UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

NAYENE MICHELE PITTA PAIÃO

Conjuntos de Controle e Controlabilidade de Sistemas Bilineares

Maringá

2009

“Que força é esta, eu não sei; tudo o que sei é que existe, e está disponível apenas quando alguém está num estado em que sabe exatamente o que quer, e está totalmente determinado a não desistir até conseguir.”
[Alexander Graham Bell]

Aos que amo.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente à Deus pela Sua presença em minha vida, pela saúde e força para chegar até aqui.

Agradeço também à minha mãe Ozires pela fé, amizade e companhia nas madrugadas de estudo. Ao meu pai José Carlos, o “Paião”, que sempre foi meu maior exemplo de honestidade e perseverança. Aos meus irmãos Juliano, Eudes e Luiza pelo carinho, apoio e incentivo. Ao Juliano Mendes que acompanhou todo o esforço dispensado desde a graduação, perdoando a ausência, sempre incentivando e oferecendo seu amor.

Aos anjos que chamo amigos. Aqueles que mesmo distantes se fazem presentes... Pessoas com quem dividi as alegrias e tristezas da caminhada. Em especial aos amigos Ânderson, Wilian e Rodolfo que me ajudaram a enfrentar as dificuldades e me fizeram acreditar que sempre vale a pena viver. À todas as pessoas que fizeram e fazem parte da minha vida, todos os amigos cujos nomes não foram citados mas que são igualmente importantes.

Aos professores do DMA que contribuíram para minha formação acadêmica e pessoal. Em especial aos professores Valdeni e Carla que se fizeram presentes, oferecendo alegria, preocupação e principalmente a tão preciosa amizade. Também à Professora e grande amiga Valéria Cavalcanti, pessoa maravilhosa que sempre esteve ao nosso lado se mostrando sensível às nossas fraquezas e ajudando de todas as formas possíveis, oferecendo seus conhecimentos, experiência de vida, abraço amigo e seu sorriso contagiante. Também aos professores Marcos e Josiney pela paciência e valiosas sugestões, e aos professores Paolo Piccione e José Braga Barros pela atenção e correções neste trabalho..

Ao Programa de Mestrado, em especial a amiga Lucia, pela atenção e amizade, e também a amiga Silvana pela alegria, bate papos e cafezinhos.

Ao meu grande amigo e orientador Osvaldo, pela excelente orientação, paciência, por acreditar que seria possível a realização deste estudo, além de tornar este trabalho uma agradável experiência sobre a matemática e a vida.

À CAPES pelo tão importante apoio financeiro.

Resumo

Nesse trabalho estudamos o problema da controlabilidade de um sistema bilinear da forma $\dot{x} = Ax + uBx$, onde A e B são matrizes em $sl(n, \mathbb{R})$ satisfazendo as condições de Jurdjevic e Kupka, sendo u um controle real irrestrito. A abordagem do problema será feita via teoria de conjunto de controle para ações de semigrupos em variedades homogêneas compactas e, mais particularmente, em variedades Grassmannianas.

Palavras Chaves: Sistemas de Controle; Grupos de Lie; Controlabilidade; Grassmannianas; Semigrupos.

Abstract

In this work we studied the problem of the controllability bilinear system of the form $\dot{x} = Ax + uBx$, where the A and B are matrices in $sl(n, \mathbb{R})$ satisfying conditions of Jurdjevic and Kupka, and u is the control, real unrestricted. The approach of the problem will be made by theory of control set for action of semigroups in compact homogeneous manifolds and, more particularly, in Grassmannianas manifolds.

Key Words: Control Systems; Lie Groups; Controllability; Grassmannians; Semigroups.

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar a controlabilidade de sistemas de controle bilineares da forma

$$\dot{x} = (A + uB)x \tag{1}$$

onde A e B são matrizes de traço zero e u é um controle real irrestrito.

Este problema está "longe" de ser resolvido e somente soluções parciais vem sendo apresentadas. Por exemplo, em [17] é mostrado que, no caso de matrizes A e B de ordem 2×2, o sistema (1) é controlável se, e somente se, o determinante do colchete $[A,\ B]$ é negativo.

Uma das situações mais gerais onde o problema foi resolvido é quando:

i) A e B são matrizes $n \times n$ de traço zero;

ii) A álgebra de Lie gerada por A e B coincide com $sl(n, \mathbb{R})$;

iii) B é diagonal com autovalores distintos e não nulos;

iv) Se $A = (a_{ij})_{n \times n}$, então $a_{1n}a_{n1} < 0$.

Estas condições são conhecidas como condições de Jurdjevic e Kupka. Na verdade Jurdjevic e Kupka estabeleceram condições de controlabilidade de (1) na situação mais geral de grupos de Lie semisimples que, no caso particular do grupo $Sl(n, \mathbb{R})$ assume a forma acima descrita.

A referência principal deste trabalho é [11], onde San Martin apresenta uma demonstração alternativa dos resultados de Jurdjevic e Kupka, no caso particular $Sl(n, \mathbb{R})$ a partir da teoria dos conjuntos de controle.

A noção de conjuntos de controle para sistemas de controle surge naturalmente quando se deseja determinar certos subconjuntos de uma variedade M, onde um ponto qualquer pode ser atingido a partir de outro por meio de concatenações de trajetórias de um conjunto de campos de vetores sobre a variedade M. Este conceito surgiu na década de 80 nos trabalhos de L. Arnold e W. Kliemann. Nos últimos anos o estudo dos conjuntos de controle em espaços homogêneos vem desempenhando um papel decisivo para o entendimento dos semigrupos de grupos de Lie e este ramo da teoria de Lie teve início com os trabalhos de San Martin em [10].

Este trabalho está organizado como segue:

Os conceitos fundamentais da teoria de Lie são apresentados no primeiro capítulo. Introduzimos o conceito de variedade homogênea, que em nosso caso, o exemplo de maior interesse é um tipo particular de variedade Flag, a variedade Grassmaniana. Devido a importância que o conceito de Grassmanniana possui no trabalho, o Capítulo 2 é dedicado à apresentação das propriedades deste objeto que são essenciais para os nossos objetivos.

A questão central deste trabalho, que é a controlabilidade do sistema bilinear (1) nas condições de Jurdjevik e Kupka aparece no capítulo **??**. Descrevemos o método de abordagem do problema, que consiste em considerar o sistema de controle semelhante a (1) em um grupo de Lie G, que em nosso caso $G = Sl(n, \mathbb{R})$. As trajetórias do sistema em $\mathbb{R}^d$ e do sistema no grupo G se relacionam por meio da ação do grupo G em $\mathbb{R}^d$. O fato crucial é que a controlabilidade do sistema no grupo, implica na controlabilidade do sistema em $\mathbb{R}^d$. E para garantir a controlabilidade no grupo, são fundamentais algumas propriedades dos conjuntos de controle na Grassmanniana.

No Capítulo 5 apresentamos as ferramentas que constituem a essência do método de abordagem do problema da controlabilidade do sistema bilinear (1). Estas ferramentas são os resultados que garantem a controlabilidade do sistema (1) a partir de propriedades dos conjuntos de controle invariantes na Grassmaniana.

O conceito de conjunto de controle surge no estudo da ação de semigrupos de Lie em variedades diferenciáveis. É portanto, parte da teoria de semigrupos, cujos conceitos necessários para o desenvolvimento do trabalho estão no Capítulo 3. São apresentadas propriedades de semigrupos e cones associados a semigrupos que serão necessárias ao longo do trabalho. Em seguida, no Capítulo 4 temos o conceito de conjunto de controle e algumas propriedades básicas.

Capítulo 1

Conceitos preliminares

Neste capítulo são apresentados conceitos básicos para o desenvolvimento deste trabalho, como os conceitos de grupos e álgebras de Lie, aplicação exponencial e variedades homogêneas. Os demais conceitos abordados podem ser consultados em [6] e [9].

1.1 Grupos de Lie e Álgebras de Lie

Nesta seção apresentaremos o conceito de grupos e álgebras de Lie bem como algumas propriedades básicas destes objetos. Começamos definindo grupo e subgrupo de Lie.

Definição 1.1. *Um* grupo de Lie *é uma variedade diferenciável de classe* C^∞ *munida de uma estrutura de grupo abstrato, na qual a aplicação* $G \times G \longrightarrow G$ *dada por* $(\sigma, \tau) \longmapsto \sigma\tau^{-1}$ *é de classe* c^∞.

Definição 1.2. *Dizemos que* (H, φ) *é um* subgrupo de Lie *do grupo de Lie* G *se:*

1. H *é um subgrupo abstrato de* G*;*

2. $\varphi : H \to G$ *é um homomorfismo de grupos abstratos; e*

3. (H, φ) *é uma subvariedade de* G.

O principal exemplo de grupo de Lie é o conjunto $Gl(n, \mathbb{R})$ de todas as matrizes $n \times n$ não singulares.

A estrutura diferenciável de $Gl(n,\mathbb{R})$ é herdada de $gl(n,\mathbb{R})$, o conjunto de todas as matrizes $n \times n$. Como $gl(n,\mathbb{R})$ se identifica naturalmente com $\mathbb{R}^{n^2}$, então $gl(n,\mathbb{R})$ possui uma estrutura de variedade C^∞. Sendo o determinante uma função contínua tomando valores em $gl(n,\mathbb{R})$ e assumindo valores reais então $Gl(n,\mathbb{R})$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n^2}$ e portanto possui uma estrutura de variedade C^∞. Como as aplicações:

$$Gl(n,\mathbb{R}) \times Gl(n,\mathbb{R}) \longrightarrow Gl(n,\mathbb{R})$$
$$(A,B) \longmapsto AB$$
$$\text{e}$$
$$Gl(n,\mathbb{R}) \longrightarrow Gl(n,\mathbb{R})$$
$$A \longmapsto A^{-1}$$

são diferenciáveis de classe C^∞, então $Gl(n,\mathbb{R})$ é um grupo de Lie.

O próximo resultado, cuja demonstração pode ser encontrada por exemplo, em [6], estabelece uma condição bastante útil para que um subconjunto de um grupo de Lie seja um subgrupo de Lie.

Proposição 1.3. *Todo o subgrupo fechado de um grupo de Lie G é um subgrupo de Lie de G.*

Vejamos um exemplo de um subgrupo de Lie.

Exemplo 1.4. O grupo linear especial $Sl(n,\mathbb{R})$, que é o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ de determinante 1, é um subgrupo de Lie de $Gl(n,\mathbb{R})$. O grupo ortogonal especial $SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in Sl(n,\mathbb{R}); AA^t = 1\}$, onde 1 é a matriz identidade $n \times n$, também é um subgrupo de Lie de $Gl(n,\mathbb{R})$.

Definição 1.5. *Seja G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo de G. Definimos o centralizador e o normalizador de H em G, respectivamente por:*

$$Z_G(H) = \{x \in G : xh = hx \quad \forall h \in H\};$$

$$N_G(H) = \{x \in G : xHx^{-1} = H\}.$$

O centro de G é definido por:

$$Z(G) = \{x \in G : xy = yx \quad \forall y \in G\}.$$

A todo grupo de Lie se associa naturalmente um objeto algébrico denominado de álgebra de Lie. A definição formal de álgebra de Lie é a seguinte:

Definição 1.6. *Uma* álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ *é um espaço vetorial munido de uma operação* $[.\ ,\ .]$, *denominada colchete, satisfazendo:*

1. $[.\ ,.]$ *é bilinear;*
2. $[X,\ X] = 0$ *para todo* $X \in \mathfrak{g}$*;*
3. $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ *para todo* $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

A segunda condição é equivalente a $[X,Y] = -[Y,X]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ e a terceira condição é conhecida como *identidade de Jacobi*.

Um dos exemplos mais importantes de álgebra de Lie é o conjunto $gl(n,\mathbb{R})$ munido do colchete definido por $[X,Y] = XY - YX$. Com este mesmo colchete temos outros exemplos de álgebras de Lie, como por exemplo, o conjunto das matrizes $n \times n$ de traço zero, denotado por $sl(n,\mathbb{R})$. Para mais exemplos ver [9].

Definição 1.7. *Uma subálgebra de Lie* $\mathfrak{h}$ *de uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é um subespaço vetorial de* $\mathfrak{g}$ *tal que* $[X,Y] \in \mathfrak{h}$ *para todo* $X, Y \in \mathfrak{h}$*. Com a estrutura herdada de* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ *é naturalmente uma álgebra de Lie.*

Por exemplo, a álgebra de Lie $sl(d,\mathbb{R}) = \{X \in gl(d,\mathbb{R}) : trX = 0\}$ é uma subálgebra de Lie de $gl(d,\mathbb{R})$.

Definição 1.8. *Sejam* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie e* $\mathfrak{h}$ *uma subálgebra de* $\mathfrak{g}$*. O* centralizador *e o* normalizador *de* $\mathfrak{h}$ *em* $\mathfrak{g}$ *, são definidos respectivamente como:*

$$Z(h) = \{X \in \mathfrak{g} : [X,Y] = 0,\ \textit{para todo } Y \in \mathfrak{h}\}$$
$$N(h) = \{X \in \mathfrak{g} : [X,Y] \in \mathfrak{h}\ \textit{para todo } Y \in \mathfrak{h}\}.$$

Definição 1.9. *Sejam* G *e* H *grupos de Lie. Uma aplicação* $\Psi : G \to H$ *é um* homomorfismo de grupos de Lie *se* Ψ *é* C^∞ *e é um homomorfismo de grupos abstratos. Se além disso* Ψ *for um difeomorfismo, então dizemos que* Ψ *é um isomorfismo de grupos de Lie . Neste caso, se tivermos ainda* $G = H$ *dizemos que* Ψ *é um automorfismo .*

Definição 1.10. *Sejam* $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{h}$ *álgebras de Lie. Uma transformação linear* $\Psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *é dita um* homomorfismo de álgebras de Lie *se* $\Psi([X,Y]) = [\Psi(X), \Psi(Y)]$ *para todo* $X, Y \in \mathfrak{g}$. *Se além disso* Ψ *for invertível, então dizemos que* Ψ *é um* isomorfismo de álgebras de Lie. *Neste caso, se tivermos ainda* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$ *então dizemos que* Ψ *é um* automorfismo .

Antes de definir álgebra de Lie, foi dito que, a todo grupo de Lie está associada uma álgebra de Lie. Agora, veremos como ela é obtida.

Seja G um grupo de Lie. Dado $g \in G$, definimos a *translação a esquerda* por g, $l_g : G \to G$ dada por $l_g(h) = gh$. Na realidade esta aplicação é um difeomorfismo de G. Um campo vetorial X sobre G é dito invariante à esquerda se $dl_g \circ X = X \circ l_g$ para todo $g \in G$. O conjunto de todos os campos invariantes à esquerda será denotado por $\mathfrak{g}$. Munindo este conjunto com o colchete dado por $[X,Y]_m(f) = X_m(Yf) - Y_m(Xf)$, temos que $\mathfrak{g}$ se torna uma álgebra de Lie (ver [6]) e esta é a álgebra de Lie associada ao grupo de Lie. Podemos ainda identificar a álgebra $\mathfrak{g}$ pelo isomorfismo $X \to X(e)$ com valores no espaço tangente a G na identidade, obtendo assim uma nova caracterização da álgebra de Lie de G. A álgebra de Lie de um grupo de Lie G é isomorfa ao espaço tangente a G na identidade. Para maiores detalhes ver [6].

Considere V um espaço vetorial. Denotaremos por $Gl(V)$ o conjunto de todas as transformações lineares invertíveis de V. Também usaremos $gl(V)$ para indicar o conjunto das transformações lineares de V. Assim, definimos:

Definição 1.11. *Se* $H = Gl(V)$, $Gl(d, \mathbb{R})$ *ou* $Gl(d, \mathbb{C})$ *então um homomorfismo* $\Psi : G \to H$ *é chamado uma* representação do grupo de Lie G .

A seguir será definido o conceito de ação de um grupo de Lie G em uma variedade M. Este é fundamental no estudo dos semigrupos, visto que a maneira natural de definir a ação do semigrupo é como a restrição da ação do grupo de Lie. Esta ação será útil para definirmos o conceito de conjunto controlável e conjunto controlável invariante.

Definição 1.12. *Sejam* G *um grupo de Lie e* M *uma variedade diferenciável. Uma* ação *de* G *sobre* M *é uma aplicação* $\varphi : G \times M \to M$ *satisfazendo:*

i) φ *é* C^∞*;*

ii) *$\varphi(e,x) = x$ para todo $x \in M$;*

iii) *$(gh,x) = \varphi(g,\varphi(h,x))$, para quaisquer $g,h \in G$ e $x \in M$.*

Se $\varphi : G \times M \to M$ é uma ação, denotaremos $\varphi(g,x)$ simplesmente por gx, $\forall g \in G$, $\forall x \in M$.

Definição 1.13. *Sejam G um grupo de Lie e $\varphi : G \times M \to M$ uma ação. Dizemos que a ação é* transitiva *se para quaisquer $x, y \in M$, existe $g \in G$ tal que $gx = y$. Nesse caso dizemos que G age transitivamente sobre M. Também dizemos que a ação é* efetiva *se $gx = x$ para todo $x \in M$ implicar que $g = e$.*

Consideremos G um grupo de Lie e $\varphi : G \times M \to M$ uma ação. Fixando $g \in G$ a ação induz um difeomorfismo $\varphi_g : M \to M$ definida por $\varphi_g(x) = \varphi(g,x)$. Dado um grupo de Lie G, para qualquer $g \in G$ está definido o automorfismo:

$$I_g : G \to G,$$
$$I_g(x) = gxg^{-1}$$

chamado *conjugação por g*.

Cada aplicação I_g induz um isomorfismo da álgebra de Lie de G. Desta forma obtemos uma representação de G em $Gl(d,\mathbb{R})$ pela aplicação que a cada $g \in G$ associa a transformação linear dI_g. Esta representação é chamada *representação adjunta* de G e denotada por

$$Ad : G \to Gl(\mathfrak{g})$$
$$g \mapsto dI_g(1).$$

De maneira similar aos grupos de Lie, a cada $x \in \mathfrak{g}$ está associada uma transformação linear

$$ad(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

definida por $ad(X)Y = [X,Y]$. A representação adjunta da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é a aplicação

$$ad : \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g})$$
$$X \mapsto ad(X).$$

1.2 Resultados básicos sobre álgebras de Lie

Nosso interesse nesta seção é introduzir os conceitos de álgebras solúveis, nilpotentes, simples e semi-simples, sem fazer um estudo minucioso. Para detalhes e exemplos nos referimos a [9]. Iniciamos definindo ideais.

Definição 1.14. *Um subespaço $\mathfrak{h}$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um* ideal *de $\mathfrak{g}$ se $[X,Y] \in \mathfrak{h}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{h}$.*

Definimos indutivamente os seguintes subespaços de $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{(0)} &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}' &= [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^{(k)} &= [\mathfrak{g}^{(k-1)},\mathfrak{g}^{(k-1)}]. \end{aligned}$$

Temos que $\mathfrak{g}^{(k)}$ é um ideal para todo $k \geq 0$. Assim $\mathfrak{g}^{(k+1)} \subset \mathfrak{g}^{(k)}$ para todo k.

A sequência de ideais definida acima recebe o nome de *série derivada* de $\mathfrak{g}$ e cada ideal é chamado uma *álgebra derivada* de $\mathfrak{g}$.

Definição 1.15. *Dizemos que uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é* solúvel *se a sua série derivada se anula para algum $k \geq 0$.*

Um típico exemplo de álgebra solúvel é o conjunto das matrizes triangulares superiores $n \times n$.

Definição 1.16. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita* abeliana *se $[X,Y] = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.*

O conjunto das matrizes diagonais $n \times n$ é uma álgebra abeliana, já que o produto de duas matrizes diagonais sempre comuta. Observemos também que, as álgebras abelianas são solúveis já que, $\mathfrak{g}$ é abeliana se, e somente se, $\mathfrak{g}' = 0$.

Afim de introduzir o conceito de álgebra nilpotente, definimos a seguinte sequência de ideais de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$$

$$\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}'$$
$$\vdots$$
$$\mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}].$$

A sequência de ideiais definida acima, é chamada de *séria central descendente* . Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita *nilpotente* se a sua série central descendente se anula para algum $k > 0$.

O conjunto das matrizes triangulares superiores com diagonal nula é um exemplo de uma álgebra nilpotente.

Observação 1.17. Toda álgebra de Lie nilpotente é solúvel. No entanto, nem toda álgebra de Lie solúvel é nilpotente. Um conhecido contra exemplo é o conjunto das matrizes triangulares superiores, que é solúvel mas não é nilpotente.

Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita, existe um único ideal solúvel que contém todos os ideais solúveis de $\mathfrak{g}$ ([1], proposição 1.28). Definimos este ideal como sendo o *radical solúvel* de $\mathfrak{g}$ e o denotamos por $\mathfrak{r}(g)$, ou simplesmente por $\mathfrak{r}$.

Definição 1.18. *Uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é dita* simples *se:*

i) $\dim(\mathfrak{g}) > 1$*;*

ii) $\mathfrak{g}$ *não possui ideais não triviais.*

Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ *é dita* semi-simples *se seu radical solúvel é nulo, ou seja, se* $\mathfrak{g}$ *não contém ideais solúveis além de* 0.

O item (i) da definição acima garante a compatibilidade dos conceitos de álgebras simples e semi-simples (pois se não houvesse essa exigência, álgebras de Lie unidimensionais seriam simples mas não são semi-simples.). Desta forma, com as definições acima toda álgebra simples é também semi-simples.

A álgebra de Lie $sl(n, \mathbb{R})$ é simples e portanto semi-simples.

1.3 Aplicação exponencial

Mencionamos anteriormente que o primeiro passo para se estudar os grupos de Lie era construir sua álgebra de Lie associada. Nesta seção definiremos a aplicação exponencial, o ente matemático responsável pelo processo de transferência das propriedades da álgebra de Lie para o grupo de Lie. Antes porém, é necessário definirmos o conceito de subgrupo a um parâmetro que é dado a seguir.

Definição 1.19. *Dado um grupo de Lie G chamaremos qualquer homomorfismo $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to G$ de* subgrupo a um parâmetro *de G .*

Foi provado no teorema 3.27 de [6] que dados dois grupos de Lie G e H, com G simplesmente conexo, se $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um homomorfismo então existe um único homomorfismo $\varphi : G \to H$ tal que $d\varphi(1) = \psi$.

Como a álgebra de Lie de um grupo de Lie é o espaço tangente na identidade então a álgebra de Lie de $\mathbb{R}$ é dada pelos campos de vetores constantes $\{\lambda\frac{d}{dr} : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Para cada $X \in \mathfrak{g}$ definimos o homomorfismo entre a álgebra de Lie de $\mathbb{R}$ e $\mathfrak{g}$ por

$$\lambda\tfrac{d}{dr} \longmapsto X$$

Sendo a reta real simplesmente conexa, temos que existe um único subgrupo a um parâmetro $\exp_X : \mathbb{R} \longmapsto G$ tal que

$$d(\exp_X(\lambda\tfrac{d}{dr})) = \lambda X.$$

Dito em outras palavras, a aplicação definida por $t \longmapsto \exp_X(t)$ é o único subgrupo a um parâmetro de G cujo vetor tangente em 0 é $X(e)$. Então definimos a *aplicação exponencial* por

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

considerando $\exp(X) = \exp_X(1)$.

Desta forma, temos aqui o responsável por transportar algumas propriedades da álgebra de Lie para o grupo de Lie. O próximo exemplo justifica a terminologia de exponencial.

Exemplo 1.20. Seja $G = Gl(n,\mathbb{R})$. Então $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}l(n,\mathbb{R})$ e a aplicação exponencial é dada pela exponencial de matrizes, isto é, se $X \in \mathfrak{g}l(n,\mathbb{R})$ então

$$\exp(X) = 1 + X + \tfrac{X^2}{2!} + \ldots \tfrac{X^n}{n!} + \ldots$$

A relação existente entre a exponencial e as representações adjuntas de um grupo e sua álgebra de Lie é dada por

$$\exp(ad(X)) = Ad(exp(X)).$$

Assim temos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "Ad"] & Aut(\mathfrak{g}) \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "ad"] & End(\mathfrak{g}) \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

e,

$$\exp(Ad_g X) = I_g(\exp X).$$

1.4 Variedades homogêneas

Nesta seção apresentamos o conceito de variedade homogênea, que constituem uma importante classe de variedades. Assim como antes, G denotará um grupo de Lie e H um subgrupo fechado de G. Ao conjunto quociente G/H pode ser dada uma única estrutura de variedade, exigindo que a projeção canônica $\pi : G \to G/H$, definida por $\pi(g) = gH$ seja uma aplicação C^∞. Nesta estrutura, um subconjunto U de G/H é aberto se, e somente se, $\pi^{-1}(U)$ é um aberto em G.

Definição 1.21. *As variedades da forma G/H, com estrutura diferenciável conforme acima, são ditas* variedades homogêneas .

Dada uma ação $\varphi : G \times M \to M$ do grupo de Lie G sobre uma variedade M, fixemos $m_0 \in M$ e definimos $H = \{g \in G : gm_0 = m_0\}$. Sendo H um subgrupo fechado de G, H é chamado *subgrupo de isotropia* em m_0 . No caso da ação ser transitiva, a aplicação $\tau : G/H \to M$ definida por $\tau(gH) = gm_0$ é um difeomorfismo. Um importante fato obtido deste resultado é que toda variedade M, que possui um grupo de difeomorfismos que age transitivamente na mesma, é difeomorfa a uma variedade homogênea.

Exemplo 1.22. (Variedades “Flags”) Dada uma sequência de inteiros $s = (k_1, k_2, \ldots, k_r)$, com $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leq n$, a *variedade “flag”* real $\mathbb{F}^n(s)$ é o conjunto de todos os “flags” $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_r$ de subespaços de $\mathbb{R}^n$, com $\dim V_j = k_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Temos uma ação natural

$$\varphi : Sl(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{F}^n(s) \to \mathbb{F}^n(s)$$

do grupo $Sl(n, \mathbb{R})$ na variedade “flag” $\mathbb{F}^n(s)$ definida como segue: Se $g \in Sl(n, \mathbb{R})$ e $(V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_r) \in \mathbb{F}^n(s)$, então

$$\varphi(g, (V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_r)) = (gV_1 \subset gV_2 \subset \ldots \subset gV_r).$$

Note que a aplicação $V_i \mapsto gV_i$ leva cada subespaço de dimensão k_i de $\mathbb{R}^n$ em um subespaço de mesma dimensão. Além disso, se $V_i \subset V_j$ então $gV_i \subset gV_j$ e esta ação é transitiva. Para ver isto consideremos a base canônica do $\mathbb{R}^n$ e associamos o “flag” canônico $f_{\beta_0} = (< e_1, \ldots, e_{k_1} >= V_1, \subset \ldots \subset< e_1, \ldots, e_{k_r} >= V_r)$. Consideremos também um “ flag” arbitrário $f_\beta = (W_1 \subset \ldots \subset W_r)$. Escolhemos uma base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ com a mesma orientação da base canônica, adaptada a f_β,no sentido que $\{u_1, \ldots, u_{k_1}\} \subset W_1, \ldots, \{u_{k_{r-1}+1}, \ldots, u_{k_{r-1}+p} = kr\} \subset W_r$. Definimos a aplicação linear $g' : R^n \to R^n$ dada por, $g'(e_i) = f_i$. Claramente $g'(f_{\beta_0}) = f_\beta$. Como g' é injetora então também é sobrejetora, e portanto é um isomorfismo. Assim $\det g' \neq 0$. Se $\det g' \neq 1$, então $\det g' > 0$ logo tomando $g = \frac{1}{(\det g')^{1/n}} g'$ temos que $\det g = 1$ e $gf_{\beta_0} = f_\beta$. Agora, vamos calcular o subgrupo de isotropia no elemento f_{β_0}. Seja $g \in Sl(n, \mathbb{R})$ e consideremos o produto de g pelos elementos $e_1, \ldots, e_{k_1} \in V_1$. Temos que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k_1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{1k_1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k_11} & a_{k_12} & \ldots & a_{k_1k_1} & \ldots & a_{k_1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk_1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k_11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

$= a_{11}e_1 + \ldots + a_{k_11}e_k + \ldots + a_{nn}e_n \in V_1$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k_1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1k_1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k_11} & a_{k_12} & \dots & a_{k_1k_1} & \dots & a_{k_1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk_1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1k_1} \\ a_{2k_1} \\ \vdots \\ a_{k_1k1} \\ \vdots \\ a_{nk_1} \end{pmatrix}$$

$= a_{1k_1}e_1 + \ldots + a_{k_1k_1}e_k + \ldots + a_{nk_1}e_n \in V_1$

Aplicando o mesmo raciocínio para $V_2, \ldots, V_r$ concluímos que, para fixar todos os espaços $V_1, V_2, \ldots, V_r$ a matriz g tem que ter a forma

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix}$$

onde A_i é uma matriz quadrada $(k_i - k_{i-1}) \times (k_i - k_{i-1})$. Denotando por P_s o subgrupo fechado de $Sl(n, \mathbb{R})$ das matrizes desta forma temos uma aplicação, injetora e sobrejetora σ da variedade homogênea $Sl(n, \mathbb{R})/P_s$ no conjunto $\mathbb{F}^n(s)$ definida por $\sigma(gP_s) = \varphi(g, f_\beta)$. Finalmente, dotamos $\mathbb{F}^n(s)$ de uma estrutura de variedade diferenciável exigindo que esta aplicação seja localmente um difeomorfismo.

Quando a sequência s é dada por $(1, 2, ..., n)$ dizemos que $\mathbb{F}^n(s)$ é uma *"Flag" maximal* . Casos particulares de variedades " Flags" são as Grassmannianas $Gr_k(n) = \mathbb{F}^n(k)$ que são constituídas por subespaços k-dimensionais de $\mathbb{R}^n$ e o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^{n-1} = Gr_1(n)$, que é o espaço das direções em $\mathbb{R}^n$.

Capítulo 2

Variedades Grassmannianas

Neste capítulo nossa atenção está voltada para o estudo das variedades Grassmannianas, um dos elementos que possibilitará a obtenção dos resultados principais do nosso trabalho. Iniciamos o capítulo com uma breve apresentação da Variedade de Grassmann dos subespaços de dimensão k, além de apresentar uma descrição algébrica para esta variedade. Na seção 2 veremos que a Grassmanniana é uma variedade homogênea compacta, o que é essencial para existência de conjunto de controle a ser introduzido no capítulo 4. A decomposição de Bruhat é fundamental para a análise da ação de matrizes diagonais na Grassmanniana, assim a seção 3 será dedicada a este estudo. Na quarta seção estudaremos a ação de um elemento "split regular"nesta variedade e por esta razão nosso interesse está voltado para a Grassmanniana orientada $Gr_k^+(d)$, que pode ser mergulhada no produto exterior $\Lambda^k\mathbb{R}^d$. Também, por este motivo, são apresentados alguns resultados básicos sobre o produto exterior.

2.1 Descrição Algébrica da Grassmanniana $Gr_k(d)$

Apresentamos nesta seção uma representação algébrica das Grassmannianas. Esta representação é obtida pela correspondência que existe entre as classes de equivalência em $B_k(d)$, o conjuntos das matrizes $d \times k$ de posto k, e $Gr_k(d)$, a Grassmanniana de subespaços de dimensão k em $\mathbb{R}^d$.

Iniciamos com a definição da Variedade de Grassmann de subespaços de dimensão k em $\mathbb{R}^d$.

Definição 2.1. *Para* $(1 \leq k < d)$*, definimos "variedade de Grassmann dos subespaços* *de dimensão k" por:*

$$Gr_k(d) = \{S : S \text{ é subespaço de dimensão } k \text{ em } \mathbb{R}^d\}.$$

É claro que podemos considerar um espaço vetorial arbitrário ao invés de $\mathbb{R}^d$. No entanto, para os propósitos deste trabalho, será suficiente considerar o espaço euclidiano $\mathbb{R}^d$. Com o intuito de obter uma descrição algébrica para a Grassmannianas fixemos uma base $\beta = \{u_1, \ldots, u_d\}$ de $\mathbb{R}^d$. Sejam $v_1 = \alpha_{11}u_1 + \ldots + \alpha_{d1}u_d$, ..., $v_k = \alpha_{1k}u_1 + \ldots + \alpha_{dk}u_d$ k vetores $L.I.$. Assim, ao conjunto desses k vetores fica associada uma matriz $d \times k$ da forma

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{d1} & \ldots & \alpha_{dk} \end{pmatrix}$$

cujo posto é igual a k. Reciprocamente, a toda matriz $d \times k$ de posto k fica associado um conjunto de k-vetores LI de $\mathbb{R}^d$. É claro que esta associação não é biunívoca. Para resolver este problema denotamos por $B_k(d)$ o conjunto de todas as natrizes $d \times k$ de posto igual a k.

No conjunto $B_k(d)$ definimos a seguinte relação:

$$\eta \equiv \xi \Leftrightarrow \exists a \in Gl(k, \mathbb{R}) \ \ tal \ \ que \ \eta = \xi a. \tag{2.1}$$

Isto define uma relação de equivalência em $B_k(d)$.

Notemos ainda que, duas matrizes $\xi, \eta \in B_k(d)$ definem o mesmo subespaço k-dimensional se, e somente se, as colunas de ξ são combinações lineares das colunas de η. Assim, matrizes ξ e η que estão na mesma classe de equivalência em $B_k(d)$, definem o mesmo subespaço k-dimensional. Então existe uma correspondência um-a-um entre o conjunto das classes de equivalência em $B_k(d)$ e a Grassmanniana $Gr_k(d)$, que a cada classe $\overline{\xi}$ em $B_k(d)$, associa o subespaço k-dimensional gerado pelos vetores coluna de $\overline{\xi}$.

Desta forma $Gr_k(d)$ se identifica naturalmente com o conjunto quociente $B_k(d)/\equiv$, e desta correspondência temos uma descrição algébrica das Grassmannianas.

2.2 A Grassmanniana como Variedade Homogênea e compacta

Na seção anterior identificamos a Grassmanniana $Gr_k(d)$ como classes de equivalência de matrizes $d \times k$ de posto k. Nesta seção abordaremos a estrutura diferenciável. Para isto consideremos a ação natural de $Sl(d, \mathbb{R})$ em $Gr_k(d)$ definida por

$$\begin{aligned} \varphi : Sl(d, \mathbb{R}) \times Gr_k(d) &\longrightarrow Gr_k(d) \\ (g, \overline{\xi}) &\longmapsto g\overline{\xi} = \overline{g\xi}. \end{aligned}$$

Veja que esta ação está bem definida pois, em $B_k(d)$ temos $\xi \equiv \eta \Leftrightarrow \xi = \eta a$ para algum $a \in Gl(k, \mathbb{R})$ e se $\xi \equiv \eta$ então $\overline{\xi} = \overline{\eta}$. Desta maneira

$$g\overline{\xi} = \overline{g\xi} = \overline{g\eta a} = \overline{g\eta} = g\overline{\eta}.$$

Em termos da descrição dos subespaços k-dimensionais como classes de equivalência em $B_k(d)$, a ação φ é a multiplicação de uma matriz g $(d \times d)$ por uma matriz $\overline{\xi}$ de ordem $(d \times k)$.

Como vimos no exemplo 1.22, o grupo de isotropia, que denotaremos por H_k, é o grupo das matrizes $d \times d$, que em alguma base são escritas como blocos diagonais de ordem k e $(d - k)$, ou seja, $Gr_k(d)$ pode ser identificada com a variedade homogênea $Sl(d, \mathbb{R})/H_k$, o que denotaremos por

$$Gr_k(d) = \frac{Sl(d, \mathbb{R})}{H_k}. \tag{2.2}$$

Consideremos agora a ação do grupo ortogonal $\mathrm{O}(d, \mathbb{R})$ na grassmanniana $Gr_k(d)$ definida por

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{O}(d, \mathbb{R}) \times Gr_k(d) &\longrightarrow Gr_k(d) \\ (g, \overline{\xi}) &\longmapsto g\overline{\xi} = \overline{g\xi}. \end{aligned}$$

Esta ação é transitiva. De fato, tomando $\overline{\xi}, \overline{\eta} \in Gr_k(d)$, queremos mostrar que existe $g \in \mathrm{O}(d, \mathbb{R})$ tal que $\overline{\xi} = g\overline{\eta}$. O subespaço $\overline{\xi}$ pode ser representado por uma matriz $d \times k$, de posto k, cujas colunas formam uma base para este subespaço. Completando essa matriz até uma matriz $d \times d$ e ortonormalizando-a pelo processo de Gram-Schmidt, temos que a matriz obtida ξ pertence ao grupo ortogonal $\mathrm{O}(d, \mathbb{R})$. Realizando este mesmo processo com a matriz $d \times k$ que representa $\overline{\eta}$, a matriz obtida η também pertence a $\mathrm{O}(d, \mathbb{R})$. Como $\mathrm{O}(d, \mathbb{R})$ é um grupo, existe uma matriz $\gamma \in \mathrm{O}(d, \mathbb{R})$ (a saber, $\gamma = \xi\eta^{-1}$) tal que $\xi = \gamma\eta$. Um fato importante, que garante que as matrizes $\xi, \eta \in \mathrm{O}(d, \mathbb{R})$ representam os subespaços $\overline{\xi}, \overline{\eta} \in Gr_k(d)$, respectivamente, é que pelo processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, a partir da base $\{u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_d\}$ obtemos uma base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_d\}$, e as bases $\{u_1, \ldots, u_k\}$ e $\{v_1, \ldots, v_k\}$ geram o mesmo subespaço.

Sendo $\overline{\xi_0} \in Gr_k(d)$ o subespaço gerado pelos k primeiros vetores da base canônica de $\mathbb{R}^d$, vamos calcular o subgrupo de isotropia de $\overline{\xi_0}$, para esta ação, o qual denotaremos por H_0.

Para isto, procuramos as matrizes ortogonais $d \times d$

$$h_0 = \begin{pmatrix} A_{k\times k} & B_{k\times(d-k)} \\ C_{(d-k)\times k} & D_{(d-k)\times(d-k)} \end{pmatrix}$$

tais que se

$$\begin{pmatrix} X_{k\times 1} \\ 0_{(d-k)\times 1} \end{pmatrix} \in \overline{\xi_0}$$

então

$$\begin{pmatrix} A_{k\times k} & B_{k\times(d-k)} \\ C_{(d-k)\times k} & D_{(d-k)\times(d-k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{k\times 1} \\ 0_{(d-k)\times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} AX \\ CX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix}$$

para todo $X_{k\times 1}$, donde já podemos concluir que $C = 0$. Além disso, como h_0 é ortogonal vale que

$$\begin{pmatrix} A_{k\times k} & B_{k\times(d-k)} \\ 0_{(d-k)\times k} & D_{(d-k)\times(d-k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T_{k\times k} & 0_{k\times(d-k)} \\ B^T_{(d-k)\times k} & D^T_{(d-k)\times(d-k)} \end{pmatrix} = Id_{d\times d}$$

Disso temos que, $B = 0$, $A \in \mathrm{O}(k, \mathbb{R})$ e $D \in \mathrm{O}(d-k, \mathbb{R})$. Portanto o subgrupo de isotropia de $\overline{\xi_0}$ é

$$H_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A_{k\times k} & 0_{k\times(d-k)} \\ 0_{(d-k)\times k} & D_{(d-k)\times(d-k)} \end{pmatrix} A \in \mathrm{O}(d,\mathbb{R}) \ e \ D \in \mathrm{O}(d-k,\mathbb{R}) \right\}.$$

Logo, $Gr_k(d)$ é difeormorfa a $\mathrm{O}(d,\mathbb{R})/H_0$. Ainda, como a dimensão de H_0 é $(1/2)(n^2 - 2nk - n - 2k^2)$, então $\dim Gr_k(d) = k(d-k)$.

A próxima observação será relevante quando formos fazer a análise da dinâmica da ação de $Sl(d,\mathbb{R})$ em $Gr_k(d)$, no sentido que $g\bar{b} = gm\bar{b}$, $g \in Sl(d,\mathbb{R})$, onde $m \in H_k$.

Observação 2.2. Sejam $a, b \in Sl(d,\mathbb{R})$. Se $aH_k = bH_k$ então $\overline{a} = \overline{b} = \overline{mb}$.
De fato, temos que

$$aH_k = bH_k \Leftrightarrow ab^{-1} \in H_k \Leftrightarrow a = mb \tag{2.3}$$

Assim, pela hipótese e por (2.2) temos que $\overline{b} = \overline{a} = \overline{mb}$

Vejamos agora a decomposição de Bruhat das Grassmannianas, que será relevante para a análise da ação de matrizes diagonalizáveis nas Grassmannianas.

2.3 A decomposição de Bruhat das Grassmannianas em N_β-órbitas

Tomando uma base $\beta = \{e_1, \ldots, e_d\}$ de $\mathbb{R}^d$, denotamos por N_β o grupo nilpotente das aplicações lineares cujas matrizes, com respeito a base β, são triangulares inferiores com $1's$ na diagonal principal. A decomposição de Bruhat é a decomposição de $Gr_k(d)$ em N_β-órbitas, onde o número de órbitas é finito. As órbitas são dadas por $N_\beta\xi$, sendo ξ o subespaço k-dimensional gerado por um conjunto de k elementos da base β. Dentre estas N_β-órbitas existe exatamente uma que é aberta e densa, e que denotamos por $N_\beta\xi_0$, onde ξ_0 é o subespaço gerado pelos primeiros k elementos da base β.

Em termos da representação de subespaços como matrizes $d \times k$, a órbita aberta corresponde a uma matriz da forma $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$, onde 1 indica a matriz identidade $k \times k$ e x uma matriz arbitrária $(d-k) \times k$.

Não faremos as demonstrações dos fatos acima citados. Para detalhes consultar [11] e [14]. No entanto faremos, como ilustração, um estudo detalhado da decomposição de Bruhat da Grassmanniana $Gr_2(3)$.

Exemplo 2.3. Consideremos a ação de $Sl(3,\mathbb{R})$ sobre $Gr_2(3)$ dada por

$$\begin{aligned} \varphi : Sl(3,R) \times Gr_2(3) &\longrightarrow Gr_2(3) \\ (g,\overline{\xi}) &\longmapsto g\overline{\xi} = \overline{g\xi}. \end{aligned}$$

Seja $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e tomemos o elemento $\overline{\xi_0} \in Gr_2(3)$ representado por

$$\xi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

subespaço gerado por $\{e_1, e_2\}$. O subgrupo de isotropia H_2 neste elemento é o subconjunto das matrizes de $Sl(3,\mathbb{R})$ da forma

$$\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{33} \end{pmatrix}.$$

Desta forma $Gr_2(3)$ é difeomorfa a $Sl(3,\mathbb{R})/H_2$, sendo o difeomorfismo dado por

$$\begin{aligned} \gamma : Sl(3,\mathbb{R})/H_2 &\longrightarrow Gr_2(3) \\ gH_2 &\longmapsto g\overline{\xi_0} \end{aligned}$$

Via este difeomorfismo o elemento $H_2 \in Sl(3,\mathbb{R})/H_2$ é identificado com o plano

$$\xi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que $N_\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} ; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ e as células $N_\beta \xi_i$ são:

- $N_\beta \xi_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ;\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \\ b & c \end{pmatrix} ; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

- $N_\beta \xi_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} ; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

- $N_\beta \xi_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} ; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

As outras células coincidem com uma destas três como subconjuntos de $Gr_2(3)$. Note ainda que $N_\beta \xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$, onde 1 é a matriz identidade 2×2 e x é uma matriz arbitrária 1×2, logo esta é a célula aberta e densa de $Gr_2(3)$.

Para termos uma visão geométrica das células da decomposição de Bruhat de $Gr_2(3)$, vamos identificá-las na esfera unitária contida no semiespaço $y \geq 0$, identificando cada plano com seu vetor normal.

- $N_\beta \xi_0$ é identificada com a calota menos o seu bordo;
- $N_\beta \xi_1$ é identificada com o bordo menos os pontos $(1,0,0)$ e $(-1,0,0)$;
- $N_\beta \xi_2$ é identificada com os pontos $(1,0,0)$ e $(-1,0,0)$.

Deste modo temos que $Gr_2(3) = N_\beta \xi_0 \cup N_\beta \xi_1 \cup N_\beta \xi_2$. A figura abaixo destaca cada uma das três células da decomposição de Bruhat de $Gr_2(3)$.

Figura 2.1: Células da decomposição de Bruhat de $Gr_2(3)$

Agora vamos definir o conceito de elemento "split regular", assim poderemos definir o conceito de um atrator em uma N_β-órbita e variedades estáveis.

Definição 2.4. *Um elemento* $h \in Sl(d, \mathbb{R})$ *é chamado* "split regular" *se seus autovalores são positivos e distintos, ou seja, em alguma base* β*,* h *é escrito como* $h = diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}$*, onde* $\lambda_1 > \ldots > \lambda_d > 0$.

Seja h um elemento "split regular". Se $h^m(n\xi_0) = h^m n h^{-m} \xi_0 \to \xi_0$ quando $m \to \infty$ para todo $n \in N_\beta$, diremos que ξ_0 é um *atrator de* $N_\beta \xi_0$ para h, ou ainda que, $N_\beta \xi_0$ é a *variedade estável* de ξ_0.

Vejamos agora que as variedades estáveis são justamente as N_β-órbitas. Para isso tome $n \in N_\beta$ da forma $n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ * & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ e $h = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d\}$. Temos que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_d^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ * & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-m} & & & \\ & \lambda_2^{-m} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_d^{-m} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^m & & & \\ \lambda_2^m * & \lambda_2^m & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \lambda_d^m * & \lambda_d^m * & & \lambda_d^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-m} & & & \\ & \lambda_2^{-m} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_d^{-m} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^m & & & \\ (\lambda_2^m/\lambda_1)^m * & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ (\lambda_d/\lambda_1)^m * & (\lambda_d/\lambda_2)^m * & & \lambda_d^m \end{pmatrix}$$

Como $\lambda_1 > \ldots > \lambda_d > 0$, então $\lambda_i/\lambda_j < 1$ para $i > j$, e assim $(\lambda_i/\lambda_j)^m \to 0$ quando $m \to \infty$. Logo temos que $h^m n h^{-m} \longrightarrow 1$ quando $m \longrightarrow \infty$.

Sendo assim, para um subespaço $\overline{\xi}$ gerado por k vetores da base de $\mathbb{R}^d$, temos que

$$h^m n \overline{\xi} = h^m n (h^{-m} \overline{\xi}) = (h^m n h^{-m}) \overline{\xi} \longrightarrow \overline{\xi} \text{ quando } m \longrightarrow \infty$$

ou seja, h^m deixa $\overline{\xi}$ fixo.

No caso do subespaço gerado pelos primeiros k vetores da base,

$$\overline{\xi_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

temos que, se $\overline{\eta} \in N_\beta \xi_0$ a célula aberta e densa, então $\overline{\eta} = n\overline{\xi_0}$ com $n \in N_\beta$. Assim,

$$h^m \overline{\eta} = h^m n \overline{\xi_0} = h^m n \overline{h^{-m} \xi_0} \longrightarrow \overline{\xi_0},$$

para qualquer $\overline{\eta}$ na célula aberta e densa.

Vejamos no caso particular de $Gr_2(3)$, qual é a variedade estável para

$$\overline{\xi_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.5. Sendo $G = Gr_2(3)$ e $h = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ com $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0$, tomemos $V \in N_\beta \xi_0$ dada no exemplo 2.3 por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Então $V = \langle (1, a, b), (0, 1, c) \rangle$ para $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se $m \in \mathbb{Z}^+$, temos que

$$h^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \lambda_2^m & \\ & & \lambda_3^m \end{pmatrix}$$

e

$$V = \begin{pmatrix} 1/(\lambda_1^m).1 & 1/(\lambda_2^m).0 \\ 1/(\lambda_1^m).a & 1/(\lambda_2^m).1 \\ 1/(\lambda_1^m).b & 1/(\lambda_2^m).c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/(\lambda_1^m) & 0 \\ a/(\lambda_1^m) & 1/(\lambda_2^m) \\ b/(\lambda_1^m) & c/(\lambda_2^m) \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$h^m V = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \lambda_2^m & \\ & & \lambda_3^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/(\lambda_1^m) & 0 \\ a/(\lambda_1^m) & 1/(\lambda_2^m) \\ b/(\lambda_1^m) & c/(\lambda_2^m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda_1/\lambda_1)^m & 0 \\ a(\lambda_2/\lambda_1)^m & (\lambda_2/\lambda_2)^m \\ b(\lambda_3/\lambda_1)^m & c(\lambda_3/\lambda_2)^m \end{pmatrix}.$$

Deste modo, fazendo $m \longrightarrow \infty$, temos que

$$h^m V \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \overline{\xi_0}.$$

Logo $\overline{\xi_0}$ é o atrator de $N_\beta \xi_0$ para h. Portanto $N_\beta \xi_0$ é a variedade estável para $\overline{\xi_0}$.

2.4 A Grassmanniana orientada $Gr_k^+(d)$ e o mergulho no Produto Exterior

Nesta seção estamos interessados em analisar o mergulho da Grassmanniana orientada $Gr_k^+(d)$ no produto exterior $\Lambda^k \mathbb{R}^d$. Entre outras vantagens, isto nos permite uma visão geométrica da variedade Grassmanniana. Isto é feito identificando os elementos da Grassmanniana orientada $Gr_k^+(d)$ com os elementos da esfera unitária no produto exterior $\Lambda^k\mathbb{R}^d$. Para isto primeiramente introduzimos o conceito do produto exterior. Em toda esta seção E e F denotam espaços vetoriais de dimensão finita.

Definição 2.6. *Dado um espaço vetorial E, uma aplicação $\varphi : E \times \ldots \times E \longrightarrow F$, definida no produto cartesiano de k fatores iguais a E, diz-se* k-linear *quando é linear em cada uma de suas entradas. Quando $F = \mathbb{R}$, φ recebe o nome de* forma k-linear.

Definição 2.7. *Uma aplicação k-linear $\varphi : E \times \ldots \times E \longrightarrow F$ é* alternada *quando se tem $\varphi(v_1, \ldots, v_k) = 0$ sempre que existirem $i \neq j$ tais que $v_i = v_j$, ou equivalentemente, $\varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\varphi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$ para quaisquer $v_1, \ldots, v_k \in E$.*

Usaremos a notação $\Lambda^k E$ para indicar o conjunto das formas k-lineares alternadas em E. Este conjunto munido da adição e produto por escalar usuais é um espaço vetorial. Seus elementos são denominados *formas k-lineares alternadas*, ou simplesmente, *k-formas*. Nossa intenção nesta seção é determinar uma base para este espaço. Apresentamos também alguns resultados que nos permitirão ter maior familiaridade para lidar com esses objetos.

Proposição 2.8. *Sejam $\varphi, \psi : E \times \ldots \times E \longrightarrow F$ aplicações k-lineares e G um conjunto de geradores do espaço vetorial E. Se $\varphi(v_1, \ldots, v_k) = \psi(v_1, \ldots, v_k)$ qualquer que seja a k-lista $(v_1, \ldots, v_k)$ de elementos de G, então $\varphi = \psi$.*

Demonstração: Faremos a indução sobre k. Se $k = 1$ então $\varphi, \psi : E \longrightarrow F$ são aplicações lineares. Para todo $x \in E$, tem-se que $x = \Sigma\alpha_i v_i,\ \ v_i \in G$. Portanto $\varphi(x) = \varphi(\Sigma\alpha_i v_i) = \Sigma\alpha_i\varphi(v_i) = \Sigma\alpha_i\psi(v_i) = \psi(\Sigma\alpha_i v_i) = \psi(x)$. Supondo que o teorema seja válido para $k-1$, introduzimos, para cada $v \in G$, as aplicações $(k-1)$-lineares φ_v, ψ_v, definidos por $\varphi_v(x_1, \ldots, x_{k-1}) = \varphi(x_1, \ldots, x_{k-1}, v)$ e $\psi_v(x_1, \ldots, x_{k-1}) = \psi(x_1, \ldots, x_{k-1}, v)$. Pela hipótese do teorema, φ_v e ψ_v assumem o mesmo valor em todas as listas de $k-1$ elementos de G. Por indução, concluimos que $\varphi_v = \psi_v$, isto é, que $\varphi(x_1, \ldots, x_{k-1}, v) = \psi(x_1, \ldots, x_{k-1}, v)$, quaisquer que sejam os elementos $x_1, \ldots, x_{k-1} \in E$ e $v \in G$. Como todo elemento $x_r \in E$ é combinação linear de elementos de G, vemos que para $x_1, \ldots, x_{k-1} \in E$ quaisquer vale

$$\varphi(x_1, \ldots, x_k) = \varphi(x_1, \ldots, x_{k-1}, \Sigma\alpha_i v_i) = \Sigma\alpha_i \cdot \varphi(x_1, \ldots, x_{k-1}, v_i) =$$
$$\Sigma\alpha_i \cdot \psi(x_1, \ldots, x_{k-1}, v_i) = \psi(x_1, \ldots, x_k)$$

isto é, $\varphi = \psi$. ■

No próximo exemplo vemos que o determinante de uma matriz de ordem n pode ser considerado como uma forma n-linear alternada.

Exemplo 2.9. O determinante de uma matriz $n \times n$ pode ser considerado como uma forma n-linear alternada. Isto pode ser feito definindo para a n-upla de vetores $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ o $\det(v_1, \ldots, v_n) =$ determinante da matriz $n \times n$ cujas colunas são os vetores v_i. Sendo o determinante de uma matriz igual ao de sua transposta, obteremos o mesmo resultado se tomarmos $v_1 \ldots v_n$ como linhas de uma matriz $n \times n$.

Definição 2.10. *A partir de k funcionais lineares $f_1, \ldots, f_k \in E^*$, obtemos a forma k-linear alternada $f_1 \wedge \ldots \wedge f_k : E \times \ldots \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, chamada o* produto exterior *desses funcionais, definida por*

$$(f_1 \wedge \ldots \wedge f_k)(v_1, \ldots, v_k) = \det(f_i(v_j)),$$

onde à direita temos o determinante da matriz $k \times k$ cuja i-ésima linha é $(f_i(v_1), \ldots, f_i(v_k))$ e cuja j-ésima coluna é $(f_1(v_j), \ldots, f_k(v_j))$. O fato de que $f_1 \wedge \ldots \wedge f_k \in \Lambda^k E$ segue da linearidade de cada f_i e do exemplo anterior.

Exemplo 2.11. Dado o espaço vetorial E, seja $\Lambda : E^* \times \ldots \times E^* \longrightarrow \Lambda^k E$ a aplicação definida por $\Lambda(f_1, \ldots, f_k) = f_1 \wedge \ldots \wedge f_k$. Como o determinante de uma matriz $k \times k$ é uma forma k-linear alternada nos seus vetores-linhas, vemos que Λ é uma aplicação k-linear alternada de E^* em $\Lambda^k E$. As formas k-lineares alternadas que pertencem à imagem de Λ, ou seja, as do tipo $f_1 \wedge \ldots \wedge f_k$ onde $f_1, \ldots, f_k \in E^*$, chamam-se *decomponíveis*.

Proposição 2.12. *Sejam $\phi, \psi : E \times \ldots \times E \longrightarrow F$ aplicações k-lineares alternadas e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de E. Se, para toda sequência crescente $i_1 < \ldots < i_k$ de k inteiros compreendidos entre 1 e n, tivermos $\varphi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = \psi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$, então $\varphi = \psi$.*

Demonstração: Seja $(j_1, \ldots, j_k)$ uma k-lista qualquer de inteiros entre 1 e n. Se houver elementos repetidos nessa lista, então

$$\varphi(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \psi(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = 0$$

pois φ e ψ são alternadas. Se, porém, os termos da lista são todos distintos, então, por meio de sucessivas transposições, (trocas de posições entre 2 elementos apenas) podemos pôr os números $j_1, \ldots, j_k$ na ordem crescente $i_1 < \ldots, < i_k$. Se são necessárias r transposições, a antisimetria deφ e ψ, juntamente com a hipótese do teorema, nos dão:

$$\varphi(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = (-1)^r \varphi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = (-1)^k \psi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = \psi(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}).$$

Assim, as aplicações k-lineares φ e ψ cumprem a hipótese da Proposição 2.8, logo são iguais. ■

Teorema 2.13. *Seja $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ uma base de E^*. As k-formas $e_I = e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^*$, onde $I = \{i_1 < \ldots < i_k\}$ percorre os subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$ com k elementos, constituem uma base de $\Lambda^k E$. Em particular,* $\dim \Lambda^k E = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$

Demonstração: Dada $\omega \in \Lambda^k E$ qualquer definimos, para cada $I = \{i_1 < \ldots < i_k\}$, $\alpha_I = \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$, onde $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset E$ é a base dual de $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$. A k-forma $\varphi = \sum\limits_I \alpha_I e_I$ é tal que, para toda sequência crescente $j_1 < \ldots < j_k$ de inteiros compreendidos entre 1 e n, tem-se $\varphi(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \sum\limits_I \alpha_I e_I(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \alpha_J = \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$. Segue-se do Teorema 2.12 que $\varphi = \psi$, ou seja, $\omega = \sum \alpha_I e_I$. Isto prova que as k-formas e_I geram $\Lambda^k E$. Além disso, estas formas são linearmente independentes pois de uma combinação linear $\varphi = \sum \alpha_I e_I = 0$ tiramos, para todo $J = \{j_1 < \ldots < j_k\}$, $0 = \varphi(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \alpha_J$. ■

Exemplo 2.14. Sendo $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ uma base de $\mathbb{R}^{3^*}$, consideremos as 2-formas
$e_1^* \wedge e_2^*, e_1^* \wedge e_3^*$ e $e_2^* \wedge e_3^*$. Vamos mostrar que $\beta^* = \{e_1^* \wedge e_2^*, e_1^* \wedge e_3^*, e_2^* \wedge e_3^*\}$ é uma base de $\Lambda^2 \mathbb{R}^3$.

De fato, tome $\omega \in \Lambda^2 \mathbb{R}^3$ e ponha $\alpha_{12} = \omega(e_1, e_2)$, $\alpha_{13} = \omega(e_1, e_3)$ e $\alpha_{23} = \omega(e_2, e_3)$, onde $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$ é a base dual de $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$. Assim temos que a 2-forma $\varphi = \sum \alpha_{ij} e_{ij}$ é tal que

- $\varphi(e_1, e_2) = \alpha_{12}(e_1^* \wedge e_2^*)(e_1, e_2) = \det \begin{pmatrix} e_1^*(e_1) & e_1^*(e_2) \\ e_2^*(e_1) & e_2^*(e_2) \end{pmatrix} = \alpha_{12}$

- $\varphi(e_1, e_3) = \alpha_{13}(e_1^* \wedge e_3^*)(e_1, e_3) = \det \begin{pmatrix} e_1^*(e_1) & e_1^*(e_3) \\ e_3^*(e_1) & e_3^*(e_3) \end{pmatrix} = \alpha_{13}$
- $\varphi(e_2, e_3) = \alpha_{23}(e_2^* \wedge e_3^*)(e_2, e_3) = \det \begin{pmatrix} e_2^*(e_2) & e_2^*(e_3) \\ e_3^*(e_2) & e_3^*(e_3) \end{pmatrix} = \alpha_{23}$

Como $\varphi(e_i, e_j) = \omega(e_i, e_j)$ $\forall i, j = 1, 2, 3$ com $i < j$, temos pelo Teorema 2.12 que $\varphi = \omega$, o que prova que β^* gera $\Lambda^2\mathbb{R}^3$.

Lembremos agora que, escolhendo uma base ortonormal para o espaço vetorial E e chamando-a de *positiva*, declaramos que também são positivas todas as bases ortonormais de E que se obtém a partir desta por meio de matrizes de passagem ortogonais, cujo determinante é igual a 1.

Assim, consideremos a Grassmanniana orientada $Gr_k^+(d)$ como sendo o conjunto dos subespaços orientados de dimensão k em $\mathbb{R}^d$. Os subespaços em $Gr_k^+(d)$ também são representados por matrizes $d \times k$ de posto k. A diferença da Seção 2.1 é que aqui, duas matrizes $p, q \in B_k(d)$ definem o mesmo subespaço orientado se, e somente se, $p = qa$, para alguma matriz a de ordem k e com $\det a > 0$. Isto define a seguinte relação em $B_k(d)$:

$$\eta \equiv^+ \xi \Leftrightarrow \exists a \in Gl(k, \mathbb{R}) \text{ com } \det a > 0, \text{ tal que } \eta = \xi a.$$

Como vimos na Seção 2.1, $Gr_k(d)$ se identifica com o conjunto quociente $B_k(d)/\equiv$ e, no caso da grassmanniana orientada, $Gr_k^+(d)$ se identifica com o conjunto quociente $B_k(d)/\equiv^+$.

A relação entre a grassmanniana $Gr_k(d)$ e a grassmanniana orientada $Gr_k^+(d)$ é estabelecida pela aplicação

$$\begin{aligned} \pi : Gr_k^+(d) &\longrightarrow Gr_k(d) \\ \overline{\xi}^{\,+} &\longmapsto \overline{\xi}. \end{aligned}$$

Esta aplicação retira a orientação dos subespaços e é equivariante com respeito a ação de $Sl(d, \mathbb{R})$, ou seja, $\pi \circ g = g \circ \pi$, para todo $g \in Sl(d, \mathbb{R})$. Além disso,

$$\pi^{-1}(\overline{\xi}) = \{\overline{\xi}^{\,+}, \overline{\xi b}^{\,+}\} \text{ onde } b \in Gl(k, \mathbb{R}) \text{ e } \det b < 0.$$

Assim temos que a aplicação π restrita ao conjunto dos subespaçoes positivamente orientados é sobrejetiva. O mesmo vale para a restrição da aplicação π ao conjunto dos subespaços negativamente orientados. Logo $Gr_k^+(d)$ com a aplicação π é um recobrimento duplo da grassmanniana $Gr_k(d)$.

O mergulho de $Gr_k^+(d)$ na esfera unitária do produto exterior $\Lambda^k\mathbb{R}^d$ com produto interno induzido por algum produto interno de $\mathbb{R}^d$ é dado através da bijeção que associa a cada base ortonormal positivamente orientada $\{e_1, \ldots, e_k\}$ o elemento decomponível correspondente $e_1 \wedge \ldots \wedge e_k$.

A ação de $Sl(d, \mathbb{R})$ na grassmanniana orientada $Gr_k^+(d)$ é dada pela representação canônica de $Sl(d, \mathbb{R})$ em $\Lambda^k\mathbb{R}^d$. Esta representação é denotada por ρ_k e definida como

$$\rho_k(g)(u_1 \wedge \ldots \wedge u_k) = gu_1 \wedge \ldots \wedge gu_k \tag{2.4}$$

Desta forma, esta ação induzida coincide com a ação de $Sl(d, \mathbb{R})$ em $Gr_k^+(d)$. O próximo resultado nos permite localizar as componentes da decomposição de Bruhat.

Proposição 2.15. *Seja β uma base de $\mathbb{R}^d$ e N_β o grupo nilpotente. Então existe $\eta \in Gr_k^+(d)$ tal que a N_β-órbita sobre $Gr_k^+(d)$ é o conjuntos dos raios em $\Lambda^k\mathbb{R}^d$ gerado por elementos decomponíveis que estejam em*

$$\{\xi \in \Lambda^k\mathbb{R}^d : \langle \eta, \xi \rangle \neq 0\}$$

Em $Gr_k^+(d)$ existem duas N_β-órbitas e elas são dadas por $\langle \eta, \xi \rangle > 0$ e $\langle \eta, \xi \rangle < 0$.

Demonstração: Suponhamos primeiramente que β seja uma base ortonormal. Como vimos na seção 2.3, um elemento da órbita aberta é representado por uma matriz $d \times k$ como $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$. Tomando o produto externo das colunas, temos um vetor decomponível cujo produto interno com $\xi_0 = e_1 \wedge \ldots \wedge e_k$ é

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = 1.$$

Reciprocamente, dado um elemento decomponível $\xi = u_1 \wedge \ldots \wedge u_k$, a matriz p cujas colunas são as coordenadas dos $u_i's$ pode ser escrita como

$$p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

onde a é uma matriz $k \times k$ que satisfaz $\det a = \langle \xi, \xi_0 \rangle$, ou seja, ξ está na N_β-órbita e $\eta = \xi_0$ é como desejado. Se a base β não é ortonormal, existe uma aplicação linear invertível g tal que $g\beta$ é ortonormal. Desde que, $N_\beta = g^{-1} N_{g\beta} g$ temos que a N_β-órbita aberta é a imagem sob g^{-1} da $N_{g\beta}$-órbita aberta e, desta forma, o resultado segue para a base $g\beta$. Para vermos que existem duas N_β-órbitas em $Gr_k^+(d)$, basta ver que a N_β-órbita aberta em $Gr_k(d)$ é dividida em duas órbitas em $Gr_k^+(d)$ pois a aplicação $Gr_k^+(d) \to Gr_k(d)$ é dada identificando as antípodas. $\blacksquare$

Capítulo 3

Semigrupos e Cones

Neste capítulo iremos introduzir os conceitos de semigrupos e cones associados a semigrupos. Os semigrupos desempenham um papel fundamental neste trabalho e estaremos particularmente interessados num semigrupo S com interior não vazio em $Sl(d,\mathbb{R})$, do qual analisaremos a ação na variedade de Grassmann. O cone associado ao semigrupo é também um importante conceito deste estudo, já que é fundamental na demonstração do teorema sobre a controlabilidade do sistema bilinear no último capítulo. Por este motivo, serão apresentadas as definições e algumas propriedades básicas que serão utilizadas no transcorrer deste trabalho.

3.1 Semigrupos de grupos de Lie

Um semigrupo é simplesmente um conjunto S não vazio munido de uma operação binária associativa. Quando $(S,.)$ é um semigrupo que possui um elemento $e \in S$ tal que $ex = xe = x, \quad \forall x \in S$, dizemos que S é um monóide. Dado um grupo de Lie G, ou mais geralmente um grupo G, um subconjunto não vazio $S \subset G$ é um subsemigrupo de G se $SS \subset S$, ou seja, se o produto de dois elementos de S ainda estiver em S. Diremos também que S é um semigrupo de G.

Considere $Sl(d,\mathbb{R})$ o grupo das matrizes de determinante 1. O subconjunto das matrizes com entradas não negativas, que denotamos por $Sl^+(d,\mathbb{R})$, é um semigrupo em $Sl(d,\mathbb{R})$. Com efeito, o produto de duas matrizes com entradas não negativas é ainda uma matriz com entradas não negativas. Além disso, como a matriz identidade pertence a $Sl^+(d,\mathbb{R})$ temos que este é um monóide.

Outro exemplo bem conhecido de semigrupo é o seguinte:

Seja G o grupo de Heisenberg, definido pelo conjuntos das matrizes reais de ordem 3×3 da forma $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Este grupo pode ser identificado com $\mathbb{R}^3$ munido do produto

$$(a, b, c).(a', b', c') = (a + a', b + b', c + c' + ab)$$

Considere $S = \{(a, b, c) : a, b \geq 0 \text{ e } 0 \leq c \leq ab\}$. Então S é um semigrupo em G. De fato, se $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \in S$, então $(a_1, b_1, c_1)(a_2, b_2, c_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2+a_1b_2) \in S$ já que $a_1, a_2 \geq 0 \Rightarrow a_1 + a_2 \geq 0$, $b_1, b_2 \geq 0 \Rightarrow b_1 + b_2 \geq 0$ e $0 \leq a_1b_2 + c_1 + c_2 \leq (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$. Este semigrupo pode ser identificado com a região do primeiro octante de $\mathbb{R}^3$ delimitada pela superfície $z = xy$.

Definição 3.1. *Dizemos que um subconjunto não vazio I de um semigrupo S é um ideal à esquerda de S se $SI \subset I$, é um ideal à direita se $IS \subset I$ e, é um ideal se for tanto ideal à esquerda quanto à direita.*

A seguir apresentamos algumas propriedades de semigrupos.

Proposição 3.2. *Seja S um subsemigrupo de um grupo topológico G tal que $int(S) \neq \emptyset$. Então:*

i) *$(int(S))S \cup S(int(S)) \subset int(S)$, ou seja, $int(S)$ é um ideal de S;*

ii) *se $e \in fe(int(S)) \Rightarrow int(S) = int(fe(S))$.*

Demonstração: (i) Vamos mostrar que $gs \in int(S)$ para $g \in int(S)$ e $s \in S$. Tome $g \in int(S)$ e U uma vizinhança de g tal que $U \subset S$. Como $g \in int(S) \subset S$ e S é subsemigrupo $\Rightarrow gs \in S$, logo $gs \in Us$, $\forall s \in S$. Como a translação é uma aplicação aberta, Us é uma vizinhança aberta de gs contida em S. Desta forma, $gs \in int(S)$. Então $int(S)$ é um ideal à direita de S. Analogamente se mostra que $sg \in int(S)$ para $g \in int(S)$ e $s \in S$, o que implica que $int(S)$ é um ideal à esquerda, e portanto, é um ideal.

(ii) Como $S \subset fe(S)$ temos que $int(S) \subset int(fe(S))$. Agora, denote por $U = int(fe(S))$ e tome $s \in U$. Considere T uma vizinhança da e tal que $sT \subset U$ e tome $V = T^{-1}$. Então V é aberta, já que é a imagem de um aberto por uma aplicação aberta, a inversão, e $e \in V$, pois $e = e^{-1} \in T^{-1} = V$, além disso, $sV^{-1} \subset U$ já que, $sV^{-1} = sT \subset U$. Considere $W = V \cap int(S)$. Como $e \in fe(int(S))$ e V é um aberto contendo e, segue que $V \cap int(S) = W \neq \emptyset$. Sendo assim, $sW^{-1} = s(V \cap int(S))^{-1} = sV^{-1} \cap s(int(S))^{-1} \subset sV^{-1} \subset U = int(fe(S)) \subset fe(S)$, isto é, $sW^{-1} \subset fe(S)$. Como a translação é aberta temos que sW^{-1} é um aberto, não vazio, existem $t \in S$, $w \in W$ tais que $sw^{-1} = t$ o que implica que $s = tw \in tW \subset int(S)$ já que $W = V \cap int(S) \subset int(S)$ que é ideal pelo item (i). ■

3.2 Subsemigrupos de grupos compactos

Vamos provar que todo semigrupo de interior não vazio de um grupo de Lie compacto, é na verdade um subgrupo.

Proposição 3.3. *Seja $S \subset G$ um semigrupo compacto. Então a identidade de G pertence a S, ou seja, S é um subgrupo.*

Demonstração: Mostraremos que para $g \in S$ temos que $g^{-1} \in S$ e assim $gg^{-1} = e \in S$. Para isto, tome $g \in S$ qualquer e defina $X = \{g^n : n \in \mathbb{N}^* \subset S\}$. Como S é compacto, a sequência (g^n) admite uma subsequência que converge para um elemento $h \in S$. Temos que $n_{2k} - n_k > 1$ e $g^{n_{2k}-n_k-1} \to hh^{-1}g^{-1} = g^{-1} \in \overline{S} = S$. Logo $g^{-1} \in S$ e portanto, $e = gg^{-1} \in S$. ■

Em outras palavras, o resultado anterior diz que se S é um subsemigrupo compacto não vazio de um grupo topológico G, então S é um grupo compacto.

Proposição 3.4. *Seja G um grupo topológico e $H \subset G$ um subgrupo de interior não vazio em G. Então H é aberto.*

Demonstração: Como $int(H) \neq \emptyset$ podemos considerar $g \in int(H)$ e U uma vizinhança de g tal que $U \subset H$. Para qualquer $h \in H$ temos que $h = h(g^{-1}g) = (hg^{-1})g \in hg^{-1}U \subset$

H. Assim, $hg^{-1}U$ é um aberto contendo h, o que significa que $h \in int(H)$. Logo H é aberto. ∎

Proposição 3.5. *Seja S um subsemigrupo de interior não vazio de um grupo compacto G. Então S é um subgrupo aberto e compacto de G. Consequentemente, $S = G$ se G é conexo. Caso contrário, S contém a componente conexa da identidade de G.*

Demonstração: Como fe(S) é compacto, temos pela Proposição 3.3 que $fe(S)$ é um grupo. Seja $U \subset S \subset fe(S)$ um aberto não vazio. Assim, $U^{-1} \cap S \neq \emptyset$ (pois $U^{-1} \subset \overline{S}$ e todo elemento de $\overline{S}$ é limite de uma sequência de elementos de S), ou seja, existe s tal que $s \in S \cap U^{-1} \Rightarrow s \in S$ e $s^{-1} \in U \subset S \Rightarrow e = ss^{-1} \in int(S)$, pois $s \in S$ e $s^{-1} \in U \subset int(S)$ e $int(S)$ é um ideal de S. Pela Proposição 3.4, temos que $fe(S)$ é também aberto. Desta forma, $fe(S) = int(fe(S)) = int(S) \subset S$ (onde a primeira igualdade é justificada pelo fato de $fe(S)$ ser aberto, e a segunda pelo item (ii) da Proposição 3.2). Portanto S é fechado, e consequentemente, compacto. ∎

3.3 Cones associados a semigrupos

O método utilizado para a demonstração do principal resultado deste trabalho utiliza o cone $L(S_\Gamma)$ associado ao semigrupo S_Γ de um sistema de controle, que será definido no último capítulo. Por esta razão esta seção será dedicada a introduzir o conceito de cones e algumas propriedades úteis para o desenvolvimento deste estudo. Iniciamos com a definição de cone.

Definição 3.6. *Um subconjunto W de um espaço vetorial topológico L é chamado um* cone *se são satisfeitas as seguintes condições:*

i) $W + W \subset W$;

ii) $\mathbb{R}^+ W \subset W$; *e*

iii) $fe(W) = W$, *ou seja, W é topologicamente fechado.*

Definição 3.7. *Dizemos que um cone $W \subset \mathbb{R}^n$ é* invariante *sob o fluxo de uma matriz $A \in gl(n, \mathbb{R})$, ou apenas, A-invariante, se* $\exp(tA)W \subset W, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$.

Seja S um semigrupo de um grupo de Lie G tal que $e \in fe(S)$. O cone associado ao semigrupo S é definido por:

$$L(S) = \{X \in \mathfrak{g} : \quad \exp(tX) \in fe(S), \quad \forall t \geq 0\}.$$

Vamos mostrar que $L(S)$ é realmente um cone.

- Vamos mostrar que $L(S)$ é topologicamente fechado.

  Tome $X \in fe(L(S))$. Então existe uma sequência $(X_n) \in L(S)$ tal que $X_n \longrightarrow X$. Como para cada n temos que $X_n \in L(S)$ então $\exp(tX_n) \in S$. Sendo a exponencial uma aplicação contínua, temos que $\exp(tX_n) \longrightarrow \exp(tX)$. Logo $\exp(tX) \in S$ o que implica que $X \in L(S)$. Portanto $L(S)$ é fechado.

- Vamos mostrar que $L(S) + L(S) \subset L(S)$.

  Tome $X, Y \in L(S)$. Pelo corolário 2.15.5 de [8] temos que:

  $$\exp(t(X+Y)) = \lim_{n\to\infty} (\exp(\frac{t}{n}X)\exp(\frac{t}{n}Y))^n. \tag{3.1}$$

  o que implica que $\exp(t(X+Y)) \in fe(S)$, pois $\exp(\frac{t}{n}X),\ \exp(\frac{t}{n}Y) \in fe(S)$. Portanto $X+Y \in L(S)$.

- Vamos mostrar que $\mathbb{R}^+ L(S) \subset L(S)$.

  Para isto, seja $X \in L(S)$ e $s > 0$. Queremos mostrar que $sX \in L(S)$. Dado $t \geq 0$, temos que $ts > 0$ donde $\exp(tsX) \in fe(S)$ por hipótese. Portanto $sX \in L(S)$.

O próximo resultado é uma propriedade básica do cone $L(S)$.

Proposição 3.8. *Consideremos $L(S)$ o cone associado ao semigrupo S. Se $\pm A \in L(S)$, então para todo $t \geq 0$ temos:*

$$\exp(t\mathrm{ad}(A))L(S) \subset L(S).$$

Demonstração: Tomemos $B \in L(S)$ e $t \geq 0$. Queremos mostrar que $\exp(t\mathrm{ad}(A))B \in L(S)$. O fato de que $\pm A \in L(S)$ implica que $\exp(tA), \exp(-tA) \in \mathrm{fe}(S),\ \forall t \geq 0$. Como $B \in L(S)$ temos também que $\exp(tB) \in \mathrm{fe}(S),\ \forall t \geq 0$. Pela comutatividade dos diagramas abaixo,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "Ad"] & Aut(\mathfrak{g}) \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "ad"] & End(\mathfrak{g}) \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "I_g"] & G \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "Ad_g"] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

onde $I_g(x) = gxg^{-1}$, $\forall x \in G$, temos:

$$\exp(s\exp(t\mathrm{ad}(A))B) = \exp(s\mathrm{Ad}_{\exp(tA)}B) = \exp(tA)\exp(sB)\exp(-tA) \in \mathrm{fe}(S),$$

para todo $s, t \geq 0$, já que $\exp(tA) \in \mathrm{fe}(S)$, $\exp(sB) \in \mathrm{fe}(S)$ e $\exp(-tA) \in \mathrm{fe}(S)$. Portanto $\exp(t\mathrm{ad}(A))B \in \text{Ł}(S)$, $\forall t \geq 0$, e assim temos $\exp(t\mathrm{ad}(A))L(S) \subset L(S)$. ■

Assim como definimos o cone $L(S)$ associado ao semigrupo $S \subset Gl(n, \mathbb{R})$, definimos agora, para $W \subset \mathbb{R}^n$ o semigrupo de compressão por:

$$S_W = \{g \in GL(n, \mathbb{R}) \mid gW \subset W\}$$

Proposição 3.9. *Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ um cone e $A \in gl(n, \mathbb{R})$. Então W é A-invariante se, e somente se, $A \in L(S_W)$.*

Demonstração: Suponha que W é A-invariante. Assim temos por definição que $\exp(tA)W \subset W$, $\forall t \geq 0$, ou seja, $\exp(tA) \in S_W$, o que implica que $A \in L(S_W)$. Reciprocamente, suponha agora que $A \in L(S_W)$. Assim, $\exp(tA) \in S_W$, $\forall t \geq 0$, o que implica que, $\exp(tA)W \subset W$, $\forall t \geq 0$, e portanto temos que W é A-invariante. ■

Proposição 3.10. *Seja W um cone e $A \in gl(n, \mathbb{R})$. Se para todo $x \in W$ tivermos que $Ax \in W$, então* $\exp(tA)x \in W$, $\forall t \geq 0$.

Demonstração: Seja $x \in W$. Como $Ax \in W$ então, por indução concluímos que $A^n x \in W$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e como W é um cone temos então que

$$\tfrac{t^n}{n!}A^n x = \tfrac{(tA)^n}{n!}x \in W, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ e daí } S_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{(tA)^i}{i!}x \in W, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Agora, do fato que W é um cone, concluímos que

$$\exp(tA)x = \lim_{n\to\infty} S_n \in W, \quad \forall t \geq 0.$$

■

Capítulo 4

Conjunto de Controle

Neste capítulo nossa atenção está voltada para as ações de um grupo de Lie G sobre uma variedade diferenciável M. Dado um grupo de Lie G e $S \subset G$ um semigrupo com interior não vazio, estamos interessados nos conjuntos de controle e conjuntos de controle invariantes para a ação de S em M. Apresentamos alguns conceitos básicos e algumas propriedades de conjuntos de controle invariantes, cuja existência é garantida pelo teorema que diz que se a variedade M é compacta, sempre existem conjuntos de controle invariantes para a ação de S em M.

4.1 Conceitos básicos

Nesta seção são apresentadas as definições básicas dos conceitos ligados a ações de semigrupos sobre variedades diferenciáveis. Aqui G denotará um grupo de Lie agindo transitivamente sobre uma variedade diferenciável M.

Definição 4.1. *Dizemos que um semigrupo S é* acessível a partir de um ponto $x \in M$ *se* $int(Sx) \neq \emptyset$ *e é* acessível *se for acessível a partir de todo $x \in M$.*

Definição 4.2. *O semigrupo S é dito* controlável a partir de um ponto $x \in M$ *se* $Sx = M$ *e, é* controlável *sobre M se for controlável a partir de todo ponto $x \in M$.*

Quando S é controlável sobre M dizemos também que S *age transitivamente* sobre M.

Nesta seção S denota um semigrupo de um grupo de Lie G, agindo sobre uma variedade M. Também assumiremos como hipótese adicional que o interior do semigrupo S é não vazio, isto é, $int(S) \neq \emptyset$. Adotada essa hipótese verificamos que os semigrupos S e $S^{-1} := \{s^{-1} : s \in S\}$ são acessíveis pois $(intS)x$ (respec. $(intS^{-1})x$) é um subconjunto aberto contido em $int(Sx)$ (respec. em $int(S^{-1}x)$).

Definição 4.3. *Um* conjunto de controle *para o semigrupo S é um subconjunto $D \subset M$ que satisfaz as seguintes condições:*

i) $int(D) \neq \emptyset$;

ii) $D \subset fe(Sx) \quad \forall x \in D$; *e*

iii) *D é maximal com relação as propriedades (i) e (ii), ou seja, se $D' \subset M$ satisfaz (i) e (ii) e $D \subset D'$, então $D' = D$.*

A condição (ii) diz que dados dois pontos quaisquer $x, y \in D$ então $y \in fe(Sx)$. Vejamos agora algumas propriedades de conjuntos de controle. A primeira delas diz que os conjuntos de controle coincidem ou são disjuntos, e para demonstrá-la, precisamos do seguinte lema.

Lema 4.4. *Sejam $a, b, c \in M$ tais que $a \in fe(Sb)$ e $b \in fe(Sc)$. Então $a \in fe(Sc)$.*

Demonstração: Como $a \in fe(Sb)$ e $b \in fe(Sc)$, consideremos as sequências (x_n) e (y_n) de pontos de S tais que $x_n c \to b$ e $y_n b \to a$. Então, para toda vizinhança V de a, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_{n_0} b \in V$, ie, a partir de n_0 os termos da sequencia (x_n) estão na vizinhança V de a. Como a ação é contínua e $x_n c \to b$ temos que $y_{n_0} x_n c \to y_{n_0} b$. Desta forma, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $y_{n_0} x_1 c \in V$. Portanto, $a \in fe(Sc)$. ∎

Proposição 4.5. *Sejam D e D' dois conjuntos de controle. Então $D = D'$ ou $D \cap D' \neq \emptyset$.*

Demonstração: Suponhamos que $D \cap D' \neq \emptyset$ e tomemos $x \in D \cap D'$. É claro que $int(D \cup D') \neq \emptyset$ já que $intD \neq \emptyset$. Sejam $a, b \in D \cup D'$ elementos quaisquer. Pela condição (ii) da definição 4.3, $a \in fe(Sx)$ e $x \in fe(Sb)$. Pelo lema anterior concluímos que $a \in fe(Sb)$. Pelo que acabamos de mostrar, $D \cup D' \subset fe(Sb) \quad \forall b \in D \cup D'$. Pela maximalidade de D temos que $D \cup D' = D$. Logo $D \subset D'$ e novamente usando a maximalidade dos conjuntos de controle, concluímos que $D = D'$. ∎

Proposição 4.6. *Todo subconjunto $D \subset M$ que satisfaz as condições (i) e (ii) da definição 4.3 está contido em um conjunto de controle.*

Demonstração: Seja $\mathcal{A} = \{C \subset M : \ D \subset C \ e \ C \ satisfaz \ (i) \ e \ (ii) \ da$ Def. 3.1.3$\}$ ordenado pela inclusão. Como $D \in \mathcal{A}$ temos que $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Consideremos em $\mathcal{A}$ uma cadeia arbitrária $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ e coloquemos

$$U = \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha.$$

Tomando $x, y \in U$, então existem $\alpha_1, \alpha_2 \in I$ tais que $x \in C_{\alpha_1}$ e $y \in C_{\alpha_2}$. Mas segundo a ordem em $\mathcal{A}$ temos que $C_{\alpha_1} \subset C_{\alpha_2}$ ou $C_{\alpha_2} \subset C_{\alpha_1}$, então $y \in fe(Sx)$. Isto mostra que $U \in \mathcal{A}$ e portanto, toda cadeia em $\mathcal{A}$ é limitada superiormente. Pelo lema de $Zorn$, $\mathcal{A}$ possui elementos maximais. Seja C_M um destes elementos maximais. Pela definição de $\mathcal{A}$ temos que $D \subset C_M$ e C_M é o conjunto de controle desejado. ∎

Um fato que será utilizado com muita frequência é que o fecho e o interior da órbita pelo semigrupo S de um ponto qualquer da variedade M são invariantes pela ação de S.

Proposição 4.7. *Para todo $x \in M$ temos que, $S(int(Sx)) \subset int(Sx)$ e $S(fe(Sx)) \subset fe(Sx)$.*

Demonstração: Dados $g \in S$ e $z \in int(Sx)$, existe $U \subset M$ aberto tal que $z \in U \subset Sx$. Como a ação é aberta (homeomorfismos), temos que gU é um aberto e $gz \in gU \subset gSx \subset Sx$. Logo $gz \in int(Sx)$. Agora, se $g \in S$ e $y \in fe(Sx)$ então existe $(g_n x)$ sequência em Sx que converge para y. Pelo fato da ação ser contínua segue que $gg_n x \to gy$, e portanto, $gy \in fe(Sx)$. ∎

Como foi visto na definição 4.3 a ação de um semigrupo em um conjunto de controle pode não ser transitiva, o que se tem é uma transitividade aproximada. Sendo assim, podemos destacar o seguinte subconjunto de um conjunto de controle:

Definição 4.8. *Seja D um conjunto de controle para o semigrupo S. Definimos o conjunto de transitividade para D como sendo:*

$$D_0 = \{x \in D : \ x \in (int(S))x\}.$$

A seguir listaremos algumas propriedades do conjunto de transitividade D_0, que deixarão mais claro a questão da transitividade da ação no conjunto de controle.

Proposição 4.9. *Seja D um conjunto de controle para o semigrupo S e seja D_0 o seu conjunto de transitividade. Se $D_0 \neq \emptyset$, então:*

i) $D_0 = (intS)D \cap D$;

ii) $D \subset (intS)^{-1}x, \ \forall x \in D_0$;

iii) $D_0 = (intS)x \cap (intS)^{-1}x, \ \forall x \in D_0$;

iv) *Para todo $x, y \in D_0$, existe $g \in intS$ com $gx = y$;*

v) *D_0 é denso em D;*

vi) *D_0 é S-invariante em D no sentido que:*

$$\textit{se } h \in S, \ x \in D_0 \textit{ e } hx \in D, \textit{ então } hx \in D_0$$

Demonstração: (i)Vamos mostrar que $D_0 \subset (int(S))D \cap D$. Para isto tome $x \in D_0$. Então $x \in D$ e $x \in (intS)x$, isto é, $x \in D \cap (int(S))x \subset D \cap (int(S))D$. Logo $D_0 \subset D \cap (int(S))D$. Agora vamos mostrar que $[(int(S))D \cap D] \subset D_0$. Para isto, tome $x \in (int(S))D \cap D$. Então existem $h \in int(S)$ e $y \in D$ tais que $x = hy$. Daí, $h^{-1}x = y$, ou seja, $(int(S))^{-1}x \cap D \neq \emptyset$. Como $D \subset fe(Sx)$ e D possui pontos interiores, também temos que $Sx \cap D \neq \emptyset$. Seja então $z \in Sx \cap D$. Como $D \subset fe(Sz)$ e $Sz \cap (int(S))^{-1}x \neq \emptyset$ existem $g \in S$ e $h \in int(S)$ tal que $gz = h^{-1}x$. Logo $hgz = x$, ou seja, $x \in (int(S))Sz$, mas $z \in Sx$ e, como $int(S)$ é um ideal, temos que $(int(S))Sz \subset (int(S))x$, (já que $z = s_1x$). Logo $x \in (int(S))x$ (pois $x \in (int(S))Sz \subset (int(S))x$). Como por hipótese $x \in D \Rightarrow x \in D_0$.

(ii) Seja $x \in D_0$. Queremos mostrar que $D \subset (int(S))^{-1}x$. Para isto, seja $y \in D$. Pelo item anterior temos que $(int(S))^{-1}x \cap D \neq \emptyset$. Mas como $D \subset fe(Sy)$ temos que $Sy \cap (int(S))^{-1}x \neq \emptyset$. Assim existem $g \in S$ e $h \in int(S)$ tais que $gy = h^{-1}x$, logo $y = g^{-1}h^{-1}x$. Como $g^{-1}h^{-1} = (hg)^{-1} \in (int(S))^{-1}$ (já que $h \in int(S)$ que é ideal, então $hg \in int(S)) \Rightarrow \ y = g^{-1}h^{-1}x \in (int(S))^{-1}x$.

(iii) Seja $x \in D_0$ e $y \in (int(S))^{-1}x \cap (int(S))x$. Assim existem $g, h \in int(S)$ tais que $y = h^{-1}x = gx$. Logo $y \in fe(Sx)$. Para mostrar que $y \in D$, mostraremos que $D' := D \cup y$ satisfaz as condições (i) e (ii) da definição 4.3, e como D é um conjunto de controle concluiremos, pela maximalidade, que $D' = D$. Em primeiro lugar, $int(D') \neq \emptyset$, pois $int(D) \neq \emptyset$. Para provarmos que D' satisfaz a condição (ii) da definição 4.3 devemos mostrar as seguintes afirmações:

a) $D \subset fe(Sz), \ \ \forall z \in D$. O que é claro, já que D é um conjunto de controle.

b) $z \in fe(Sy), \ \ \forall z \in D$. De fato, temos por definição que $z \in fe(Sx)$. Agora sabemos que existe $h \in int(S)$ com $y = h^{-1}x$, assim $x = hy \in Sy \subset fe(Sy)$. Segue do Lema 4.4 que $z \in fe(Sy)$.

c) $y \in fe(Sz), \ \ \forall z \in D$. De fato, temos que $y = gx$ para algum $g \in intS$. Desta forma, $y \in Sx \subset fe(Sx)$. Temos ainda que $x \in fe(Sx)$ para qualquer $z \in D$, logo $fe(Sx) \subset fe(Sz), \ \forall z \in D$. Portanto $y \in fe(Sz), \ \forall z \in D$.

d) $y \in fe(Sy)$. Da igualdade $y = gx = h^{-1}x$ temos que $x = hy$ e, consequentemente, $y = ghy$. Portanto, $y \in Sy \subset fe(Sy)$. Concluímos então que $D' \subset fe(Sx) \ \ \forall x \in D'$. Portanto D' satisfaz as duas primeiras condições de conjuntos de controle. Pela maximalidade de D como conjunto de controle temos que $D' = D$, ou seja, $y \in D$. Já que $y = ghy$, com $g, h \in int(S)$, temos que $y \in (int(S))y$, ie, $y \in D_0$. Para a inclusão oposta, dados $x, y \in D_0$ temos, pelo item (ii), que $y \in (int(S))^{-1}x$ e $x \in (int(S))^{-1}y$. Portanto $y \in (int(S))x \cap (int(S))^{-1}x$.

(iv) Pelo item anterior temos que $D_0 = (int(S))y \cap (int(S))^{-1}y, \ \forall y \in D_0$. Assim, se $x, y \in D_0$ temos que $x = hy$, para algum $h \in int(S)$.

(v) Tomemos $x \in D_0$. Pelo item (iii) temos que $D_0 = (int(S))x \cap (int(S))^{-1}x$. Já que $(int(S))x$ e $(int(S))^{-1}x$ são abertos, temos $fe(D_0) \supset (fe((int(S))x)) \cap (int(S))^{-1}x$. Pelo item (ii), $D \subset (int(S))^{-1}x$. Além disso, $D \subset fe(Sx) \subset fe(int(S(x)))$, pois $Sx \subset S(int(S))x \subset (int(S))x$. Logo, $D \subset fe((int(S))x)$. Portanto, $D \subset fe(D_0)$ e D_0 é denso em D.

(vi) Tomemos $h \in S$ e $x \in D_0$. Então existe $g \in int(S)$ com $gx = x$. Logo, $hx = hgx$ e, consequentemente, $hx \in (int(S))x$. Temos por hipótese que $hx \in D$. Pelo item (ii) $D \subset (int(S))^{-1}x$, assim $hx \in (int(S))^{-1}x$. Portanto, $hx \in (int(S))^{-1}x \cap (int(S))x$, o que pelo item (iii) implica que $hx \in D_0$. ■

Proposição 4.10. *Sendo D um conjunto de controle para ação do semigrupo S e D_0 seu conjunto de transitividade temos que, se $SD \subset D$ ou se $S^{-1}D \subset D$, então $D_0 \neq \emptyset$. No segundo caso, $D_0 = D$.*

Demonstração: Suponha $SD \subset D$. Então $(intS)D \subset D$ e consequentemente $(intS)D \cap D \neq \emptyset$. Pelo item (i) da proposição anterior, $D_0 \neq \emptyset$. Suponha agora que $S^{-1}D \subset D$ e tomemos $x \in D$. Temos então que $(intS)^{-1}x$ é aberto e está contido em D, assim $Sx \cap (intS)^{-1}x \neq \emptyset$. Logo, existem $g \in S$, $h \in intS$ com $gx = h^{-1}$, ou seja, $hgx = x$. Portanto, $x \in (intS)x$. Como $x \in D$ temos, por definição, que $x \in D_0$. ■

Nem sempre o conjunto de transitividade D_0 de um conjunto de controle D é não vazio, mas quando isso ocorre D recebe a denominação especial de *conjunto de controle efetivo.*

4.2 Conjuntos de controle invariantes

Pelo que vimos até agora, os conjuntos de controle introduzidos na Definição 4.3 não são invariantes sob a ação de um semigrupo S. Nesta seção vamos introduzir o conceito de conjuntos de controle invariantes, que na verdade, são conjuntos de controle maximais para uma certa ordem parcial na família dos conjuntos de controle, a qual definiremos a seguir. Assim como antes, G será um grupo de Lie agindo transitivamente sobre uma variedade M e $S \subset G$ um semigrupo contendo pontos interiores, ou seja, S é acessível. Também denotaremos por ξ a *família* dos conjuntos de controle de M para a ação de S.

Sendo $D_1, D_2 \in \xi$, dizemos que $D_1 \leq D_2$ se existir $x \in D_1$ tal que $fe(Sx) \cap D_2 \neq \emptyset$. Note que $fe(Sx) \cap D_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow D_2 \subset fe(Sx)$.

Proposição 4.11. *Se $D_1, D_2 \in \xi$ e $D_1 \leq D_2$ então $D_2 \cap fe(Sx) \neq \emptyset$ para todo $x \in D_1$, ou seja, $D_2 \subset fe(Sx)$, para todo $x \in D_1$.*

Demonstração: Temos que $D_1 \leq D_2$, então existe $x_0 \in D_1$ tal que $fe(Sx_0) \cap D_2 \neq \emptyset$. Seja $y \in fe(Sx_0) \cap D_2$ e tomemos $x \in D_1$ qualquer. Assim, pelo item (ii) da definição 4.3, segue que $x_0 \in fe(Sx)$ e pelo lema 4.4 concluímos que $y \in fe(Sx)$ e portanto $fe(Sx) \cap D_2 \neq \emptyset$. ■

A relação "$\leq$"é uma relação de ordem parcial, ou seja, satisfaz as propriedades: reflexiva, transitiva e antisimétrica. A demonstração disto pode ser encontrada, por exemplo, em [18].

Dizemos que um conjunto de controle D é maximal se satisfaz a propriedade que: se $C \in \xi$ e $D \leq C$ então $C = D$.

Proposição 4.12. *Suponhamos que a variedade M seja compacta e que $C \in \xi$ seja um conjunto de controle maximal com relação a ordem "$\leq$"introduzida anteriormente. Então C satisfaz as seguintes propriedades:*

i) *para todo $x \in C$, tem-se que $fe(Sx) = fe(C)$;*

ii) *C é maximal com a propriedade (i).*

Ver Proposição 3.2.15 de [18].

Temos grande interesse nos conjuntos que satisfazem as propriedades acima, por isso destacamos definindo:

Definição 4.13. *Dizemos que $C \subset M$ é um* conjunto de controle invariante *para S se satisfaz:*
i) $fe(Sx) = fe(C)$, $\forall x \in C$;
ii) C é maximal com a propriedade (i).

Notemos que em nenhum momento foi exigido que C tenha interior não vazio, mas como estamos supondo S acessível, isso é uma conseqüência da seguinte proposição.

Proposição 4.14. *Todo conjunto de controle invariante para S é fechado. Além disso se C é um desses conjuntos então $int(C) \neq \emptyset$.*

Demonstração: Consideremos C um c.c.i e $x \in fe(C)$. Tomando $y \in C$ temos que $fe(Sy) = fe(C)$, ou seja, $x \in fe(Sy)$. Como já foi visto que o fecho da órbita é invariante pela ação de S, segue que $Sx \subset fe(Sy) = fe(C)$. Ainda, como $int(Sx) \neq \emptyset$ temos que Sx não pode estar contida na fronteira de C, o que significa que $Sx \cap C \neq \emptyset$. Sendo assim, seja $w \in Sx \cap C$. Temos que

$$fe(C) = fe(Sw) \subset fe(Sx) \subset fe(C)$$

donde segue que $fe(Sx) = fe(C) = fe(feC)$, $\forall x \in fe(C)$. Logo, $fe(C)$ é um c.c.i que contém C, e pela maximalidade dos conjuntos de controle, temos que $C = fe(C)$, ou seja, C é fechado. Note ainda que

$$Sx \subset fe(Sx) \subset fe(C) = C, \quad \text{i.é, } Sx \subset C$$

e como $int(Sx) \neq \emptyset$ temos que $int(C) \neq \emptyset$. ■

O próximo resultado garante que sendo o semigrupo S acessível, então todo conjunto de controle invariante é um conjunto de controle.

Proposição 4.15. *Todo conjunto de controle invariante para a ação de S é um conjunto de controle para S.*

Demonstração: Considere C um conjunto de controle invariante para a ação de S. Sabendo pela proposição anterior que $int(C) \neq \emptyset$ e também que C é fechado segue que $C \subset fe(Sx)$, para todo $x \in C$. Agora vamos mostrar a maximalidade de C como conjunto de controle. Suponhamos que exista D contendo C tal que $D \subset fe(Sx)$, para todo $x \in D$. Deste modo, $fe(Sz) = fe(C) \subset fe(D)$ para todo $z \in C$, e portanto, $fe(D) = fe(Sz)$, para todo $z \in C$ (já que $fe(D) \subset fe(Sz) \subset fe(D)$). Resta mostrar que $fe(Sz) \subset fe(D)$, para todo $x \in D$. Para isto, tomemos $y \in fe(Sx)$, e $z \in C$. Como $x \in D \subset fe(Sz)$, para todo $x \in D$ temos que $fe(D) = fe(Sx)$. Segue da maximalidade de C como conjunto de controle invariante que C é um conjunto de controle. ■

O próximo resultado utiliza a acessibilidade do semigrupo S para mostrar que vale a recíproca da Proposição 4.12.

Proposição 4.16. *Se D é um conjunto de controle invariante, então D é maximal com relação a ordem "$\leq$ ".*

Demonstração: Com efeito, consideremos D' um conjunto de controle tal que $D \leq D'$. Assim existe $x \in D$ tal que $fe(Sx) \cap D' \neq \emptyset$. Como D é um conjunto de controle invariante, temos que $D = fe(Sx)$ o que implica que $D \cap D' \neq \emptyset$. Mas como dois conjuntos de controle ou são disjuntos ou coincidem, segue que $D = D'$. ■

A seguir temos um resultado que é um refinamento de Proposição 4.9 para conjuntos de controle invariante.

Proposição 4.17. *Suponha que $M = G/L$ seja um espaço homogêneo compacto e seja S um semigrupo de G com interior não vazio. Sejam C um c.c.i. para a ação de S sobre M e $C_0 = (intS)C$. Então são válidas as afirmações:*

(i) $C_0 = int(Sx), \ \forall x \in C_0$;

(ii) $SC_0 \subset C_0 = Sy = (intS)y, \ \forall y \in C_0$;

(iii) $fe(C_0) = C$;

(iv) $C_0 = \{x \in C : \exists g \in S \quad com \ gx = x\}$;

(v) $C_0 = \{x \in C : \exists g \in intS \quad com \ g^{-1}x \in C\}$.

Ver Proposição 3.2.9 de [18].

Para conjuntos fechados satisfazendo a condição (i) da Definição 4.13, a propriedade (ii) da mesma é automaticamente satisfeita.

Proposição 4.18. *Se $C \subset M$ é não vazio, satisfaz a condição (i) da Definição 4.13 e é fechado então C é um conjunto de controle invariante para S.*

Demonstração: É necessário apenas mostrar a maximalidade de C. Para isto, suponhamos que $C \subset C'$, onde C' é um certo conjunto que satisfaz a condição (i) da definição 4.13. Tomando $x \in C$ temos que $x \in C'$, e assim

$$C \subset C' \subset fe(Sx) = fe(C) = C$$

Portanto temos $C = C'$. ■

Neste contexto vale que C é um conjunto de controle invariante se, e somente se, satisfaz a condição (i) da Definição 4.13 e é fechado.

Também, visto que um conjunto de controle invariante é fechado temos que $fe(Sx) = C$ para todo $x \in C$, e em particular, $C = \bigcap_{x \in C} fe(Sx)$. Assim tempos uma pista para a obtenção de conjuntos de controle invariantes, como mostra o próximo resultado.

Proposição 4.19. *Se* $C = \bigcap_{b \in M} fe(Sb) \neq \emptyset$*, então* C *é um conjunto de controle invariante para a ação de* S *e é único.*

Demonstração: Primeiramente mostraremos que C é um conjunto de controle invariante. Para isto, notemos inicialmente que como C é a intersecção de fechados, C é fechado. Assim, pela Proposição 4.18, para mostrarmos que C é um conjunto de controle invariante precisamos mostrar apenas que $fe(Sy) = C$ para todo $y \in C$. Sendo assim, seja $y \in C = \bigcap_{x \in M} fe(Sx)$. É claro que, em particular vale que $y \in fe(Sx)$ para todo $x \in C$. Para a inclusão oposta, seja $y \in fe(Sw)$ para algum $w \in C$. Como $w \in Sx$ para todo $x \in M$ segue que $fe(Sw) \subset fe(Sx)$ para todo $x \in M$ o que implica que $y \in fe(Sx)$ para todo $x \in M$. Portanto $y \in C = \bigcap_{x \in M} fe(Sx)$. Para mostramos a unicidade consideremos C_1 e C_2 conjuntos de controle invariante para a ação de S. Neste caso, $\forall x \in C_1$ temos que $\mathrm{fe}(Sx) = \mathrm{fe}(C_1)$ e $\forall y \in C_2$ temos que $\mathrm{fe}(Sy) = \mathrm{fe}(C_2)$. Pela hipótese temos que $\mathrm{fe}(S) \cap \mathrm{fe}(Sy) \neq \emptyset$ e dai $\mathrm{fe}(C_1) \cap \mathrm{fe}(C_2) \neq \emptyset$. Como $int(S) \neq \emptyset$ então C_1 e C_2 são fechados e dai, pela Proposição 4.5 $C_1 = C_2$. ■

A seguinte proposição estabelece uma condição para a controlabilidade da ação de S em M em termos de conjuntos de controle.

Proposição 4.20. *Suponha que* $C = \bigcap_{x \in M} fe(Sx) \neq \emptyset$ *seja o único conjunto de controle invariante para a ação de* S *e que exista um único conjunto de controle invariante para* S^{-1}*, digamos,* C^-*, tal que* $int(C) \cap int(C^-) \neq \emptyset$*. Então* S *age transitivamente em* M*.*

Demonstração: Pela Proposição 4.14 C é fechado. Assim $SC \subset C$, o que implica que $C_0 \neq \emptyset$ pelo item (vii) da Proposição 4.9. Pelo item (iii) da mesma proposição, temos que se $x \in C_0$ então $x \in (int(S))^{-1}x$ e como $x \in C$ temos que $x \in fe(Sy)$ para todo $y \in M$ (pela definição de C). Desta maneira, $x \in (int(S))^{-1} \cap fe(Sy)$. Logo existe uma sequência

$(a_n y)$ em Sy que converge para x e está em $(int(S))^{-1}x$. Portanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $a_n y \in (int(S))^{-1}x$. Deste modo, $a_n y = g^{-1}x$ para algum $g \in (int(S))^{-1}$, ou seja, $ga_n y = x$. Isto significa que se $x \in C_0$ e $y \in M$ então $x \in Sy$. Consequentemente, para todo $y \in M$ existe $s \in S$ tal que $sy = x$. Assim, $s^{-1}x = y$ para todo $y \in M$ o que mostra que $S^{-1}x = M$. Pela Proposição 4.9 C_0 é denso em C. Logo $(int(C^-)) \cap C_0 \neq \emptyset$. Seja $x \in (int(C^-)) \cap C_0$, então como $x \in C_0$ temos que $S^{-1}x = M$ e, do fato que $S^{-1}x \subset C^-$, pois C^- é S^{-1}-invariante, temos que $M - S^{-1}x \subset C$, logo $C^- = M$. Como $SC^- \subset M = C^-$ temos, pelo item (vii) da Proposição 4.5 que $C_0^- = C^-$. Logo $C_0^- = M$. Assim, $S^{-1}x = M$ para todo $x \in M$, ou seja, dados $x, y \in M$ quaisquer existe $g \in S$ tal que $g^{-1}x = y$ ou, equivalentemente, $gy = x$. Portanto, S age transitivamente em M. ∎

O próximo resultado garante que, no caso da variedade M ser compacta, então está garantida a existência de pelo menos um conjunto de controle invariante.

Proposição 4.21. *Se M for compacta então existe pelo menos um conjunto de controle invariante C.*

Demonstração: Para provarmos a existência do conjunto de controle invariante usaremos o Lema de Zorn. Para isto tome $x \in M$ fixo e considere a família de conjuntos:

$$\mathcal{O}_x = \{fe(Sy) : fe(Sy) \subset fe(Sx),\ y \in M\}.$$

Esta família é claramente não vazia já quem contém $fe(Sx)$. Consideremos em $\mathcal{O}_x$ e relação de ordem dada pela inclusão de conjuntos e tomemos uma cadeia totalmente ordenada $\{fe(Sy)\}_{y \in I}$ com índices I. Temos que a cadeia tomada forma uma sequência de subconjuntos compactos encaixados, logo

$$\bigcap_{y \in I} fe(Sy) \neq \emptyset.$$

Sendo assim, tomando $z \in \bigcap_{y \in I} fe(Sy)$, temos que $fe(Sz) \in \mathcal{O}_x$ e $fe(Sz) \subset fe(Sy)$ para todo $y \in I$. Logo $fe(Sz)$ é um limitante inferior da cadeia e, pelo lema de Zorn temos que $\mathcal{O}_x$ possui um elemento minimal $C = fe(Sw)$, para algum $w \in M$. Tomando $z \in fe(Sw) = C$ e $b \in fe(Sz)$ temos que $b \in fe(Sw) = C$, ou seja, $fe(Sz) \subset C$. Como

$fe(Sz) \in \mathcal{O}_x$ e C é minimal em $\mathcal{O}_x$ devemos ter $fe(Sz \subset C = fe(C)$. Portanto C é um conjunto de controle invariante. ■

Capítulo 5

Conjuntos de Controle na variedade de Grassmann

Neste capítulo apresentamos os teoremas que serão fundamentais na demonstração da controlabilidade do sistema bilinear nas condições de Jurjdevik e Kupka. Na primeira seção apresentamos propriedades dos conjuntos de controle para a ação de um semigrupo na Grassmanianna, como a unicidade do conjunto de controle invariante. Na seção seguinte aparece o que conceito de tipo parabólico de um semigrupo S, além de resultados que nos permitem obter informações à respeito da ação de S na Grassmanniana. Na seção seguinte mergulhamos a Grassmaniana no produto exterior e apresentamos o Teorema 5.4 e a Proposição 5.8 que exercem papel fundamental na demonstração do teorema de Jurjdevik e Kupka que apresentaremos no próximo capítulo.

5.1 Conjuntos de controle na variedade Grassmanniana

Nesta seção restringiremos nossa atenção ao estudo dos conjuntos de controle nas variedades Grassmannianas. Os resultados gerais da teoria de controle não serão aqui demonstrados e sim utilizados na obtenção de resultados na situação paticular considerada. Para isto, em toda esta seção S será um semigrupo de interior não vazio de $Sl(d,\mathbb{R})$ e k um inteiro entre 1 e d. Nossa primeira observação é que, como $Gr_k(d)$ é compacta existem conjuntos de controle invariante para a ação de S em $Gr_k(d)$. Veremos agora a unicidade.

Sendo S um subsemigrupo de $Sl(d,\mathbb{R})$ e, assumindo que $int(S) \neq \emptyset$ temos que S age nas Grassmannianas da seguinte forma:

$$S \times Gr_k(d) \to Gr_k(d) \tag{5.1}$$

$$(g, \overline{\xi}) \mapsto g\overline{\xi}$$

Proposição 5.1. *O conjunto de controle invariante para a ação de S em $Gr_k(d)$ é único e dado por*

$$\bigcap_{\xi \in Gr_k(d)} fe(S\xi). \tag{5.2}$$

Demonstração: Segundo a Proposição 4.19 basta mostrar que $\bigcap_{\xi \in Gr_k(d)} fe(S\xi) \neq \emptyset$. Na Seção 2.3 se, em relação a alguma base $\beta = \{e_1, \ldots, e_d\}$ de $\mathbb{R}^d$, N_β denota o grupo nilpotente das matrizes triangulares inferiores em relação a base β, então existe $\xi_o \in Gr_k(d)$ tal que a órbita $N_\beta \xi_0$ é aberta e densa em $Gr_k(d)$. Além disso, como S é um semigrupo de interior não vazio, existem elementos "split regulares"no interior de S. Assim podemos supor, sem perda de generalidade que existe $h = diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\} \in int(S)$ e daí, $h^m \overline{\xi_0} = \overline{\xi_0}$, quando $m \to \infty$. Mais ainda, se $\overline{\xi} \in N_\beta \xi_0$ então $h^m \overline{\xi} \to \overline{\xi_0}$ quando $m \to \infty$, mostrando que $\overline{\xi_0}$ é um atrator. Por esta razão $\overline{\xi_0} \in fe(S\xi)$, para todo $\overline{\xi} \in Gr_k(d)$ e portanto $\bigcap_{\xi \in Gr_k(d)} fe(S\xi) \neq \emptyset$. ■

No que segue denotaremos o único conjunto de controle invariante para ação do semigrupo S na grassmianna $Gr_k(d)$ por $C^k = \bigcap_{\xi \in Gr_k(d)} fe(S\xi)$.

Vimos no Capítulo 4 num contexto mais geral sobre conjuntos de controle, que existe um subconjunto $C_0 \subset C$ que é denso em C e S-invariante, ou seja, $g\xi \in C_0$ se $\xi \in C_0$ e $g \in S$. Além disso, como vimos na Definição 4.8, C_0 é o conjunto dos pontos fixos para os elementos no $int(S)$, ou seja,

$$C_0 = \{\xi \in C : \xi \in (intS)\xi\}$$

e para qualquer par $\xi, \eta \in C_0$, existe $g \in int(S)$ tal que $g\xi = \eta$. É por esta última propriedade que este subconjunto recebe o nome de conjunto de transitividade para C.

No caso particular do conjunto de controle nas Grassmannianas, o conjunto de transitividade , denotado por C_0^k, é o conjunto dos pontos fixos que são atratores para os elementos "split regular" no $int(S)$. Este fato está enunciado no próximo resultado, que é uma particularização do Teorema 3.4 de [13], para $Sl(d, \mathbb{R})$ e sua ação em $Gr_k(d)$.

Teorema 5.2. *Seja C_0^k o conjunto de transitividade do conjunto de controle invariante em $Gr_k(d)$ e tome $\xi \in C_0^k$. Então existe uma base $\beta = \{e_1, \cdots, e_d\}$ de $\mathbb{R}^d$ e $h = diag\{\lambda_1, \cdots, \lambda_d\}$, nesta base, com $\lambda_1 > \cdots > \lambda_d > 0$ e tal que $h \in int(S)$ e ξ é gerado por $\{e_1, \cdots, e_d\}$, isto é, ξ é o atrator de h.*

Notemos que se ξ é o atrator de um elemento"split regular" $h \in S$, então $\xi \in C^k$. Com efeito, seja $\eta \in Gr_k(d)$ qualquer. Sabemos que existe $g \in S$ tal que $g\eta$ pertence a variedade estável de ξ, já que esta variedade é densa e $int(S) \neq \emptyset$. Como $h^m g\eta \rightarrow \xi$ quando $m \rightarrow \infty$, segue que $\xi \in fe(S\eta)$ para todo $\eta \in Gr_k(d)$ e, portanto, pela definição de C^k, temos que $\xi \in C^k$.

5.2 Tipo parabólico de um semigrupo

O objetivo desta seção é abordar a questão do tipo parabólico de um semigrupo de interior não vazio de $Sl(n, \mathbb{R})$. Este conceito foi introduzido por San Martin em [13] no contexto mais geral de semigrupos de interior não vazio de grupos de Lie semisimples. Entretanto, para os propósitos deste trabalho, consideremos apenas $Sl(n, \mathbb{R})$.

Nossa primeira observação é a de que, como todo semigrupo de interior não vazio está contido em um semigrupo maximal de interior não vazio, não há perda de generalidade em supor que S é maximal.

Consideremos a variedade "flag"maximal $\mathbb{F}^n(\mathbb{R})$ e a Grasmanniana $Gr_k(n)$. Para cada k existe uma fibração natural

$$\pi_k : \mathbb{F}^n(\mathbb{R}) \rightarrow Gr_k(n)$$

que associa a cada "flag"

$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_k \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$$

o subespaço k-dimensional V_k.

Alternativamente a fibração π_k pode ser vista da seguinte maneira: Se P é o subgrupo parabólico minimal e H_k é o subgrupo de isotropia definido na Seção 2.2, então $P \subset H_k$ e a fibração π_k é a fibração definida por

$$\pi_k : \frac{Sl(n)}{P} \longrightarrow \frac{Sl(n)}{H_k}$$

$$\pi_k(gP) = gH_k$$

A ação de G tanto em $\mathbb{F}^n(\mathbb{R})$ como em $Gr_k(n)$ é equivariante no sentido que, se $g \in Sl(n)$ então

$$\pi_k(g\xi) = g\pi_k(\xi), \qquad \forall \xi \in \mathbb{F}^n(\mathbb{R}).$$

A relação entre os conjuntos de controle invariantes e a fibração π_k é estabelecida na próxima proposição.

Proposição 5.3. *Considere a fribração natural*

$$\pi_k : \mathbb{F}^n(\mathbb{R}) \to Gr_k(n)$$

Se C^k é o conjunto de controle invariante para S em $Gr_k(n)$, então $\pi_k(C) = C^k$, onde C é o conjunto de controle invariante para S em $\mathbb{F}_n(\mathbb{R})$.

Demonstração: Temos que $\pi_k^{-1}(C^k)$ é S-invariante e compacto, assim ele contém um conjunto de controle invariante C. Tome $x \in C$.

$$fe(S\pi_k(x)) = fe(\pi_k(Sx)) = \pi_k(fe(Sx)) = \pi_k(C),$$

ou seja,

$$\pi_k(C) \subset fe(Sy) \quad \forall y \in \pi_k(C).$$

Logo, pela Proposição 4.17 temos que $\pi_k(C)$ é um conjunto de controle invariante em $Gr_k(d)$. Como existe somente um conjunto de controle invariante em $Gr_k(d)$, segue que $\pi_k(C) = C^k$. ∎

Observemos na proposição acima que $C \subset \pi_k^{-1}(C^k)$, para todo k. Pelos resultados de San Martin é possível concluir (Teorema 4.3 de [13]) que existem $k's$ tais que $C = \pi_k^{-1}(C^k)$.

O k maximal satisfazendo a igualdade $C = \pi_k^{-1}(C^k)$ é denominado de *tipo parabólico* do semigrupo S.

Existem outras definições para o tipo parabólico de um semigrupo $S \subset Sl(n, \mathbb{R})$. Uma delas pode ser obtida a partir do seguinte teorema de [11].

Teorema 5.4. *Suponha que $S \subset Sl(n, \mathbb{R})$ é um semigrupo maximal de interior não vazio. Seja k o tipo parabólico de S. Então C^k está contido na componente aberta de Bruhat com respeito a qualquer base β para a qual existe $g \in int(S)$ tal que, em relação a β*

$$g = diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}$$

com $\lambda_1 > \ldots > \lambda_d > 0$.

Para outras caracterizações de semigrupos do tipo k, nos referimos a [13].

5.3 Conjuntos de controle e o Produto exterior

Nesta seção apresentamos alguns resultados sobre os conjuntos de controle na grassmanniana $Gr_k(d)$ e na grassmanniana orientada $Gr_k^+(d)$. Além disso também apresentamos as representações da álgebra e do grupo, dentro do contexto do produto exterior.

O próximo resultado é sobre o conjunto de controle invariante em $Gr_k(d)$ e a transitividade do semigrupo S de $Sl(d, \mathbb{R})$. Sua demonstração pode ser encontrada no Teorema 6.2 de [13].

Teorema 5.5. *Suponhamos que $S \neq Sl(d, \mathbb{R})$. Então $C^k \neq Gr_k(d)$ para qualquer $k = 1, \ldots, d-1$, e S não é transitivo em $Gr_k(d)$.*

Ainda sobre os conjuntos de controle em $Gr_k(d)$ e em $Gr_k^+(d)$ temos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser consultada na Proposição 3.3 de [11].

Proposição 5.6. *Seja $S \subset Sl(d, \mathbb{R})$ um semigrupo com interior não vazio, gerado por um subconjunto conexo $\Gamma \subset Sl(d, \mathbb{R})$. Suponha exista um elemento "split regular" $h \in \Gamma$. Então os conjuntos de controle em $Gr_k(d)$ e em $Gr_k^+(d)$ são conexos.*

No que segue veremos a conexão entre as representações da álgebra e do grupo.

Observação 5.7. A representação da álgebra, que é $d\rho_k(X)$ (onde ρ_k é a representação do grupo), também será denotada por ρ_k. As duas representações estão conectadas pela fórmula

$$\rho_k(\exp X) = \exp(\rho_k(X)). \tag{5.3}$$

Note que, como $X \in sl(d, \mathbb{R})$ temos que $\exp X \in Sl(d, \mathbb{R})$, então a primeira exponencial em (5.3) significa a exponencial em $Sl(d, \mathbb{R})$ e como

$$\begin{aligned} \rho_k : sl(d, \mathbb{R}) &\longrightarrow End(\Lambda^k \mathbb{R}^d) \\ X &\longmapsto \rho_k(X). \end{aligned}$$

temos que a segunda exponencial em (5.3) significa a exponencial de aplicações lineares em $\Lambda^k \mathbb{R}^d$.

Assim como foi definido anteriormente em (2.4) temos que

$$\rho_k(\exp(tX))(u_1 \wedge \ldots \wedge u_k) = \exp(tX)u_1 \wedge \ldots \wedge \exp(tX)u_k \tag{5.4}$$

Desta forma, a representação da álgebra de Lie é dada por

$$\rho_k(X)(u_1 \wedge \ldots \wedge u_k) = d\rho_k(X)(u_1 \wedge \ldots \wedge u_k) = \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\rho_k(\exp tX)(u_1 \wedge \ldots \wedge u_k) =$$
$$\tfrac{d}{dt}|_{t=0}(\exp(tX)u_1 \wedge \ldots \wedge \exp(tX)u_k) = Xu_1 \wedge \ldots \wedge Xu_k =$$
$$(Xu_1 \wedge \ldots \wedge u_k) + (u_1 \wedge Xu_2 \wedge \ldots \wedge u_k) + \ldots + (u_1 \wedge u_2 \ldots \wedge Xu_k)$$

ou seja,

$$\rho_k(X)(u_1 \wedge \ldots \wedge u_k) = (Xu_1 \wedge \ldots \wedge u_k) + \ldots + (u_1 \wedge \ldots \wedge Xu_k).$$

Voltamos ao semigrupo S com interior não vazio e olhamos seus conjuntos de controle invariante em $Gr_k^+(d)$. Como vimos na Seção 2.4, a existência de tal conjunto é garatida pela compacidade de $Gr_k^+(d)$. Também, do fato que C^k é o único conjunto de controle invariante em $Gr_k(d)$ e a equivariância de $\pi : Gr_k^+(d) \to Gr_k(d)$ sob a ação de $Sl(d, \mathbb{R})$, segue que eles estão contidos em $\pi^{-1}(C^k)$ e projetados sobre C^k (ver Proposição 2.2 de [10]). Deste modo, como π é uma aplicação de recobrimento duplo temos que exitem um dos dois ou dois conjuntos de controle invariante em $Gr_k^+(d)$.

Agora, escolha k tal que S é do tipo k. Pelo Teorema 5.4, C^k está contido em alguma componente aberta de Bruhat de $Gr_k(d)$. Como pela Proposição 5.6 C^k é conexo e tomando $C = \pi^{-1}(C^k)$, temos pela Proposição 2.15 que existe $\eta \in \Lambda^k \mathbb{R}^d$ tal que $\langle \eta, \xi \rangle \neq 0$ para qualquer $\xi \in C$. Como C é compacto, divide-se em duas componentes conexas, digamos C^+ e C^-, dadas por

$$C^+ = \{\xi \in C : \langle \eta, \xi \rangle > 0\};$$
$$C^- = \{\xi \in C : \langle \eta, \xi \rangle < 0\}.$$

Assim existem duas possibilidades, ou C^+ é um conjunto de controle invariante e o mesmo acontece com C^-, ou $C = C^+ \cup C^-$ é o único conjunto de controle invariante em $Gr_k^+(d)$. Pela Proposição 5.6 temos que a segunda possibilidade não pode acontecer, e portanto, C^+ e C^- são dois conjuntos de controle invariantes na grassmanniana orientada $Gr_k^+(d)$ e são os únicos.

A próxima proposição será extremamente útil para a demonstração do Teorema 6.12 no último capítulo.

Proposição 5.8. *Suponhamos que S seja do tipo k e que existem dois $S-c.c.i.$ conexos em $Gr_k^+(d)$. Seja C^+ um deles. Então $-\xi \notin C^+$ se $\xi \in C^+$.*

Capítulo 6

Aplicação de Conjuntos de Controle

Mostrar a controlabilidade de um sistema bilinear do tipo

$$\dot{x} = (A + uB)x, \tag{6.1}$$

onde A e B são matrizes $d \times d$, $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ e u pode assumir qualquer valor real, é um problema que vem sendo muito estudado e ainda hoje permanece longe de ser completamente resolvido. Até o presente momento, as condições estabelecidas por Jurdjevic e Kupka em [1] são uma das mais significantes e conhecidas. Neste trabalho eles utilizam um procedimento de indução para mostrar que o cone $L(S_\Gamma) \subset \mathfrak{g}$ associado ao semigrupo S_Γ é na verdade igual a $\mathfrak{g}$ (onde S_Γ é o semigrupo associado ao sistema de controle Γ dado por $\Gamma = \{A + uB,\ u \in \mathbb{R}\}$), o que implica que $S_\Gamma = Sl(d, \mathbb{R})$ e, portanto o sistema (6.1) é controlável. Nosso objetivo é mostrar a controlabilidade de (6.1) fazendo uso dos resultados sobre conjuntos de controle na variedade Grassmaniana, visto no capítulo anterior.

O procedimento baseia-se na seguinte idéia: Seja $\mathfrak{Lie}\{A, B\}$ a álgebra de Lie gerada pelas matrizes A e B, seja G o grupo de Lie cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{Lie}\{A, B\}$. Suponha que o grupo G age transitivamente em $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$. Considere o sistema de controle similar ao sistema (6.1) no grupo de Lie G

$$\dot{X} = (A + uB)X, \tag{6.2}$$

onde A e B são matrizes $d \times d$, $X \in G$ e $u \in \mathbb{R}$.

Em nosso caso as matrizes A e B são matrizes em $sl(d, \mathbb{R})$ e $G = Sl(d, \mathbb{R})$. A controlabilidade do sistema (6.2) em $Sl(d, \mathbb{R})$ implica na controlabilidade do sistema (6.1) em $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ conforme veremos adiante. Portanto mostraremos que o sistema é controlável no grupo, e para este fim, faremos uso dos resultados sobre conjuntos de controle na Grassmanniana apresentados no capítulo anterior.

6.1 Sistemas de controle invariantes à direita

Iniciaremos com uma breve descrição dos sistemas de controle invariantes à direita em grupos de Lie, pois o sistema de controle bilinear (6.2) que é objeto do nosso estudo é deste tipo.

Definição 6.1. *Seja G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie. Um* sistema de controle invariante a direita Γ *no grupo de Lie G é um conjunto de campos vetoriais invariantes à direita em G, ou seja, qualquer subconjunto $\Gamma \subset \mathfrak{g}$.*

Na verdade a equação (6.2) e o subconjunto

$$\Gamma = \{A + uB,\ u \in \mathbb{R}\} \tag{6.3}$$

da álgebra de Lie $\mathfrak{Lie}\{A, B\}$ são duas formas de denotar um sistema de controle bilinear em um grupo de Lie G.

Definição 6.2. *Dizemos que um sistema $\Gamma \subset \mathfrak{g}$ é* controlável a partir de $X_0 \in G$ *se, todo elemento $X \in G$ pode ser atingido a partir de X_0 ao longo de uma concatenação de trajetórias de Γ, ou seja, o conjunto*

$$S_\Gamma(X_0) = \{\exp(t_N A_N)\cdots\exp(t_1 A_1)X_0 |\ A_i \in \Gamma,\ t_i \geq 0,\ N \geq 0\}$$

é igual ao grupo G. Se o sistema Γ é controlável a partir de todo $X \in G$ dizemos que Γ é controlável no grupo *G.*

O conjunto

$$S_\Gamma(X_0) = \{\exp(t_N A_N)\cdots\exp(t_1 A_1)X_0 |\ A_i \in \Gamma,\ t_i \geq 0,\ N \geq 0\}$$

é denominado *conjunto dos pontos atingíveis* a partir de X_0. O conjunto dos pontos atingíveis a partir da identidade $S_\Gamma(\mathrm{Id})$ é de extrema relevância neste contexto, pois tal conjunto constitui um semigrupo de G, o que nos permite fazer uso da teoria de semigrupos para os nossos propósitos. Denotaremos o semigrupo $S_\Gamma(\mathrm{Id})$ simplesmente por S_Γ e o denominaremos *semigrupo associado ao sistema de controle* Γ.

Dentre os resultados sobre sistemas de controle invariantes à direita que mais nos interessam estão os seguintes:

Proposição 6.3. *Um sistema de controle invariante à direita Γ em um grupo de Lie G é controlável em G se, e somente se, é controlável à partir da identidade, ou seja, se o semigrupo S_Γ é igual ao grupo G.*

A seguinte condição é conhecida como a *Condição do Posto*, sua importância é evidenciada no resultado que segue sua definição.

Definição 6.4. *Um sistema $\Gamma \subset \mathfrak{g}$ é dito satisfazer a* Condição do Posto *se*

$$\mathfrak{Lie}(\Gamma) = \mathfrak{g}.$$

Teorema 6.5. ***(Condição do Posto)*** *Seja $\Gamma \subset \mathfrak{g}$.*

1. *Se Γ é controlável, então $\mathfrak{Lie}(\Gamma) = \mathfrak{g}$;*

2. *$int(S_\Gamma) \neq \emptyset$ se, e somente se, $\mathfrak{Lie}(\Gamma) = \mathfrak{g}$.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada, por exemplo, em [15].

6.2 Sistemas induzidos em espaços homogêneos

Nesta seção vamos mostrar como a controlabilidade do sistema invariante a direita Γ no grupo G implica na controlabilidade do sistema de controle

$$\dot{x} = Ax, \tag{6.4}$$

onde A é uma matriz $d \times d$, $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ e $u \in \mathbb{R}$.

Vamos iniciar a seção com um exemplo que há de tornar clara a exposição mais geral.

Exemplo 6.6. Consideremos o seguinte sistema invariante à direita em $Gl_+(d,\mathbb{R})$:

$$\Gamma = A + \mathbb{R}B \ \subset \ gl(d,\mathbb{R}).$$

Na notação clássica, escrevemos este sistema na forma

$$\dot{X} = AX + uBX, \quad X \in Gl_+(d,\mathbb{R}),\ u \in \mathbb{R}. \tag{6.5}$$

Introduzimos também o seguinte sistema bilinear:

$$\dot{x} = Ax + uBx, \quad x \in \mathbb{R}^d\backslash\{0\}, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{6.6}$$

Note que, se $X(t)$ é uma trajetória do sistema invariante a direita (6.5) com $X(0) = \mathrm{Id}$, então a curva $x(t) = X(t)x_0$ é uma trajetória do sistema bilinear (6.6), com $x(0) = x_0$.

Assumindo a controlabilidade do sistema invariante à direita em $Gl_+(d,\mathbb{R})$, teremos que o sistema bilinear é controlável em $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$. Na verdade, tomando dois pontos quaisquer $x_0,\ x_1 \in \mathbb{R}^d\backslash\{0\}$, existe uma matriz $X_1 \in Gl_+(d,\mathbb{R})$ tal que $X_1x_0 = x_1$. Em virtude da controlabilidade de Γ, existe uma trajetória $X(t)$ do sistema invariante a direita tal que $X(0) = \mathrm{Id},\ X(T) = X_1$ para algum $T \geq 0$. Então a trajetória $x(t) = X(t)x_0$ do sistema bilinear, liga x_0 a x_1:

$$x(0) = X(0)x_0 = \mathrm{Id}x_0 = x_0, \qquad\qquad x(T) = X(T)x_0 = X_1x_0 = x_1.$$

Logo, mostrando que o sistema invariante a direita (6.5) é controlável em $Gl_+(d,\mathbb{R})$, teremos que o sistema bilinear (6.6) é controlável em $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$.

Neste argumento, os três seguintes pontos são verificados:

1. O grupo de Lie $G = Gl_+(d,\mathbb{R})$ age na variedade $M = \mathbb{R}^d\backslash\{0\}$, isto é, para qualquer $X \in G$ se define uma aplicação

$$X:\ M\ \to\ M, \qquad\qquad X:\ x\ \mapsto\ Xx.$$

2. G age transitivamente em M:

$$\forall\ x_o,\ x_1 \in M \quad \exists X \in G \text{ tal que } \ Xx_0 = x_1.$$

3. O sistema bilinear (6.6) é induzido pelo sistema invariante a direita (6.5): se $X(t)$ é uma trajetória de (6.5), então $X(t)x$ é uma trajetória de (6.6).

Esta construção é generalizada como segue.

Assim como foi definido na Seção 1.1 dizemos que um grupo de Lie G *age* na variedade diferenciável M se existe uma aplicação diferenciável

$$\theta : G \times M \to M$$

que satisfaz as seguintes condições:

i) $\theta(YX,\ x) = \theta(Y,\ \theta(X,\ x))$ para quaisquer $X,\ Y \in G$ e $x \in M$;

ii) $\theta(\mathrm{Id},\ x) = x$ para qualquer $x \in M$.

Definição 6.7. *Um grupo de Lie G* age transitivamente *em M se, para quaisquer $x_0,\ x_1 \in M$ existe $X \in G$ tal que $\theta(X,\ x_0) = x_1$. A variedade que admite uma ação transitiva de um grupo de Lie, damos o nome de* espaço homogêneo *deste grupo de Lie.*

Denotaremos por $\mathrm{T_M}$ o conjunto dos espaços tangentes aos pontos de M, ou seja,

$$\mathrm{T_M} = \bigcup_{X \in M} M_X$$

onde M_X denota o espaço tangente no ponto X.

Definição 6.8. *Seja $A \in \mathfrak{g}$. O campo vetorial $\theta_* A \in \mathrm{T_M}$ induzido pela ação θ é definido como segue:*

$$(\theta_* A)(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\theta(\exp(tA),\ x), \quad x \in M.$$

Note que se $M = \mathbb{R}^d$ e $A \in sl(d, \mathbb{R})$, então o campo vetorial $\theta_* A$ induzido pela ação θ é

$$(\theta_* A)(x) = \theta(A, x) = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Definição 6.9. *Seja $\Gamma \subset \mathfrak{g}$ um sistema invariante a direita. O sistema*

$$\theta_*\Gamma \subset \mathrm{T_M},$$
$$(\theta_*\Gamma)(x) = \{(\theta_* A)(x) |\ A \in \Gamma\}, \quad x \in M,$$

é chamado sistema induzido *em M.*

No caso específico em que $M = \mathbb{R}^d$ e $\Gamma \subset sl(d, \mathbb{R})$ temos que o sistema induzido por Γ em $\mathbb{R}^d$ é $(\theta_*\Gamma)(x) = \{Ax|\ A \in \Gamma\}, \quad x \in \mathbb{R}^d$.

O próximo resultado associa a uma trajetória em Γ, uma trajetória no sistema induzido.

Lema 6.10. *Se $X(t)$ é uma trajetória de Γ, então $x(t) = \theta(X(t),\ x_0)$ é uma trajetória de $\theta_*\Gamma$, para qualquer $x_0 \in M$.*

Ver [16].

O próximo resultado relaciona a controlabilidade do sistema no grupo com a controlabilidade do sistema induzido na variedade e a transitividade da ação do semigrupo S_Γ na variedade com a controlabilidade do sistema induzido. Para consultar demonstrações nos referimos a [16].

Teorema 6.11. *Seja θ uma ação transitiva de um grupo de Lie conexo G na variedade M. Sejam também $\Gamma \subset \mathfrak{g}$ um sistema invariante à direita em G e, $\theta_*\Gamma \subset \mathrm{Vec}M$ o sistema induzido em M.*

1. *Se Γ é controlável em G, então $\theta_*\Gamma$ é controlável em M.*

2. *Além disso, se o semigrupo S_Γ age transitivamente em M, então $\theta_*\Gamma$ é controlável em M.*

Sejam $M = \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$, A e B matrizes em $sl(d, \mathbb{R})$ e $\Gamma = \{A + uB,\ u \in \mathbb{R}\}$. Considere a seguinte ação de $Sl(d, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$

$$\theta(A, X) = AX, A \in Sl(d, \mathbb{R}), X \in R^d \backslash \{0\}.$$

Temos que esta ação é transitiva, e que o sistema induzido por Γ em $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ é $\theta_*\Gamma = \{(A+uB)X,\ u \in \mathbb{R}\}$. Assim, pelo teorema acima, temos que se o sistema Γ for controlável, então o sistema induzido em $\mathbb{R}^d$ será controlável.

6.3 A controlabilidade do sistema bilinear sob as condições de Jurdjevic e Kupka

Em [1] Jurdjevic e Kupka estabeleceram condições sobre as matrizes A e B para que o sistema (6.1) fosse controlável. Essas condições representam o maior avanço neste sentido, sendo que o problema geral permanece em aberto.

No que segue faremos a demonstração deste resultado, admitindo válidas as três condições, conhecidas como condições de Jurjevic e Kupka, entretanto, seguindo o método utilizado por San Martin em [11]. As condições sobre as matrizes A e B são as seguintes:

1. $B = diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}$ com $\lambda_1 > \ldots > \lambda_d$, ie, B é um "split regular" e seus autovalores são bem ordenados;

2. Sendo A escrita como $A = (a_{ij})$, então $a_{1d}a_{d1} < 0$;

3. A álgebra de Lie gerada por A e B é $sl(d, \mathbb{R})$.

Na demonstração feita em [1], é considerado o cone convexo $L(S_\Gamma) \subset \mathfrak{g}$ associado ao semigrupo S_Γ, e mostrado, por um processo de indução, que $L(S_\Gamma) = \mathfrak{g}$ e portanto, o semigrupo S_Γ é igual ao grupo $Sl(d, \mathbb{R})$, donde segue o resultado.

Aqui, mostraremos a controlabilidade utilizando os resultados envolvendo conjuntos de controle invariantes do capítulo anterior. A idéia consiste em mostrar que o cone $L(S_\Gamma)$ associado ao semigrupo S_Γ é convexo e contém elementos apropriados. A partir disto, utilizando os resultados do capítulo anterior para obter o desejado.

Teorema 6.12. *Considere o sistema de controle bilinear $\Gamma = \{A + uB : u \in \mathbb{R}\}$, com $A, B \in sl(d, \mathbb{R})$. Suponha que as matrizes A e B satisfaçam condições de Jurdjevic e Kupka, ou seja,*

1. *$B = diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}$ com $\lambda_1 > \ldots > \lambda_d$, isto é, B é um split regular e seus autovalores são bem ordenados;*

2. *Se A é escrita como $A = (a_{ij})$, então $a_{1d}a_{d1} < 0$;*

3. *A álgebra de Lie gerada por A e B é $sl(d, \mathbb{R})$.*

Então $S_\Gamma = Sl(d, \mathbb{R})$.

Demonstração: Consideremos o semigrupo associado ao sistema

$$S_\Gamma = \{\exp(t_1(A + u_1 B)) \ldots \exp(t_m(A + u_m B)) : t_i \geq 0, u_i \in \mathbb{R}, m \geq 1\}.$$

Pela terceira condição temos que $int(S_\Gamma) \neq \emptyset$. Suponha por absurdo que S_Γ é um subsemigrupo próprio de G. Neste caso consideremos

$$L(S_\Gamma) = \{X \in sl(d, \mathbb{R}) : \exp tX \in fe(S_\Gamma) \ \ \forall t \geq 0\}$$

o cone associado a S_Γ. Mostraremos que $L(S_\Gamma)$ é um cone convexo que contém A, $\pm B$ e as matrizes

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & -1 \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} e \ \ N = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Vimos na Seção 3.3 que $L(S_\Gamma)$ é um cone. Vamos mostrar que é convexo.
Para isto, sejam $X, Y \in L(S_\Gamma)$ e $\alpha \in [0, 1]$. Como $X, Y \in L(S_\Gamma)$ temos que

$$\exp(tX) \in fe(S_\Gamma) \text{ e } \exp(tY) \in fe(S_\Gamma) \ \forall t \geq 0.$$

Usando (3.1) temos

$$\exp t(\alpha X + (1-\alpha)Y) = \lim_{n\to\infty}(\exp(\tfrac{t}{n}\alpha X)\exp(\tfrac{t}{n}(1-\alpha)Y))^n$$

mas

$$\exp(\tfrac{t}{n}\alpha X), \ \exp(\tfrac{t}{n}(1-\alpha)Y) \in fe(S_\Gamma)$$

e como $fe(S_\Gamma)$ é um semigrupo fechado

$$\exp t(\alpha X + (1-\alpha)Y) \in fe(S_\Gamma)$$

o que implica que

$$\alpha X + (1-\alpha)Y \in L(S_\Gamma), \ \ X, Y \in L(S_\Gamma) \text{ e } \alpha \in [0, 1].$$

Portanto $L(S_\Gamma)$ é um cone convexo.

Mostraremos agora que as matrizes $A, \pm B$ e

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \ e \ \ N = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

pertencem a $L(S_\Gamma)$.

Note que, $A, \pm B \in sl(d, \mathbb{R})$. Então temos que mostrar que $\exp(tA)$, $\exp(\pm tB) \in fe(S_\Gamma)$. Considerando $m = 1$, e $u_1 = 0$, temos que

$$\exp(tA) \in S_\Gamma \ \Rightarrow \ \exp(tA) \in fe(S_\Gamma),$$

ou seja, $A \in L(S_\Gamma)$. Também,

$$\exp(\pm B) = \exp(\lim_{u\to\infty}(\frac{1}{u}A \pm B)) = \exp(\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u}(A \pm uB)) \in fe(S_\Gamma)$$

e como esse é um semigrupo fechado, temos que $\pm B \in L(S_\Gamma)$.

Como $A, \pm B \in L(S_\Gamma)$ então, pela Proposição 3.8, temos que

$$\exp(t\mathrm{ad}B)A \in L(S_\Gamma), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Desta forma,

$$A_t = \exp(t\mathrm{ad}B)A = \mathrm{Ad}(\exp(tB))(A) = \exp(-tB)A\exp(tB) \in L(S_\Gamma) \ \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{6.7}$$

Consideremos E_{ij} a matriz $d \times d$ que possui entrada igual a 1 na posição ij e zero nas demais entradas. Assumindo que $a_{1d} < 0$, escrevemos a matriz A da forma

$$A = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}E_{ij}.$$

Assim,

$$A_t = e^{-tB}Ae^{tB} = e^{-tB}(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}E_{ij})e^{tB} = (\sum_{k=1}^{d} e^{-\lambda_r tE_{kk}})(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}E_{ij})(\sum_{r=1}^{d} e^{\lambda_r tE_{rr}})$$

$$= (\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}e^{-\lambda_i t}E_{ij})(\sum_{r=1}^{d} e^{\lambda_r tE_{rr}}) = (\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}e^{-(\lambda_i-\lambda_j)t}E_{ij} = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}e^{-\triangle_{ij}t}E_{ij}$$

isto é,

$$A_t = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} e^{-\triangle_{ij} t} E_{ij}.$$

Como

$$A_t \in L(S_\Gamma), \;\; e^{-\triangle_{d1} t} > 0 \;\; \forall t \geq 0$$

e $L(S_\Gamma)$ é um cone convexo fechado, temos que

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\triangle_{d1} t} A_t \in L(S_\Gamma).$$

Computando este limite vemos que

$$\begin{gathered}
\lim_{t\to\infty} e^{-\triangle_{d1}t} A_t = \lim_{t\to\infty} e^{-\triangle_{d1}t} (\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} e^{-\triangle_{ij}t} E_{ij}) \\
= \lim_{t\to\infty} \sum_{i,j=1}^{d} e^{-\triangle_{d1}t} e^{-\triangle_{ij}t} a_{ij} E_{ij} = \lim_{t\to\infty} \sum_{i,j=1}^{d} e^{-(\triangle_{ij}-\triangle_{d1})t} a_{ij} E_{ij} \\
= \lim_{t\to\infty} (e^{-(\lambda_1-\lambda_1-\lambda_d+\lambda_1)t} a_{11}E_{11} + e^{-(\lambda_1-\lambda_2-\lambda_d+\lambda_1)t} a_{12}E_{12} + \ldots + e^{-(\lambda_1-\lambda_d-\lambda_d+\lambda_1)t} a_{1d}E_{1d} + \\
e^{-(\lambda_2-\lambda_1-\lambda_d+\lambda_1)t} a_{21}E_{21} + e^{-(\lambda_2-\lambda_2-\lambda_d+\lambda_1)t} a_{22}E_{22} + \ldots + e^{-(\lambda_2-\lambda_d-\lambda_d+\lambda_1)t} a_{2d}E_{2d} + \ldots + \\
e^{-(\lambda_d-\lambda_1-\lambda_d+\lambda_1)t} a_{d1}E_{d1} + e^{-(\lambda_d-\lambda_2-\lambda_d+\lambda_1)t} a_{d2}E_{d2} + \ldots + e^{-(\lambda_d-\lambda_d-\lambda_d+\lambda_1)t} a_{dd}E_{dd}) \\
= a_{d1}E_{d1}
\end{gathered}$$

pois como $\lambda_1 > \ldots > \lambda_d$, temos que

$$\begin{gathered}
\begin{matrix} \lambda_1 > \lambda_j & \forall j \neq 1, \\ \lambda_i > \lambda_d & \forall i \neq d \end{matrix} \;\Rightarrow\; (\lambda_1 - \lambda_j) + (\lambda_i - \lambda_d) > 0 \\
\Rightarrow \Delta_{ij} - \Delta_{d1} > 0 \quad \text{para todo } (i,j) \neq (d,1).
\end{gathered}$$

Além disso, $\Delta_{d1} - \Delta_{d1} = 0$. Portanto, o único somatório no qual o expoente não é negativo é o termo em $d, 1$.

Então concluímos que $a_{d1}E_{d1} \in L(S_\Gamma)$ e se considerarmos $a_{d1} = 1$ temos que a matriz $N \in L(S_\Gamma)$.

Para mostrar que $M \in L(S_\Gamma)$ calculamos

$$\lim_{t \to -\infty} e^{-\triangle_{d1} t} A_t = a_{1d} E_{1d} \in L(S_\Gamma),$$

e como $a_{1d} < 0$ basta considerá-lo igual a -1 e temos o desejado.

Mostramos que $N, M \in L(S_\Gamma)$ que é um cone convexo, então

$$R = N + M \in L(S_\Gamma).$$

Deste modo temos que,

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in L(S_\Gamma)$$

logo

$$\exp(tR) \in fe(S_\Gamma).$$

Sendo assim,

$$\exp(\pi R) = \begin{pmatrix} cos\pi & 0 & \dots & 0 & sen\pi \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -sen\pi & 0 & \dots & 0 & cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} \in fe(S_\Gamma)$$

ou seja,

$$\exp(\pi R) = diag\{-1, 1, \dots, 1, -1\} \in fe(S_\Gamma).$$

Como $B = diag\{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$ é "split regular" temos que

$$\exp B = diag\{e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_d}\},$$

é um "split regular" com $e^{\lambda_1} > \dots > e^{\lambda_d} > 0$, e como vimos na Seção 2.3 temos que

$$(\exp B)^m \xi \longrightarrow \xi_0 = e_1 \wedge \dots \wedge e_k$$

com $\xi \in C_0^k$. Os ítens (ii) e (iii) Proposição 4.17 justificam que ξ_0 pertence a um conjunto de controle invariante em $Gr_k^+(d)$, já que

$$\xi_0 \in \overline{S_\Gamma C_0^k} \subset \overline{C_0^k} = C^k.$$

Entretanto, como em (5.4) temos que

$$\rho_k(\exp \pi R)(e_1 \wedge \dots \wedge e_k) = \exp(\pi R) e_1 \wedge \dots \wedge \exp(\pi R) e_k = -e_1 \wedge \dots \wedge e_k$$

mostrando que $-\xi_0 = -e_1 \wedge \dots \wedge e_k$ pertence ao mesmo conjunto de controle invariante. Então pela contrapositiva da Proposição 5.8 temos que S_Γ não é do tipo k, para nenhum k. Por outro lado pelo Teorema 5.4 temos que S_Γ é do tipo k. Portanto $S_\Gamma = Sl(d, \mathbb{R})$, ou seja, o sistema Γ é controlável. ∎

Nas hipóteses do teorema acima, concluímos que o sistema bilinear $\Gamma = \{A + uB : u \in \mathbb{R}\}$ é controlável. Pelas considerações feitas na Seção 6.2 temos que o sistema de controle em $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$

$$\dot{x} = (A + uB)x,$$

com $u \in \mathbb{R}$ é controlável.

Vejamos um exemplo sobre a controlabilidade.

Exemplo 6.13. Consideremos o sistema $\Gamma = \{A,\ B,\ -B\}$, onde A e B são dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vamos mostrar que o sistema Γ é controlável em $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

Notemos inicialmente que B pode ser escrita na forma $B = diag\{1, -1\}$ e seus auto valores estão bem ordenados $1 > -1$.
Sobre a matriz A temos que $a_{12}a_{21} = (1)(-1) < 0$. Além disso, a álgebra de Lie gerada pelas matrizes A e B é $sl(2, \mathbb{R})$.
Com efeito, lembrando que a dimensão de $sl(2, \mathbb{R})$ é 3 temos que,

$$[A,\ B] = AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

e $[A,\ B]$ não é combinação linear de A e B, pois $\alpha A + \beta B \neq [A,\ B]$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Logo, $\{A,\ B,\ [A,\ B]\}$ é uma base para $sl(2, \mathbb{R})$.

Portanto, como o sistema satisfaz as três condições de Jurdjevic e Kupka, é controlável.

Em [17], Braga, Ribeiro, Rocio e San Martin mostraram que a controlabilidade do sistema

$$\dot{x} = (A + uB)x$$

onde A e B matrizes 2×2, é garantida se a condição $\det[A, B] < 0$. O que podemos observar é que, no caso 2×2, se as matrizes A e B satisfazem as condições de Jurdjevic e Kupka, então $\det[A, B] < 0$. De fato, sejam

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ d & -a \end{pmatrix} \text{ tal que } cd < 0 \text{ e } B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \text{ com } b > 0.$$

Temos que a matriz B pode ser escrita na forma $B = diag\{b, -b\}$ e seus autovalores estão bem ordenados $b > -b$. A matriz A satisfaz que $a_{12}a_{21} = cd < 0$ e ainda, $[A, B] \neq \alpha A + \beta B$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Logo $\{A, B, [A, B]\}$ é uma base para $sl(2, \mathbb{R})$ e portanto as condições de Jurdjevic estão satisfeitas.

Além disso,

$$[A, B] = \begin{pmatrix} 0 & -2bc \\ 2bd & 0 \end{pmatrix}$$

e $\det[A, B] = 4b^2cd < 0$.

O próximo exemplo mostra que as condições de Jurdjevic e Kupka são suficientes para a controlabilidade do sistema $\dot{x} = (A + uB)x$, mas não necessárias.

Exemplo 6.14. Seja $G = Sl(2, \mathbb{R})$ e $\Gamma = A + \mathbb{R}B \subset sl(2, \mathbb{R})$, onde A e B são matrizes da forma

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ a & -b \end{pmatrix} \text{ com } a, b > 0.$$

Temos que $[A, B] = \begin{pmatrix} a & -2b \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, $\det[A, B] = -a^2 < 0$ e por [17] temos que o sistema é controlável. No entanto as condições de Jurdjevic e Kupka não são satisfeitas, já que $a_{12}a_{21} = (1)(0) = 0$ e mais ainda, B não pode ser escrita na forma diagonal.

Capítulo 7

Conclusão

O problema sobre a controlabilidade de um sistema bilinear da forma

$$\dot{x} = (A + uB)x$$

onde A e B são matrizes $d \times d$, $x \in \mathbb{R}^d$ e $u \in \mathbb{R}$, ainda permanece em aberto. As condições estabelecidas por Jurdjevic e Kupka sobre as matrizes A e B, abordadas neste trabalho, são as mais significativas até o momento.

Jurdjevic e Kupka também estabeleceram em [2], condições suficientes para a controlabilidade do sistema, num caso mais geral, onde o sistema Γ está contido na álgebra de Lie de um grupo de Lie semisimples.

Para o caso do sistema bilinear

$$\dot{x} = (A + uB)x$$

com A e B matrizes 2×2, o problema está totalmente resolvido. Em [17] Braga, Ribeiro, Rocio e San Martin estabeleceram que o sistema é controlável se, e somente se, $\det[A, B] < 0$.

As perspectivas são de que sejam estabelecidas condições suficientes para a controlabilidade do sistema bilinear

$$\dot{x} = (a + uB)x,$$

com A e B matrizes na álgebra de Lie de outros grupos de Lie, como por exemplo, do grupo simplético $Sp(n)$, além é claro, da expectativa de que o problema seja completamente resolvido.

Índice Remissivo

Bibliografia

[1] V. Jurdjevic and I. Kupka, *Control Systems subordinate to a group action: acessibility*, J. Differential Equations, 39(1981), 186-211.

[2] V. Jurdjevic and I. Kupka, *Control Systems on semisimple Lie groups and their homogeneous spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 31(1981), 151-179.

[3] J. Hilgert, K. H. Hofmann, and J. D. Lawson, *Lie groups, Convex Cones and Semigroups*, Oxford University Press, Oxford, 1989.

[4] J. Hilgert and K-H. Neeb, *Lie semigroups and Their Applications*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1552, Springer-Verlag, Berlin 1993.

[5] G. Warner, *Harmonic Analysis on semi-simple Lie groups.* Springer-Verlag, 1972.

[6] F. Warner, *Foundations of differentiable manifolds ond Lie groups.* Scott, Foresman and Company, 1971.

[7] B. C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: an elementary introduction*. Springer, New York (2003).

[8] V. S. Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras, and their representations*. Prentice-Hall, New Jersey, (1974).

[9] L.A.B. San Martin, *Álgebras de Lie*. Editora da Unicamp (1999).

[10] L.A.B. San Martin, *Invariant Control Sets on Flag Manifolds*. Mathematics of Control, Signals and Systems 6 (1993), 41-61.

[11] L.A.B. San Martin, *On Global Controllability of Discrete-Time Control Systems*. Mathematics of Control, Signals and Systems 8 (1995), 279-297.

[12] L.A.B. San Martin, *Invariant control sets on flag manifolds.* Mathematics of Control, Signals and Systems 6 (1993), 41-61.

[13] L. A. B. San Martin and P.A. Tonelli, *Semigroup actions on homogeneous spaces*, Semigroup Forum, 50 (1995), 59-88.

[14] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, and V. S. Varadarajan, *Functions, flows and oscillatory integrals on flag manifolds and conjugacy classes in real semisimple Lie groups*, Compositio Math., 49 (1983), 309-398.

[15] Y. L. Sachcov, *Controllability of invariant systems on Lie groups and homogeneous spaces*, Journal of Mathematical Sciences, Springer. 4(2000), 2355 - 2427.

[16] Y. L. Sachcov, *Controllability of invariant systems on Lie groups and homogeneous spaces (for beginners)*, (2005).

[17] C. J. Braga Barros; L. A. B. San Martin; O. G. Rocio; J. R. Gonçalves Filho, *Controllability of two-dimensional bilinear systems.*, Proyecciones, vol. 15. (1996), 111 - 139.

[18] M. A. Verdi, *Conjuntos de Controle para ação de Semigrupos sobre Variedades Homogêneas*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Maringá, 2002.