamos o colchete $[u, v]$ como o produto vetorial em \mathbb{R}^3 . Das propriedades do produto vetorial segue que \mathbb{R}^3 com este colchete é uma álgebra de Lie.

Vejamos agora um exemplo importante de álgebra de Lie que será utilizado com bastante frequência.

Exemplo A.2 A álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ é o espaço vetorial de todas as transformações lineares de um espaço vetorial de dimensão n sobre \mathbb{K} que é isomorfo ao espaço das matrizes $n \times n$ com coeficientes em \mathbb{K} . O colchete é definido por

$$[X, Y] = XY - YX$$

com X e Y matrizes.

Indicaremos também esta álgebra por $\mathfrak{gl}(n)$ apenas, sem especificar o corpo quando este não for relevante. A álgebra das transformações lineares de um espaço vetorial V com o colchete $[T, S] = T \circ S - S \circ T$ será denotada por $\mathfrak{gl}(V)$.

É natural introduzirmos a noção de subálgebra de Lie.

Definição A.2 Uma **subálgebra de Lie** \mathfrak{h} da álgebra de Lie \mathfrak{g} é um subespaço vetorial de \mathfrak{g} tal que para todo $X, Y \in \mathfrak{h}$ tem-se $[X, Y] \in \mathfrak{h}$. Em outras palavras \mathfrak{h} é um subespaço vetorial de \mathfrak{g} que é fechado para o colchete de Lie de \mathfrak{g} .

Evidentemente, uma subálgebra de Lie é uma álgebra de Lie com a estrutura herdada pela estrutura de \mathfrak{g} .

Vejam alguns exemplos de subálgebras de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

Exemplo A.3 Subálgebras de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$:

(a) $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : X + X^t = 0\}$, aqui X^t indica a transposta da matriz X .

(b) $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : \text{tr}(X) = 0\}$.

(c) O subespaço das matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal

$$\mathfrak{n}(n, \mathbb{R}) = \left\{ X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : X = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(d) O subespaço das matrizes triangulares superiores

$$\mathfrak{S}(n, \mathbb{R}) = \left\{ X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) : X = \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \right\}$$

também é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

(e) $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{K}) : XJ + JX^t = 0\}$, aqui J é escrito em blocos $n \times n$ como

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

com 0 representando a matriz nula e 1 representando a matriz identidade $n \times n$.

(f) $\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : X + \overline{X}^t = 0\}$, aqui \overline{X} é a matriz obtida de X por conjugação de suas entradas.

(g) $\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) : \text{tr}(X) = 0\}$.

É imediato mostrar que a intersecção de duas subálgebras de Lie também é uma subálgebra de Lie.

Para álgebras de Lie unidimensionais temos o seguinte resultado.

Teorema A.3 *Se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie e \mathfrak{h} um subespaço unidimensional de \mathfrak{g} , então \mathfrak{h} é uma subálgebra abeliana de \mathfrak{g} .*

Demonstração: Seja $\{Z\}$ uma base de \mathfrak{h} . Se $X, Y \in \mathfrak{h}$, então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $X = \alpha Z$ e $Y = \beta Z$. Logo $[X, Y] = [\alpha Z, \beta Z] = \alpha\beta[Z, Z] = 0 \in \mathfrak{h}$. Portanto \mathfrak{h} é abeliana. \square

Corolário A.4 *Toda álgebra de Lie unidimensional é abeliana.*

Já para álgebras de Lie bidimensionais temos o seguinte teorema.

Teorema A.5 *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e \mathfrak{h} uma subálgebra bidimensional de \mathfrak{g} . Então, ou \mathfrak{h} é abeliana ou existe uma base $\{A, B\}$ de \mathfrak{h} tal que $[A, B] = B$.*

Demonstração: Suponhamos que \mathfrak{h} seja uma subálgebra não abeliana bidimensional de \mathfrak{g} . Tomemos $\{X, Y\}$ uma base de \mathfrak{h} . Como \mathfrak{h} é não abeliana, e $X, Y \in \mathfrak{h}$, temos que $[X, Y] \neq 0$. Definamos $Y' = [X, Y]$ e escolhamos $X' \in \mathfrak{h}$ de modo que $\{X', Y'\}$ seja uma base de \mathfrak{h} . Como $X', Y' \in \mathfrak{h}$, temos que $X' = aX + bY$ e $Y' = cX + dY$. Assim $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é matriz mudança de base. Logo $ad - bc \neq 0$. Logo, tomando $A = (ad - bc)^{-1}X'$ e $B = Y'$ temos

$$\begin{aligned} [A, B] &= [(ad - bc)^{-1}X', Y'] \\ &= (ad - bc)^{-1}[X', Y'] \\ &= (ad - bc)^{-1}(ad - bc)[X, Y] \\ &= [X, Y] \\ &= Y' \\ &= B. \end{aligned}$$

Portanto $\{A, B\}$ é a base de \mathfrak{h} procurada. \square

Corolário A.6 *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de bidimensional, então ou \mathfrak{g} é abeliana ou existe uma base $\{A, B\}$ de \mathfrak{g} tal que $[A, B] = B$.*

Vamos definir agora o conceito de ideal.

Definição A.7 *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e \mathfrak{h} um subespaço de \mathfrak{g} . Dizemos que \mathfrak{h} é um ideal de \mathfrak{g} se para quaisquer $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{h}$ tivermos $[X, Y] \in \mathfrak{h}$.*

Da definição acima, temos que todo ideal é uma subálgebra de Lie, pois como $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{h}$, em particular temos $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ para todo $X, Y \in \mathfrak{h}$. Entretanto nem toda subálgebra de Lie é um ideal. Para verificar isso, basta considerar $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$, a subálgebra das matrizes quadradas anti-simétricas de ordem 2. Temos que $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$ não é um ideal de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$. De fato, seja $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$. Note que

$$\begin{aligned} & \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \notin \mathfrak{so}(2, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Exemplo A.4 Seja \mathfrak{g} uma álgebra abeliana, então todo subespaço \mathfrak{h} de \mathfrak{g} é um ideal, pois se $X \in \mathfrak{h}$ e $Y \in \mathfrak{g}$ temos que $[X, Y] = 0 \in \mathfrak{h}$.

Vamos definir o centralizador de um subconjunto de uma álgebra de Lie e mostrar que o centralizador de um ideal de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} também é um ideal de \mathfrak{g} .

Definição A.8 Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e B um subconjunto de \mathfrak{g} . O **centralizador** de B em \mathfrak{g} é o conjunto

$$\mathfrak{z}(B) = \{X \in \mathfrak{g}; [X, Y] = 0 \text{ para todo } Y \in B\}.$$

Definição A.9 O centralizador de \mathfrak{g} na álgebra de Lie \mathfrak{g} é chamado **centro** de \mathfrak{g} e é denotado por

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g}; [X, Y] = 0 \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Proposição A.10 Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e \mathfrak{h} um ideal de \mathfrak{g} . Então $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ é um ideal de \mathfrak{g} .

Demonstração: Primeiramente note que $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ é um subespaço de \mathfrak{g} , pois $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \neq \emptyset$ já que $0 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ e ainda se $A, B \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ temos que $A+B \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ já que $[A+B, Y] = [A, Y] + [B, Y] = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{h}$. Sejam agora $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, $Y \in \mathfrak{g}$ e $Z \in \mathfrak{h}$. Sabemos a identidade de Jacobi

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0. \quad (\text{A.1})$$

Como \mathfrak{h} é ideal de \mathfrak{g} , segue que $[Y, Z] \in \mathfrak{h}$, assim da definição de $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ temos que $[X, [Y, Z]] = 0$. Como $[Z, X] = 0$ então $[[Z, X], Y] = 0$. Logo em (A.1) segue que

$[[X, Y], Z] = 0$ e $[X, Y] \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. Portanto $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ é ideal de \mathfrak{g} . \square

Mostraremos a seguir que a soma e a intersecção de ideais ainda é ideal.

Proposição A.11 *A soma e a intersecção de dois ideais de uma álgebra de Lie ainda é um ideal desta álgebra de Lie.*

Demonstração: Sejam \mathfrak{h}_1 e \mathfrak{h}_2 ideais da álgebra de Lie \mathfrak{g} . É claro que a soma e a intersecção de dois subespaços é um subespaço. Assim, seja $X \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ e $Y \in \mathfrak{g}$. Então

$$[X, Y] = [X_1 + X_2, Y] = [X_1, Y] + [X_2, Y] \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$$

Também, tomando $X \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ e $Y \in \mathfrak{g}$ é imediato que $[X, Y] \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ \square

Note que é possível verificar que a soma de um ideal com uma subálgebra de uma álgebra de Lie, é uma subálgebra da álgebra de Lie. De fato, sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie, \mathfrak{i} um ideal de \mathfrak{g} e \mathfrak{h} uma subálgebra de \mathfrak{g} . Tomando $A_1 + B_1, A_2 + B_2 \in \mathfrak{i} + \mathfrak{h}$ com $A_1, A_2 \in \mathfrak{i}$ e $B_1, B_2 \in \mathfrak{h}$ temos que

$$[A_1 + B_1, A_2 + B_2] = [A_1, A_2] + [A_1, B_2] + [B_1, A_2] + [B_1, B_2].$$

Por definição de ideal temos $[A_1, A_2], [A_1, B_2], [B_1, A_2] \in \mathfrak{i}$ e como \mathfrak{h} é subálgebra temos $[B_1, B_2] \in \mathfrak{h}$. Logo $[A_1 + B_1, A_2 + B_2] \in \mathfrak{i} + \mathfrak{h}$, mostrando que $\mathfrak{i} + \mathfrak{h}$ é uma subálgebra.

Recorrendo às definições ainda pode-se mostrar que a soma e intersecção de ideais são ideais, a intersecção de um ideal com uma subálgebra é uma subálgebra e a intersecção de subálgebras é uma subálgebra. Já a soma de duas subálgebras não é, em geral, uma subálgebra. Por exemplo, sejam \mathfrak{h}_1 e \mathfrak{h}_2 os subespaços de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ gerados por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ respectivamente. Como

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ não é subálgebra.

Passaremos a estudar aplicações entre álgebras de Lie. Uma aplicação entre álgebras de Lie que preserva o colchete é chamada homomorfismo de álgebras de Lie.

Definição A.12 *Sejam \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 álgebras de Lie. Uma transformação linear $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ é um **homomorfismo de álgebras de Lie** se satisfaz*

$$\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)].$$

*Além disso, se φ é inversível, então dizemos que φ é um **isomorfismo de álgebras de Lie**. Um isomorfismo $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é dito **automorfismo de álgebras de Lie**.*

Segue agora, alguns exemplos de homomorfismo de álgebras de Lie.

Exemplo A.5 *Sejam \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 álgebras de Lie abelianas e $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ uma transformação linear. Tome $X, Y \in \mathfrak{g}_1$. Como*

$$\varphi([X, Y]) = \varphi(0) = 0 = [\varphi(X), \varphi(Y)]$$

segue que φ é homomorfismo de álgebras de Lie. Portanto toda transformação linear entre álgebras abelianas é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Exemplo A.6 *A aplicação traço $\text{tr} : M(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ é um homomorfismo. De fato, dadas $X, Y \in M(n \times n, \mathbb{R})$ temos que $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$. Logo*

$$\text{tr}(XY - YX) = \text{tr}(XY) - \text{tr}(YX) = 0,$$

e assim segue que

$$\text{tr}([X, Y]) = \text{tr}(XY - YX) = 0$$

Note que \mathbb{R} é uma álgebra de Lie abeliana, pois $\dim(\mathbb{R}) = 1$, assim $[\text{tr}(X), \text{tr}(Y)] = 0$. Portanto $\text{tr}([X, Y]) = [\text{tr}(X), \text{tr}(Y)]$.

Exemplo A.7 *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ a álgebra de Lie das transformações de \mathfrak{g} nela mesma. Para cada $X \in \mathfrak{g}$ definamos a transformação linear*

$$\begin{aligned} \text{ad}(X) : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ Y &\mapsto \text{ad}(X)(Y) = [X, Y]. \end{aligned}$$

A aplicação

$$\begin{aligned} \text{ad} : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X &\mapsto \text{ad}(X) \end{aligned}$$

é um homomorfismo de álgebras de Lie. De fato, note que ad é uma aplicação linear, pois

$$\begin{aligned}\text{ad}(X + \alpha Y)(Z) &= [X + \alpha Y, Z] \\ &= [X, Z] + [\alpha Y, Z] \\ &= [X, Z] + \alpha[Y, Z] \\ &= \text{ad}(X)(Z) + \alpha\text{ad}(Y)(Z).\end{aligned}$$

Mostraremos agora que ad é um homomorfismo de álgebras de Lie, usando a identidade de Jacobi. Temos que

$$\begin{aligned}\text{ad}([X, Y])(Z) &= [[X, Y], Z] \\ &= [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] \\ &= \text{ad}(X)([Y, Z]) - \text{ad}(Y)([X, Z]) \\ &= \text{ad}(X) \circ (\text{ad}(Y)(Z)) - \text{ad}(Y) \circ (\text{ad}(X)(Z)) \\ &= (\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y) - \text{ad}(Y) \circ \text{ad}(X))(Z) \\ &= [\text{ad}(X), \text{ad}(Y)](Z).\end{aligned}$$

Essa aplicação é chamada de **representação adjunta da álgebra de Lie** \mathfrak{g} como veremos mais adiante. Vale lembrar que quando \mathfrak{g} é uma álgebra abeliana segue que $\text{ad}(X)$ é a aplicação nula.

Mostraremos agora que o núcleo e a imagem de um homomorfismo de álgebras de Lie são subálgebras de Lie.

Teorema A.13 *Sejam \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 álgebras de Lie e $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ um homomorfismo de álgebras de Lie. Então $\ker(\varphi)$ é ideal de \mathfrak{g}_1 e $\text{Im}(\varphi)$ é subálgebra de de Lie \mathfrak{g}_2 .*

Demonstração: Primeiramente mostraremos que $\ker(\varphi)$ é ideal de \mathfrak{g}_1 . Sejam $X \in \mathfrak{g}_1$ e $Y \in \ker(\varphi)$. Note que

$$\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)] = [\varphi(X), 0] = 0$$

portanto, $[X, Y] \in \ker(\varphi)$. Logo $\ker(\varphi)$ é um ideal de \mathfrak{g}_1 . Agora sejam $X, Y \in \text{Im}(\varphi)$. Mostraremos que $[X, Y] \in \text{Im}(\varphi)$. Como $X, Y \in \text{Im}(\varphi)$, então $\varphi(X_1) = X$ e $\varphi(Y_1) = Y$ para algum $X_1, Y_1 \in \mathfrak{g}_1$. Assim

$$[X, Y] = [\varphi(X_1), \varphi(Y_1)] = \varphi([X_1, Y_1]) \in \text{Im}(\varphi)$$

□

Outro conceito importante é o de quociente de álgebras de Lie.

Definição A.14 *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e \mathfrak{h} um ideal de \mathfrak{g} . Como \mathfrak{h} é subespaço vetorial de \mathfrak{g} , podemos determinar o **espaço quociente** $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \{X + \mathfrak{h}; X \in \mathfrak{g}\}$.*

Sabemos que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é um espaço vetorial com as operações definidas por

$$\begin{aligned} (X + \mathfrak{h}) + (Y + \mathfrak{h}) &= (X+Y) + \mathfrak{h} & \text{e} \\ \alpha(X + \mathfrak{h}) &= (\alpha X) + \mathfrak{h} \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é uma álgebra de Lie.

Proposição A.15 *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e \mathfrak{h} um ideal de \mathfrak{g} . Então $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é uma álgebra de Lie com o colchete $[(X + \mathfrak{h}), (Y + \mathfrak{h})] = [X, Y] + \mathfrak{h}$.*

Demonstração: Primeiramente mostraremos que este colchete está bem definido. De fato, se $(X + \mathfrak{h}) = (X_1 + \mathfrak{h})$ e $(Y + \mathfrak{h}) = (Y_1 + \mathfrak{h})$ segue que $X - X_1, Y - Y_1 \in \mathfrak{h}$. Assim $X = X_1 + Z_1, Y = Y_1 + Z_2$ com $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{h}$. Logo

$$\begin{aligned} & [X, Y] + \mathfrak{h} \\ &= [X_1 + Z_1, Y_1 + Z_2] + \mathfrak{h} \\ &= [X_1, Y_1 + Z_2] + [Z_1, Y_1 + Z_2] + \mathfrak{h} \\ &= [X_1, Y_1] + [X_1, Z_2] + [Z_1, Y_1] + [Z_1, Z_2] + \mathfrak{h} \end{aligned}$$

Como \mathfrak{h} é um ideal de \mathfrak{g} , temos que $[X_1, Z_2], [Z_1, Y_1], [Z_1, Z_2] \in \mathfrak{h}$. Portanto,

$$[X, Y] + \mathfrak{h} = [X_1, Y_1] + \mathfrak{h},$$

ou seja, o colchete está bem definido. Note que é essencial que \mathfrak{h} seja um ideal de \mathfrak{g} , pois se \mathfrak{h} for apenas uma subálgebra, o colchete pode não estar bem definido.

Agora vejamos que:

- O colchete é bilinear

$$\begin{aligned} & [\alpha(X + \mathfrak{h}) + \beta(Y + \mathfrak{h}), Z + \mathfrak{h}] \\ &= [\alpha X + \beta Y, Z] + \mathfrak{h} \\ &= \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z] + \mathfrak{h} \\ &= \alpha([X, Z] + \mathfrak{h}) + \beta([Y, Z] + \mathfrak{h}) \\ &= \alpha[X + \mathfrak{h}, Z + \mathfrak{h}] + \beta[Y + \mathfrak{h}, Z + \mathfrak{h}] \end{aligned}$$

e semelhantemente na segunda coordenada.

- O colchete é anti-simétrico

$$[(X + \mathfrak{h}), (X + \mathfrak{h})] = [X, X] + \mathfrak{h} = 0 + \mathfrak{h} \text{ (que é o elemento neutro de } \mathfrak{g}/\mathfrak{h})$$

- A identidade de Jacobi é satisfeita

$$\begin{aligned} & [X + \mathfrak{h}, [Y + \mathfrak{h}, Z + \mathfrak{h}]] + [Y + \mathfrak{h}, [Z + \mathfrak{h}, X + \mathfrak{h}]] + [Z + \mathfrak{h}, [X + \mathfrak{h}, Y + \mathfrak{h}]] \\ &= [X + \mathfrak{h}, [Y, Z] + \mathfrak{h}] + [Y + \mathfrak{h}, [Z, X] + \mathfrak{h}] + [Z + \mathfrak{h}, [X, Y] + \mathfrak{h}] \\ &= [X, [Y, Z]] + \mathfrak{h} + [Y, [Z, X]] + \mathfrak{h} + [Z, [X, Y]] + \mathfrak{h} \\ &= ([X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]]) + \mathfrak{h} \\ &= 0 + \mathfrak{h} \end{aligned}$$

□

Segue daí que a projeção canônica $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ definida por $\pi(X) = X + \mathfrak{h}$, é um homomorfismo de álgebras de Lie.

As seguintes proposições introduzem os resultados clássicos sobre homomorfismos, cujas demonstrações são as usuais.

Proposição A.16 *Seja $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ um homomorfismo de álgebras de Lie. Então*

$$\mathfrak{g}/\text{Ker}(\varphi) \approx \text{Im}(\varphi)$$

Proposição A.17 *Se \mathfrak{h}_1 e \mathfrak{h}_2 são ideais de \mathfrak{g} então*

$$\frac{\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2}{\mathfrak{h}_2} \approx \frac{\mathfrak{h}_1}{\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2},$$

onde o isomorfismo é natural.

Uma forma de determinar um isomorfismo entre duas álgebras de Lie de dimensão finita é através dos colchetes dos elementos de suas bases. Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma base de \mathfrak{g} . Como $[X_i, Y_j]$ é elemento de \mathfrak{g} , podemos escrevê-lo como combinação linear dos elementos desta base, ou seja,

$$[X_i, Y_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k X_k = c_{ij}^1 X_1 + c_{ij}^2 X_2 + \dots + c_{ij}^k X_k.$$

Os coeficientes c_{ij}^k são denominados **constantes de estrutura** da álgebra de Lie em relação à base. Mostraremos na próxima proposição que estas constantes determinam, a menos de isomorfismo, a álgebra de Lie.

Proposição A.18 *Duas álgebras de Lie são isomorfas se, e só se, elas possuem as mesmas constantes de estruturas.*

Demonstração: Sejam \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 álgebras de Lie, $\{X_1, \dots, X_n\}$ e $\{Y_1, \dots, Y_m\}$ bases de \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 respectivamente. Suponhamos que $\psi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ seja um isomorfismo. Dessa forma \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 possuem o mesmo número de elementos em suas bases. Considere $\psi(X_i) = Y_i$, assim $\psi([X_i, X_j]) = [\psi(X_i), \psi(X_j)] = [Y_i, Y_j]$. Sabemos que para cada $X_i, X_j \in \mathfrak{g}_1$ temos

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^1 X_1 + c_{ij}^2 X_2 + \dots + c_{ij}^k X_k = \sum_k c_{ij}^k X_k$$

e para $Y_i, Y_j \in \mathfrak{g}_2$ temos que

$$[Y_i, Y_j] = b_{ij}^1 Y_1 + b_{ij}^2 Y_2 + \dots + b_{ij}^k Y_k = \sum_k b_{ij}^k Y_k.$$

Como ψ é isomorfismo segue que

$$\begin{aligned} [Y_i, Y_j] &= \psi([X_i, X_j]) \\ &= \psi(c_{ij}^1 X_1 + c_{ij}^2 X_2 + \dots + c_{ij}^k X_k) \\ &= c_{ij}^1 \psi(X_1) + c_{ij}^2 \psi(X_2) + \dots + c_{ij}^k \psi(X_k) \\ &= c_{ij}^1 Y_1 + c_{ij}^2 Y_2 + \dots + c_{ij}^k Y_k. \end{aligned}$$

O que implica que $\sum_k b_{ij}^k Y_k = \sum_k c_{ij}^k Y_k$. Como $\{Y_1, \dots, Y_m\}$ é base, segue que

$$\sum_k (b_{ij}^k - c_{ij}^k) Y_k = 0 \text{ e portanto } b_{ij}^k = c_{ij}^k.$$

Reciprocamente suponhamos que \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 possuem as mesmas constantes de estrutura c_{ij}^k .

Dessa forma \mathfrak{g}_1 e \mathfrak{g}_2 possuem a mesma dimensão. Consideremos a transformação linear $\psi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ definida por $\psi(X_i) = Y_i$. Tomemos $X = \sum_i a^i X_i$ e $Y = \sum_j b^j X_j$ em \mathfrak{g}_1 .

Logo,

$$\begin{aligned}
\psi([X, Y]) &= \psi([\sum_i a^i X_i, \sum_j b^j X_j]) \\
&= \psi(\sum_{ij} a^i b^j [X_i, X_j]) \\
&= \psi(\sum_{ij} a^i b^j \sum_k c_{ij}^k X_k) \\
&= \psi(\sum_{ijk} a^i b^j c_{ij}^k X_k) \\
&= (\sum_{ijk} a^i b^j c_{ij}^k \psi(X_k)) \\
&= (\sum_{ijk} a^i b^j c_{ij}^k Y_k) \\
&= (\sum_{ij} a^i b^j \sum_k c_{ij}^k Y_k) \\
&= \sum_{ij} a^i b^j [Y_i, Y_j] \\
&= [\sum_i a^i Y_i, \sum_j b^j Y_j] \\
&= [\sum_i a^i \psi(X_i), \sum_j b^j \psi(X_j)] \\
&= [\psi(\sum_i a^i X_i), \psi(\sum_j b^j X_j)] \\
&= [\psi(X), \psi(Y)].
\end{aligned}$$

□

A.1.1 Representações de álgebras de Lie.

Vamos estudar agora as representações de uma álgebra de Lie em um espaço vetorial. Essa ferramenta é bastante eficaz para encontrar a estrutura da álgebra. No caso das representações fiéis, \mathfrak{g} é isomorfa a imagem da representação e, portanto, a álgebra pode ser vista como uma subálgebra de transformações lineares.

Definição A.19 *Sejam V um espaço vetorial, $\mathfrak{gl}(V)$ a álgebra de Lie das transformações lineares de V , e \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Uma **representação de \mathfrak{g} em V** é um homomorfismo*

$$\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V).$$

O espaço vetorial V é denominado **espaço da representação** e sua dimensão é igual a dimensão da representação. Uma representação é **fiel** quando $\ker \rho = \{0\}$.

Apresentamos a seguir alguns exemplos de representações.

Exemplo A.8 (representação canônica) *Se \mathfrak{g} é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$ então a inclusão*

$$\begin{aligned}
\rho: \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V) &\rightarrow \mathfrak{gl}(V) \\
X &\mapsto X
\end{aligned}$$

define uma representação, pois

$$\rho([X, Y]) = [X, Y] = [\rho X, \rho Y]$$

ou seja, ρ é um homomorfismo. Essa representação é denominada **representação canônica**.

Exemplo A.9 Tome a subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{K})$ dada por

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 2a & -2b & 0 \\ -c & 0 & b \\ 0 & 2c & -2a \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{K} \right\}.$$

A aplicação

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \mapsto \begin{pmatrix} 2a & -2b & 0 \\ -c & 0 & b \\ 0 & 2c & -2a \end{pmatrix} \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{K})$$

é uma representação de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$. De fato, seja $\{X, Y, H\}$ a base canônica de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ onde

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que

$$[H, X] = HX - XH = 2X$$

ou seja, $[H, X] = 2X + 0Y + 0H$. Analogamente, temos $[H, Y] = 0X - 2Y + 0H$ e $[X, Y] = 0X + 0Y - H$, logo as constantes de estruturas de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ são 0, -1, 2 e -2.

Agora seja $\{X_1, Y_1, H_1\}$ uma base de \mathfrak{h} , onde

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } H_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Note que

$$\begin{aligned} [H_1, X_1] &= 2X_1 + 0Y_1 + 0H_1 \\ [H_1, Y_1] &= 0X_1 - 2Y_1 + 0H_1 \\ [X_1, Y_1] &= 0X_1 + 0Y_1 - H_1 \end{aligned}$$

ou seja, as constantes de estrutura de \mathfrak{h} são 0, -1, 2 e -2. Logo as constantes de estruturas de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ e \mathfrak{h} são iguais. Portanto $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{K})$ são isomorfos.

Exemplo A.10 (representação adjunta) Para um elemento X na álgebra de Lie \mathfrak{g} , considere a transformação linear

$$\text{ad}(X) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

definida por $\text{ad}(X)(Y) = [X, Y]$. A aplicação

$$\text{ad} : X \in \mathfrak{g} \mapsto \text{ad}(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

define uma representação de \mathfrak{g} em \mathfrak{g} , denominada **representação adjunta**. (Veja Exemplo A.7)

Note que o núcleo da representação adjunta coincide com o centro de \mathfrak{g} .

Mostraremos agora, algumas construções com representações.

Definição A.20 Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e ρ_1, \dots, ρ_n representações de \mathfrak{g} em V_1, \dots, V_n . Então

$$\begin{aligned} \rho : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{gl}(V_1 \oplus \dots \oplus V_n) \\ X &\mapsto \rho_1(X) \oplus \dots \oplus \rho_n(X) \end{aligned}$$

é uma representação em $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ denominada **soma direta** das representações ρ_i . Fixe uma base de $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$. Em forma de matriz, ρ se escreve em blocos como

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_n \end{pmatrix}.$$

Agora seja ρ uma representação de \mathfrak{g} em V e suponha que W seja um subespaço invariante por ρ , isto é,

$$\rho(X)W \subset W \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{g}.$$

A aplicação

$$\begin{aligned} \rho|_W : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{gl}(W) \\ X &\mapsto \rho(X)|_W \end{aligned}$$

define uma representação de \mathfrak{g} em W .

A aplicação

$$\begin{aligned} \overline{\rho}_W : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{gl}(V/W) \\ X &\mapsto \overline{\rho(X)} : \begin{array}{l} V/W \rightarrow V/W \\ v + W \mapsto \rho(X)v + W \end{array} \end{aligned}$$

também é uma representação de \mathfrak{g} em V/W .

Estudaremos agora a decomposição de representações.

Definição A.21 *Uma representação ρ de \mathfrak{g} em V é dita **irredutível** se os únicos subespaços invariantes por ρ são os triviais $\{0\}$ e V .*

Definição A.22 *Uma representação é dita **completamente redutível** se V se decompõe como*

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$$

com cada V_i invariante pela representação e a restrição de ρ a V_i é irredutível.

Note que uma representação irredutível é sempre completamente redutível.

A proposição a seguir nos fornece um critério, bastante utilizado, para verificar se uma representação é completamente redutível.

Proposição A.23 *Seja ρ uma representação de \mathfrak{g} em V . Então ρ é completamente redutível se, e somente se, todo subespaço invariante admite um complementar invariante, ou seja,*

$$\text{para todo } W \subset V \text{ invariante, existe } W_1 \text{ também invariante tal que } V = W \oplus W_1 \quad (\text{A.2})$$

Demonstração: Suponhamos primeiramente que (A.2) seja satisfeita e que V não é irredutível, pois caso contrário, os únicos subespaços invariantes de V são os triviais e o resultado segue. Tome W um subespaço invariante não trivial. Então existe W_1 invariante tal que

$$V = W \oplus W_1.$$

Essa soma direta é o que desejamos se W e W_1 forem irredutíveis. Logo, suponhamos que W não é irredutível. Note que W satisfaz (A.2). De fato, seja $W' \subset W$ subespaço invariante, assim, por hipótese,

$$W' \oplus W_1 \subset V$$

e como V satisfaz (A.2), existe W_2 subespaço invariante tal que

$$(W' \oplus W_1) \oplus W_2 = V. \quad (\text{A.3})$$

Note que $(W_1 \oplus W_2) \cap W$ é invariante pois a intersecção de subespaços invariantes também é invariante. Mostrar que

$$W = ((W_1 \oplus W_2) \cap W) \oplus W' \quad (\text{A.4})$$

é o mesmo que mostrar que W satisfaz (A.2). Seja $x \in W'$ e suponha que $x \in W_1 \oplus W_2$. Assim $x = y + z$ onde $y \in W_1$ e $z \in W_2$. Como $x - y \in W' \oplus W_1$ e $x - y = z$ temos que $z \in W' \oplus W_1$, mas $z \in W_2$, logo $z = 0$, o que implica em $x = y$. Daí $x \in W' \cap W_1$ e portanto $x = 0$. Agora seja $x \in W$, então por (A.3) podemos escrever

$$x = x_1 + x_2 + x_3$$

com $x_1 \in W'$, $x_2 \in W_1$ e $x_3 \in W_2$. Então $x - x_1 = x_2 + x_3 \in W$. Logo W é soma direta dos subespaços em (A.4) e portanto W satisfaz (A.2). Deve-se seguir com esse processo indutivamente para mostrar que W é completamente redutível.

Reciprocamente, mostremos que se ρ é completamente redutível, então todo subespaço invariante admite um complementar invariante. Faremos essa demonstração usando indução sobre a dimensão de V . Se $\dim V = 1$, não há o que demonstrar. Suponhamos que $\dim V = n$, ou seja

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$$

com cada V_i invariante irredutível. Seja $W \subset V$ um subespaço invariante. Cada $W \cap V_i$ é invariante e como os subespaços V_i são invariantes e $W \cap V_i \subset V_i$ segue que $W \cap V_i = \{0\}$ ou $W \cap V_i = V_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Logo há duas possibilidades

1ª) Para algum i , digamos $i = 1$, temos $W \cap V_1 = V_1$, ou seja $V_1 \subset W$. Neste caso temos que

$$W = V_1 \oplus (W \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n)).$$

De fato, tome $x \in W$. Como $W \subset V = V_1 \oplus (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n)$ tem-se que $x = x_1 + x_2$, onde $x_1 \in V_1$ e $x_2 \in V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$. Note que $x, x_1 \in W$. Logo $x_2 \in W$. Daí

$$W = V_1 + (W \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n))$$

e esta soma é direta, pois $V_1 \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n) = \{0\}$. Como

$$W = V_1 \oplus (W \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n)) \subset V_1 \oplus (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n) = V$$

temos que

$$W \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n) \subset V_2 \oplus \cdots \oplus V_n.$$

Logo, existe W' tal que

$$V_2 \oplus \cdots \oplus V_n = (W \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n)) \oplus W'.$$

Assim

$$V = V_1 \oplus (W \cap (V_2 \oplus \cdots \oplus V_n)) \oplus W'$$

ou seja, W' complementa W .

2ª) Para todo i , temos $W \cap V_i = \{0\}$. Note que $W + V_1$ é uma soma direta, logo $W \oplus V_1$ está nas condições do caso anterior, pois $W \oplus V_1 \subset V$ e $(W \oplus V_1) \cap V_1 = V_1$. Assim existe um subespaço invariante W' tal que

$$V = (W \oplus V_1) \oplus W',$$

ou seja, $V = W \oplus (V_1 \oplus W')$.

Concluimos assim a demonstração da recíproca. □

Apresentamos, a seguir, um exemplo onde se aplica esta proposição.

Exemplo A.11 *Seja \mathfrak{g} a álgebra de Heisenberg definida por*

$$\mathfrak{g} = \{ X \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{K}) : X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{K} \}$$

e tomemos

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

como base de \mathfrak{g} . Seja ρ a representação canônica dessa álgebra. Tome $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ base canônica de \mathbb{K}^3 . Vamos mostrar que ρ não é irredutível e também não é completamente redutível. Para mostrar que ρ não é irredutível vamos mostrar que existe subespaço de \mathbb{K}^3 não trivial que é invariante por ρ . Seja $\langle e_1 \rangle \subset \mathbb{K}^3$ o subespaço gerado por e_1 em \mathbb{K}^3 e vamos mostrar que $\langle e_1 \rangle$ é invariante.

De fato, tome um elemento arbitrário $(x, 0, 0) \in \langle e_1 \rangle$, assim temos que

$$\begin{aligned}\rho(X)(x, 0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \langle e_1 \rangle \\ \rho(Y)(x, 0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \langle e_1 \rangle \\ \rho(Z)(x, 0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \langle e_1 \rangle.\end{aligned}$$

Logo para todo $X \in \mathfrak{g}$ $\rho(X)\langle e_1 \rangle \subset \langle e_1 \rangle$ ou seja $\langle e_1 \rangle$ é um subespaço invariante. Analogamente podemos mostrar que $\langle e_1, e_2 \rangle$ também é invariante por ρ . Para mostrar que ρ não é completamente redutível vamos mostrar que nem todo subespaço invariante de \mathbb{K}^3 admite complementar invariante. De fato $\langle e_1 \rangle$ é invariante mas seu complementar

$\mathbb{K}^3 - \langle e_1 \rangle$ não é invariante, pois se tomarmos $W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$ e $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 - \langle e_1 \rangle$

temos

$$\rho(W)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \langle e_1 \rangle$$

ou seja $\rho(W)(x, y, z) \notin \mathbb{K}^3 - \langle e_1 \rangle$. Portanto ρ não é completamente redutível.

A.1.2 Derivações

Introduzimos agora o conceito de derivação de uma álgebra de Lie.

Definição A.24 Uma transformação linear $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é uma **derivação** da álgebra de Lie \mathfrak{g} se satisfaz

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY] \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Vejam alguns exemplos.

Exemplo A.12 Se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie abeliana, então toda transformação linear é uma derivação. De fato, se $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é uma transformação linear temos que

$$D([X, Y]) = D(0) = 0 + 0 = [DX, Y] + [X, DY]$$

Exemplo A.13 A representação adjunta $\text{ad}(X) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ definida por $\text{ad}(X)(Y) = [X, Y]$ é uma derivação, pois, usando a identidade de Jacobi, temos

$$\begin{aligned} \text{ad}(X)[Y, Z] &= [X, [Y, Z]] \\ &= -[Z, [X, Y]] - [Y, [Z, X]] \\ &= [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] \\ &= [\text{ad}(X)(Y), Z] + [Y, \text{ad}(X)(Z)]. \end{aligned}$$

Essa derivação é chamada **derivação interna**.

Notemos que nem toda derivação é interna. Para verificarmos este fato, basta considerarmos \mathfrak{g} uma álgebra de Lie abeliana e $D_x(Y) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ definida por $D_x(Y) = [X, Y]$. Como \mathfrak{g} é abeliana segue que $D_x(Y) = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$. Portanto em uma álgebra abeliana a única derivação interna é a transformação linear nula.

Sabemos que o conjunto das transformações lineares é um espaço vetorial com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar. Para soma de derivações e produto de um número real por uma derivação temos:

Proposição A.25 São válidas:

- i) A soma de derivações é uma derivação.
- ii) O produto de um número real por uma derivação é uma derivação.

Demonstração: Sejam D_1 e D_2 derivações de \mathfrak{g} em \mathfrak{g} e $a \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned} (D_1 + D_2)([X, Y]) &= D_1([X, Y]) + D_2([X, Y]) \\ &= [D_1X, Y] + [X, D_1Y] + [D_2X, Y] + [X, D_2Y] \\ &= [D_1X + D_2X, Y] + [X, D_1Y + D_2Y] \\ &= [(D_1 + D_2)X, Y] + [X, (D_1 + D_2)Y] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} aD_1([X, Y]) &= a([D_1X, Y] + [X, D_1Y]) \\ &= a[D_1X, Y] + a[X, D_1Y] \\ &= [aD_1X, Y] + [X, aD_1Y] \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. \square

O próximo resultado fornece um critério para verificar se uma transformação linear é uma derivação.

Proposição A.26 *Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie real de dimensão finita e $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ uma transformação linear. Então D é uma derivação, se e só se, para todo $t \in \mathbb{R}$ tem-se que e^{tD} é um automorfismo de \mathfrak{g} .*

Demonstração: Suponha que D é uma derivação e sejam $\alpha(t) = e^{tD}[X, Y]$ e $\beta(t) = [e^{tD}X, e^{tD}Y]$ curvas de \mathfrak{g} . Note que

$$\alpha(0) = [X, Y] = \beta(0)$$

$$\alpha'(t) = De^{tD}[X, Y] = D\alpha(t) \quad \text{e}$$

$$\beta'(t) = [De^{tD}X, e^{tD}Y] + [e^{tD}X, De^{tD}Y] = D\beta(t).$$

Como α e β satisfazem a mesma equação diferencial linear com as mesmas condições iniciais segue que $\alpha = \beta$, ou seja, $e^{tD}[X, Y] = [e^{tD}X, e^{tD}Y]$.

Por outro lado, suponha que para todo $t \in \mathbb{R}$ temos que e^{tD} é um automorfismo de \mathfrak{g} , ou seja, $e^{tD}[X, Y] = [e^{tD}X, e^{tD}Y]$. Derivando em função de t temos

$$De^{tD}[X, Y] = [De^{tD}X, e^{tD}Y] + [e^{tD}X, De^{tD}Y].$$

Tomando $t = 0$, temos o desejado. \square

A.1.3 Álgebras solúveis

Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e consideremos a seguinte sequência de subespaços dessa álgebra,

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$$

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}' = \langle \{[X, Y]; X, Y \in \mathfrak{g}\} \rangle = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$

$$\mathfrak{g}^{(2)} = \langle \{[X, Y]; X, Y \in \mathfrak{g}'\} \rangle = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$$

\vdots

$$\mathfrak{g}^{(k)} = \langle \{[X, Y]; X, Y \in \mathfrak{g}^{(k-1)}\} \rangle = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]$$

⋮

Aqui a notação $\langle \{[X, Y]; X, Y \in \mathfrak{g}\} \rangle$ denota subespaço gerado por $\{[X, Y]; X, Y \in \mathfrak{g}\}$.

Mostraremos que $\mathfrak{g}^{(k)}$ é um ideal de \mathfrak{g} .

Proposição A.27 $\mathfrak{g}^{(k)}$ é um ideal de \mathfrak{g} para todo $k \geq 0$.

Demonstração: Mostraremos por indução sobre k . Se $k = 0$, é imediato, pois \mathfrak{g} é ideal de \mathfrak{g} . Suponhamos que o resultado seja válido para $k - 1$ e vamos mostrar que vale para k . Tome $Z \in \mathfrak{g}$ e $W \in \mathfrak{g}^{(k)}$. Como $W = \sum \alpha_i [X_i, Y_i]$, onde $X_i, Y_i \in \mathfrak{g}^{(k-1)}$, segue que

$$\begin{aligned} [Z, W] &= [Z, \sum \alpha_i [X_i, Y_i]] \\ &= \sum \alpha_i [Z, [X_i, Y_i]] \\ &= \sum \alpha_i ([Y_i, Z], X_i + [Y_i, [X_i, Z]]) \\ &= \sum \alpha_i [[Y_i, Z], X_i] + \sum \alpha_i [Y_i, [X_i, Z]] \in \mathfrak{g}^{(k)}. \end{aligned}$$

Portanto temos o desejado. □

Como $\mathfrak{g}^{(k)}$ é um ideal de \mathfrak{g} , segue que $\mathfrak{g}^{(k)}$ é uma subálgebra de \mathfrak{g} , assim $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{(k-1)}$ para todo $k \geq 1$. Temos as seguintes inclusões:

$$\dots \subset \mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{(k-1)} \subset \dots \subset \mathfrak{g}^{(2)} \subset \mathfrak{g}^{(1)} \subset \mathfrak{g}$$

que é chamada **série derivada de \mathfrak{g}** . A álgebra $\mathfrak{g}^{(k)}$ é chamada **álgebra derivada de \mathfrak{g}** .

Definição A.28 Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é **solúvel** se alguma de suas álgebras derivadas for nula.

O próximo resultado nos garante que se a álgebra derivada de \mathfrak{g} é nula então a álgebra de Lie \mathfrak{g} é necessariamente abeliana.

Proposição A.29 Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é abeliana se, e só se, $\mathfrak{g}' = 0$. Em particular toda álgebra de Lie abeliana é solúvel.

Demonstração: Primeiramente suponha que \mathfrak{g} uma álgebra de Lie abeliana. Então para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$ tem-se que $[X, Y] = 0$. Logo, por definição, \mathfrak{g}' é nula.

Reciprocamente, suponha que \mathfrak{g}' é nula. Então $[X, Y] = 0$ para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$. Logo \mathfrak{g} é abeliana. \square

Mostraremos, a seguir, que toda álgebra de Lie bidimensional é solúvel.

Proposição A.30 *Toda álgebra de Lie bidimensional é solúvel.*

Demonstração: Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie bidimensional. Pelo Corolário A.6 tem que \mathfrak{g} é abeliana ou existe uma base $\{X, Y\}$ de \mathfrak{g} tal que $[X, Y] = Y$. Se \mathfrak{g} é abeliana temos da proposição anterior que \mathfrak{g} é solúvel. Se \mathfrak{g} não for abeliana, \mathfrak{g}' é unidimensional e, portanto, abeliana. De fato, seja $Z \in \mathfrak{g}'$. Temos que $Z = \alpha_1[A_1, B_1] + \dots + \alpha_n[A_n, B_n]$ onde A_1, \dots, A_n e B_1, \dots, B_n estão em \mathfrak{g} . Como $\{X, Y\}$ é base de \mathfrak{g} segue que

$$\begin{aligned} Z &= \alpha_1[a_1X + b_1Y, c_1X + d_1Y] + \dots + \alpha_n[a_nX + b_nY, c_nX + d_nY] \\ &= \alpha_1(a_1d_1 - b_1c_1)[X, Y] + \dots + \alpha_n(a_nd_n - b_nc_n)[X, Y] \\ &= (\alpha_1(a_1d_1 - b_1c_1) + \dots + \alpha_n(a_nd_n - b_nc_n))[X, Y] \end{aligned}$$

ou seja, todo elemento de \mathfrak{g}' é gerado por $[X, Y] = Y$. Assim \mathfrak{g}' é unidimensional e portanto abeliana. Assim $\mathfrak{g}^{(2)} = 0$ e \mathfrak{g} é solúvel. \square

Vejamos alguns exemplos de álgebras de Lie solúveis.

Exemplo A.14 *A subálgebra de Heisenberg \mathfrak{h} é uma álgebra de Lie solúvel, pois*

$$\mathfrak{h}' = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e$$

$$\mathfrak{h}^{(2)} = [\mathfrak{h}', \mathfrak{h}'] = 0$$

Exemplo A.15 *A álgebra das matrizes triangulares superiores*

$$\mathfrak{S}(n, \mathbb{R}) = \left\{ A \in M(n, \mathbb{R}); A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right\}$$

é uma álgebra de lie solúvel, pois

$$\begin{aligned}
 (\mathfrak{S}(n, \mathbb{R}))' &= \left\{ A \in M(n, \mathbb{R}); A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
 (\mathfrak{S}(n, \mathbb{R}))^{(2)} &= \left\{ A \in M(n, \mathbb{R}); A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & & a_{(n-2)n} \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
 &\vdots \\
 (\mathfrak{S}(n, \mathbb{R}))^{(k)} &= 0 \text{ se } k \geq n.
 \end{aligned}$$

A.1.4 Álgebras nilpotentes

Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Consideremos a seguinte sequência de subespaços desta álgebra:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{g}^1 &= \mathfrak{g} \\
 \mathfrak{g}^2 &= \mathfrak{g}' = \langle \{[X, Y]; X, Y \in \mathfrak{g}\} \rangle = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\
 \mathfrak{g}^3 &= \langle \{[X, Y]; X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}'\} \rangle = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'] \\
 &\vdots \\
 \mathfrak{g}^k &= \langle \{[X, Y]; X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}^{k-1}\} \rangle = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}] \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Mostraremos que \mathfrak{g}^k é ideal de \mathfrak{g} . Para isso ,precisaremos do seguinte lema:

Lema A.31 Para quaisquer números naturais $i, j \geq 1$, tem-se que $\langle \{[X, Y]; X \in \mathfrak{g}^i, Y \in \mathfrak{g}^j\} \rangle \subset \mathfrak{g}^{i+j}$.

Demonstração: Para provar esse resultado, usaremos indução sobre o índice j . Para $j = 1$, o resultado segue pois $\mathfrak{g}^{j+1} = \langle \{[X, Y]; X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}^j\} \rangle$. Suponhamos que a inclusão seja válida para j e mostremos que ela é válida também para $j + 1$. De fato,

$$\begin{aligned}
\langle \{[X, Y]; X \in \mathfrak{g}^i, Y \in \mathfrak{g}^{j+1}\} \rangle &= \langle \{[X, [Z, S]]; X \in \mathfrak{g}^i, Z \in \mathfrak{g}^j, S \in \mathfrak{g}\} \rangle \\
&\subset \langle \{[[X, Z], S]; X \in \mathfrak{g}^i, Z \in \mathfrak{g}^j, S \in \mathfrak{g}\} \rangle \\
&\quad + \langle \{[Z, [X, S]]; X \in \mathfrak{g}^i, Z \in \mathfrak{g}^j, S \in \mathfrak{g}\} \rangle \\
&\subset \langle \{[X, Y]; X \in \mathfrak{g}^{i+j}, Y \in \mathfrak{g}\} \rangle \\
&\quad + \langle \{[X, Y]; X \in \mathfrak{g}^j, Y \in \mathfrak{g}^{i+1}\} \rangle \\
&\subset \mathfrak{g}^{i+j+1}.
\end{aligned}$$

□

Proposição A.32 \mathfrak{g}^k é ideal de \mathfrak{g} para todo $k \geq 1$.

Demonstração: Primeiramente, mostremos que \mathfrak{g}^k é subespaço gerado por todos os possíveis colchetes que possuam k elementos de \mathfrak{g} . Para isso, faremos indução sobre k . Para $k = 2$ é imediato da definição de \mathfrak{g}^k . Suponhamos que \mathfrak{g}^{k-1} é subespaço gerado por todos os possíveis colchetes que possuam $k - 1$ elementos de \mathfrak{g} . Sabemos que os elementos de \mathfrak{g}^{k-1} podem ser escritos como $\sum_i \alpha_i Y_i$ sendo que Y_i é o produto de $k - 1$ elementos de \mathfrak{g} . Assim, \mathfrak{g}^k é gerado por elementos da forma $\sum_i [X_i, Y_i]$, ou seja, por produtos de k elementos. Por outro lado, decorre do lema anterior que todo elemento de \mathfrak{g} que pode ser escrito como produto de k elementos está em \mathfrak{g}^k . Como o produto de $k + 1$ elementos também é produto de k elementos, segue que $\mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^k$. Portanto, se $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{g}^k$ temos que $[X, Y] \in \mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^k$. □

Como todo ideal é uma subálgebra, temos que \mathfrak{g}^k é subálgebra de \mathfrak{g} . Logo obtemos as inclusões

$$\dots \subset \mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^k \subset \dots \subset \mathfrak{g}^2 \subset \mathfrak{g}$$

que é chamada de **série central descendente**.

Definição A.33 Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita **nilpotente** se um dos termos da sua série central descendente se anula.

Dessa forma, uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é nilpotente se, e somente se, existe $k_1 \geq 1$ tal que $\mathfrak{g}^{k_1} = 0$. Note que nesse caso $\mathfrak{g}^k = 0$ para todo $k \geq k_1$.

As álgebras de Lie abelianas são trivialmente solúveis e nilpotentes, além disso as álgebras nilpotentes são solúveis pois $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$. Entretanto, a recíproca não é verdadeira pois se \mathfrak{g} é uma álgebra bidimensional, então pelo Teorema A.5 temos que \mathfrak{g} é abeliana ou existe uma base $\{A, B\}$ de \mathfrak{g} tal que $[A, B] = B$. Se \mathfrak{g} é abeliana, temos que \mathfrak{g} é nilpotente. Se \mathfrak{g} não for abeliana \mathfrak{g}' é unidimensional e sua série central descendente se estabiliza no subespaço gerado por B , ou seja, $\mathfrak{g}^k = \mathfrak{g}$. Portanto, a álgebra de Lie bidimensional que possui $\{A, B\}$ como base é solúvel pelo Teorema A.30, mas não é nilpotente.

Segue agora, alguns exemplos de álgebras de Lie nilpotentes.

Exemplo A.16 *A álgebra de Heisenberg é uma álgebra de Lie nilpotente, pois*

$$\mathfrak{h}^2 = \mathfrak{h}' = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; b \in \mathbb{R} \right\} \quad e$$

$$\mathfrak{h}^3 = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^2] = 0.$$

Exemplo A.17 *A subálgebra das matrizes quadradas triangulares superiores definido como*

$$(\mathfrak{S}(n, \mathbb{R}))^1 = \mathfrak{S}(n, \mathbb{R}) = \left\{ A \in M(n, \mathbb{R}); A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \right\}$$

é uma álgebra solúvel que não é nilpotente.

Exemplo A.18 *O espaço das matrizes triangulares superiores com os elementos da diagonal principal todos iguais*

$$\left\{ A \in M(n, \mathbb{R}); A = \begin{pmatrix} a & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \right\}$$

é uma álgebra de Lie nilpotente. Em particular temos que O espaço das matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal é uma álgebra de Lie nilpotente.

As álgebras de Lie solúveis e nilpotentes têm as seguintes propriedades:

Proposição A.34 *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie.*

a) Se \mathfrak{g} é solúvel então todas as subálgebras de \mathfrak{g} são solúveis. Se \mathfrak{g} é nilpotente então todas as subálgebras de \mathfrak{g} são nilpotentes.

b) Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie solúvel e \mathfrak{h} um ideal de \mathfrak{g} , então $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é solúvel.

c) Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e \mathfrak{h} um ideal de \mathfrak{g} . Se \mathfrak{h} e $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ são solúveis, então \mathfrak{g} é solúvel.

d) O centro $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} nilpotente é não nulo.

e) Se \mathfrak{h}_1 e \mathfrak{h}_2 são ideais solúveis de \mathfrak{g} então $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ é solúvel e, portanto, \mathfrak{g} admite um único ideal solúvel maximal $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$.

Demonstração: a) É imediato.

b) Seja $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ o homomorfismo canônico. Mostraremos que $\pi(\mathfrak{g}^{(k)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k)}$ por indução sobre k e disso seguirá o resultado. Se $k = 0$ o resultado segue da sobrejetividade de π . Suponhamos que o resultado seja válido para $k - 1$, então

$$\begin{aligned} \pi(\mathfrak{g}^{(k)}) &= \pi([\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]) \\ &= [\pi(\mathfrak{g}^{(k-1)}), \pi(\mathfrak{g}^{(k-1)})] \\ &= [(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k-1)}, (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k-1)}] \\ &= (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k)}. \end{aligned}$$

Como \mathfrak{g} é solúvel, então $\pi(0) = 0 = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k)}$, ou seja, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é solúvel.

c) Como $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é solúvel, existe $k_0 \geq 0$ tal que $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k_0)} = 0$. Da proposição anterior segue que, $\pi(\mathfrak{g}^{(k_0)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(k_0)} = 0$ e assim $\mathfrak{g}^{(k_0)} \subset \mathfrak{h}$. Mas \mathfrak{h} é solúvel, ou seja, existe $k_1 \geq 0$ tal que $\mathfrak{h}^{(k_1)} = 0$. Assim

$$\mathfrak{g}^{(k_0+k_1)} = (\mathfrak{g}^{(k_0)})^{k_1} \subset \mathfrak{h}^{(k_1)} = 0.$$

Portanto \mathfrak{g} é solúvel.

d) Suponha que \mathfrak{g} seja nilpotente e tome k tal que $\mathfrak{g}^k \neq 0$ e $\mathfrak{g}^{k+1} = 0$. Como $[X, Y] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}^k$ e $Y \in \mathfrak{g}$, temos que $\mathfrak{g}^k \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Portanto $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq 0$.

e) O fato de que $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ é ideal é consequência de que a soma de ideais é ideal. Pela Proposição A.17,

$$\frac{(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)}{\mathfrak{h}_2} \approx \frac{\mathfrak{h}_1}{\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2}$$

Como \mathfrak{h}_1 é solúvel e $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ é ideal de \mathfrak{h}_1 segue, por *b*), que $\mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ é solúvel e daí $(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_2$ é solúvel e portanto $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ é solúvel pois \mathfrak{h}_2 é solúvel. Agora mostraremos que existe um único ideal solúvel maximal. Denote por n o máximo das dimensões dos ideais solúveis de \mathfrak{g} e seja $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ um ideal solúvel com $\dim \mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = n$. Então, todo ideal solúvel de \mathfrak{g} está contido em $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. De fato, se \mathfrak{h} é ideal solúvel, $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{h}$ também é. Pela maximalidade da dimensão, $\dim(\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{h}) = \dim \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ e daí que $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. Portanto, $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ contém todos os ideais solúveis e ele é evidentemente o único. \square

Podemos agora introduzir o conceito de radical solúvel de uma álgebra de Lie.

Definição A.35 *O ideal $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ do item e) da proposição anterior é chamado de **radical solúvel** (ou simplesmente radical) de \mathfrak{g} .*

Exemplo A.19 *É imediato que \mathfrak{g} é solúvel se, e só se, $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.*

Exemplo A.20 *O radical de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ é*

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}.$$

De fato, primeiramente mostraremos que \mathfrak{z} é ideal abeliano de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$. Seja

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \text{ e } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{z}.$$

Então

$$\left[\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{z}$$

ou seja, \mathfrak{z} é ideal abeliano e, portanto, solúvel. Afirmamos agora que os únicos ideais de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ são \mathfrak{z} e $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, além dos triviais. De fato, observe que

$$\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{z}$$

pois

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(a-d)}{2} & b \\ c & -\frac{(a-d)}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{(a+d)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(a+d)}{2} \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} \frac{(a-d)}{2} & b \\ c & -\frac{(a-d)}{2} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \text{ e } \begin{pmatrix} \frac{(a+d)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(a+d)}{2} \end{pmatrix} \in \mathfrak{z}$$

e além do mais $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \cap \mathfrak{z} = 0$. Agora pela Proposição A.17, temos que

$$\frac{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) + \mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} \approx \frac{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})}{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \cap \mathfrak{z}}$$

ou seja

$$\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})/\mathfrak{z} \approx \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}).$$

Seja \mathfrak{h} um ideal não trivial de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$. Tome $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Como $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \approx \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})/\mathfrak{z}$ temos $X = i + \mathfrak{z}$ com $i \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$. Tome $Y \in \mathfrak{h}/\mathfrak{z}$. Logo $Y = h_1 + \mathfrak{z}$ com $h_1 \in \mathfrak{h}$. Assim

$$[X, Y] = [i + \mathfrak{z}, h_1 + \mathfrak{z}] = [i, h_1] + \mathfrak{z} = h_2 + \mathfrak{z} \in \mathfrak{h}/\mathfrak{z}$$

e portanto $\mathfrak{h}/\mathfrak{z}$ é ideal de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Mostraremos agora que os únicos ideais de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ são os triviais. Seja $\{X, Y, H\}$ uma base de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ onde

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e note que $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$, e $[X, Y] = H$. Tome $Z = aX + bH + cY$, então

$$\text{ad}(X)Z = [X, Z] = [X, aX + bH + cY] = -2bX + cH$$

$$\text{ad}(X)^2 Z = \text{ad}(X)(\text{ad}(X)Z) = [X, [X, Z]] = [X, -2bX + cH] = -2cX$$

de onde segue que se $Z \neq 0$ então ou Z ou $\text{ad}(X)Z$ ou $\text{ad}(X)^2 Z$ é um múltiplo não nulo de X (pois se $Z, \text{ad}(X)Z$ e $\text{ad}(X)^2 Z$ forem múltiplos nulos de X temos que $Z = 0$). Tome $\mathfrak{h} \neq \{0\}$ ideal de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ e suponhamos que $Z \in \mathfrak{h}$. Se $\text{ad}(X)^2 Z$ é múltiplo não nulo de X então

$$0 \neq -2cX = [X, [X, Z]] \subset \mathfrak{h} \text{ o que implica } X \in \mathfrak{h}.$$

O mesmo ocorre se Z ou $\text{ad}(X)Z$ forem múltiplos não nulos de X . Segue agora, que $H = -[Y, X] \subset \mathfrak{h}$ e conseqüentemente $Y = (1/2)[X, H] \subset \mathfrak{h}$ e daí $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Concluímos assim que os únicos ideais de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ são os triviais. Logo $\mathfrak{h}/\mathfrak{z} = 0$ ou $\mathfrak{h}/\mathfrak{z} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ ou seja $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}$ ou $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ é não nulo. Neste último caso \mathfrak{h} contém $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, pois como $[X_1, h_1] \subset \mathfrak{h}$ para todo $X_1 \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ e todo $h_1 \in \mathfrak{h}$, temos em particular $[Y_1, h_1] \subset \mathfrak{h}$ para todo $Y_1 \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ e todo $h_1 \in \mathfrak{h}$. Dessa forma \mathfrak{h} é ideal de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ ou $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{h}$. Assim $\mathfrak{h} = \{0\}$ ou $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ mas $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \neq \{0\}$, logo $\mathfrak{h} \neq \{0\}$. Portanto \mathfrak{h} deve ser $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ ou $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$.

A.1.5 Álgebras simples e álgebras semisimples

Definição A.36 Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é *semisimples* se

$$\tau(\mathfrak{g}) = 0$$

(isto é, \mathfrak{g} não contém ideais solúveis além de 0)

Definição A.37 Uma álgebra \mathfrak{g} é *simples* se

1. os únicos ideais de \mathfrak{g} são 0 e \mathfrak{g}
2. $\dim \mathfrak{g} \neq 1$

Queremos chamar de simples as álgebras que não possuem ideais além dos triviais. Como as álgebras unidimensionais não possuem ideais próprios, não serão consideradas simples, isso para que exista compatibilidade entre os conceitos de álgebras simples e semisimples. É imediato a partir da definição que as álgebras unidimensionais não são semisimples. Entretanto, as demais álgebras que não possuem ideais próprios são semisimples. De fato, seja \mathfrak{g} uma álgebra que não possui ideais não triviais. Como $\tau(\mathfrak{g})$ é um ideal, ele deve ser 0 ou \mathfrak{g} . Se $\tau(\mathfrak{g}) = 0$, \mathfrak{g} é semisimples como se pretende. Já $\tau(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ não pode ocorrer se $\dim \mathfrak{g} \geq 2$. Isso porque se $\tau(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ então \mathfrak{g} é solúvel e, portanto, $\mathfrak{g}' \neq \mathfrak{g}$. Como \mathfrak{g}' também é um ideal, $\mathfrak{g}' = 0$, isto é, \mathfrak{g} é abeliana. Mas isso é impossível se $\dim \mathfrak{g} \geq 2$, pois todo subespaço de uma álgebra abeliana é um ideal. Em outras palavras, as álgebras simples são semisimples.

Exemplo A.21 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ é simples, como foi visto no exemplo A.20

Como o centro de uma álgebra é um ideal abeliano e, portanto solúvel, o centro de uma álgebra semisimples é necessariamente nulo. Como o centro de uma álgebra qualquer coincide com o núcleo da representação adjunta, temos que a representação adjunta de uma álgebra semisimples é fiel. Por isso toda álgebra semisimples pode ser vista como uma subálgebra de transformações lineares.

A.2 Álgebras nilpotentes

Nesta seção mostraremos que para uma álgebra de Lie de transformações lineares cujos elementos são nilpotentes, é possível encontrar uma base em que as matrizes dessas

transformações lineares nesta base são todas triangulares superiores com zeros na diagonal principal. Como consequência deste resultado temos o teorema de Engel que afirma que uma álgebra de Lie de dimensão finita é nilpotente se, e somente se, as adjuntas de seus elementos são nilpotentes.

Antes de apresentarmos tais resultados precisamos introduzir o conceito de representação nilpotente.

Definição A.38 *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Dizemos que a representação ρ de \mathfrak{g} no espaço vetorial V é uma **representação nilpotente** ou uma **nil-representação** se $\rho(X)$ é nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$. Isto significa que, dado $X \in \mathfrak{g}$, existe um inteiro positivo k (dependente de X) tal que $\rho(X)^k = 0$.*

Um exemplo de nil-representação é a representação adjunta de uma álgebra nilpotente. De fato, seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie nilpotente. Assim existe $k \geq 1$ tal que $\mathfrak{g}^k = 0$, isto é

$$\mathfrak{g}^k = \langle \{[X, Y]; X \in \mathfrak{g} \text{ e } Y \in \mathfrak{g}^{k-1}\} \rangle = 0.$$

Isso significa que todos os colchetes envolvendo k elementos de \mathfrak{g} se anulam. Daí que $\text{ad}(X)^{k-1}Z = 0$ para todo $Z \in \mathfrak{g}$ e portanto $\text{ad}(X)$ é nilpotente.

Antes de estudarmos as representações nilpotentes, vamos utilizar o seguinte fato sobre a adjunta em $\mathfrak{gl}(V)$, álgebra de Lie das transformações lineares de V em V .

Proposição A.39 *Seja V um espaço de dimensão finita sobre \mathbb{K} e $A \in \mathfrak{gl}(V)$. Se A é nilpotente então $\text{ad}(A)$ é nilpotente. Portanto se $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é uma nil-representação, então $X \mapsto \text{ad}(\rho(X))$ também é uma nil-representação.*

Demonstração: Primeiramente mostraremos que $\text{ad}(A)^n B$ é uma soma de termos da forma $A^r B A^s$ com $r + s = n$. De fato, por indução sobre n , se $n = 1$ temos

$$\text{ad}(A)B = [A, B] = AB - BA = ABA^0 - A^0BA.$$

Suponhamos que o resultado seja válido para $n = k$ ou seja

$$\text{ad}(A)^k B = a_1 A^{r_1} B A^{s_1} + a_2 A^{r_2} B A^{s_2} + \dots + a_n A^{r_n} B A^{s_n}$$

com $r_i + s_i = k$ para todo $i = 1, \dots, n$ e $a_i \in \mathbb{K}$. Mostraremos que o resultado é válido para $n = k + 1$. Tem-se

$$\begin{aligned}
 \text{ad}(A)^{k+1}B &= \text{ad}(A)(\text{ad}(A)^k B) \\
 &= [A, a_1 A^{r_1} B A^{s_1} + a_2 A^{r_2} B A^{s_2} + \dots + a_n A^{r_n} B A^{s_n}] \\
 &= A(a_1 A^{r_1} B A^{s_1} + a_2 A^{r_2} B A^{s_2} + \dots + a_n A^{r_n} B A^{s_n}) - \\
 &\quad -(a_1 A^{r_1} B A^{s_1} + a_2 A^{r_2} B A^{s_2} + \dots + a_n A^{r_n} B A^{s_n})A \\
 &= a_1 A^{r_1+1} B A^{s_1} + \dots + a_n A^{r_n+1} B A^{s_n} - a_1 A^{r_1} B A^{s_1+1} \\
 &\quad - \dots - a_n A^{r_n} B A^{s_n+1}
 \end{aligned}$$

com $r_i + s_i + 1 = k + 1$ para todo $i = 1, \dots, n$. Concluimos assim o processo de indução. Agora, como A é nilpotente, existe $k \geq 1$ tal que $A^k = 0$. Tomando n suficientemente grande e como $n = r + s$ teremos que $r \geq k$ ou $s \geq k$. Logo $A^r = 0$ ou $A^s = 0$. Portanto, a soma dos termos de $\text{ad}(A)^n B$ se anulam, isto é, $\text{ad}(A)$ é nilpotente. \square

O objetivo agora é encontrar uma base na qual todos os elementos de uma nil-representação são triangulares superiores. Para isso precisamos do seguinte resultado:

Teorema A.40 *Seja $V \neq 0$ um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma subálgebra de Lie. Suponhamos que todo $X \in \mathfrak{g}$ é nilpotente. Então, existe $v \in V, v \neq 0$ tal que $Xv = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração: Provaremos por indução sobre a dimensão de \mathfrak{g} . Se $\dim \mathfrak{g} = 1$, seja $0 \neq X \in \mathfrak{g}$. Como X é nilpotente existe $k \geq 1$ tal que $X^k = 0$ e $X^{k-1} \neq 0$. Seja $w \in V$ tal que $X^{k-1}w \neq 0$ e tome $v = X^{k-1}w$. Então

$$Xv = X X^{k-1}w = X^k w = 0.$$

Portanto $Xv = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, o que mostra o resultado para álgebras de dimensão um.

Agora, para mostrar o passo de indução, suponha que $\dim \mathfrak{g} > 1$ e que o resultado é válido para toda álgebra com dimensão estritamente menor que $\dim \mathfrak{g}$. Com essa hipótese, mostraremos que existe um ideal $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ de codimensão um. De fato, \mathfrak{g} admite subálgebras não-triviais, isto é, diferentes de 0 e \mathfrak{g} , pois subespaços de dimensão um são subálgebras. Tomemos uma subálgebra \mathfrak{h} não-trivial cuja dimensão é máxima entre as dimensões das

subálgebras não-triviais. Mostraremos que \mathfrak{h} é um ideal de codimensão um de \mathfrak{g} . Para provar isso, consideremos o espaço vetorial $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Notemos que $\text{ad}(X)$ para $X \in \mathfrak{h}$ deixa \mathfrak{h} invariante, pois $\text{ad}(X)\mathfrak{h} = [X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ uma vez que \mathfrak{h} é subálgebra de \mathfrak{g} . Logo, a representação adjunta de \mathfrak{h} em \mathfrak{g} induz uma representação ρ de \mathfrak{h} em $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Pela proposição anterior, $\text{ad}(X)$, $X \in \mathfrak{h}$, é nilpotente em $\mathfrak{gl}(V)$ e, portanto, sua restrição a \mathfrak{g} também é nilpotente, o que implica que ρ é uma nil-representação. Assim $\rho(\mathfrak{h})$ é uma álgebra que satisfaz as hipóteses do teorema e tem dimensão estritamente menor que \mathfrak{g} . Aplica-se assim a hipótese de indução para $\rho(\mathfrak{h})$ e daí existe $w \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, $w \neq 0$ tal que $\rho(\mathfrak{h})w = 0$. Isso significa que existe $X_0 \in \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$ tal que $\rho(\mathfrak{h})X_0 + \mathfrak{h} = [\mathfrak{h}, X_0] + \mathfrak{h} = 0$ o que implica que $[X_0, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Isso mostra que \mathfrak{h} é de codimensão um, pois o subespaço gerado por X_0 e \mathfrak{h} é uma subálgebra de dimensão estritamente maior que a dimensão de \mathfrak{h} e \mathfrak{h} foi escolhido de dimensão máxima entre as subálgebras não triviais. Assim o subespaço gerado por X_0 e \mathfrak{h} é o próprio \mathfrak{g} . Além do mais, como $X_0 \notin \mathfrak{h}$, $[X_0, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ e \mathfrak{h} é de codimensão um, \mathfrak{h} é um ideal de \mathfrak{g} .

Agora, aplicando a hipótese de indução para \mathfrak{h} como subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$, o subespaço

$$W = \{v \in V : Xv = 0 \text{ para todo } X \in \mathfrak{h}\}$$

é não nulo. Como os elementos de W se anulam pelos elementos de \mathfrak{h} , para concluir a demonstração é suficiente mostrar que existe $v \in W$, $v \neq 0$ tal que $X_0v = 0$ onde X_0 é como acima. Temos que, se $X \in \mathfrak{h}$ e $w \in W$, então

$$XX_0w = [X, X_0]w + X_0Xw = 0,$$

pois $X, [X, X_0] \in \mathfrak{h}$. Isso implica que $X_0w \in W$, ou seja, W é invariante por X_0 . Mas X_0 é nilpotente e, portanto, sua restrição a W também é nilpotente. Segue que o argumento usado no caso em que $\dim \mathfrak{g} = 1$ nos permite concluir a demonstração do teorema. \square

Agora, para construir uma base na qual todos os elementos de uma nil-representação são triangulares superiores com zeros na diagonal principal, através do teorema acima, basta proceder por indução, através de quocientes sucessivos.

Teorema A.41 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma subálgebra tal que todo $X \in \mathfrak{g}$ é nilpotente. Então, existem subespaços*

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

tal que $XV_i \subset V_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$. Esses subespaços podem ser definidos indutivamente por

$$\begin{aligned} V_0 &= 0 \\ V_i &= \{v \in V : Xv \in V_{i-1} \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}\}. \end{aligned}$$

Em particular, estendendo sucessivamente bases dos subespaços V_i , obtém-se uma base β de V tal que a matriz de X em relação a β é triangular superior com zeros na diagonal para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Demonstração: Defina

$$V_1 = \{v \in V : Xv = 0 \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}\}.$$

Pelo teorema anterior, $V_1 \neq 0$. Notemos que, V_1 é claramente \mathfrak{g} -invariante. Portanto a representação canônica de \mathfrak{g} em V induz uma representação ρ de \mathfrak{g} em V/V_1 . Como cada $X \in \mathfrak{g}$ é nilpotente, ρ é uma nil-representação. Logo o teorema anterior se aplica a ρ , isto é, existe $w \in V/V_1$ com $w \neq 0$ tal que $\rho(X)w = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Isso significa que existe $v \in V - V_1$ tal que $Xv \in V_1$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, o que garante que o subespaço

$$V_2 = \{v \in V : Xv \in V_1 \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}\}$$

contém V_1 , e é distinto de V_1 . Podemos usar o mesmo argumento e construir, sucessivamente,

$$V_i = \{v \in V : Xv \in V_{i-1} \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}\}$$

que é diferente de V_{i-1} e o contém. Como $\dim V < \infty$, algum $V_i = V$, e assim mostramos a existência dos subespaços

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n = V.$$

Agora, tome a base

$$\beta = \{v_1, \dots, v_{i_1}, v_{i_1+1}, \dots, v_{i_2}, \dots, v_{i_{n-1}+1}, \dots, v_{i_n}\}$$

com $v_{i_j+1}, \dots, v_{i_{j+1}} \in V_{j+1}$, $j = 0, \dots, n-1$. Em relação a esta base, os elementos de \mathfrak{g} se representam todos como matrizes triangulares superiores com zeros nos blocos diagonais correspondentes às dimensões dos subespaços V_i . \square

Este último teorema garante que toda subálgebra de matrizes, cuja representação canônica é uma nil-representação, está contida na álgebra das matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal e, como tal, é nilpotente. Vale a pena destacar este fato.

Corolário A.42 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma subálgebra tal que todo $X \in \mathfrak{g}$ é nilpotente. Então, \mathfrak{g} é nilpotente. Em particular, $\rho(\mathfrak{h})$ é uma álgebra nilpotente se ρ é uma nil-representação da álgebra \mathfrak{h} em V .*

No caso em que a representação adjunta é uma nil-representação, vamos verificar, para álgebras de dimensão finita, que a álgebra é nilpotente e não apenas sua imagem pela adjunta. De fato, tome $\text{ad} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$. Temos que

$$\ker(\text{ad}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{h} : [X, Y] = 0 \text{ para todo } Y \in \mathfrak{h}\}$$

é abeliano e portanto solúvel. A $\text{Im}(\text{ad})$ também é solúvel pois por hipótese $\text{Im}(\text{ad})$ é nilpotente. Como $\text{Im}(\text{ad}) \approx \mathfrak{h}/\ker(\text{ad})$, tem-se que $\mathfrak{h}/\ker(\text{ad})$ é solúvel e portanto \mathfrak{h} é solúvel. Para mostrar que \mathfrak{h} é nilpotente iremos introduzir a **série central ascendente** de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} que é definida indutivamente como

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_0 &= 0 \\ \mathfrak{g}_i &= \{X \in \mathfrak{g} : [Y, X] \in \mathfrak{g}_{i-1} \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\}. \end{aligned}$$

Note que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i-1} \subset \mathfrak{g}_i$ para todo i , assim \mathfrak{g}_i é um ideal de \mathfrak{g} . Em geral pode ocorrer que a partir de algum termo a série central ascendente se estabilize em algum ideal próprio de \mathfrak{g} . Isso não ocorre se a representação adjunta de uma álgebra de dimensão finita é nilpotente. De fato, a sequência de subespaços V_i do teorema anterior coincide, no caso de uma representação adjunta, com a série central ascendente. Assim, se a representação adjunta é nilpotente, a série central ascendente termina em \mathfrak{g} . Isso mostra o seguinte corolário:

Corolário A.43 *Seja $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma álgebra de Lie de dimensão finita e suponha que ad é uma nil-representação de \mathfrak{g} . Então, a série central ascendente satisfaz*

$$0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$$

para algum n .

Agora, podemos mostrar o teorema de Engel.

Teorema A.44 (de Engel) *Seja $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma álgebra de Lie de dimensão finita e suponha que para todo $X \in \mathfrak{g}$, $\text{ad}(X)$ é nilpotente, então \mathfrak{g} é nilpotente.*

Demonstração: Pelo corolário anterior a série central ascendente termina em $\mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$. Usando o fato de que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i-1}$ mostraremos por indução que

$$\mathfrak{g}^i \subset \mathfrak{g}_{n-i+1}$$

De fato, se $i = 1$ o argumento é válido pois $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}_{n-1+1}$ logo $\mathfrak{g}^1 \subset \mathfrak{g}_{n-1+1}$. Suponha que o resultado seja válido para $i = k$, ou seja $\mathfrak{g}^k \subset \mathfrak{g}_{n-k+1}$ e mostraremos que o resultado é válido para $i = k + 1$. Note que

$$\mathfrak{g}^{k+1} = \langle \{[X, Y] : X \in \mathfrak{g} \text{ e } Y \in \mathfrak{g}^k\} \rangle$$

e como por hipótese $\mathfrak{g}^k \subset \mathfrak{g}_{n-k+1}$, tem-se que

$$\mathfrak{g}^{k+1} \subset \langle \{[X, Y] : X \in \mathfrak{g} \text{ e } Y \in \mathfrak{g}_{n-k+1}\} \rangle$$

mas $Y \in \mathfrak{g}_{n-k+1}$ significa que

$$[X, Y] \in \mathfrak{g}_{n-k+1-1} = \mathfrak{g}_{n-k} \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}$$

logo $\mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}_{n-k}$. Daí que $\mathfrak{g}^{n+1} = 0$ e, portanto, \mathfrak{g} nilpotente. \square

Em geral, uma representação de uma álgebra nilpotente nem sempre é nilpotente, como mostraremos nos dois próximos exemplos.

Exemplo A.22 *Seja \mathfrak{g} a álgebra das matrizes diagonais $n \times n$. Como \mathfrak{g} é abeliana ela é nilpotente. Como uma matriz diagonal não é nilpotente, a menos que ela se anule, temos que a representação canônica de \mathfrak{g} , dada pela inclusão, não é uma nil-representação.*

Exemplo A.23 *Seja \mathfrak{g} a álgebra das matrizes triangulares superiores com elementos da diagonal todos iguais e diferente de zero:*

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix} \right\}$$

Como as matrizes que são múltiplas da identidade são matrizes diagonais, elas não são nilpotentes. Como elas pertencem a \mathfrak{g} , a representação canônica de \mathfrak{g} não é nilpotente.

A diferença de uma representação arbitrária para uma nil-representação de uma álgebra nilpotente é que geralmente, podem aparecer autovalores não-nulos da representação. Quando isso acontece, ocorre um certo padrão de repetição, como no caso do segundo exemplo acima. Esse padrão de repetição é dado pelas decomposições de Jordan dos elementos da álgebra.

Analisaremos agora, essas decomposições.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $A : V \rightarrow V$ uma transformação linear. Pelo teorema da decomposição primária, V se decompõe em subespaços A -invariantes

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$$

que são os auto-espaços generalizados

$$V_i = \{v \in V : p_i(A)^k v = 0 \text{ para algum } k \geq 1\}.$$

Aqui os polinômios irredutíveis p_i , $i = 1, \dots, s$, são as componentes primárias do polinômio minimal $p = p_1^{m_1} \dots p_s^{m_s}$ de A . No caso em que o corpo de escalares é algebricamente fechado, $p_i(A) = A - \lambda_i$ com λ_i autovalor de A e os subespaços da decomposição primária são escritos na forma

$$V_i = \{v \in V : (A - \lambda_i)^k v = 0 \text{ para algum } k \geq 1\}.$$

Denotaremos esses subespaços por V_{λ_i} para enfatizar a relação desses subespaços com os autovalores de A .

Verificaremos agora como age uma outra transformação linear B nos espaços da decomposição primária de A . Para isso precisaremos da fórmula de comutação em álgebras associativas que se aplicam em particular à álgebra das transformações lineares de um espaço vetorial.

Proposição A.45 *Seja \mathcal{A} uma álgebra associativa e tome $x, y \in \mathcal{A}$.*

1. Denotando $\text{ad}_e(x)y = xy - yx$, tem-se, para todo $n \geq 1$, a fórmula de comutação à esquerda

$$x^n y = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (\text{ad}_e(x)^{n-p} y) x^p.$$

2. A fórmula de comutação à direita é dada por

$$y x^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^p (\text{ad}_d(x)^{n-p} y)$$

onde $\text{ad}_d(x)y = yx - xy$ é a adjunta à direita.

Demonstração: Mostraremos por indução. Para $n = 1$, o resultado é válido pois

$$xy = yx + [x, y].$$

Para $n + 1$, tem-se aplicando a hipótese de indução que

$$\begin{aligned} x^{n+1}y &= x(x^n y) \\ &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (\text{ad}_e(x)^{n-p+1}y)x^p + \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (\text{ad}_e(x)^{n-p}y)x^{p+1}. \end{aligned}$$

Substituindo p por $p + 1$ na segunda soma da última igualdade, tem-se

$$\begin{aligned} x^{n+1}y &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (\text{ad}_e(x)^{n-p+1}y)x^p + \sum_{p=1}^n \binom{n}{p-1} (\text{ad}_e(x)^{n+1-p}y)x^p \\ &= \text{ad}_e(x)^{n+1}y + yx^{n+1} + \sum_{p=1}^n \left(\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} \right) (\text{ad}_e(x)^{n+1-p}y)x^p, \end{aligned}$$

que é a fórmula de comutação à esquerda. Para provar a fórmula de comutação à direita o processo é análogo. \square

Agora mostraremos que os espaços das decomposições primárias dos elementos de uma álgebra nilpotente são invariantes pela álgebra.

Proposição A.46 *Suponha que o corpo de escalares é algebricamente fechado. Sejam A e B transformações lineares de V . Tome V_{λ_i} , como acima, os auto-espacos generalizados de A . Então, $BV_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i}$ para todo i se, e somente se, $\text{ad}(A)^q B = 0$ para algum $q \geq 1$.*

Demonstração: Como o corpo de escalares é algebricamente fechado temos que

$$V_{\lambda_i} = \{v \in V : (A - \lambda_i I)^k v = 0 \text{ para algum } k \geq 1\}.$$

Dado i , seja $A_i = A - \lambda_i I = (A - \lambda_i I)$. Como λ_i é múltiplo da identidade, tem-se que

$$\text{ad}(A)^q B = 0 \text{ se, e só se, } \text{ad}(A_i)^q B = 0.$$

De fato, vamos mostrar por indução sobre q . Se $q = 1$ temos que $\text{ad}(A_i)^1 B = 0$ se, e só se, $\text{ad}(A - \lambda_i I)B = 0$, mas $\text{ad}(A - \lambda_i I)B = 0$ se, e somente se, $[A - \lambda_i I, B] = 0$ o que implica que $[A, B] = 0$ ou seja $\text{ad}(A)B = 0$. Logo o resultado é válido para $q = 1$. Suponha agora

que o resultado é válido para $q = k$ ou seja $\text{ad}(A)^k B = 0$ se, e somente se, $\text{ad}(A_i)^k B = 0$.

Daí temos

$$0 = \text{ad}(A)^{k+1} B = \text{ad}(A)^k (\text{ad}(A)B)$$

mas por hipótese de indução $\text{ad}(A)^k (\text{ad}(A)B) = 0$ se, e só se, $\text{ad}(A_i)^k (\text{ad}(A)B) = 0$. Mas

$$\text{ad}(A_i)^k (\text{ad}(A)B) = \text{ad}(A_i)^k ([A, B])$$

e $\text{ad}(A_i)^k ([A, B]) = 0$ se, e somente se, $\text{ad}(A_i)^k ([A - \lambda_i, B]) = 0$ e como

$$\text{ad}(A_i)^k ([A - \lambda_i, B]) = \text{ad}(A_i)^k ([A_i, B]) = \text{ad}(A_i)^k \text{ad}(A_i)B = \text{ad}(A_i)^{k+1} B$$

tem-se que $\text{ad}(A_i)^k ([A, B]) = 0$ se, e somente se, $\text{ad}(A_i)^{k+1} B = 0$. Portanto $\text{ad}(A)^q B = 0$ se, e somente se, $\text{ad}(A_i)^q B = 0$.

Suponhamos então que $\text{ad}(A)^q B = 0$. Logo $\text{ad}(A_i)^q B = 0$. Tome $v \in V_{\lambda_i}$, assim existe k tal que $(A - \lambda_i)^k v = 0$ o que implica $(A_i)^k v = 0$. Fixando os expoentes q e k tome $n > q + k$. Então para $0 \leq p \leq n$ tem-se que $n - p > q$ ou $p > k$ e portanto na fórmula de comutação para $A_i^n B$ todos os termos aplicados a v se anulam. De fato, como $n - p > q$ ou $p > k$ temos $\text{ad}(A)^{n-p} B = 0$ ou $A_i^p v = 0$. Daí como

$$A_i^n B = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (\text{ad}_e(A_i)^{n-p} B) A_i^p$$

temos $A_i^n B v = 0$ o que implica que $B v \in V_{\lambda_i}$ e daí que V_{λ_i} é B -invariante.

Reciprocamente como a restrição de A_i a V_{λ_i} é nilpotente tem-se pela Proposição A.39 que $\text{ad}(A_i)$ é nilpotente ou seja, existe q_i tal que $\text{ad}(A_i)^{q_i} B_i = 0$ onde B_i é a restrição de B a V_{λ_i} . Portanto $\text{ad}(A)^q B = 0$ para algum q . \square

Mostraremos agora que pode-se decompor o espaço de uma representação em auto-espacos generalizados, e também que eles são auto-espacos simultâneos para todos os elementos da álgebra. De fato, seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie nilpotente e ρ uma representação finita de \mathfrak{g} em V . Como \mathfrak{g} é nilpotente, temos que dados $X, Y \in \mathfrak{g}$ tem-se que $\text{ad}(X)^q(Y) = 0$ para algum $q \geq 1$. Aplicamos então ρ a esta igualdade. Logo

$$\text{ad}(\rho(X))^q \rho(Y) = 0$$

para algum $q \geq 1$. Suponha que o corpo de escalares seja algebricamente fechado. Pela proposição anterior temos que $\rho(Y)V_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i}$. Tome $X \in \mathfrak{g}$. Seja

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$$

a decomposição primária de V por $\rho(X)$. Como cada V_i é invariante por $\rho(Y)$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$, tem-se que esses subespaços são \mathfrak{g} -invariantes. Agora tome a decomposição primária de V_i em relação as restrições de $\rho(Y)$, com $Y \in \mathfrak{g}$. Suponha que para todo $Y \in \mathfrak{g}$ e $i = 1, \dots, s$ a decomposição primária de $\rho(Y)$ em V_i se constitui de um único elemento. Logo cada V_i é um auto espaço generalizado das correspondentes restrições de $\rho(Y)$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$. Isso significa que dado $Y \in \mathfrak{g}$ e $i = 1, \dots, s$ existe um autovalor $\lambda_i(Y)$ para $\rho(Y)$ tal que V_i está contido no auto espaço generalizado associado a $\lambda_i(Y)$, isto é $(\rho(Y) - \lambda_i(Y))^k v = 0$ para algum $k \geq 1$ se $v \in V_i$.

Agora se algum V_i se decompõe por algum $\rho(Y)$, pode-se tomar uma nova decomposição de V e repetir o mesmo processo. Já que a dimensão dos subespaços diminuem, obtém-se por indução uma decomposição em subespaços \mathfrak{g} -invariantes

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_t$$

tal que para todo $Y \in \mathfrak{g}$ e $i = 1, \dots, t$ existe $\lambda_i(Y)$ autovalor de $\rho(Y)$ com $(\rho(Y) - \lambda_i(Y))^k v = 0$ para algum $k \geq 1$ se $v \in W_i$.

A partir daí se obtém a decomposição em relação a representação de uma álgebra nilpotente.

Teorema A.47 *Suponha que o corpo de escalares é algebricamente fechado e tome ρ uma representação de \mathfrak{g} em V , com $\dim V < \infty$ e \mathfrak{g} nilpotente. Então, existem funcionais lineares $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ tal que se*

$$V_{\lambda_i} = \{v \in V : \text{para todo } X \in \mathfrak{g}, \text{ existe } n \geq 1, (\rho_i(X) - \lambda_i(X))^n v = 0\},$$

onde ρ_i é a restrição de ρ a V_{λ_i} , então V_{λ_i} é \mathfrak{g} -invariante, $i = 1, \dots, s$ e

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s}.$$

Demonstração: A discussão feita após a última proposição garante a existencia de subespaços \mathfrak{g} -invariantes $W_1 \oplus \dots \oplus W_s$ e aplicações $\lambda_i : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$$

com $W_i \subset V_{\lambda_i}$ e V_{λ_i} como no enunciado do teorema. Neste caso pode-se tomar $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$ somando se necessário parcelas para as quais os λ coincidem. Vamos mostrar que $W_i = V_{\lambda_i}$.

Primeiramente tem-se que λ_i é linear. De fato, denote por ρ_i a restrição da representação a V_{λ_i} . Pela forma como V_{λ_i} está definido tem-se que $\rho_i(X) - \lambda_i(X)$ é nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$. Portanto $\text{tr}(\rho_i(X) - \lambda_i(X)Id) = 0$ e daí temos

$$\begin{aligned} 0 &= \text{tr}(\rho_i(X)) - \text{tr}(\lambda_i(X)Id) \\ &= \text{tr}(\rho_i(X)) - (\dim V_{\lambda_i})\lambda_i(X) \end{aligned}$$

e assim $\text{tr}(\rho_i(X)) - (\dim V_{\lambda_i})\lambda_i(X) = 0$. Como $(\dim V_{\lambda_i}) \neq 0$ tem-se que

$$\lambda_i(X) = \frac{\text{tr}(\rho_i(X))}{\dim V_{\lambda_i}}.$$

Logo, da linearidade do traço temos que λ_i é linear.

Como os funcionais lineares $\lambda_i - \lambda_j$ não são nulos e existem em quantidade finita é possível tomar $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\lambda_i(X) \neq \lambda_j(X)$ para todo $i \neq j$. Tomando X dessa forma, tem-se que cada $\lambda_i(X)$ é autovalor de $\rho(X)$. Seja $V_{\lambda_i(X)}$ o auto-espaço generalizado associado. Como os autovalores são todos distintos, a soma $V_{\lambda_1(X)} + \dots + V_{\lambda_s(X)}$ é direta. Como $W_i \subset V_{\lambda_i(X)}$ a soma coincide com V . Assim $W_i = V_{\lambda_i(X)}$, $i = 1, \dots, s$, mas por definição tem-se que $V_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i(X)}$ o que mostra que $V_{\lambda_i(X)} = V_{\lambda_i}$. Portanto $W_i = V_{\lambda_i}$. \square

Agora vamos introduzir uma terminologia que aparece a todo momento, ligada aos autovalores λ_i da representação.

Definição A.48 *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e ρ uma representação de \mathfrak{g} em V . Um **peso** de ρ é um funcional linear $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ tal que o subespaço V_λ de V definido por*

$$V_\lambda = \{v \in V : \text{para todo } X \in \mathfrak{g}, \text{ existe } n \geq 1, (\rho(X) - \lambda(X))^n v = 0\}$$

*satisfaz $V_\lambda \neq 0$. O subespaço V_λ é chamado de **subespaço de pesos associado a λ** . A dimensão de V_λ é chamada de **multiplicidade de λ** .*

Portanto os pesos de uma representação são os autovalores dos elementos da álgebra.

Vejamos um exemplo para ilustrar a definição de peso.

Exemplo A.24 *Seja \mathfrak{g} a álgebra das matrizes diagonais em relação à base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Os pesos da representação canônica de \mathfrak{g} são os funcionais λ_i , $i = 1, \dots, n$ definidos por*

$$\lambda_i(\text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}) = a_i$$

Assim V_{λ_i} , $i = 1, \dots, n$ é o subespaço gerado por e_i .

Exemplo A.25 No caso em que ρ é uma nil-representação de dimensão finita, teremos que 0 é o único peso de ρ e V_0 coincidirá com o espaço da representação.

De volta ao teorema A.47, seja ρ_i a restrição de ρ a V_{λ_i} . Logo $\rho_i(X) - \lambda_i(X)$ é nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$. Se mostrarmos que $\rho_i(X) - \lambda_i(X)$ é uma nil-representação, isto nos esclarece a forma de ρ_i . Como $\rho_i(X) - \lambda_i(X)$ é nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$, para mostrar que $\rho_i(X) - \lambda_i(X)$ é uma nil-representação nos resta mostrar que $\rho_i - \lambda_i$ é uma representação, o que será feito no próximo resultado.

Proposição A.49 Seja ρ uma representação de dimensão finita de \mathfrak{g} em V . Suponha que exista $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $\rho(X) - \lambda(X)$ seja nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$. Então, λ é linear e $\tilde{\rho} = \rho - \lambda$ é uma representação.

Demonstração: Do mesmo modo que na demonstração do Teorema A.47, temos que

$$\lambda(X) = \frac{\text{tr}(\rho(X))}{\dim V}$$

e portanto λ é linear. Como o traço de um comutador se anula, temos que $\text{tr}([\rho X, \rho Y]) = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Logo $\lambda([X, Y]) = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Assim, $\tilde{\rho}[X, Y] = \rho[X, Y]$. Como ρ é uma representação, temos que $\rho[X, Y] = [\rho(X), \rho(Y)]$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} [\tilde{\rho}(X), \tilde{\rho}(Y)] &= [\rho(X) - \lambda(X), \rho(Y) - \lambda(Y)] \\ &= [\rho(X), \rho(Y)] \end{aligned}$$

pois os múltiplos da identidade comutam com todas as transformações lineares. Logo $\tilde{\rho}[X, Y] = [\tilde{\rho}(X), \tilde{\rho}(Y)]$. Portanto $\tilde{\rho}$ é uma representação. \square

Como $\tilde{\rho}_i = \rho_i - \lambda_i$ são nil-representações, existem bases de V_{λ_i} tal que $\tilde{\rho}_i(X)$ é triangular superior com zeros na diagonal. Mas λ_i é múltiplo da identidade. Logo a restrição de $\rho_i(X)$ a V_{λ_i} é triangular superior com $\lambda_i(X)$ na diagonal. Assim podemos decompor ρ como no resultado a seguir.

Teorema A.50 Suponha que o corpo de escalares é algebricamente fechado e seja ρ uma representação da álgebra nilpotente \mathfrak{g} sobre o espaço de dimensão finita V . Então, existe uma base de V tal que nessa base ρ se escreve como

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} \rho_1(X) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \rho_s(X) \end{pmatrix} \quad X \in \mathfrak{g}$$

com os blocos diagonais $\rho_i(X)$ da forma

$$\rho_i(X) = \begin{pmatrix} \lambda_i(X) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i(X) \end{pmatrix} \quad X \in \mathfrak{g}$$

onde λ_i é peso da representação.

A.3 Álgebras solúveis

Os elementos das álgebras solúveis de transformações lineares, também podem ser colocados em forma triangular, como será mostrado no teorema de Lie. Mas antes de construir uma base que triangularize os elementos de uma álgebra solúvel, precisaremos mostrar a existência de um autovetor comum para os elementos da álgebra. A existência desse autovetor será mostrada no próximo resultado.

Teorema A.51 *Sejam $V \neq 0$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma subálgebra solúvel. Então existe $v \in V, v \neq 0$ e um funcional linear $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ tal que*

$$Xv = \lambda(X)v \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{g},$$

isto é, v é um autovetor comum a $X \in \mathfrak{g}$ com autovalor $\lambda(X)$.

Demonstração: Observemos que λ é linear pois

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha X + Y)v &= (\alpha X + Y)v = (\alpha X)v + Yv \\ &= \alpha(X)v + Yv \\ &= \alpha\lambda(X)v + \lambda(Y)v \end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Resta mostrarmos que existe um autovetor comum para todo $X \in \mathfrak{g}$. Faremos isso por indução sobre a dimensão de \mathfrak{g} .

Se $\dim \mathfrak{g} = 1$, então \mathfrak{g} é gerada por X e a existência do autovetor para X segue do fato do corpo ser algebricamente fechado.

Se $\dim \mathfrak{g} > 1$, então \mathfrak{g} possui um ideal \mathfrak{h} de codimensão 1. Aplicando a hipótese de indução sobre \mathfrak{h} temos que existe $w \in V, w \neq 0$ tal que

$$Xw = \lambda(X)w \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{h}.$$

O fato de \mathfrak{h} ter codimensão 1, garante que existe $X_0 \in \mathfrak{g}$ tal que X_0 e \mathfrak{h} geram \mathfrak{g} . Assim, se encontrarmos um autovetor comum a X_0 e a todo elemento de \mathfrak{h} , temos o desejado. Note que isso acontece se encontrarmos um subespaço $W \neq 0$ tal que W é invariante por X_0 e todo $v \in W$, $v \neq 0$ é autovetor de todo $Y \in \mathfrak{h}$. De fato, como W é invariante por X_0 e o corpo de escalares é algebricamente fechado, X_0 tem um autovetor em W e, portanto, esse autovetor é comum a todos os elementos de \mathfrak{g} .

Um subespaço W que satisfaz essas condições é

$$W = \text{ger}\{X_0^i w : i \geq 0\},$$

o subespaço cíclico de X_0 gerado por W .

É imediato verificar que este subespaço é invariante por X_0 . Observe que para algum $p \geq 0$ temos $\beta = \{w, X_0 w, \dots, X_0^p w\}$ é base de W . Logo a restrição de $Y \in \mathfrak{h}$ a W é múltiplo da identidade. Assim, dado $Y \in \mathfrak{h}$, seu valor nos elementos dessa base é dado pela fórmula de comutação à direita como

$$Y X_0^k w = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} X_0^j (\text{ad}_d(X_0)^{k-j} Y) w \quad 0 \leq k \leq p.$$

Como \mathfrak{h} é ideal e w é autovetor para os elementos de \mathfrak{h} , tem-se que

$$\begin{aligned} Y X_0^k w &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda(\text{ad}_d(X_0)^{k-j} Y) X_0^j w \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \lambda(\text{ad}_d(X_0)^{k-j} Y) (X_0^j w) + \lambda(Y) X_0^k w \in W \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Isso mostra que W é invariante por \mathfrak{h} e que em relação a base β , a restrição de Y a W é triangular superior, com os elementos diagonais são todos iguais a $\lambda(Y)$. Assim, analisando $\text{tr}(Y|_W)$, tem-se que

$$\lambda(Y) = \frac{\text{tr}(Y|_W)}{\dim W}.$$

Como todo colchete de transformações lineares tem traço zero, então

$$\text{tr}(\text{ad}_d(X_0)^{k-j} Y|_W) = 0$$

se $k - j \geq 1$. Esse fato juntamente com a expressão para $Y X_0^k w$ dada em (A.5), tem-se que

$$Y X_0^k w = \lambda(Y) X_0^k w \quad Y \in \mathfrak{h}, \quad k = 0, \dots, p.$$

Portanto $X_0^k w$ é autovetor de $Y \in \mathfrak{h}$. Assim W satisfaz as condições requeridas e portanto temos o desejado. \square

Agora podemos mostrar o teorema de Lie.

Teorema A.52 (de Lie) *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma álgebra solúvel. Então, existe uma base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V e funcionais lineares $\lambda_1, \dots, \lambda_n : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ tal que, em relação a β , $X \in \mathfrak{g}$ se escreve como*

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1(X) & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(X) \end{pmatrix}$$

Demonstração: Seja v_1 autovetor comum a todos os elementos de \mathfrak{g} com autovalor $\lambda_1(X)$. Sabemos que λ_1 é funcional. Seja V_1 o subespaço gerado por v_1 . Assim \mathfrak{g} deixa V_1 invariante e se representa em V/V_1 . Como \mathfrak{g} é solúvel, existe $w \in V/V_1$ que é autovetor comum para os elementos da representação de \mathfrak{g} , com autovalor λ_2 . Tomando v_2 como representante de W em V , tem-se que $Xv_2 = \lambda_2(X)v_2 + u$ com $u \in V_1$. Como $w \neq 0$ em V/V_1 , $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente. Agindo assim sucessivamente obtemos a base e os pesos requeridos. \square

A.4 Critérios de Cartan

As vezes, pode não ser fácil encontrar o radical para uma particular álgebra de Lie \mathfrak{g} . A forma de Cartan-Killing de uma álgebra de Lie de dimensão finita é a forma bilinear definida por $\text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y))$, e atua como um instrumento que nos permite investigar, através dos critérios de Cartan, a semisimplicidade e a solubilidade de álgebras de Lie.

Antes de mostrarmos os critérios de Cartan iremos mostrar alguns resultados sobre derivações de uma álgebra de Lie. Alguns desses resultados serão utilizados na demonstração dos critérios de Cartan.

Proposição A.53 *Seja $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ uma derivação da álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. Tome a decomposição primária*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_m}$$

onde

$$\mathfrak{g}_{\lambda_i} = \{X \in \mathfrak{g} : (D - \lambda_i)^n X = 0 \text{ para algum } n \geq 1\}$$

é o auto-espaço generalizado associado ao autovalor λ_i . Então,

$$[\mathfrak{g}_{\lambda_i}, \mathfrak{g}_{\lambda_j}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j}.$$

($\mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j} = 0$ se $\lambda_i + \lambda_j$ não é autovalor de D).

Demonstração: Pela definição de \mathfrak{g}_{λ_i} temos que $(D - \lambda_i)$ é nilpotente com índice de nilpotência n . Assim cada \mathfrak{g}_{λ_i} se decompõe em componentes de Jordam. Logo existem conjuntos linearmente independentes $\{X_1, \dots, X_r\}$ tais que

$$DX_j = \lambda_i X_j + X_{j-1} \quad j = 1, \dots, r \quad (X_{-1} = 0),$$

e existe uma base de \mathfrak{g}_{λ_i} formada por esses conjuntos $\{X_1, \dots, X_r\}$.

Sejam

$$\{X_1, \dots, X_r\} \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i} \quad \text{e} \quad \{Y_1, \dots, Y_s\} \subset \mathfrak{g}_{\lambda_j}$$

conjuntos linearmente independentes, como acima. Basta mostrar então que

$$[X_k, Y_l] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j} \quad k = 1, \dots, r; \quad l = 1, \dots, s.$$

Mostraremos por indução dupla sobre k e l . Primeiramente tem-se que

$$\begin{aligned} D[X_k, Y_l] &= [DX_k, Y_l] + [X_k, DY_l] \\ &= [\lambda_i X_k + X_{k-1}, Y_l] + [X_k, \lambda_j Y_l + Y_{l-1}] \\ &= (\lambda_i + \lambda_j)[X_k, Y_l] + [X_{k-1}, Y_l] + [X_k, Y_{l-1}] \end{aligned}$$

de onde se tira que

$$(D - (\lambda_i + \lambda_j))[X_k, Y_l] = [X_{k-1}, Y_l] + [X_k, Y_{l-1}]. \quad (\text{A.6})$$

Faremos a indução da seguinte maneira: Suponha que $k = l = 1$. Logo o segundo membro de (A.6) se anula e $[X_1, Y_1] \in \ker(D - (\lambda_i + \lambda_j))$ e daí que $[X_1, Y_1] \in \mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j}$. Suponha que o resultado é válido para $k' < k$ com l arbitrário e válido para $l' < l$ com k arbitrário. Note que o segundo membro de (A.6) está no núcleo de $(D - (\lambda_i + \lambda_j))^n$, para algum n , pois

$$\begin{aligned} (D - (\lambda_i + \lambda_j))^n([X_{k-1}, Y_l] + [X_k, Y_{l-1}]) &= (D - (\lambda_i + \lambda_j))^n([X_{k-1}, Y_l]) \\ &\quad + (D - (\lambda_i + \lambda_j))^n([X_k, Y_{l-1}]) \end{aligned}$$

e pela hipótese de indução

$$(D - (\lambda_i + \lambda_j))^n([X_{k-1}, Y_l]) = 0 \quad e \quad (D - (\lambda_i + \lambda_j))^n([X_k, Y_{l-1}]) = 0$$

logo

$$(D - (\lambda_i + \lambda_j))^n([X_{k-1}, Y_l] + [X_k, Y_{l-1}]) = 0 \quad (\text{A.7})$$

e assim $([X_{k-1}, Y_l] + [X_k, Y_{l-1}]) \in \ker(D - (\lambda_i + \lambda_j))^n$. Logo

$$\begin{aligned} (D - (\lambda_i + \lambda_j))^{n+1}[X_k, Y_l] &= (D - (\lambda_i + \lambda_j))^n((D - (\lambda_i + \lambda_j))[X_k, Y_l]) \\ &= (D - (\lambda_i + \lambda_j))^n([X_{k-1}, Y_l] + [X_k, Y_{l-1}]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

para algum n . E portanto $[X_k, Y_l] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j}$. \square

Antes do próximo resultado, introduziremos o conceito de elemento semisimples da álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V)$.

Definição A.54 *Um elemento $X \in \mathfrak{gl}(V)$ (V de dimensão finita) é dito **semisimples** se as raízes de seu polinômio minimal forem todas distintas. Equivalentemente, X é semisimples se, e só se, X é diagonal.*

Em espaço vetoriais sobre corpos gerais, a decomposição de Jordan-Chevalley, garante que uma transformação linear T se decompõe, de maneira única, como

$$T = S + N$$

onde N é nilpotente e S semisimples, com S e N comutando entre si e também com T .

A partir do resultado anterior pode-se provar que as componentes semisimples e nilpotentes de uma derivação também são derivações.

Teorema A.55 *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de dimensão finita e D uma derivação de \mathfrak{g} . Escreva $D = S + N$, de maneira única, com S semisimples, N nilpotente e suponha que*

$$[D, S] = [D, N] = [S, N] = 0.$$

Então, S e N também são derivações.

Demonstração: Suponhamos sem perda de generalidade que o corpo de escalares é algebricamente fechado. Primeiramente mostraremos que S é uma derivação, ou seja, $S[X, Y] = [SX, Y] + [X, SY]$ para X, Y elementos de uma base de \mathfrak{g} . Mas para isso é suficiente mostrar essa propriedade de derivação para $X \in \mathfrak{g}_{\lambda_i}$ e $Y \in \mathfrak{g}_{\lambda_j}$ com λ_i, λ_j autovalores, pois \mathfrak{g} se decompõe nos auto-espços generalizados de D . Temos pela proposição anterior que $[\mathfrak{g}_{\lambda_i}, \mathfrak{g}_{\lambda_j}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j}$, logo

$$[X, Y] \in \mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j}.$$

Como os auto-espços generalizados de D são auto espços de S temos que

$$S[X, Y] = (\lambda_i + \lambda_j)[X, Y]$$

onde $[X, Y] = 0$ se $\lambda_i + \lambda_j$ não for autovalor. Temos também que

$$[SX, Y] + [X, SY] = [\lambda_i X, Y] + [X, \lambda_j Y] = (\lambda_i + \lambda_j)[X, Y].$$

Logo $S[X, Y] = [SX, Y] + [X, SY]$ e portanto S é derivação. Como $N = D - S$ e D é derivação, temos que N é derivação. \square

O próximo resultado será na mesma direção do resultado anterior, mas antes é necessário introduzir a seguinte terminologia.

Definição A.56 *Seja $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ uma seqüência finita de elementos de um corpo. Uma terna ordenada (i_1, i_2, i_3) de elementos de $\{1, \dots, k\}$ é dita λ -**fechada** (ou simplesmente fechada) se $\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} = \lambda_{i_3}$.*

Exemplo A.26 *Para a seqüência $(1, 1, 2)$ as ternas fechadas são $(1, 2, 3)$ e $(2, 1, 3)$.*

Definição A.57 *Diz-se que uma seqüência $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ **imita** λ se as ternas fechadas para λ são também μ -fechadas, isto é, $\mu_{i_1} + \mu_{i_2} = \mu_{i_3}$ se $\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} = \lambda_{i_3}$.*

Exemplo A.27 *A seqüência $\mu = (3, 0, 3)$ imita a seqüência $\lambda = (1, 2, 3)$ pois as ternas fechadas de λ são $(1, 2, 3)$ e $(2, 1, 3)$ que também são μ -fechadas.*

As seqüências que imitam os autovalores de uma derivação diagonalizável permitem construir novas derivações, como veremos no próximo resultado.

Proposição A.58 *Seja S uma derivação de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} de dimensão finita. Suponha que S seja diagonalizável, isto é, $SX_i = \lambda_i X_i$, $i = 1, \dots, k$, para $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ os autovalores e $\{X_1, \dots, X_k\}$ uma base de autovetores de \mathfrak{g} .*

Seja $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ uma sequência que imita λ e defina a transformação linear $T_\mu : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, por $T_\mu X_i = \mu_i X_i$, $i = 1, \dots, k$.

Então, T_μ também é derivação.

Demonstração: Para mostrar que T_μ é derivação devemos mostrar que

$$T_\mu[X_i, X_j] = [T_\mu X_i, X_j] + [X_i, T_\mu X_j] \quad (\text{A.8})$$

para $i, j = 1, \dots, k$. Primeiramente, se $\lambda_i + \lambda_j$ não é autovalor de S , temos $[X_i, X_j] = 0$.

Logo

$$T_\mu[X_i, X_j] = 0.$$

Mas

$$[T_\mu X_i, X_j] + [X_i, T_\mu X_j] = (\mu_i + \mu_j)[X_i, X_j] = 0.$$

Portanto a equação A.8 é satisfeita se $\lambda_i + \lambda_j$ não é autovalor. Agora, se $\lambda_i + \lambda_j$ é autovalor então $\lambda_i + \lambda_j = \lambda_l$ para algum l e a terna (i, j, l) é λ -fechada. Por hipótese μ imita λ . Logo $\mu_i + \mu_j = \mu_l$ e assim

$$[T_\mu X_i, X_j] + [X_i, T_\mu X_j] = \mu_l[X_i, X_j].$$

Por outro lado pela Proposição A.53, tem-se que $S[X_i, X_j] = \lambda_l[X_i, X_j]$. Como os autovetores de S associados a λ_l são autovetores de T_μ associados a μ_l temos que

$$T_\mu[X_i, X_j] = \mu_l[X_i, X_j].$$

Logo

$$T_\mu[X_i, X_j] = \mu_l[X_i, X_j] = [T_\mu X_i, X_j] + [X_i, T_\mu X_j].$$

Assim, a equação A.8 também é satisfeita no caso em que $\lambda_i + \lambda_j$ é autovalor. Portanto T_μ é uma derivação. \square

Agora podemos mostrar o seguinte teorema, que será utilizado na demonstração dos critérios de Cartan.

Teorema A.59 *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de dimensão finita e D uma derivação de \mathfrak{g} . Suponha que para toda derivação M de \mathfrak{g} se tenha*

$$\operatorname{tr}(DM) = 0.$$

Então D é nilpotente.

Demonstração: Sem perda de generalidade, vamos supor, que o corpo de escalares seja algebricamente fechado. Tome $D = S + N$ a decomposição de D , onde S é semisimples e N é nilpotente e comutam entre si. Para mostrar que D é nilpotente, vamos mostrar que $S = 0$. Pelo Teorema A.55 S é uma derivação. Como o corpo de escalares é algebricamente fechado, $S = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ em alguma base de \mathfrak{g} . Para mostrar que $S = 0$ vamos mostrar que $\lambda_i = 0$ para $i = 1, \dots, k$.

Sendo \mathbb{K} o corpo de escalares de característica zero, temos que \mathbb{K} contém os racionais \mathbb{Q} e é um espaço vetorial sobre \mathbb{Q} . Denote por $V \subset \mathbb{K}$ o subespaço vetorial, de dimensão finita, sobre \mathbb{Q} gerado pelos autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Tome agora o funcional linear em V

$$\begin{aligned} \psi : V &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ \lambda_i &\longmapsto \psi(\lambda_i) = \mu_i \end{aligned}$$

A sequência $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ imita λ . De fato, se $\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} = \lambda_{i_3}$ temos

$$\mu_{i_1} + \mu_{i_2} = \psi(\lambda_{i_1}) + \psi(\lambda_{i_2}) = \psi(\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2}) = \psi(\lambda_{i_3}) = \mu_{i_3}.$$

Para essa sequência μ tome T_μ como na proposição anterior. Logo T_μ é derivação. Assim, pela hipótese, temos

$$0 = \operatorname{tr}(DT_\mu) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \psi(\lambda_i).$$

A expressão $\sum_{i=1}^k \lambda_i \psi(\lambda_i)$ é uma combinação linear sobre \mathbb{Q} de $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Aplicando ψ a esta combinação temos

$$0 = \psi\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \psi(\lambda_i)\right) = \sum_{i=1}^k \psi(\lambda_i) \psi(\lambda_i) = \sum_{i=1}^k \psi(\lambda_i)^2.$$

Como $\sum_{i=1}^k \psi(\lambda_i)^2$ é uma soma de racionais positivos, temos que $\psi(\lambda_i) = 0$ para todo i . Como escolhemos ψ um funcional linear arbitrário e V tem dimensão finita tem-se que $\lambda_i = 0$ para todo i , como queríamos mostrar. \square

Definição A.60 Seja ρ uma representação de dimensão finita de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} . A **forma traço** β_ρ , que é uma forma bilinear simétrica, é definida por

$$\beta_\rho(X, Y) = \text{tr}(\rho(X)\rho(Y)).$$

Para o caso em que ρ é a representação adjunta, a forma traço será denominada **forma de Cartan-Killing** da álgebra e será denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ou $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ quando se quiser ressaltar a álgebra \mathfrak{g} .

Exemplo A.28 Vamos calcular a forma de Cartan-Killing para $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ usando a base canônica $\{X, H, Y\}$, onde as relações dos colchetes entre esses elementos são

$$[H, X] = 2X, \quad [X, Y] = H, \quad [H, Y] = -2Y.$$

Ainda na mesma base, estas relações nos permitem ver claramente que as matrizes das representações adjuntas de X, H, Y são respectivamente

$$\text{ad}(X) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}(H) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto a matriz de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})}$ é $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, cujo determinante é -128 . A representação do exemplo A.9 é a representação adjunta de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$, ou seja, dado

$$Z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

tem-se que

$$\text{ad}(Z) = \begin{pmatrix} 2a & -2b & 0 \\ -c & 0 & b \\ 0 & 2c & -2a \end{pmatrix},$$

e assim é fácil verificar que a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ é $8(a^2 + bc)$.

Exemplo A.29 Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie solúvel de transformações lineares, e ρ uma representação dessa álgebra. Supondo que o corpo de escalares é algebricamente fechado,

temos pelo teorema de Lie que os elementos dessa álgebra são escritos como matrizes triangulares superiores. Logo os elementos de \mathfrak{g}' são representados por matrizes triangulares superiores com zero na diagonal. Assim se $X \in \mathfrak{g}'$ tem-se que $\rho(X)\rho(Y)$ é nilpotente. Portanto se \mathfrak{g} é solúvel temos $\beta_\rho(X, Y) = 0$ se $X \in \mathfrak{g}'$. Em particular β_ρ é identicamente nula em \mathfrak{g}' .

Veremos mais adiante que a recíproca do exemplo acima é um dos critérios de Cartan, ou seja, \mathfrak{g} é solúvel se $\beta_\rho(X, \cdot) = 0$ para $X \in \mathfrak{g}'$ e ρ a representação adjunta.

Mostraremos agora que as adjuntas dos elementos de uma álgebra de Lie são anti-simétricas em relação à forma traço.

Proposição A.61 1) *As adjuntas dos elementos da álgebra de Lie \mathfrak{g} são anti-simétricas em relação a β_ρ , ou seja,*

$$\beta_\rho([X, Y], Z) + \beta_\rho(Y, [X, Z]) = 0 \text{ para todo } X, Y, Z \in \mathfrak{g} \quad (\text{A.9})$$

Já no caso da forma de Cartan-Killing tem-se:

2) Se ϕ é um automorfismo de \mathfrak{g} , então $\langle \phi X, \phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle$.

3) Se D é uma derivação de \mathfrak{g} , então $\langle DX, Y \rangle + \langle X, DY \rangle = 0$.

Demonstração: 1) A demonstração é imediata pois o traço de um comutador se anula.

2) Seja ϕ um automorfismo de \mathfrak{g} . Então

$$\begin{aligned} \text{ad}(\phi X)(Y) &= [\phi X, Y] = [\phi X, \phi(\phi^{-1}(Y))] \\ &= \phi[X, \phi^{-1}(Y)] \\ &= \phi \text{ad}(X)\phi^{-1}(Y). \end{aligned}$$

Assim $\text{ad}(\phi X) = \phi \text{ad}(X)\phi^{-1}$. Logo

$$\begin{aligned} \langle \phi X, \phi Y \rangle &= \text{tr}(\text{ad}(\phi X)\text{ad}(\phi Y)) \\ &= \text{tr}((\phi \text{ad}(X)\phi^{-1})(\phi \text{ad}(Y)\phi^{-1})) \\ &= \text{tr}(\phi \text{ad}(X)\text{ad}(Y)\phi^{-1}) \\ &= \text{tr}(\phi \phi^{-1} \text{ad}(X)\text{ad}(Y)) \\ &= \text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)) \\ &= \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

3) Como D é uma derivação, dado $Y \in \mathfrak{g}$ temos

$$\begin{aligned} \text{ad}(DX)(Y) &= [DX, Y] = D[X, Y] - [X, DY] \\ &= D \text{ad}(X)(Y) - \text{ad}(X)(DY) \\ &= D \text{ad}(X)(Y) - \text{ad}(X)D(Y) \\ &= [D, \text{ad}(X)](Y). \end{aligned}$$

Logo $\text{ad}(DX) = [D, \text{ad}(X)]$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \langle DX, Y \rangle + \langle X, DY \rangle &= \text{tr}(\text{ad}(DX)\text{ad}(Y)) + \text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(DY)) \\ &= \text{tr}([D, \text{ad}(X)]\text{ad}(Y)) + \text{tr}(\text{ad}(X)[D, \text{ad}(Y)]) \\ &= \text{tr}(D \text{ad}(X)\text{ad}(Y)) - \text{tr}(\text{ad}(X)D \text{ad}(Y)) \\ &\quad + \text{tr}(\text{ad}(X)D \text{ad}(Y)) - \text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)D) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto $\langle DX, Y \rangle + \langle X, DY \rangle = 0$. □

Mostraremos agora que a restrição da forma de Cartan-Killing a um ideal \mathfrak{i} de \mathfrak{g} coincide com a forma de Cartan-Killing de \mathfrak{i} .

Proposição A.62 *A forma de Cartan-Killing a um ideal \mathfrak{i} de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} coincide com a forma de Cartan-Killing de \mathfrak{i} .*

Demonstração: Dados $X \in \mathfrak{i}$ e $Y \in \mathfrak{g}$, temos

$$(\text{ad}(Y)\text{ad}(X))(Z) = \text{ad}(Y)[X, Z] = [Y, [X, Z]] \subset \mathfrak{i} \quad \text{para todo } Z \in \mathfrak{g},$$

ou seja, a imagem da $\text{ad}(Y)\text{ad}(X)$ está contida em \mathfrak{i} . Tome uma base para \mathfrak{i} e a complete a uma base de \mathfrak{g} . Daí, os elementos que estão fora de \mathfrak{i} não interferem em $\text{tr}(\text{ad}(Y)\text{ad}(X))$ e portanto $\langle Y, X \rangle$ coincide com $\text{tr}(\text{ad}(Y)\text{ad}(X) |_{\mathfrak{i}})$ que é a forma de Cartan-Killing de \mathfrak{i} quando $Y \in \mathfrak{i}$. □

Para mostrar o critério de Cartan para álgebras solúveis, precisaremos do seguinte lema.

Lema A.63 *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de dimensão finita. Se a forma de Cartan-Killing de \mathfrak{g} é identicamente nula, então \mathfrak{g} é solúvel.*

Demonstração: Para mostrar que \mathfrak{g} é solúvel, basta mostrarmos que \mathfrak{g}' é nilpotente. De fato, seja \mathfrak{g}' nilpotente, em particular ela também é solúvel. Como $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ é sempre abeliana e, portanto solúvel, então pela Proposição A.34 c), \mathfrak{g} é solúvel.

Mostraremos então que \mathfrak{g}' é nilpotente. Seja $X \in \mathfrak{g}'$, então X se escreve como

$$X = \sum_i [Y_i, Z_i] \quad \text{com } Y_i, Z_i \in \mathfrak{g}$$

Tomando D uma derivação qualquer, temos que $\text{tr}(\text{ad}(X)D) = 0$, pois

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{ad}(X)D) &= \text{tr}(\text{ad}(\sum_i [Y_i, Z_i])D) \\ &= \sum_i \text{tr}([\text{ad}(Y_i), \text{ad}(Z_i)]D) \\ &= \sum_i \text{tr}((\text{ad}(Y_i)\text{ad}(Z_i)D) - (\text{ad}(Z_i)\text{ad}(Y_i)D)) \\ &= \sum_i \text{tr}(\text{ad}(Y_i)\text{ad}(Z_i)D) - \sum_i \text{tr}(\text{ad}(Z_i)\text{ad}(Y_i)D) \\ &= \sum_i \text{tr}(\text{ad}(Z_i)D \text{ad}(Y_i) - \text{ad}(Z_i)\text{ad}(Y_i)D) \\ &= \sum_i \text{tr}(\text{ad}(Z_i)[D, \text{ad}(Y_i)]) \\ &= \sum_i \text{tr}(\text{ad}(Z_i)\text{ad}(DY_i)) \\ &= \sum_i \langle Z_i, DY_i \rangle. \end{aligned}$$

Mas por hipótese a forma de Cartan-Killing é identicamente nula, logo

$$\text{tr}(\text{ad}(X)D) = \sum_i \langle Z_i, DY_i \rangle = 0.$$

Como D é uma derivação qualquer e $\text{ad}(X)$ também é uma derivação, pelo Teorema A.59 segue que $\text{ad}(X)$ é nilpotente, ou seja, a representação adjunta de \mathfrak{g}' é nilpotente. Logo pelo teorema de Engel, segue que \mathfrak{g}' é nilpotente. \square

Mostraremos agora o primeiro critério de Cartan.

Teorema A.64 Denotando por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a forma de Cartan-Killing de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , tem-se que \mathfrak{g} é solúvel se, e somente se, para todo $X \in \mathfrak{g}'$ e todo $Y \in \mathfrak{g}$

$$\langle X, Y \rangle = 0 \quad .$$

Demonstração: Suponha inicialmente que \mathfrak{g} é solúvel. Segue do Exemplo A.29 que $\langle X, Y \rangle = 0$ para $X \in \mathfrak{g}'$.

Para mostrar a recíproca, note que por hipótese, a forma de Cartan-Killing em \mathfrak{g}' é identicamente nula em \mathfrak{g}' . Logo, como \mathfrak{g}' é um ideal, temos pela Proposição A.62 que a forma

de Cartan-Killing de \mathfrak{g}' é identicamente nula. Logo, pelo lema anterior, segue que \mathfrak{g}' é solúvel e portanto \mathfrak{g} é solúvel. \square

A partir deste critério para as álgebras solúveis, mostraremos o segundo critério de Cartan. Mas antes é necessário introduzir o conceito de forma bilinear não-degenerada.

Definição A.65 *Uma forma bilinear β num espaço vetorial V de dimensão finita, diz-se **não-degenerada** se o único elemento $v \in V$ que satisfaz $\beta(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ é $v = 0$.*

Teorema A.66 *A forma de Cartan-Killing de \mathfrak{g} é não-degenerada se, e somente se, \mathfrak{g} é semisimples.*

Demonstração: Suponhamos que \mathfrak{g} não seja semisimples. Logo $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \neq 0$. Como $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ é solúvel, $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})^k$ é um ideal abeliano não trivial para algum k . Seja $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})^k = \mathfrak{i}$. Tome $X \in \mathfrak{i}$, então para todo $Y \in \mathfrak{g}$ tem-se que a imagem de $\text{ad}(X)\text{ad}(Y)$ está contida em \mathfrak{i} . Portanto $\text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y))$ coincide com $\text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y) |_{\mathfrak{i}})$. Como $\text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y) |_{\mathfrak{i}}) = 0$, pois \mathfrak{i} é um ideal abeliano, segue que para todo $X \in \mathfrak{i}$ e todo $Y \in \mathfrak{g}$ tem-se $\langle Y, X \rangle = 0$, mas isso contraria o fato de \mathfrak{g} ser não degenerada. Portanto se a forma de Cartan-Killing de \mathfrak{g} é não degenerada tem-se que \mathfrak{g} é semisimples.

Reciprocamente, suponhamos que \mathfrak{g} é semisimples. Seja \mathfrak{g}^\perp o subespaço de \mathfrak{g} definido por

$$\mathfrak{g}^\perp = \{X \in \mathfrak{g}; \langle X, Y \rangle = 0 \quad \text{para todo } Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Temos pelo item 1) da Proposição A.61 que

$$\langle [Z, X], Y \rangle = -\langle X, [Z, Y] \rangle = 0$$

se $X \in \mathfrak{g}^\perp$ e Y, Z são arbitrários, o que implica $[Z, X] \in \mathfrak{g}^\perp$. Logo \mathfrak{g}^\perp é ideal de \mathfrak{g} . Mas a restrição de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a \mathfrak{g}^\perp é identicamente nula e \mathfrak{g}^\perp é ideal de \mathfrak{g} . Logo a forma de Cartan-Killing de \mathfrak{g}^\perp é identicamente nula. Consequentemente, pelo lema anterior, segue que \mathfrak{g}^\perp é solúvel, e já que \mathfrak{g} é semisimples, temos $\mathfrak{g}^\perp = 0$. Portanto a forma de Cartan-Killing de \mathfrak{g} é não-degenerada. \square

O critério de Cartan para as álgebras semisimples, permite provar alguns resultados que mostraremos a seguir. O primeiro deles é que todo ideal de uma álgebra semisimples é semisimples.

Proposição A.67 *Todo ideal \mathfrak{i} de uma álgebra semisimples \mathfrak{g} é semisimples.*

Demonstração: Primeiramente vamos provar que \mathfrak{i}^\perp , o ortogonal de \mathfrak{i} em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, é um ideal complementar a \mathfrak{i} . De fato, é claro que \mathfrak{i}^\perp é um ideal de \mathfrak{g} , pois se $X \in \mathfrak{i}^\perp$ e $Y \in \mathfrak{g}$ temos para todo $Z \in \mathfrak{i}$ que

$$\langle [Y, X], Z \rangle = -\langle X, [Y, Z] \rangle = 0,$$

o que implica $[Y, X] \in \mathfrak{i}^\perp$. Note que $\mathfrak{j} = \mathfrak{i}^\perp \cap \mathfrak{i}$ é um ideal de \mathfrak{g} . Assim, temos que para todo $X \in \mathfrak{j}$ e para todo $Y \in \mathfrak{j}'$ temos que $\langle X, Y \rangle = 0$. Logo pelo primeiro critério de Cartan segue que \mathfrak{j} é solúvel. Mas \mathfrak{g} é semisimples, assim $\mathfrak{j} = 0$. Logo $\mathfrak{i}^\perp \cap \mathfrak{i} = 0$ e portanto \mathfrak{i}^\perp é complementar a \mathfrak{i} .

Mas isso implica que a restrição a \mathfrak{i} da forma de Cartan-Killing é não degenerada, o que garante pelo segundo critério de Cartan que \mathfrak{i} é semisimples. \square

O fato de que \mathfrak{i}^\perp é complementar de \mathfrak{i} , implica que a representação adjunta de \mathfrak{g} é completamente redutível. Portanto se decompõe como soma direta de subespaços invariantes irredutíveis. Como todo subespaço invariante irredutível pela adjunta é um ideal simples, pois todo subespaço invariante pela adjunta é um ideal e sendo este ideal irredutível, segue que ele também é simples.

Vejamos agora um resultado sobre a caracterização de uma álgebra semisimples e seus ideais.

Teorema A.68 *Seja \mathfrak{g} uma álgebra semisimples, então \mathfrak{g} se decompõe como*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s \tag{A.10}$$

com \mathfrak{g}_i , $i = 1, \dots, s$ ideais simples. Nessa decomposição $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$ se $i \neq j$. Além disso

- 1) O ortogonal \mathfrak{g}_i^\perp de uma componente simples em relação a forma de Cartan-Killing é a soma das demais componentes;
- 2) Os ideais de \mathfrak{g} são somas de algumas dessas componentes e
- 3) A decomposição é única.

Demonstração: Pelo resultado anterior e o comentário acima segue a decomposição de \mathfrak{g} em componentes simples, ou seja,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s.$$

Como $\mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_j = 0$ e $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_j$ temos que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$ se $i \neq j$. Para mostrar os outros itens suponha que \mathfrak{g} se decomponha como soma direta de dois ideais, ou seja, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$. Então, o complementar ortogonal de um dos ideais é o outro. De fato, \mathfrak{h}_1^\perp complementa \mathfrak{h}_1 e portanto tem a mesma dimensão que \mathfrak{h}_2 . Se $X \in \mathfrak{h}_1$ e $Y \in \mathfrak{h}_2$ então $\text{ad}(X)\text{ad}(Y)$ se anula em \mathfrak{h}_1 ou \mathfrak{h}_2 , ou seja, esses ideais são ortogonais. Tomando então uma base de \mathfrak{g} cujos elementos estão contidos ou em \mathfrak{h}_1 ou em \mathfrak{h}_2 tem-se que $\langle X, Y \rangle = 0$, logo $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{h}_1^\perp$ e portanto $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_1^\perp$ pois as dimensões coincidem. Seja agora \mathfrak{g}_i uma componente simples e denote por \mathfrak{c}_i a soma das demais componentes simples. Note que \mathfrak{c}_i é um ideal pois o colchete entre componentes simples distintas se anula. Logo $\mathfrak{c}_i = \mathfrak{g}_i^\perp$ o que mostra 1).

Para mostrar 2) seja \mathfrak{h} um ideal de \mathfrak{g} . Tem-se que $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{g}_i$ ou $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i = 0$. Se $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_i$, não há o que fazer, caso contrário, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{c}_i$ é um ideal, que se for não nulo, por indução mostramos que ele é soma de componentes simples e o mesmo acontece com \mathfrak{h} . Já se $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i = 0$, então $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{c}_i$, pois se $X \in \mathfrak{g}_i$, e $Y \in \mathfrak{h}$ então $\text{ad}(X)$ se anula em \mathfrak{c}_i e $\text{ad}(Y)$ se anula em \mathfrak{g}_i , o que garante que

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)) = 0,$$

mostrando que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_i^\perp = \mathfrak{c}_i$. Usando novamente a indução conclui-se que \mathfrak{h} é soma de componentes simples da decomposição (A.10).

Por fim, o item 3) decorre diretamente do fato de \mathfrak{g}_i , $i = 1, \dots, n$ serem os únicos ideais simples de \mathfrak{g} . □

Esse teorema tem as seguintes consequências:

Corolário A.69 *Se \mathfrak{g} é semisimples, então $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$.*

Demonstração: Como \mathfrak{g}' é ideal de \mathfrak{g} , existe um ideal \mathfrak{i} que o complementa. Dados $X, Y \in \mathfrak{i}$ tem-se que $[X, Y] \in \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{i}$, ou seja, \mathfrak{i} é um ideal abeliano e portanto solúvel. Como \mathfrak{g} é semisimples segue que $\mathfrak{i} = 0$ e portanto $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$. □

Corolário A.70 *Se \mathfrak{g} é semisimples e \mathfrak{h} é uma álgebra abeliana, então a aplicação identicamente nula é o único homomorfismo de \mathfrak{g} em \mathfrak{h} . Em particular, a única representação unidimensional de \mathfrak{g} é a representação nula e para uma representação ρ qualquer de \mathfrak{g} tem-se que $\text{tr}(\rho(X)) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração: Se $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um homomorfismo e \mathfrak{h} é abeliana, então $\varphi[X, Y] = [\varphi X, \varphi Y] = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, ou seja, φ é identicamente nula em \mathfrak{g}' . Como, pelo corolário anterior, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$, temos que φ é identicamente nula em \mathfrak{g} .

Se $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ tem dimensão um, então $\mathfrak{gl}(V)$ também tem dimensão um. Logo $\mathfrak{gl}(V)$ é abeliana e portanto ρ é a representação nula. Agora, como $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$, tome $X = [Y, Z] \in \mathfrak{g}'$. Temos portanto que

$$\mathrm{tr} \rho(X) = \mathrm{tr} \rho([Y, Z]) = \mathrm{tr}([\rho(Y), \rho(Z)]) = \mathrm{tr}(\rho(Y)\rho(Z)) - \mathrm{tr}(\rho(Z)\rho(Y)) = 0.$$

□

Corolário A.71 *Se \mathfrak{g} é uma álgebra semisimples e \mathfrak{i} é um ideal próprio de \mathfrak{g} , então $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ é semisimples.*

Demonstração: Seja \mathfrak{i} um ideal próprio de \mathfrak{g} , sabemos que existe um ideal \mathfrak{j} tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{j}$. Então $(\mathfrak{g}/\mathfrak{i}) \approx \mathfrak{j}$. Como \mathfrak{j} é semisimples, pois todos os ideais de \mathfrak{g} são semisimples, temos que $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ é semisimples. □

Quanto às derivações das álgebras semisimples, tem-se:

Proposição A.72 *Se \mathfrak{g} é uma álgebra semisimples, então toda derivação de \mathfrak{g} é uma derivação interna.*

Demonstração: Seja D uma derivação e definimos um funcional linear em \mathfrak{g} por $X \mapsto \mathrm{tr}(D \mathrm{ad}(X))$. Como a forma de Cartan-Killing é não-degenerada, existe $Y_D \in \mathfrak{g}$ tal que

$$\mathrm{tr}(D \mathrm{ad}(X)) = \langle Y_D, X \rangle \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{g}$$

Mostraremos que $D = \mathrm{ad}(Y_D)$. Seja $E = D - \mathrm{ad}(Y_D)$ uma derivação. Temos que

$$\mathrm{tr}(E \mathrm{ad}(X)) = 0 \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{g}$$

Então, tomando X e Y arbitrários temos

$$\begin{aligned} \langle EX, Y \rangle &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(EX)\mathrm{ad}(Y)) \\ &= \mathrm{tr}([E, \mathrm{ad}(X)]\mathrm{ad}(Y)) \\ &= \mathrm{tr}(E \mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y) - \mathrm{ad}(X)E \mathrm{ad}(Y)) \\ &= \mathrm{tr}(E \mathrm{ad}([X, Y])) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como a forma de Cartan-Killing é não degenerada, $EX = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, ou seja, $E = 0$. Portanto $D = \text{ad}(Y_D)$. \square

A partir desta proposição e do Teorema A.55 obtemos uma decomposição dos elementos de uma álgebra de Lie semisimples, que é dada pelo corolário a seguir.

Corolário A.73 *Suponha que \mathfrak{g} é semisimples e seja $X \in \mathfrak{g}$. Então X se decompõe de maneira única como*

$$X = X_S + X_N$$

onde $X_S, X_N \in \mathfrak{g}$ são tais que $\text{ad}(X_S)$ é semisimples, $\text{ad}(X_N)$ é nilpotente e

$$[X_S, X_N] = [X, X_S] = [X, X_N] = 0.$$

Demonstração: Tome a decomposição de Jordan

$$\text{ad}(X) = S + N$$

onde S e N são derivações que comutam entre si e com $\text{ad}(X)$. Como numa álgebra semisimples toda derivação é interna, segue que $S = \text{ad}(X_S)$ e $N = \text{ad}(X_N)$ e temos

$$\text{ad}(X - X_S - X_N) = 0. \quad (\text{A.11})$$

Suponha que $X \in \ker(\text{ad})$. Logo $\langle X, Y \rangle = \text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)) = 0$. Como \mathfrak{g} é uma álgebra semisimples, a forma de Cartan-Killing de \mathfrak{g} é não degenerada e portanto $X = 0$. Logo $\ker(\text{ad}) = 0$. Assim de (A.11) segue que $X = X_S + X_N$. Isso prova a existência. Para provar a unicidade suponha que X não se decomponha de maneira única, ou seja

$$X = X_S + X_N = Y_S + Y_N.$$

Isso implica que $X_S - Y_S = Y_N - X_N$, onde $X_S - Y_S$ é um elemento semisimples e $Y_N - X_N$ é um elemento nilpotente. Como o único elemento semisimples e nilpotente é o zero, tem-se que $X_S = Y_S$ e $Y_N = X_N$. Verificaremos a comutatividade em \mathfrak{g} . É claro que

$$[X, X_N] = [X_S + X_N, X_N] = [X_S, X_N] \quad \text{e}$$

$$[X_S, X] = [X_S, X_S + X_N] = [X_S, X_N]$$

Como $\text{ad}(X_S)(X) = \text{ad}(X_S)(X_N)$, a injetividade da adjunta implica que $X = X_N$. Portanto $[X, X_N] = 0$ e segue o desejado. \square

A.5 Subálgebras de Cartan

Nesta seção enunciaremos um conceito muito importante no estudo das álgebras semisimples, que é a subálgebra de Cartan. Denotaremos o auto-espaço generalizado associado ao autovalor nulo de $\text{ad}(X)$ por $\mathfrak{g}_0(X)$.

Antes de definir subálgebras de Cartan definiremos o normalizador de uma subálgebra de uma álgebra de Lie.

Definição A.74 O *normalizador* de uma subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é definido por

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} : \text{ad}(X)\mathfrak{h} = [X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$$

Definição A.75 Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Uma *subálgebra de Cartan* de \mathfrak{g} é uma subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ que satisfaz

1. \mathfrak{h} é nilpotente e
2. O normalizador de \mathfrak{h} em \mathfrak{g} coincide com \mathfrak{h} . Esta condição é equivalente a dizer que se $[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ então $X \in \mathfrak{h}$.

Ilustraremos este conceito com um exemplo.

Exemplo A.30 Para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$, a subálgebra

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \right\}$$

é uma subálgebra de Cartan. De fato, \mathfrak{h} é claramente abeliana, logo é nilpotente. seja

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

base de \mathfrak{g} . Então

$$[H, aX + bH + cY] = 2aX - 2cY$$

e este colchete está em \mathfrak{h} se, e só se, $a = c = 0$, ou seja se $W \in \mathfrak{g}$ então $[H, W] \subset \mathfrak{h}$ implica $W \in \mathfrak{h}$.

Será importante o estudo da representação adjunta de uma subálgebra de Cartan na álgebra de Lie. Os pesos, definido na seção 1.2, não nulos dessa representação serão denominados **raízes** de \mathfrak{h} .

Antes de proseguirmos, precisamos introduzir a definição de elementos regulares de \mathfrak{g} . Para isso, seja $X \in \mathfrak{g}$. O polinômio característico de $\text{ad}(X)$ denotado por p_X é da forma

$$p_X(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}(X)\lambda^{n-1} + \cdots + p_1(X)\lambda + p_0(X)$$

onde $n = \dim \mathfrak{g}$ e cada p_i é um polinômio de grau $n - i$ em X .

Definição A.76 O **posto** de uma álgebra de Lie de dimensão finita é o menor índice i em que p_i não é identicamente nulo, onde p_i denota, como acima, os coeficientes dos polinômios característicos de cada $\text{ad}(X)$.

Definição A.77 Seja i o posto de \mathfrak{g} . Um elemento $X \in \mathfrak{g}$ é dito **regular** se $p_i(X) \neq 0$.

Exemplo A.31 Considere $\mathfrak{sl}(2)$ com a base canônica $\{X, H, Y\}$. Tome $Z = aX + bH + cY$. Logo a matriz de sua adjunta nessa base é

$$\text{ad}(Z) = \begin{pmatrix} 2b & -2a & 0 \\ -c & 0 & a \\ 0 & 2c & -2b \end{pmatrix}.$$

Calculando o polinômio característico temos

$$p_Z(\lambda) = \det(\lambda I - \text{ad}(Z)) = \lambda^3 - 4(b^2 + ac)\lambda.$$

Então, o posto de $\mathfrak{sl}(2)$ é 1 e ainda Z é regular se $b^2 + ac \neq 0$. Em particular, H é regular e X e Y não são regulares.

Exemplo A.32 A representação adjunta de uma álgebra nilpotente é nilpotente. Logo o seu posto coincide com a dimensão da álgebra. Portanto todos os elementos são regulares.

O objetivo do resto desta seção é mostrar que $\mathfrak{g}_0(X)$ é uma subálgebra de Cartan no caso em que X é um elemento regular, e reciprocamente, toda subálgebra de Cartan é dada dessa maneira. O próximo resultado mostra que $\mathfrak{g}_0(X)$ é uma subálgebra de Cartan se X for regular.

Teorema A.78 *Seja $X \in \mathfrak{g}$ e denote por $\mathfrak{g}_0(X)$ o auto-espaço generalizado associado ao autovalor nulo da decomposição primária*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0(X) + \mathfrak{g}_{\lambda_1} + \cdots + \mathfrak{g}_{\lambda_k}$$

de $\text{ad}(X)$ com $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalores não nulos. Então, $\mathfrak{g}_0(X)$ é subálgebra de Cartan se X for valor regular.

Demonstração: 1) Tem-se que $\mathfrak{g}_0(X)$ é subálgebra, pois $[\mathfrak{g}_0(X), \mathfrak{g}_0(X)] \subset \mathfrak{g}_{0+0} = \mathfrak{g}_0(X)$.

2) O normalizador de $\mathfrak{g}_0(X)$ é o próprio $\mathfrak{g}_0(X)$. Para mostrar isso, tome $Y \notin \mathfrak{g}_0(X)$ e vamos mostrar que Y não normaliza $\mathfrak{g}_0(X)$, ou seja, $[Y, \mathfrak{g}_0(X)] \not\subset \mathfrak{g}_0(X)$. Escreva $Y = Y_0 + Y_1 + \dots + Y_k$ com $Y_0 \in \mathfrak{g}_0(X)$ e $Y_i \in \mathfrak{g}_{\lambda_i}$. Como $Y \in \mathfrak{g}_0(X)$, então $Y_i, i = 1, \dots, k$ é não nulo para algum i . Como os subespaços \mathfrak{g}_{λ_i} são invariantes pela $\text{ad}(X)$, temos que a decomposição para $[X, Y]$ é

$$[X, Y] = [X, Y_0] + \cdots + [X, Y_k].$$

Logo $[X, Y] \notin \mathfrak{g}_0(X)$, pois como os autovalores para \mathfrak{g}_{λ_i} são diferentes de zero, a restrição de $\text{ad}(X)$ para cada \mathfrak{g}_{λ_i} é inversível. Portanto, $[X, Y_i] \neq 0$ para algum i e como $X \in \mathfrak{g}_0(X)$, temos que Y não normaliza $\mathfrak{g}_0(X)$. Portanto essa álgebra coincide com seu normalizador.

3) Para mostrar que $\mathfrak{g}_0(X)$ é nilpotente, vamos usar o fato que X é regular. Para isso, devemos mostrar que para $Y \in \mathfrak{g}_0(X)$, $\text{ad}(Y)|_{\mathfrak{g}_0(X)}$ é nilpotente e aplicar o teorema de Engel. Isso por sua vez, se garante mostrando que o polinômio característico de $\text{ad}(Y)|_{\mathfrak{g}_0(X)}$ é λ^r onde $\dim(\mathfrak{g}_0(X)) = r$. Observe que $\text{ad}(Y)|_{\mathfrak{g}_0(X)}$ é nilpotente, já que este é um auto-espaço generalizado associado ao autovalor nulo. Sendo assim, denote por π_0 o polinômio característico de $\text{ad}(Y)|_{\mathfrak{g}_0(X)}$ e suponha, por absurdo, que π_0 não é da forma λ^r . Então

$$\pi_0(\lambda) = \lambda^r + \cdots + q_{r-i}(Y)\lambda^{r-i}$$

com $i > 0$ e $q_{r-i}(Y) \neq 0$, o que garante que $q_{r-i}(Y)$ não é um polinômio identicamente nulo em $\mathfrak{g}_0(X)$. Como $[\mathfrak{g}_0(X), \mathfrak{g}_{\lambda_i}] \subset \mathfrak{g}_{\lambda_i}$, os subespaços \mathfrak{g}_{λ_i} são invariantes por $\text{ad}(Y)$. Assim o polinômio característico da $\text{ad}(Y)$ é dado por

$$p_Y(\lambda) = \pi_0 \pi_1 \dots \pi_k$$

onde π_i é o polinômio característico de $\text{ad}(Y) |_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}}$. O termo constante de π_i é dado por $\det(\text{ad}(Y) |_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}})$. Como $\text{ad}(X) |_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}}$ é inversível, a aplicação $d_i(Z) = \det(\text{ad}(Z) |_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}})$ é um polinômio em $\mathfrak{g}_0(X)$ e não é identicamente nulo. Além do mais, o termo de menor grau de p_Y tem como coeficiente o polinômio

$$q_{r-i}(Y)d_1(Y)\dots d_k(Y)$$

que não é identicamente nulo em Y . Porém, isso contradiz o fato de X ser regular, pois esse termo de menor grau se anula em X . Isso porque q_{r-i} se anula em X , pois $\text{ad}(X)$ restrita a $\mathfrak{g}_0(X)$ é nilpotente. Portanto essa álgebra é nilpotente. \square

É óbvio que sempre existem elementos regulares de uma álgebra de Lie, pois os elementos regulares são aqueles que não anulam um polinômio não nulo. Por isso temos o seguinte resultado:

Corolário A.79 *Existem subálgebras de Cartan em álgebras de Lie de dimensão finita.*

O objetivo agora é mostrar a recíproca do Teorema A.78. Para isso precisaremos dos dois próximos lemas.

Lema A.80 *Seja \mathfrak{h} uma subálgebra de Cartan e ρ a representação de \mathfrak{h} em $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ induzida pela representação adjunta de \mathfrak{h} em \mathfrak{g} . Então, se $X \in \mathfrak{h}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$ se, e só se, $\rho(X)$ é inversível.*

Demonstração: Temos que $\rho(X)$ é inversível se, e somente se, $\ker \rho(X) = 0$. Mas $\ker \rho(X) = 0$ se, e só se, $\mathfrak{g}_0(X) \subset \mathfrak{h}$ pois $\text{ad}(X)$ é nilpotente em $\mathfrak{g}_0(X)$ e $\rho(X)$ é induzida por $\text{ad}(X)$. Temos ainda que para todo $X \in \mathfrak{h}$ tem-se $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0(X)$. Logo $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$ se, e somente se, $\rho(X)$ é inversível. \square

Lema A.81 *Seja \mathfrak{h} uma subálgebra de Cartan. Então, existe $X \in \mathfrak{h}$ tal que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$.*

Demonstração: Sejam o espaço quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ e a representação ρ de \mathfrak{h} em $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ induzida pela representação adjunta de \mathfrak{g} . Tome a extensão da representação ao fecho algébrico do corpo de base. Como \mathfrak{h} é nilpotente, essa extensão se decompõe em subespaços de pesos.

Como \mathfrak{h} é uma subálgebra de Cartan, \mathfrak{h} é o seu próprio normalizador em \mathfrak{g} . Logo nenhum de seus pesos se anulam. De fato, Se algum desses pesos se anulasse, existiria

$v \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ tal que $\rho(X)v = 0$ para todo $X \in \mathfrak{h}$. Isso significa que existe $Y \in \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$ tal que $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ o que contradiz o fato de \mathfrak{h} ser seu próprio normalizador. Portanto nenhum dos pesos se anula.

Logo existe $X \in \mathfrak{h}$ que não anula nenhum dos pesos. Isso significa que $\rho(X)$ é invertível em $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Portanto para esse elemento X temos pelo lema anterior que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$. \square

Como consequência do Teorema A.78 temos que se \mathfrak{h} é uma subálgebra de Cartan e $X \in \mathfrak{h}$ um elemento regular, então $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$. De fato, \mathfrak{h} é nilpotente pois é uma subálgebra de Cartan. Logo, $\text{ad}(X)$ dentro de \mathfrak{h} é nilpotente, e daí que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0(X)$. Como $\mathfrak{g}_0(X)$ é nilpotente temos que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$ pois \mathfrak{h} é seu próprio normalizador. Em outras palavras, se X é um elemento regular, tem-se que $\mathfrak{g}_0(X)$ é a única subálgebra de Cartan que contém X .

Com esses comentários a recíproca do Teorema A.78, isto é, se \mathfrak{h} é uma subálgebra de Cartan, então $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$ para algum elemento regular X , é consequência do seguinte resultado:

Teorema A.82 *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie de dimensão finita e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan. Então existe um elemento regular $X \in \mathfrak{h}$.*

Demonstração: Vamos provar este resultado no caso em que o corpo de base é real.

Tome ϕ um automorfismo de \mathfrak{g} . Para $X \in \mathfrak{g}$, temos que

$$\phi [X, \phi^{-1}Y] = [\phi X, Y] \quad \text{para todo } Y \in \mathfrak{h}$$

isto é

$$\text{ad}(\phi X) = \phi \text{ad}(X) \phi^{-1}.$$

Portanto os polinômios característicos de $\text{ad}(\phi X)$ e $\text{ad}(X)$ coincidem. Logo X é regular se, e somente se, ϕX é regular. Vamos mostrar então que existe um automorfismo ϕ e um elemento $X \in \mathfrak{g}$ tal que ϕX é regular.

Tomemos a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (Y, X) &\longmapsto e^{\text{ad}(Y)}X. \end{aligned}$$

Como $\text{ad}(Y)$ é uma derivação, temos pela Proposição A.26 que $e^{\text{ad}(Y)}$ é um automorfismo de \mathfrak{g} . Como o conjunto dos elementos regulares de \mathfrak{g} , é o conjunto dos pontos onde um

polinômio não se anula, temos que esse conjunto é aberto e denso em \mathfrak{g} . Portanto vamos mostrar que $\text{Im } \varphi$ contém um aberto, pois nesse caso conclui-se que essa imagem intercepta o conjunto dos elementos regulares e daí que algum $X \in \mathfrak{h}$ é conjugado a um elemento regular e, portanto, regular.

Como φ é diferenciável, para mostrar que sua imagem contém um aberto, vamos mostrar pelo teorema da função implícita, que sua diferencial $d\varphi_{(Y,X)}$ tem posto máximo para algum $(Y, X) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$. Para isso, tome $Z \in \mathfrak{g}$, $W \in \mathfrak{h}$ e $Y = 0$. Logo

$$\begin{aligned} d\varphi_{(0,X)}(Z, W) &= \frac{d}{dt}(e^{\text{ad}(tZ)}(X + tW))_{t=0} \\ &= -\text{ad}(X)Z + W. \end{aligned} \tag{A.12}$$

Aplicamos agora, os lemas acima tomando X tal que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$. Pelo Lema A.80 a transformação linear induzida por $\text{ad}(X)$ em $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é inversível, logo temos que a imagem de $\text{ad}(X)$ complementa \mathfrak{h} em \mathfrak{g} . Note que tomamos Z e W arbitrários em A.12. Assim se X é um elemento tal que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(X)$, então a imagem de $d\varphi_{(0,X)}$ é sobrejetora. E assim $d\varphi_{(Y,X)}$ tem posto máximo para $(0, X) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$, como queríamos. \square

A demonstração desse teorema pode ser estendida no caso em que o corpo de escalares é \mathbb{C} . Maiores detalhes sobre essa demonstração pode ser encontrada em [18] Teorema 4.5.

Álgebras semisimples

Primeiramente veremos como se comportam as representações irredutíveis da álgebra $\mathfrak{sl}(2)$. Em seguida mostraremos alguns resultados sobre as subálgebras de Cartan de uma álgebra semisimples, sua representação adjunta e os pesos relacionados a essa representação. Na sequência estudaremos a fórmula de Killing, sistemas simples de raízes e seus diagramas de Dynkin. Como referência para esse estudo indicamos [9], [13], e [18].

B.1 Representações de $\mathfrak{sl}(2)$

Para estudarmos as álgebras semisimples iremos, inicialmente, analisar as representações irredutíveis da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2)$ sobre um corpo \mathbb{K} algebricamente fechado de característica zero. A importância desse estudo deve-se ao fato que à toda raiz da representação de uma subálgebra de Cartan está associada uma subálgebra de dimensão três isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$. Denotaremos $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ apenas por $\mathfrak{sl}(2)$.

Seja $\{X, H, Y\}$ a base de $\mathfrak{sl}(2)$, onde

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essa base satisfaz:

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

Tome $\rho : \mathfrak{sl}(2) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação irredutível de dimensão finita. Suponha que $v \in V$ é uma autovetor de $\rho(H)$ associado ao autovalor λ , ou seja $\rho(H)v = \lambda v$. Então,

$$\begin{aligned} \rho(H)\rho(X)v &= \rho[H, X]v + \rho(X)\rho(H)v \\ &= \rho(2X)v + \rho(X)\lambda v \\ &= 2\rho(X)v + \lambda\rho(X)v \\ &= (2 + \lambda)\rho(X)v. \end{aligned}$$

Logo se $\rho(X)v \neq 0$, então esse vetor é autovetor de $\rho(H)$ associado ao autovalor $\lambda + 2$. Analogamente pode-se mostrar que se $\rho(Y)v \neq 0$ então $\rho(Y)$ será autovetor de $\rho(H)$ associado ao autovalor $\lambda - 2$. Aplicando essa fórmula k vezes obtemos as seguintes equações:

$$\begin{aligned}\rho(H)\rho(X)^k v &= (\lambda + 2k)\rho(X)^k v, \\ \rho(H)\rho(Y)^k v &= (\lambda - 2k)\rho(Y)^k v.\end{aligned}$$

Portanto, iterações das ações de $\rho(X)$ dão origem a autovetores de $\rho(H)$ associados a autovalores em uma ordem crescente, já iterações de $\rho(Y)$ dão origem a autovetores de $\rho(H)$ associados a autovalores em uma ordem decrescente. Dessas observações segue o teorema a seguir.

Teorema B.1 *Seja ρ uma representação irredutível de $\mathfrak{sl}(2)$ em V com $\dim V = n + 1$. Então existe uma base $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que, para $i = 0, 1, \dots, n$*

$$\begin{aligned}\rho(X)v_i &= i(n - i + 1)v_{i-1} \\ \rho(H)v_i &= (n - 2i)v_i \\ \rho(Y)v_i &= v_{i+1}\end{aligned}\tag{B.1}$$

onde $v_{-1} = v_{n+1} = 0$. Essas expressões mostram que, em relação à base dada, $\rho(X)$ é triangular superior, $\rho(H)$ é diagonal e $\rho(Y)$ é triangular inferior.

Demonstração: Seja v um autovetor de $\rho(H)$ associado a λ . Assim, pelas observações anteriores, se $\rho(X)^i v \neq 0$ então esse vetor é autovetor de $\rho(H)$ associado ao autovalor $\lambda + 2i$. Como os autovetores estão associados a autovalores distintos eles formam um conjunto linearmente independente. Como V tem dimensão finita, existe $i_0 > 1$ tal que $\rho(X)^{i_0} v = 0$ e $\rho(X)^{i_0-1} v \neq 0$. Tomando i_0 dessa forma, fixemos $v_0 = \rho(X)^{i_0-1} v$ que é autovetor de $\rho(H)$, pois é obtido de um autovetor de $\rho(H)$ por aplicações sucessivas de $\rho(X)$. Denotaremos por λ_0 o autovalor associado a v_0 . Tome $v_i = \rho(Y)^i v_0$. Analogamente, o conjunto $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ é linearmente independente, pois são autovetores associados aos diferentes autovalores $\lambda - 2i$, para $i = 0, 1, \dots, k$, onde k é tal que $v_{k+1} = 0$. Definidos assim temos:

$$\begin{aligned}\rho(H)v_i &= \rho(H)\rho(Y)^i v_0 = (\lambda_0 - 2i)v_i, \\ \rho(Y)v_i &= \rho(Y)\rho(Y)^i v_0 = \rho(Y)^{i+1} v_0 = v_{i+1}\end{aligned}$$

e

$$\rho(X)v_i = i(\lambda_0 - i + 1)v_{i-1}.$$

Essa última igualdade é provada por indução sobre i . De fato, para $i = 0$ temos por definição de v_0 que $\rho(X)v_0 = 0$ e o segundo membro da equação acima se anula. Agora suponha a fórmula válida para $i - 1$ e provemos para i . Temos que

$$\rho(X)v_i = \rho(X)\rho(Y)v_{i-1} = \rho[X, Y]v_{i-1} + \rho(Y)\rho(X)v_{i-1}.$$

Mas os termos da soma do último membro da equação anterior são:

$$\rho[X, Y]v_{i-1} = \rho(H)v_{i-1} = (\lambda - 2(i - 1))v_{i-1}$$

e pela hipótese de indução

$$\rho(Y)\rho(X)v_{i-1} = \rho(Y)(i - 1)(\lambda_0 - (i - 1) + 1)v_{i-1} = (i - 1)(\lambda_0 - i + 2)v_{i-1}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \rho(X)v_i &= (\lambda - 2(i - 1))v_{i-1} + (i - 1)(\lambda_0 - i + 2)v_{i-1} \\ &= (\lambda_0 - 2i + 2 + i\lambda_0 - i^2 + 2i + i - 2)v_{i-1} \\ &= i(\lambda_0 - i + 1)v_{i-1}. \end{aligned}$$

Portanto o espaço gerado por $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ é invariante por $\rho(X)$ e por construção também é invariante por $\rho(H)$ e $\rho(Y)$. Logo, como a representação é irredutível, V é igual ao espaço gerado por $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ e portanto $k = n$. Assim para terminar a demonstração basta mostrar que $\lambda_0 = n$. Por um lado temos $\rho(H)v_n = (\lambda_0 - 2n)v_n$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \rho(H)v_n &= \rho[X, Y]v_n = \rho(X)\rho(Y)v_n - \rho(Y)\rho(X)v_n \\ &= -\rho(Y)(n(\lambda_0 - n + 1)v_{n-1}) \\ &= -n(\lambda_0 - n + 1)v_n. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lambda_0 - 2n = -n(\lambda_0 - n + 1)$$

o que implica $\lambda_0 = n$. □

A partir do teorema anterior obtemos agora a seguinte classificação das representações irredutíveis de $\mathfrak{sl}(2)$.

Teorema B.2 *Para cada $n \geq 0$ existe uma única representação irredutível de dimensão $n + 1$ de $\mathfrak{sl}(2)$ (a menos de isomorfismo) e essas representações cobrem todas as representações de dimensão finita de $\mathfrak{sl}(2)$.*

Demonstração: Dado um espaço vetorial V de dimensão $n + 1$, seja $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V . Defina $\rho(X)$, $\rho(H)$ e $\rho(Y)$ como nas expressões do teorema anterior. Assim ρ é representação de $\mathfrak{sl}(2)$ em V . De fato, basta observar que a relação entre os colchetes é satisfeita quando são analisados nos elementos da base de V . Note que por um lado

$$\rho[H, Y]v_i = \rho(-2Y)v_i = -2\rho(Y)v_i = -2v_{i+1}$$

e por outro lado

$$\begin{aligned} [\rho H, \rho Y]v_i &= \rho(H)\rho(Y)v_i - \rho(Y)\rho(H)v_i \\ &= \rho(H)v_{i+1} - \rho(Y)(n - 2i)v_i \\ &= (n - 2(i + 1))v_{i+1} - (n - 2)v_{i+1} \\ &= -2v_{i+1}. \end{aligned}$$

Logo

$$\rho[H, Y]v_i = [\rho H, \rho Y]v_i, \text{ para todo } i.$$

A demonstração que os demais colchetes são preservados é análoga. Logo ρ é representação e é irredutível, pois os subespaços invariantes por ρ são invariantes por $\rho(H)$. Mas os únicos subespaços invariantes por $\rho(H)$ são os gerados pelos v_i 's e esses subespaços não são invariantes por $\rho(X)$ e $\rho(Y)$. Logo não existem subespaços invariantes próprios, e portanto a representação é irredutível. Isso prova a existência. A unicidade é garantida pois se tomarmos outro espaço W de dimensão $n + 1$ e uma representação irredutível α , então a transformação linear que faz corresponder as bases dos espaços V e W será o operador de intercâmbio das representações ρ e α . Portanto essas representações serão isomorfas. \square

B.2 Subálgebras de Cartan

Nesta seção veremos alguns resultados importantes sobre subálgebras de Cartan que serão úteis no decorrer deste apêndice.

Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semisimples sobre \mathbb{K} e \mathfrak{h} uma subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} .

Já vimos que a álgebra se decompõe como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_k}, \quad (\text{B.2})$$

onde \mathfrak{g}_{α_i} são os subespaços de pesos da representação adjunta de \mathfrak{h} em \mathfrak{g} e $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ são os pesos não nulos. Esses pesos, serão denominados **raízes** de \mathfrak{h} em relação a \mathfrak{g} e a notação que iremos utilizar para esse conjunto será Δ . Os espaços \mathfrak{g}_{α_i} serão chamados **espaços de raízes**. Se representarmos a subálgebra \mathfrak{h} em cada um dos \mathfrak{g}_{α_i} , as matrizes serão da forma

$$\text{ad}(H) = \begin{pmatrix} \alpha_i(H) & & * \\ & \ddots & \\ & & \alpha_i(H) \end{pmatrix}$$

para todo $H \in \mathfrak{h}$. Vale também

$$[\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{\alpha_j}] \subset \mathfrak{g}_{\alpha_i + \alpha_j}.$$

Essas duas últimas afirmações são garantidas pela Proposição A.53, pelo Teorema A.50 e por que \mathfrak{h} é nilpotente. Como anteriormente, a forma de Cartan-Killing de \mathfrak{g} será denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Lema B.3 *Sejam α e β dois pesos de \mathfrak{h} (raízes ou o peso nulo). Se $X \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ e $Y \in \mathfrak{g}_{\beta}$ então,*

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)) = 0,$$

a menos que $\beta = -\alpha$.

Demonstração: Seja $Z \in \mathfrak{g}_{\gamma}$. Então

$$\begin{aligned} \text{ad}(X)Z &\in \mathfrak{g}_{\alpha+\gamma} \\ \text{ad}(Y)\text{ad}(X)Z &\in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta+\gamma}. \end{aligned}$$

Assim, se tomarmos uma base de \mathfrak{g} como a união das bases de \mathfrak{h} e \mathfrak{g}_{α_i} , a matriz de $\text{ad}(X)\text{ad}(Y)$ em relação a essa base não tem elementos na diagonal, ou seja, nada irá contribuir para o traço, a menos que $\alpha + \beta = 0$. \square

O fato de que a forma de Cartan-Killing é não degenerada, juntamente com este lema, tem as seguintes consequências:

Corolário B.4 1) A restrição da forma de Cartan-Killing à subálgebra \mathfrak{h} é não degenerada.

2) Se α é raiz então $-\alpha$ é raiz.

3) Para todo $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, existe $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $\langle X, Y \rangle \neq 0$.

Demonstração: 1) Seja $H \in \mathfrak{h}$. Como a forma de Cartan-Killing é não degenerada em \mathfrak{g} , existe $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\langle H, X \rangle \neq 0$. Tome a decomposição de X ,

$$X = H_1 + X_1 + \dots + X_k$$

onde $H_1 \in \mathfrak{h}$ e $X_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$. O lema anterior garante que $\langle H, X_i \rangle = 0$ para todo $i = 1, \dots, k$. Portanto $\langle H, H_1 \rangle \neq 0$, o que mostra que a restrição não é degenerada.

2) Seja $X \in \mathfrak{g}_\alpha$. Então existe $Y \in \mathfrak{g}$ tal que $\langle X, Y \rangle \neq 0$, mas, pelo lema anterior, $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Logo $\mathfrak{g}_{-\alpha} \neq 0$. Portanto $-\alpha$ é raiz.

3) Vamos supor que $\langle X, Y \rangle = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, então $\langle X, Z \rangle = 0$ para todo $Z \in \mathfrak{g}$. Mas isso contradiz o fato de que a forma de Cartan-Killing é não degenerada em \mathfrak{g} . Logo $\langle X, Y \rangle \neq 0$. \square

Proposição B.5 Para todo $H \in \mathfrak{h}$ e todo peso α , $ad(H)|_{\mathfrak{g}_\alpha} = \alpha(H)id$ e as transformações lineares $ad(H)$, $H \in \mathfrak{h}$ são simultaneamente diagonalizáveis.

Demonstração: Sabemos que

$$ad(H)|_{\mathfrak{g}_\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha(H) & & * \\ & \ddots & \\ & & \alpha(H) \end{pmatrix}.$$

Tome a decomposição $H = H_S + H_N$ (que existe pelo Corolário A.73) com $ad(H_S)$ semisimples, $ad(H_N)$ nilpotente e H, H_S, H_N comutando dois a dois. Assim

$$ad(H_N)|_{\mathfrak{g}_\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo $\alpha(H_N) = 0$, para todo $\alpha \in \Delta$. Portanto H_N pertence ao auto-espaço associado ao autovalor 0, que é \mathfrak{h} . Mas $\langle H_N, H' \rangle = 0$ para todo $H' \in \mathfrak{h}$ pois $\text{ad}(H_N)\text{ad}(H')$ só tem zeros na diagonal. Isso implica $H_N = 0$, pois a forma de Cartan-Killing é não degenerada em \mathfrak{h} . Portanto $\text{ad}(H) = \text{ad}(H_S)$, que é diagonal. \square

Proposição B.6 *A subálgebra \mathfrak{h} é abeliana.*

Demonstração: Pela proposição anterior

$$\text{ad}[H_1, H_2] = [\text{ad}(H_1), \text{ad}(H_2)] = 0,$$

para todo $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$. Como a representação adjunta é fiel no caso das álgebras semisimples, $[H_1, H_2] = 0$, e portanto \mathfrak{h} é abeliana. \square

Proposição B.7 *O conjunto Δ das raízes gera o dual \mathfrak{h}^* de \mathfrak{h} , isto é, $H = 0$ se $\beta(H) = 0$ para toda raiz β .*

Demonstração: Pela Proposição B.5, temos que $\text{ad}(H) = 0$, se $\beta(H) = 0$ para toda raiz $\beta \in \Delta$. Mas a representação adjunta é fiel, como já foi observado anteriormente, logo $H = 0$ se $\beta(H) = 0$ para toda raiz $\beta \in \Delta$. Assim, temos um conjunto de funcionais lineares de \mathfrak{h} cujo único elemento no anulador é 0, logo esse conjunto gera o dual \mathfrak{h}^* . \square

Iremos definir agora a forma de Cartan-Killing em \mathfrak{h}^* . Pelo fato de que ela é não degenerada em \mathfrak{h} , a aplicação $\varphi : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}^*$ definida como:

$$\varphi(H) = \langle H, \cdot \rangle$$

é um isomorfismo. Denotamos $\alpha_H(\cdot) = \langle H, \cdot \rangle$. Assim para cada $H \in \mathfrak{h}$ existe um único $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ tal que $\varphi(H) = \alpha$. E reciprocamente, para cada $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, existe um único $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ tal que

$$\alpha(H) = \langle H_\alpha, H \rangle, \text{ para todo } H \in \mathfrak{h}.$$

Assim definimos a forma de Cartan-Killing em \mathfrak{h}^* como

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle = \alpha(H_\beta) = \beta(H_\alpha)$$

se α e β são dois funcionais lineares em \mathfrak{h} .

Pelo isomorfismo entre \mathfrak{h} e \mathfrak{h}^* , as raízes $\alpha \in \Delta$ definem um número finito de elementos H_α que geram \mathfrak{h} , pois Δ gera \mathfrak{h}^* . O lema a seguir dará mais informações sobre a decomposição do espaço \mathfrak{g} como soma dos espaços de raízes de \mathfrak{h} .

Lema B.8 1) Se $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, então $[X, Y] = \langle X, Y \rangle H_\alpha$.

2) Para todo $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, existe $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $[X, Y] = H_\alpha$.

3) Sejam α e β raízes. Então,

$$\langle \beta, \alpha \rangle = q_{\beta\alpha} \langle \alpha, \alpha \rangle.$$

com $q_{\beta\alpha} \in \mathbb{Q}$. (Em geral $q_{\beta\alpha} \neq q_{\alpha\beta}$).

4) Para todo $\alpha \in \Delta$, $\langle \alpha, \alpha \rangle \in \mathbb{Q}^+$.

5) $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, para todo $\alpha \in \Delta$.

6) Os únicos múltiplos inteiros de uma raiz α que são raízes são α e $-\alpha$.

Demonstração: 1) Seja $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, então $[X, Y] \in \mathfrak{g}_{\alpha+(-\alpha)} = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. Tome $H \in \mathfrak{h}$ arbitrário. Então

$$\begin{aligned} \langle H, [X, Y] \rangle &= \langle H, \text{ad}(X)Y \rangle \\ &= -\langle \text{ad}(X)H, Y \rangle \\ &= \langle \text{ad}(H)X, Y \rangle \\ &= \alpha(H) \langle X, Y \rangle \\ &= \langle \text{ad}(X)H, Y \rangle \langle H, H_\alpha \rangle \\ &= \langle H, \langle X, Y \rangle H_\alpha \rangle \end{aligned}$$

Portanto

$$\langle H, [X, Y] - \langle X, Y \rangle H_\alpha \rangle = 0, \text{ para todo } H \in \mathfrak{h}.$$

Como a forma de Cartan-Killing é não degenerada em \mathfrak{h} ,

$$[X, Y] = \langle X, Y \rangle H_\alpha.$$

2) Pelo item anterior, é suficiente mostrar que existe $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $\langle X, Y \rangle = 1$. Pelo Corolário B.4 existe $Y' \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $\langle X, Y' \rangle \neq 0$. Tome $Y = \frac{Y'}{\langle X, Y' \rangle}$ e temos

$$\langle X, Y \rangle = \left\langle X, \frac{1}{\langle X, Y' \rangle} Y' \right\rangle = 1$$

o que mostra o desejado.

3) Seja

$$V = \dots \oplus \mathfrak{g}_{\beta-2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\beta-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\beta} \oplus \mathfrak{g}_{\beta+\alpha} \oplus \dots$$

onde $\mathfrak{g}_{\beta+k\alpha} = 0$ se $\beta + k\alpha$ não é raiz. Essa soma é direta e finita pois há um número finito de raízes. Sejam $X \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ e $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $[X, Y] = H_{\alpha}$. Pela definição de V , $\text{ad}(X)V \subset V$ e $\text{ad}(Y)V \subset V$ e ainda

$$\text{ad}(H_{\alpha})|_V = \text{ad}([X, Y])|_V = [\text{ad}(X)|_V, \text{ad}(Y)|_V].$$

E portanto $\text{tr}(\text{ad}(H_{\alpha})|_V) = 0$ já que o traço de qualquer comutador se anula. Assim, se definirmos $d_k = \dim \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \text{tr}(\text{ad}(H_{\alpha})|_V) = \sum_k d_k(\beta + k\alpha)(H_{\alpha}) = \sum_k d_k(\langle \beta + k\alpha, \alpha \rangle) \\ &= \sum_k d_k(\langle \beta, \alpha \rangle + k \langle \alpha, \alpha \rangle) \\ &= \langle \beta, \alpha \rangle \sum_k d_k + \langle \alpha, \alpha \rangle \sum_k k d_k. \end{aligned}$$

Mas $\sum_k d_k > 0$ pois $d_0 = \dim \mathfrak{g}_{\beta} > 0$. Portanto

$$\langle \beta, \alpha \rangle = - \frac{\sum_k k d_k}{\sum_k d_k} \langle \alpha, \alpha \rangle.$$

e daí que

$$q_{\beta\alpha} = - \frac{\sum_k k d_k}{\sum_k d_k} \in \mathbb{Q}.$$

4) Pelo item anterior, se $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$, então $\langle \beta, \alpha \rangle = 0$ para toda raiz β , mas isso é falso pois a forma de Cartan-Killing é não degenerada em \mathfrak{h}^* , logo $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$, para todo $\alpha \in \Delta$. Definimos então $d_{\beta} = \dim \mathfrak{g}_{\beta}$, e assim temos:

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \alpha \rangle &= \langle H_{\alpha}, H_{\alpha} \rangle = \text{tr}(\text{ad}(H_{\alpha})^2) \\ &= \sum_{\beta \in \Delta} d_{\beta} \beta(H_{\alpha})^2 \\ &= \sum_{\beta \in \Delta} d_{\beta} \langle \beta, \alpha \rangle^2 \\ &= \sum_{\beta \in \Delta} d_{\beta} q_{\beta\alpha}^2 \langle \alpha, \alpha \rangle^2 \\ &= \langle \alpha, \alpha \rangle^2 \sum_{\beta \in \Delta} d_{\beta} q_{\beta\alpha}^2. \end{aligned}$$

Como $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$,

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = \frac{1}{\sum d_\beta q_{\beta\alpha}^2}$$

é um racional positivo.

5) Tome X e Y como no item 3, mas agora tome V o espaço gerado por Y, \mathfrak{h} e

$$\sum_{k \geq 1} \mathfrak{g}_{k\alpha}.$$

Assim V é invariante por $\text{ad}(X)$ pois $\text{ad}(X)Y \in \mathfrak{h}$ e $\text{ad}(X)\mathfrak{g}_{k\alpha} \subset \mathfrak{g}_{(k+1)\alpha}$. Ele é invariante por $\text{ad}(Y)$, pois $\text{ad}(Y)\mathfrak{g}_{k\alpha} \subset \mathfrak{g}_{(k-1)\alpha}$ e $\text{ad}(Y)H = -\text{ad}(H)Y = -\alpha(H)Y$, para todo $H \in \mathfrak{h}$. Analogamente ao item 3, como $H_\alpha = [X, Y]$ tem-se $\text{tr}(\text{ad}(H_\alpha)|_V) = 0$. Mas por outro lado, como $V = \langle \{Y\} \cup \mathfrak{h} \cup \sum \mathfrak{g}_{k\alpha} \rangle$, temos

$$0 = \text{tr}(\text{ad}(H_\alpha)|_V) = -\alpha(H_\alpha) + \sum_{k \geq 0} d_k k \alpha(H_\alpha)$$

onde $d_k = \dim \mathfrak{g}_{k\alpha}$. Logo

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = \sum_{k \geq 0} k d_k \langle \alpha, \alpha \rangle.$$

Dividindo esta equação por $\langle \alpha, \alpha \rangle$ temos

$$1 = d_1 + 2d_2 + 3d_3 + \dots$$

com $d_i \geq 0$ para todo i . Portanto a igualdade só é satisfeita se $d_1 = 1$ e $d_i = 0$ para todo $i \geq 2$.

6. Pelo que foi feito no item anterior $\dim \mathfrak{g}_{k\alpha} = 0$ se $k \geq 2$. Logo $k\alpha$ só é raiz se $k = \pm 1$.

□

B.3 Fórmula de Killing

Após a análise feita sobre as representações irredutíveis de $\mathfrak{sl}(2)$, encontraremos agora, subálgebras da álgebra semisimples \mathfrak{g} isomorfas a $\mathfrak{sl}(2)$. Tome α uma raiz e $\mathfrak{h}(\alpha)$ o subespaço de \mathfrak{h} gerado por H_α . Então temos o seguinte resultado:

Proposição B.9 *A subálgebra*

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{h}(\alpha) \oplus \mathfrak{g}_\alpha$$

é isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)$.

Demonstração: Primeiramente note que $\mathfrak{g}(\alpha)$ é subálgebra pois $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}(\alpha)$, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{h}(\alpha)] \subset \mathfrak{g}_\alpha$ e $[\mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{h}(\alpha)] \subset \mathfrak{g}_{-\alpha}$.

Seja $H'_\alpha \in \mathfrak{h}(\alpha)$ definido por

$$H'_\alpha = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} H_\alpha.$$

Pelo Lema B.8, existem $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tais que

$$\langle X_\alpha, Y_{-\alpha} \rangle = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle},$$

pois como existe $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que $\langle X_\alpha, Y \rangle = 1$, tome por exemplo $Y_{-\alpha} = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} Y$. Como $\alpha(H'_\alpha) = 2$, os colchetes entre esses elementos são

$$\begin{aligned} [H'_\alpha, X_\alpha] &= \text{ad}(H'_\alpha)X_\alpha = \alpha(H'_\alpha)X_\alpha = 2X_\alpha \\ [H'_\alpha, Y_{-\alpha}] &= \text{ad}(H'_\alpha)Y_{-\alpha} = -\alpha(H'_\alpha)Y_{-\alpha} = -2Y_{-\alpha} \\ [X_\alpha, Y_{-\alpha}] &= \langle X_\alpha, Y_{-\alpha} \rangle H_\alpha = H'_\alpha. \end{aligned}$$

Isso mostra que $\phi : \mathfrak{sl}(2) \longrightarrow \mathfrak{g}_\alpha$, dado por $\phi(X) = X_\alpha$, $\phi(Y) = Y_{-\alpha}$ e $\phi(H) = H'_\alpha$ é um isomorfismo de álgebras de Lie. Aqui $\{X, H, Y\}$ é a base canônica de $\mathfrak{sl}(2)$. \square

Façamos agora algumas observações sobre este último resultado.

O isomorfismo entre as álgebras não é único devido ao fato de que X_α e $Y_{-\alpha}$ não são únicos.

Para cada raiz α temos uma representação de $\mathfrak{sl}(2)$ em \mathfrak{g} através da composição de ϕ com a representação adjunta de $\mathfrak{g}(\alpha)$ em \mathfrak{g} . Com essas representações, analisaremos mais detalhadamente os colchetes $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta]$ e a forma $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Definição B.10 *Considere α e β duas raízes. A sequência de elementos de \mathfrak{h}^**

$$\dots, \beta - 2\alpha, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \dots$$

é denominada a α -sequência iniciada em β .

Para entendermos o colchete em \mathfrak{g} , devemos saber quais elementos dessa sequência são pesos. A resposta é dada pelo próximo teorema.

Teorema B.11 *Os elementos da α -sequência iniciada em β que são pesos formam um intervalo contendo β , isto é, existem inteiros $p, q \geq 0$ tais que*

$$\beta - p\alpha, \dots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \dots, \beta + q\alpha$$

são os únicos pesos da forma $\beta + k\alpha$ com $k \in \mathbb{Z}$. Além do mais, vale a seguinte fórmula (de Killing)

$$p - q = \frac{2 \langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}. \quad (\text{B.3})$$

Demonstração: Suponha inicialmente que β é múltiplo inteiro de α , isto é, $\beta = 0$ ou $\beta = \pm\alpha$. Logo a α -sequência iniciada em β fica

$$-\alpha, 0, \alpha.$$

e o número de Killing entre α e β é 0 ou ± 2 . Logo a fórmula de Killing vale nesse caso.

Agora suponha que β não é múltiplo inteiro de α , isto é, $\beta + k\alpha \neq 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Tome o subespaço de \mathfrak{g}

$$V_{\beta, \alpha} = \dots \oplus \mathfrak{g}_{\beta - \alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\beta} \oplus \mathfrak{g}_{\beta + \alpha} \oplus \dots$$

Essa soma é finita e a representação adjunta de $\mathfrak{g}(\alpha)$ em \mathfrak{g} deixa $V_{\beta, \alpha}$ invariante pois

$$\begin{aligned} \text{ad}(X_{\alpha})\mathfrak{g}_{\beta + k\alpha} &\subset \mathfrak{g}_{\beta + (k+1)\alpha} \\ \text{ad}(Y_{-\alpha})\mathfrak{g}_{\beta + k\alpha} &\subset \mathfrak{g}_{\beta + (k-1)\alpha} \\ \text{ad}(H'_{\alpha})\mathfrak{g}_{\beta + k\alpha} &\subset \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha}. \end{aligned}$$

Assim podemos tomar a representação adjunta $\text{ad}: \mathfrak{g}(\alpha) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V_{\beta, \alpha})$, e essa representação é irredutível. De fato, suponha que

$$V_{\beta, \alpha} = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$$

é uma decomposição de $V_{\beta, \alpha}$, com V_i componentes irredutíveis. Seja $m_i = \dim V_i - 1$. Pela classificação das representações irredutíveis de $\mathfrak{sl}(2) \approx \mathfrak{g}(\alpha)$, os autovalores de $\text{ad}(H'_{\alpha})$ são inteiros, todos pares ou ímpares. Mas, por outro lado, os autovalores são

$$(\beta + k\alpha)(H'_{\alpha}) = \beta(H'_{\alpha}) + k\alpha(H'_{\alpha}) = 2\frac{\beta(H_{\alpha})}{\langle \alpha, \alpha \rangle} + 2k\frac{\alpha(H_{\alpha})}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} + 2k,$$

logo o número $2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ é inteiro e os autovalores $(\beta + k\alpha)(H'_{\alpha})$ têm a mesma paridade que ele, pois

$$2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = (\beta + k\alpha)(H'_{\alpha}) - 2k \in \mathbb{Z}.$$

Mas os autovalores são todos simples pois $\dim \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha} = 1$, logo $s = 1$. Pois se supormos $s > 1$ então teríamos um autovalor m_i de V_i , e mais, $m_j = m_i + 2k$ para algum $k > 0$, o que implicaria que m_i não é autovalor simples pois, se $v \in V_j$ é autovetor de m_j , então

$$\text{ad}(H'_{\alpha})v = m_j v = m_i v + 2k v = m_i \left(v + \frac{2k}{m_i} v \right)$$

e assim m_i seria também autovalor de um vetor em V_j , o que é falso. Portanto $s = 1$ e a representação é irredutível. Desse fato e do fato que $(\beta + k\alpha)(H'_\alpha)$ varia de dois em dois quando se varia k segue que

$$V_{\beta,\alpha} = \mathfrak{g}_{\beta-p\alpha} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{\beta-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{\beta+\alpha} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{\beta+q\alpha}.$$

De fato, se existisse j com $p < j < q$, tal que $\mathfrak{g}_{\beta+j\alpha} = 0$, teríamos que $(\beta + j\alpha)(H'_\alpha)$ não seria autovalor, o que é uma contradição, pois $(\beta + (j-1)\alpha)(H'_\alpha)$ é autovalor, então

$$(\beta + k\alpha)(H'_\alpha) = (\beta + (j-1)\alpha)(H'_\alpha) + 2$$

que é autovalor. Assim o conjunto de pesos da forma $\beta + k\alpha$ é um intervalo.

Para concluirmos a demonstração resta mostrar a fórmula B.3. Por um lado, o maior autovalor de $\text{ad}(H'_\alpha)$ é

$$(\beta + q\alpha)(H'_\alpha) = \frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} + 2q$$

e por outro lado $\dim V_{\beta,\alpha} = p + q + 1$. Logo

$$p + q = \frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} + 2q.$$

Portanto

$$p - q = \frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}.$$

□

Na fórmula de Killing os valores de p e q são diferentes se tomarmos a β -sequência iniciada em α .

O inteiro

$$\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}$$

é denominado **número de Killing** associado às raízes α e β .

Como consequência da fórmula de Killing, tem-se as duas seguintes proposições:

Proposição B.12 *Os únicos múltiplos de uma raiz α que são raízes são $\pm\alpha$ ou 0.*

Demonstração: Suponha que $\beta = c\alpha$ é uma raiz, com $c \neq 0$. Logo

$$\begin{aligned} \frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} &= \frac{2\langle c\alpha, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} = 2c \\ \frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\beta, \beta\rangle} &= \frac{2\langle c\alpha, \alpha\rangle}{\langle c\alpha, c\alpha\rangle} = \frac{2}{c}. \end{aligned}$$

Sejam $n = 2c$ e $m = \frac{2}{c}$. Assim temos que m e n são inteiros e ainda $m.n = 4$, mas isso implica que $n = \pm 1, \pm 2$ ou ± 4 , isto é, $c = \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$. Mas não ocorre $c = \pm \frac{1}{2}$ ou ± 2 , pois já foi provado que os únicos múltiplos inteiros de uma raiz são $\pm\alpha$. Portanto $c = \pm 1$ e assim temos o desejado. \square

Proposição B.13 *Se α e β são raízes tais que $\alpha + \beta$ é raiz ($\alpha + \beta \neq 0$). Então,*

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\beta+\alpha}.$$

Demonstração: Se tomarmos $X_\alpha \in \mathfrak{g}(\alpha) \approx \mathfrak{sl}(2)$, a expressão da representação irredutível de $\mathfrak{g}(\alpha)$ em \mathfrak{g} mostra que

$$\text{ad}(X_\alpha)\mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{g}_{\beta+\alpha}.$$

De fato, $\text{ad}(X_\alpha)$ leva a base de \mathfrak{g}_β na base de $\mathfrak{g}_{\beta+\alpha}$. Assim todos os elementos de $\mathfrak{g}_{\beta+\alpha}$ são imagem de $\text{ad}(X_\alpha)$. Portanto temos a igualdade requerida na proposição. \square

B.4 Sistema simples de raízes

O objetivo agora é encontrar um conjunto de raízes que seja base de \mathfrak{h}^* visto como espaço vetorial sobre \mathbb{Q} , e ainda, que os elementos de Δ sejam escritos como combinações dos elementos dessa base com coeficientes inteiros. Esse conjunto será denominado **sistema simples de raízes**. Seja então

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}} = \{a_1 H_{\alpha_1} + \dots + a_k H_{\alpha_k} : a_i \in \mathbb{Q} \text{ e } \alpha_i \in \Delta\}$$

que é um espaço de dimensão finita sobre \mathbb{Q} , pois o conjunto de raízes é finito.

Proposição B.14 $\dim \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}} = \dim \mathfrak{h}$.

Demonstração: Primeiramente seja $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \Delta$ tal que $B = \{H_{\alpha_1}, \dots, H_{\alpha_l}\}$ é base de \mathfrak{h} sobre \mathbb{K} . Como o corpo \mathbb{K} tem característica zero, ele contém os racionais e como B é linearmente independente sobre \mathbb{K} é também sobre \mathbb{Q} . Logo $\dim \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}} \geq \dim \mathfrak{h}$. Agora para mostrar a igualdade basta mostrar que B gera $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$. Tome α uma raiz qualquer, logo

$$H_\alpha = a_1 H_{\alpha_1} + \dots + a_l H_{\alpha_l}, \quad a_i \in \mathbb{K}.$$

Agora, para cada $j = 1, \dots, l$, temos a equação

$$\langle H_\alpha, H_{\alpha_j} \rangle = \sum_{i=1}^l \langle H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j} \rangle a_i.$$

Logo temos um sistema de l equações e l incógnitas a_i . Mas assim esse sistema linear dá origem a uma matriz que é justamente a matriz da forma de Cartan-Killing em relação a base B , que é não-degenerada e portanto o sistema tem única solução. Como os números $\langle H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j} \rangle$ são todos racionais, as entradas da matriz são todas racionais e assim a solução é racional. Portanto $a_i \in \mathbb{Q}$, para $i = 1, \dots, l$. Então B gera $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ sobre \mathbb{Q} , e as dimensões são iguais. \square

Sobre a restrição da forma de Cartan-Killing à $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ pode-se mostrar o seguinte fato:

Proposição B.15 *A forma de Cartan-Killing restrita a $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ é um produto interno.*

Demonstração: Restringindo a forma de Cartan-Killing à $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$, definimos uma forma bilinear simétrica, pois o valor da forma em elementos de Δ assume valores em \mathbb{Q} . Resta mostrar então que ela é positiva definida. Para isto tome $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$, assim

$$\langle H, H \rangle = \text{tr}(\text{ad}(H)^2) = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(H)^2 \geq 0$$

e além disso $\langle H, H \rangle = 0$ se, e somente se, $\alpha(H) = 0$ para todo $\alpha \in \Delta$ o que ocorre se, e somente se, $H = 0$, pois Δ gera \mathfrak{h}^* . \square

O espaço vetorial $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ sobre os racionais foi contruído para estudarmos a estrutura das álgebras semisimples através da geometria dos elementos H_α ou das próprias raízes em $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$.

Antes de fazer esse estudo, vamos introduzir uma ordem lexicográfica nos espaços vetoriais racionais. Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{Q} e $\{v_1, \dots, v_l\}$ uma base ordenada desse espaço. Tome dois elementos $v, w \in V$ como combinação dos elementos da base,

$$\begin{aligned} v &= a_1 v_1 + \dots + a_l v_l, \\ w &= b_1 v_1 + \dots + b_l v_l. \end{aligned}$$

Dizemos que $v \leq w$ se $v = w$ ou se $a_i < b_i$, para o primeiro índice i tal que $a_i \neq b_i$.

Definida assim, a ordem lexicográfica em V satisfaz as propriedades que necessitaremos para provar a existência de um sistema simples de raízes.

Lema B.16 Tomando a ordem lexicográfica dada pela base $\{v_1, \dots, v_l\}$ de V , seja $\{w_1, \dots, w_m\}$ um subconjunto de V satisfazendo:

- a) $w_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, m$,
- b) $\langle w_i, w_j \rangle \leq 0$ para $i \neq j$.

Então $\{w_1, \dots, w_m\}$ é um conjunto linearmente independente.

Demonstração: Suponha por contradição que o conjunto seja linearmente dependente. Assim podemos supor que existem a_1, \dots, a_{m-1} tais que

$$w_m = a_1 w_1 + \dots + a_{m-1} w_{m-1}.$$

Como $w_m > 0$, pelo menos um dos coeficientes a_i é positivo. De fato, se todos fossem negativos então $a_i w_i < 0$ para todo $i = 1, \dots, m-1$, assim $w_m < 0$. Seja então

$$w_m = w_m^+ + w_m^-,$$

onde w_m^+ é a soma dos $a_i w_i$ tais que $a_i > 0$ e w_m^- a soma dos $a_i w_i$ tais que $a_i < 0$. Logo, por um lado, temos

$$\langle w_m, w_m^+ \rangle = \sum_i a_i \langle w_m, w_i \rangle \leq 0$$

e por outro lado,

$$\langle w_m, w_m^+ \rangle = \langle w_m^+ + w_m^-, w_m^+ \rangle = |w_m^+|^2 + \langle w_m^-, w_m^+ \rangle$$

e os termos do último membro da equação são positivos, pois $|w_m^+|^2$ é positivo e tomando a_i os coeficientes positivos de w_m e a_j os coeficiente negativos, temos $a_i a_j < 0$ e como $\langle w_i, w_j \rangle \leq 0$ então

$$\langle w_m^-, w_m^+ \rangle = \sum a_i a_j \langle w_i, w_j \rangle > 0.$$

Logo, temos uma contradição e portanto o conjunto é linearmente independente. \square

Definiremos agora o conceito de raiz simples.

Definição B.17 Fixada uma ordem lexicográfica no espaço vetorial racional $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$, uma raiz $\alpha \in \Delta$ é **simples** se

- i) $\alpha > 0$
- ii) Não existem β e $\gamma \in \Delta$ tais que $\beta, \gamma > 0$ e $\alpha = \beta + \gamma$.

O conjunto das raízes simples será denotado por Π .

O objetivo agora é mostrar que Π forma uma base de $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$. Esse é o objetivo dos lemas a seguir.

Lema B.18 *O conjunto Π é não vazio e linearmente independente.*

Demonstração: Seja α uma raiz positiva minimal. Assim não existe uma raiz positiva β tal que $\beta < \alpha$. A existência dessa raiz α vem do fato de que o subconjunto das raízes positivas de Δ é finito e não vazio. Suponha, por absurdo, que α não é raiz simples. Assim existem β e $\gamma \in \Delta$ tais que $\beta, \gamma > 0$ e $\alpha = \beta + \gamma$, mas assim $0 < \beta < \alpha$ o que implicaria que α não é raiz minimal. Logo $\alpha \in \Pi$ e portanto $\Pi \neq \emptyset$.

Agora para mostrarmos que Π é linearmente independente, utilizaremos o lema B.16 provando que se α e β estão em Π , $\alpha \neq \beta$, então $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$. Primeiro observe que $\beta - \alpha$ não é raiz, pois se fosse, como

$$\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$$

então $\beta - \alpha \leq 0$, pois β é simples. Por outro lado, como

$$\alpha = \beta + (\alpha - \beta),$$

então $\beta - \alpha \geq 0$, pois α é simples. Logo, na α -sequência iniciada em β , tem-se $p = 0$.

Assim

$$\frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = -q \leq 0$$

e portanto $\langle \beta, \alpha \rangle \leq 0$ se $\alpha \neq \beta$ são raízes simples. Logo pelo Lema B.16 o conjunto Π é linearmente independente. \square

O conjunto finito das raízes simples será escrito como

$$\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}.$$

Lema B.19 *Seja $\beta \in \Delta$ com $\beta > 0$. Então β se escreve de maneira única como*

$$\beta = n_1\alpha_1 + \dots + n_l\alpha_l,$$

com $n_i \in \mathbb{Z}$ e $n_i \geq 0$, para $i = 1, \dots, l$.

Demonstração: Se $\beta \in \Pi$ não há o que fazer. Caso contrário existem β_1 e β_2 tais que $\beta = \beta_1 + \beta_2$. Se $\beta_1, \beta_2 \in \Pi$ acabou a demonstração. Senão, para cada β_i , existem $\beta_{i1}, \beta_{i2} > 0$, tais que

$$\beta_i = \beta_{i1} + \beta_{i2} \quad i = 1, 2.$$

Note que $\beta_{ij} < \beta_i$, $i = 1, 2$. Se β_{ij} são simples temos o resultado, se não são simples continua-se esse processo até que todas as raízes sejam tais que não existe nenhuma raiz positiva menor que as mesmas. Assim essas raízes serão simples e β uma combinação linear dessas raízes com coeficientes inteiros. \square

Como corolário temos o seguinte fato:

Corolário B.20 a) *Seja $\gamma > 0$ raiz que não é simples. Então, existe $\alpha \in \Pi$ tal que $\langle \gamma, \alpha \rangle > 0$ e $\gamma - \alpha$ é raiz positiva.*

b) *Toda raiz positiva pode ser escrita como*

$$\gamma = \alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k}$$

com α_{i_j} raiz simples e as somas parciais

$$\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_s}$$

$s = 1, \dots, k$ são raízes.

Demonstração: a) Se para toda raiz simples α tivermos $\langle \gamma, \alpha \rangle \leq 0$ então, pelo Lema B.16, o conjunto $\Pi \cup \{\gamma\}$ é linearmente independente e isso contradiz o lema anterior. Logo existe α tal que $\langle \gamma, \alpha \rangle > 0$. Assim, pela fórmula de Killing, na α -sequência iniciada em γ temos $p > 0$, pois

$$p - q = \frac{2 \langle \gamma, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} > 0.$$

Logo $\gamma - \alpha$ é raiz, e mais, é raiz positiva, pois se supormos que é negativa, então

$$\gamma - \alpha = a_1 \alpha_1 + \dots + a_n \alpha_n + c \alpha,$$

com $a_i, c \leq 0$, $i = 1, \dots, n$. Logo

$$\gamma = a_1 \alpha_1 + \dots + a_n \alpha_n + (c + 1) \alpha.$$

Como γ é raiz positiva, teríamos $a_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Logo γ seria um múltiplo de α , mas isso é falso pois γ não é simples.

b) Novamente, se γ é raiz simples não há nada a fazer. Se γ não é raiz simples então existe $\alpha \in \Pi$ tal que $\gamma - \alpha$ é raiz positiva. Como $\gamma = (\gamma - \alpha) + \alpha$ se $\gamma - \alpha$ é raiz simples temos o resultado. Se não for raiz simples então aplicamos o mesmo argumento para a raiz positiva $\gamma - \alpha$, e o resultado segue indutivamente. \square

Como conclusão desses últimos lemas temos que:

- 1) Π é uma base de $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$;
- 2) Para todo $\beta \in \Delta$

$$\beta = n_1\alpha_1 + \dots + n_l\alpha_l$$

com todos coeficientes inteiros e de mesmo sinal.

A afirmação 1) vem do fato que já provamos que o conjunto Δ gera $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$ e pelo Lema B.19, Π gera Δ . Para a afirmação 2), se β é raiz positiva, então ele é combinação linear com coeficientes inteiros não negativos de elementos de Π . Se β é raiz negativa então $-\beta$ é positiva e portanto β é combinação linear com coeficientes inteiros não positivos.

Definição B.21 Um subconjunto $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ de Δ , satisfazendo 1) e 2) acima é denominado **sistema simples de raízes**.

Observe que não existe um único sistema simples de raízes. Se $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ é um sistema simples de raízes, então $\{-\alpha_1, \dots, -\alpha_l\}$ também é um sistema simples de raízes.

B.5 Matrizes de Cartan

Foi mostrado que se tivermos um sistema simples de raízes Π então todas as possíveis raízes de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} são combinações lineares de Π com coeficientes inteiros todos positivos ou todos negativos. Um dos objetivos dessa seção será definir quando uma soma de elementos de Π é uma raiz. Isso será feito utilizando a fórmula de Killing, mas para isso, primeiro precisamos de uma definição que irá diferenciar as raízes positivas pela quantidade de raízes simples que aparece em sua expressão.

Definição B.22 Seja $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ o sistema simples fixado. Se β é uma raiz positiva tal que

$$\beta = m_1\alpha_1 + \dots + m_l\alpha_l, \quad m_i \in \mathbb{Z}^+,$$

então o número inteiro positivo $m_1 + \dots + m_l$ é denominado a **altura** de β .

Por exemplo, as raízes de altura um são as próprias raízes simples. As raízes de altura dois são da forma $\alpha_i + \alpha_j$, com $i \neq j$. Para saber se $\alpha_i + \alpha_j$ é realmente raiz temos que analisar a α_i -sequência iniciada em α_j

$$\alpha_j - p\alpha_i, \dots, \alpha_j + q\alpha_i.$$

Como $\alpha_j - \alpha_i$ não é raiz, pois todos os coeficientes de uma raiz tem o mesmo sinal, sabemos que $p = 0$. Logo, pela fórmula de Killing

$$-q = \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}.$$

Assim,

$$q > 0 \text{ se, e somente se, } \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} < 0,$$

portanto

$$\alpha_i + \alpha_j \in \Delta \text{ se, e somente se, } \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} < 0.$$

Logo, para encontrarmos as raízes de altura dois, basta olhar os valores de $\frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}$.

As raízes β de altura três, pelo Corolário B.20, são da forma $\alpha + \alpha_k$ com α de altura dois e $\alpha_k \in \Pi$, ou seja, $\beta = \alpha_i + \alpha_j + \alpha_k$. Vamos analisar a α_k -sequência iniciada em $\alpha_i + \alpha_j$. Temos

$$p - q = \frac{2 \langle \alpha_i + \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle}.$$

Assim há duas situações:

a) $i \neq j \neq k$. Neste caso $p = 0$ pois $\alpha_i + \alpha_j - \alpha_k$ não é raiz. Assim $\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k$ é raiz se, e somente se, $q > 0$. Isso ocorre se, e somente se,

$$\frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{2 \langle \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} < 0$$

pois

$$-q = \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} + \frac{2 \langle \alpha_j, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle}$$

e os termos do lado direito da equação são sempre menores ou iguais a zero.

b) $k = i$ ou $k = j$. Por exemplo, se $k = j$, então a α_k -sequência iniciada em $\alpha_i + \alpha_j$ é parte, na verdade, da α_j -sequência iniciada em α_i . Analogamente, para decidir se $\alpha_i + 2\alpha_j$ é raiz temos que saber se

$$\frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} < 0.$$

Esse argumento se estende ao caso geral por indução, pois, pelo Corolário B.20, dada uma raiz β de altura $n + 1$, ela é da forma $\alpha + \alpha_k$ com α raiz de altura n e $\alpha_k \in \Pi$. Novamente a fórmula de Killing nos diz quando essa soma é uma raiz. Pela α_k -sequência iniciada em α temos

$$p - q = \frac{2 \langle \alpha, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle}.$$

Por indução conhecemos p e q e sabemos se $\alpha - \alpha_k, \alpha - 2\alpha_k, \dots$, são raízes positivas e de altura menor que n . Se

$$\alpha = n_1\alpha_1 + \dots + n_l\alpha_l,$$

então

$$\frac{2 \langle \alpha, \alpha_k \rangle}{\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle} = n_1 \frac{2 \langle \alpha, \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} + \dots + n_l \frac{2 \langle \alpha, \alpha_l \rangle}{\langle \alpha_l, \alpha_l \rangle}.$$

Logo, sabemos se $q > 0$, ou seja, se $\alpha + \alpha_k$ é raiz, se sabemos os números de Killing associados a α e $\alpha_i \in \Pi$.

Portanto, pela discussão feita acima, os números de Killing associados aos elementos do sistema simples de raízes determinam todas as raízes de uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Conseqüentemente toda estrutura da álgebra semisimples \mathfrak{g} . Esses números são colocados em forma de matriz:

$$C = \left(\frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \right)_{i,j}.$$

Esta é uma matriz $l \times l$ e recebe o nome de **Matriz de Cartan** do sistema simples de raízes. Os elementos da diagonal são todos iguais a 2 e os elementos restantes são inteiros não positivos. A próxima proposição mostra que as possibilidades para os elementos de fora da diagonal são bastantes restritas

Observe que como a forma de Cartan-Killing restrita a \mathfrak{h} é um produto interno, podemos falar entre ângulos de elementos de Δ , pois $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle = |H_\alpha| |H_\beta| \cos \theta$.

Proposição B.23 *Sejam α e β raízes simples.*

a) *Se θ denota o ângulo entre α e β então,*

$$\cos \theta = 0, \pm 1, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{1}{2},$$

isto é, $\theta = \frac{k\pi}{6}$ ou $\frac{k\pi}{4}$.

b) *Os possíveis valores para os números de Killing são*

$$\frac{2 \langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3.$$

Demonstração: a) Temos $\langle \alpha, \beta \rangle^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle \langle \beta, \beta \rangle \cos^2 \theta$. Logo,

$$\frac{2 \langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \frac{2 \langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = 4 \cos^2 \theta.$$

Como $0 \leq \cos^2 \theta \leq 1$ e os termos do lado esquerdo da equação são inteiros, então

$$4 \cos^2 \theta = 0, 1, 2, 3, 4$$

e portanto $\cos \theta$

$$\cos \theta = 0, \pm 1, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{1}{2}.$$

b) Pelo item anterior tem-se que

$$\frac{2 \langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \frac{2 \langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = 0, 1, 2, 3, 4$$

e isso implica que

$$\frac{2 \langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4.$$

Se supormos que

$$\frac{2 \langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \pm 4,$$

então $\cos \theta = \pm 1$. Logo $\theta = 0$ ou π e assim α seria múltiplo de β , ou seja, $\alpha = \pm \beta$ e assim

$$\frac{2 \langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \pm 2,$$

o que é uma contradição. Portanto temos o resultado. □

Esse resultado nos mostra que se θ é o ângulo entre α_i e α_j raízes simples, então

- $\theta = 0$ se $\alpha_i = \alpha_j$,
- $\theta = 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ se $\alpha_i \neq \alpha_j$.

A respeito das entradas da matriz de Cartan temos o seguinte resultado:

Proposição B.24 *Seja $C = (c_{ij})$ a matriz de Cartan de um sistema simples de raízes.*

Então,

- 1) $c_{ii} = 2$ para todo i ,
- 2) $c_{ij} = 0, -1, -2$ ou -3 , para $i \neq j$,
- 3) $c_{ji} = -1$ se $c_{ij} = -2$ ou -3 e
- 4) $c_{ij} = 0$ se, e somente se, $c_{ji} = 0$.

Demonstração: 1) Óbvio.

2) Como os números de Killing são menores ou iguais a zero, pois $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ para todo α e $\beta \in \Pi$, o resultado segue da proposição anterior.

3) Vimos na proposição anterior que

$$\frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} \leq 3.$$

Logo, se

$$\frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = -2 \text{ ou } -3,$$

então

$$\frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = -1.$$

4) Temos que se $c_{ij} = 0 = \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}$, então $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$. Logo $c_{ij} = 0$ se, e somente se, $c_{ji} = \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = 0$. □

B.6 Diagramas de Dynkin

Nesta seção introduziremos o **diagrama de Dynkin**, que é um grafo que contém todas as informações de uma matriz de Cartan, mas tem uma notação mais sucinta. Esse diagrama é definido a partir de um sistema simples de raízes fixado $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, como numa matriz de Cartan.

Esse diagrama contém l pontos (vértices) representando cada uma das raízes simples. Os vértices são ligados ou não por um, dois ou três segmentos (arestas) de acordo com as seguintes regras:

1. Se

$$\frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = 0$$

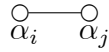
não existe ligação:

$$\overset{\circ}{\alpha}_i \quad \overset{\circ}{\alpha}_j$$

2. Se

$$\frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = -1,$$

α_i e α_j são ligadas por um segmento:

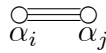
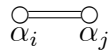


Nesse caso o ângulo θ entre as raízes é 120° , pois $4 \cos^2 \theta = -1$ implica $\cos \theta = -\frac{1}{2}$.

3. Se

$$\frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \text{ ou } \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}$$

é igual a -2 (respectivamente -3), os vértices α_i e α_j são ligados por dois (respectivamente 3) segmentos:



Nesse caso o ângulo entre as raízes é 135° (respectivamente 150°), pois $4 \cos^2 \theta = 2$ implica $\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ (respectivamente $4 \cos^2 \theta = 3$ implica $\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$).

O diagrama de Dynkin é utilizado para obter a matriz de Cartan. Seja $C = (c_{ij})$ a matriz de Cartan. Se construirmos o diagrama de acordo com as regras acima, então $c_{ij} = c_{ji} = 0$ quando as raízes α_i e α_j não são ligadas e $c_{ij} = c_{ji} = -1$ se α_i e α_j são ligadas por apenas um segmento. No entanto, quando a ligação é feita por dois ou três segmentos, não fica claro qual das entradas

$$c_{ij} = \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}$$

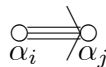
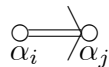
ou

$$c_{ji} = \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}$$

da matriz de Cartan é -2 ou -3 . Para distinguir isso, orienta-se a ligação na direção da raiz α_j se

$$c_{ji} = \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = -2 \text{ ou } -3$$

e deste modo $c_{ij} = -1$. Dessa forma obtém-se as seguintes ligações orientadas:



Orienta-se a ligação na direção da raiz α_i se

$$c_{ij} = \frac{2 \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = -2 \text{ ou } -3.$$

Resumindo, o número de ligações entre duas raízes simples e o ângulo que elas formam entre si estão relacionadas pela seguinte tabela:

○ ○	$\theta = 90^\circ$
○—○	$\theta = 120^\circ$
○=○	$\theta = 135^\circ$
○≡○	$\theta = 150^\circ$

Vamos ilustrar as regras acima com um exemplo.

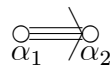
Exemplo B.1 *Dada a matriz de Cartan*

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

temos que

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{2 \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} = 2 = c_{22} = \frac{2 \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle}{\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle} \\ c_{12} &= \frac{2 \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle}{\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle} = -3 \\ c_{21} &= \frac{2 \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} = -1 \end{aligned}$$

e assim a matriz de Cartan acima define o diagrama



Analisaremos agora os conceitos apresentados durante todo o apêndice aplicado em uma álgebra de Lie concreta. O exemplo que iremos analisar é a álgebra clássica das matrizes $n \times n$ de traço nulo, $\mathfrak{sl}(n)$.

Exemplo B.2 *É fácil verificar que as matrizes diagonais de traço nulo é uma sub-álgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}(n)$, que denotaremos aqui como \mathfrak{h} . Tome $E_{ij} = (a_{rs})$, para*

$i, j = 1, 2, \dots, n$, a matriz $n \times n$ cuja única entrada não nula é $a_{ij} = 1$. O conjunto das matrizes E_{ij} e $E_{ii} - E_{jj}$, $i \neq j$, é uma base de $\mathfrak{sl}(n)$. Dado um elemento $H \in \mathfrak{h}$, escrevemos

$$H = \text{diag} \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

com $a_1 + \dots + a_n = 0$. Logo, tomando a aplicação adjunta de H , temos

$$\text{ad}(H)(E_{ij}) = [H, E_{ij}] = HE_{ij} - E_{ij}H = (a_i - a_j)E_{ij}.$$

Assim os E_{ij} são autovetores de $\text{ad}(H)$ associados aos autovalores $(a_i - a_j)$. Isso mostra que as raízes de \mathfrak{h} são funcionais $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$, $i \neq j$, onde $\lambda_i : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{K}$ é definida por $\lambda_i(\text{diag} \{a_1, \dots, a_n\}) = a_i$.

Os espaços de raízes são os espaços gerados por E_{ij} , $i \neq j$. Agora analisando a forma de Cartan-Killing temos,

$$\begin{aligned} \langle H, H \rangle &= \text{tr}(\text{ad}(H)\text{ad}(H)) = \text{tr}(\text{ad}(H)^2) = \sum_{i \neq j} (a_i - a_j)^2 = 2 \sum_{i < j} (a_i - a_j)^2 \\ &= 2 \sum_{i < j} (a_i^2 + a_j^2) - 4 \sum_{i < j} a_i a_j \\ &= 2(n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2 - 4 \sum_{i < j} a_i a_j. \end{aligned}$$

Mas

$$-4 \sum_{i < j} a_i a_j = 2 \sum_{i=1}^n a_i^2$$

pois $\sum_{i=1}^n a_i = 0$. Portanto,

$$\langle H, H \rangle = 2(n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2 - 4 \sum_{i < j} a_i a_j = 2(n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i^2 = 2n \sum_{i=1}^n a_i^2. \quad (\text{B.4})$$

Esta última igualdade e a forma de polarização que relaciona uma forma quadrática com a forma bilinear associada, mostram que

$$\langle H, H' \rangle = 2n(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n), \quad (\text{B.5})$$

onde $H' = \text{diag} \{b_1, \dots, b_n\}$.

Agora voltando a notação que associa a cada raiz $\alpha \in \Delta$ seu elemento $H_\alpha \in \mathfrak{h}$, se $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$ é uma raiz de \mathfrak{h} então devido a expressão B.5, temos que

$$H_{\alpha_{ij}} = \frac{1}{2n}(E_{ii} - E_{jj}).$$

Logo, os valores da forma de Cartan-killing nas raízes são os racionais

$$\begin{aligned}\langle \alpha_{ij}, \alpha_{rs} \rangle &= \left\langle \frac{1}{2n}(E_{ii} - E_{jj}), \frac{1}{2n}(E_{rr} - E_{ss}) \right\rangle \\ &= \frac{1}{4n}(\langle E_{ii}, E_{rr} \rangle - \langle E_{ii}, E_{ss} \rangle - \langle E_{jj}, E_{rr} \rangle + \langle E_{jj}, E_{ss} \rangle) \\ &= \frac{1}{2n}(\delta_{ir} - \delta_{is} - \delta_{jr} + \delta_{js}).\end{aligned}$$

Onde $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e 0 caso contrário. Logo, o número de Killing de duas raízes é

$$\frac{2\langle \alpha_{ij}, \alpha_{rs} \rangle}{\langle \alpha_{ij}, \alpha_{ij} \rangle} = \delta_{ir} - \delta_{is} - \delta_{jr} + \delta_{js}.$$

Para a α_{ij} -sequência iniciada em α_{rs} , existem três possibilidades:

1) $\{i, j\} \cap \{r, s\} = \emptyset$. Nesse caso a sequência consiste apenas de α_{rs} pois $\alpha_{rs} + \alpha_{ij}$ e $\alpha_{rs} - \alpha_{ij}$ não são raízes, já que esses funcionais não são da forma $\lambda_a - \lambda_b$. Além disso, a expressão acima mostra que o número de Killing associado às raízes se anula.

2) $\{i, j\} \cap \{r, s\}$ tem apenas um elemento. Assim apenas uma das parcelas não se anula na soma que fornece o número de Killing e daí que

$$\frac{2\langle \alpha_{ij}, \alpha_{rs} \rangle}{\langle \alpha_{ij}, \alpha_{ij} \rangle} = \pm 1$$

e a sequência é formada por α_{rs} e $\alpha_{rs} + \alpha_{ij}$ ou $\alpha_{rs} - \alpha_{ij}$, pois são os únicos funcionais possíveis da forma $\lambda_a - \lambda_b$.

3) $\{i, j\} = \{r, s\}$. Então $\alpha_{ij} = \pm \alpha_{rs}$, e assim a sequência é formada por $\pm \alpha_{ij}$ e 0.

Das raízes α_{ij} podemos escolher o conjunto

$$\Pi = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{n-1,n}\}$$

como o sistema simples de raízes, já que para $i < j$,

$$\alpha_{ij} = \alpha_{i,i+1} + \dots + \alpha_{j-1,j}. \quad (\text{B.6})$$

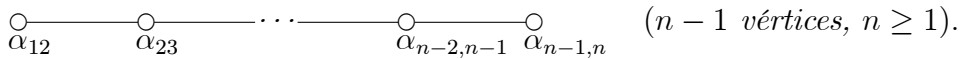
Portanto, como $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$, todas as raízes podem ser escritas como combinação linear com coeficientes inteiros todos positivos ou todos negativos. O número de elementos de Π coincide com a dimensão de \mathfrak{h} e Π gera $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$. A equação B.6 nos mostra também que as raízes de altura k são $\alpha_{i,i+k}$ com i variando entre 1 e $n - k$.

Tomando os números de Killing associados a esse sistema simples de raízes temos a seguinte matriz de Cartan associada

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

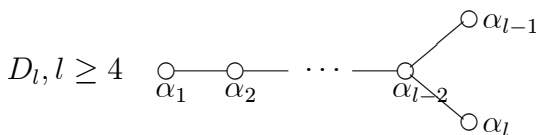
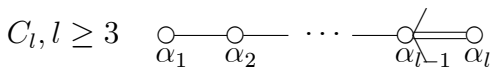
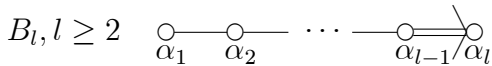
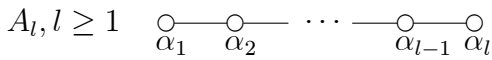
pois $\langle \alpha_{i,i+1}, \alpha_{i+1,i+2} \rangle = -1$ e os outros produtos entre as raízes simples se anulam.

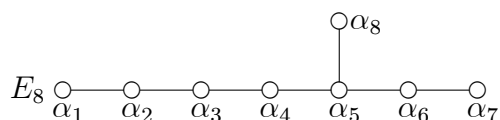
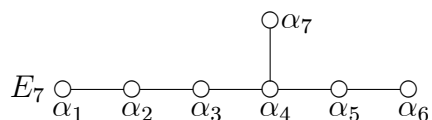
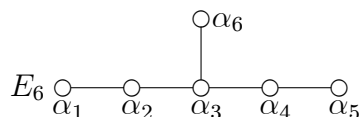
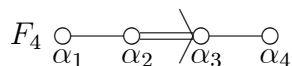
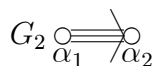
Finalmente, o diagrama de Dynkin definido pela matriz de Cartan de $\mathfrak{sl}(n)$ é



Nesta seção mostramos a correspondência entre as álgebras de Lie semisimples e os diagramas de Dynkin. Porém, em [18] é possível encontrar todos os diagramas de Dynkin possíveis e a classificação das álgebras semisimples de dimensão finita, sobre corpos algebricamente fechados, por esses diagramas. Um diagrama qualquer é sempre uma união disjunta de diagramas conexos, assim colocaremos a seguir os possíveis diagramas de Dynkin conexos.

De acordo com o Teorema 7.9 de [18], os diagramas de Dynkin conexos são:





Cada um desses diagramas correspondem a uma álgebra de Lie simples. Essa correspondência pode ser encontrada no capítulo 8 de [18]. Os diagramas A_l , B_l , C_l e D_l estão associados à álgebras concretas de matrizes, conhecidas como álgebras clássicas. Já os demais diagramas estão associados às chamadas álgebras excepcionais.

No capítulo 9 de [18] os sistemas simples de raízes de uma subálgebra de Cartan são estudados com mais detalhes. Pode ser encontrado aí, uma teoria sobre os grupos de Weyl, que é o grupo de transformações lineares da subálgebra de Cartan, gerado pelas reflexões definidas pelas raízes. Com essa teoria é possível estudar uma situação um pouco mais geral que a requerida para as álgebras semisimples sobre corpos algebricamente fechados, como é o caso das álgebras semisimples reais.

No segundo capítulo precisamos saber a ordem do grupo de Weyl W das álgebras clássicas e das álgebras excepcionais. Colocaremos a seguir uma tabela que indica a dimensão dessas álgebras e a ordem do grupo de Weyl que denotaremos por $|W|$. Como essas álgebras estão associadas com os diagramas de Dynkin acima, indicaremos as álgebras pelo tipo de diagrama associado. Os cálculos da dimensão, quanto as ordens do grupo de Weyl

dessas álgebras, podem ser encontrados em [18].

Tipo	dim	$ W $
A_l	$l(l+2)$	$(l+1)!$
B_l	$l(2l+1)$	$2^l l!$
C_l	$l(2l+1)$	$2^l l!$
D_l	$l(2l-1)$	$2^{l-1} l!$
G_2	14	12
F_4	52	1.152
E_6	78	51.840
E_7	133	2.903.040
E_8	248	696.729.600

Álgebras de Lie semisimples reais e variedades flag.

Neste apêndice, apresentamos um esboço sobre o conteúdo básico da teoria de Lie semisimples real e definimos o conceito de variedade "flag". Os resultados e afirmações que enunciamos podem ser conferidos com todos os detalhes nos trabalhos de Braga Barros-San Martin [6] e [7], Patrão [14] e San Martin [17]. Observamos também que as definições e objetos relacionados aos conceitos de álgebra de Lie e de grupo de Lie podem ser consultadas nos textos de San Martin [18] e [19].

C.1 Fundamentos da teoria de Lie semisimples real

Seja G um grupo de Lie real conexo e de centro finito cuja álgebra de Lie \mathfrak{g} é semisimples. Denota-se por $Aut(\mathfrak{g})$ o grupo dos automorfismos de \mathfrak{g} , e por $Int(\mathfrak{g})$ o subgrupo gerado pelas exponenciais das derivações internas de \mathfrak{g} . Visto que \mathfrak{g} é semisimples, então, $Int(\mathfrak{g})$ é a componente conexa da identidade de $Aut(\mathfrak{g})$.

Consideremos a representação $I : G \rightarrow Int(G)$ dada por $I(g) = C_g$, onde C_g é a conjugação por g em G , para todo $g \in G$. Denotando por \exp a aplicação exponencial de \mathfrak{g} em G e por e o elemento neutro de G , temos que

$$C_g(\exp(X)) = \exp(d(C_g)_e(X))$$

para todo $g \in G$ e $X \in \mathfrak{g}$. Para a aplicação adjunta $Ad : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ dada por $Ad(g) = d(C_g)_e$, temos a igualdade

$$\exp(Ad(g)(X)) = C_g(\exp(X)) = g \exp(X) g^{-1}$$

para todo $g \in G$. Então, Ad é uma aplicação diferenciável cuja diferencial no elemento neutro de G coincide com a aplicação adjunta $ad : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ da álgebra de Lie \mathfrak{g} . Além

disso, como $\text{Ker}(\text{Ad}) = Z(G)$, onde $Z(G)$ é o centro de G , temos que a aplicação induzida $\overline{\text{Ad}} : G/Z(G) \rightarrow \text{Ad}(G)$ é um isomorfismo analítico, e $\text{Ad}(G)$ é chamado de **grupo adjunto**.

Assim, para todo $X \in \mathfrak{g}$, vale a igualdade

$$\text{Ad}(\exp(X)) = e^{\text{ad}(X)}$$

donde segue que $\text{Ad}(G) = \text{Int}(\mathfrak{g})$, pois G é conexo. Contudo, $\text{Ad}(G)$ é um subgrupo fechado de $GL(\mathfrak{g})$.

Uma **involução de Cartan** é um automorfismo involutivo θ ($\theta^2 = id$) de \mathfrak{g} tal que a seguinte forma bilinear é um produto interno na álgebra

$$\langle X, Y \rangle_\theta = -\langle X, \theta(Y) \rangle$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a forma de Cartan-Killing de \mathfrak{g} . O fato de \mathfrak{g} ser semisimples implica que existe uma única involução de Cartan a menos de conjugação por elementos do grupo adjunto $\text{Ad}(G)$. Então, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, onde

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} : \theta(X) = X\} \quad \text{e} \quad \mathfrak{s} = \{X \in \mathfrak{g} : \theta(X) = -X\}$$

são ortogonais em relação à $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ e à forma de Cartan Killing. Esta decomposição de \mathfrak{g} é chamada de **decomposição de Cartan** associada a uma involução de Cartan θ . O subgrupo de Lie conexo K gerado por $\exp(\mathfrak{k})$ é um subgrupo compacto de G . Na verdade, isto é equivalente ao fato do centro de G ser finito.

C.1.1 Sistema de raízes e decomposição de Iwasawa

Agora, a menos de conjugação por elementos de $\text{Ad}(K)$, é garantida a existência e unicidade de uma subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$. O par (θ, \mathfrak{a}) é chamado de par admissível de \mathfrak{g} . Chamamos de **sistema de raízes** do par admissível (θ, \mathfrak{a}) o conjunto Δ dos funcionais lineares (não nulos) $\alpha : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\alpha(H)$ são autovalores associados à autovetores de $\text{ad}(H)$ ($H \in \mathfrak{a}$). O espaço associado a uma raiz $\alpha \in \Delta$ é dado pelo subespaço

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \text{ad}(H)(X) = \alpha(H)(X), \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}.$$

Observemos que $\theta(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Denotando

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{z}_\mathfrak{k}(\mathfrak{a}) = \{X \in \mathfrak{k} : \text{ad}(X)|_{\mathfrak{a}} = 0\}$$

o centralizador de \mathfrak{a} em \mathfrak{k} , temos que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

é uma soma direta $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\theta}$ -ortogonal. Dado $g \in G$ e $\phi = \text{Ad}(g)$, temos que $(\phi\theta\phi^{-1}, \phi(\mathfrak{a}))$ é um par admissível cujo sistema de raízes associado é dado por

$$\phi^*\Delta = \{\phi^*\alpha = \alpha \circ \phi^{-1} \mid_{\mathfrak{a}} : \alpha \in \Delta\}.$$

Assim, $\mathfrak{g}_{\phi^*\alpha} = \phi(\mathfrak{g}_{\alpha})$ e

$$\mathfrak{g} = \phi(\mathfrak{m}) \oplus \phi(\mathfrak{a}) \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \phi(\mathfrak{g}_{\alpha}).$$

Definição C.1 *As câmaras de Weyl associadas a um par admissível (θ, \mathfrak{a}) são as componentes conexas do conjunto $\{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) \neq 0, \text{ para todo } \alpha \in \Delta\}$.*

Escolhendo-se uma câmara de Weyl como a **câmara positiva** \mathfrak{a}^+ , definimos o conjunto das **raízes positivas** associado à \mathfrak{a}^+ como

$$\Delta^+ = \{\alpha \in \Delta : \alpha|_{\mathfrak{a}^+} > 0\}.$$

Então, \mathfrak{a}^+ gera \mathfrak{a} . Denotamos os subespaços

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{\alpha} \quad \text{e} \quad \mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Então,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

onde \mathfrak{n} é uma subálgebra nilpotente e $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é uma subálgebra solúvel. Esta decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é denominada **decomposição de Iwasawa** de \mathfrak{g} associada ao terno admissível $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$. Contudo, a aplicação $(k, a, n) \mapsto kan$ define um difeomorfismo entre $K \times A \times N$ e G , onde $K = \langle \exp(\mathfrak{k}) \rangle$, $A = \langle \exp(\mathfrak{a}) \rangle$ e $N = \langle \exp(\mathfrak{n}) \rangle$. Assim,

$$G = KAN$$

é denominada decomposição de Iwasawa de G associada ao terno $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$.

C.1.2 Grupo de Weyl

Dado $g \in G$ e um terno admissível $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$, temos que as câmaras de Weyl associadas ao par $(\phi\theta\phi^{-1}, \phi(\mathfrak{a}))$ são imagem por $\phi = \text{Ad}(g)$ das câmaras de Weyl associadas ao par (θ, \mathfrak{a}) , e $\phi^*\Delta^+$ é o conjunto das raízes positivas associado à $\phi(\mathfrak{a}^+)$. Então, $\phi(\mathfrak{a}^+)$ gera $\phi(\mathfrak{a})$. A menos de conjugação por automorfismos internos, existe uma única decomposição de Iwasawa de \mathfrak{g} . Contudo, se $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é a decomposição de Iwasawa associada ao terno $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$, então,

$$\mathfrak{g} = \phi(\mathfrak{k}) \oplus \phi(\mathfrak{a}) \oplus \phi(\mathfrak{n})$$

é a decomposição de Iwasawa associada ao terno $(\phi\theta\phi^{-1}, \phi(\mathfrak{a}), \phi(\mathfrak{a}^+))$.

Os objetos associados a um terno admissível $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ são indicados com a justaposição de $\lambda = \exp(\mathfrak{a}^+)$. Neste caso, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta = \langle \cdot, \cdot \rangle(\lambda)$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\lambda)$, $\mathfrak{a}^+ = \mathfrak{a}^+(\lambda)$, $\Delta = \Delta(\lambda)$ e $\Delta^+ = \Delta^+(\lambda)$. Para cada $\alpha \in \Delta(\lambda)$, definimos $H_\alpha \in \mathfrak{a}(\lambda)$ como

$$\langle H_\alpha, H \rangle(\lambda) = \alpha(H)$$

para todo $H \in \mathfrak{a}(\lambda)$. A **reflexão** $\langle \cdot, \cdot \rangle(\lambda)$ -ortogonal $r_\alpha : \mathfrak{a}(\lambda) \rightarrow \mathfrak{a}(\lambda)$ em relação à H_α é definida por

$$r_\alpha(H) = H - 2 \frac{\langle H_\alpha, H \rangle(\lambda)}{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle(\lambda)} H_\alpha.$$

Então, $r_\alpha(H_\alpha) = -H_\alpha$. Assim, o conjunto

$$\Delta_{\mathfrak{a}(\lambda)} = \{H_\alpha \in \mathfrak{a} : \alpha \in \Delta(\lambda)\}$$

é um **sistema de co-raízes**, isto é:

1. $\Delta_{\mathfrak{a}(\lambda)}$ é finito, gera \mathfrak{a} e não contém 0;
2. Para todo $H_\alpha \in \Delta_{\mathfrak{a}(\lambda)}$, existe uma reflexão r_α em relação a H_α tal que $r_\alpha(\Delta_{\mathfrak{a}(\lambda)}) = \Delta_{\mathfrak{a}(\lambda)}$;
3. Para todos $H_\alpha, H_\beta \in \Delta_{\mathfrak{a}(\lambda)}$, $r_\alpha(H_\beta) - H_\beta$ é um múltiplo inteiro de H_α .

Definição C.2 *Seja $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ um terno admissível de \mathfrak{g} . O grupo de Weyl $W(\lambda)$ é o grupo gerado pelo conjunto das reflexões $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta(\lambda)$ -ortogonais $\{r_\alpha : \alpha \in \Delta(\lambda)\}$.*

Visto que $\Delta_{\mathfrak{a}(\lambda)}$ é finito, temos que $W(\lambda)$ é finito.

Na verdade, o grupo de Weyl depende somente do par admissível (θ, \mathfrak{a}) . Além disso, ele pode ser identificado com o grupo $\{\text{Ad}(k) |_{\mathfrak{a}(\lambda)} : k \in M^*\}$, onde

$$M^* = N_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K : \text{Ad}(k)(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\}$$

é o normalizador de \mathfrak{a} em K . Assim, se

$$M = Z_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K : \text{Ad}(k) |_{\mathfrak{a}} = id_{\mathfrak{a}}\}$$

é o centralizador de \mathfrak{a} em K , temos que $W(\lambda)$ é isomorfo ao grupo quociente M^*/M .

C.1.3 Sistema simples de raízes

Seja $\Pi(\lambda)$ o conjunto das raízes positivas que não podem ser escritas como uma combinação linear de dois termos não nulos. Então, $\Pi(\lambda)$ é chamado de **sistema simples de raízes** associado ao terno $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$. Dado $\Theta \subset \Pi(\lambda)$, define-se

$$\langle \Theta \rangle^+ = \langle \Theta \rangle \cap \Delta^+(\lambda).$$

A subálgebra semisimples $\mathfrak{g}(\Theta)$ de tipo Θ é a subálgebra gerada por

$$\mathfrak{n}(\Theta) = \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{\alpha} \quad \text{e} \quad \mathfrak{n}^-(\Theta) = \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Então, $\theta(\mathfrak{g}(\Theta)) \subset \mathfrak{g}(\Theta)$, e a decomposição de Cartan de $\mathfrak{g}(\Theta)$ associada à $\theta_{\Theta} = \theta |_{\mathfrak{g}(\Theta)}$ é dada por $\mathfrak{g}(\Theta) = \mathfrak{k}(\Theta) \oplus \mathfrak{s}(\Theta)$, onde $\mathfrak{k}(\Theta) = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{k}$ e $\mathfrak{s}(\Theta) = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{s}$. Além disso, temos que $\mathfrak{a}(\Theta) = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{a}$ é abeliana maximal em $\mathfrak{s}(\Theta)$. O sistema de raízes do par admissível $(\theta_{\Theta}, \mathfrak{a}(\Theta))$ é dado por

$$\Delta(\Theta) = \{\alpha_{\Theta} = \alpha |_{\mathfrak{a}(\Theta)} : \alpha \in \langle \Theta \rangle\}.$$

Assim, $(\theta_{\Theta}, \mathfrak{a}(\Theta), \mathfrak{a}(\Theta)^+)$ é um terno admissível de $\mathfrak{g}(\Theta)$, onde

$$\mathfrak{a}(\Theta)^+ = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \{H \in \mathfrak{a}(\lambda) : \alpha(H) > 0, \text{ para todo } \alpha \in \langle \Theta \rangle^+\}.$$

O conjunto das raízes positivas associadas a $\mathfrak{a}(\Theta)^+$ é dado por

$$\Delta(\Theta)^+ = \{\alpha_{\Theta} \in \Delta(\Theta) : \alpha \in \langle \Theta \rangle^+\}$$

e o sistema simples de raízes associado ao terno $(\theta_{\Theta}, \mathfrak{a}(\Theta), \mathfrak{a}(\Theta)^+)$ é dado por

$$\Pi(\Theta) = \{\alpha_{\Theta} \in \Delta(\Theta)^+ : \alpha \in \Theta\}.$$

O grupo de Weyl associado ao par $(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta))$ é dado por

$$W(\Theta) = \{r_{\alpha_\Theta} = r_\alpha |_{\mathfrak{a}(\Theta)} : \alpha \in \langle \Theta \rangle\}.$$

Por fim,

$$\mathfrak{g}(\Theta) = \mathfrak{k}(\Theta) \oplus \mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{n}(\Theta)$$

é a decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{g}(\Theta)$ associada ao terno $(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta), \mathfrak{a}(\Theta)^+)$. O subgrupo semisimples $G(\Theta)$ de tipo Θ é o subgrupo conexo gerado por $\exp(\mathfrak{g}(\Theta))$. Assim,

$$G(\Theta) = K(\Theta) A(\Theta) N(\Theta)$$

é a decomposição de Iwasawa de $G(\Theta)$ associada ao terno $(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta), \mathfrak{a}(\Theta)^+)$, onde $K(\Theta) = \langle \exp(\mathfrak{k}(\Theta)) \rangle$, $A(\Theta) = \langle \exp(\mathfrak{a}(\Theta)) \rangle$ e $N(\Theta) = \langle \exp(\mathfrak{n}(\Theta)) \rangle$.

Definição C.3 *Seja $\Theta \subset \Pi(\lambda)$. O subgrupo W_Θ de $W(\lambda)$ gerado pelo conjunto das reflexões $\{r_\alpha : \alpha \in \Theta\}$ é denominado **parabólico tipo Θ** .*

C.1.4 Subálgebra e subgrupo parabólicos

Agora, dado um terno admissível $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$, denominamos de **subálgebra parabólica minimal** de \mathfrak{g} associada ao terno $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ a subálgebra

$$\mathfrak{p}(\lambda) = \mathfrak{m}(\lambda) \oplus \mathfrak{a}(\lambda) \oplus \mathfrak{n}(\lambda).$$

Se $\Theta \subset \Pi(\lambda)$, então,

$$\mathfrak{p}_\Theta(\lambda) = \mathfrak{p}(\lambda) \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta)$$

é chamada de **subálgebra parabólica** de tipo Θ . O conjunto das subálgebras parabólicas associadas ao terno $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ é único a menos de conjugação por automorfismos internos. Dado $g \in G$ e $\Theta \subset \Pi(\lambda)$, temos que $\phi(\mathfrak{p}_\Theta(\lambda))$ é a subálgebra parabólica de tipo $\phi^*\Theta$ associada ao terno $(\phi\theta\phi^{-1}, \phi(\mathfrak{a}), \phi(\mathfrak{a}^+))$.

O **subgrupo parabólico** de tipo Θ associado ao terno $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ é dado por

$$P_\Theta(\lambda) = N_G(\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)) = \{g \in G : \text{Ad}(g)(\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)) = \mathfrak{p}_\Theta(\lambda)\}$$

o normalizador de $\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$ em G . Se $\mathfrak{a}_\Theta = \mathfrak{a} \ominus \mathfrak{a}(\Theta)$ é o complemento $\langle \cdot, \cdot \rangle(\lambda)$ -ortogonal de $\mathfrak{a}(\Theta)$ em \mathfrak{a} e \mathfrak{k}_Θ é o centralizador de \mathfrak{a}_Θ em \mathfrak{k} , então,

$$\mathfrak{p}_\Theta(\lambda) = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

é a decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$. Se K_Θ é o centralizador de \mathfrak{a}_Θ em K , ou seja,

$$K_\Theta = Z_K(\mathfrak{a}_\Theta) = \{k \in K : \text{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}_\Theta} = \text{id}_{\mathfrak{a}_\Theta}\}$$

então

$$P_\Theta(\lambda) = K_\Theta AN$$

é a decomposição de Iwasawa de $P_\Theta(\lambda)$. Contudo, $P_\Theta(\lambda)$ é autonormalizador e sua álgebra de Lie é $\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$.

C.2 Objetos canônicos e variedades flag

Para definir uma variedade flag, consideramos o conjunto das **câmaras de Weyl** em G dado por

$$\mathcal{C} = \{\exp(\mathfrak{a}^+) : (\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+) \text{ terno admissível}\}.$$

Se dois ternos admissíveis $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ e $(\tilde{\theta}, \tilde{\mathfrak{a}}, \tilde{\mathfrak{a}}^+)$ de \mathfrak{g} são tais que $\mathfrak{a}^+ = \tilde{\mathfrak{a}}^+$, então, eles determinam os mesmos objetos como grupo de Weyl, sistema de raízes e sistema simples de raízes, subálgebra parabólica e subgrupo parabólico, decomposição de Iwasawa destes últimos e o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ quando restrito a \mathfrak{a} .

Considerando a ação adjunta de G na álgebra de Lie \mathfrak{g} , para cada $g \in G$ e $X \in \mathfrak{g}$, denotamos $gX = \text{Ad}(g)(X)$.

Para todo $\lambda = \exp(\mathfrak{a}^+) \in \mathcal{C}$ e $g \in G$, temos que

1. $W(g\lambda g^{-1}) = gW(\lambda)g^{-1}$, onde $g\lambda g^{-1} = \exp(\text{Ad}(g)(\mathfrak{a}^+))$, e $gw g^{-1} = \text{Ad}(g) \circ w \circ \text{Ad}(g^{-1})$, para todo $w \in W(\lambda)$.
2. $\mathfrak{a}(g\lambda g^{-1}) = g\mathfrak{a}(\lambda)$, e o mesmo ocorre com os objetos $\mathfrak{m}(\lambda)$, $\mathfrak{n}(\lambda)$, $\Delta(\lambda)$, $\Pi(\lambda)$, $\Delta_{\mathfrak{a}(\lambda)}$ e $\Pi_{\mathfrak{a}(\lambda)}$.
3. $N(g\lambda g^{-1}) = gN(\lambda)g^{-1}$, e o mesmo ocorre com A e M .
4. $\mathfrak{p}_{g\Theta}(g\lambda g^{-1}) = g\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$, para cada $\Theta \subset \Pi(\lambda)$.
5. $P_{g\Theta}(g\lambda g^{-1}) = gP_\Theta(\lambda)g^{-1}$, para cada $\Theta \subset \Pi(\lambda)$.
6. $\langle gH, g\tilde{H} \rangle(g\lambda g^{-1}) = \langle H, \tilde{H} \rangle(\lambda)$, para todos $H, \tilde{H} \in \mathfrak{a}(\lambda)$.

Além disso, se $\lambda, \mu \in \mathcal{C}$, então, existe $g \in G$ tal que $\mu = g\lambda g^{-1}$. Ou seja, G age transitivamente por conjugação no conjunto das câmaras de Weyl em G .

Agora, G age no conjunto

$$\mathcal{W} = \{(\lambda, w) : \lambda \in \mathcal{C} \text{ e } w \in W(\lambda)\}$$

definindo

$$g(\lambda, w) = (g\lambda g^{-1}, gw g^{-1})$$

para todo $g \in G$ e $(\lambda, w) \in \mathcal{W}$. Com isto, temos a seguinte definição.

Definição C.4 *O grupo de Weyl canônico W de \mathfrak{g} é definido pelo espaço das órbitas de G em \mathcal{W} .*

Denotamos a órbita de (λ, w) por $[(\lambda, w)]$, para todo $(\lambda, w) \in \mathcal{W}$.

Proposição C.5 *Para cada $\lambda \in \mathcal{C}$ e $w \in W$, existe um único $w(\lambda) \in W(\lambda)$ tal que $w = [(\lambda, w(\lambda))]$. Fixando λ , a aplicação $w \mapsto w(\lambda)$ define um isomorfismo entre o grupo de Weyl $W(\lambda)$ e o grupo de Weyl canônico W , onde, dados $w, \tilde{w} \in W$, tem-se*

$$w\tilde{w} = [(\lambda, w(\lambda)\tilde{w}(\lambda))]$$

e

$$w^{-1} = [(\lambda, w(\lambda)^{-1})].$$

Além disso, para cada $g \in G$ e $\lambda \in \mathcal{C}$, temos que $w(g\lambda g^{-1}) = gw(\lambda)g^{-1}$.

O grupo G também age no conjunto

$$\mathcal{A} = \{(\lambda, H) : \lambda \in \mathcal{C} \text{ e } H \in \mathfrak{a}(\lambda)\}$$

definindo

$$g(\lambda, H) = (g\lambda g^{-1}, gH)$$

para todo $g \in G$ e $(\lambda, H) \in \mathcal{A}$. O **abeliano maximal canônico** de \mathfrak{g} é então definido pelo espaço das órbitas de G em \mathcal{A} e denotado por \mathfrak{a} .

Proposição C.6 *Para cada $\lambda \in \mathcal{C}$ e $H \in \mathfrak{a}$, existe um único $H(\lambda) \in \mathfrak{a}(\lambda)$ tal que $H = [(\lambda, H(\lambda))]$. Fixando λ , a aplicação $H \mapsto H(\lambda)$ é uma isometria linear entre*

os espaço de Hilbert $(\mathfrak{a}(\lambda), \langle \cdot, \cdot \rangle(\lambda))$ e o espaço de Hilbert $(\mathfrak{a}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, onde, para todos $H, \tilde{H} \in \mathfrak{a}$ e $c \in \mathbb{R}$, tem-se

$$H + \tilde{H} = \left[\left(\lambda, H(\lambda) + \tilde{H}(\lambda) \right) \right]$$

e

$$cH = \left[\left(\lambda, cH(\lambda) \right) \right]$$

e o produto interno em \mathfrak{a} é definido por

$$\langle H, \tilde{H} \rangle = \left\langle H(\lambda), \tilde{H}(\lambda) \right\rangle(\lambda).$$

Além disso, para todo $g \in G$, temos que $H(g\lambda g^{-1}) = gH(\lambda)$.

Lembrando que

$$\Delta_{\mathfrak{a}}(\lambda) = \{H_{\alpha}(\lambda) \in \mathfrak{a}(\lambda) : \alpha \in \Delta(\lambda)\} \quad \text{e} \quad \Pi_{\mathfrak{a}}(\lambda) = \{H_{\alpha}(\lambda) \in \mathfrak{a}(\lambda) : \alpha \in \Pi(\lambda)\}$$

temos ainda que os conjuntos

$$\mathcal{P} = \{(\lambda, H_{\alpha}(\lambda)) : \lambda \in \mathcal{C} \text{ e } H_{\alpha}(\lambda) \in \Delta_{\mathfrak{a}}(\lambda)\}$$

e

$$\mathcal{S} = \{(\lambda, H_{\alpha}(\lambda)) : \lambda \in \mathcal{C} \text{ e } H_{\alpha}(\lambda) \in \Pi_{\mathfrak{a}}(\lambda)\}$$

são invariantes pela ação G em \mathcal{A} . O espaço das órbitas de G em \mathcal{P} é denominado de **sistema de co-raízes canônicas** de \mathfrak{g} e é denotado por $\Delta_{\mathfrak{a}}$. Então, $\Delta_{\mathfrak{a}}$ é um sistema abstrato de raízes de \mathfrak{a} tal que W é o seu grupo de Weyl associado. O espaço das órbitas de G em \mathcal{S} é denominado de **sistema simples de co-raízes canônicas** de \mathfrak{g} e é denotado por $\Pi_{\mathfrak{a}}$. A restrição do isomorfismo da Proposição C.6 aos conjuntos $\Delta_{\mathfrak{a}}$ e $\Pi_{\mathfrak{a}}$ é uma bijeção entre estes e $\Delta_{\mathfrak{a}}(\lambda)$ e $\Pi_{\mathfrak{a}}(\lambda)$, respectivamente, para todo $\lambda \in \mathcal{C}$.

Agora, se \mathfrak{a}^* denota o dual de \mathfrak{a} , então, a aplicação $H \mapsto \langle H, \cdot \rangle$ define um isomorfismo entre \mathfrak{a} e \mathfrak{a}^* . Podemos então definir

$$\Delta = \{\alpha = \langle H_{\alpha}, \cdot \rangle : H_{\alpha} \in \Delta_{\mathfrak{a}}\}$$

denominado de **sistema de raízes canônico** de \mathfrak{g} , e

$$\Pi = \{\alpha \in \Delta : H_{\alpha} \in \Pi_{\mathfrak{a}}\}$$

denominado de **sistema simples de raízes canônico** de \mathfrak{g} .

Então, o grupo de Weyl canônico é gerado pelo conjunto das reflexões $\{r_\alpha : \alpha \in \Pi\}$.

Fixando $\lambda \in \mathcal{C}$, a aplicação $\alpha \mapsto \alpha(\lambda) = \langle H_\alpha(\lambda), \cdot \rangle(\lambda)$ define uma bijeção entre Δ e $\Delta(\lambda)$ e entre Π e $\Pi(\lambda)$. Além disso, $\alpha(g\lambda g^{-1}) = \text{Ad}(g^{-1})^* \alpha(\lambda) = g\alpha(\lambda)$, para todo $g \in G$. Se $\Theta \subset \Pi$, então, $\Theta(\lambda) \subset \Pi(\lambda)$ é a imagem de Θ pela aplicação $\alpha \mapsto \alpha(\lambda)$.

Enfim, seja $\Theta \subset \Pi$. Então, a **subálgebra** $\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$ **parabólica** de tipo Θ determinada por λ é definida como a subálgebra parabólica $\mathfrak{p}_{\Theta(\lambda)}(\lambda)$, e o **subgrupo** $P_\Theta(\lambda)$ **parabólico** de tipo Θ é $P_{\Theta(\lambda)}(\lambda)$.

Definição C.7 *O flag de tipo Θ é o conjunto*

$$\mathbb{B}_\Theta = \{\mathfrak{p}_\Theta(\lambda) : \lambda \in \mathcal{C}\}$$

*de todas as subálgebras parabólicas de tipo Θ . Quando $\Theta = \emptyset$ o flag $\mathbb{B} = \mathbb{B}_\emptyset$ é denominado **flag maximal** de \mathfrak{g} .*

Para todos $g \in G$ e $\mathfrak{p}_\Theta(\lambda) \in \mathbb{B}_\Theta$, temos que

$$g\mathfrak{p}_\Theta(\lambda) = \mathfrak{p}_{g\Theta(\lambda)}(g\lambda g^{-1}) = \mathfrak{p}_{\Theta(g\lambda g^{-1})}(g\lambda g^{-1}) = \mathfrak{p}_\Theta(g\lambda g^{-1}).$$

Esta ação adjunta de G no flag \mathbb{B}_Θ é transitiva, pois para todos $\lambda, \mu \in \mathcal{C}$, existe $g \in G$ tal que $g\lambda g^{-1} = \mu$. Além disso, o subgrupo parabólico $P_\Theta(\lambda)$ é o subgrupo de isotropia da subálgebra parabólica $\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$. Com isto, a projeção canônica $\mathbb{B}_\Theta \rightarrow \mathbb{B}_\Theta/G$ é um fibrado diferenciável e $G/P_\Theta(\lambda)$ é difeomorfo a órbita $G\mathfrak{p}_\Theta(\lambda) = \mathbb{B}_\Theta$, onde o difeomorfismo é dado por $\phi_\Theta(gP_\Theta(\lambda)) = g\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$. Portanto, \mathbb{B}_Θ é uma variedade diferenciável compacta difeomorfa a variedade homogênea $G/P_\Theta(\lambda)$.

Agora, dado $w \in W$ e $\lambda \in \mathcal{C}$, existe $k \in M^*(\lambda) = N_K(\mathfrak{a}(\lambda))$ tal que $w(\lambda)$ é identificado com a classe $kM(\lambda) = kZ_K(\mathfrak{a}(\lambda))$. Para qualquer $m \in M(\lambda)$ e $H \in \mathfrak{a}(\lambda)^+$, temos que $km\lambda(km)^{-1} = k\lambda k^{-1}$. Assim, faz sentido as notações $w(\lambda)\lambda w(\lambda)^{-1} = k\lambda k^{-1}$ e $w(\lambda)\mathfrak{p}_\Theta(\lambda) = \mathfrak{p}_\Theta(k\lambda k^{-1})$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Arnold, L., Kliemann W. e Oeljeklaus E.: *Lyapunov exponents of linear stochastic systems*. Em *Lyapunov Exponents: Proceedings of a Workshop in Bremen* (L. Arnold and V. Wihstutz, eds.), *Lectures Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, vol 1186, p. 85-125, 1986.
- [2] Bourbaki, N.: *Groupes et Algèbres de Lie, Chapitre I: Algèbres de Lie*. Hermann, Paris, 1960.
- [3] Braga Barros, C.J.: *Conjuntos Controláveis e Conjuntos Controláveis por Cadeias para Ações de Semigrupos*. Tese. Unicamp, 1995.
- [4] Braga Barros, C.J.: *On the Number of Control Sets on Flag Manifolds of the Real Simple Lie Groups*. *Journal of Lie Theory*, vol 8, p. 393-397, 1998.
- [5] Braga Barros, C.J., Santana A.: *Estruturas Algébricas com ênfase em elementos da Teoria de Lie*. A aparecer em editora da Universidade Estadual de Maringá.
- [6] Braga Barros, C.J. e San Martin, L.A.B.: *Chain transitive sets for flows on flag bundles*. *Forum Math*. To appear.
- [7] Braga Barros, C.J. e San Martin, L.A.B.: *On the action of semigroups in fiber bundles*. *Matemática Contemporânea*, vol 13, p. 1-19, 1997.
- [8] Carmo M. P.: *Notas de um Curso de Grupos de Lie*. IMPA, Rio de Janeiro, 1974.
- [9] Helgason, S.: *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Academic Press, New York, 1978.
- [10] Hilgert, J., Hofmann, K.H. e Lawson, J.D.: *Lie groups, convex cones, and semigroups*. Clarendon Press, Oxford, 1989.
- [11] Jacobson, N.: *Lie Algebras*. John Wiley & Sons, INC, 1962.

- [12] Lima, E. L.: *Varietades Diferenciáveis*. IMPA, Rio de Janeiro, 1973
- [13] Onishchik, A. L. e Vinberg E. B.: *Lie groups and algebric groups*. Springer-Verlag, 1990.
- [14] Patrão, M.M.A.: *Semifluxos em fibrados flag e seus semigrupos de sobreamento*. Tese de doutorado. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2006.
- [15] Patrão, M. e San Martin, L.A.B.: *Morse decomposition of semiflows on fiber bundles*. 2005.
- [16] San Martin, L. A. B.: *Control sets and semigroups in semi-simple Lie groups*. Em *Semigroups in algebra, geometry and analysis*. Gruyter Verlag, 1994.
- [17] San Martin, Luiz A. B.: *Invariant control sets on flag manifolds*. *Math. of Control, Signals and Systems*, n. 6, p. 41-61, 1993.
- [18] San Martin, Luiz A. B.: *Álgebras de Lie*. Campinas, SP. Editora da Unicamp, 1999.
- [19] San Martin, Luiz A. B.: <http://www.ime.unicamp.br/~smartin/cursos/grupolie-2006/>.
- [20] San Martin, Luiz A. B., Tonelli, Pedro A.: *Semigroup actions on homogeneous spaces*. *Semigroup Forum*, vol. 50, p. 59-88, 1995.
- [21] Souza, J. A.: *Sistemas Dinâmicos, Sistemas de Controle, e Ações de Semigrupos*. Tese. Universidade Estadual de Maringá, 2005.
- [22] Tonelli, P.A.: *Control sets on homogeneous spaces*. Tese. Universidade de Bremen, 1991.
- [23] Varadarajan, V.S.: *Harmonic analysis on real reductive groups*. LNM-Springer, 576, 1977.
- [24] Warner, F.W.: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Scottforesman and Co., S. Francisco, 1971.
- [25] Warner, G.: *Harmonic anlalysis on semi-simple Lie groups*. Springer-Verlag, 1972.