

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Teoria invariante na construção de formas gerais
reversíveis-equivariantes

Patrícia Tempesta

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Patrícia Hernandes Baptistelli

Maringá - PR
2013

Teoria invariante na construção de formas gerais reversíveis-equivariantes

Patrícia Tempesta

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria e Topologia

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Patrícia Hernandes Baptistelli

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá – PR., Brasil)

T283t Tempesta, Patrícia
Teoria invariante na construção de formas gerais
reversíveis-equivariantes / Patrícia Tempesta. --
Maringá, 2013.
84 f. : figs.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Patrícia Hernandes
Baptistelli.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática,
2013.

1. Formas gerais reversíveis-equivariantes . 2.
Representação de grupos. 3. Grupos de Lie. 4.
Simetria. 4. Antissimetria. I. Baptistelli, Patrícia
Hernandes, orient. II. Universidade Estadual de
Maringá. Centro de Ciências Exatas. Departamento de
Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática.
III. Título.

CDD 21.ed. 515.353

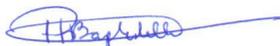
GVS-0011591

PATRÍCIA TEMPESTA

**TEORIA INVARIANTE NA CONSTRUÇÃO DE FORMAS GERAIS
REVERSÍVEIS-EQUIVARIANTES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

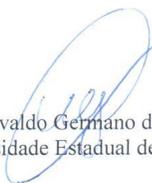
COMISSÃO JULGADORA:



Profa. Dra. Patrícia Hernandes Baptistelli
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)



Profa. Dra. Miriam Garcia Manoel
Universidade de São Paulo – São Carlos - SP



Prof. Dr. Osvaldo Germano do Rocio
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 20 de fevereiro de 2013.

Local de defesa: Auditório do Departamento de Matemática, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

*“Se as coisas são inatingíveis... ora!
Não é motivo para não querê-las...
Que tristes os caminhos se não fora
A mágica presença das estrelas!”*

Mário Quintana - Espelho Mágico

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, a força que me faz levantar todos os dias e seguir os meus sonhos.

À minha família, o alicerce da minha vida e sem a qual eu não teria chegado até aqui. Obrigado Mãe, Pai, Mariana e Azizi, por todos os sacrifícios, que eu sei que passaram, para que eu pudesse estar aqui hoje.

À minha orientadora, que também posso chamar de amiga, Professora Patrícia. Obrigada por todos os conselhos, por sua paciência e compromisso durante todo o tempo em que trabalhamos juntas.

Aos professores que fizeram parte da minha vida acadêmica e que me incentivaram a continuar estudando. A todos os colegas que participaram destes anos de estudos, em especial as minhas amigas e irmãs, Juliana, Simone e Denise. Obrigada pela paciência, pelo apoio e também por todas as risadas.

A CAPES, que financiou este projeto.

Enfim, agradeço a todos que participaram, direta ou indiretamente, para esta conquista.

Resumo

O presente trabalho utiliza conceitos da teoria invariante de grupos na construção de formas gerais de campos vetoriais em presença simultânea de simetrias e antissimetrias. O conjunto Γ destes elementos forma um grupo de Lie compacto e, neste caso, o campo de vetores é reversível-equivariante sob a ação de Γ . Nosso estudo se baseia na teoria de representação de grupos e envolve métodos algébricos que estabelecem um algoritmo simbólico para o cálculo de geradores para o módulo das aplicações polinomiais reversíveis-equivariantes sobre o anel de invariantes. No contexto linear, a estrutura destas aplicações pode ser determinada em blocos através das chamadas componentes σ -isotípicas, que são construídas dependendo se seus subespaços irredutíveis correspondentes são auto-duais ou não auto-duais. Finalizamos o presente trabalho descrevendo um processo de construção de tais componentes. Este processo depende da existência de uma permutação entre todos os subespaços irredutíveis para uma dada representação de Γ .

Palavras-chave: integral de Haar; teoria invariante; simetrias; simetrias reversíveis.

Abstract

The present work uses concepts of the invariant theory for groups in the construction of general forms of vector fields in simultaneous presence of symmetries and reversing symmetries. The set Γ formed by these elements forms a compact Lie group and, in this case, the vector field is reversible-equivariant under the action of Γ . Our study is based on the representation theory of groups and involves algebraic methods that establish a symbolic algorithm for the computation of generators for the module of reversible-equivariant polynomial mappings over the ring of invariants. In the linear context, the structure of these mappings can be determined in blocks by the called σ -isotypic components, which are constructed according to whether its corresponding irreducible subspaces are either self-dual or non-self-dual. We finish the present work by describing a construction process of those components. This process depends on the existence of a permutation among all non-isomorphic irreducible subspaces for a given representation of Γ .

Keyword: Haar Integral, invariant theory, symmetry, reversing-symmetry.

SUMÁRIO

Introdução	xi
1 Preliminares	1
1.1 Teoria de representação	1
1.1.1 Ações e representações	3
1.1.2 Integral de Haar	6
1.1.3 Irredutibilidade	9
1.2 Teoria invariante	14
1.2.1 Funções invariantes	14
1.2.2 Contexto equivariante	18
1.3 Órbitas e subgrupos de isotropia	25
1.4 Subespaços de ponto fixo e a fórmula do traço	26
2 A Teoria Reversível-Equivariante	30
2.1 O contexto reversível-equivariante	30
2.2 Fórmulas de caracter	33
2.2.1 Teoria de caracter	33
2.2.2 Séries de Hilbert-Poincaré e fórmulas de Molien	35
2.2.3 Fórmulas de caracter	41
2.3 Operadores de Reynolds	45
2.4 Algoritmo para o cálculo dos anti-invariantes	49
2.5 Algoritmo para o cálculo dos reversíveis-equivariantes	52
3 Formas Gerais Reversíveis-Equivariantes	55
3.1 Forma geral $O(2)$ -reversível equivariante	55

3.2	Forma geral \mathbf{Z}_n -reversível-equivariante	57
3.2.1	Forma geral \mathbf{Z}_2 -reversível-equivariante	59
3.2.2	Forma geral \mathbf{Z}_4 -reversível-equivariante	59
3.3	Forma geral \mathbf{D}_n -reversível-equivariante	61
3.3.1	Forma geral \mathbf{D}_6 -reversível-equivariante	62
3.4	Forma geral $\mathbf{D}_n(\kappa)$ -reversível-equivariante	63
3.4.1	Forma geral $\mathbf{D}_3(\kappa)$ -reversível-equivariante	65
3.5	Forma geral \mathbf{S}_n -reversível-equivariante	65
3.5.1	Forma geral \mathbf{S}_2 -reversível-equivariante	66
3.6	Forma geral $(\mathbf{D}_6 \dot{+} \mathbf{T}^2) \oplus \mathbf{Z}_2$ -reversível-equivariante	68
4	Decomposição σ-isotópica	71
	Referências Bibliográficas	78
	Lista de Notações	81
	Índice Remissivo	83

INTRODUÇÃO

O estudo de sistemas dinâmicos com simetrias (equivariâncias) tem se estabelecido como um ramo importante da teoria de sistemas dinâmicos não lineares. Seu desenvolvimento é motivado pela ocorrência, em uma classe ampla de sistemas, de bifurcações e outros fenômenos dinâmicos que não seriam esperados se as simetrias não fossem levadas em consideração. Antissimetrias (reversibilidades) podem ser igualmente exploradas e ocorrem numa diversidade de contextos, como por exemplo em sistemas reversíveis e Hamiltonianos. A ocorrência de simetrias e antissimetrias em um sistema dinâmico regido por uma equação diferencial ordinária ou parcial consiste de transformações que levam soluções em soluções e, portanto, está diretamente associada a uma propriedade invariante do sistema. O conjunto Γ destas transformações, juntamente com a operação de composição, forma um grupo, cuja estrutura é descrita por meio da teoria de representação de grupos. Mais especificamente, a formulação desta situação é dada como segue:

Considere um sistema do tipo

$$\dot{x} = G(x), \quad x \in V, \quad (1)$$

onde V é um espaço vetorial real de dimensão finita e $G : V \rightarrow V$ é um campo vetorial de classe C^∞ . Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo linearmente em V . A esta ação corresponde um homomorfismo linear de grupos $\rho : \Gamma \rightarrow GL(V)$, onde $GL(V)$ é o grupo das transformações lineares invertíveis em V , chamado representação de Γ em V . Dizemos que G em (1) é Γ -reversível-equivariante, ou reversível-equivariante sob a ação de Γ , se

$$G(\rho(\gamma)x) = \sigma(\gamma)\rho(\gamma)G(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in V, \quad (2)$$

onde $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbf{Z}_2 = \{\pm 1\}$ é um epimorfismo de grupos. Seu kernel $\Gamma_+ = \ker \sigma$ é o subgrupo das simetrias de Γ e o complementar $\Gamma_- = \Gamma \setminus \Gamma_+$ é o conjunto das antissimetrias de Γ . Sob este formalismo, Γ_+ forma um subgrupo normal de Γ de índice 2 e Γ_- constitui uma classe lateral não trivial de Γ_+ .

Do ponto de vista da dinâmica, se G é reversível-equivariante, a equação diferencial (1) é invariante pela ação de Γ em $\mathbb{R} \times V$ sob a transformação $(t, x) \mapsto (\sigma(\gamma)t, \rho(\gamma)x)$. Em outras palavras, trajetórias de (1) são levadas sobre trajetórias do mesmo sistema preservando a direção no tempo pelas simetrias e revertendo a direção no decorrer do

tempo pelas antissimetrias. Geometricamente, essa reversão representa uma inversão no sentido das flechas das trajetórias no retrato de fase. Na figura 1(a), por exemplo, todas as rotações em torno da origem são simetrias e a reflexão com respeito ao eixo x é uma antissimetria. Na figura 1(b) a reflexão com respeito ao eixo x é uma simetria e a rotação de ângulo $\frac{\pi}{2}$ em torno na origem é uma antissimetria.

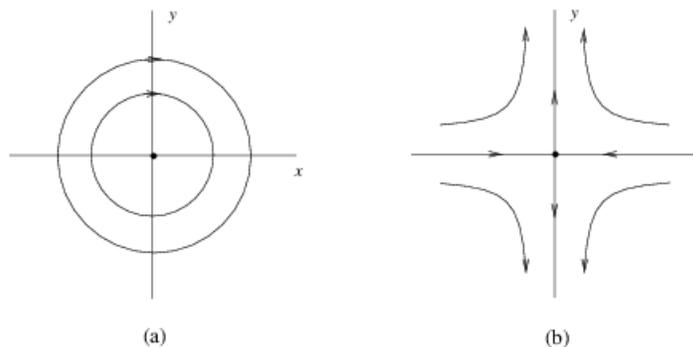


Figura 1: Retratos de fase de dois tipos de fluxos de campos de vetores no plano possuindo simetrias e antissimetrias.

Um sistema dinâmico em presença simultânea de simetrias e antissimetrias é chamado reversível-equivariante e as equações diferenciais que o regem permanecem inalteradas sob a ação de Γ . Neste contexto, o primeiro trabalho foi desenvolvido por Lamb e Roberts em [20] com a classificação de sistemas lineares reversíveis-equivariantes em termos da teoria de representação de grupos. Desde então, a investigação nesta linha de pesquisa tem crescido muito. Uma abordagem usando ferramentas da teoria de Singularidades, na mesma linha que [17], foi desenvolvida por Baptistelli e Manoel em [4] para a análise de bifurcações reversíveis-equivariantes no caso auto-dual. O principal ponto neste estudo é a existência de um isomorfismo reversível-equivariante que estabelece uma correspondência biunívoca com um caso puramente equivariante (sem reversibilidades) associado. Em uma outra direção, Buono *et al.* [10] empregou transversalidade equivariante para tratar do caso de bifurcações reversíveis-equivariantes separáveis. Outros resultados recentes nesta linha são também encontrados em [1, 3, 5, 6, 11, 22]. Observamos que um caso particular na teoria reversível-equivariante, chamado puramente reversível, ocorre quando Γ contém somente uma antissimetria, que é uma involução. A maioria dos trabalhos no estudo de bifurcações locais reversíveis-equivariantes restringem atenção a este caso via teoria de forma normal (veja, por exemplo, [12, 21, 23]).

O ponto de partida para uma análise local e global de sistemas dinâmicos reversíveis-equivariantes é encontrar a forma geral do campo de vetores G em (1) que satisfaça (2), sendo esta uma questão puramente algébrica em teoria invariante. Mais especificamente, o espaço $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ de todas as aplicações polinomiais Γ -reversíveis-equivariantes em V é um módulo finitamente gerado sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ das funções polinomiais Γ -invariantes, que também é finitamente gerado de acordo com o Teorema de Hilbert-Weyl (Teorema

1.2.4). Portanto, o problema de encontrar a forma geral de campos vetoriais reversíveis-equivariantes é reduzido ao de encontrar um conjunto de geradores para $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ como um módulo. Este pode ser um problema difícil em teoria invariante e, na maioria dos casos, é tratável através de programas de álgebra computacional, como o GAP [13] e o *Singular* [25]. Nesta linha, fórmulas para o número de invariantes e reversíveis-equivariantes pela ação de Γ em V são muito úteis, sendo usadas para se verificar se todos os possíveis invariantes e reversíveis-equivariantes foram obtidos na busca da forma geral do campo de vetores. Os resultados apresentados em [1] baseiam-se exatamente nesta abordagem, empregando técnicas algébricas da teoria invariante, como os operadores de Reynolds e as séries de Hilbert-Poincaré, na busca da forma geral de campos de vetores neste contexto.

Em nosso trabalho, seguimos principalmente as referências [1] e [5]. Nosso primeiro principal objetivo é apresentar um algoritmo simbólico para a obtenção de formas gerais reversíveis-equivariantes. Os resultados apresentados em [5] também foram motivados pelo interesse no estudo de sistemas no contexto com simetrias e antissimetrias. Eles são baseados na teoria de representação de grupos de Lie compactos, cujo alicerce é a decomposição de uma dada representação de Γ em uma soma direta de representações mais simples, chamadas irredutíveis. Este processo de decomposição garante a existência das componentes isotópicas, que são subespaços invariantes por qualquer aplicação linear puramente equivariante. De modo correspondente, a construção de subespaços que são invariantes por qualquer aplicação linear reversível-equivariante tem importantes implicações na teoria de sistemas dinâmicos e é o nosso segundo principal objetivo. Tais subespaços são as componentes σ -isotópicas, introduzidas por Lamb e Roberts em [20].

O texto é organizado da seguinte forma: no Capítulo 1, apresentamos notações, definições e propriedades básicas das teorias invariante e equivariante de um grupo de Lie compacto. O ponto principal neste capítulo é a existência de um conjunto finito de geradores polinomiais para o anel de invariantes e para o módulo de equivariantes sob a ação de Γ . No Capítulo 2, introduzimos os principais conceitos e resultados do contexto reversível-equivariante. Apresentamos uma fórmula, que envolve o caracter (traço) da representação de Γ em V , para o cálculo do número de aplicações Γ -reversíveis-equivariantes de cada grau e utilizamos os operadores de Reynolds para a obtenção dos Algoritmos 2.4.4 e 2.5.4, este último para o cálculo de geradores polinomiais do módulo de reversíveis-equivariantes. No Capítulo 3, aplicamos o Algoritmo 2.5.4 para a obtenção da forma geral de campos de vetores reversíveis-equivariantes sob a ação de diferentes grupos. Com o auxílio do software Maple 8, ilustramos a dinâmica de alguns campos sob a influência de simetrias e antissimetrias. No capítulo 4, descrevemos um processo de construção das chamadas componentes σ -isotópicas, detalhando uma comparação entre os processos estabelecidos em [5] e [20].

PRELIMINARES

Como mencionado na Introdução, a teoria usada para descrever as simetrias e antisimetrias de um sistema de equações é a de representação de grupos, sendo fundamental sua compreensão em nosso estudo. O conceito de grupo de Lie é uma importante ferramenta que possui tanto propriedades topológicas quanto algébricas, sendo a compacidade essencial em nosso trabalho. A teoria de representação e a teoria invariante para grupos de Lie compactos são bem conhecidas e estabelecem importantes propriedades, como a existência de uma integral invariante pela ação do grupo.

Neste primeiro capítulo apresentamos resultados básicos acerca da teoria de representação de grupos e da teoria invariante polinomial. O primeiro resultado importante nos permite assumir que um grupo de Lie compacto age por transformações ortogonais em um espaço de dimensão finita. Descrevemos também a decomposição de uma dada representação em representações mais simples e invariantes pela ação do grupo (Corolário 1.1.12). Tais componentes são os blocos principais para a construção da teoria de representação.

1.1 Teoria de representação

Começamos denotando por $GL(n)$ o grupo de todas as transformações lineares invertíveis de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n ou, equivalentemente, o grupo das matrizes $n \times n$ não singulares sobre \mathbb{R} . Uma vez que o conjunto $M_n(\mathbb{R})$ das matrizes $n \times n$ com entradas reais pode ser identificado com \mathbb{R}^{n^2} , temos uma estrutura topológica bem estabelecida no conjunto e, deste modo, podemos falar em subconjuntos abertos e fechados de $M_n(\mathbb{R})$. Portanto, um grupo G é um subgrupo fechado de $GL(n)$ se ele é um subconjunto fechado de $GL(n)$ bem como um subgrupo de $GL(n)$. Note que $M_n(\mathbb{R})$ contém $GL(n)$ como um subconjunto aberto. De fato, $GL(n) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, onde \det é a função contínua

$$\begin{aligned} \det : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto |A|, \end{aligned} \tag{1.1}$$

com $|A|$ denotando o determinante da matriz A .

Para nossos propósitos definimos grupo de Lie como abaixo:

Definição 1.1.1. *Um grupo de Lie é um subgrupo fechado de $GL(n)$.*

Dizemos que um grupo de Lie é compacto se ele é compacto como um subconjunto de \mathbb{R}^{n^2} . Como um grupo de Lie é fechado por definição, ele é compacto se, e somente se, as entradas das matrizes que o definem são limitadas.

Observamos que, na literatura, um grupo de Lie é definido de forma mais geral. A definição apresentada aqui abrange um caso particular de grupo de Lie, o chamado grupo de Lie linear. Contudo, todo grupo de Lie compacto, no sentido mais geral, é topologicamente isomorfo a um grupo de Lie linear (veja [7]).

Vejam alguns exemplos importantes de grupos de Lie e que serão estudados no decorrer do trabalho. Em toda a parte, Id_n representa a matriz identidade de ordem n e \det é a função contínua definida em (1.1).

Exemplo 1.1.2. 1. O grupo ortogonal $\mathbf{O}(n)$ é formado pelas matrizes $A \in M_n(\mathbb{R})$ que satisfazem $AA^t = \text{Id}_n$, onde A^t é a transposta de A , juntamente com a operação de multiplicação de matrizes. Temos que $\mathbf{O}(n)$ é um subconjunto fechado de $GL(n)$, pois $\mathbf{O}(n) = \det^{-1}(\{-1, 1\})$.

2. O grupo ortogonal especial $\mathbf{SO}(n)$ é formado pelas matrizes $A \in \mathbf{O}(n)$ tais que $\det A = 1$. Claramente, ele é um subgrupo fechado de $GL(n)$, uma vez que $\mathbf{SO}(n) = \det^{-1}(\{1\})$.

$\mathbf{SO}(n)$ também é frequentemente chamado de grupo de rotações n -dimensional. Em particular, $\mathbf{SO}(2)$ consiste das rotações planares, isto é, $\mathbf{SO}(2) = \{R_\theta : \theta \in (0, 2\pi]\}$, onde

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

É claro que $R_\theta \in \mathbf{SO}(2)$, para todo $\theta \in (0, 2\pi]$. Para ver que $A \in \mathbf{SO}(2)$ é da forma R_θ , escreva

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Como $AA^t = \text{Id}_2$, obtemos as igualdades $a^2 + b^2 = 1$ e $c^2 + d^2 = 1$. Então, existem $\theta, \phi \in (0, 2\pi]$ tais que $a = \cos \theta, b = \sin \theta, c = \sin \phi$ e $d = \cos \phi$. Além disso, $\det(A) = 1$ implica que $\cos(\theta + \phi) = 1$, ou seja, $\theta = 2k\pi - \phi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Cálculos simples mostram que $a = \cos \phi$ e $b = -\sin \phi$. Portanto, $A = R_\phi$, como queríamos.

Dessa forma, podemos identificar $\mathbf{SO}(2)$ com o grupo do círculo $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, uma vez que cada $z \in \mathbf{S}^1$ pode ser escrito de forma única como $z = e^{i\theta}$, com $\theta \in (0, 2\pi]$.

Por um raciocínio análogo ao descrito anteriormente, é possível mostrar que se $A \in \mathbf{O}(2)$ e $\det A = -1$, então $A = \kappa R_\theta$, onde κ é a reflexão

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Logo, o grupo $\mathbf{O}(2)$ é gerado por $\mathbf{SO}(2)$ juntamente com κ .

3. O grupo cíclico \mathbf{Z}_n de ordem n , com $n \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 2$, que pode ser identificado com o grupo das matrizes 2×2 gerado pela rotação $R_{\frac{2\pi}{n}}$. Logo, \mathbf{Z}_n é um grupo de Lie.
4. O grupo diedral \mathbf{D}_n de ordem $2n$ gerado por \mathbf{Z}_n e por um elemento de ordem 2 que não comuta com \mathbf{Z}_n . Podemos identificá-lo com o grupo de matrizes 2×2 gerado pela rotação $R_{\frac{2\pi}{n}}$ e pela reflexão κ dada em (1.3). Logo, \mathbf{D}_n é um grupo de Lie. Geometricamente, \mathbf{D}_n é o grupo das simetrias do polígono regular de n lados.
5. Todo grupo finito é isomorfo a um grupo de Lie.
6. O toro n -dimensional $\mathbf{T}^n = \underbrace{\mathbf{S}^1 \times \dots \times \mathbf{S}^1}_{n \text{ vezes}}$ é isomorfo a um grupo de Lie, fazendo a identificação de $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbf{T}^n$ com a matriz em $GL(2n)$

$$\begin{pmatrix} R_{\theta_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{\theta_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_{\theta_n} \end{pmatrix}, \quad \theta_i \in (0, 2\pi],$$

onde R_{θ_i} é como em (1.2).

7. \mathbb{R}^n é um grupo de Lie isomorfo ao grupo das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in GL(n+1),$$

onde $a_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n$.

Os grupos $\mathbf{O}(n)$, $\mathbf{SO}(n)$, \mathbf{T}^n e todo grupo finito são exemplos de grupos de Lie compactos.

1.1.1 Ações e representações

Nesta subsecção, introduzimos os conceitos de ação linear e de representação de um grupo no espaço V das variáveis. Daqui em diante, Γ é um grupo de Lie compacto e V e W são espaços vetoriais reais de dimensão finita.

Definição 1.1.3. Dizemos que Γ age linearmente em V se existe uma aplicação contínua, chamada ação,

$$\begin{aligned}\Gamma \times V &\longrightarrow V \\ (\gamma, v) &\longmapsto \gamma.v\end{aligned}$$

tal que:

- (i) Para cada $\gamma \in \Gamma$, a aplicação $\rho(\gamma) : V \rightarrow V$ definida por $\rho(\gamma)(v) = \gamma.v$ é linear;
- (ii) Se $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, então $\gamma_1.(\gamma_2.v) = (\gamma_1\gamma_2).v$.

Claramente, uma ação de Γ em V pode ser definida apenas para os geradores de Γ . Quando não houver ambiguidade sobre a ação, escrevemos γv no lugar de $\gamma.v$.

O homomorfismo de grupos ρ definido por

$$\begin{aligned}\rho : \Gamma &\longrightarrow GL(V) \\ \gamma &\longmapsto \rho(\gamma)\end{aligned}$$

é chamado de representação de Γ em V , onde $GL(V)$ é o grupo dos operadores lineares invertíveis em V . Desta maneira, a toda ação esta associada uma representação e ambas diferem essencialmente no ponto de vista. Uma ação diz como um elemento γ do grupo transforma um dado elemento v do espaço, enquanto que uma representação diz como γ transforma o espaço todo. Em todo o texto, denotamos por (ρ, V) a representação ρ de Γ no espaço vetorial V .

Vejam alguns exemplos de ações:

Exemplo 1.1.4. 1. A função dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^1 \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\theta, z) &\longmapsto e^{i\theta}z\end{aligned}\tag{1.4}$$

denota uma ação de \mathbf{S}^1 em \mathbb{C} . De fato, se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\theta(\lambda z_1 + z_2) = e^{i\theta}(\lambda z_1 + z_2) = \lambda e^{i\theta}z_1 + e^{i\theta}z_2 = \lambda(\theta z_1) + \theta z_2, \quad \forall \theta \in \mathbf{S}^1,$$

$$\theta_1(\theta_2 z) = \theta_1(e^{i\theta_2}z) = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}z = e^{i(\theta_1+\theta_2)}z = (\theta_1 + \theta_2)z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Esta ação dá origem a uma representação ρ de S^1 em $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, onde $\rho(\theta) = R_\theta$ é a rotação de ângulo θ .

- 2. Todo grupo Γ de Lie (linear) tem uma ação natural em $V \cong \mathbb{R}^n$ dada pela multiplicação de matriz por vetor:

$$\begin{aligned}\Gamma \times V &\longrightarrow V \\ (A, v) &\longmapsto Av\end{aligned}\tag{1.5}$$

3. Todo grupo Γ tem uma ação trivial dada por

$$\gamma x = x, \quad \forall x \in V, \gamma \in \Gamma. \quad (1.6)$$

4. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, existe uma ação de \mathbf{S}^1 em \mathbb{C} definida por

$$\theta z = e^{ik\theta} z, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbf{S}^1. \quad (1.7)$$

Note que para $k = 0$ temos a ação trivial dada em (1.6) e para $k = 1$ temos a ação padrão de \mathbf{S}^1 em \mathbb{C} definida em (1.4).

5. Cada ação de $\mathbf{S}^1 \cong \mathbf{SO}(2)$ em \mathbb{C} definida em (1.7) estende-se naturalmente para uma ação de $\mathbf{O}(2)$ em \mathbb{C} , se considerarmos $\kappa z = \bar{z}$, onde κ é a reflexão dada em (1.3).

6. Todo grupo de Lie compacto age sobre o espaço das matrizes $M_n(\mathbb{R})$ por semelhança, isto é,

$$\gamma A = \gamma A \gamma^{-1}, \quad \forall \gamma \in \Gamma, A \in M_n(\mathbb{R}).$$

7. O grupo \mathbf{Z}_n de ordem n , gerado pela rotação R_ϕ de ângulo $\phi = \frac{2\pi}{n}$, define uma ação em \mathbb{C} dada por

$$\phi z = e^{i\phi} z, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (1.8)$$

8. O grupo Diedral \mathbf{D}_n de ordem $2n$, gerado por \mathbf{Z}_n e pela reflexão κ dada em (1.3), define uma ação em \mathbb{C} dada por

$$\phi z = e^{i\phi z} \quad \text{e} \quad \kappa z = \bar{z}, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (1.9)$$

Em nosso contexto, podemos descrever de modos distintos uma “mesma” ação. Neste caso, dizemos que tais ações são isomorfas. Mais precisamente temos:

Definição 1.1.5. *Sejam (ρ, V) e (η, W) representações de Γ em V e em W , respectivamente. Dizemos que as ações de Γ em V e em W são isomorfas, ou que os espaços V e W são Γ -isomorfos, se existe um isomorfismo linear $A : V \rightarrow W$ tal que*

$$A(\rho(\gamma)v) = \eta(\gamma)A(v), \quad \forall v \in V, \gamma \in \Gamma.$$

Neste caso, chamamos A de Γ -isomorfismo entre V e W .

Como um exemplo, considere as ações de \mathbf{S}^1 em \mathbb{C} dadas em (1.7) para $k = 1$ e $k = -1$. As representações correspondentes são ρ e η , respectivamente, com $\rho(\theta)z = e^{i\theta}z$ e $\eta(\theta)z = e^{-i\theta}z$, para todo $\theta \in \mathbf{S}^1$ e $z \in \mathbb{C}$. Defina o isomorfismo $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por $A(z) = \bar{z}$. Então,

$$A(\rho(\theta)z) = \overline{e^{i\theta}z} = e^{-i\theta}\bar{z} = e^{-i\theta}A(z) = \eta(\theta)A(z),$$

mostrando que tais ações são isomorfas.

Naturalmente, podemos estender a Definição 1.1.5 para o caso em que Γ age sobre V e um outro grupo Δ , isomorfo a Γ , age em W .

1.1.2 Integral de Haar

Nesta seção mostramos que todo grupo de Lie compacto $\Gamma \subset GL(n)$ pode ser identificado como um subgrupo fechado do grupo ortogonal $\mathbf{O}(n)$ (Proposição 1.1.8). Para isto, usamos a integral de Haar, uma operação que é invariante sob translação por elementos de Γ .

Definição 1.1.6. *Seja $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. A operação*

$$\int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \text{ ou } \int_{\Gamma} f \text{ ou } \int_{\Gamma} f d\gamma \in \mathbb{R}$$

é uma integral de Haar sobre Γ se satisfaz as três seguintes condições:

(i) *Linearidade: Para $f, g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\int_{\Gamma} (\lambda f + g) = \lambda \int_{\Gamma} f + \int_{\Gamma} g ;$$

(ii) *Positividade: Se $f(\gamma) \geq 0$, para todo $\gamma \in \Gamma$, então $\int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \geq 0$;*

(iii) *Invariância por translação: Para todo $\delta \in \Gamma$ fixado, $\int_{\gamma \in \Gamma} f(\delta\gamma) = \int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)$.*

A prova da existência e unicidade dessa integral é um resultado clássico, que será omitido aqui. Se Γ é um grupo de Lie compacto, então \int_{Γ} é finita e assumimos $\int_{\Gamma} 1 = 1$. Neste caso, dizemos que a integral de Haar é *normalizada*. Da compacidade de Γ segue também que a integral de Haar é invariante sob translações à direita, isto é,

$$\int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma\delta) = \int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma), \quad \forall \delta \in \Gamma \text{ fixado.}$$

Para maiores detalhes sobre a integral de Haar e para as demonstrações dos resultados veja [8].

Exemplo 1.1.7. 1. Seja Γ um grupo de Lie finito de ordem $|\Gamma|$. Então a integral de Haar normalizada sobre Γ é dada por

$$\int_{\Gamma} f(\gamma) d\gamma \equiv \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma),$$

onde $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Com efeito:

(i) Se $f, g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\alpha f + g)(\gamma) d\gamma &= \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} (\alpha f + g)(\gamma) = \frac{1}{|\Gamma|} \left(\alpha \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) + \sum_{\gamma \in \Gamma} g(\gamma) \right) \\ &= \alpha \left(\frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) + \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} g(\gamma) \right) \\ &= \alpha \int_{\Gamma} f(\gamma) d\gamma + \int_{\Gamma} g(\gamma) d\gamma; \end{aligned}$$

(ii) Se $f(\gamma) \geq 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$, então $\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \geq 0$ e, assim,

$$\int_{\Gamma} f(\gamma) d\gamma = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \geq 0;$$

(iii) Se $\delta \in \Gamma$ é fixo, então

$$\int_{\Gamma} f(\delta\gamma) d\gamma = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\delta\gamma) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\alpha \in \Gamma} f(\alpha) = \int_{\Gamma} f(\gamma) d\gamma,$$

a segunda igualdade seguindo do fato de $h : \Gamma \rightarrow \Gamma$, dada por $h(\gamma) = \delta\gamma$, ser bijetora;

Além disso, $\int_{\Gamma} 1 d\gamma = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} 1 = \frac{1}{|\Gamma|} |\Gamma| = 1$.

2. Toda função contínua $f : \mathbf{SO}(2) \rightarrow \mathbb{R}$ determina de forma única uma função contínua $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de período 2π , dada por $\tilde{f}(\theta) = f(R_{\theta})$. Então a integral de Haar normalizada em $\mathbf{SO}(2)$ é dada por

$$\int_{\Gamma} f \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta) d\theta.$$

Com efeito, os itens (i) e (ii) da definição de integral de Haar seguem da linearidade e da positividade da integral de Riemann. Para o item (iii), tome $f : \mathbf{SO}(2) \rightarrow \mathbb{R}$ e fixe $R_{\psi} \in \mathbf{SO}(2)$. Então

$$\begin{aligned} \int_{R_{\theta} \in \mathbf{SO}(2)} f(R_{\psi} R_{\theta}) &= \int_{R_{\theta} \in \mathbf{SO}(2)} f(R_{\psi+\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\psi + \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta) d\theta = \int_{R_{\theta} \in \mathbf{SO}(2)} f(R_{\theta}), \end{aligned}$$

a terceira igualdade seguindo do fato de que \tilde{f} é 2π -periódica.

Além disso, $\int_{\theta \in \mathbf{SO}(2)} 1 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 d\theta = \frac{1}{2\pi} 2\pi = 1$.

Proposição 1.1.8. *Sejam (ρ, V) uma representação de Γ em um espaço vetorial real V de dimensão finita n . Então existe um produto interno em V tal que, para todo $\gamma \in \Gamma$, a matriz $\rho(\gamma) \in GL(n)$ é ortogonal.*

Demonstração: Seja \langle, \rangle um produto interno em V . Para $v, w \in V$, considere a função contínua

$$\begin{aligned} f_{v,w} : \Gamma &\rightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\mapsto \langle \rho(\gamma)v, \rho(\gamma)w \rangle . \end{aligned}$$

Assim, fica bem definido o produto

$$\langle v, w \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} f_{v,w}(\gamma) = \int_{\Gamma} \langle \rho(\gamma)v, \rho(\gamma)w \rangle . \quad (1.10)$$

Da linearidade e da positividade da integral de Haar segue que $\langle, \rangle_{\Gamma}$ é um produto interno em V . Da propriedade de invariância por translação segue que, para todo $\delta \in \Gamma$ fixado,

$$\begin{aligned} \langle \rho(\delta)v, \rho(\delta)w \rangle_{\Gamma} &= \int_{\Gamma} \langle \rho(\gamma)(\rho(\delta)v), \rho(\gamma)(\rho(\delta)w) \rangle = \int_{\Gamma} \langle \rho(\gamma\delta)v, \rho(\gamma\delta)w \rangle \\ &= \int_{\Gamma} f_{v,w}(\gamma\delta) = \int_{\Gamma} f_{v,w}(\gamma) = \langle v, w \rangle_{\Gamma} . \end{aligned}$$

Ou seja, $\langle, \rangle_{\Gamma}$ é um produto interno Γ - invariante. Como V é um espaço vetorial real de dimensão finita, segue que

$$\langle v, w \rangle_{\Gamma} = \langle \rho(\gamma)v, \rho(\gamma)w \rangle_{\Gamma} = \langle v, \rho(\gamma)^* \rho(\gamma)w \rangle = \langle v, \rho(\gamma)^t \rho(\gamma)w \rangle_{\Gamma} ,$$

para quaisquer $v, w \in V$, onde $\rho(\gamma)^*$ representa a adjunta de $\rho(\gamma)$. Logo $\rho(\gamma)^t \rho(\gamma) = \text{Id}$, ou seja, $\rho(\gamma) \in \mathbf{O}(n)$, para todo $\gamma \in \Gamma$. \square

O seguinte resultado é explorado no próximo capítulo:

Teorema 1.1.9. (Fubini) *Sejam Γ um grupo de Lie compacto e Σ um subgrupo fechado de Γ . Para qualquer função contínua $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ tem-se*

$$\int_{\Gamma} f(\gamma) d\gamma = \int_{\frac{\Gamma}{\Sigma}} \left(\int_{\Sigma} f(\gamma) d\sigma \right) d(\gamma\Sigma) ,$$

onde $d(\gamma\Sigma)$ denota a medida de Haar normalizada invariante à esquerda sobre Γ/Σ .

Demonstração: Veja Bröcker e Dieck [8, I, Proposition 5.16] \square

1.1.3 Irreduzibilidade

Nesta subseção, mostramos que toda representação de um grupo de Lie compacto se decompõe em uma soma direta de representações mais simples, chamadas irreduzíveis (Corolário 1.1.12). Este processo de decomposição, que é semelhante ao processo de diagonalização de matrizes, nem sempre é único. Isso garante a existência das componentes isotópicas, que combinam todas as representações irreduzíveis Γ -isomorfas entre si (Teorema 1.1.16).

Definição 1.1.10. *Seja (ρ, V) uma representação de Γ em V .*

1. *Um subespaço $W \subset V$ é chamado Γ -invariante se $\rho(\gamma)w \in W, \forall \gamma \in \Gamma, w \in W$;*
2. *Uma representação ou ação de Γ em V é irreduzível se os únicos subespaços Γ -invariantes de V são os triviais;*
3. *Um subespaço $W \subseteq V$ é Γ -irreduzível se W é Γ -invariante e a ação de Γ em W é irreduzível.*

Por exemplo, a ação de $\mathbf{SO}(2) \cong \mathbf{S}^1$ em \mathbb{C} dada em (1.7) é irreduzível para $k \neq 0$. Geometricamente a ação rotaciona elementos do plano. Logo, os únicos subespaços de \mathbb{R}^2 que podem ser invariantes pelas rotações são os triviais. O mesmo não é verdade para $k = 0$. Neste caso, a ação é trivial e todo subespaço do plano é $\mathbf{SO}(2)$ -invariante.

Uma importante consequência da existência de um produto interno invariante em V é que todo subespaço Γ -invariante possui um complementar Γ -invariante. Mas especificamente temos:

Proposição 1.1.11. *Seja Γ agindo em V e seja $W \subset V$ um subespaço Γ -invariante. Então existe um subespaço complementar Γ -invariante $Z \subset V$ tal que $V = W \oplus Z$.*

Demonstração: Considere \langle, \rangle_Γ um produto interno Γ -invariante em V e tome

$$Z = W^\perp = \{v \in V : \langle v, w \rangle_\Gamma = 0, \forall w \in W\}.$$

Para cada $\gamma \in \Gamma$, o operador $\rho(\gamma) : W \rightarrow W, w \mapsto \gamma w$, é um isomorfismo. Para ver isto, basta notar que $\rho(\gamma)$ é sobrejetor, visto que W tem dimensão finita. Considere $w \in W$. Da invariância de W , $\gamma^{-1}w \in W$ e temos $\rho(\gamma)(\gamma^{-1}w) = \gamma\gamma^{-1}w = w$, como queríamos.

Deste modo, dado $w \in W$ existe um único $w_1 \in W$ tal que $w = \rho(\gamma)w_1$. Se $v \in W^\perp$, então $\langle \rho(\gamma)v, w \rangle_\Gamma = \langle \rho(\gamma)v, \rho(\gamma)w_1 \rangle_\Gamma = \langle v, w_1 \rangle_\Gamma = 0$. Portanto, $\rho(\gamma)v \in W^\perp$, isto é, W^\perp é Γ -invariante. \square

Segue da proposição acima que toda representação de um grupo de Lie compacto pode ser escrita como uma soma direta de representações irreduzíveis. Mais formalmente, temos:

Corolário 1.1.12. (Teorema da Redutibilidade Completa) *Seja Γ agindo linearmente em V . Então existem subespaços Γ -irreduzíveis V_1, \dots, V_s de V tais que*

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s.$$

Demonstração: Suponha $V \neq \{0\}$ e seja $n = \dim_{\mathbb{R}} V$. Faremos a prova por indução sobre n .

Se $n = 1$, então V é irreduzível, uma vez que seus únicos subespaços são os triviais. Assim, podemos escrever $V = V \oplus \{0\}$. Suponha $n > 1$ e que o resultado seja válido para subespaços de dimensão $m < n$. Se V é irreduzível, não temos o que fazer. Caso contrário, existe um subespaço Γ -invariante $W \subset V$ tal que $\{0\} \subsetneq W \subsetneq V$. Logo, $\dim_{\mathbb{R}} W < n$. Pela Proposição 1.1.11, existe um subespaço complementar Γ -invariante $Z \subset V$ tal que

$$V = W \oplus Z.$$

Segue que $\dim_{\mathbb{R}} Z < n$. Aplicando a hipótese de indução em Z e W , e observando que todo subespaço irreduzível de Z e W é um irreduzível de V , obtemos o resultado. \square

Vejamos dois exemplos:

Exemplo 1.1.13. 1. Defina a ação de $\mathbf{O}(2)$ em \mathbb{R}^3 como

$$\theta(x, y, z) = (x \cos 2\theta - y \sin 2\theta, x \sin 2\theta + y \cos 2\theta, z) \quad \text{e} \quad \kappa(x, y, z) = (x, -y, -z).$$

Note que $V = V_1 \oplus V_2$, onde

$$V_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad V_2 = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Os subespaços V_1 e V_2 são $\mathbf{O}(2)$ -irreduzíveis: dado $v_2 = (0, 0, z) \in V_2$, temos $\theta v_2 = v_2 \in V_2$ e $\kappa v_2 = (0, 0, -z) \in V_2$. Portanto, V_2 é $\mathbf{O}(2)$ -invariante. Como $\dim_{\mathbb{R}} V_2 = 1$, $\mathbf{O}(2)$ age irreduzivelmente em V_2 . Analogamente, se $v_1 = (x, y, 0) \in V_1$, então $\theta v_1 = (x \cos 2\theta - y \sin 2\theta, x \sin 2\theta + y \cos 2\theta, 0) \in V_1$ e $\kappa v_1 = (x, -y, 0) \in V_1$. Portanto V_1 é $\mathbf{O}(2)$ -invariante. É fácil verificar que nenhum subespaço próprio de V_1 é $\mathbf{O}(2)$ -invariante. Logo, V_1 é $\mathbf{O}(2)$ -irreduzível.

2. Considere V o conjunto das matrizes simétricas em $M_3(\mathbb{R})$ com traço nulo. Podemos “enxergar” $\mathbf{O}(2) \subset \mathbf{O}(3)$ fazendo a seguinte identificação:

$$R_\theta \in \mathbf{O}(2) \longmapsto \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{O}(3).$$

Para todo $\gamma \in \mathbf{O}(3)$ e para todo $A \in V$, defina

$$\gamma A = \gamma^t A \gamma,$$

ou seja, $\mathbf{O}(3)$ age em V por semelhança. Cálculos simples mostram que

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \\ c & d & 0 \end{pmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

e

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -2a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

são subespaços $\mathbf{O}(3)$ -invariantes e irreduzíveis de V . Além disso, $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$.

Em geral, a decomposição de V em subespaços irreduzíveis como no Corolário 1.1.12 não é única. Por exemplo, considere $V = M_2(\mathbb{R})$ e suponha $\mathbf{SO}(2)$ agindo em V pela multiplicação de matrizes à esquerda, isto é, $\theta A = R_\theta A$, para todo $R_\theta \in \mathbf{SO}(2)$ e $A \in V$. Neste caso, $V = V_1 \oplus V_2$ e $V = V_1 \oplus V_3$, onde

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}; \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

e

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 2c & c \\ 2d & d \end{pmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

são subespaços $\mathbf{SO}(2)$ -irreduzíveis de V .

O ponto principal desta não unicidade é a existência de subespaços Γ -irreduzíveis de V que são Γ -isomorfos (no exemplo acima, V_2 e V_3 são Γ -isomorfos). Entretanto, podemos encontrar condições sob as quais a decomposição de V em subespaços invariantes pela ação do grupo seja única. Formalizamos o resultado no Teorema 1.1.16, cuja prova depende dos dois próximos lemas.

Lema 1.1.14. *Seja (ρ, W) uma representação de Γ em W e suponha*

$$W = \sum_{\alpha} U_{\alpha},$$

onde cada U_{α} é um subespaço Γ -invariante e Γ -isomorfo a algum subespaço Γ -irreduzível U de W . Então todo subespaço Γ -irreduzível de W é Γ -isomorfo a U .

Demonstração: Seja $s = \dim_{\mathbb{R}} W$. Mostremos primeiramente que existe um subconjunto finito $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_t}\}$ dos U_{α} tal que

$$W = U_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus U_{\alpha_t}. \tag{1.11}$$

A prova é por indução. Seja

$$W' = U_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus U_{\alpha_{t-1}} \subset W.$$

Se $W = W'$, então provamos a afirmação. Caso contrário, existe $U_{\alpha_t} \subset W$ com $U_{\alpha_t} \not\subset W'$. Como U_{α_t} é irreduzível e $U_{\alpha_t} \cap W' \subset U_{\alpha_t}$, segue que $U_{\alpha_t} \cap W' = \{0\}$. Portanto, a soma $W' + U_{\alpha_t}$ é direta e temos

$$W'' = W' \oplus U_{\alpha_t}.$$

Se $W'' = W$, provamos o que queríamos. Caso contrário, repetimos o processo e, como dimensão de W é finita, obtemos (1.11) para t no máximo s .

Seja $\{0\} \neq X$ um subespaço Γ -irreduzível de W . Se $X = U_{\alpha_i}$, para algum $i \in \{1, \dots, t\}$, então claramente X é Γ -isomorfo a U . Supomos $X \neq U_{\alpha_i}$, para todo $i \in \{1, \dots, t\}$. Mostremos que

$$X \not\subset U_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus U_{\alpha_{k-1}} \quad \text{e} \quad X \subset U_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus U_{\alpha_k}, \quad (1.12)$$

para um único $k \in \{1, \dots, t\}$.

De fato, como X é irreduzível, $X \not\subset U_{\alpha_1}$. Se $X \subset U_{\alpha_1} \oplus U_{\alpha_2}$, provamos (1.12). Caso contrário, verificamos se $X \subset U_{\alpha_1} \oplus U_{\alpha_2} \oplus U_{\alpha_3}$. Se sim, acabamos a prova. Caso contrário, repetimos o processo, até obtermos (1.12).

Da irreduzibilidade de X e de (1.12) segue que

$$X \cap (U_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus U_{\alpha_{k-1}}) = \{0\}. \quad (1.13)$$

Considere agora a projeção

$$\begin{aligned} \Pi : U_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus U_{\alpha_k} &\longrightarrow U_{\alpha_k} \\ (u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_k}) &\longmapsto u_{\alpha_k} \end{aligned}.$$

Por (1.13), $\Pi|_X : X \rightarrow \Pi(X)$ é um Γ -isomorfismo. Para ver isto, considere a ação de Γ em $U_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus U_{\alpha_k}$ dada por

$$\gamma(u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_k}) = (\rho_1(\gamma)u_{\alpha_1}, \dots, \rho_k(\gamma)u_{\alpha_k}),$$

onde $\rho_i = \rho|_{U_{\alpha_i}}$, para todo $i = 1, \dots, k$.

Portanto, $\Pi(X) \subset U_{\alpha_k}$ é um subespaço Γ -invariante. Por (1.12), $\Pi(X)$ é não nulo. A irreduzibilidade de U_{α_k} implica que $\Pi(X) = U_{\alpha_k}$. Portanto, X é Γ -isomorfo a U_{α_k} e, consequentemente, a U . \square

Lema 1.1.15. *Seja Γ agindo linearmente em V . Sejam X e Y subespaços Γ -invariantes de V tais que não existem subespaços Γ -irreduzíveis $W \subset X$ e $Z \subset Y$ com W Γ -isomorfo a Z . Então,*

(a) $X \cap Y = \{0\}$.

(b) Se $W \subset X \oplus Y$ é Γ -irreduzível então $W \subset X$ ou $W \subset Y$.

Demonstração: (a) Pelo Corolário 1.1.12, $X \cap Y$ pode ser escrito como uma soma direta de subespaços irreduzíveis. Mas, por hipótese, tal soma só é possível se $X \cap Y = \{0\}$.

(b) Seja $W \subset X \oplus Y$ um subespaço Γ -irreduzível. Como $W \cap X \subseteq W$ e $W \cap Y \subseteq W$ são Γ -invariantes, segue que ($W \subset X$ ou $W \cap X = \{0\}$) e ($W \subset Y$ ou $W \cap Y = \{0\}$). Suponha $W \not\subset X$ e $W \not\subset Y$. Então, $W \cap X = \{0\} = W \cap Y$. Considere as projeções

$$\Pi_X : X \oplus Y \longrightarrow X \quad \text{e} \quad \Pi_Y : X \oplus Y \longrightarrow Y.$$

De modo análogo ao que foi feito na demonstração do Lema 1.1.14, consideramos as restrições $\Pi_X|_W$ e $\Pi_Y|_W$ para obter que W é Γ -isomorfo a $\Pi_X(W)$ e a $\Pi_Y(W)$, ou seja, $\Pi_X(W) \subset X$ e $\Pi_Y(W) \subset Y$ são Γ -isomorfos. No entanto, $\Pi_X(W)$ e $\Pi_Y(W)$ são Γ -irreduzíveis, o que contradiz a hipótese do lema. Portanto, $W \subset X$ ou $W \subset Y$ como queríamos. \square

Teorema 1.1.16. *Seja Γ agindo linearmente em V .*

(a) *A menos de Γ -isomorfismos existe um número finito de subespaços distintos U_1, \dots, U_t de V que são Γ -irreduzíveis.*

(b) *Defina W_k como a soma de todos os subespaços $W \subset V$ tais que W é Γ -isomorfo a U_k , para algum $k \in \{1, \dots, t\}$. Então*

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_t. \tag{1.14}$$

Demonstração: Se V é Γ -irreduzível, não temos o que fazer. Suponha então que V não é Γ -irreduzível e escolha um subespaço Γ -irreduzível $U_1 \subset V$, cuja existência é garantida pelo Corolário 1.1.12. Seja W'_1 a soma de todos os subespaços Γ -invariantes de V e Γ -isomorfos a U_1 . Então, W'_1 também é Γ -invariante. Se $V = W'_1$, obtemos o que queríamos. Caso contrário, tome o complementar invariante $W'_1{}^\perp$ de W'_1 e escreva $V = W'_1 \oplus W'_1{}^\perp$.

Repita agora o processo em $W'_1{}^\perp$, ou seja, sejam $U_2 \subset W'_1{}^\perp$ um subespaço Γ -irreduzível e W'_2 a soma de todos os subespaços Γ -invariantes Γ -isomorfos a U_2 . Se $W'_2 = W'_1{}^\perp$, então acabou. Caso contrário, tome o complementar invariante de W'_2 , escreva $W'_1{}^\perp = W'_2 \oplus W'_2{}^\perp$ e repita o processo em $W'_2{}^\perp$. Como a dimensão de V é finita o processo termina com

$$V = W'_1 \oplus \dots \oplus W'_k,$$

onde cada W'_j é a soma de subespaços Γ -irredutíveis de V que são Γ -isomorfos a U_j . Além disso, por construção, $i \neq j$ implica que U_i é não Γ -isomorfo a U_j .

Afirmamos agora que todo subespaço $U \subset V$ Γ -irredutível é Γ -isomorfo a U_j , para algum $j = 1, \dots, k$. De fato, segue do Lema 1.1.15 que $U \subset W'_j$, para algum $j \in \{1, \dots, k\}$. Pelo Lema 1.1.14, U é Γ -isomorfo a algum U_j . Isto prova a parte **(a)** do teorema. Para provar o item **(b)**, note que $W'_j = W_j$, pois todo irredutível de V está contido em W'_j para algum j . \square

Os subespaços W_k são chamados de *componentes isotópicas* de V do tipo U_k . Por construção, a decomposição de V em componentes isotópicas, chamada *decomposição isotópica* é única. Assim, se $U \subset V$ é um subespaço Γ -irredutível, então $U \subset W_j$, para um único $j \in \{1, \dots, t\}$.

1.2 Teoria invariante

Como mencionado, as propriedades simétricas de um sistema de equações dão uma estrutura para a forma geral do campo de vetores. Um primeiro passo no estudo desta estrutura é determinar as funções que são invariantes pela ação de um grupo no espaço de configurações, que em nosso caso é um espaço vetorial real V de dimensão finita. De igual importância é a obtenção dos geradores das aplicações definidas em V que comutam com esta ação.

Apresentamos, nesta seção, resultados da teoria invariante de grupos de Lie compactos. O primeiro principal resultado é o Teorema de Hilbert-Weyl, que afirma que o anel das funções polinomiais invariantes é finitamente gerado. O segundo principal resultado é o Teorema 1.2.11, que garante a existência de um conjunto finito de geradores para o módulo das aplicações polinomiais equivariantes sobre o anel dos invariantes.

1.2.1 Funções invariantes

Definição 1.2.1. *Seja (ρ, V) uma representação de Γ em V . Uma função polinomial a valores reais $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é dita Γ -invariante se*

$$f(\rho(\gamma)v) = f(v), \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad v \in V.$$

Se Γ for finitamente gerado, basta verificar a invariância da função para os geradores de Γ , uma vez que a ação de Γ em V é linear. O conjunto dos polinômios Γ -invariantes tem estrutura de anel sobre \mathbb{R} e é denotado por $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.

Vejamos exemplos de funções polinomiais invariantes sob a ação de diversos grupos.

- Exemplo 1.2.2.** 1. Considere $\Gamma = \mathbf{Z}_2 = \{-1, 1\}$ agindo em \mathbb{R} por $-1x = -x$. Neste caso se $f \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\mathbf{Z}_2)$, então $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Isto implica que f é um polinômio par, ou seja, existe um polinômio $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = h(x^2)$.
2. Considere $\Gamma = \mathbf{S}^1$ agindo em \mathbb{C} como em (1.4). Mostremos que se $f \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{S}^1)$, então existe um polinômio $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(z) = h(z\bar{z})$. Começamos escrevendo f nas coordenadas z, \bar{z} como

$$f(z) = \sum a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta, \quad a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}. \quad (1.15)$$

Como $f(e^{i\theta}z) = f(z)$, para todo $\theta \in \mathbf{S}^1$, temos

$$\sum a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta = \sum a_{\alpha\beta} (e^{i\theta}z)^\alpha \overline{(e^{i\theta}z)}^\beta = \sum a_{\alpha\beta} e^{i\theta(\alpha-\beta)} z^\alpha \bar{z}^\beta.$$

Então, $a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} e^{i\theta(\alpha-\beta)}$, para todo $\theta \in \mathbf{S}^1$, o que implica que $a_{\alpha\beta} = 0$ ou $\alpha = \beta$. Portanto (1.15) é da forma

$$f(z) = \sum a_\alpha (z\bar{z})^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{C}.$$

Como $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$, para todo $z \in \mathbb{C}$, temos

$$\sum a_\alpha (z\bar{z})^\alpha = \sum \bar{a}_\alpha (z\bar{z})^\alpha.$$

Assim, $a_\alpha \in \mathbb{R}$. Definindo $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $h(x) = \sum a_\alpha (x)^\alpha$, temos o desejado.

3. Considere $\Gamma = \mathbf{Z}_n$ agindo em \mathbb{C} como em (1.8). Mostremos que se $f \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n)$, existe uma função polinomial $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(z) = h(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n, i(z^n - \bar{z}^n))$. De fato, escreva $f \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n)$ nas coordenadas z, \bar{z} como em (1.15). Da invariância de f com relação a $\phi = \frac{2\pi}{n}$ segue que

$$\sum a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta = \sum a_{\alpha\beta} (e^{i\phi}z)^\alpha \overline{(e^{i\phi}z)}^\beta = \sum a_{\alpha\beta} e^{i\phi(\alpha-\beta)} z^\alpha \bar{z}^\beta, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Assim, $a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} e^{i\frac{2\pi}{n}(\alpha-\beta)}$ de modo que

$$a_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha \equiv \beta \pmod{n}. \quad (1.16)$$

Como $f = \bar{f}$, temos

$$\sum a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta = \sum \bar{a}_{\alpha\beta} z^\beta \bar{z}^\alpha,$$

de onde obtemos $\bar{a}_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$.

Fatoramos agora (1.15) em relação a $z\bar{z}$ até $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ para obter

$$f(z) = \sum_{\alpha \geq \beta} a_{\alpha\beta} (z\bar{z})^\beta z^{\alpha-\beta} + \sum_{\alpha < \beta} a_{\alpha\beta} (z\bar{z})^\alpha \bar{z}^{\beta-\alpha} = \sum_{\alpha \geq \beta} a_{\alpha\beta} (z\bar{z})^\beta z^{\alpha-\beta} + \sum_{\alpha > \beta} a_{\beta\alpha} (z\bar{z})^\beta \bar{z}^{\alpha-\beta}.$$

Fazendo $\bar{a}_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, temos

$$f(z) = \sum_{\alpha \geq \beta} a_{\alpha\beta} (z\bar{z})^\beta z^{\alpha-\beta} + \sum_{\alpha > \beta} \bar{a}_{\alpha\beta} (z\bar{z})^\beta \bar{z}^{\alpha-\beta}.$$

Escreva $a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + ic_{\alpha\beta}$, com $b_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$. Então,

$$f(z) = \sum_{\alpha \geq \beta} b_{\alpha\beta} (z\bar{z})^\beta (z^{\alpha-\beta} + \bar{z}^{\alpha-\beta}) + i \sum_{\alpha > \beta} c_{\alpha\beta} (z\bar{z})^\beta (z^{\alpha-\beta} - \bar{z}^{\alpha-\beta}).$$

De (1.16) temos que

$$f(z) = \sum_{\substack{\alpha \geq \beta \\ l \in \mathbb{N}}} b_{\alpha\beta} (z\bar{z})^\beta (z^{ln} + \bar{z}^{ln}) + \sum_{\substack{\alpha > \beta \\ l \in \mathbb{N}}} c_{\alpha\beta} (z\bar{z})^\beta i(z^{ln} - \bar{z}^{ln}), \quad (1.17)$$

onde $b_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$.

Das identidades

$$\begin{aligned} z^{ln} + \bar{z}^{ln} &= (z^n + \bar{z}^n)(z^{(l-1)n} + \bar{z}^{(l-1)n}) - (z\bar{z})^n (z^{(l-2)n} + \bar{z}^{(l-2)n}), \\ i(z^{ln} - \bar{z}^{ln}) &= i(z^n - \bar{z}^n)(z^{(l-1)n} + \bar{z}^{(l-1)n}) + i(z\bar{z})^n (z^{(l-2)n} - \bar{z}^{(l-2)n}), \end{aligned}$$

vemos que os termos $z^{ln} + \bar{z}^{ln}$ e $i(z^{ln} - \bar{z}^{ln})$ são redutíveis para $l \geq 2$. Além disso, (1.17) pode ser reescrito como

$$f(z) = \sum_{j,k,t} A_{jkt} (z\bar{z})^j (z^n + \bar{z}^n)^k (i(z^n - \bar{z}^n))^t, \quad A_{jkt} \in \mathbb{R}.$$

Definindo $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por $h(x, y, z) = \sum_{jkt} A_{jkt} x^j y^k z^t$, obtemos o desejado.

4. Considere $\Gamma = \mathbf{D}_n$ agindo em \mathbb{C} como em (1.9). Mostremos que se $f \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n)$, existe uma função polinomial $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(z) = p(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n)$. Começamos observando que se $f \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n)$, então $f \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n)$ e $f(z) = f(\kappa z)$. Do exemplo anterior,

$$f(z) = h(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n, i(z^n - \bar{z}^n)),$$

para alguma função polinomial $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. A invariância de f em relação a κ implica que

$$f(z) = \tilde{h}(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n, (i(z^n - \bar{z}^n))^2),$$

com $\tilde{h} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Mas, $(i(z^n - \bar{z}^n))^2 = -(z^n + \bar{z}^n)^2 + 4(z\bar{z})^n$. Logo,

$$f(z) = p(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n),$$

para alguma função polinomial $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, como desejado.

Definição 1.2.3. Dizemos que um subconjunto finito $\{u_1, \dots, u_s\}$ de funções polinomiais Γ -invariantes gera $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ se todo polinômio invariante $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ pode ser escrito em função de u_1, \dots, u_s , ou seja, se existe uma função polinomial $h : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = h(u_1(x), \dots, u_s(x)). \quad (1.18)$$

Este conjunto finito, que não é necessariamente único, é chamado base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ e escrevemos $\mathcal{P}_V(\Gamma) = \langle u_1, \dots, u_s \rangle$.

Segundo as ações consideradas nos quatro casos do Exemplo 1.2.2, concluímos que $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\mathbf{Z}_2) = \langle x^2 \rangle$, $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{S}^1) = \langle z\bar{z} \rangle$, $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n) = \langle z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n, i(z^n - \bar{z}^n) \rangle$ e $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n) = \langle z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n \rangle$. A existência de uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ é garantida no próximo teorema, cuja prova será omitida por envolver conceitos sofisticados de álgebra comutativa.

Teorema 1.2.4. (Teorema de Hilbert-Weyl) *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Então existe uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.*

Demonstração: Ver Golubitsky [17, XII, Theorem 4.2]. □

Determinar uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ pode ser extremamente difícil e, em muitos casos, envolve uma manipulação de combinações algébricas e cálculos extensos. Um resultado semelhante ao Teorema de Hilbert-Weyl é válido para funções analíticas reais. Além disso, foi mostrado por Schwarz [17, XII, Theorem 4.3] que o resultado continua válido para germes C^∞ invariantes sob a ação de um grupo de Lie compacto. Mais especificamente, se $\{u_1, \dots, u_s\}$ é uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ então os mesmos u_1, \dots, u_s formam um conjunto gerador para o anel dos germes Γ -invariantes.

Na discussão da estrutura do anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$, uma pergunta que surge de modo natural é se a escolha do polinômio h em (1.18) é única. Para respondê-la precisamos das seguintes definições:

Definição 1.2.5. Dizemos que o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma) = \langle u_1, \dots, u_s \rangle$ admite uma relação se existe um polinômio não nulo $r : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $r(u_1(x), \dots, u_s(x)) \equiv 0$.

Definição 1.2.6. O anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ é chamado polinomial se ele admite uma base de Hilbert sem relações.

Um exemplo de um anel de invariantes que não é polinomial é dado considerando $\Gamma = \mathbf{Z}_2$ agindo em \mathbb{R}^2 por $-1(x, y) = (-x, -y)$. Uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{Z}_2)$ é dada por $u_1(x, y) = x^2$, $u_2(x, y) = xy$ e $u_3(x, y) = y^2$. No entanto, $u_1 u_3 - u_2^2 \equiv 0$ forma

uma relação. Neste caso, é fácil ver que não existem bases de Hilbert para $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{Z}_2)$ sem relações. Mas isso nem sempre é uma tarefa fácil. Existem testes simples que garantem condições suficientes para que $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ seja polinomial. Para mais detalhes veja [17, XII, Lemma 4.4] e [17, XIII, §1].

Observe que se $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ é um anel polinomial com base de Hilbert $\{u_1, \dots, u_s\}$, então a escolha de h em (1.18) é única. De fato, suponha $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ escrito como

$$f(x) = h(u_1(x), \dots, u_s(x)) = k(u_1(x), \dots, u_s(x)),$$

com $h, k : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$. Defina $r = f - k$. Então, $r(u_1(x), \dots, u_s(x)) \equiv 0$, ou seja, r é uma relação para $\mathcal{P}_V(\Gamma)$, contradizendo a hipótese.

1.2.2 Contexto equivariante

Definição 1.2.7. *Sejam (ρ, V) e (η, W) representações de Γ em V e em W , respectivamente. Dizemos que uma aplicação polinomial $g : V \rightarrow W$ é Γ -equivariante, ou comuta com a ação de Γ , se*

$$g(\rho(\gamma)x) = \eta(\gamma)g(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in V. \quad (1.19)$$

O conjunto $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ formado por todas as aplicações polinomiais $g : V \rightarrow W$ que são Γ -equivariantes tem estrutura de módulo sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$, como é mostrado no próximo lema.

Lema 1.2.8. *Sejam (ρ, V) e (η, W) representações de Γ . Se $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ e $g \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$, então $fg \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$.*

Demonstração: Para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in V$, temos

$$(fg)(\rho(\gamma)x) = f(\rho(\gamma)x)g(\rho(\gamma)x) = f(x)\eta(\gamma)g(x) = \eta(\gamma)f(x)g(x) = \eta(\gamma)(fg)(x),$$

a terceira igualdade seguindo do fato de $f(x) \in \mathbb{R}$, para todo $x \in V$. \square

Quando $(\rho, V) = (\eta, W)$, dizemos que g em (1.19) é *puramente* Γ -equivariante e denotamos o módulo $\vec{\mathcal{P}}_{V,V}(\Gamma)$ simplesmente por $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$. Neste contexto, temos os seguintes exemplos:

Exemplo 1.2.9. 1. Considere $\Gamma = \mathbf{Z}_2 = \{-1, 1\}$ agindo em \mathbb{R} por $-1x = -x$. Neste caso, se $g \in \vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{R}}(\mathbf{Z}_2)$ então $g(-x) = -g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, isto é, g é um polinômio ímpar. Logo, existe $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = h(x^2)x$. Claramente, $h(x^2) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\mathbf{Z}_2)$.

2. Seja $\Gamma = \mathbf{S}_1$ agindo em \mathbb{C} como em (1.7). Se $g \in \vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{S}^1)$, então

$$g(z) = p(z\bar{z})z + q(z\bar{z})iz, \quad (1.20)$$

com $p(z\bar{z}), q(z\bar{z}) \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{S}^1)$. De fato, escrevendo g nas coordenadas z, \bar{z} temos

$$g(z) = \sum a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta, \quad a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}. \quad (1.21)$$

Como $g(z) = \theta^{-1}g(\theta z)$, para todo $\theta \in \mathbf{S}_1$, segue que

$$\sum a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta = e^{-i\theta} \sum a_{\alpha\beta} (e^{i\theta} z)^\alpha \overline{(e^{i\theta} z)^\beta} = \sum a_{\alpha\beta} e^{i\theta(\alpha-\beta-1)} z^\alpha \bar{z}^\beta,$$

para todo $\theta \in \mathbf{S}_1$ e $z \in \mathbb{C}$. Logo, $a_{\alpha\beta} = 0$ ou $\alpha = \beta + 1$, o que implica em

$$g(z) = \sum a_{\beta+1,\beta} (z\bar{z})^\beta z.$$

Podemos escrever $a_{\beta+1,\beta} = b_{\beta+1,\beta} + ic_{\beta+1,\beta}$, com $b_{\beta+1,\beta}, c_{\beta+1,\beta} \in \mathbb{R}$. Assim,

$$g(z) = \sum b_{\beta+1,\beta} (z\bar{z})^\beta z + \sum c_{\beta+1,\beta} (z\bar{z})^\beta iz, \quad b_{\beta+1,\beta}, c_{\beta+1,\beta} \in \mathbb{R}.$$

Pondo $p(x) = \sum b_{\beta+1,\beta} x^\beta$ e $q(x) = \sum c_{\beta+1,\beta} x^\beta$, obtemos (1.20).

3. Considere $\Gamma = \mathbf{O}(2)$ agindo em \mathbb{C} como

$$\theta z = e^{i\theta} z \quad \text{e} \quad \kappa z = \bar{z}. \quad (1.22)$$

Mostremos que cada $g \in \vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{O}(2))$ tem a forma

$$g(z) = p(z\bar{z})z,$$

com $p(z\bar{z}) \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{O}(2))$. Como g é em particular $\mathbf{SO}(2)$ -equivariante, temos

$$g(z) = p(z\bar{z})z + q(z\bar{z})iz,$$

com $p(z\bar{z}), q(z\bar{z}) \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{S}^1)$. Impondo que $g(\bar{z}) = \overline{g(z)}$, para todo $z \in \mathbb{C}$, concluímos que $q(z\bar{z}) = 0$. Portanto, $g(z) = p(z\bar{z})z$, com $p(z\bar{z}) \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{S}^1)$. Concluímos a prova observando que $p(z\bar{z}) \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{O}(2))$, uma vez que $h(z) = z\bar{z}$ também é invariante pela ação de κ .

4. Considere $\Gamma = \mathbf{Z}_n$ agindo em \mathbb{C} como em (1.8). Mostremos que toda $g \in \vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n)$ é da forma

$$g(z) = p_1 z + p_2 \bar{z}^{n-1} + p_3 iz + p_4 i \bar{z}^{n-1}, \quad (1.23)$$

com $p_i = p_i(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n) \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n)$, para todo $i = 1, \dots, 4$. Começamos escrevendo g nas coordenadas z, \bar{z} como em (1.21). Da equivariância de g com relação a $\phi = R_{\frac{2\pi}{n}}$, temos

$$\sum a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta = g(z) = \phi^{-1}g(\phi z) = \sum a_{\alpha\beta} e^{i\phi(\alpha-\beta-1)} z^\alpha \bar{z}^\beta, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

de onde obtemos

$$a_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha - \beta \equiv 1 \pmod{n}. \quad (1.24)$$

Fatorando (1.21) em relação a $z\bar{z}$ até $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, temos

$$g(z) = \sum_{\alpha \geq \beta} a_{\alpha\beta} (z\bar{z})^\beta z^{\alpha-\beta} + \sum_{\alpha < \beta} a_{\alpha\beta} (z\bar{z})^\alpha \bar{z}^{\beta-\alpha}, \quad a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}.$$

De (1.24),

$$g(z) = \sum_{\substack{\alpha, \beta, l \\ \alpha \geq \beta}} a_{\alpha\beta} (z\bar{z})^\beta z^{ln+1} + \sum_{\substack{\alpha, \beta, k \\ \alpha < \beta}} a_{\alpha\beta} (z\bar{z})^\alpha \bar{z}^{kn-1}, \quad (1.25)$$

com $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$, $l, k \in \mathbb{N}$, $l \geq 0$ e $k \geq 1$.

Das identidades

$$z^{ln+1} = (z^n + \bar{z}^n) z^{(l-1)n+1} - (z\bar{z})^n z^{(l-2)n+1}, \quad l \geq 2,$$

e

$$\bar{z}^{kn-1} = (z^n + \bar{z}^n) \bar{z}^{(k-1)n-1} - (z\bar{z})^n \bar{z}^{(k-2)n-1}, \quad k \geq 3,$$

observamos que os termos z^{ln+1} e \bar{z}^{kn-1} são redutíveis para $l \geq 2$ e $k \geq 3$, respectivamente. Além disso, para $l = 1$ e $k = 2$, temos

$$z^{n+1} = (z^n + \bar{z}^n) z - (z\bar{z}) \bar{z}^{n-1} \quad \text{e} \quad \bar{z}^{2n-1} = (z^n + \bar{z}^n) \bar{z}^{n-1} - (z\bar{z})^{n-1} z.$$

Portanto, (1.25) torna-se

$$g(z) = \sum A_{rs} (z\bar{z})^r (z^n + \bar{z}^n)^s z + \sum B_{jk} (z\bar{z})^j (z^n + \bar{z}^n)^k \bar{z}^{n-1}, \quad A_{rs}, B_{jk} \in \mathbb{C}.$$

Escrevendo $A_{rs} = M_{rs} + iN_{rs}$ e $B_{jk} = P_{jk} + iQ_{jk}$, para $M_{rs}, N_{rs}, P_{jk}, Q_{jk} \in \mathbb{R}$, obtemos (1.23), como queríamos.

5. Considere $\Gamma = \mathbf{D}_n$ agindo em \mathbb{C} como em (1.9). Mostremos que toda $g \in \vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n)$ é da forma

$$g(z) = p(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n) z + q(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n) \bar{z}^{n-1},$$

com $p(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n)$, $q(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n) \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n)$. Começamos notando que se g é equ variante sob a ação de \mathbf{D}_n , então $g \in \vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n)$ e $g(\bar{z}) = \overline{g(z)}$. Segue, do exemplo anterior, que g tem a forma (1.23). Impondo agora a equ variância de g com respeito a κ em (1.23), obtemos $p_3 \equiv p_4 \equiv 0$. Portanto,

$$g(z) = p_1(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n) z + p_2(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n) \bar{z}^{n-1},$$

com $p_1(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n)$, $p_2(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n) \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n)$. Claramente, $p_1, p_2 \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n)$, uma vez que $z\bar{z}$ e $z^n + \bar{z}^n$ também são invariantes pela conjugação κ . Portanto, g se escreve como o desejado.

Definição 1.2.10. Dizemos que as aplicações polinomiais Γ -equivariantes g_1, \dots, g_r geram o módulo $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ se qualquer aplicação $g \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ pode ser escrita como

$$g = f_1 g_1 + \dots + f_r g_r, \quad (1.26)$$

onde $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$. Se, além disso, a relação $f_1 g_1 + \dots + f_r g_r \equiv 0$ implicar em $f_1 \equiv \dots \equiv f_r \equiv 0$, dizemos que g_1, \dots, g_r geram livremente o módulo $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ ou que $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ é um módulo livre. Neste caso, toda $g \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ se escreve de forma única como em (1.26).

O Teorema abaixo é uma versão equivariante do Teorema de Hilbert-Weyl.

Teorema 1.2.11. Seja Γ um grupo de Lie compacto e sejam (ρ, V) , (η, W) representações de Γ em V e em W , respectivamente. Então, o módulo $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ é finitamente gerado sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.

Para demonstrar o Teorema 1.2.11 precisamos do próximo lema, que mostra como converter o contexto equivariante ao caso invariante e vice-versa, via um produto interno invariante.

Lema 1.2.12. Sejam (ρ, V) e (η, W) representações de Γ e defina a ação de Γ em $V \times W$ por

$$\gamma(x, y) = (\rho(\gamma)x, \eta(\gamma)y), \quad \forall \gamma \in \Gamma, (x, y) \in V \times W.$$

Se $g \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$, então existe uma função $f \in \mathcal{P}_{V \times W}(\Gamma)$ tal que

$$g(x) = (d_y f)_{(x,0)}^t, \quad (1.27)$$

onde t denota a transposta.

Demonstração: Sejam $g \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ e \langle, \rangle um produto interno Γ -invariante em W . Defina $f : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x, y) = \langle g(x), y \rangle. \quad (1.28)$$

Claramente $f \in \mathcal{P}_{V \times W}(\Gamma)$. De fato,

$$f(\rho(\gamma)x, \eta(\gamma)y) = \langle g(\rho(\gamma)x), \eta(\gamma)y \rangle = \langle \eta(\gamma)g(x), \eta(\gamma)y \rangle = \langle g(x), y \rangle = f(x, y),$$

a penúltima igualdade seguindo da invariância do produto interno. Escreva $g = (g_1, \dots, g_m)$ e $y = (y_1, \dots, y_m)$, onde $m = \dim_{\mathbb{R}} W$ e $g_i : V \rightarrow \mathbb{R}$, para todo $i = 1, \dots, m$. Derivando f em relação a y_j temos

$$(d_{y_j} f)_{(x,y)} = \langle d_{y_j} g(x), y \rangle + \langle g(x), d_{y_j} y \rangle = \langle g(x), e_j \rangle = g_j(x),$$

onde $\{e_1, \dots, e_m\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^m . Portanto, $g_j(x) = (d_{y_j} f)_{(x,0)}$, para todo $j = 1, \dots, m$ e obtemos (1.27), como queríamos. \square

Observação 1.2.13. Note que a aplicação g definida em (1.27) é Γ -equivariante para qualquer função $f \in \mathcal{P}_{V \times W}(\Gamma)$. Com efeito, diferencie a igualdade

$$f(\rho(\gamma)x, \eta(\gamma)y) = f(x, y)$$

com respeito a y e tome $y = 0$. Depois aplique a transposta para obter

$$(d_y f)_{(x,0)}^t = \eta(\gamma)^t (d_y f)_{(\rho(\gamma)x,0)}^t, \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in V.$$

Como a ação de Γ em W é ortogonal, $\eta(\gamma)^t = \eta(\gamma)^{-1}$, de onde

$$(d_y f)_{(\rho(\gamma)x,0)}^t = \eta(\gamma)(d_y f)_{(x,0)}^t.$$

Por (1.27), $g(\rho(\gamma)x) = \eta(\gamma)g(x)$, para todo $\gamma \in \Gamma$, $x \in V$, como afirmado.

Esta observação, juntamente com o Lema 1.2.12, nos garante que aplicações polinomiais em $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ podem ser obtidas por (1.27) a partir de funções polinomiais em $\mathcal{P}_{V \times W}(\Gamma)$.

Demonstração do Teorema 1.2.11: Sejam $g \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ e f como em (1.28). Então, $g(x) = (d_y f)_{(x,0)}^t$. Como $f \in \mathcal{P}_{V \times W}(\Gamma)$, pelo Teorema de Hilbert-Weyl, existe $h : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = h(u_1(x, y), \dots, u_s(x, y)),$$

com $\{u_1, \dots, u_s\}$ uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{V \times W}(\Gamma)$. Deste modo

$$(d_y f)_{(x,y)} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial h}{\partial u_j}(u_1(x, y), \dots, u_s(x, y))(d_y u_j)_{(x,y)},$$

de onde

$$g(x) = (d_y f)_{(x,0)}^t = \sum_{j=1}^s \frac{\partial h}{\partial u_j}(u_1(x, 0), \dots, u_s(x, 0))(d_y u_j)_{(x,0)}^t. \quad (1.29)$$

Observe que, como $u_1, \dots, u_s \in \mathcal{P}_{V \times W}(\Gamma)$, temos $u_j(\rho(\gamma)x, 0) = u_j(x, 0)$, para todo $\gamma \in \Gamma$, $x \in V$, $j = 1, \dots, s$. Logo,

$$\frac{\partial h}{\partial u_j}(u_1(x, 0), \dots, u_s(x, 0)) \in \mathcal{P}_V(\Gamma), \quad \forall j = 1, \dots, s.$$

Além disso, pela Observação 1.2.13, $(d_y u_j)_{(x,0)}^t \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$, para todo $j = 1, \dots, s$. De (1.29), concluímos que o conjunto

$$\{(d_y u_1)_{(x,0)}^t, \dots, (d_y u_s)_{(x,0)}^t\}$$

gera $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ como um módulo sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$. \square

Daqui em diante, adotamos a notação $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma) = \mathcal{P}_V(\Gamma)\{g_1, \dots, g_r\}$ para indicar que g_1, \dots, g_r geram $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$. Assim sendo, nos reportamos ao Exemplo 1.2.9 para concluir que

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{R}}(\mathbf{Z}_2) &= \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\mathbf{Z}_2)\{x\}, \quad \vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{S}^1) = \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{S}^1)\{z, iz\}, \quad \vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{O}(2)) = \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{O}(2))\{z\}, \\ \vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n) &= \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n)\{z, \bar{z}^{n-1}, iz, i\bar{z}^{n-1}\}, \quad \vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n) = \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n)\{z, \bar{z}^{n-1}\}.\end{aligned}$$

No contexto puramente equivariante, se faz necessário entender a estrutura de aplicações lineares que comutam com a ação de Γ . Esta discussão tem importantes implicações no estudo de campos vetoriais puramente equivariantes, uma vez que a parte linear $(dg)_0$ de um campo vetorial $g \in \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$ também comuta com Γ . Nesta direção, o Teorema 1.2.20 nos permite explorar as aplicações lineares puramente equivariantes na diagonal em blocos. Descrevemos abaixo parte desta abordagem:

Definição 1.2.14. *Uma representação de um grupo Γ em V é dita absolutamente irredutível se as únicas aplicações lineares em V que comutam com Γ são as múltiplas escalares da identidade.*

A fim de justificar a terminologia temos o seguinte resultado:

Lema 1.2.15. *Toda representação de Γ em V absolutamente irredutível é irredutível.*

Demonstração: Seja (ρ, V) uma representação não irredutível de Γ em V . Pela Proposição 1.1.11, existe um subespaço próprio $W \subset V$ Γ -invariante tal que $V = W \oplus W^\perp$. Considere a projeção $\pi : W \oplus W^\perp \rightarrow V$, onde $\ker \pi = W^\perp$ e $\text{Im} \pi = W$. Dado $v \in V$, escrevemos $v = w + w^\perp$, onde $w \in W$ e $w^\perp \in W^\perp$. Então, para todo $\gamma \in \Gamma$, temos

$$\pi(\rho(\gamma)v) = \pi(\rho(\gamma)(w + w^\perp)) = \pi(\rho(\gamma)w + \rho(\gamma)w^\perp) = \rho(\gamma)w = \rho(\gamma)\pi(v),$$

a terceira igualdade seguindo do fato de W e W^\perp serem Γ -invariantes. Logo, π é uma aplicação linear que comuta com Γ e não é múltipla da identidade, ou seja, a representação ρ de Γ em V não é absolutamente irredutível. \square

Exemplo 1.2.16. 1. Considere a ação padrão de $\Gamma = \mathbf{SO}(2)$ em \mathbb{R}^2 dada por

$$R_\theta(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \theta \in (0, 2\pi].$$

Já vimos que esta ação é irredutível, mas ela não é absolutamente irredutível. Para ver isso, mostramos que as aplicações lineares que comutam com $\mathbf{SO}(2)$ são da forma cR_θ , com $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$. Note primeiramente que $\mathbf{SO}(2)$ é um grupo abeliano. Deste modo, as matrizes da forma cR_θ comutam com $\mathbf{SO}(2)$. Seja agora $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $R_\theta A = AR_\theta$, para todo $R_\theta \in \mathbf{SO}(2)$. Cálculos simples mostram que A é da forma

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Se $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, então $A = cR_\theta$, para $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\theta \in (0, 2\pi]$ tal que $\cos \theta = a/c$ e $\sin \theta = b/c$. Se $a = b = 0$, então $A = cR_\theta$, para $c = 0$ e θ arbitrário.

2. Considere agora a ação usual de $\mathbf{O}(2)$ em \mathbb{R}^2 dada em (1.22). As únicas aplicações lineares que comutam com $\mathbf{O}(2)$ são da forma $a\text{Id}_2$, com $a \in \mathbb{R}$. De fato, obviamente as matrizes da forma $a\text{Id}_2$ comutam com a ação de $\mathbf{O}(2)$. Para ver que elas são as únicas, seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ $\mathbf{O}(2)$ -equivariante. Então, A é $\mathbf{SO}(2)$ -equivariante e, pelo exemplo anterior, $A = cR_\theta$, para algum $c \in \mathbb{R}$ e algum $\theta \in (0, 2\pi]$. Como A também comuta com a reflexão κ , segue que $A = c \cos \theta \text{Id}_2$, com $\theta \in (0, 2\pi]$, como queríamos. Portanto, a ação de $\mathbf{O}(2)$ em \mathbb{R}^2 é absolutamente irredutível e, pelo Lema 1.2.14, é irredutível.

O seguinte lema também vale para espaços vetoriais complexos:

Lema 1.2.17. (Lema de Schur) *Sejam (ρ, V) e (η, W) representações irredutíveis de Γ em V e em W , respectivamente. Seja $\phi : V \rightarrow W$ uma aplicação linear Γ -equivariante. Então ou ϕ é invertível, ou é identicamente nula.*

Demonstração: Ver Bröcker, [8, II, Theorem 1.10]. □

Observação 1.2.18. Pelo Lema de Schur, se V é um espaço vetorial complexo, as definições de irredutibilidade e irredutibilidade absoluta são equivalentes. O que não é verdade no caso real, como vimos no item 1. do Exemplo 1.2.16.

Lema 1.2.19. *Sejam (ρ, V) uma representação de Γ em V e $A : V \rightarrow V$ uma aplicação linear Γ -equivariante. Seja $W \subset V$ um subespaço Γ -irredutível. Então, $A(W)$ é Γ -invariante. Além disso, ou $A(W) = 0$ ou W e $A(W)$ são Γ -isomorfos.*

Demonstração: Se $z = A(w) \in A(W)$, então $\rho(\gamma)z = \rho(\gamma)A(w) = A(\rho(\gamma)w) \in A(W)$, para todo $\gamma \in \Gamma$. Portanto, $A(W)$ é Γ -invariante.

Note que $\ker A$ é Γ -invariante, pois para todo $v \in \ker A$, $A(\rho(\gamma)v) = \rho(\gamma)A(v) = 0$. Deste modo, $\ker A \cap W$ é um subespaço Γ -invariante de W . Como W é Γ -irredutível, temos $W \cap \ker A = \{0\}$ ou $W \subset \ker A$. Se $W \subset \ker A$, então $A(W) = 0$. Caso contrário,

$A|_W : W \rightarrow A(W)$ é um Γ -isomorfismo. De fato, a linearidade e a sobrejetividade são óbvias. A injetividade segue pois $\ker(A|_W) = \ker A \cap W = \{0\}$. Além disso,

$$A|_W(\rho(\gamma)w) = A(\rho(\gamma)w) = \rho(\gamma)A(w) = \rho(\gamma)A|_W(w), \quad \forall w \in W, \gamma \in \Gamma.$$

Portanto, W e $A(W)$ são Γ -isomorfos. \square

Teorema 1.2.20. *Decomponha V em suas componentes isotópicas W_1, \dots, W_t como em (1.14) e seja $A : V \rightarrow V$ uma aplicação linear Γ -equivariante. Então, $A(W_k) \subset W_k$, para $k = 1, \dots, t$.*

Demonstração: Pelo Lema 1.1.14, podemos escrever

$$W_k = V_{k_1} \oplus \dots \oplus V_{k_r},$$

onde cada V_{k_j} é Γ -isomorfo a um subespaço Γ -irredutível U_k de V . Pelo Lema anterior, $A(V_{k_j}) = \{0\}$ ou $A(V_{k_j})$ é Γ -isomorfo a U_k . Em ambos os casos temos $A(V_{k_j}) \subset W_k$. Pela linearidade de A , temos $A(W_k) \subset W_k$, para todo $k = 1, \dots, t$. \square

1.3 Órbitas e subgrupos de isotropia

Existem duas noções simples usadas para descrever a ação de um grupo de Lie compacto nas soluções de um sistema de equações diferenciais, a saber, as órbitas e os subgrupos de isotropia.

Definição 1.3.1. *A órbita da ação de Γ em $x \in V$ é o conjunto*

$$\Gamma_x = \{\gamma x : \gamma \in \Gamma\}.$$

Se $g : V \rightarrow V$ é uma aplicação Γ -equivariante tal que $g(x) = 0$, então g se anula em toda órbita de Γ em x . Com efeito, para todo $\gamma \in \Gamma$, $g(\gamma x) = g(\rho(\gamma)x) = \rho(\gamma)g(x) = 0$. Em outras palavras, equações simétricas não se distinguem entre pontos de uma mesma órbita.

Definição 1.3.2. *O subgrupo de isotropia de $x \in V$ é dado por*

$$\Sigma_x = \{\gamma \in \Gamma : \gamma x = x\}.$$

Uma pergunta natural a se fazer é: de que modo se relacionam os subgrupos de isotropia de pontos sobre uma mesma órbita? Para a resposta, que é dada no lema abaixo, lembramos que se $\Sigma \subset \Gamma$ é um subgrupo, então para cada $\gamma \in \Gamma$ o conjunto

$$\gamma \Sigma \gamma^{-1} = \{\gamma \sigma \gamma^{-1} : \sigma \in \Sigma\}$$

é um subgrupo de Γ , chamado de conjugado de Σ . As classes de conjugação de Σ consistem de todos os subgrupos de Γ que são conjugados a Σ .

Lema 1.3.3. *Pontos em uma mesma órbita têm subgrupos de isotropia conjugados. Mais precisamente $\Sigma_{\gamma x} = \gamma \Sigma_x \gamma^{-1}$.*

Demonstração: Sejam $x \in V$ e $\gamma \in \Gamma$. Vamos mostrar que $\gamma \Sigma_x \gamma^{-1} \subset \Sigma_{\gamma x}$. Suponha $\sigma \in \Sigma_x$, então

$$\gamma \sigma \gamma^{-1}(\gamma x) = \gamma \sigma(\gamma^{-1} \gamma)x = \gamma(\sigma x) = \gamma x,$$

ou seja, $\gamma \sigma \gamma^{-1} \in \Sigma_{\gamma x}$. Por outro lado, se $\sigma \in \Sigma_{\gamma x}$, então

$$\gamma^{-1} \sigma \gamma(x) = \gamma^{-1} \sigma(\gamma x) = \gamma^{-1}(\gamma x) = x,$$

isto é, $\gamma^{-1} \Sigma_{\gamma x} \gamma \subset \Sigma_x$. Assim, para todo $\sigma \in \Sigma_{\gamma x}$, $\sigma = \gamma \beta \gamma^{-1} \in \gamma \Sigma_x \gamma^{-1}$. Portanto, $\gamma \Sigma_x \gamma^{-1} \supset \Sigma_{\gamma x}$, como desejado. \square

Para descrever geometricamente a ação de um grupo Γ no espaço V é conveniente olharmos para o conjunto W formado por todos os pontos de V que têm subgrupos de isotropia conjugados. Nestas condições, dizemos que W é um tipo de órbita desta ação.

1.4 Subespaços de ponto fixo e a fórmula do traço

Uma das mais interessantes, bem como uma das mais simples, características das aplicações Γ -equivariantes é que sua equivariância força a existência de subespaços invariantes. Nesta seção, mostramos a existência de subespaços invariantes especiais, chamados subespaços de ponto fixo. Apresentamos também uma fórmula para calcular suas dimensões, conhecida como a fórmula do traço.

Definição 1.4.1. *Seja $\Sigma \subset \Gamma$ um subgrupo. O subespaço de ponto fixo de Σ é definido como*

$$\text{Fix}(\Sigma) = \{x \in V : \rho(\sigma)x = x, \forall \sigma \in \Sigma\}.$$

Caso se faça necessário especificarmos o espaço V , denotamos $\text{Fix}(\Sigma)$ por $\text{Fix}_V(\Sigma)$. Observe que $\text{Fix}(\Sigma)$ é sempre um subespaço linear de V , pois

$$\text{Fix}(\Sigma) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \ker(\rho(\sigma) - \text{Id}_n)$$

e cada kernel é um subespaço de V . Além disso, os subespaços de ponto fixo mais simples são $\text{Fix}(1)$ e $\text{Fix}(\Gamma)$, onde 1 é a identidade em Γ . Claramente, $\text{Fix}(1) = V$. Por outro lado, $\text{Fix}(\Gamma)$ é um subespaço de V no qual Γ age trivialmente.

Proposição 1.4.2. *Sejam V e W dois espaços vetoriais de dimensão finita Γ -isomorfos. Então, $\text{Fix}_V(\Gamma)$ e $\text{Fix}_W(\Gamma)$ são Γ -isomorfos.*

Demonstração: Sejam (ρ, V) e (η, W) representações de Γ em V e em W , respectivamente. Seja $A : V \rightarrow W$ um Γ -isomorfismo e considere

$$A|_{\text{Fix}_V(\Gamma)} : \text{Fix}_V(\Gamma) \longrightarrow \text{Fix}_W(\Gamma). \quad (1.30)$$

Mostremos que (1.30) é um Γ -isomorfismo. De fato, claramente $A|_{\text{Fix}_V(\Gamma)}$ é linear, injetora e Γ -equivariante. Ainda, dado $w \in \text{Fix}_W(\Gamma) \subseteq W$, existe um único $v \in V$ tal que $A(v) = w$. Então,

$$A(v) = w = \eta(\gamma)w = \eta(\gamma)A(v) = A(\rho(\gamma)v), \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Como A é injetora, $\rho(\gamma)v = v$, para todo $\gamma \in \Gamma$, isto é, $v \in \text{Fix}_V(\Gamma)$. Logo, $A|_{\text{Fix}_V(\Gamma)}$ é sobrejetora, como queríamos. \square

Mostramos agora que os subespaços de ponto fixo tem a propriedade de invariância mencionada anteriormente.

Lema 1.4.3. *Seja $f : V \rightarrow V$ uma aplicação Γ -equivariante e seja $\Sigma \subset \Gamma$ um subgrupo. Então, $f(\text{Fix}(\Sigma)) \subset \text{Fix}(\Sigma)$.*

Demonstração: Seja $x \in \text{Fix}(\Sigma)$. Então, para todo $\sigma \in \Sigma$, temos

$$\rho(\sigma)f(x) = f(\rho(\sigma)x) = f(x),$$

ou seja, $f(x) \in \text{Fix}(\Sigma)$, como desejado. \square

Uma consequência imediata do Lema 1.4.3 é a existência de soluções triviais para aplicações Γ -equivariantes tais que $\text{Fix}(\Gamma) = \{0\}$. Mais precisamente, temos três propriedades equivalentes:

Proposição 1.4.4. *Seja Γ agindo linearmente em V . São equivalentes:*

- (a) $\text{Fix}(\Gamma) = \{0\}$.
- (b) A única função linear Γ -invariante é a função nula.
- (c) Toda aplicação Γ -equivariante $g : V \rightarrow V$ satisfaz $g(0) = 0$.

Demonstração: (a) \Rightarrow (b) Seja $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função linear Γ -invariante. Pelo Teorema da representação de Riez (ver [19]), existe $v \in V$ tal que

$$f(x) = \langle v, x \rangle_\Gamma, \quad \forall x \in V,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ é um produto interno Γ -invariante em V . Como f é Γ -invariante, temos $f(\rho(\gamma)^{-1}x) = f(x)$, para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in V$. Portanto,

$$\langle v, x \rangle_\Gamma = \langle v, \rho(\gamma)^{-1}x \rangle_\Gamma = \langle v, \rho(\gamma)^t x \rangle_\Gamma = \langle \rho(\gamma)v, x \rangle_\Gamma, \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in V.$$

Assim, $v = \rho(\gamma)v$, para todo $\gamma \in \Gamma$, isto é, $v \in \text{Fix}(\Gamma)$. Como $\text{Fix}(\Gamma) = \{0\}$, temos $v = 0$. Daí, $f(x) = \langle 0, x \rangle_\Gamma = 0$, para todo $x \in V$.

(b) \Rightarrow (c) Seja $g : V \rightarrow V$ uma aplicação Γ -equivariante. Queremos mostrar que $g(0) = 0$. Defina o funcional linear

$$\begin{aligned} L : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \langle g(0), x \rangle_\Gamma \end{aligned}$$

A linearidade de L segue da linearidade do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$. Ainda, L é Γ -invariante, pois

$$L(\rho(\gamma)x) = \langle g(0), \rho(\gamma)x \rangle_\Gamma = \langle g(\rho(\gamma)0), \rho(\gamma)x \rangle_\Gamma = \langle \rho(\gamma)g(0), \rho(\gamma)x \rangle_\Gamma = \langle g(0), x \rangle_\Gamma = L(x).$$

Por hipótese, $L \equiv 0$. Em particular, $L(g(0)) = 0$, o que implica $g(0) = 0$.

(c) \Rightarrow (a) Seja $v \in \text{Fix}(\Gamma)$ e defina $g : V \rightarrow V$ como a aplicação constante dada por $g(x) = v$. Temos que g é Γ -equivariante, pois

$$g(\rho(\gamma)x) = v = \rho(\gamma)v = \rho(\gamma)g(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in V.$$

Por hipótese, $g(0) = 0$. Logo, $v = g(0) = 0$ e, portanto, $\text{Fix}(\Gamma) = \{0\}$. □

Apresentamos agora uma fórmula para o cálculo da dimensão de $\text{Fix}(\Sigma)$, que depende somente do traço da matriz de representação $\rho(\sigma)$ de $\sigma \in \Sigma$.

Teorema 1.4.5. (A fórmula do traço) *Seja Σ um grupo de Lie compacto agindo em V . Então*

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Fix}(\Sigma) = \int_{\sigma \in \Sigma} \text{tr}(\rho(\sigma)), \quad (1.31)$$

onde \int_{Σ} denota a integral de Haar normalizada em Σ e tr denota o traço da matriz.

Demonstração: Para simplificar notação, denotamos $\rho(\sigma)$ simplesmente por σ . Defina $A : V \rightarrow V$ por

$$A(v) = \left(\int_{\Sigma} \sigma \right) (v).$$

Mais especificamente, para $v = (v_1, \dots, v_n) \in V$ e $\sigma = (\sigma_{ij})$ temos

$$A(v) = \begin{pmatrix} \int_{\Sigma} \sigma_{11} & \cdots & \int_{\Sigma} \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Sigma} \sigma_{n1} & \cdots & \int_{\Sigma} \sigma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Das propriedades da integral de Haar segue que A é linear e Σ -invariante. Agora, note que

$$\begin{aligned} A^2 &= A \circ A = A \circ \left(\int_{\sigma \in \Sigma} \sigma \right) = \int_{\gamma \in \Sigma} \gamma \left(\int_{\Sigma} \sigma \right) \\ &= \int_{\gamma \in \Sigma} \left(\int_{\Sigma} \gamma \sigma \right) = \int_{\gamma \in \Sigma} \int_{\Sigma} \sigma = \int_{\gamma \in \Sigma} A = A \int_{\gamma \in \Sigma} 1 = A. \end{aligned}$$

Deste modo, A é uma projecção linear. Então,

(a) $V = \ker A \oplus \text{Im}A$;

(b) $A|_{\text{Im}A} = \text{Id}$.

De (a) e (b) segue que $\text{tr}(A) = \dim_{\mathbb{R}} \text{Im}A$. Além disso,

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= \text{tr} \begin{pmatrix} \int_{\Sigma} \sigma_{11} & \cdots & \int_{\Sigma} \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Sigma} \sigma_{n1} & \cdots & \int_{\Sigma} \sigma_{nn} \end{pmatrix} = \int_{\Sigma} \sigma_{11} + \int_{\Sigma} \sigma_{22} + \cdots + \int_{\Sigma} \sigma_{nn} \\ &= \int_{\Sigma} (\sigma_{11} + \cdots + \sigma_{nn}) = \int_{\Sigma} \text{tr}(\sigma). \end{aligned}$$

Obtemos, então, que $\dim_{\mathbb{R}} \text{Im}A = \int_{\Sigma} \text{tr}(\sigma)$. Resta mostrar que $\text{Im}A = \text{Fix}(\Sigma)$. Se $x \in \text{Im}A$, então

$$x = A(x) = A(\sigma x) = \sigma x, \quad \forall \sigma \in \Sigma,$$

uma vez que A e $\text{Im}A$ são Σ -invariantes. Logo $\text{Im}A \subset \text{Fix}(\Sigma)$. Seja agora $x \in \text{Fix}(\Sigma)$. Então, para todo $\sigma \in \Sigma$, temos

$$A(x) = \left(\int_{\Sigma} \sigma \right) x = \int_{\Sigma} x = x \int_{\Sigma} 1 = x,$$

ou seja, $x \in \text{Im}A$. Portanto, $\text{Im}A = \text{Fix}(\Sigma)$ e

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Fix}(\Sigma) = \int_{\Sigma} \text{tr}(\sigma).$$

□

Observação 1.4.6. Quando Σ é finito, temos

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Fix}(\Sigma) = \frac{1}{|\Sigma|} \sum_{\sigma \in \Sigma} \text{tr}(\rho(\sigma)).$$

A TEORIA REVERSÍVEL-EQUIVARIANTE

Como mencionado na Introdução, o estudo de sistemas dinâmicos com propriedades simétricas é um importante ramo da teoria de sistemas não lineares. As equações que descrevem os sistemas reversíveis-equivariantes têm simetrias e antissimetrias como um resultado da geometria inerente ao sistema ou de outras restrições decorrentes do modelo. Quando os efeitos destes elementos são levados em consideração, a formalização do problema é simplificada e sua interpretação pode se tornar mais fácil, ou pelo menos mais coerente. Conseqüentemente, a teoria de bifurcação neste contexto é muito rica, combinando métodos de diversas áreas da matemática.

A linguagem do nosso estudo é bastante algébrica, baseada na teoria de representação de grupos e na teoria invariante. O ponto de partida é reconhecer que a coleção Γ de simetrias e antissimetrias de um sistema tem estrutura de grupo. Outro fato fundamental em nosso estudo é a existência de um subgrupo normal de Γ de índice 2 formado somente pelas simetrias de Γ e denotado por Γ_+ .

O propósito deste capítulo é adaptar os resultados obtidos no estudo de aplicações puramente equivariantes sob a ação de um grupo de Lie compacto ao contexto reversível-equivariante, isto é, quando introduzimos reversibilidades. Para isso usamos conceitos da teoria invariante de grupos de Lie compactos e descrevemos um algoritmo para o cálculo de um conjunto gerador para o módulo das aplicações polinomiais reversíveis-equivariantes sobre o anel das funções polinomiais invariantes. Neste processo, Γ_+ desempenha um papel de fundamental importância.

No decorrer do capítulo assumimos Γ um grupo de Lie compacto agindo linearmente em um espaço vetorial real V de dimensão finita.

2.1 O contexto reversível-equivariante

Considere um homomorfismo de grupos

$$\sigma : \Gamma \longrightarrow \mathbf{Z}_2, \tag{2.1}$$

onde \mathbf{Z}_2 denota o grupo multiplicativo $\{-1, 1\}$. Claramente σ define uma representação 1-dimensional de Γ em \mathbb{R} associada a ação dada por

$$\begin{aligned} \Gamma \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\gamma, x) &\longmapsto \sigma(\gamma)x \end{aligned}$$

Se σ não é o homomorfismo trivial, então $\Gamma_+ = \ker \sigma$ é um subgrupo normal de Γ de índice 2 e seu complementar em Γ , denotado por Γ_- , é não vazio. Motivados pela dinâmica reversível-equivariante temos a seguinte definição:

Definição 2.1.1. *Um elemento $\gamma \in \Gamma_+$ é chamado simetria de Γ e um elemento $\gamma \in \Gamma_-$ é chamado antissimetria de Γ .*

A par dessa definição é fácil mostrar que o produto de duas simetrias (duas antissimetrias) é uma simetria, o produto de uma simetria e de uma antissimetria é uma antissimetria e o inverso de uma simetria (antissimetria) é uma simetria (antissimetria). Tais propriedades implicam que o conjunto Γ_- das antissimetrias não forma um grupo. Entretanto, Γ_- é uma classe lateral não trivial de Γ_+ . De fato, fixe $\delta \in \Gamma_-$ arbitrário. Obviamente $\delta\Gamma_+ \subset \Gamma_-$. Além disso, podemos escrever $\gamma = \delta(\delta^{-1}\gamma) \in \delta\Gamma_+$, $\forall \gamma \in \Gamma_-$. Portanto, fixando $\delta \in \Gamma_-$, temos a decomposição de Γ como a união disjunta

$$\Gamma = \Gamma_+ \dot{\cup} \Gamma_- = \Gamma_+ \dot{\cup} \delta\Gamma_+.$$

Definimos agora os dois principais objetos de nosso estudo.

Definição 2.1.2. *Seja (ρ, V) uma representação de Γ em V . Uma função polinomial $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de Γ -anti-invariante, ou simplesmente anti-invariante, se*

$$f(\rho(\gamma)x) = \sigma(\gamma)f(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in V. \quad (2.2)$$

Uma aplicação polinomial $g : V \rightarrow V$ é chamada de Γ -reversível-equivariante, ou simplesmente reversível-equivariante, se

$$g(\rho(\gamma)x) = \sigma(\gamma)\rho(\gamma)g(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in V. \quad (2.3)$$

Note que quando σ é o homomorfismo trivial, temos $\Gamma = \Gamma_+$ e $\Gamma_- = \emptyset$. Neste caso, f em (2.2) é Γ -invariante e g em (2.3) é puramente Γ -equivariante.

Denotamos por $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ o espaço de todas as funções polinomiais anti-invariantes sob a ação de Γ e por $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ o espaço de todas as aplicações polinomiais reversíveis-equivariantes sob a ação de Γ . Ambos $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ têm estrutura de módulos sobre o anel de invariantes $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.

Observação 2.1.3. Observe que o produto de um número par de funções em $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ é Γ -invariante e o produto de um número ímpar de funções em $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ ainda é Γ -anti-invariante.

Temos as seguintes caracterizações:

Lema 2.1.4. *Sejam (ρ, V) uma representação de Γ em V e Γ_+ o subgrupo das simetrias de Γ . Fixe $\delta \in \Gamma_-$. Então,*

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_V(\Gamma) &= \{f \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+) : f(\rho(\delta)x) = f(x), \forall x \in V\}; \\ \mathcal{Q}_V(\Gamma) &= \{f \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+) : f(\rho(\delta)x) = -f(x), \forall x \in V\}; \\ \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma) &= \{g \in \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+) : g(\rho(\delta)x) = \rho(\delta)g(x), \forall x \in V\}; \\ \vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma) &= \{g \in \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+) : g(\rho(\delta)x) = -\rho(\delta)g(x), \forall x \in V\}.\end{aligned}$$

Demonstração: Vamos mostrar somente a última igualdade. As demais igualdades seguem de modo análogo.

A inclusão “ \subseteq ” segue direto da definição de $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$. Seja agora $g \in \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$ com $g(\rho(\delta)x) = -\rho(\delta)g(x)$. Claramente, $g(\rho(\gamma)x) = \sigma(\gamma)\rho(\gamma)g(x)$, para todo $\gamma \in \Gamma_+$ e $x \in V$. Como $\Gamma_- = \delta\Gamma_+$, dado $\gamma \in \Gamma_-$ existe $\bar{\gamma} \in \Gamma_+$ tal que $\gamma = \delta\bar{\gamma}$. Então,

$$g(\rho(\gamma)x) = g(\rho(\delta)\rho(\bar{\gamma})x) = -\rho(\delta)g(\rho(\bar{\gamma})x) = -\rho(\delta)\rho(\bar{\gamma})g(x) = \sigma(\gamma)\rho(\gamma)g(x),$$

para todo $\gamma \in \Gamma_-$. Portanto, $g \in \vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$, provando a igualdade. \square

Definição 2.1.5. *Sejam (ρ, V) uma representação de Γ em V e $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbf{Z}_2$ um homomorfismo como em (2.1). A representação σ -dual de ρ é a representação de Γ em V definida por*

$$\begin{aligned}\rho_\sigma : \Gamma &\longrightarrow GL(V) \\ \gamma &\longmapsto \sigma(\gamma)\rho(\gamma).\end{aligned}\tag{2.4}$$

A ação correspondente é chamada de ação dual e é escrita como $\gamma x = \rho_\sigma(\gamma)x$, para todo $\gamma \in \Gamma$, $x \in V$. A dual da representação dual é a própria representação, isto é, $(\rho_\sigma)_\sigma = \rho$. Observe que se $g \in \vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$, então

$$g(\rho(\gamma)x) = \rho_\sigma(\gamma)g(x), \quad \forall x \in V, \gamma \in \Gamma,$$

ou seja, podemos ver uma aplicação reversível-equivariante como uma aplicação equivariante de (ρ, V) em (ρ_σ, V) . De modo análogo, uma função anti-invariante pode ser vista como uma aplicação equivariante de (ρ, V) em (σ, \mathbb{R}) . Pelo Teorema 1.2.11, temos garantida a existência de um conjunto finito de geradores para os módulos $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.

Definição 2.1.6. *Seja (ρ, V) uma representação de Γ em V . Dizemos que ρ ou o espaço vetorial V é auto-dual se (ρ, V) é Γ -isomorfa a (ρ_σ, V) . Isto é dizer que existe um isomorfismo Γ -equivariante $L : (\rho, V) \rightarrow (\rho_\sigma, V)$ ou, equivalentemente, que existe um isomorfismo Γ -reversível-equivariante $L : (\rho, V) \rightarrow (\rho, V)$. Se não existe tal isomorfismo L , dizemos que V é não auto-dual.*

2.2 Fórmulas de caracter

O caracter de uma representação é uma função que associa a cada elemento do grupo um elemento do corpo do espaço de representação. A teoria de caracter é uma ferramenta de grande importância dentro da teoria invariante e que sustenta importantes propriedades do grupo. Ela nos fornece meios para calcular, fixado o grau, o número de funções polinomiais homogêneas invariantes e de aplicações polinomiais homogêneas equivariantes sob a ação de um grupo. O uso das fórmulas de caracter apresenta vantagens em relação ao uso de matrizes de representações. Por exemplo, representações isomorfas possuem o mesmo caracter e os caracteres de representações irredutíveis de vários grupos finitos aparecem catalogados na literatura. Além disso o cálculo com caracteres é padrão em alguns pacotes de álgebra computacionais como o GAP [13] e o *Singular* [25].

Nesta seção, apresentamos resultados acerca da teoria de caracter, incluindo as séries de Hilbert-Poincaré para o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ e o módulo $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$. Estas são funções geradoras para a dimensão do espaço dos polinômios homogêneos invariantes e equivariantes, respectivamente. Também apresentamos as fórmulas de caracter para o cálculo da dimensão do espaço das funções homogêneas invariantes e das aplicações homogêneas equivariantes de cada grau fixo. Além disso, estabelecemos sua extensão aos casos anti-invariante e reversível-equivariante. A teoria apresentada aqui se encontra em [8, 15, 24, 27]. Em particular para grupos de Lie compactos veja [8].

2.2.1 Teoria de caracter

Definição 2.2.1. *O caracter χ_V de uma representação (ρ, V) é a função $\chi_V : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\chi_V(\gamma) = \text{tr}(\rho(\gamma)),$$

onde $\text{tr}(\rho(\gamma))$ é o traço da matriz $\rho(\gamma) \in GL(V)$.

O caracter é uma função constante nas classes de conjugação, isto é, se $\gamma \in \Gamma$, então

$$\chi_V(\delta\gamma\delta^{-1}) = \text{tr}(\rho(\delta\gamma\delta^{-1})) = \text{tr}(\rho(\delta)\rho(\gamma)\rho(\delta)^{-1}) = \text{tr}(\rho(\gamma)) = \chi_V(\gamma), \quad \forall \delta \in \Gamma.$$

Se Γ age ortogonalmente em V , então

$$\chi_V(\gamma^{-1}) = \text{tr}(\rho(\gamma)^{-1}) = \text{tr}(\rho(\gamma)^t) = \text{tr}(\rho(\gamma)) = \chi_V(\gamma), \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Lema 2.2.2. *Representações isomorfas têm o mesmo caracter.*

Demonstração: Sejam (ρ, V) e (η, W) representações Γ -isomorfas segundo o Γ -isomorfismo $A : V \rightarrow W$. Então,

$$A(\rho(\gamma)x) = \eta(\gamma)A(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in V,$$

ou seja, $\rho(\gamma) = A^{-1}\eta(\gamma)A$. Daí,

$$\chi_V(\gamma) = \text{tr}(\rho(\gamma)) = \text{tr}(A^{-1}\eta(\gamma)A) = \text{tr}(\eta(\gamma)) = \chi_W(\gamma),$$

para todo $\gamma \in \Gamma$, como desejado. □

Definição 2.2.3. *Sejam V e W espaços vetoriais. O produto tensorial de V e W é o espaço vetorial $V \otimes W$ juntamente com a aplicação bilinear*

$$\begin{aligned} \tau : V \times W &\longrightarrow V \otimes W \\ (x, y) &\longmapsto x \otimes y \end{aligned}$$

com a propriedade de que, dado um espaço vetorial U e uma aplicação bilinear $\beta : V \times W \rightarrow U$, existe uma única aplicação bilinear $\tau^* : V \otimes W \rightarrow U$ tal que $\tau^* \circ \tau = \beta$. Ou seja, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\tau} & V \otimes W \\ \beta \downarrow & \swarrow \tau^* & \\ U & & \end{array}$$

comuta.

De um modo mais geral, o produto tensorial entre n espaços vetoriais V_1, \dots, V_n é o espaço vetorial $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ juntamente com a aplicação n -multilinear

$$\tau : V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_n,$$

tal que qualquer outra aplicação n -multilinear $B : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow U$ pode ser escrita como $B = B^* \circ \tau$, para uma única aplicação n -multilinear $B^* : V_1 \oplus \dots \oplus V_n \rightarrow U$. Quando $V_1 = \dots = V_n = V$, dizemos que $\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{n \text{ vezes}}$ é o produto n -tensorial de V e denotamos

$V \otimes \dots \otimes V$ por $V^{\otimes n}$.

Definição 2.2.4. *Dadas duas representações (ρ, V) e (η, W) de Γ em V em W , respectivamente, definimos a representação $\xi : \Gamma \rightarrow GL(V \otimes W)$ de Γ em $V \otimes W$ por*

$$\xi(\gamma)(x \otimes y) = \rho(\gamma)x \otimes \eta(\gamma)y. \quad (2.5)$$

Definimos a representação $\pi : \Gamma \rightarrow GL(V \oplus W)$ de Γ em $V \oplus W$ por

$$\pi(\gamma)(x \oplus y) = \rho(\gamma)x \oplus \eta(\gamma)y. \quad (2.6)$$

A representação (2.5) define, de forma natural, uma ação de Γ em $V^{\otimes n}$ dada por

$$\xi(\gamma)(x_1, \dots, x_n) = \rho(\gamma)x_1 \otimes \dots \otimes \rho(\gamma)x_n, \quad \forall x_i \in V, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Considere agora o grupo simétrico \mathbf{S}_n formado por todas as permutações de n elementos. Definimos a ação de \mathbf{S}_n em $V^{\otimes n}$ por

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_n \times V^{\otimes n} &\longrightarrow V^{\otimes n} \\ (\alpha, x_1 \otimes \dots \otimes x_n) &\longmapsto x_{\alpha^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes x_{\alpha^{-1}(n)}. \end{aligned}$$

Isto é, \mathbf{S}_n age em $V^{\otimes n}$ permutando as coordenadas de seus elementos. O subespaço vetorial

$$\mathbf{S}^n V = \{x \in V^{\otimes n} : \alpha x = x, \forall \alpha \in \mathbf{S}_n\} \quad (2.8)$$

é chamado de n -ésima potência tensorial simétrica. A ação de Γ em $\mathbf{S}^n V$ é a ação de Γ em $V^{\otimes n}$ dada em (2.7), restrita aos elementos de $\mathbf{S}^n V$. Assim $\mathbf{S}^n V$ é um subespaço Γ -invariante. Note ainda que $\mathbf{S}^n V = \text{Fix}_{V^{\otimes n}}(\mathbf{S}_n)$.

Considere agora $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$ o espaço dos funcionais lineares de V em \mathbb{R} . Então existe uma representação natural $\rho^* : \Gamma \rightarrow GL(V^*)$ de Γ em V^* definida por

$$\rho^*(\gamma)(f)(v) = f(\rho(\gamma^{-1})v), \quad \forall \gamma \in \Gamma, f \in V^*, v \in V.$$

Proposição 2.2.5. *Sejam (ρ, V) e (η, W) representações de Γ em V e em W , respectivamente. Então,*

- (i) $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$;
- (ii) $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$;
- (iii) $\chi_{V^*}(\gamma) = \chi_V(\gamma^{-1}), \quad \forall \gamma \in \Gamma$.

Demonstração: Ver Bröcker e Dieck [8, II, Proposition 4.10]. □

2.2.2 Séries de Hilbert-Poincaré e fórmulas de Molien

Em alguns casos, podemos obter informações sobre os geradores das funções invariantes ou das aplicações reversíveis-equivariantes sem ter que efetivamente calculá-los. Nesta direção, uma das principais ferramentas é a série de Hilbert-Poincaré, também conhecida como função geradora de Molien. Apresentamos nesta subseção as séries de Hilbert-Poincaré do anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ e dos módulos $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$, $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$, $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$.

Sejam x_1, \dots, x_n coordenadas no espaço vetorial V sobre o corpo \mathbb{R} . O anel $\mathcal{P}_V = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ é uma \mathbb{R} -álgebra graduada, ou seja,

$$\mathcal{P}_V = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathcal{P}_V^d,$$

onde \mathcal{P}_V^d é o espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau d . Como a ação de Γ em V é linear, se $f \in \mathcal{P}_V^d$ então $\gamma f \in \mathcal{P}_V^d$, onde $(\gamma f)(x) = f(\rho(\gamma)x)$, $\forall \gamma \in \Gamma, x \in V$. Portanto, $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ é também uma \mathbb{R} -álgebra graduada, isto é,

$$\mathcal{P}_V(\Gamma) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathcal{P}_V^d(\Gamma),$$

onde $\mathcal{P}_V^d(\Gamma) = \mathcal{P}_V(\Gamma) \cap \mathcal{P}_V^d$. Do mesmo modo, $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ é um módulo graduado sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$, ou seja,

$$\mathcal{Q}_V(\Gamma) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathcal{Q}_V^d(\Gamma),$$

onde $\mathcal{Q}_V^d(\Gamma) = \mathcal{Q}_V(\Gamma) \cap \mathcal{P}_V^d$.

Denotamos agora por $\vec{\mathcal{P}}_V$ o espaço vetorial das aplicações polinomiais em V nas indeterminadas x_1, \dots, x_n . O espaço $\vec{\mathcal{P}}_V$ tem uma estrutura de módulo graduado sobre \mathcal{P}_V , isto é,

$$\vec{\mathcal{P}}_V = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \vec{\mathcal{P}}_V^d,$$

onde $\vec{\mathcal{P}}_V^d$ é o espaço vetorial das aplicações polinomiais homogêneas em V de grau d . Novamente, pela linearidade da ação de Γ em V segue que os espaços $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ são módulos graduados sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$, ou seja

$$\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \vec{\mathcal{P}}_V^d(\Gamma) \quad \text{e} \quad \vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \vec{\mathcal{Q}}_V^d(\Gamma),$$

onde $\vec{\mathcal{P}}_V^d(\Gamma) = \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma) \cap \vec{\mathcal{P}}_V^d$ e $\vec{\mathcal{Q}}_V^d(\Gamma) = \vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma) \cap \vec{\mathcal{P}}_V^d$.

A Série de Hilbert-Poincaré para o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ é uma função geradora para a dimensão do espaço vetorial dos polinômios invariantes de cada grau e é definida pela série formal

$$\Phi_V^\Gamma(t) = \sum_{d=0}^{\infty} \dim \mathcal{P}_V^d(\Gamma) t^d.$$

O seguinte teorema nos fornece uma forma integral para a série de Hilbert-Poincaré de $\mathcal{P}_V(\Gamma)$, como segue:

Teorema 2.2.6. (Molien) *Seja (ρ, V) uma representação de Γ em V . Então, a série de Hilbert-Poincaré de $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ é dada por*

$$\Phi_V^\Gamma(t) = \int_{\Gamma} \frac{1}{\det(\text{Id} - t\rho(\gamma))},$$

onde Id denota a matriz identidade em $GL(V)$.

Demonstração: Veja Sturmfels [27] para o caso em que Γ é finito e Sattinger [24] para a extensão ao caso compacto. \square

De modo análogo, definimos as séries de Hilbert-Poincaré para $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$, $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ como as funções geradoras dadas por

$$\Psi_V^\Gamma(t) = \sum_{d=0}^{\infty} \dim \vec{\mathcal{P}}_V^d(\Gamma) t^d, \quad \tilde{\Phi}_V^\Gamma(t) = \sum_{d=0}^{\infty} \dim \mathcal{Q}_V^d(\Gamma) t^d \quad \text{e} \quad \tilde{\Psi}_V^\Gamma(t) = \sum_{d=0}^{\infty} \dim \vec{\mathcal{Q}}_V^d(\Gamma) t^d,$$

respectivamente.

A generalização do Teorema de Molien para o caso equivariante nos dá formas integrais para as séries de Hilbert-Poincaré dos módulos $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$, $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$. Vejamos:

Teorema 2.2.7. (Molien Equivariante) *Sejam (ρ, V) e (η, W) representações de Γ em V e em W , respectivamente. Então, a série de Hilbert-Poincaré de $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ é dada por*

$$\Psi_{V,W}^\Gamma(t) = \int_{\Gamma} \frac{\chi_w(\gamma^{-1})}{\det(\text{Id} - t\rho(\gamma))}, \quad (2.9)$$

onde χ_w é o caracter de (η, W) e Id é a matriz identidade em $GL(V)$.

Demonstração: Veja [28] para o caso finito e [24] para o caso compacto. \square

Em particular, se $(\rho, V) = (\eta, W)$ então

$$\Psi_V^\Gamma(t) = \int_{\Gamma} \frac{\chi_v(\gamma^{-1})}{\det(\text{Id} - t\rho(\gamma))}$$

é a série de Hilbert-Poincaré de $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$, onde χ_v é o caracter de (ρ, V) . Também podemos aplicar o Teorema de Molien Equivariante a fim de obtermos fórmulas para as séries de Hilbert-Poincaré de $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ e de $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$. Lembramos que toda função anti-invariante é Γ -equivariante para $(\eta, W) = (\sigma, \mathbb{R})$ e toda aplicação reversível-equivariante é Γ -equivariante para $(\eta, W) = (\rho_\sigma, V)$, onde σ é dado em (2.1). Portanto, de (2.9) temos

$$\tilde{\Phi}_V^\Gamma(t) = \int_{\Gamma} \frac{\text{tr}(\sigma(\gamma^{-1}))}{\det(\text{Id} - t\rho(\gamma))} = \int_{\Gamma} \frac{\sigma(\gamma)}{\det(\text{Id} - t\rho(\gamma))}$$

e

$$\tilde{\Psi}_V^\Gamma(t) = \int_{\Gamma} \frac{\text{tr}(\sigma(\gamma^{-1})\rho(\gamma^{-1}))}{\det(\text{Id} - t\rho(\gamma))} = \int_{\Gamma} \frac{\sigma(\gamma)\chi_v(\gamma^{-1})}{\det(\text{Id} - t\rho(\gamma))},$$

onde χ_v é o caracter correspondente a (ρ, V) . Para uma representação ortogonal de Γ , temos ainda que $\gamma^{-1} = \gamma^t$ e assim $\chi_v(\gamma^{-1}) = \chi_v(\gamma)$, para todo $\gamma \in \Gamma$.

Concluimos esta subseção com três exemplos. Mas antes precisamos de um resultado preliminar: tomando-se $\Sigma = \Gamma_+$ no Teorema 1.1.9 e lembrando que Γ_+ tem índice 2 em

Γ , isto é, $\Gamma/\Gamma_+ \simeq \mathbf{Z}_2$, segue que

$$\int_{\Gamma} f(\gamma) d\gamma = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Gamma_+} f(\gamma) d\gamma = \frac{1}{2} \left(\int_{\Gamma_+} f(\gamma) d\gamma + \int_{\Gamma_+} f(\delta\gamma) d\gamma \right), \quad (2.10)$$

para $\delta \in \Gamma_-$ fixado e para qualquer função contínua $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemplo 2.2.8. (1) Considere $\Gamma = \mathbf{Z}_2 = \{\pm 1\}$ agindo no plano como $-1(x, y) = (-x, -y)$ e tome $\delta = -1$ como antissimetria. Usamos aqui o item 1. do Exemplo 1.1.7 para obter as séries de Hilbert-Poincaré de $\mathcal{P}_V(\Gamma)$, $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$, $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$, respectivamente:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbb{R}^2}^{\mathbf{Z}_2}(t) &= \int_{\Gamma} \frac{1}{\det(\text{Id} - t\rho(\gamma))} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} \right) \\ &= 1 + 3t^2 + 5t^4 + 7t^6 + 9t^8 + \dots, \quad |t| < 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbb{R}^2}^{\mathbf{Z}_2} &= \int_{\Gamma} \frac{\chi_V(\gamma)}{\det(\text{Id} - t\rho(\gamma))} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{(1-t)^2} + \frac{-2}{(1+t)^2} \right) \\ &= 4t + 8t^3 + 12t^5 + 16t^7 + 20t^9 + \dots, \quad |t| < 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{\mathbb{R}^2}^{\mathbf{Z}_2} &= \int_{\Gamma} \frac{\sigma(\gamma)}{\det(\text{Id} - t\rho(\gamma))} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{(1+t)^2} \right) \\ &= 2t + 4t^3 + 6t^5 + 8t^7 + 10t^9 + \dots, \quad |t| < 1, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{\mathbb{R}^2}^{\mathbf{Z}_2} &= \int_{\Gamma} \frac{\sigma(\gamma)\chi_V(\gamma)}{\det(\text{Id} - t\rho(\gamma))} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{(1-t)^2} + \frac{2}{(1+t)^2} \right) \\ &= 2 + 6t^2 + 10t^4 + 14t^6 + 18t^8 + \dots, \quad |t| < 1. \end{aligned}$$

Podemos concluir, por exemplo, que os \mathbf{Z}_2 -invariantes e os \mathbf{Z}_2 -reversíveis-equivariantes possuem apenas geradores de grau par, enquanto que os \mathbf{Z}_2 -anti-invariantes e os \mathbf{Z}_2 -equivariantes possuem apenas geradores de grau ímpar. Além disso, no caso dos reversíveis equivariantes temos

$$\dim_{\mathbb{R}} \vec{\mathcal{Q}}_{\mathbb{R}^2}^0(\mathbf{Z}_2) = 2, \quad \dim_{\mathbb{R}} \vec{\mathcal{Q}}_{\mathbb{R}^2}^2(\mathbf{Z}_2) = 6 \quad \text{e} \quad \dim_{\mathbb{R}} \vec{\mathcal{Q}}_{\mathbb{R}^2}^4(\mathbf{Z}_2) = 10.$$

(2) Considere $\Gamma = \mathbf{SO}(2)$ agindo em \mathbb{R}^2 pela multiplicação de matriz por vetor. Observe que os únicos subgrupos não triviais de $\mathbf{SO}(2)$ são os cíclicos \mathbf{Z}_n , com $n \geq 2$. No entanto, \mathbf{Z}_n não tem índice 2 em $\mathbf{SO}(2)$. Em outras palavras, não podemos definir um homomorfismo sobrejetor $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbf{Z}_2$ como em (2.1). Neste exemplo, portanto, $\mathbf{SO}(2)$ não possui antissimetrias e descrevemos somente as séries de Hilbert-Poincaré para $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ e para $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$.

A integral de Haar sobre $\mathbf{SO}(2)$ é dada no item 2. do Exemplo 1.1.7 por

$$\int_{\mathbf{SO}(2)} f = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta) d\theta,$$

onde $\tilde{f} : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função 2π -periódica tal que $\tilde{f}(\theta) = f(R_\theta)$. Assim, a série de Hilbert-Poincaré para $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ é dada por

$$\Phi_{\mathbb{R}^4}^{\mathbf{SO}(2)}(t) = \int_{\Gamma} \frac{1}{\det(\text{Id} - t\rho(\gamma))} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2t \cos \theta + t^2} d\theta.$$

Para calcular essa integral utilizamos técnicas de análise harmônica. Em [9, X, Proposition 2.3], Conway mostra que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - t^2}{1 - 2t \cos \theta + t^2} d\theta = 1, \quad 0 < t < 1.$$

Uma vez que a função \tilde{f} é 2π -periódica, temos

$$\int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta) d\theta.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbb{R}^2}^{\mathbf{SO}(2)}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - 2t \cos \theta + t^2} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - t^2}{1 - 2t \cos \theta + t^2} \frac{1}{1 - t^2} d\theta \\ &= \frac{1}{1 - t^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - t^2}{1 - 2t \cos \theta + t^2} d\theta \right) = \frac{1}{1 - t^2} \\ &= 1 + t^2 + t^4 + t^6 + t^8 + \dots, \quad 0 < t < 1. \end{aligned}$$

A série de Hilbert-Poincaré para $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$ é dada por

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbb{R}^2}^{\mathbf{SO}(2)}(t) &= \int_{\Gamma} \frac{\chi_V(\gamma)}{\det(\text{Id} - t\rho(\gamma))} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2\cos\theta}{1 - 2t \cos \theta + t^2} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\cos\theta}{1 - 2t \cos \theta + t^2} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{-1}{t} + \frac{1 + t^2}{t(1 - 2t \cos \theta + t^2)} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-1}{t} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{t} \frac{1 + t^2}{1 - 2t \cos \theta + t^2} d\theta \\ &= \frac{-1}{t} + \frac{1 + t^2}{t(1 - t^2)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - t^2}{1 - 2t \cos \theta + t^2} d\theta \right) \\ &= \frac{-1}{t} + \frac{1 + t^2}{t(1 - t^2)} = \frac{2t}{1 - t^2} = \\ &= 2t + 2t^3 + 2t^5 + 2t^7 + 2t^9 + \dots, \quad 0 < t < 1. \end{aligned}$$

Neste exemplo, $\dim_{\mathbb{R}} \vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{R}^2}^d(\mathbf{SO}_2) = 2$, para todo $d \geq 1$ ímpar.

- (3) Considere agora $\Gamma = \mathbf{O}(2)$, gerado por $\mathbf{SO}(2)$ e pela reflexão κ dada em (1.3), agindo em \mathbb{R}^2 pela multiplicação de matriz por vetor. Tome $\delta = \kappa$ como antissimetria de modo que $\Gamma_+ = \mathbf{SO}(2)$. Por (2.10) segue que

$$\int_{\mathbf{O}(2)} f(\gamma) d\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(R_\theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\kappa R_\theta) d\theta \right).$$

Usando as mesmas técnicas do exemplo anterior, obtemos as séries de Hilbert-Poincaré de $\mathcal{P}_V(\Gamma)$, $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$, $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$, respectivamente:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbb{R}^2}^{\mathbf{O}(2)}(t) &= \int_{\mathbf{O}(2)} \frac{1}{\det(\text{Id} - t\rho(\gamma))} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2t \cos \theta + t^2} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - t^2} d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - t^2} + \frac{1}{1 - t^2} \right) = \frac{1}{1 - t^2} = 1 + t^2 + t^4 + t^6 + t^8 + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbb{R}^2}^{\mathbf{O}(2)}(t) &= \int_{\mathbf{O}(2)} \frac{\chi_V(\gamma)}{\det(\text{Id} - t\rho(\gamma))} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2 \cos \theta}{1 - 2t \cos \theta + t^2} d\theta + 0 \right) \\ &= \frac{t}{1 - t^2} = t + t^3 + t^5 + t^7 + t^9 + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{\mathbb{R}^2}^{\mathbf{O}(2)}(t) &= \int_{\mathbf{O}(2)} \frac{\sigma(\gamma)}{\det(\text{Id} - t\rho(\gamma))} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2t \cos \theta + t^2} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-1}{1 - t^2} d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - t^2} - \frac{1}{1 - t^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{\mathbb{R}^2}^{\mathbf{O}(2)}(t) &= \int_{\mathbf{O}(2)} \frac{\sigma(\gamma)\chi_V(\gamma)}{\det(\text{Id} - t\rho(\gamma))} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2 \cos \theta}{1 - 2t \cos \theta + t^2} d\theta + 0 \right) \\ &= \frac{t}{1 - t^2} = t + t^3 + t^5 + t^7 + t^9 + \dots \end{aligned}$$

Observamos que $\tilde{\Phi}_{\mathbb{R}^2}^{\mathbf{O}(2)}(t) = 0$ implica que não existem funções $\mathbf{O}(2)$ -anti-invariantes.

Além disso,

$$\dim_{\mathbb{R}} \vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{R}^2}^d(\mathbf{O}(2)) = \dim_{\mathbb{R}} \vec{\mathcal{Q}}_{\mathbb{R}^2}^d(\mathbf{O}(2)),$$

para todo $d \in \mathbb{N}$.

2.2.3 Fórmulas de caracter

Começamos esta subsecção com um importante teorema em teoria invariante, devido a Sattinger, que usa teoria de caracter para obter a dimensão de $\mathcal{P}_V^d(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{P}}_V^d(\Gamma)$, para cada d . Nosso principal objetivo nesta subsecção é generalizar tal resultado ao contexto reversível-equivariante.

Teorema 2.2.9. (Sattinger) *Se Γ age ortogonalmente em um espaço vetorial real V de dimensão finita com caracter correspondente χ_V , então*

$$\dim \mathcal{P}_V^d(\Gamma) = \int_{\Gamma} \chi_{(d)}(\gamma) \quad (2.11)$$

e

$$\dim \vec{\mathcal{P}}_V^d(\Gamma) = \int_{\Gamma} \chi_{(d)}(\gamma) \chi_V(\gamma), \quad (2.12)$$

onde $\chi_{(d)}(\gamma)$ é o caracter da representação induzida de Γ em $\mathbf{S}^d(V)$.

Demonstração: Veja Sattinger [24, Theorem 5.10]. □

Seja \mathbf{S}_n o grupo simétrico das permutações de ordem n .

Definição 2.2.10. *Uma aplicação n -multilinear $\beta : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n \text{ vezes}} \rightarrow W$ é simétrica se*

$$\beta \circ \pi = \beta, \quad \forall \pi \in \mathbf{S}_n.$$

Ou seja, $\beta(x_{\pi^{-1}(1)}, \dots, x_{\pi^{-1}(n)}) = \beta(x_1, \dots, x_n)$, para todo $x_i \in V$ e $\pi \in \mathbf{S}_n$.

Denotamos por $\mathcal{L}_S^d(V, W)$ o espaço de todas as aplicações d -multilineares simétricas de $\underbrace{V \times \dots \times V}_{d \text{ vezes}}$ em W . Quando $W = \mathbb{R}$, denotamos $\mathcal{L}_S^d(V, W)$ simplesmente por $\mathcal{L}_S^d(V)$.

Definição 2.2.11. *Uma função polinomial $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é homogênea de grau d se existe uma função d -multilinear simétrica $\hat{f} \in \mathcal{L}_S^d(V)$ tal que*

$$f(x) = \hat{f}(x, \dots, x), \quad \forall x \in V.$$

De modo análogo, uma aplicação polinomial $g : V \rightarrow W$ é homogênea de grau d se existe uma aplicação d -multilinear simétrica $\hat{g} \in \mathcal{L}_S^d(V, W)$ tal que $g(x) = \hat{g}(x, \dots, x)$, para todo $x \in V$.

Segue da Definição 2.2.11 que a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S^d(V, W) &\longrightarrow \vec{\mathcal{P}}_{V, W}^d \\ \hat{g} &\longmapsto g \end{aligned} \quad (2.13)$$

é um isomorfismo. Em [18, p. 621], Goodman prova o isomorfismo canônico

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{S}^d V, W) \longrightarrow \mathcal{L}_S^d(V, W), \quad (2.14)$$

para V e W espaços vetoriais reais de dimensão finita, onde $\mathrm{Hom}(\mathbf{S}^d V, W)$ denota o espaço vetorial dos homomorfismos de $\mathbf{S}^d V$ em W . Além disso, a aplicação

$$\vartheta : V^* \otimes W \rightarrow \mathrm{Hom}(V, W), \quad (2.15)$$

que leva $v^* \otimes w$ no homomorfismo $u \mapsto v^*(u)w$, é um isomorfismo.

Os isomorfismos definidos em (2.13), (2.14) e (2.15) são Γ -equivariantes e combinados nos dão

$$\vec{\mathcal{P}}_{V,W}^d \cong \mathcal{L}_S^d(V, W) \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{S}^d V, W) \cong (\mathbf{S}^d V)^* \otimes W. \quad (2.16)$$

Defina agora a ação de Γ em $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}^d$ por

$$(\gamma g)(x) = \eta(\gamma)g(\rho(\gamma^{-1})x), \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in V, g \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}^d.$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathrm{Fix}_{\vec{\mathcal{P}}_{V,W}^d}(\Gamma) &= \{g \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}^d : \gamma g = g, \forall \gamma \in \Gamma\} \\ &= \{g \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}^d : \eta(\gamma)g(\rho(\gamma^{-1})x) = g(x), \forall \gamma \in \Gamma, x \in V\} \\ &= \{g \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}^d : g(\rho(\gamma^{-1})x) = \eta(\gamma^{-1})g(x), \forall \gamma \in \Gamma, x \in V\} \\ &= \vec{\mathcal{P}}_{V,W}^d(\Gamma). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\mathrm{Fix}_{\vec{\mathcal{P}}_{V,W}^d}(\Gamma) = \vec{\mathcal{P}}_{V,W}^d(\Gamma). \quad (2.17)$$

Pela Proposição 1.4.2, juntamente com (2.16) e (2.17), obtemos o isomorfismo

$$\vec{\mathcal{P}}_{V,W}^d(\Gamma) \cong \mathrm{Fix}_{(\mathbf{S}^d V)^* \otimes W}(\Gamma). \quad (2.18)$$

Estamos prontos agora para demonstrar o seguinte teorema, que nos fornece uma fórmula para a dimensão de $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}^d(\Gamma)$.

Teorema 2.2.12. *Sejam (ρ, V) e (η, W) representações de Γ em V e em W , respectivamente. Seja χ_W o caracter correspondente à representação η . Então,*

$$\dim \vec{\mathcal{P}}_{V,W}^d(\Gamma) = \int_{\Gamma} \chi_{(d)}(\gamma^{-1})\chi_W(\gamma),$$

onde $\chi_{(d)}$ é o caracter induzido da representação de Γ em $\mathbf{S}^d V$.

Demonstração: De (2.18) e utilizando a fórmula do traço dada em (1.31) temos que

$$\begin{aligned} \dim \vec{\mathcal{P}}_{V,W}^d(\Gamma) &= \int_{\gamma \in \Gamma} \chi_{(\mathbf{S}^d V)^* \otimes W}(\gamma) = \int_{\gamma \in \Gamma} \chi_{(\mathbf{S}^d V)^*}(\gamma) \chi_W(\gamma) \\ &= \int_{\gamma \in \Gamma} \chi_{\mathbf{S}^d V}(\gamma^{-1}) \chi_W(\gamma) = \int_{\gamma \in \Gamma} \chi_{(d)}(\gamma^{-1}) \chi_W(\gamma), \end{aligned}$$

a segunda e terceira igualdades seguindo da Proposição 2.2.5. \square

Note que o Teorema 2.2.9 é um caso particular do Teorema 2.2.12. Para isto, considere $W = \mathbb{R}$ sob a representação trivial de Γ para obter (2.11) e $(\eta, W) = (\rho, V)$ para obter (2.12).

Corolário 2.2.13. *Seja (ρ, V) uma representação ortogonal de Γ em V . Então,*

$$\dim \mathcal{Q}_V^d(\Gamma) = \int_{\gamma \in \Gamma} \sigma(\gamma) \chi_{(d)}(\gamma) \quad (2.19)$$

e

$$\dim \vec{\mathcal{Q}}_V^d(\Gamma) = \int_{\gamma \in \Gamma} \sigma(\gamma) \chi_{(d)}(\gamma) \chi_V(\gamma), \quad (2.20)$$

onde $\chi_{(d)}$ é o caracter induzido da representação de Γ em $\mathbf{S}^d V$ e σ é um homomorfismo sobrejetor como em (2.1).

Demonstração: Segue diretamente do Teorema 2.2.12 tomando $(\eta, W) = (\sigma, \mathbb{R})$ para obter (2.19) e $(\eta, W) = (\rho_\sigma, V)$ para obter (2.20). \square

Observação 2.2.14. Para a aplicação das fórmulas de caracter dadas no Teorema 2.2.9 e no Corolário 2.2.13 faz-se necessário o cálculo do caracter $\chi_{(d)}$ correspondente a ação de Γ em $\mathbf{S}^d V$. Existe uma fórmula recursiva, cuja prova é dada em [2, Section 4], que facilita os cálculos. Temos,

$$d\chi_{(d)}(\gamma) = \sum_{i=0}^{d-1} \chi_V(\gamma^{d-i}) \chi_{(i)}(\gamma), \quad (2.21)$$

com $\chi_{(0)}(\gamma) = 1$, para todo $\gamma \in \Gamma$.

Para cada $d \in \mathbb{N}$ existe uma forte relação entre as dimensões de $\mathcal{P}_V^d(\Gamma)$ e $\mathcal{Q}_V^d(\Gamma)$ e entre as dimensões de $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}^d(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}_V^d(\Gamma)$. Isto é o que nos mostra a Proposição 2.2.15.

Proposição 2.2.15. *Seja Γ_+ o subgrupo das simetrias de Γ . Sejam $\mathcal{P}_V^d(\Gamma)$ e $\mathcal{Q}_V^d(\Gamma)$ os espaços vetoriais das funções polinomiais homogêneas Γ -invariantes e Γ -anti-invariantes de grau d , respectivamente. Sejam $\vec{\mathcal{P}}_V^d(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}_V^d(\Gamma)$ os espaços vetoriais das aplicações*

polinomiais homogêneas Γ -equivariantes e Γ -reversíveis-equivariantes de grau d , respectivamente. Então

$$\dim \mathcal{P}_V^d(\Gamma) + \dim \mathcal{Q}_V^d(\Gamma) = \dim \mathcal{P}_V^d(\Gamma_+)$$

e

$$\dim \vec{\mathcal{P}}_V^d(\Gamma) + \dim \vec{\mathcal{Q}}_V^d(\Gamma) = \dim \vec{\mathcal{P}}_V^d(\Gamma_+).$$

Demonstração: Segue diretamente das fórmulas apresentadas no Teorema 2.2.9 e no Corolário 2.2.13. De fato, fixe $\delta \in \Gamma_-$ qualquer. Da igualdade (2.10), temos

$$\dim \mathcal{P}_V^d(\Gamma) = \frac{1}{2} \left(\int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\gamma) + \int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\delta\gamma) \right); \quad (2.22)$$

$$\dim \mathcal{Q}_V^d(\Gamma) = \frac{1}{2} \left(\int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\gamma) - \int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\delta\gamma) \right); \quad (2.23)$$

$$\dim \vec{\mathcal{P}}_V^d(\Gamma) = \frac{1}{2} \left(\int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\gamma)\chi_V(\gamma) + \int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\delta\gamma)\chi_V(\delta\gamma) \right); \quad (2.24)$$

$$\dim \vec{\mathcal{Q}}_V^d(\Gamma) = \frac{1}{2} \left(\int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\gamma)\chi_V(\gamma) - \int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\delta\gamma)\chi_V(\delta\gamma) \right). \quad (2.25)$$

Daí,

$$\dim \mathcal{P}_V^d(\Gamma) + \dim \mathcal{Q}_V^d(\Gamma) = \int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\gamma) = \dim \mathcal{P}_V^d(\Gamma_+)$$

e

$$\dim \vec{\mathcal{P}}_V^d(\Gamma) + \dim \vec{\mathcal{Q}}_V^d(\Gamma) = \int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\gamma)\chi_V(\gamma) = \dim \vec{\mathcal{P}}_V^d(\Gamma_+),$$

como desejado. \square

Apresentamos agora resultados que estabelecem condições necessárias para que o espaço V seja não auto-dual. Em particular, a Proposição 2.2.17 leva em consideração a paridade dos coeficientes da série de Hilbert-Poincaré de $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$.

Proposição 2.2.16. *Seja (ρ, V) uma representação auto-dual de Γ . Então, toda antisimetria de Γ tem traço nulo.*

Demonstração: Seja $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbf{Z}_2$ um homomorfismo sobrejetor como em (2.1). Como V é auto-dual, existe um isomorfismo Γ -equivariante entre (ρ, V) e (ρ_σ, V) . Pelo Lema 2.2.2,

$$\mathrm{tr}(\rho(\gamma)) = \mathrm{tr}(\rho_\sigma(\gamma)), \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Logo, $\mathrm{tr}(\rho(\gamma)) = \sigma(\gamma)\mathrm{tr}(\rho(\gamma))$, $\forall \gamma \in \Gamma$. Se $\gamma \in \Gamma_-$, então $\mathrm{tr}(\rho(\gamma)) = -\mathrm{tr}(\rho(\gamma))$, ou seja, $\mathrm{tr}(\rho(\gamma)) = 0$, como queríamos. \square

Proposição 2.2.17. *Sejam (ρ, V) uma representação auto-dual de Γ em V e Γ_+ o subgrupo das simetrias de Γ . Então as séries de Hilbert-Poincaré de $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$ e de $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ são iguais. Além disso, todo coeficiente da série de Hilbert-Poincaré de $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$ é par.*

Demonstração: Da proposição anterior, $\chi_V(\gamma) = 0$, para todo $\gamma \in \Gamma_-$. De (2.24) e de (2.25) temos

$$\dim \vec{\mathcal{Q}}_V^d(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\gamma) \chi_V(\gamma) = \dim \vec{\mathcal{P}}_V^d(\Gamma),$$

para todo $d \in \mathbb{N}$. Logo, $\Psi_\Gamma^V(t) = \sum_{d=0}^{\infty} \dim \vec{\mathcal{P}}_V^d(\Gamma) t^d = \sum_{d=0}^{\infty} \dim \vec{\mathcal{Q}}_V^d(\Gamma) t^d = \tilde{\Psi}_\Gamma^V(t)$. Da Proposição 2.2.15 temos também que

$$\dim \vec{\mathcal{P}}_V^d(\Gamma_+) = 2 \dim \vec{\mathcal{P}}_V^d(\Gamma),$$

que é par para todo $d \in \mathbb{N}$. □

Observação 2.2.18. Usando a fórmula recursiva dada em (2.21) é possível mostrar que se V é auto-dual e $\gamma \in \Gamma_-$, então $\chi_{(d)}(\gamma) = 0$, para todo $d \in \mathbb{N}$ ímpar. Neste caso, de (2.22) e (2.23) concluimos que $\dim \mathcal{P}_V^d(\Gamma) = \dim \mathcal{Q}_V^d(\Gamma)$, para todo $d \in \mathbb{N}$ ímpar.

Exemplo 2.2.19. Considere o item (3) do Exemplo 2.2.8. Como a série de Hilbert-Poincaré de $\mathcal{Q}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{O}(2))$ é identicamente nula, segue que $\dim \mathcal{Q}_{\mathbb{R}^2}^d(\mathbf{O}(2)) = 0$, para todo $d \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 2.2.15,

$$\dim \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}^d(\mathbf{O}(2)) = \dim \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}^d(\mathbf{SO}(2)),$$

para todo $d \in \mathbb{N}$, donde $\Phi_{\mathbb{R}^2}^{\mathbf{O}(2)}(t) = \Phi_{\mathbb{R}^2}^{\mathbf{SO}(2)}(t)$. Isto também pode ser observado comparando os itens (2) e (3) do Exemplo 2.2.8. Ainda, as séries de Hilbert-Poincaré de $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{O}(2))$ e de $\vec{\mathcal{Q}}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{O}(2))$ são iguais, o que também está de acordo com a Proposição 2.2.17, uma vez que a representação de $\mathbf{O}(2)$ em \mathbb{R}^2 é auto-dual (para verificar a última afirmação, considere o isomorfismo Γ -reversível-equivariante $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $A(x, y) = (-y, x)$). Portanto, pela Proposição 2.2.17, a série de Hilbert-Poincaré de $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{SO}(2))$ é igual a

$$2\Psi_{\mathbb{R}^2}^{\mathbf{O}(2)}(t) = \frac{2t}{1-t^2},$$

o que também está de acordo com o item (2) do Exemplo 2.2.8.

2.3 Operadores de Reynolds

Nesta seção, introduzimos os chamados operadores de Reynolds, outra importante ferramenta dentro da teoria invariante polinomial. Tais operadores são projeções que usamos na construção dos geradores para os módulos $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$. Para isso, obtemos

primeiramente uma relação entre os anéis das funções polinomiais invariantes sob as ações de Γ e de Γ_+ . De maneira análoga, relacionamos também os módulos das aplicações polinomiais equivariantes sob Γ e Γ_+ . Para mais detalhes sobre operadores de Reynolds veja [26].

Sejam $\Sigma \subset \Gamma$ um subgrupo fechado e (ρ, V) uma representação de Γ . Para simplificar notação, denotamos $\rho(\gamma)x$ simplesmente por γx , para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in V$.

Os operadores de Reynolds relativos sobre $\mathcal{P}_V(\Sigma)$ e sobre $\vec{\mathcal{P}}_V(\Sigma)$, denotados respectivamente por $R_\Sigma^\Gamma : \mathcal{P}_V(\Sigma) \rightarrow \mathcal{P}_V(\Sigma)$ e $\vec{R}_\Sigma^\Gamma : \vec{\mathcal{P}}_V(\Sigma) \rightarrow \vec{\mathcal{P}}_V(\Sigma)$, são dados por

$$R_\Sigma^\Gamma(f)(x) = \int_{\Gamma/\Sigma} f(\gamma x) \quad \text{e} \quad \vec{R}_\Sigma^\Gamma(g)(x) = \int_{\Gamma/\Sigma} \gamma^{-1}g(\gamma x).$$

Quando Σ é de índice finito n em Γ , isto é, Γ/Σ é de ordem n , temos

$$R_\Sigma^\Gamma(f)(x) = \frac{1}{n} \sum_{\gamma\Sigma} f(\gamma x) \quad \text{e} \quad \vec{R}_\Sigma^\Gamma(g)(x) = \frac{1}{n} \sum_{\gamma\Sigma} \gamma^{-1}g(\gamma x), \quad (2.26)$$

para todo $f \in \mathcal{P}_V(\Sigma)$ e $g \in \vec{\mathcal{P}}_V(\Sigma)$.

Considere $\Sigma = \Gamma_+$ o subgrupo das simetrias de Γ . Como $\Gamma = \Gamma_+ \dot{\cup} \delta\Gamma_+$, para qualquer $\delta \in \Gamma_-$ fixado, podemos reescrever (2.26) como

$$R_{\Gamma_+}^\Gamma(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(\delta x)) \quad \text{e} \quad \vec{R}_{\Gamma_+}^\Gamma(g)(x) = \frac{1}{2}(g(x) + \delta^{-1}g(\delta x)). \quad (2.27)$$

Fixe um epimorfismo $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbf{Z}_2$ como em (2.1). Definimos agora os σ -operadores de Reynolds $S_{\Gamma_+}^\Gamma : \mathcal{P}_V(\Gamma_+) \rightarrow \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ e $\vec{S}_{\Gamma_+}^\Gamma : \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+) \rightarrow \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$ por

$$S_{\Gamma_+}^\Gamma(f)(x) = \int_{\Gamma/\Gamma_+} \sigma(\gamma)f(\gamma x) \quad \text{e} \quad \vec{S}_{\Gamma_+}^\Gamma(g)(x) = \int_{\Gamma/\Gamma_+} \sigma(\gamma)\gamma^{-1}g(\gamma x),$$

respectivamente, que podem ser reescritos como

$$S_{\Gamma_+}^\Gamma(f)(x) = \frac{1}{2} \sum_{\delta\Gamma_+} \sigma(\gamma)f(\gamma x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(\delta x)) \quad (2.28)$$

e

$$\vec{S}_{\Gamma_+}^\Gamma(g)(x) = \frac{1}{2} \sum_{\delta\Gamma_+} \sigma(\gamma)\gamma^{-1}g(\gamma x) = \frac{1}{2}(g(x) - \delta^{-1}g(\delta x)), \quad (2.29)$$

para $\delta \in \Gamma_-$ fixado, para todo $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ e $g \in \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$.

Para simplificar a escrita, escrevemos daqui em diante R, S, \vec{R}, \vec{S} para denotar $R_{\Gamma_+}^\Gamma, S_{\Gamma_+}^\Gamma, \vec{R}_{\Gamma_+}^\Gamma, \vec{S}_{\Gamma_+}^\Gamma$, respectivamente. Temos o seguinte resultado:

Proposição 2.3.1. *Os operadores de Reynolds R, \vec{R}, S e \vec{S} satisfazem as seguintes propriedades:*

(a) *Eles são homomorfismos de $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ -módulos;*

(b) *Denote por $I_{\mathcal{P}_V(\Gamma_+)}$ e $I_{\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)}$ os operadores identidade em $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ e $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$, respectivamente. Então*

$$R + S = I_{\mathcal{P}_V(\Gamma_+)} \quad e \quad \vec{R} + \vec{S} = I_{\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)}. \quad (2.30)$$

(c) *Eles são projeções idempotentes com*

$$\ker(R) = \mathcal{Q}_V(\Gamma) \quad e \quad \text{Im}(R) = \mathcal{P}_V(\Gamma); \quad (2.31)$$

$$\ker(S) = \mathcal{P}_V(\Gamma) \quad e \quad \text{Im}(S) = \mathcal{Q}_V(\Gamma); \quad (2.32)$$

$$\ker(\vec{R}) = \vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma) \quad e \quad \text{Im}(\vec{R}) = \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma);$$

$$\ker(\vec{S}) = \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma) \quad e \quad \text{Im}(\vec{S}) = \vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma).$$

(d) *As seguintes decomposições como uma soma direta de $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ -módulos valem*

$$\mathcal{P}_V(\Gamma_+) = \ker(R) \oplus \text{Im}(R) = \ker(S) \oplus \text{Im}(S)$$

e

$$\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+) = \ker(\vec{R}) \oplus \text{Im}(\vec{R}) = \ker(\vec{S}) \oplus \text{Im}(\vec{S}).$$

Demonstração: (a) Sejam $f, g \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ e $p \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$. Então, para todo $x \in V$,

$$\begin{aligned} R(f + g)(x) &= \frac{1}{2}((f + g)(x) + (f + g)(\delta x)) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + f(\delta x) + g(\delta x)) \\ &= \frac{1}{2}(f(x) + f(\delta x)) + \frac{1}{2}(g(x) + g(\delta x)) \\ &= R(f)(x) + R(g)(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} R(pg)(x) &= \frac{1}{2}((pg)(x) + (pg)(\delta x)) = \frac{1}{2}(p(x)g(x) + p(\delta x)g(\delta x)) \\ &= \frac{1}{2}(p(x)g(x) + p(x)g(\delta x)) = p(x) \left(\frac{1}{2}(g(x) + g(\delta x)) \right) \\ &= (pRg)(x). \end{aligned}$$

De modo análogo, mostra-se que S, \vec{R} e \vec{S} são também homomorfismos de $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ -módulos.

(b) Segue diretamente da definição dos operadores R, S, \vec{R} e \vec{S} em (2.27), (2.28) e (2.29).

(c) Mostramos somente as igualdades dadas em (2.31). Seja $f \in \ker(R)$ e fixe $\delta \in \Gamma_-$ qualquer. Então, para todo $x \in V$, $R(f)(x) = 0$ implica que $f(\delta x) = -f(x)$. Logo,

$f \in \mathcal{Q}_V(\Gamma)$ pelo Lema 2.1.4. Por outro lado, se $f \in \mathcal{Q}_V(\Gamma)$, então $f(\delta x) + f(x) = 0$, para todo $x \in V$, isto é, $f \in \ker(R)$. Portanto, $\mathcal{Q}_V(\Gamma) = \ker(R)$.

Seja agora $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$. Por definição, $R(f) \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$. Vamos mostrar que $R(f) \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$, usando novamente o Lema 2.1.4. Como $\delta^2 \in \Gamma_+$, temos

$$R(f)(\delta x) = \frac{1}{2}(f(\delta x) + f(\delta^2 x)) = \frac{1}{2}(f(\delta x) + f(x)) = R(f)(x), \quad \forall x \in V,$$

o que implica que $\text{Im}(R) \subset \mathcal{P}_V(\Gamma)$. Por outro lado, observe que se $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$, então

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + f(\delta x)) = R(f)(x). \quad (2.33)$$

ou seja, $\mathcal{P}_V(\Gamma) \subset \text{Im}(R)$. Logo, fica demonstrado (2.31). As demais igualdades seguem de forma análoga.

Para mostrar que $R^2 = R$ basta usar que $\text{Im}R = \mathcal{P}_V(\Gamma)$ e que $R|_{\mathcal{P}_V(\Gamma)} = I_{\mathcal{P}_V(\Gamma)}$, como vimos em (2.33). Por um raciocínio análogo, mostramos que S , \vec{R} e \vec{S} são idempotentes.

(d) Primeiramente, observe que como $\Gamma_+ \subset \Gamma$, $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ pode ser visto como um $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ -módulo. A inclusão $\ker(R) + \text{Im}(R) \subseteq \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ é óbvia. Por outro lado, se $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ podemos escrever

$$f = (f - R(f)) + R(f),$$

onde $R(f) \in \text{Im}(R)$. Como R é idempotente, temos

$$R(f - R(f)) = R(f) - R^2(f) = 0,$$

implicando que $f - R(f) \in \ker(R)$. Logo, $\mathcal{P}_V(\Gamma_+) \subseteq \ker(R) + \text{Im}(R)$ e, portanto, vale a igualdade.

Seja agora $f \in \ker(R) \cap \text{Im}(R)$. Então, $R(f) = 0$ e existe $\bar{f} \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ tal que $R(\bar{f}) = f$. Como R é idempotente, temos

$$f = R(\bar{f}) = R(R(\bar{f})) = R(f) = 0,$$

ou seja, $\ker(R) \cap \text{Im}(R) = \{0\}$. Portanto,

$$\mathcal{P}_V(\Gamma_+) = \ker(R) \oplus \text{Im}(R).$$

De maneira análoga mostra-se que $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+) = \ker(\vec{R}) \oplus \text{Im}(\vec{S})$. □

Como consequência imediata da proposição anterior temos:

Corolário 2.3.2. *Seja Γ agindo linearmente em V . Então,*

(a) $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ se, e somente se, $R(f) = f$;

- (b) $f \in \mathcal{Q}_V(\Gamma)$ se, e somente se, $S(f) = f$;
- (c) $g \in \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$ se, e somente se, $\vec{R}(g) = g$;
- (d) $g \in \vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ se, e somente se, $\vec{S}(g) = g$.

O principal resultado desta seção é uma consequência imediata da Proposição 2.3.1, sendo de grande importância na obtenção dos geradores para os módulos $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ nas duas próximas seções. Ele estabelece as relações entre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ e $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ e entre $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ como segue:

Corolário 2.3.3. *Sejam Γ agindo linearmente em V e Γ_+ o subgrupo das simetrias de Γ . Então, as seguintes decomposições como uma soma direta de módulos sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ valem:*

$$\mathcal{P}_V(\Gamma_+) = \mathcal{P}_V(\Gamma) \oplus \mathcal{Q}_V(\Gamma) \tag{2.34}$$

e

$$\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+) = \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma) \oplus \vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma). \tag{2.35}$$

2.4 Algoritmo para o cálculo dos anti-invariantes

Nesta seção, usamos a decomposição (2.34) para obter um algoritmo que determina um conjunto de geradores para o módulo dos polinômios anti-invariantes sob a ação de Γ . O procedimento se baseia na teoria invariante principalmente aplicada para o subgrupo Γ_+ das simetrias. Mais especificamente, mostramos no Teorema 2.4.1 que a projeção pelo operador de Reynold S dos elementos de uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ nos fornece os geradores para $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$.

No que segue, se $u = u_1 \dots u_s$, usamos a notação u^α para representar o produto $u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_s^{\alpha_s}$, com $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$. Também denotamos $a_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ por a_α .

Teorema 2.4.1. *Seja Γ agindo linearmente em V e fixe $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbf{Z}_2$ um epimorfismo de grupos como em (2.1), com $\ker \sigma = \Gamma_+$. Se $\{u_1, \dots, u_s\}$ é base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$, então o conjunto*

$$\{S(u_1), \dots, S(u_s)\}$$

gera $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ como um módulo sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.

Demonstração: Sejam $f \in \mathcal{Q}_V(\Gamma)$ e $\{u_1, \dots, u_s\}$ uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$. Fixe $\delta \in \Gamma_-$ qualquer. Queremos mostrar que

$$f = \sum_{i=1}^s p_i S(u_i),$$

com $p_i \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ e S dado em (2.28). Como $I_{\mathcal{P}_V(\Gamma_+)} = R + S$, podemos escrever

$$u_i = R(u_i) + S(u_i), \quad \forall i = 1, \dots, s.$$

Deste modo, o conjunto $\{R(u_i), S(u_i) : i = 1, \dots, s\}$ também forma uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$. Como $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$, escrevemos f como

$$f = \sum_{\beta} b_{\beta} R(u_i)^{\beta_0} S(u_i)^{\beta_1}, \quad (2.36)$$

onde $\beta = (\beta_0, \beta_1)$, $\beta_0 = (\beta_{01}, \dots, \beta_{0s}) \in \mathbb{N}^s$, $\beta_1 = (\beta_{11}, \dots, \beta_{1s}) \in \mathbb{N}^s$ e $b_{\beta} \in \mathbb{R}$. Segue de (2.31) e (2.32) que $R(u_i) \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ e $S(u_i) \in \mathcal{Q}_V(\Gamma)$, para todo $i = 1, \dots, s$. De (2.36),

$$\begin{aligned} f(\delta x) &= \sum b_{\beta} R(u_i)^{\beta_0}(\delta x) S(u_i)^{\beta_1}(\delta x) \\ &= \sum b_{\beta} R(u_i)^{\beta_0}(x) (-1)^{\beta_{11} + \dots + \beta_{1s}} S(u_i)^{\beta_1}(x) \\ &= \sum b_{\beta} (-1)^{\beta(1)} R(u_i)^{\beta_0}(x) S(u_i)^{\beta_1}(x), \end{aligned}$$

onde $\beta(1) = \beta_{11} + \dots + \beta_{1s}$. Como $f \in \mathcal{Q}_V(\Gamma)$, segue que $f(\delta x) = -f(x)$, para todo $x \in V$. Daí

$$\sum b_{\beta} ((-1)^{\beta(1)} + 1) R(u_i)^{\beta_0}(x) S(u_i)^{\beta_1}(x) = 0, \quad \forall x \in V.$$

Portanto, $b_{\beta} = 0$ ou $(-1)^{\beta(1)} = -1$. Em outras palavras, $b_{\beta} = 0$ ou $\beta(1) \equiv 1 \pmod{2}$. Note que $R(u_i)^{\beta_0} \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$. Além disso, como $\beta(1)$ é ímpar, segue da Observação 2.1.3 que $S(u_i)^{\beta_1}$ é anti-invariante. De modo mais preciso, $S(u_i)^{\beta_1} = f_{i\beta_1} S(u_i)$, com $f_{i\beta_1} \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$, para algum $i \in \{1, \dots, s\}$. Portanto, podemos escrever f em (2.36) como

$$f = \sum_{i=1}^s p_i S(u_i), \quad p_i \in \mathcal{P}_V(\Gamma),$$

como desejado. □

Corolário 2.4.2. *Nas condições do teorema anterior, o conjunto*

$$\{1, S(u_1), \dots, S(u_s)\}$$

gera $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ como um módulo sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.

Demonstração: Segue diretamente da decomposição (2.34) e do Teorema 2.4.1, uma vez que o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ é um módulo sobre si mesmo. □

Uma pergunta natural que surge na teoria invariante é se conseguimos, a partir de uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$, construir uma base de Hilbert para o anel menor $\mathcal{P}_V(\Gamma)$. A resposta é afirmativa e a construção desta base faz uso também dos operadores de Reynolds R e S .

Teorema 2.4.3. *Sejam Γ agindo linearmente em V e $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbf{Z}_2$ um epimorfismo como em (2.1), com kernel Γ_+ . Seja $\{u_1, \dots, u_s\}$ uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$. Então o conjunto*

$$\{R(u_i), S(u_i)S(u_j) : 1 \leq i, j \leq s\}$$

é uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.

Demonstração: Seguimos a mesma ideia da demonstração do Teorema 2.4.1. Seja $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma) \subset \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ e fixe $\delta \in \Gamma_-$ arbitrário. O conjunto $\{R(u_i), S(u_i) : i = 1, \dots, s\}$ é uma nova base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ e podemos escrever f como em (2.36). Como anteriormente, se $R(u_i) \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ e $S(u_i) \in \mathcal{Q}_V(\Gamma)$, para todo $1 \leq i \leq s$, então

$$f(\delta x) = \sum b_\beta (-1)^{\beta(1)} R(u_i)^{\beta_0}(x) S(u_i)^{\beta_1}(x), \quad \forall x \in V,$$

onde $\beta(1) = \beta_{11} + \dots + \beta_{1s}$. Uma vez que $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$, temos $f(\delta x) = f(x)$, para todo $x \in V$. Então,

$$\sum b_\beta ((-1)^{\beta(1)} - 1) R(u_i)^{\beta_0}(x) S(u_i)^{\beta_1}(x) = 0, \quad \forall x \in V,$$

de onde $b_\beta = 0$ ou $\beta(1)$ é par. Lembre-se que o produto de um número par de funções anti-invariantes é invariante (Observação 2.1.3). Portanto, de (2.36), os geradores de $\mathcal{P}_V(\Gamma)$, como anel, são dados por

$$R(u_1), \dots, R(u_s) \text{ e } S(u_1)^{\beta_{11}} \dots S(u_s)^{\beta_{1s}},$$

para $\beta_{11} + \dots + \beta_{1s} \equiv 0 \pmod{2}$. Em outras palavras

$$\{R(u_i), S(u_i)S(u_j) : 1 \leq i, j \leq s\}$$

gera $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ como anel. □

Com base no Teorema 2.4.1, apresentamos um algoritmo para a determinação de um conjunto de geradores para o módulo $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ da funções Γ -anti-invariantes sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$. Lembramos que os anéis $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ e $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ têm estrutura de \mathbb{R} -álgebras graduadas e que $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ é um módulo graduado sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$. Portanto podemos supor, sem perda de generalidade, que $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$, $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ e $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ são gerados por polinômios homogêneos.

Algoritmo 2.4.4. (Geradores para os anti-invariantes)

1. Considere Γ um grupo de Lie compacto;
2. Fixe um epimorfismo $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbf{Z}_2$ com kernel Γ_+ ;
3. Fixe uma antissimetria $\delta \in \Gamma_- = \Gamma \setminus \Gamma_+$;

4. Tome uma base de Hilbert homogênea $\{u_1, \dots, u_s\}$ para $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$;
5. Para $i \in \{1, \dots, s\}$, faça $\tilde{u}_i = S(u_i)$.

Resultado: Conjunto de geradores homogêneos $\{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_s\}$ para $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ como um módulo sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.

2.5 Algoritmo para o cálculo dos reversíveis-equivariantes

Como já mencionamos, as investigações em dinâmica reversível-equivariante começam com a forma geral do campo de vetores, ou seja, com a determinação dos geradores do módulo $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ das aplicações reversíveis-equivariantes sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$. Nesta seção, usamos a decomposição (2.35) para determinar um algoritmo que fornece tais geradores. Para isso, usamos a teoria invariante combinada com a teoria equivariante polinomial, especialmente aplicada ao grupo Γ_+ das simetrias de Γ .

O Teorema 1.2.11 nos garante a existência de um conjunto finito de geradores para $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$ sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$. No lema abaixo estendemos esse conjunto para um conjunto gerador de $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.

Lema 2.5.1. *Seja Γ agindo linearmente em V e fixe $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbf{Z}_2$ um epimorfismo como em (2.1). Seja $\{1, S(u_1), \dots, S(u_s)\}$ um conjunto de geradores para $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ como um módulo sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$, como no Corolário 2.4.2. Seja $\{H_0, \dots, H_r\}$ um conjunto de geradores para $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$ sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$. Denote $S(u_0) = 1$. Então,*

$$\{H_{ij} = S(u_i)H_j : 0 \leq i \leq s, 0 \leq j \leq r\}$$

é um conjunto de geradores para o módulo $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$ sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.

Demonstração: Seja $g \in \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$ qualquer. Então

$$g = \sum_{j=0}^r p_j H_j,$$

com $p_j \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ para todo $j = 0, \dots, r$. Como $\{S(u_0), \dots, S(u_s)\}$ gera $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ como um $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ -módulo, para cada $j \in \{0, \dots, r\}$, temos

$$p_j = \sum_{i=0}^s p_{ij} S(u_i),$$

com $p_{ij} \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$. Então

$$g = \sum_{j=0}^r p_j H_j = \sum_{j=0}^r \left(\sum_{i=0}^s p_{ij} S(u_i) \right) H_j = \sum_{i,j}^{s,r} p_{ij} (S(u_i) H_j),$$

como queríamos. □

Afirmamos agora o principal resultado deste capítulo:

Teorema 2.5.2. *Sejam Γ agindo linearmente em V e $\{H_{00}, \dots, H_{sr}\}$ um conjunto gerador do módulo $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$ sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ como no Lema 2.5.1. Considere o σ -operador de Reynolds \vec{S} definido em (2.29). Então,*

$$\{\vec{S}(H_{ij}) : 0 \leq i \leq s, 0 \leq j \leq r\}$$

é um conjunto gerador para o módulo $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.

Demonstração: Seja $g \in \vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ arbitrário. Como $g \in \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$ podemos escrever

$$g = \sum_{i,j}^{s,r} p_{ij} H_{ij}, \quad p_{ij} \in \mathcal{P}_V(\Gamma).$$

Pelo Corolário 2.3.2, $g = \vec{S}(g)$. Sendo \vec{S} um $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ -homomorfismo, segue que

$$g = \vec{S}(g) = \vec{S}\left(\sum_{i,j}^{s,r} p_{ij} H_{ij}\right) = \sum_{i,j}^{s,r} p_{ij} \vec{S}(H_{ij}),$$

com $p_{ij} \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$, para todo $0 \leq i \leq s$ e $0 \leq j \leq r$, como desejado. □

O próximo teorema, embora com uma demonstração análoga à feita acima, é um resultado original do presente trabalho. Por meio dele obtemos geradores para $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$ sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$, a partir de um conjunto gerador para $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$ como um $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ -módulo.

Teorema 2.5.3. *Sejam Γ agindo linearmente em V e $\{H_{00}, \dots, H_{sr}\}$ um conjunto gerador de $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$ sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ como no Lema 2.5.1. Considere o operador de Reynolds \vec{R} definido em (2.27). Então,*

$$\{\vec{R}(H_{ij}) : 0 \leq i \leq s, 0 \leq j \leq r\}$$

é um conjunto gerador para o módulo $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$ sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.

Demonstração: Escreva primeiramente $f \in \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma) \subset \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$ como

$$f = \sum_{i,j}^{s,r} p_{ij} H_{ij}, \quad p_{ij} \in \mathcal{P}_V(\Gamma).$$

Pelo Corolário 2.3.2 e sendo \vec{R} um $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ -homomorfismo, temos

$$f = \vec{R}(f) = \vec{R}\left(\sum_{i,j}^{s,r} p_{ij} H_{ij}\right) = \sum_{i,j}^{s,r} p_{ij} \vec{R}(H_{ij}),$$

com $p_{ij} \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$, para todo $0 \leq i \leq s$ e $0 \leq j \leq r$, como queríamos. \square

Finalizamos este capítulo com a descrição de um algoritmo para o cálculo de geradores do módulo $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ das aplicações Γ -reversíveis-equivariantes sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$. Lembramos que $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$, $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$ e $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ têm estrutura de módulos graduados sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$. Portanto, podemos supor que seus geradores são homogêneos.

Algoritmo 2.5.4. Geradores dos reversíveis-equivariantes:

1. Considere Γ um grupo de Lie compacto;
2. Fixe um epimorfismo $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbf{Z}_2$ com kernel Γ_+ ;
3. Fixe uma antissimetria $\delta \in \Gamma_- = \Gamma \setminus \Gamma_+$;
4. Tome uma base de Hilbert homogênea $\{u_1, \dots, u_s\}$ para $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$;
5. Para $i \in \{1, \dots, s\}$, faça $\tilde{u}_i = S(u_i)$, $\tilde{u}_0 := 1$;
6. Tome $\{H_0, \dots, H_r\}$ um conjunto gerador do módulo $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$ sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$;
7. Para $i \in \{1, \dots, s\}$ e $j \in \{0, \dots, r\}$, faça $H_{ij} = \tilde{u}_i H_j$;
8. Para $i \in \{1, \dots, s\}$ e $j \in \{0, \dots, r\}$, faça $\tilde{H}_{ij} = \overrightarrow{S}(H_{ij})$.

Resultado: Conjunto de geradores homogêneos $\{\tilde{H}_{ij} : 0 \leq i \leq s, 0 \leq j \leq r\}$ para $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ como um módulo sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.

FORMAS GERAIS REVERSÍVEIS-EQUIVARIANTES

Neste capítulo, determinamos a forma geral de aplicações reversíveis-equivariantes com respeito a uma representação linear de diferentes grupos de Lie compactos, utilizando o Algoritmo 2.5.4 na determinação de seus geradores. Os exemplos são baseados em [3], onde Baptistelli faz uma análise qualitativa do comportamento das trajetórias dos sistemas.

O capítulo é composto por 6 exemplos e em quatro deles ilustramos os campos de vetores, onde visualizamos geometricamente as simetrias e antissimetrias existentes. Todos os campos foram plotados utilizando o software Maple 8. Lembramos aqui que $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbf{Z}_2$ é um epimorfismo de grupos, com $\Gamma_+ = \ker \sigma$ sendo o grupo das simetrias de Γ e $\Gamma_- = \Gamma \setminus \Gamma_+$ o conjunto das antissimetrias.

3.1 Forma geral $\mathbf{O}(2)$ -reversível equivariante

Considere a ação padrão de $\Gamma = \mathbf{O}(2)$ em \mathbb{C} dada por

$$R_\theta z = e^{i\theta} z \quad \text{e} \quad \kappa z = \bar{z}, \quad \theta \in (0, 2\pi].$$

Pelo Algoritmo 2.5.4, temos:

2. Fixe um epimorfismo $\sigma : \mathbf{O}(2) \rightarrow \mathbf{Z}_2$, de modo que $\Gamma_+ = \mathbf{SO}(2)$.
3. Fixe $\delta = \kappa \in \Gamma_-$.
4. Do Exemplo 1.2.2, uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{SO}(2))$ é dada por

$$\{u_1(z) = z\bar{z}\}.$$

5. Cálculo do conjunto gerador para $\mathcal{Q}_{\mathbb{C}}(\mathbf{O}(2))$ sobre $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{O}(2))$:

$$\tilde{u}_1(z) = S(u_1)(z) = \frac{1}{2}(u_1(z) - u_1(\bar{z})) = 0.$$

Portanto, $\mathcal{Q}_{\mathbb{C}}(\mathbf{O}(2)) = \{0\}$.

6. Do Exemplo 1.2.9 um conjunto gerador para o módulo $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{SO}(2))$ sobre $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{SO}(2))$ é dado por $\{H_0, H_1\}$, onde

$$H_0(z) = z \quad \text{e} \quad H_1(z) = iz.$$

7. Cálculo dos geradores de $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{SO}(2))$ sobre $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{O}(2))$: defina $\tilde{u}_0(z) = 1$. Então,

$$H_{00}(z) = \tilde{u}_0(z)H_0(z) = z;$$

$$H_{01}(z) = \tilde{u}_0(z)H_1(z) = iz;$$

$$H_{10}(z) = \tilde{u}_1(z)H_0(z) = 0 = \tilde{u}_1(z)H_1(z) = H_{11}(z).$$

Portanto, $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{SO}(2)) = \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{O}(2))\{z\bar{z}, iz\}$.

8. Cálculo dos geradores do módulo $\vec{\mathcal{Q}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{O}(2))$ sobre $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{O}(2))$:

$$\tilde{H}_{00}(z) = \vec{S}(H_{00})(z) = \frac{1}{2}(H_{00}(z) - \delta^{-1}H_{00}(\delta z)) = 0;$$

$$\tilde{H}_{01}(z) = \vec{S}(H_{01})(z) = \frac{1}{2}(H_{01}(z) - \delta^{-1}H_{01}(\delta z)) = iz.$$

$$\tilde{H}_{10}(z) = \tilde{H}_{11}(z) = 0.$$

Concluimos então que $\vec{\mathcal{Q}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{O}(2)) = \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{O}(2))\{iz\}$. Temos ainda,

$$R(u_1)(z) = \frac{1}{2}(u_1(z) + u_1(\delta z)) = z\bar{z}.$$

Pelo Teorema 2.4.3, uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{O}(2))$ é dada por $\{\bar{u}(z) = z\bar{z}\}$.

Logo, se $g \in \vec{\mathcal{Q}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{O}(2))$, então

$$g(z) = h(z\bar{z})iz,$$

onde $h(z\bar{z}) \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{O}(2))$.

Pelo Teorema 2.5.3, temos ainda que

$$\vec{R}(H_{00})(z) = \frac{1}{2}(H_{00}(z) + \delta^{-1}H_{00}(\delta z)) = z \quad \text{e}$$

$$\vec{R}(H_{01})(z) = \frac{1}{2}(H_{01}(z) + \delta^{-1}H_{01}(\delta z)) = 0$$

geram o módulo $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{O}(2))$ sobre $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{O}(2))$, confirmando o item 3 do Exemplo 1.2.9.

Observação 3.1.1. Note que os únicos subgrupos de $\mathbf{O}(2)$ são $\mathbf{SO}(2)$, \mathbf{D}_n e \mathbf{Z}_n , com $n \geq 2$. Dentre tais subgrupos, o único com índice 2 em $\mathbf{O}(2)$ é $\mathbf{SO}(2)$. Portanto não podemos definir um epimorfismo $\sigma : \mathbf{O}(2) \rightarrow \mathbf{Z}_2$ com Γ_+ diferente de $\mathbf{SO}(2)$. Em outras palavras, não existem campos vetoriais $\mathbf{O}(2)$ -reversíveis-equivariantes com R_θ agindo como antissimetria.

Observamos também que este é um exemplo em que a representação de $\mathbf{O}(2)$ em \mathbb{C} é auto-dual. Com efeito,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é a matriz de um isomorfismo $\mathbf{O}(2)$ -reversível-equivariante.

3.2 Forma geral \mathbf{Z}_n -reversível-equivariante

Considere a ação padrão de \mathbf{Z}_n em \mathbb{C} gerada por

$$\phi z = R_{\frac{2\pi}{n}} z.$$

Precisamos da existência de um epimorfismo $\sigma : \mathbf{Z}_n \rightarrow \mathbf{Z}_2$ para obter a forma geral \mathbf{Z}_n -reversível-equivariante. Tal existência só é garantida quando n é par, pois $|\mathbf{Z}_n| = 2|\ker \sigma|$. Neste caso, $\Gamma_+ = \ker \sigma = \mathbf{Z}_{\frac{n}{2}}$. Esta restrição implica que não existem campos vetoriais \mathbf{Z}_n -reversíveis-equivariantes se n for ímpar. Suponhamos, então, n par, para aplicar o Algoritmo 2.5.4. Temos:

2. Fixe o epimorfismo $\sigma : \mathbf{Z}_n \rightarrow \mathbf{Z}_2$ tal que $\Gamma_+ = \mathbf{Z}_{\frac{n}{2}}$.
3. Tome $\delta = R_{\frac{2\pi}{n}} \in \Gamma_-$.
4. Do Exemplo 1.2.2, uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_{\frac{n}{2}})$ é dada por

$$\{u_1(z) = z\bar{z}, u_2(z) = z^{\frac{n}{2}} + \bar{z}^{\frac{n}{2}}, u_3(z) = i(z^{\frac{n}{2}} - \bar{z}^{\frac{n}{2}})\}.$$

5. Cálculo do conjunto gerador para $\mathcal{Q}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n)$ sobre $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n)$:

$$\tilde{u}_1(z) = S(u_1)(z) = 0;$$

$$\tilde{u}_2(z) = S(u_2)(z) = z^{\frac{n}{2}} + \bar{z}^{\frac{n}{2}};$$

$$\tilde{u}_3(z) = S(u_3)(z) = i(z^{\frac{n}{2}} - \bar{z}^{\frac{n}{2}}).$$

Portanto, $\mathcal{Q}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n) = \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n)\{z^{\frac{n}{2}} + \bar{z}^{\frac{n}{2}}, i(z^{\frac{n}{2}} - \bar{z}^{\frac{n}{2}})\}$.

6. Do Exemplo 1.2.9, o conjunto

$$\{H_0(z) = z, H_1(z) = \bar{z}^{\frac{n}{2}-1}, H_2(z) = iz, H_3(z) = i\bar{z}^{\frac{n}{2}-1}\}$$

gera $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_{\frac{n}{2}})$ sobre o anel $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_{\frac{n}{2}})$.

7. Cálculo dos geradores de $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_{\frac{n}{2}})$ sobre o anel $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n)$: defina $\tilde{u}_0(z) = 1$. Então,

$$\begin{aligned} H_{00}(z) &= \tilde{u}_0(z)H_0(z) = z; \\ H_{01}(z) &= \tilde{u}_0(z)H_1(z) = \bar{z}^{\frac{n}{2}-1}; \\ H_{02}(z) &= \tilde{u}_0(z)H_2(z) = iz; \\ H_{03}(z) &= \tilde{u}_0(z)H_3(z) = i\bar{z}^{\frac{n}{2}-1}; \\ H_{10}(z) &= H_{11}(z) = H_{12}(z) = H_{13}(z) = 0; \\ H_{20}(z) &= \tilde{u}_2(z)H_0(z) = (z^{\frac{n}{2}} + \bar{z}^{\frac{n}{2}})z = z^{\frac{n}{2}+1} + (z\bar{z})\bar{z}^{\frac{n}{2}-1}; \\ H_{21}(z) &= \tilde{u}_2(z)H_1(z) = (z^{\frac{n}{2}} + \bar{z}^{\frac{n}{2}})\bar{z}^{\frac{n}{2}-1} = (z\bar{z})^{\frac{n}{2}-1}z + \bar{z}^{n-1}; \\ H_{22}(z) &= \tilde{u}_2(z)H_2(z) = (z^{\frac{n}{2}} + \bar{z}^{\frac{n}{2}})iz = iz^{\frac{n}{2}+1} + (z\bar{z})i\bar{z}^{\frac{n}{2}-1}; \\ H_{23}(z) &= \tilde{u}_2(z)H_3(z) = (z^{\frac{n}{2}} + \bar{z}^{\frac{n}{2}})i\bar{z}^{\frac{n}{2}-1} = (z\bar{z})^{\frac{n}{2}-1}iz + i\bar{z}^{n-1}; \\ H_{30}(z) &= \tilde{u}_3(z)H_0(z) = i(z^{\frac{n}{2}} - \bar{z}^{\frac{n}{2}})z = iz^{\frac{n}{2}+1} - (z\bar{z})i\bar{z}^{\frac{n}{2}-1}; \\ H_{31}(z) &= \tilde{u}_3(z)H_1(z) = i(z^{\frac{n}{2}} - \bar{z}^{\frac{n}{2}})\bar{z}^{\frac{n}{2}-1} = iz(z\bar{z})^{\frac{n}{2}-1} - i\bar{z}^{n-1}; \\ H_{32}(z) &= \tilde{u}_3(z)H_2(z) = i(z^{\frac{n}{2}} - \bar{z}^{\frac{n}{2}})iz = -z^{\frac{n}{2}+1} + (z\bar{z})\bar{z}^{\frac{n}{2}-1}; \\ H_{33}(z) &= \tilde{u}_3(z)H_3(z) = i(z^{\frac{n}{2}} - \bar{z}^{\frac{n}{2}})i\bar{z}^{\frac{n}{2}-1} = -z(z\bar{z})^{\frac{n}{2}-1} + \bar{z}^{n-1}. \end{aligned}$$

Portanto, $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_{\frac{n}{2}}) = \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n)\{z, iz, \bar{z}^{\frac{n}{2}-1}, i\bar{z}^{\frac{n}{2}-1}, z^{\frac{n}{2}+1}, iz^{\frac{n}{2}+1}, \bar{z}^{n-1}, i\bar{z}^{n-1}\}$.

8. Cálculo dos geradores do módulo $\vec{\mathcal{Q}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n)$ sobre $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n)$: observe que δ^{-1} é a rotação $R_{\frac{2(n-1)\pi}{n}}$. Daí,

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{00}(z) &= \tilde{H}_{02}(z) = \tilde{H}_{10}(z) = \tilde{H}_{11}(z) = \tilde{H}_{12}(z) = 0; \\ \tilde{H}_{13}(z) &= \tilde{H}_{21}(z) = \tilde{H}_{23}(z) = \tilde{H}_{31}(z) = \tilde{H}_{33}(z) = 0; \\ \tilde{H}_{01}(z) &= \vec{S}(H_{01})(z) = \bar{z}^{\frac{n}{2}-1}; \\ \tilde{H}_{03}(z) &= \vec{S}(H_{03})(z) = i\bar{z}^{\frac{n}{2}-1}; \\ \tilde{H}_{20}(z) &= \vec{S}(H_{20})(z) = z^{\frac{n}{2}+1} + (z\bar{z})\bar{z}^{\frac{n}{2}-1}; \\ \tilde{H}_{22}(z) &= \vec{S}(H_{22})(z) = iz^{\frac{n}{2}+1} + (z\bar{z})i\bar{z}^{\frac{n}{2}-1}; \\ \tilde{H}_{30}(z) &= \vec{S}(H_{30})(z) = iz^{\frac{n}{2}+1} - (z\bar{z})i\bar{z}^{\frac{n}{2}-1}; \end{aligned}$$

$$\tilde{H}_{32}(z) = \vec{S}(H_{32})(z) = -z^{\frac{n}{2}+1} + (z\bar{z})\bar{z}^{\frac{n}{2}-1}.$$

Portanto, $\vec{\mathcal{Q}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n) = \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n)\{z^{\frac{n}{2}+1}, \bar{z}^{\frac{n}{2}-1}, iz^{\frac{n}{2}+1}, i\bar{z}^{\frac{n}{2}-1}\}$. Em outras palavras, se $g \in \vec{\mathcal{Q}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n)$ então g se escreve como

$$g(z) = p_1(z)z^{\frac{n}{2}+1} + p_2(z)\bar{z}^{\frac{n}{2}-1} + p_3(z)iz^{\frac{n}{2}+1} + p_4(z)i\bar{z}^{\frac{n}{2}-1}, \quad (3.1)$$

com $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n)$.

Observamos que a presente representação de \mathbf{Z}_n em \mathbb{C} é não auto-dual para todo $n \neq 4$, pois nestes casos o traço da antissimetria $R_{\frac{2\pi}{n}}$ é não nulo (Proposição 2.2.16). Para ilustrar geometricamente campos vetoriais que são \mathbf{Z}_n -reversíveis-equivariantes, consideramos os dois seguintes exemplos:

3.2.1 Forma geral \mathbf{Z}_2 -reversível-equivariante

Em particular, um campo geral \mathbf{Z}_2 -reversível-equivariante é dado por

$$g(z) = p_1(z)z^2 + p_2(z) + p_3(z)iz^2 + p_4(z)i, \quad (3.2)$$

com $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_2)$. Considere o campo obtido de (3.2) tomando-se as funções \mathbf{Z}_2 -invariantes $p_1 \equiv p_3 \equiv 0$, $p_2(z) = z\bar{z}$ e $p_4(z) = i(z^2 - \bar{z}^2)$, ou seja, $g(z) = z\bar{z} - z^2 + \bar{z}^2$. Em coordenadas reais, temos

$$g(x, y) = (x^2 + 3y^2, -4xy).$$

A dinâmica deste campo de vetores é dada na Figura 3.1. Vemos claramente que a rotação de ângulo π inverte o sentido das setas do campo, isto é, ela é uma antissimetria.

3.2.2 Forma geral \mathbf{Z}_4 -reversível-equivariante

De (3.1), a forma geral de um campo geral \mathbf{Z}_4 -reversível-equivariante é dada por

$$g(z) = p_1(z)z^3 + p_2(z)\bar{z} + p_3(z)iz^3 + p_4(z)i\bar{z},$$

com $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_4)$. Considere o caso particular onde $p_1 \equiv p_2 \equiv 0$ e $p_3(z) = p_4(z) = 1$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Assim $g(z) = iz^3 + i\bar{z}$. Em coordenadas reais temos

$$g(x, y) = (y - 3x^2y + y^3, x + x^3 - 3xy^2).$$

Neste caso as rotações de ângulo $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ caracterizam antissimetrias, enquanto que a rotação de ângulo π caracteriza uma simetria, como podemos ver na Figura 3.2. Observamos também que esta representação de \mathbf{Z}_4 em \mathbb{C} é auto-dual. De fato,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

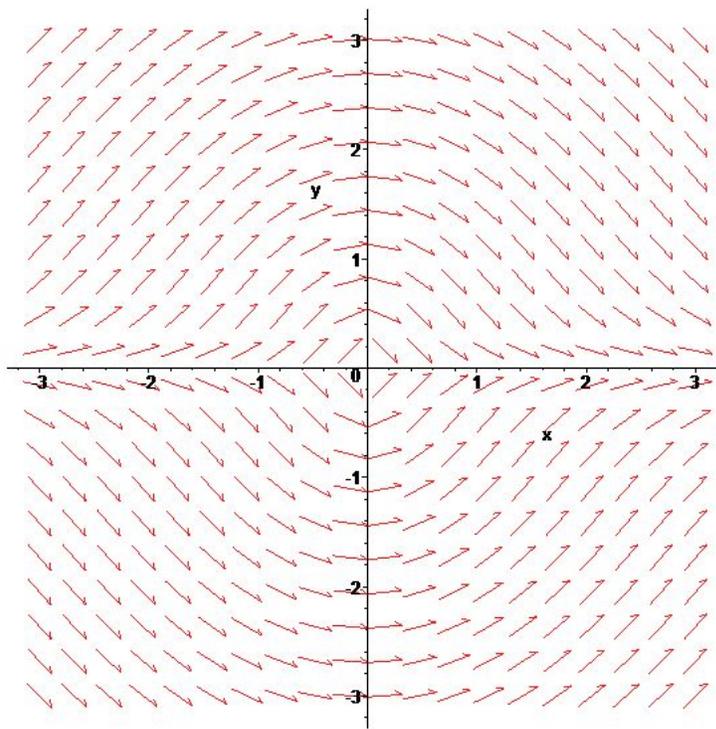


Figura 3.1: Campo vetorial \mathbf{Z}_2 -reversível-equivariante

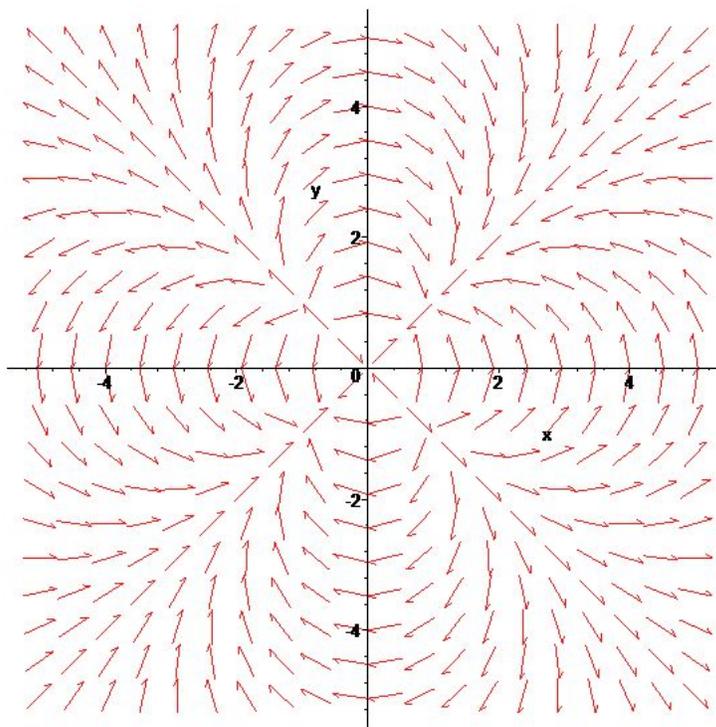


Figura 3.2: Campo vetorial \mathbf{Z}_4 -reversível-equivariante

é a matriz de um isomorfismo \mathbf{Z}_4 -reversível-equivariante.

Consideramos nas Seções 3.3 e 3.4 campos vetoriais reversíveis-equivariantes sob uma representação de \mathbf{D}_n em \mathbb{C} . Este caso apresenta distinção quanto a paridade de n . Com efeito, quando n é ímpar, não podemos tomar como antissimetria uma rotação, pois $(R_{\frac{2\pi k}{n}})^n = \text{Id}$, para todo $k = 1, \dots, n-1$, contradizendo o fato de que o produto de um número ímpar de antissimetrias é uma antissimetria. Sendo assim, as rotações devem ser todas simetrias. Neste caso, podemos tomar como antissimetria a reflexão κ dada em (1.3) ou qualquer reflexão da forma $\kappa R_{\frac{2m\pi}{n}}$, com $m = 1, \dots, n-1$.

Quando n é par, tanto as rotações quanto as reflexões podem ser antissimetrias. Calculamos na Seção 3.3 a forma geral \mathbf{D}_n -reversível-equivariante para n par, fixando $R_{\frac{2\pi}{n}}$ como antissimetria. Na Seção 3.4, obtemos a forma geral de campos de vetores \mathbf{D}_n -reversíveis-equivariantes, tomando a reflexão κ como antissimetria. Neste caso a paridade de n não interfere e \mathbf{D}_n é denotado por $\mathbf{D}_n(\kappa)$.

3.3 Forma geral \mathbf{D}_n -reversível-equivariante

Considere n par e a ação de $\Gamma = \mathbf{D}_n$ em \mathbb{C} gerada por

$$\phi z = e^{\frac{2\pi i}{n}} z \quad \text{e} \quad \kappa z = \bar{z}. \quad (3.4)$$

Como usual, faremos a sequência do Algoritmo 2.5.4.

2. Fixe um epimorfismo $\sigma : \mathbf{D}_n \rightarrow \mathbf{Z}_2$ de modo que $\Gamma_+ = \mathbf{D}_{\frac{n}{2}}$.
3. Tome $\delta = R_{\frac{2\pi}{n}} \in \Gamma_-$.
4. Do Exemplo 1.2.2, uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_{\frac{n}{2}})$ é dada por

$$\{u_1(z) = z\bar{z}, u_2(z) = z^{\frac{n}{2}} + \bar{z}^{\frac{n}{2}}\}.$$

5. Cálculo do conjunto gerador de $\mathcal{Q}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n)$ sobre $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n)$:

$$\tilde{u}_1(z) = S(u_1)(z) = 0;$$

$$\tilde{u}_2(z) = S(u_2)(z) = z^{\frac{n}{2}} + \bar{z}^{\frac{n}{2}}.$$

Portanto, $\mathcal{Q}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n) = \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n)\{z^{\frac{n}{2}} + \bar{z}^{\frac{n}{2}}\}$.

6. Do Exemplo 1.2.9, o conjunto

$$\{H_0(z) = z, H_1(z) = \bar{z}^{\frac{n}{2}-1}\}$$

gera $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_{\frac{n}{2}})$ sobre o anel $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_{\frac{n}{2}})$.

7. Cálculo dos geradores de $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_{\frac{n}{2}})$ sobre o anel $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n)$: defina $\tilde{u}_0(z) = 1$. Então,

$$\begin{aligned} H_{00}(z) &= \tilde{u}_0(z)H_0(z) = z; \\ H_{01}(z) &= \tilde{u}_0(z)H_1(z) = \bar{z}^{\frac{n}{2}-1}; \\ H_{10}(z) &= \tilde{u}_1(z)H_0(z) = H_{11}(z) = \tilde{u}_1H_1(z) = 0; \\ H_{20}(z) &= \tilde{u}_2(z)H_0(z) = (z^{\frac{n}{2}} + \bar{z}^{\frac{n}{2}})z = z^{\frac{n}{2}+1} + (z\bar{z})\bar{z}^{\frac{n}{2}-1}; \\ H_{21}(z) &= \tilde{u}_2(z)H_1(z) = (z^{\frac{n}{2}} + \bar{z}^{\frac{n}{2}})\bar{z}^{\frac{n}{2}-1} = (z\bar{z})^{\frac{n}{2}-1}z + \bar{z}^{n-1}. \end{aligned}$$

Portanto, $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_{\frac{n}{2}}) = \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n)\{z, \bar{z}^{\frac{n}{2}-1}, z^{\frac{n}{2}+1}, \bar{z}^{n-1}\}$.

8. Cálculo dos geradores do módulo $\vec{\mathcal{Q}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n)$ sobre $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n)$:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{00}(z) &= \tilde{H}_{10}(z) = \tilde{H}_{11}(z) = \tilde{H}_{21}(z) = 0; \\ \tilde{H}_{01}(z) &= \vec{S}(H_{01})(z) = \bar{z}^{\frac{n}{2}-1}; \\ \tilde{H}_{20}(z) &= \vec{S}(H_{20})(z) = z^{\frac{n}{2}+1} + (z\bar{z})\bar{z}^{\frac{n}{2}-1}. \end{aligned}$$

Portanto, $\vec{\mathcal{Q}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n) = \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n)\{z^{\frac{n}{2}+1}, \bar{z}^{\frac{n}{2}-1}\}$.

Em outras palavras, todo campo vetorial \mathbf{D}_n -reversível-equivariante é da forma

$$g(z) = p_1(z)z^{\frac{n}{2}+1} + p_2(z)\bar{z}^{\frac{n}{2}-1}, \quad (3.5)$$

com $p_1, p_2 \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n)$. Assim como ocorre com a representação de \mathbf{Z}_n em \mathbb{C} , a presente representação de \mathbf{D}_n em \mathbb{C} , que tem a rotação $R_{\frac{2\pi}{n}}$ agindo como uma antissimetria, é não auto-dual para todo $n \neq 4$. De fato, estes são os casos em que $\text{tr}(R_{\frac{2\pi}{n}}) \neq 0$ (Proposição 2.2.16). Para $n = 4$, a representação de \mathbf{D}_4 com antissimetria $R_{\frac{\pi}{2}}$ é auto-dual, sendo L dada em (3.3) também uma matriz de um isomorfismo \mathbf{D}_4 -reversível-equivariante.

Ilustramos abaixo o caso particular $n = 6$:

3.3.1 Forma geral \mathbf{D}_6 -reversível-equivariante

Por (3.5) todo campo vetorial \mathbf{D}_6 -reversível-equivariante tem a forma

$$g(z) = p_1(z)z^4 + p_2(z)\bar{z}^2,$$

com $p_1, p_2 \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_6)$. A Figura 3.3 ilustra o caso particular em que $g(z) = z^5\bar{z} - \bar{z}^2$, obtido tomando-se $p_1(z) = z\bar{z}$ e $p_2(z) = 1$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Em coordenadas reais, g toma a forma

$$g(x, y) = (x^6 - 5x^4y^2 - 5x^2y^4 + y^6 + x^2 - y^2, 4x^5y - 4xy^5 - 2xy).$$

Na Figura 3.3 observamos claramente que a rotação de ângulo $\frac{\pi}{3}$ é uma antissimetria e a reflexão com relação ao eixo x é uma simetria do campo.

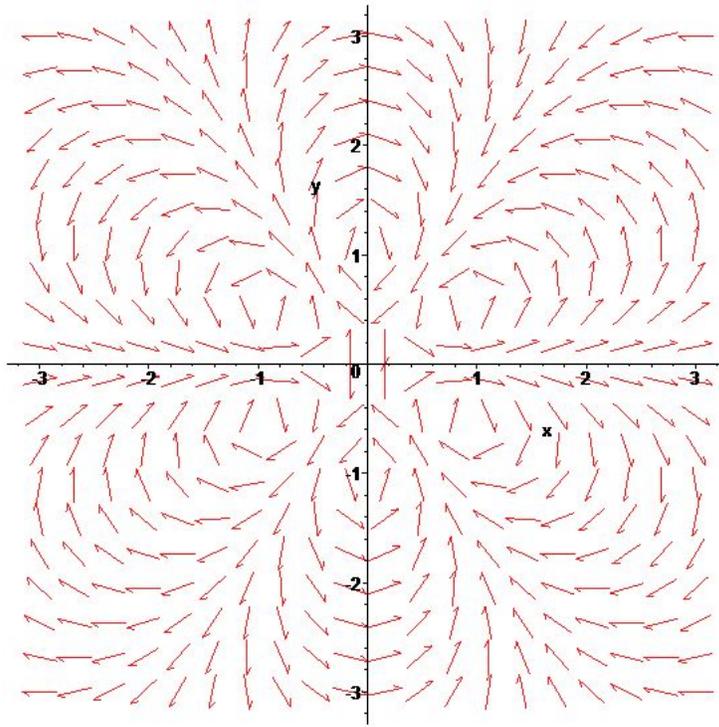


Figura 3.3: Campo vetorial \mathbf{D}_6 -reversível-equivariante

3.4 Forma geral $\mathbf{D}_n(\kappa)$ -reversível-equivariante

Considere a ação de $\Gamma = \mathbf{D}_n(\kappa)$ em \mathbb{C} como em (3.4). Fixe um epimorfismo $\sigma : \mathbf{D}_n(\kappa) \rightarrow \mathbf{Z}_2$ de modo que $\Gamma_+ = \mathbf{Z}_n$, ou seja, a reflexão κ precisa agir como uma antissimetria. Dos passos 3 à 8 do Algoritmo 2.5.4, temos:

3. Fixe $\delta = \kappa \in \Gamma_-$.

4. Do Exemplo 1.2.2, uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n)$ é dada por

$$\{u_1(z) = z\bar{z}, u_2(z) = z^n + \bar{z}^n, u_3(z) = i(z^n - \bar{z}^n)\}.$$

5. Cálculo do conjunto gerador para $\mathcal{Q}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n(\kappa))$ como módulo sobre $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n(\kappa))$:

$$\tilde{u}_1(z) = S(u_1)(z) = 0;$$

$$\tilde{u}_2(z) = S(u_2)(z) = 0;$$

$$\tilde{u}_3(z) = S(u_3)(z) = i(z^n - \bar{z}^n).$$

Portanto, $\mathcal{Q}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n(\kappa)) = \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n(\kappa))\{i(z^n - \bar{z}^n)\}$.

6. Do Exemplo 1.2.9, o conjunto

$$\{H_0(z) = z, H_1(z) = \bar{z}^{n-1}, H_2(z) = iz, H_3(z) = i\bar{z}^{n-1}\}$$

gera $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n)$ sobre o anel $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n)$.

7. Cálculo dos geradores de $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n)$ sobre o anel $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n(\kappa))$: defina $\tilde{u}_0(z) = 1$. Então,

$$\begin{aligned} H_{00}(z) &= \tilde{u}_0(z)H_0(z) = z; \\ H_{01}(z) &= \tilde{u}_0(z)H_1(z) = \bar{z}^{n-1}; \\ H_{02}(z) &= \tilde{u}_0(z)H_2(z) = iz; \\ H_{03}(z) &= \tilde{u}_0(z)H_3(z) = i\bar{z}^{n-1}; \\ H_{10}(z) &= H_{11}(z) = H_{12}(z) = H_{13}(z) = 0; \\ H_{20}(z) &= H_{21}(z) = H_{22}(z) = H_{23}(z) = 0; \\ H_{30}(z) &= \tilde{u}_3(z)H_0(z) = iz^{n+1} - (z\bar{z})i\bar{z}^{n-1}; \\ H_{31}(z) &= \tilde{u}_3(z)H_1(z) = (z\bar{z})^{n-1}iz - i\bar{z}^{2n-1}; \\ H_{32}(z) &= \tilde{u}_3(z)H_2(z) = -z^{n+1} + (z\bar{z})\bar{z}^{n-1}; \\ H_{33}(z) &= \tilde{u}_3(z)H_3(z) = -(z\bar{z})^{n-1}z + \bar{z}^{2n-1}. \end{aligned}$$

Como $z\bar{z}$ é um $\mathbf{D}_n(\kappa)$ -invariante, temos que

$$\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{Z}_n) = \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n(\kappa))\{z, iz, \bar{z}^{n-1}, i\bar{z}^{n-1}, z^{n+1}, iz^{n+1}, \bar{z}^{2n-1}, i\bar{z}^{2n-1}\}.$$

8. Cálculo dos geradores do módulo $\vec{\mathcal{Q}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n(\kappa))$ sobre $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n)$:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{00}(z) &= \tilde{H}_{01}(z) = \tilde{H}_{32}(z) = \tilde{H}_{33}(z) = 0; \\ \tilde{H}_{02}(z) &= \vec{S}(H_{02})(z) = iz; \\ \tilde{H}_{03}(z) &= \vec{S}(H_{03})(z) = i\bar{z}^{n-1}; \\ \tilde{H}_{30}(z) &= \vec{S}(H_{30})(z) = iz^{n+1}; \\ \tilde{H}_{31}(z) &= \vec{S}(H_{31})(z) = i\bar{z}^{2n-1}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$iz^{n+1} = (z^n + \bar{z}^n)iz - (z\bar{z})i\bar{z}^{n-1} \quad \text{e} \quad i\bar{z}^{2n-1} = (z^n + \bar{z}^n)i\bar{z}^{n-1} - (z\bar{z})^{n-1}iz.$$

Como $z\bar{z}$ e $z^n + \bar{z}^n$ são $\mathbf{D}_n(\kappa)$ -invariantes, temos $\vec{\mathcal{Q}}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n(\kappa)) = \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n)\{iz, i\bar{z}^{n-1}\}$.

Em outras palavras, se g é um campo vetorial $\mathbf{D}_n(\kappa)$ -reversível-equivariante, então g se escreve como

$$g(z) = p(z)iz + q(z)i\bar{z}^{n-1},$$

onde $p, q \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(\mathbf{D}_n(\kappa))$.

Observamos que este é um exemplo em que a representação de \mathbf{D}_n em \mathbb{C} é auto-dual. A matriz de um isomorfismo $\mathbf{D}_n(\kappa)$ -reversível-equivariante é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Ilustramos abaixo o caso particular em que $n = 3$.

3.4.1 Forma geral $\mathbf{D}_3(\kappa)$ -reversível-equivariante

Considere o campo vetorial $\mathbf{D}_3(\kappa)$ -reversível-equivariante da forma

$$g(z) = p_1(z)iz + p_2(z)i\bar{z}^2,$$

com $p_1(z) = z\bar{z}$ e $p_2(z) = 1$ invariantes sob $\mathbf{D}_3(\kappa)$. Então, $g(z) = i\bar{z}z^2 + i\bar{z}^2$, que torna-se

$$g(x, y) = (-x^2y - y^3 + 2xy, x^3 + x^2 - y^2 + xy^2).$$

Neste caso, as rotações de ângulo $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ são simetrias e a reflexão com relação ao eixo x é uma antissimetria, como podemos observar na Figura 3.4.

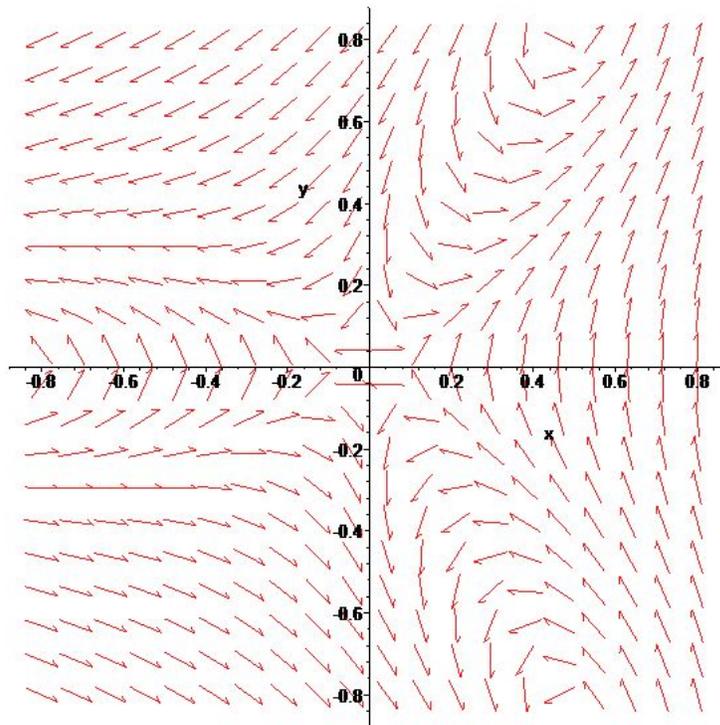


Figura 3.4: Campo vetorial $\mathbf{D}_3(\kappa)$ -reversível-equivariante

3.5 Forma geral \mathbf{S}_n -reversível-equivariante

Considere a ação do grupo $\Gamma = \mathbf{S}_n$ em \mathbb{R}^n dada por

$$\tau(x_1, \dots, x_n) = (x_{\tau^{-1}(1)}, \dots, x_{\tau^{-1}(n)}), \quad \forall \tau \in \mathbf{S}_n. \quad (3.7)$$

Lembremos que uma permutação $\tau \in \mathbf{S}_n$ é chamada de r -ciclo se existem elementos distintos $a_1, \dots, a_r \in \{1, \dots, n\}$ tais que $\tau(a_1) = a_2, \tau(a_2) = a_3, \dots, \tau(a_{r-1}) = a_r, \tau(a_r) = a_1$

e $\tau(a_j) = a_j$ para todo $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a_1, \dots, a_r\}$. Um r -ciclo é denotado por $(a_1 \dots a_r)$. Se $\tau = (a_1 a_j)$, τ é chamado de transposição. Ainda, uma permutação $\tau \in \mathbf{S}$ é chamada par (ímpar) se ela pode ser escrita como um número par (ímpar) de transposições.

Seja $A_n \subset \mathbf{S}_n$ o conjunto formado por todas as permutações pares. A_n é chamado de subgrupo alternado de \mathbf{S}_n . Defina o epimorfismo de grupos $\sigma : \mathbf{S}_n \rightarrow \mathbf{Z}_2$ de modo que $\sigma(\tau) = 1$, se τ é par e $\sigma(\tau) = -1$, se τ é ímpar. Então, $A_n = \ker \sigma$ é um subgrupo normal de \mathbf{S}_n de índice 2. Em [14], Garcia mostra que para $n \geq 3$, A_n é o único subgrupo de \mathbf{S}_n de índice 2. Concluimos assim que o epimorfismo σ definido acima é único e que o grupo de simetrias de \mathbf{S}_n , $n \geq 3$, é o grupo alternado A_n .

Vejamos um exemplo para $n = 2$.

3.5.1 Forma geral \mathbf{S}_2 -reversível-equivariante

Considere $\Gamma = \mathbf{S}_2 = \{(1), (12)\}$ agindo em \mathbb{R}^2 como em (3.7). No plano, $\delta = (12)$ representa a reflexão em torno da reta $y = x$, ou seja, tem a representação matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando o Algoritmo 2.5.4 temos:

2. Seja $\sigma : \mathbf{S}_2 \rightarrow \mathbf{Z}_2$ o epimorfismo definido de modo que $\Gamma_+ = A_2 = \{\text{Id}\}$.
3. Fixe $\delta = (12) \in \Gamma_-$.
4. Uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\{\text{Id}\})$ é dada por

$$\{u_1(x, y) = x, u_2(x, y) = y\}.$$

5. Cálculo do conjunto gerador para $\mathcal{Q}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S}_2)$ como módulo sobre $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S}_2)$:

$$\tilde{u}_1(x, y) = S(u_1)(x, y) = \frac{1}{2}(x - y);$$

$$\tilde{u}_2(x, y) = S(u_2)(x, y) = -\frac{1}{2}(x - y).$$

Portanto, $\mathcal{Q}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S}_2) = \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S}_2)\{x - y\}$.

6. O conjunto

$$\{H_0(x, y) = (1, 0), H_1(x, y) = (0, 1)\}$$

gera $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{R}^2}(\{\text{Id}\})$ sobre o anel $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\{\text{Id}\})$. De fato, se $g \in \vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{R}^2}(\{\text{Id}\})$, então

$$g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y)) = g_1(x, y)(1, 0) + g_2(x, y)(0, 1),$$

onde $g_1, g_2 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\{\text{Id}\})$.

7. Cálculo dos geradores de $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{R}^2}(\{\text{Id}\})$ sobre o anel $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S}_2)$: defina $\tilde{u}_0(x, y) = 1$. Então,

$$H_{00}(x, y) = \tilde{u}_0(x, y)H_0(x, y) = (1, 0);$$

$$H_{01}(x, y) = \tilde{u}_0(x, y)H_1(x, y) = (0, 1);$$

$$H_{10}(x, y) = \tilde{u}_1(x, y)H_0(x, y) = (x - y, 0);$$

$$H_{11}(x, y) = \tilde{u}_1(x, y)H_1(x, y) = (0, x - y).$$

Portanto, $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{R}^2}(\{\text{Id}\}) = \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S}_2)\{(1, 0), (0, 1), (x - y, 0), (0, x - y)\}$.

8. Cálculo dos geradores do módulo $\vec{\mathcal{Q}}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S}_2)$ sobre $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S}_2)$:

$$\tilde{H}_{00}(x, y) = \vec{S}(H_{00})(x, y) = \frac{1}{2}(1, -1);$$

$$\tilde{H}_{01}(x, y) = \vec{S}(H_{01})(x, y) = \frac{1}{2}(-1, 1);$$

$$\tilde{H}_{10}(x, y) = \vec{S}(H_{10})(x, y) = (x - y, x - y);$$

$$\tilde{H}_{11}(x, y) = \vec{S}(H_{11})(x, y) = (-x + y, -x + y).$$

Portanto, $\vec{\mathcal{Q}}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S}_2) = \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S}_2)\{(1, -1), (x - y, x - y)\}$.

Em outras palavras, se g é um campo vetorial \mathbf{S}_2 -reversível-equivariante, então g se escreve como

$$g(x, y) = p(x, y)(1, -1) + q(x, y)(x - y, x - y), \quad (3.8)$$

com $p, q \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S}_2)$.

Além disso, como $R(u_1)(x, y) = R(u_2)(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)$, pelo Teorema 2.4.3, temos $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S}_2) = \langle x + y, (x - y)^2 \rangle$. Ainda,

$$\vec{R}(H_{00})(x, y) = \frac{1}{2}(1, 1);$$

$$\vec{R}(H_{01})(x, y) = \frac{1}{2}(1, 1);$$

$$\vec{R}(H_{10})(x, y) = \frac{1}{2}(x - y, y - x);$$

$$\vec{R}(H_{11})(x, y) = \frac{1}{2}(y - x, x - y).$$

Pelo Teorema 2.5.3, segue que o conjunto $\{(1, 1), (x - y, y - x)\}$ gera o módulo $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S}_2)$ sobre $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{S}_2)$.

Neste exemplo a representação de \mathbf{S}_2 em \mathbb{R}^2 é auto-dual. De fato, a matriz dada em (3.6) é a matriz de um isomorfismo \mathbf{S}_2 -reversível-equivariante.

Para ilustrar, considere o campo \mathbf{S}_2 -reversível-equivariante dado por

$$g(x, y) = (2x, -2y),$$

obtido de (3.8) tomando-se $p(x, y) = x + y$ e $q(x, y) = 1$. A dinâmica deste campo é dada na Figura 3.5. Neste caso, a única antissimetria é caracterizada pela reflexão em torno da reta $y = x$.

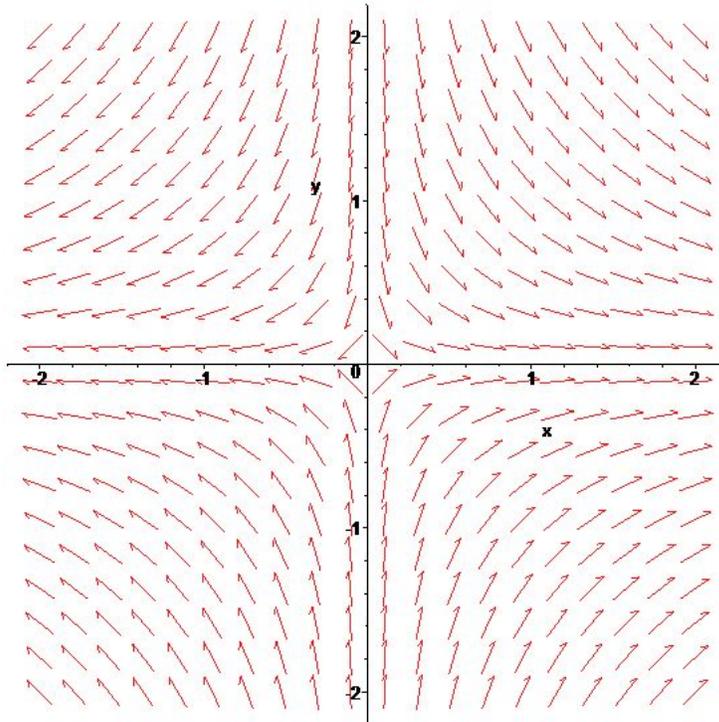


Figura 3.5: Campo vetorial \mathbf{S}_2 -reversível-equivariante

3.6 Forma geral $(\mathbf{D}_6 \dot{+} \mathbf{T}^2) \oplus \mathbf{Z}_2$ -reversível-equivariante

Considere $\Gamma = (\mathbf{D}_6 \dot{+} \mathbf{T}^2) \oplus \mathbf{Z}_2$, onde $\mathbf{T}^2 \simeq \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ e $\dot{+}$ denota o produto semi-direto. Observe que \mathbf{D}_6 é gerado pelo grupo de permutações \mathbf{S}_3 juntamente com a reflexão κ , uma vez que $\mathbf{D}_3 \simeq \mathbf{S}_3$.

Definimos a ação de Γ em \mathbb{C}^3 como segue: para todo $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}$,

- (a) $\tau(z_1, z_2, z_3) = (z_{\tau^{-1}(1)}, z_{\tau^{-1}(2)}, z_{\tau^{-1}(3)}), \forall \tau \in \mathbf{S}_3$;
- (b) $\kappa(z_1, z_2, z_3) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$;
- (c) A involução $-\text{Id} \in \mathbf{Z}_2$ age como menos a identidade: $-\text{Id}(z_1, z_2, z_3) = (-z_1, -z_2, -z_3)$;

$$(d) (\theta_1, \theta_2)(z_1, z_2, z_3) = (e^{i\theta_1} z_1, e^{i\theta_2} z_2, e^{-i(\theta_1+\theta_2)} z_3), \quad \forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbf{T}^2.$$

Aplicando o Algoritmo 2.5.4 temos:

2. Fixe um epimorfismo $\sigma : (\mathbf{D}_6 \dot{+} \mathbf{T}^2) \oplus \mathbf{Z}_2 \rightarrow \mathbf{Z}_2$ de modo que $\Gamma_+ = \mathbf{D}_6 \dot{+} \mathbf{T}^2$.

3. Fixe $\delta = -\text{Id} \in \Gamma_-$.

4. Seja $v_j = z_j \bar{z}_j$, com $j = 1, 2, 3$, e considere os elementos

$$u_1 = v_1 + v_2 + v_3, \quad u_2 = v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_2 v_3, \quad u_3 = v_1 v_2 v_3 \quad \text{e} \quad u_4 = z_1 z_2 z_3 + \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3.$$

Golubitsky *et al.* [17, Theorem 3.10(a), p. 156] mostram que o conjunto $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ constitui uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{\mathbb{C}^3}(\mathbf{D}_6 \dot{+} \mathbf{T}^2)$.

5. Cálculo do conjunto gerador para $\mathcal{Q}_{\mathbb{C}^3}((\mathbf{D}_6 \dot{+} \mathbf{T}^2) \oplus \mathbf{Z}_2)$ como módulo sobre $\mathcal{P}_{\mathbb{C}^3}((\mathbf{D}_6 \dot{+} \mathbf{T}^2) \oplus \mathbf{Z}_2)$:

$$\tilde{u}_k = S(u_k)(z_1, z_2, z_3) = 0, \quad \text{para } k = 1, 2, 3;$$

$$\tilde{u}_4(z_1, z_2, z_3) = S(u_4)(z_1, z_2, z_3) = u_4.$$

Portanto, $\mathcal{Q}_{\mathbb{C}^3}((\mathbf{D}_6 \dot{+} \mathbf{T}^2) \oplus \mathbf{Z}_2) = \mathcal{P}_{\mathbb{C}^3}((\mathbf{D}_6 \dot{+} \mathbf{T}^2) \oplus \mathbf{Z}_2)\{z_1 z_2 z_3 + \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3\}$.

6. Golubitsky *et al.* [17, Theorem 3.10(b), p. 156] também mostram que

$$H_0(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2, z_3),$$

$$H_1(z_1, z_2, z_3) = (u_1 z_1, u_2 z_2, u_3 z_3),$$

$$H_2(z_1, z_2, z_3) = (u_1^2 z_1, u_2^2 z_2, u_3^2 z_3),$$

$$H_3(z_1, z_2, z_3) = (\bar{z}_2 \bar{z}_3, \bar{z}_1 \bar{z}_3, \bar{z}_1 \bar{z}_2),$$

$$H_4(z_1, z_2, z_3) = (u_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3, u_2 \bar{z}_1 \bar{z}_3, u_3 \bar{z}_1 \bar{z}_2),$$

$$H_5(z_1, z_2, z_3) = (u_1^2 \bar{z}_2 \bar{z}_3, u_2^2 \bar{z}_1 \bar{z}_3, u_3^2 \bar{z}_1 \bar{z}_2)$$

geram $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}^3}(\mathbf{D}_6 \dot{+} \mathbf{T}^2)$ sobre o anel $\mathcal{P}_{\mathbb{C}^3}(\mathbf{D}_6 \dot{+} \mathbf{T}^2)$.

7. Cálculo dos geradores de $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}^3}(\mathbf{D}_6 \dot{+} \mathbf{T}^2)$ sobre o anel $\mathcal{P}_{\mathbb{C}^3}((\mathbf{D}_6 \dot{+} \mathbf{T}^2) \oplus \mathbf{Z}_2)$: defina $\tilde{u}_0(z_1, z_2, z_3) = 1$. Então,

$$H_{0j}(z_1, z_2, z_3) = \tilde{u}_0(z_1, z_2, z_3) H_j(z_1, z_2, z_3) = H_j(z_1, z_2, z_3), \quad j = 0, \dots, 5;$$

$$H_{ij}(z_1, z_2, z_3) = \tilde{u}_i(z_1, z_2, z_3) H_j(z_1, z_2, z_3) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 0, \dots, 5;$$

$$H_{40}(z_1, z_2, z_3) = \tilde{u}_4(z_1, z_2, z_3) H_0(z_1, z_2, z_3) = (u_4 z_1, u_4 z_2, u_4 z_3);$$

$$H_{41}(z_1, z_2, z_3) = \tilde{u}_4(z_1, z_2, z_3) H_1(z_1, z_2, z_3) = (u_4 u_1 z_1, u_4 u_2 z_2, u_4 u_3 z_3);$$

$$H_{42}(z_1, z_2, z_3) = \tilde{u}_4(z_1, z_2, z_3)H_2(z_1, z_2, z_3) = (u_4u_1^2z_1, u_4u_2^2z_2, u_4u_3^2z_3);$$

$$H_{43}(z_1, z_2, z_3) = \tilde{u}_4(z_1, z_2, z_3)H_3(z_1, z_2, z_3) = (u_4\bar{z}_2\bar{z}_3, u_4\bar{z}_1\bar{z}_3, u_4\bar{z}_1\bar{z}_2);$$

$$H_{44}(z_1, z_2, z_3) = \tilde{u}_4(z_1, z_2, z_3)H_4(z_1, z_2, z_3) = (u_4u_1\bar{z}_2\bar{z}_3, u_4u_2\bar{z}_1\bar{z}_3, u_4u_3\bar{z}_1\bar{z}_2);$$

$$H_{45}(z_1, z_2, z_3) = \tilde{u}_4(z_1, z_2, z_3)H_5(z_1, z_2, z_3) = (u_4u_1^2\bar{z}_2\bar{z}_3, u_4u_2^2\bar{z}_1\bar{z}_3, u_4u_3^2\bar{z}_1\bar{z}_2).$$

Portanto,

$$\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}^3}(\mathbf{D}_6 \dot{+} \mathbf{T}^2) = \mathcal{P}_{\mathbb{C}^3}((\mathbf{D}_6 \dot{+} \mathbf{T}^2) \oplus \mathbf{Z}_2)\{H_j, H_{4j} : 0 \leq j \leq 5\}.$$

8. Fazendo $\tilde{H}_{ij}(z_1, z_2, z_3) = \vec{S}(H_{ij})(z_1, z_2, z_3)$, para $i = 0, \dots, 4$ e $j = 1, \dots, 5$, obtemos que o conjunto

$$\{(\bar{z}_2\bar{z}_3, \bar{z}_1\bar{z}_3, \bar{z}_1\bar{z}_2), (u_1\bar{z}_2\bar{z}_3, u_2\bar{z}_1\bar{z}_3, u_3\bar{z}_1\bar{z}_2), (u_1^2\bar{z}_2\bar{z}_3, u_2^2\bar{z}_1\bar{z}_3, u_3^2\bar{z}_1\bar{z}_2),$$

$$(u_4z_1, u_4z_2, u_4z_3), (u_4u_1z_1, u_4u_2z_2, u_4u_3z_3), (u_4u_1^2z_1, u_4u_2^2z_2, u_4u_3^2z_3)\}$$

gera $\vec{\mathcal{Q}}_{\mathbb{C}^3}((\mathbf{D}_6 \dot{+} \mathbf{T}^2) \oplus \mathbf{Z}_2)$ sobre $\mathcal{P}_{\mathbb{C}^3}((\mathbf{D}_6 \dot{+} \mathbf{T}^2) \oplus \mathbf{Z}_2)$.

Observamos que a presente representação de $(\mathbf{D}_6 \dot{+} \mathbf{T}^2) \oplus \mathbf{Z}_2$ em \mathbb{C}^3 é não auto-dual, pois $-\text{Id}$ é uma antissimetria e $\text{tr}(-\text{Id}) = -2 \neq 0$ (veja Proposição 2.2.16).

DECOMPOSIÇÃO σ -ISOTÍPICA

Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo linearmente em um espaço vetorial real V de dimensão finita e seja (ρ, V) uma representação de Γ em V . Como visto no Capítulo 1, a estrutura da representação ρ permite a decomposição de V em uma soma direta de representações irredutíveis (Teorema 1.1.12). Em consequência disto, temos garantido no Teorema 1.1.16 que V pode ser decomposto como uma soma direta de subespaços Γ -invariantes,

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_s, \quad (4.1)$$

onde cada componente isotópica W_i é a soma de todos os subespaços Γ -irredutíveis Γ -isomorfos a um irredutível fixo U_i , $i = 1, \dots, s$. Além disso, pelo Teorema 1.2.20 todas as componentes isotópicas são deixadas invariantes por qualquer aplicação linear puramente equivariante. Esta propriedade de invariância não vale em geral no contexto reversível-equivariante. Ou seja, nem toda aplicação linear Γ -reversível-equivariante definida em V deixa cada bloco isotópico W_i invariante.

Neste capítulo, temos como propósito descrever a construção de subespaços que são invariantes por qualquer aplicação linear Γ -reversível-equivariante, chamadas de componentes σ -isotópicas de V . Tal processo de construção foi primeiro introduzido por Lamb e Roberts em [20] e depois completado por Baptistelli e Manoel em [5]. Mencionamos aqui uma comparação entre ambos os processos.

Fixado um epimorfismo de grupos $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbf{Z}_2$ como em (2.1), considere (ρ_σ, V) a representação dual de (ρ, V) definida em (2.4). O espaço V é auto-dual se as representações (ρ, V) e (ρ_σ, V) forem Γ -isomorfos, ou seja, quando se existir um isomorfismo Γ -reversível-equivariante sobre V . Sejam $(\rho_1, U_1), \dots, (\rho_s, U_s)$, onde $\rho_i = \rho|_{U_i}$, $i = 1, \dots, s$, as representações irredutíveis distintas (não Γ -isomorfos) de Γ em V . No que segue, escrevemos U_i para denotar (ρ_i, U_i) e $(U_i)_\sigma$ para denotar o dual $((\rho_i)_\sigma, U_i)$, onde $(\rho_i)_\sigma = \rho_\sigma|_{U_i}$, $i = 1, \dots, s$. Também, V denota (ρ, V) e V_σ denota (ρ_σ, V) .

Começamos afirmando que as componentes isotópicas segundo a representação ρ de Γ em V coincidem com as componentes isotópicas segundo a representação dual ρ_σ de Γ em V . Este fato é diretamente verificado pela proposição abaixo.

Proposição 4.0.1. *Seja (ρ, V) uma representação de Γ em V . Sejam U_1, \dots, U_s os subespaços Γ -irredutíveis distintos de V . Então,*

- (i) *Um subespaço U_k é irredutível sob a representação ρ se, e somente se, ele é irredutível sob a representação ρ_σ ;*
- (ii) *Dois subespaços U_j e U_k são Γ -isomorfos se, e somente se, seus duais $(U_j)_\sigma$ e $(U_k)_\sigma$ são Γ -isomorfos.*

Demonstração: Façamos a demonstração de (i) pela contrapositiva. Seja $(U_k)_\sigma$ um subespaço não Γ -irredutível segundo a representação ρ_σ . Então existe um subespaço X de U_k Γ -invariante por ρ_σ tal que

$$\{0\} \neq X \subsetneq U_k.$$

Pela invariância de X , $\sigma(\gamma)\rho(\gamma)x \in X$, para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in X$. Uma vez que X é um subespaço vetorial real e $\sigma(\gamma) = \pm 1$, segue que $\rho(\gamma)x \in X$, para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in X$. Logo, X é Γ -invariante segundo a representação ρ , implicando que U_k não é um subespaço Γ -irredutível sob ρ . De modo análogo mostramos a condição suficiente.

(ii) Seja T um Γ -isomorfismo entre (ρ_j, U_j) e (ρ_k, U_k) , ou seja,

$$T(\rho_j(\gamma)u) = \rho_k(\gamma)T(u), \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad u \in U_j.$$

Mostremos que T é um Γ -isomorfismo entre $((\rho_j)_\sigma, U_j)$ e $((\rho_k)_\sigma, U_k)$. De fato, para todo $\gamma \in \Gamma$, temos

$$T((\rho_j)_\sigma(\gamma)u) = T(\sigma(\gamma)\rho_j(\gamma)u) = \sigma(\gamma)T(\rho_j(\gamma)u) = \sigma(\gamma)\rho_k(\gamma)T(u) = (\rho_k)_\sigma(\gamma)T(u),$$

a segunda igualdade seguinte pois $\sigma(\gamma) \in \mathbb{R}$.

Considere agora T um Γ -isomorfismo entre $((\rho_j)_\sigma, U_j)$ e $((\rho_k)_\sigma, U_k)$. Se $\gamma \in \Gamma_+$, então para todo $u \in U_j$,

$$T(\rho_j(\gamma)u) = T(\sigma(\gamma)\rho_j(\gamma)u) = \sigma(\gamma)\rho_k(\gamma)T(u) = \rho_k(\gamma)T(u).$$

Se $\gamma \in \Gamma_-$, para todo $u \in U_j$ temos

$$-T(\rho_j(\gamma)u) = T(-\rho_j(\gamma)u) = T(\sigma(\gamma)\rho_j(\gamma)u) = \sigma(\gamma)\rho_k(\gamma)T(u) = -\rho_k(\gamma)T(u).$$

Portanto, $T(\rho_j(\gamma)u) = \rho_k(\gamma)T(u)$, para todo $\gamma \in \Gamma$ e $u \in U_j$. Em outras palavras, T é um Γ -isomorfismo entre (ρ_j, U_j) e (ρ_k, U_k) . \square

De acordo com o resultado acima, os irredutíveis em V_σ são

$$((\rho_1)_\sigma, U_1), \dots, ((\rho_s)_\sigma, U_s),$$

onde $(\rho_i)_\sigma = (\rho_\sigma)|_{U_i}$, $i = 1, \dots, s$. Portanto, os blocos isotípicos W_i são os mesmos em ambas as decomposições, segundo ρ e segundo ρ_σ . Baseados na Proposição 4.0.1, podemos generalizar ao contexto reversível-equivariante dois resultados úteis do Capítulo 1, a saber o Lema 1.2.19 e o Teorema 1.2.20, como segue:

Lema 4.0.2. *Seja (ρ, V) uma representação de Γ em V . Sejam $L : V \rightarrow V$ uma aplicação linear Γ -reversível-equivariante e $W \subset V$ um subespaço Γ -irredutível. Então $L(W)$ é Γ -invariante. Além disso, ou $L(W) = \{0\}$ ou (ρ, W) e $(\rho_\sigma, L(W))$ são Γ -isomorfos.*

Demonstração: Seja $z = L(w) \in L(W)$. Então, para todo $\gamma \in \Gamma$, temos

$$\sigma(\gamma)\rho(\gamma)z = \sigma(\gamma)\rho(\gamma)L(w) = L(\rho(\gamma)w) \in L(W),$$

pois W é Γ -invariante. Portanto, $L(W)$ é Γ -invariante segundo ρ_σ . Pela Proposição 4.0.1 $L(W)$ é também invariante por ρ .

Note agora que $\ker L$ é Γ -invariante. De fato, para todo $\gamma \in \Gamma$ e $v \in \ker L$, temos

$$L(\rho(\gamma)v) = \rho_\sigma(\gamma)L(v) = 0.$$

Assim, $\ker L \cap W$ é um subespaço Γ -invariante de W e a irredutibilidade de W implica que $\ker L \cap W = \{0\}$ ou $W \subset \ker L$. Se $W \subset \ker L$, então $L(W) = \{0\}$. Se $\ker L \cap W = \{0\}$, então $L|_W : W \rightarrow L(W)$ é uma bijeção linear. Além disso,

$$L|_W(\rho(\gamma)w) = L(\rho(\gamma)w) = \rho_\sigma(\gamma)L(w) = \rho_\sigma(\gamma)L|_W(w), \quad \forall \gamma \in \Gamma, w \in W.$$

Então, L é um Γ -isomorfismo entre (ρ, W) e $(\rho_\sigma, L(W))$, como queríamos. \square

Segue do resultado acima que se W é Γ -irredutível e $L(W) \neq \{0\}$, então $L(W)$ é um subespaço Γ -irredutível de V . Temos também o seguinte resultado:

Proposição 4.0.3. *Sejam U_j e U_k subespaços Γ -irredutíveis não triviais de V e seja $T : U_j \rightarrow U_k$ uma aplicação linear Γ -reversível-equivariante. Então, T é não nula se, e somente se, T é um isomorfismo.*

Demonstração: Segue diretamente do Lema de Schur (Lema 1.2.17). \square

Concluimos, portanto, que o subespaço Γ -irredutível $U_j \subseteq V$ é Γ -isomorfo ao dual $(U_k)_\sigma$, para algum $k \in \{1, \dots, s\}$, se e somente se existe uma aplicação linear Γ -reversível-equivariante não nula $T : V \rightarrow V$ tal que $T(U_j) \neq \{0\}$.

O Lema 4.0.2 implica que:

Proposição 4.0.4. *Sejam (ρ, V) uma representação de Γ em V e $L : V \rightarrow V$ uma aplicação linear Γ -reversível-equivariante. Decomponha V nas componentes isotípicas W_k 's, como em (4.1), cada qual correspondente ao Γ -irredutível U_k , com $k = 1, \dots, s$. Considere os três tipos que seguem:*

- (a) U_k é auto-dual;
- (b) U_k é não auto-dual e existe um subespaço Γ -irredutível U_j , $j \neq k$, que é Γ -isomorfo a $(U_k)_\sigma$;
- (c) U_k é não auto-dual e não existe um subespaço Γ -irredutível U_j , o qual é Γ -isomorfo a $(U_k)_\sigma$.

Se U_k é do tipo (a), então $L(W_k) \subset W_k$. Se U_k é do tipo (b), então $L(W_k) \subset W_j$. Se U_k é do tipo (c), então $L(W_k) = \{0\}$.

Demonstração: Seja $k \in \{1, \dots, s\}$. Escreva W_k como uma soma direta de subespaços Γ -irredutíveis que são Γ -isomorfos a U_k ,

$$W_k = V_{k1} \oplus \dots \oplus V_{k\alpha(k)}.$$

Seja $l \in \{1, \dots, \alpha(k)\}$.

Se U_k é do tipo (a), então U_k e $(U_k)_\sigma$ são Γ -isomorfos. Pelo Lema 4.0.2, ou $L(V_{kl}) = \{0\}$ ou V_{kl} e $L(V_{kl})$ são Γ -isomorfos. Ou seja, ou $L(V_{kl}) = \{0\}$ ou $L(V_{kl})$ é Γ -isomorfo a U_k . Em ambos os casos, $L(V_{kl}) \subset W_k$, para todo $l \in \{1, \dots, \alpha(k)\}$. Pela linearidade de L segue que $L(W_k) \subset W_k$.

Se U_k é do tipo (b), então U_j e $(U_k)_\sigma$ são Γ -isomorfos para algum $j \in \{1, \dots, s\}$, $j \neq k$. Logo U_k e $(U_j)_\sigma$ também são Γ -isomorfos. Pelo Lema 4.0.2, ou $L(V_{kl}) = \{0\}$ ou V_{kl} e $L(V_{kl})$ são Γ -isomorfos. Daí, ou $L(V_{kl}) = \{0\}$ ou $L(V_{kl})$ é Γ -isomorfo a U_j . Em ambos os casos $L(V_{kl}) \subset W_j$, para todo $l \in \{1, \dots, \alpha(k)\}$. Pela linearidade da L , obtemos $L(W_k) \subset W_j$.

Se U_k é do tipo (c), então a Proposição 4.0.3 nos diz que $L(V_{kl}) = \{0\}$, para todo $l \in \{1, \dots, \alpha(k)\}$. Portanto, $L(W_k) = \{0\}$. \square

Observação 4.0.5. Observe que se U_k é do tipo (b), sendo Γ -isomorfo ao dual de U_j , para algum $j \neq k$, então U_j também é do tipo (b), sendo Γ -isomorfo ao dual de U_k .

Temos agora em mãos as ferramentas para descrever o processo de construção de subespaços que são deixados invariantes por toda aplicação linear reversível-equivariante, generalizando assim a decomposição isotópica de V ao nosso contexto. O seguinte resultado estabelece tal construção e é uma consequência imediata da Proposição 4.0.4.

Corolário 4.0.6. *Decomponha V nas componentes isotópicas W_k 's como em (4.1), cada qual correspondente ao subespaço Γ -irredutível U_k , $k = 1, \dots, s$. Então, existe uma permutação π de ordem 2 de $\{1, \dots, s\}$ tal que o subespaço*

$$\widehat{W}_k = W_k + W_{\pi(k)} \tag{4.2}$$

é invariante por qualquer aplicação linear Γ -reversível-equivariante, com $\pi(k) = k$ se U_k é do tipo **(a)** ou **(c)** da Proposição 4.0.4 e $\pi(k) = j$, $j \neq k$, se U_k é do tipo **(b)**. Quando U_k é do tipo **(b)**, a soma (4.2) é direta.

Os subespaços \widehat{W}_k 's dados em (4.2) são chamados de *componentes σ -isotópicas* de V . A decomposição

$$V = \widehat{W}_1 \oplus \dots \oplus \widehat{W}_q$$

é chamada de *decomposição σ -isotópica* de V . Note que q é no máximo s .

Como aparece em [20], Lamb e Roberts analisam de forma sistemática a estrutura de aplicações lineares reversíveis-equivariantes usando as componentes σ -isotópicas \widehat{W}_i . Entretanto, o processo de construção destas componentes dado em [20, Seção 3.2, pp. 272-273] deve ser completado da forma como apresentamos acima, segundo o processo descrito em [5]. Mais precisamente, Lamb e Roberts afirmam em [20] que existe uma permutação de ordem 2, lá denotada por σ , no conjunto das classes de isomorfismos de representações irredutíveis $\{(\rho_i, U_i) : i = 1, \dots, s\}$ tal que o dual de U_i é isomorfo a $U_{\sigma(i)}$. Ainda, os autores afirmam que toda aplicação linear reversível-equivariante L leva a componente isotópica W_i na componente isotópica $W_{\sigma(i)}$ e vice-versa. Conseqüentemente, o subespaço

$$W_i + W_{\sigma(i)} \tag{4.3}$$

é invariante por L . Depois disso os autores afirmam que se U_i é não auto-dual, então W_i e $W_{\sigma(i)}$ são blocos isotópicos distintos e a soma (4.3) é direta. É importante notar que pode não existir um subespaço irredutível $(\rho_{\sigma(i)}, U_{\sigma(i)}) \subset (\rho_\sigma, V)$ isomorfo ao dual do subespaço irredutível $(\rho_i, U_i) \subset (\rho, V)$ (linguagem usada em [20]). Neste caso, a permutação σ descrita pelos autores deixa de estar bem colocada, pois $W_{\sigma(i)}$ está ausente na decomposição isotópica de V . Nestas circunstâncias, é claro que não podemos dizer que W_i e $W_{\sigma(i)}$ são blocos isotópicos distintos, ou que a soma (4.3) é direta, ou ainda que toda aplicação linear Γ -reversível-equivariante $L : V \rightarrow V$ satisfaz $L(W_i) \subset W_{\sigma(i)}$, como mencionados em [20]. Nesta direção, o processo que descrevemos nesta seção completa o processo descrito em [20].

Finalizamos este capítulo com dois exemplos para ilustrar a decomposição σ -isotópica de V . O primeiro exemplo mostra a existência de um subespaço irredutível de V do tipo **(c)**, caso não abordado por Lamb e Roberts em [20].

Exemplo 4.0.7. **(a)** Considere a ação padrão de $\Gamma = \mathbf{O}(2)$ em \mathbb{R}^3 dada por

$$\theta(x, y, z) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z) \quad \text{e} \quad \kappa(x, y, z) = (x, -y, -z).$$

Tome $\Gamma_+ = \mathbf{SO}(2)$ fixando $\delta = \kappa$ como antissimetria. De acordo com a Proposição 2.2.16, a presente representação de $\mathbf{O}(2)$ em \mathbb{R}^3 é não auto-dual, uma vez que o traço da representação de κ é não nulo.

Os subespaços $U_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ e $U_2 = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ são Γ -irredutíveis em V e as duas componentes isotópicas de \mathbb{R}^3 são $W_1 = U_1$ e $W_2 = U_2$. O irredutível U_1 é auto-dual (do tipo **(a)**), sendo

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a matriz do Γ -isomorfismo $L_1 : U_1 \rightarrow (U_1)_\sigma$.

Afirmamos que U_2 é não auto-dual. Com efeito, suponha U_2 auto-dual e seja $L_2 : U_2 \rightarrow (U_2)_\sigma$ um Γ -isomorfismo. Como $V = U_1 \oplus U_2$, defina a aplicação linear $L : V \rightarrow V_\sigma$ por $L(u_1 + u_2) = L_1(u_1) + L_2(u_2)$, onde $\rho(\gamma)(u_1 + u_2) = \rho(\gamma)u_1 + \rho(\gamma)u_2$. É fácil ver que L é um Γ -isomorfismo, contrariando o fato de V ser não auto-dual. Portanto, U_2 é não auto-dual do tipo **(c)**.

Pelo Corolário 4.0.6, temos $\widehat{W}_1 = W_1$ e $\widehat{W}_2 = W_2$. Assim,

$$V = \widehat{W}_1 \oplus \widehat{W}_2.$$

(b) Considere $\Gamma = \mathbf{Z}_2 = \{I, \kappa\}$ agindo em $V = M_2(\mathbb{R})$ pela multiplicação à esquerda, onde κ é dado em (1.3). Tome $\delta = \kappa$ como antissimetria. Os subespaços de V

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}, \quad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\},$$

$$U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad U_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : d \in \mathbb{R} \right\}$$

são Γ -irredutíveis. Identificando V com \mathbb{R}^4 , os subespaços U_1 e U_3 , assim como U_2 e U_4 , são Γ -isomorfos segundo os Γ -isomorfismos cujas matrizes são

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Portanto, temos duas componentes isotópicas W_1 e W_2 com respeito a U_1 e U_2 , respectivamente, dadas por

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & d \end{pmatrix} : b, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Afirmamos que U_1 e U_2 são não auto-duais do tipo **(b)**. De fato, defina a aplicação linear $L : U_1 \rightarrow (U_2)_\sigma$ cuja matriz é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que L define um Γ -isomorfismo entre U_1 e $(U_2)_\sigma$, ou seja, que U_1 é Γ -isomorfo ao dual de U_2 e U_2 é Γ -isomorfo ao dual de U_1 . Pelo Corolário 4.0.6, $\widehat{W}_1 = W_1 \oplus W_2 = \widehat{W}_2$. Portanto,

$$V = \widehat{W}_1 = \widehat{W}_2.$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Antoneli, F., Baptistelli, P. H., Dias, A. P. S. e Manoel, M. [2009] Invariant theory and reversible-equivariant vector fields, *Journal of Pure and Applied Algebra* **213**, 649 – 663.
- [2] Antoneli, F., Dias, A. P. S. e Matthews, P. C. [2007] Invariants, Equivariants and Characters in Symmetric Bifurcation Theory, *Proc. Royal Soc. Edinburgh, Section A, Mathematics* **137**, 01-36.
- [3] Baptistelli, P. H. e Manoel, M. [2005] Some results on reversible-equivariant vector fields, *Cadernos de Matemática* **6**, 237 – 263.
- [4] Baptistelli, P. H. e Manoel, M. [2008] The classification of reversible-equivariant steady-state bifurcations on self-dual spaces, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **145** (2), 379 – 401.
- [5] Baptistelli, P. H. e Manoel, M. [2012] The σ -isotypic decomposition and the σ -index of reversible equivariant systems. *Topology and its Applications* **159**, 389-396.
- [6] Baptistelli, P. H. Manoel, M. 2013. Invariants and relative invariants under compact Lie groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*. A aparecer.
- [7] Bourbaki, N. [2006] *Groupes et Algebras de Lie*. Ch. I, Act. et Ind. 1285, Ch IV, V, VI, [1968] Hermann, Paris.
- [8] Broucker, T. e Dieck, T. tom [1995] *Representations of Compact Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics, 2nd ed. 11, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York.
- [9] Conway, J.B. [1978] *Functions of One complex variable*. Graduate Texts in Mathematics **98**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York.
- [10] Buono, P. L., Lamb, J. S. W. e Roberts, R. M. [2008] Bifurcation and branching of equilibria in reversible-equivariant vector fields, *Nonlinearity* **21**, 625 – 660.
- [11] Buzzi, C. A. e Lamb, J. S. W. [2005] Reversible-equivariant Holf bifurcation, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **175**, 39 – 84.

- [12] Buzzi, C. A., Roberto, L. A. e Teixeira, M. A. [2010] Branching of periodic orbits in reversible Hamiltonian systems. *Real and complex singularities, London Math. Soc. Lecture Note Ser.* **380**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 4670.
- [13] GAP - Groups, Algorithms and Programming - A system for computational discrete algebra [2005] ([www.gap.dcs.st-and.ac.uk \ gap](http://www.gap.dcs.st-and.ac.uk/~gap/)).
- [14] Garcia, A. e Lequain, Y. [2006] *Elementos de Álgebra*, Projeto Euclides. 4ª Ed. Rio de Janeiro, IMPA.
- [15] Gatermann, K.[2000] *Computer Algebra Methods for Equivariant Dynamical Systems*. LNM **1728**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York.
- [16] Golubitsky, T. e Schaeffer, D. [1984] *Singularities and groups in Bifurcation Theory*, Vol I, Appl. Math. Sci. **51**, Springer-Verlag, NY.
- [17] Golubitsky, T., Stewart, I. e Schaeffer, D. [1985] *Singularities and groups in Bifurcation Theory*, Vol II, Appl. Math. Sci. **69**, Springer-Verlag, NY.
- [18] Goodman, R. e Wallach, N. R. [2001] *Representations and Invariants of the Classical Groups*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [19] Kreyszig, E. [1978] *Introductory Functional Analysis with Applications*, Editora John Willey, Sons. Nova York.
- [20] Lamb, J. S. W. e Roberts, R. M. [1999] Reversible Equivariant Linear Systems, *J. Diff. Eq.* **159**, 239 – 279.
- [21] Lima, M. F. S. e Teixeira, M. A. [2009] Families of periodic orbits in resonant reversible systems. *Bull. Braz. Math. Soc.*, New Series **40(4)**, 511-537.
- [22] Martins, R. M. e Teixeira, M. A. [2011] Reversible equivariant systems and matricial equations, *An. Acad. Brasil. Ciênc.* **83**, no. 2, 375-390.
- [23] Mereu, A. C. e Teixeira, M. A. [2012] Reversibility and branching of periodic orbits, *AIMS Journals* . A aparecer.
- [24] Sattinger, D. H. [1979] *Group Theory Methods in Bifurcation Theory*. LNM **762**, Springer-Verlag, New York.
- [25] *Singular* [2006] ([http: \ \ www.singular.uni-kl.de\](http://www.singular.uni-kl.de/)).
- [26] Smith, L. [1997] Polynomial Invariants of Finite Groups. A Survey of Recent Developments, *Bill. Amer. Math. Soc.* (NS) **34**, 211 – 250.
- [27] Sturmfels, B. [1993] *Algorithms in Invariant Theory*. Springer-Verlag. Vienna.

-
- [28] Worfolk, P. A. [1994] Terms of algorithms in equivariant vector fields: algorithms for an invariant approach, *J. Luntol. Comput.*, 487 – 511.

LISTA DE NOTAÇÕES

Γ :	grupo de Lie compacto agindo em um espaço vetorial V de dimensão finita;
Γ_+ :	subgrupo de Γ de índice 2, formado pelas simetrias de Γ ;
Γ_- :	subconjunto formado pelas anti-simetrias de Γ ;
σ :	homomorfismo de Γ em \mathbf{Z}_2 ;
$GL(V)$:	espaço vetorial das aplicações lineares invertíveis $V \mapsto V$;
(ρ, V) :	espaço vetorial V sob a representação ρ de Γ ;
ρ_σ :	representação dual de ρ ;
χ_V :	caracter correspondente à representação de Γ em V ;
$\text{Fix}_V(\Sigma)$:	subespaço de ponto fixo de um subgrupo $\Sigma \subseteq \Gamma$ em (ρ, V) ;
\int_Γ :	integral de Haar normalizada;
Σ_x :	subgrupo de isotropia de $x \in V$;
Γ_x :	órbita da ação de Γ em $x \in V$;
Fix :	subespaço de ponto fixo de um subgrupo $\Sigma \subset \Gamma$;
$\mathcal{P}_V(\Gamma)$:	anel das funções polinomiais $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ Γ -invariantes;
$\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$:	módulo sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ das aplicações polinomiais $g : V \rightarrow W$ Γ -equivariantes;
$\mathcal{Q}_V(\Gamma)$:	módulo sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ das funções polinomiais $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ Γ -anti-invariantes;
$\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$:	módulo sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ das aplicações polinomiais $g : V \rightarrow V$ Γ -reversíveis-equivariantes;
$V \otimes W$:	produto tensorial entre os espaços V e W ;
$V \oplus W$:	soma direta entre os espaços V e W ;
$V^{\oplus n}$:	produto n -tensorial $\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{n \text{ vezes}}$;
$\mathbf{S}^n V$:	n -potência tensorial simétrica;
V^* :	$V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$ espaço vetorial dos funcionais lineares de V em \mathbb{R} ;
\mathcal{P}_V :	espaço vetorial das funções polinomiais nas indeterminadas x_1, \dots, x_x ;
\mathcal{P}_V^d :	espaço vetorial dos polinômios homogêneos $V \rightarrow \mathbb{R}$ de grau d ;

$\mathcal{P}_V^d(\Gamma)$:	espaço vetorial dos polinômios homogêneos Γ -invariantes $V \rightarrow \mathbb{R}$ de grau d ;
$\vec{\mathcal{P}}_V$:	espaço vetorial das aplicações polinomiais de V em V ;
$\vec{\mathcal{P}}_{V,W}^d(\Gamma)$:	espaço vetorial das aplicações polinomiais homogêneas Γ -equivariantes de V em W de grau d ;
$\mathcal{Q}_V^d(\Gamma)$:	espaço vetorial dos polinômios homogêneos Γ -anti-invariantes $V \rightarrow \mathbb{R}$ de grau d ;
$\vec{\mathcal{Q}}_V^d(\Gamma)$:	espaço vetorial das aplicações polinomiais homogêneas Γ -reversíveis -equivariantes $V \rightarrow W$ de grau d ;
$\mathcal{L}_S^d(V)$:	espaço vetorial das funções d -multilineares simétricas em $\underbrace{V \times \dots \times V}_{d \text{ vezes}}$;
$\mathcal{L}_S^d(V, W)$:	espaço vetorial das aplicações d -multilineares simétricas $\underbrace{V \times \dots \times V}_{d \text{ vezes}}$ com valores em W ;
$\Phi_V^\Gamma(t)$:	série de Hilbert-Poincaré para o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$;
$\Psi_V^\Gamma(t)$:	série de Hilbert-Poincaré para o módulo $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$;
$\tilde{\Phi}_V^\Gamma(t)$:	série de Hilbert-Poincaré para o módulo $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$;
$\tilde{\Psi}_V^\Gamma(t)$:	série de Hilbert-Poincaré para o módulo $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$;
$R_{\Gamma_+}^\Gamma$:	operador de Reynold relativo sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$;
$\vec{R}_{\Gamma_+}^\Gamma$:	operador de Reynold relativo sobre $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$;
$S_{\Gamma_+}^\Gamma$:	σ -operador de Reynold relativo sobre $\mathcal{Q}_V(\Gamma_+)$;
$\vec{S}_{\Gamma_+}^\Gamma$:	σ -operador de Reynold relativo sobre $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma_+)$;
\widehat{W}_i :	componente σ -isotípica correspondente ao irredutível U_i .

ÍNDICE REMISSIVO

- σ -operadores de Reynolds, 46
- n -potência tensorial, 35
- órbita, 25
- Γ -isomorfismo, 5
- ação
 - de \mathbf{D}_n , 5
 - de $\mathbf{O}(n)$, 5
 - de \mathbf{S}^1 , 5
 - de \mathbf{S}_n , 35
 - de $\mathbf{SO}(2)$, 4
 - de \mathbf{Z}_n , 5
 - de um grupo, 4
 - espaços dos funcionais lineares, 35
 - produto tensorial, 34, 35
 - soma direta, 34
 - trivial, 5
 - usual, 4
- algoritmo
 - para os anti-invariantes, 51
 - para os reversíveis-equivariantes, 54
- anel polinomial, 17
- antissimetria, 31
- aplicação
 - n -multilinear simétrica, 41
 - Γ -equivariante, 18, 27
 - Γ -reversível-equivariante, 31
 - puramente Γ -equivariante, 18
- base de Hilbert, 17
- caracter de uma representação, 33
- complementar invariante, 9
- componentes
 - σ -isotípicas, 75
 - isotípicas, 13, 14, 25
- decomposição
 - σ -isotípica, 75
 - isotípica, 14
- espaço
 - auto-dual, 33
 - não auto-dual, 33
- forma geral
 - \mathbf{D}_n -reversível-equivariante, 62
 - $\mathbf{D}_n(\kappa)$ -reversível-equivariante, 64
 - \mathbf{S}_2 -reversível-equivariante, 67
 - \mathbf{Z}_n -reversível-equivariante, 59
- função
 - Γ -anti-invariante, 31
 - Γ -invariante, 27
 - Γ -invariantes, 14
 - polinomial homogênea, 41
- grupo
 - cíclico de orden n , 3
 - das rotações planares, 2
 - de Lie, 2
 - de Lie compacto, 2
 - de rotações n -dimensional, 2
 - diedral, 3
 - do círculo, 2
 - ortogonal, 2
- integral de Haar, 6
 - de $\mathbf{SO}(2)$, 7
 - de um grupo finito, 6

Lema de Schur, 24

operadores de Reynolds, 46

produto interno invariante, 8

produto tensorial, 34

representação

absolutamente irredutível, 23

auto-dual, 33

de um grupo, 4

dual, 32

irredutível, 9

não auto-dual, 33

série de Hilbert-Poincaré, 36, 37

simetria, 31

subespaço

Γ -invariante, 9

Γ -irredutível, 9

de ponto fixo, 26

invariante, 27

subgrupo

conjugado, 26

de isotropia, 25

Teorema

da redutibilidade Completa, 10

de Hilbert-Weyl, 17

de Molien, 36

de Molien Equivariante, 37

de Sattinger, 41

Fórmula do traço, 28

Fubini, 8