SEMIGRUPOS MAXIMAIS EM GRUPOS DE LIE SOLÚVEIS

Priscila Amara Patricio de Melo

Centro de Ciências Exatas

Universidade Estadual de Maringá

Programa de Pós-Graduação em Matemática

(Mestrado)

Orientador: Osvaldo Germano do Rocio

Maringá - Pr

2007

SEMIGRUPOS MAXIMAIS EM GRUPOS DE LIE SOLÚVEIS

Priscila Amara Patricio de Melo

Centro de Ciências Exatas

Universidade Estadual de Maringá

Programa de Pós-Graduação em Matemática

(Mestrado)

Orientador: Osvaldo Germano do Rocio*

(*Parcialmente Financiado pela Fundação Araucária Protocolo n° 6240)

Maringá - Pr

2007

À minha família.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos a todos que de alguma forma contribuiram para o êxito deste trabalho, e em especial:

- Aos meus pais, Iracy e Pedro, pelo contínuo apoio e ensinamentos;

- À minha família pelo incentivo e apoio sempre que necessário e por saber entender minhas dificuldades e minhas ausências;

- Ao professor Osvaldo Germano do Rocio, pela excelente orientação, disponibilidade, paciência e constante incentivo, sempre indicando a direção a ser tomada. Minha eterna gratidão;

- Aos meus queridos amigos Fernando, Mariana e Raquel pelo prazer de suas amizades, pelas horas de alegrias e tristezas que compartilhamos ao longo do nosso período na UEM, e por superarmos juntos os desafios e dificuldades encontradas;

- Aos amigos e colegas do mestrado pela força nas horas difíceis, conversas e trocas de conhecimento;

- Aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, em especial aos que contribuíram para a minha formação acadêmica e humana;

- Aos funcionários, em especial a secretária Lúcia, pela boa-vontade e pelos esclarecimentos sobre procedimentos acadêmicos;

- Aos professores Marcelo Muniz Silva Alves, Osvaldo Germano do Rocio, Alexandre José Santana, Carlos José Braga Barros e Marcelo Escudeiro Hernandes que atenciosamente colaboraram na correção deste trabalho;

- À CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é caracterizar os semigrupos maximais de interior não vazio em grupos de Lie solúveis. Inicialmente, introduziremos alguns conceitos básicos necessários para o entendimento da teoria. Posteriormente abordamos o problema no caso de grupos abelianos e grupos nilpotentes. Antes de tratarmos do caso solúvel, faremos um breve estudo sobre grupos de Frobenius -Perron e caracterizaremos os semigrupos maximais do grupo afim da reta, que é um protótipo dos grupos de Lie solúveis. No caso geral de grupos de Lie solúveis, veremos que os conceitos de semigrupos maximais e semigrupos totais são equivalentes. Por fim, vamos introduzir o conceito de semigrupo bem limitado e mostrar que sob algumas condições tais semigrupos são isomorfos a $\mathbb{R}^+$ ou a Aff^{++}, subsemigrupo maximal do grupo afim.

Sumário

Introdução

O desenvolvimento da teoria de semigrupos, conforme cita Karl H. Hofmann em [6], começou por volta de 1880, com o matemático norueguês Marius Sophus Lie (1842-1899). Por não haver até aquele momento uma noção clara do conceito de grupos, foi somente na primeira metade do século XX que a teoria algébrica de semigrupos realmente se desenvolveu.

Nosso objetivo neste trabalho é caracterizar os semigrupos maximais de interior não vazio dos grupos de Lie solúveis. Este problema foi abordado por Lawson em [8]. Antes de abordamos o problema no caso geral de grupos solúveis, faremos um estudo para os casos de grupos abelianos e grupos nilpotentes.

No Capítulo 1 listaremos algumas informações que consideramos necessárias ao entendimento dos capítulos posteriores, com o objetivo de estabelecer a linguagem e as notações que serão adotadas durante todo o texto. Começaremos com o conceito de grupo topológico, pois estamos interessados em estudar semigrupos em tais grupos. Em seguida, enunciaremos os conceitos básicos de grupos e álgebras de Lie, definiremos a aplicação exponencial que nos permite fazer uma conexão entre a álgebra e o seu respectivo grupo de Lie. Também introduziremos o conceito de semigrupo e apresentaremos algumas de suas propriedades básicas.

O Capítulo 2 será dedicado à introdução do conceito de semigrupo maximal, nosso principal objeto de estudo. Apresentaremos vários resultados sobre semigrupos maximais que serão utilizadas nos capítulos seguintes. Veremos ainda a noção de semigrupo total e estabeleceremos algumas relações existentes entre semigrupos maximais e semigrupos totais.

No Capítulo 3 faremos um estudo sobre os semigrupos maximais invariantes. Veremos que os semigrupos maximais fechados de um espaço vetorial são semi-espaços. Ainda neste capítulo caracterizaremos os semigrupos maximais em grupos nilpotentes, estabeleceremos uma condição para que um subconjunto de um grupo conexo nilpotente G seja gerador, a saber, o interior do subconjunto em questão não deve interceptar o comutador $[G, G]$. Como aplicação deste resultado veremos quem são os subsemigrupos maximais de interior não vazio do grupo de Heisenberg.

No Capítulo 4 temos por objetivo caracterizar os semigrupos maximais em grupos solúveis. Para atingir tal objetivo foi necessário o estudo de algumas propriedades de cones invariantes, mais especificamente do Teorema do Cone Invariante, e da teoria de Frobenius-Perron. Trataremos ainda, com mais detalhes, dos semigrupos maximais de um protótipo dos grupos solúveis, a saber, do grupo afim da reta.

O último capítulo é reservado ao estudo de semigrupos cuja fronteira é um grupo, tendo como base o trabalho de Dobbins [3].

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo recorda fatos básicos e estabelece notações que serão utilizadas ao longo do texto. Sem a intenção de apresentar todos os pré-requisitos necessários para a leitura muitos resultados e demonstrações foram omitidos, uma vez que podem ser facilmente encontradas na literatura. Indicamos as referências Pontryagin [10], San Martin [12] e Warner [14] para maiores detalhes.

1.1 Grupos Topológicos

O conceito de grupo topológico é obtido através da junção do conceito algébrico de grupo e de espaço topológico. Por este motivo, fatos básicos da teoria de grupos e espaços topológicos são facilmente transferidos para grupos topológicos. Iniciaremos definindo grupo topológico e, em seguida, apresentaremos algumas de suas propriedades.

Definição 1.1. Um conjunto G é chamado de *grupo topológico* se satisfaz as seguintes condições:

(i) G é grupo;

(ii) G é um espaço topológico;

(iii) as aplicações $f : G \times G \to G$ dada por $f(x, y) = xy$ e $g : G \to G$ dada por $g(x) = x^{-1}$ são contínuas.

Alguns exemplos elementares de grupos topológicos são: o grupo aditivo dos números reais $(\mathbb{R}^n, +)$; $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$ munido da multiplicação usual de matrizes, onde $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ denota o conjunto das matrizes com entradas reais; G com a topologia discreta, onde G é um grupo qualquer.

Observação 1.2. Para cada $g \in G$, definimos as seguintes aplicações:

(i) translação à esquerda: $E_g : G \longrightarrow G$, $E_g(h) = gh$;

(ii) translação à direita: $D_g : G \longrightarrow G$, $D_g(h) = hg$;

(iii) conjugação (ou automorfismo interno): $C_g : G \longrightarrow G$, $C_g(h) = ghg^{-1}$.

Observe que estas aplicações são homeomorfismos. Desta forma, se A é um subconjunto de um grupo topológico G e $g \in G$, então $E_g(A)$, denotado por $gA = \{gx : x \in A\}$, será aberto ou fechado, se A for aberto ou fechado.

Agora vamos enunciar alguns resultados sobre grupos topológicos que serão utilizados mais adiante.

Proposição 1.3. *Sejam G um grupo topológico e U uma vizinhança de 1. Então existe um aberto V contendo 1 tal que $V \subset U$ e $V = V^{-1}$.*

A afirmação contida na proposição a seguir é um fato bastante conhecido na topologia. A demonstração de um resultado fundamental, que apresentaremos na Seção 1.8, onde estabeleceremos uma condição para que um semigrupo seja um grupo, requer sua utilização.

Proposição 1.4. *Sejam G um grupo topológico conexo e U uma vizinhança de 1, elemento neutro do grupo. Então* $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$.

Demonstração: Ver Proposição 3.18 em [14]

A próxima proposição refere-se aos grupos topológicos que além de conexos também são localmente compactos. Vamos utilizá-la na Seção 3.1 para caracterizar semigrupos maximais. Sua demonstração pode ser encontrada em [5] ou [10].

Proposição 1.5. *Seja G um grupo topológico conexo e localmente compacto e H um subgrupo normal de G e fechado. Se G/H é simplesmente conexo, então H é conexo.*

1.2 Grupos de Lie

Nesta seção introduziremos um dos conceitos fundamentais da teoria de Lie, o de grupo de Lie. Vejamos sua definição.

Definição 1.6. Um *grupo de Lie G* é uma variedade diferenciável que possui uma estrutura algébrica de grupo na qual as aplicações:

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (\sigma, \tau) &\longmapsto \sigma\tau^{-1} \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ \tau &\longmapsto \tau^{-1} \end{aligned}$$

são de classe C^{∞}.

Exemplo 1.7. O conjunto $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ possui estrutura de grupo de Lie.

De fato, primeiramente note que podemos identificar, de maneira natural, o conjunto $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ com $\mathbb{R}^{n^2}$. Assim, $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}$, que é uma variedade. Como o determinante é uma função contínua temos que $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, pois $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$. Então $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ tem uma estrutura de variedade. Além disso, o produto usual de matrizes define em $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ uma estrutura algébrica de grupo. Consideremos as seguintes aplicações:

$$\begin{array}{rcl} Gl(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \\ (A, B) & \longmapsto & AB \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$$

Note que as aplicações acima são de classe C^∞, pois o produto de matrizes é simplesmente um produto de números reais, que é C^∞, e a operação inversão é C^∞, pois $\det(A) \neq 0$ e $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)}$ adj(A). Portanto, $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie.

Note que todo grupo de Lie é um grupo topológico, assim as propriedades de grupos topológicos também são válidas para grupos de Lie.

Definição 1.8. Sejam H e G grupos de Lie. Uma aplicação $\varphi : H \longrightarrow G$ é um *homomorfismo de grupos de Lie* se φ é um homomorfismo de grupos e, além disso, é de classe C^∞.

Se o homomorfismo em questão está definido no grupo de Lie dos números reais em um grupo de Lie qualquer, então esse homomorfismo é chamado de *subgrupo a 1-parâmetro de G.*

Definição 1.9. Diremos que (H, φ) é um *subgrupo de Lie* de um grupo de Lie G se:

(i) H é um grupo de Lie;

(ii) (H, φ) é uma subvariedade de G;

(iii) $\varphi : H \longrightarrow G$ é um homomorfismo de grupos de Lie.

1.3 Álgebras de Lie

Nesta seção definiremos álgebras de Lie e apresentaremos alguns conceitos relacionados que utilizaremos neste trabalho. Como o assunto não é o objetivo principal e, considerando o grande número de resultados encontrados na literatura que tratam sobre este assunto seremos sucintos e indicamos as referências [12] e [14] para maiores detalhes.

Definição 1.10. Uma *álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial real $\mathfrak{g}$ munido de uma operação bilinear $[\,,\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, denominada *colchete de Lie*, satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) [X,Y] = -[Y, X], para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$;

(ii) [[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

A primeira condição exige que o colchete de Lie seja anti-simétrico e a segunda que o colchete de Lie satisfaça a identidade de Jacobi. Note que a condição (i) equivale a dizer que $[X, X] = 0$, para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Exemplo 1.11. O espaço vetorial $\mathfrak{g}l(n, \mathbb{R})$, de todas as matrizes reais $n \times n$, com colchete entre duas matrizes dado por

$$[X, Y] = XY - YX, \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{g}l(n, \mathbb{R})$$

é uma álgebra de Lie.

É conveniente introduzirmos a noção de subálgebra de Lie.

Definição 1.12. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma *subálgebra de Lie* de $\mathfrak{g}$ é um subespaço vetorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que é fechado pelo colchete, isto é, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ para todo $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Evidentemente, uma subálgebra de Lie é uma álgebra de Lie com a estrutura herdada pela estrutura de $\mathfrak{g}$.

Definição 1.13. Um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é um *ideal* se $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, para todo $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{h}$.

Claramente, todo ideal é uma subálgebra.

A importância do conceito de álgebra de Lie é que existe uma álgebra de Lie de dimensão finita associada naturalmente a cada grupo de Lie e que propriedades de grupos de Lie são refletidas em propriedades de sua álgebra de Lie. Veremos agora como se define esta.

Dado um grupo de Lie G, para cada g pertencente a G temos um difeomorfismo l_g de G dado por $l_g(h) = gh$. Dizemos que um campo vetorial X sobre G é *invariante à esquerda* se $dl_g \circ X = X \circ l_g$ para todo $g \in G$. Denotando por $\mathfrak{g}$ o conjunto de todos os campos vetoriais invariantes à esquerda sobre G temos que $\mathfrak{g}$ se torna uma álgebra de Lie com o colchete dado por $[X, Y]_m(f) = X_m(Yf) - Y_m(Xf)$. Assim, $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie associada ao grupo de Lie G. Podemos identificar, pelo isomorfismo $X \longmapsto X(1)$, o conjunto dos campos vetoriais invariantes à esquerda sobre G com o plano tangente à G no elemento identidade e com isso dar uma nova caracterização para a álgebra de Lie de G: a álgebra de Lie de um grupo de Lie G se identifica com o espaço tangente à G na identidade.

1.4 Aplicação Exponencial

Queremos agora estabelecer um vínculo entre os grupos de Lie e suas respectivas álgebras de Lie. Para tanto, vamos considerar a chamada aplicação exponencial, uma ferramenta muito importante que nos permite transportar algumas propriedades das álgebras de Lie para os grupos de Lie. Também é muito útil para determinar a álgebra de Lie correspondente a um grupo de Lie dado. Antes de definirmos a aplicação exponenecial precisamos do conceito de homomorfismo de álgebras de Lie.

Definição 1.14. Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie. Uma aplicação $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ é um *homomorfismo de álgebras de Lie* se φ é linear e preserva o colchete, isto é, $\varphi[X,Y] = [\varphi(X), \varphi(Y)]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Proposição 1.15. *Sejam G e H grupos de Lie com álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, respectivamente, e com G simplesmente conexo. Se $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um homomorfismo, então existe um único homomorfismo $\varphi : G \to H$ tal que $d\varphi = \psi$.*

Demonstração: Ver Teorema 3.27 em [14].

Definição 1.16. Sejam G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie. Se $X \in \mathfrak{g}$, então

$$\lambda \frac{d}{dr} \longmapsto \lambda X$$

é um homomorfismo de álgebras de Lie de $\mathbb{R}$ em $\mathfrak{g}$. Como $\mathbb{R}$ é simplesmente conexo, pela proposição anterior, existe um único subgrupo a 1- parâmetro

$$\exp_X : \mathbb{R} \longrightarrow G$$

tal que

$$d(\exp_X(\lambda \frac{d}{dr})) = \lambda X.$$

Em outras palavras, $t \longmapsto \exp_X(t)$ é o único subgrupo a 1-parâmetro de G cujo vetor tangente em 0 é $X(1)$. Definimos a *aplicação exponencial*

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

por

$$\exp(X) = \exp_X(1).$$

Dentre as inúmeras propriedades da aplicação exponencial destacamos as seguintes:

Proposição 1.17. *Se G é um grupo de Lie e* $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$*, então* $\exp$ *é um difeomorfismo de uma vizinhança de 0 em $\mathfrak{g}$ sobre uma vizinhança de 1 em G.*

Proposição 1.18. *Sejam G um grupo de Lie e $X, Y \in \mathfrak{g}$. Se $[X, Y] = 0$ então* $\exp(X + Y) = \exp(X)\exp(Y)$.

Para maiores detalhes a referência [14] pode ser consultada.

Vejamos agora o conceito de representação adjunta.

Seja V um espaço vetorial e $\mathfrak{g}l(V)$ a álgebra de Lie das transformações lineares de V. Seja também $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie (sobre o mesmo corpo de V). Uma *representação* de $\mathfrak{g}$ em V é um homomorfismo $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}l(V)$. Para um elemento X na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, considere a transformação linear $ad_X : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ definida por $ad_X(Y) = [X, Y]$.

A aplicação $ad : \mathfrak{g} \longmapsto \mathfrak{g}l(\mathfrak{g})$, $X \longmapsto ad_X$ é uma representação de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$ denominada *representação adjunta*.

Para $g \in G$, considere o automorfismo interno $I_g : G \to G$ definido por $h \to ghg^{-1}$. Esse automorfismo induz um automorfismo $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{I_g} & G \\ {\scriptstyle \exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{Ad_g} & \mathfrak{g} \end{array}$$

Então $\exp(Ad_g(X)) = g\exp(X)g^{-1}$.

Uma propriedade básica da aplicação exponencial garante que se $X \in \mathfrak{g}$ então

$$Ad\exp(X) = e^{ad_X} = 1 + ad_X + \frac{1}{2!}(ad_X)^2 + ... \tag{1.1}$$

Como conseqüência dessa afirmação temos a seguinte proposição.

Proposição 1.19. *Uma subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ é invariante sob todas $Ad\,g$, isto é, $Ad\,g(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$ se, e somente se, $\mathfrak{h}$ for um ideal.*

O próximo resultado relaciona subgrupo normal e ideal de uma álgebra de Lie e será inúmeras vezes usado nesse trabalho.

Proposição 1.20. *Seja $A \subseteq G$ um subgrupo de Lie conexo do grupo de Lie conexo G. Então A é subgrupo normal se, e somente se, a álgebra de Lie $\mathfrak{a}$ de A é um ideal em $\mathfrak{g}$.*

Demonstração: Ver Teorema 3.48 em [14].

A proposição seguinte nos dá uma condição para que um subgrupo abstrato seja um subgrupo de Lie.

Proposição 1.21. *Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo fechado de G. Então H é um subgrupo de Lie de G. Além disso, $\mathfrak{h}$ é subálgebra de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração: Ver Teorema 3.42 em [14].

1.5 Cones

Nesta seção vamos introduzir o conceito de cone e apresentar algumas de suas propriedades. Este estudo é baseado em [5].

Definição 1.22. Um subconjunto W de um espaço vetorial topológico real V é chamado *cone*, se satisfaz as seguintes condições:

(i) $W + W \subseteq W$;

(ii) $\mathbb{R}^+W \subseteq W$;

(iii) $\overline{W} = W$, isto é, W é fechado em V.

Por exemplo, em $V = \mathbb{R}$, os possíveis cones são $\{0\}$, $\mathbb{R}^+$, $-\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}$.

Se W é um cone o subconjunto $H(W) = W \cap -W$ é o maior subespaço vetorial contido em W e, é chamado *bordo do cone*. Um cone será chamado *pontual* se $H(W) = \{0\}$ e *gerador* se $V = W - W$.

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e V^* o espaço dual de funcionais lineares de V em $\mathbb{R}$. Defina $\langle , \rangle : V^* \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\langle \alpha, v \rangle = \alpha(v)$. Dado um cone $W \subseteq V$ definimos

$$W^* = \{\alpha \in V^* : \langle \alpha, x \rangle \geq 0 \, \text{para todo} \, x \in W\}$$

W^* também é um cone e é chamado de cone *dual* de W. Isso define uma dualidade de cones e considerando o isomorfismo canônico $I : V \to V^{**}$ temos que $W^{**} = W$.

Proposição 1.23. *Sejam L um espaço vetorial de dimensão finita e $W \subset L$ um cone. Então o cone W é pontual se, e somente se, o dual W^* é gerador.*

Demonstração: Ver Proposição I.1.7 em [5].

Definição 1.24. Sejam M uma variedade diferenciável e G um grupo de Lie. Uma função C^∞ $\mu : G \times M \longrightarrow M$ é uma *ação à esquerda de G em M* se:

(i) $\mu(1, m) = m$, para todo $m \in M$;

(ii) $\mu(\sigma\tau, m) = \mu(\sigma, \mu(\tau, m))$, para todo $\sigma, \tau \in G$ e $m \in M$.

Se $\mu : G \times M \longrightarrow M$ é uma ação é comum denotarmos $\mu(g, m)$ por $g \cdot m$.

Definição 1.25. Sejam G um grupo de Lie agindo no espaço vetorial L e $W \subset L$ um cone. Dizemos que W é invariante se $GW \subseteq W$.

Dentre as inúmeras propriedades sobre cones duais podemos citar:

1. O dual de um cone pontual é um cone gerador $W \neq V$;
2. O dual de uma semi-reta $\mathbb{R}^+ v$ é um semi-espaço;
3. O dual de um cone invariante também é um cone invariante.

Para maiores detalhes a referência [5] pode ser consultada.

Seja W um cone num espaço vetorial de dimensão finita L. Denotamos por $\mathrm{Hom}(L, L)$ o conjunto de endomorfismos do espaço vetorial L. Dizemos que um endomorfismo de espaço vetorial $g \in \mathrm{Hom}(L, L)$ é um *endomorfismo do par* (W, L) se $gW \subseteq W$. O conjunto de todos estes endomorfismos será denotado por $\mathrm{Hom}_L W$.

Proposição 1.26. *Para um cone W em um espaço vetorial de dimensão finita L o conjunto* $\mathrm{Hom}_L W$ *é um semigrupo multiplicativo (sob a composição de aplicações) e um cone em* $\mathrm{Hom}(L, L) \cong M_n(\mathbb{R})$.

Demonstração: Ver Proposição III.1.8 em [5].

1.6 Espaço Semiprojetivo

Seja G um grupo de Lie agindo em uma variedade diferenciável M. Dado $x \in M$, sua *órbita* por G é definida como $G \cdot x = \{gx \in M : g \in G\}$. A aplicação

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow M/G \\ x &\longmapsto Gx \end{aligned}$$

é chamada *aplicação de órbita*. O conjunto M/G com a topologia quociente é chamado um *espaço de órbitas*. Neste caso a aplicação de órbitas é aberta e contínua. Consideremos uma ação do grupo multiplicativo $\mathbb{R}^+$ agindo num espaço vetorial topológico L. Sabemos que $\mathbb{R}^+$ é isomorfo ao grupo aditivo dos reais $\mathbb{R}$ sob a aplicação

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ r &\longmapsto e^r \end{aligned}$$

Seja W um cone não nulo em um espaço vetorial topológico L. O espaço de órbita $(W\backslash\{0\})/\mathbb{R}^+$ é escrito $\prod(W)$ e $\prod : W\backslash\{0\} \longrightarrow \prod(W)$ denota a aplicação de órbita. O espaço $\prod(W)$ é chamado espaço *semi-projetivo* associado com W.

Proposição 1.27. *Seja W um cone gerador invariante em um espaço vetorial n-dimensional. Então o espaço semi-projetivo $\prod(W)$ associado com W é homeomorfo a uma (n - 1)-esfera.*

Demonstração: Ver Proposição I.2.30. em [5].

1.7 Semigrupos

Nesta seção apresentaremos os conceitos básicos de semigrupos que posteriormente serão utilizados. Uma maneira natural de iniciar uma seção sobre semigrupos é, sem dúvida, com a definição do que vem a ser um semigrupo. Por isso,

Definição 1.28. Um *semigrupo* é um conjunto não vazio S munido de uma operação associativa.

Alguns exemplos bem conhecidos de semigrupos são: o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ e o conjunto dos números reais positivos $\mathbb{R}^+$, munidos tanto da adição como da multiplicação usual; o conjunto das funções de um conjunto nele próprio munido da operação de composição de função e o conjunto $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ das matrizes inversíveis munido do produto usual de matrizes.

Definição 1.29. Um *subsemigrupo* de um semigrupo S é um subconjunto não vazio T de S tal que $T^2 \subset T$.

Exemplo 1.30. O conjunto $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}^+)$, das matrizes inversíveis com entradas positivas que têm determinante igual a 1, munido do produto usual de matrizes é um subsemigrupo de $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$.

É evidente que a interseção (não vazia) de uma coleção de subsemigrupos de um semigrupo S é ainda um subsemigrupo. Mas para a união a afirmação não é verdadeira. Para ver isto basta considerar o semigrupo $\mathbb{N}$ e os subsemigrupos $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{3n : n \in \mathbb{N}\}$. Assim $2, 3 \in A \cup B$ mas $2 + 3 \notin A \cup B$.

Definição 1.31. Um subconjunto não vazio I, de um subsemigrupo S, é um *ideal à esquerda* de S se $SI \subseteq I$, um *ideal à direita* se $IS \subseteq I$ e, é dito um *ideal* se for ideal à direita e à esquerda.

Um ideal I será chamado de *ideal maximal* se $I \neq S$ e o único ideal em S que contém I, e é diferente de I, é o próprio S.

Definição 1.32. Seja G um grupo. Um subconjunto S de G é um *submonóide* se satisfaz as seguintes condições:

(i) S é um subsemigrupo;

(ii) $1 \in S$.

Definição 1.33. Seja S um submonóide de G. O conjunto

$$H(S) = S \cap S^{-1} = \{g \in S : g^{-1} \in S\}$$

é chamado *grupo das unidades* ou *grupo maximal* de S.

Quanto ao grupo das unidades temos:

Proposição 1.34. *Seja S um submonóide de G. Então $H(S)$ é o maior subgrupo de G contido em S.*

Demonstração: Primeiramente, note que $H(S)$ é a interseção de dois submonóides, então $H(S)$ é um submonóide. Sejam $x, y \in H(S)$. Pela definição de $H(S)$ temos que $y^{-1} \in H(S)$. Logo, $xy^{-1} \in H(S)$ e, conseqüentemente, $H(S)$ é um subgrupo de G. Considere agora um subgrupo K de G tal que $K \subset S$. Então, $K = K \cap K^{-1} \subset S \cap S^{-1} = H(S)$ e, portanto, $H(S)$ é o maior subgrupo de G contido em S. ■

Proposição 1.35. *Seja S um submonóide de G tal que $S \neq H(S)$. Então $S^{\#}$ definido por $S \backslash H(S)$ é um ideal maximal em S.*

Demonstração: Sejam $x \in S$ e $a \in S^{\#}$. Então $ax \in S$. Suponhamos que $ax \in H(S)$. Neste caso $(ax)^{-1} = x^{-1}a^{-1} \in H(S)$ e assim $x^{-1}a^{-1} \in S$. Como $x \in S$ e S é subsemigrupo temos que $x(x^{-1}a^{-1}) = a^{-1} \in S$, o que contradiz o fato de $a \in S^{\#}$. Então $ax \notin H(S)$ e, conseqüentemente, $ax \in S^{\#}$. De maneira análoga mostra-se que $xa \in S^{\#}$. Logo, $S^{\#}$ é um ideal de S.

Resta mostrarmos que $S^{\#}$ é maximal. Suponhamos que exista um ideal J de S tal que $S^{\#} \subset J \subset S$ e $S^{\#} \neq J$. Desta forma temos que $J \cap H(S) \neq \emptyset$. Vamos mostrar que $J = S$. Para tanto, consideremos $x \in S$ e $a \in J \cap H(S)$. Logo $a^{-1} \in S$ e, conseqüentemente, $x = a(a^{-1}x) \in J$. Assim, $S \subset J$, ou seja, $J = S$. Portanto, $S^{\#}$ é maximal. ■

Definição 1.36. Um subconjunto $A \subseteq G$ é dito *invariante* ou *normal* se $gAg^{-1} = A$, para todo $g \in G$.

Definiremos agora o centro de um subsemigrupo e apresentaremos algumas de suas propriedades.

Definição 1.37. Seja S um submonóide de G. O conjunto

$$C(S) = \bigcap_{g \in G} gH(S)g^{-1}$$

é chamado *centro de S*.

A informação sobre centro de um semigrupo, contida na seguinte proposição será utilizada freqüentemente.

Proposição 1.38. *Seja S um submonóide de G. Então $C(S)$ é o maior subgrupo normal de G contido em S.*

Demonstração: Afirmamos que $Q_g = \{gH(S)g^{-1}\}$, com $g \in G$ é um subgrupo de G. De fato, considere $(gh_1g^{-1}), (gh_2g^{-1}) \in Q_g$. Então

$$(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1})^{-1} = gh_1g^{-1}gh_2^{-1}g^{-1} = gh_1h_2^{-1}g^{-1}.$$

Pela Proposição 1.34, $H(S)$ é um subgrupo. Assim, $h_1h_2^{-1} \in H(S)$ e daí $gh_1h_2^{-1}g^{-1} \in Q_g$. Logo, Q_g é um subgrupo. Como a interseção qualquer de subgrupos é ainda um subgrupo, temos que $C(S) = \bigcap_{g \in G} Q_g$ é um subgrupo. Além disso, $C(S) = \bigcap_{g \in G} gH(S)g^{-1} \subset 1H(S)1 = H(S) \subset S$, isto é, $C(S) \subset S$.

Para verificar que $C(S)$ é um subgrupo normal consideremos $\gamma \in G$. Temos

$$\begin{aligned}\gamma C(S)\gamma^{-1} &= \gamma[\bigcap_{g \in G} gH(S)g^{-1}]\gamma^{-1} = \bigcap_{g \in G} \gamma gH(S)g^{-1}\gamma^{-1} \\ &= \bigcap_{g \in G} (\gamma g)H(S)(\gamma g)^{-1} = \bigcap_{g \in G} gH(S)g^{-1} = C(S).\end{aligned}$$

Logo, $C(S)$ é um subgrupo normal de G. Consideremos agora N um subgrupo normal de G tal que $N \subset S$. Pela Proposição 1.34 temos que $N \subset H(S)$. Como N é normal temos que $N \subset gH(S)g^{-1}$, para todo $g \in G$ e, conseqüentemente, $N \subset \bigcap_{g \in G} gH(S)g^{-1} = C(S)$. Assim, $C(S)$ é o maior subgrupo normal de G contido em S. ■

Relacionado com os homomorfismos e os subsemigrupos, vale a pena observar o seguinte fato.

Proposição 1.39. *Seja $\varphi : G \to H$ um homomorfismo sobrejetor de grupos. Se T é um subsemigrupo de G e* $\ker(\varphi) = \{g \in G : \varphi(g) = 1\} \subset T$, *então* $T = \varphi^{-1}(\varphi(T))$.

Demonstração: Claramente $T \subset \varphi^{-1}(\varphi(T))$. Considere $x \in \varphi^{-1}(\varphi(T))$. Como φ é sobrejetora temos que $\varphi(x) \subset \varphi\varphi^{-1}(\varphi(T)) \subset \varphi(T)$. Assim existe $t \in T$ tal que $\varphi(x) = \varphi(t)$, então $\varphi(x)(\varphi(t))^{-1} = 1$. Como φ é um homomorfismo, $\varphi(x)\varphi(t^{-1}) = \varphi(xt^{-1}) = 1$ e, conseqüentemente, $xt^{-1} \in \ker(\varphi) \subset T$. Assim $xt^{-1} \in T$. Como T é subsemigrupo temos que $(xt^{-1})t \in T$, isto é, $x \in T$ e então $\varphi^{-1}(\varphi(T)) \subset T$. Portanto, $T = \varphi^{-1}(\varphi(T))$. ∎

Definição 1.40. Seja $S \subset G$ um submonóide. Dizemos que S é *reduzido* em G se $C(S) = \{1\}$.

Veremos, na próxima proposição, uma maneira de obter semigrupos reduzidos.

Proposição 1.41. *Seja $S \subseteq G$ um submonóide. Então $S/C(S)$ é reduzido em $G/C(S)$.*

Demonstração: Devemos mostrar que $C(S/C(S)) = \{1\} = \{C(S)\}$.

Se $\theta : G \longrightarrow G/C(S)$ é o homomorfismo canônico, então $C(\theta(S)) = C(S)$. De fato, como θ é um homomorfismo e, pela Proposição 1.38, $C(\theta(S))$ é um subgrupo normal de $G/C(S)$ segue que $\theta^{-1}(\mathrm{C}(\theta(S)))$ é um subgrupo normal de G. Além disso, $\theta^{-1}(\mathrm{C}(\theta(S))) \subset S$, pois $C(\theta(S)) \subset \theta(S)$. Como $\ker(\theta) = C(S) \subset S$ segue da Observação 1.39 que $\theta^{-1}(\theta(S)) = S$. Assim, $\theta^{-1}(\mathrm{C}(\theta(S))) \subset \theta^{-1}(\theta(S)) = S$. Pela Proposição 1.38, $\theta^{-1}(C(\theta(S))) \subset C(S)$, daí $C(\theta(S)) \subset \theta(C(S)) = C(S)$ e, portanto, $C(\theta(S)) = C(S)$. ∎

Observação 1.42. Note que, dado qualquer grupo G e qualquer submonóide S, podemos formar a redução (G_R, S_R) de (G, S) tomando o quociente por C(S), ou seja, $G_R = G/C(S)$ e $S_R = S/C(S)$.

Observação 1.43. Considerando o homomorfismo canônico $\varphi : G \to G/C(S)$ e sabendo que $\ker(\varphi) = C(S) \subset S$ obtemos $S = \varphi^{-1}(\varphi(S)) = \varphi^{-1}(S_R)$.

1.8 Semigrupos em Grupos Topológicos

Os resultados desta seção se referem a semigrupos em grupos topológicos e serão registrados para uso posterior. O primeiro deles estabelece uma condição para que um subsemigrupo seja um grupo. Tal resultado aparecerá com bastante freqüência. Vejamos seu enunciado.

Proposição 1.44. *Se S é um subsemigrupo de um grupo topológico conexo G tal que $1 \in \mathrm{int}(S)$, então $S = G$.*

Demonstração: Seja $U = S$. Pelo Teorema 1.4 temos que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n$. Como S é subsemigrupo a operação é fechada em S, então $S^n \subset S$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} S = S$ e $S \subset G$, pois S é subsemigrupo de G. Daí segue que $S = G$. ∎

A proposição seguinte estabelece que o interior de um subsemigrupo é um ideal.

Proposição 1.45. *Se S é um subsemigrupo de um grupo topológico G tal que $\mathrm{int}(S) \neq \emptyset$. Então $\mathrm{int}(S)$ é um ideal em S.*

Demonstração: Como $\text{int}(S) \neq \emptyset$, existem $g \in \text{int}(S)$ e U, uma vizinhança aberta de g, tal que $g \in U \subset S$. Assim, para todo $s \in S$ temos que $gs \in Us \subseteq S$. Como G é um grupo topológico, a translação a direita é um homeomorfismo. Então o conjunto Us é uma vizinhança aberta de gs, ou seja, $gs \in \text{int}(S)$. Logo, $(\text{int}(S))S \subset \text{int}(S)$. Analogamente, obtemos que $S(\text{int}(S)) \subset \text{int}(S)$. Portanto, $\text{int}(S)$ é um ideal de S. ■

Proposição 1.46. *Seja S um subsemigrupo do grupo topológico G tal que* $\text{int}(S) \neq \emptyset$. *Se* $1 \in \overline{(\text{int}S)}$, *então* $\text{int}(S) = \text{int}(\overline{S})$.

Demonstração: Como $S \subset \overline{S}$ temos que $\text{int}(S) \subset \text{int}(\overline{S})$. Por outro lado, seja $s \in U = \text{int}(\overline{S})$. Considere a aplicação contínua $\varphi : G \to G$ dada por $\varphi(g) = sg^{-1}$, então $\varphi(1) = s \in U$. Logo, existe um aberto V contendo 1 tal que $\varphi(V) = sV^{-1} \subseteq U$. Seja $W = V \cap \text{int}(S)$. Temos por hipótese que $1 \in \overline{\text{int}(S)}$ e, como $1 \in V$, temos que $V \cap \overline{\text{int}(S)} \neq \emptyset$. Como V é aberto, então $W = V \cap \text{int}(S) \neq \emptyset$. Logo, $sW^{-1} \subseteq U \subseteq \overline{S}$. Como sW^{-1} é aberto, existe $t \in S$ e $w \in W$ tal que $sw^{-1} = t$, então $s = tw \in tW \subseteq \text{int}(S)$. Assim $\text{int}(\overline{S}) \subset \text{int}(S)$ e, conseqüentemente, $\text{int}(S) = \text{int}(\overline{S})$. ■

Proposição 1.47. *Sejam G um grupo topológico e $H \subset G$ um subgrupo tal que* $\text{int}(H) \neq \emptyset$. *Então H é aberto e fechado.*

Demonstração: Sejam $h \in \text{int}(H)$ e $g \in H$. Como $h^{-1} \in H$ e $\text{int}(H)$ é um ideal de H temos que $1 = h^{-1}h \in \text{int}(H)$ e então $g = g(h^{-1}h) \in \text{int}(H)$. Isto mostra que $H \subset \text{int}(H)$. Assim, H é aberto.

Resta mostrar que H é fechado. Para tanto, consideremos $g \in \overline{H}$. Já sabemos que $H = \text{int}(H)$. Daí segue que $1 \in \text{int}(H)$ e então $g \in g\,\text{int}(H)$.

Como $g\,\mathrm{int}(H)$ é aberto e $g \in \overline{H}$, existem $h \in \mathrm{int}(H)$ e $h' \in H$ tais que $gh = h'$, daí segue que $g = h'h^{-1} \in H$. Isto mostra que $\overline{H} \subset H$ e, portanto, H é fechado. ■

Finalizando esta seção mostraremos que a teoria de subsemigrupos em grupos topológicos compactos é bem restritiva. Precisamente temos:

Proposição 1.48. *Seja S um subsemigrupo de um grupo topológico compacto G tal que* $\mathrm{int}(S) \neq \emptyset$. *Então S é subgrupo topológico compacto aberto de G.*

Demonstração: Como S é subsemigrupo e $\overline{S}$ é fechado em G, temos que $\overline{S}$ é um subsemigrupo compacto de G. Pelo Teorema 1.8 em [2], todo subsemigrupo compacto contém um elemento idempotente, ou seja, $1 \in \overline{S}$. Se $g \in \overline{S}$ então $g\overline{S}$ é um semigrupo compacto, novamente pelo mesmo motivo temos que $1 \in g\overline{S}$. Logo, $g^{-1} \in \overline{S}$ e, então, $\overline{S}$ é um grupo compacto.

Seja U um conjunto aberto não vazio tal que $U \subset S$. Como $S \subset \overline{S}$ e $\overline{S}$ é grupo temos que $U^{-1} \subset \overline{S}$. Então, existe $s \in S$ tal que $s^{-1} \in U^{-1} \cap S$. Logo $1 \in s^{-1}U \subseteq S$, ou seja, $1 \in \mathrm{int}(S)$. Como $\overline{S}$ é um subgrupo com interior não vazio, segue do Lema 1.47 que $\overline{S}$ é aberto e fechado. Pela Proposição 1.46, $\overline{S} = \mathrm{int}(\overline{S}) = \mathrm{int}(S) \subseteq S$. Assim, $S = \overline{S}$ e sendo $\overline{S}$ um subgrupo compacto aberto de G, então S também o é. ■

1.9 Semigrupos e Ordem

Nesta seção apresentamos algumas propriedades elementares a respeito da relação existente entre ordens de um grupo G e seus subsemigrupos.

Definição 1.49. Dado um subsemigrupo $S \subset G$ definimos uma relação $\leqq_S$ em G por $x \leqq_S y$ se $yx^{-1} \in S$.

Essa relação satisfaz as seguintes condições:

(i) Se $x \leqq_S y$ e $y \leqq_S z$, então $x \leqq_S z$; (transitividade)

(ii) Se $x \leqq_S y$ então $xz \leqq_S yz$, para todo $z \in G$. (compatibilidade à direita)

Além disso, da igualdade $S = \{x : 1 \leqq_S x\}$ podemos recuperar S como o conjunto dos elementos positivos. Reciprocamente, dada uma relação em G a qual é transitiva e compatível à direita, então o conjunto

$$P_{\leqq} = \{x \in G : 1 \leqq x\}$$

é um subsemigrupo e a relação original $\leqq$ coincide com a relação $\leqq_{P_{\leqq}}$. Estas construções estabelecem uma bijeção entre os subsemigrupos de G e as relações de G que são transitivas e compatíveis à direita.

Proposição 1.50. *Seja S um subsemigrupo de G. Então*

(i) $1 \in S$ se, e somente se, $\leqq_S$ é reflexiva;

(ii) A relação $\leqq_S$ é anti-simétrica se, e somente se, $H(S) = S \cap S^{-1} \subset \{1\}$;

(iii) A relação $\leqq_S$ é compatível à esquerda se, e somente se, S é invariante.

Demonstração: (i) Se $1 \in S$. Então, temos que $xx^{-1} = 1 \in S$, para todo $x \in G$. Logo $x \leqq_S x$, para todo $x \in G$. Por outro lado, se $x \leqq_S x$, para todo $x \in G$, então $xx^{-1} = 1 \in S$.

(ii) Suponhamos que $\leqq_S$ seja anti-simétrica. Se $x \in H(S)$, então $x \in S$ e $x^{-1} \in S$. Como $1x^{-1}, x1 \in S$ e $\leqq_S$ é anti-simétrica temos que $x = 1$. Logo $H(S) \subset \{1\}$. Reciprocamente, se $H(S) \subset \{1\}$ e $x, y \in G$ tais que $x \leqq_S y$ e

$y \leqq_S x$, ou seja, $yx^{-1}, xy^{-1} \in S$, temos então que $(xy^{-1})^{-1} = yx^{-1} \in S^{-1}$. Logo $yx^{-1} \in H(S) = \{1\}$, isto é, $yx^{-1} = 1$ e, conseqüentemente, $y = x$. Portanto, $\leqq_S$ é transitiva.

(iii) Suponhamos que $\leqq_S$ seja compatível à esquerda. Sabemos que para todo $x \in S$ temos que $1 \leqq_S x$. Então $g1 \leqq_S gx$, isto é, $gx(g1)^{-1} = gxg^{-1} \in S$, para todo $g \in G$. Logo, $gSg^{-1} \subset S$. Seja $x \in S$ tal que $gxg^{-1} \in gSg{-}1$, para algum $g \in G$. Como $1 \leq_S x$ e $\leqq_S$ é compatível à esquerda temos que $g1 \leqq_S gx$, ou seja, $gx(g1)^{-1} = gxg^{-1} \in S$. Portanto, S é invariante. Reciprocamente, suponhamos que $gSg^{-1} = S$, para todo $g \in G$. Desta forma, se $x \leqq_S y$, isto é, $yx^{-1} \in S$ temos que $gyx^{-1}g^{-1} \in S$. Mas como $gyx^{-1}g^{-1} = gy(gx)^{-1}$, ou seja, $gx \leqq_S gy$. Logo, $\leqq_S$ é uma relação compatível à esquerda. ■

Definição 1.51. Seja G um grupo. Um submonóide $S \subseteq G$ é dito *total* se $G = S \cup S^{-1}$.

Proposição 1.52. *Seja S um subsemigrupo de um grupo G. Então S é total se, e somente se, $x \leqq_S y$ ou $y \leqq_S x$, para todos $x, y \in G$.*

Demonstração: Suponha que S seja total. Se $x, y \in G$ e $x \nleqq_S y$, isto é, $yx^{-1} \notin S$. Então, como S é total, $yx^{-1} \in S^{-1}$ e daí $(yx^{-1})^{-1} = xy^{-1} \in S$, ou seja, $y \leqq_S x$. Reciprocamente, dado $x \in G$ temos que $x \leqq_S 1$ ou $1 \leqq_S x$. Sendo assim, $x \in S^{-1}$ ou $x \in S$ e, portanto, G é total. ■

Uma relação $\leqq$ em G é chamada *ordem parcial à direita* se $\leqq$ for transitiva, reflexiva, compatível à direita e anti-simétrica. Similarmente podemos definir ordem parcial à esquerda. Diremos que $\leqq$ é uma *ordem parcial* se for uma ordem parcial à direita e à esquerda. Os elementos $x, y \in G$ são ditos comparáveis mediante uma relação de ordem parcial $\leqq$ se $x \leqq y$ ou $y \leqq x$. Se todos os elementos de G forem comparáveis diremos que $\leqq$ é uma *ordem total* e o grupo G, neste caso, será chamado *totalmente ordenado.*

Diremos que uma ordem parcial à direita (rep. à esquerda) $\leqq$ é *arquimediana à direita* (resp. à esquerda) se para quaisquer $x, y \in G$, com $1 \leqq x$, existir um inteiro positivo n tal que $1 \leqq x^n y^{-1}$ (resp. $1 \leqq y^{-1}x^n$). Uma ordem parcial é dita *arquimediana* se for arquimediana à direita e à esquerda.

Podemos transpor o conceito de ordem arquimediana para subsemigrupos.

Definição 1.53. Um subsemigrupo próprio S de um grupo G é *arquimediano à direita* (resp. à esquerda) se para todo $x \in S$ com $x^{-1} \notin S$ e $y \in G$ existir um inteiro positivo n tal que $yx^n \in S$ (resp. $x^n y \in S$). O subsemigrupo é *arquimediano* se for arquimediano tanto à esquerda quanto à direita.

O seguinte lema relaciona subsemigrupos maximais invariantes com subsemigrupos arquimedianos.

Lema 1.54. *Seja S um subsemigrupo maximal e invariante de um grupo G. Então S é arquimediano*

Demonstração: Sejam $x \in S - H(S)$ e $y \in G$. Então $x \notin S^{-1}$ e, como S maximal implica S^{-1} maximal, o subsemigrupo gerado por $S^{-1} \cup \{x\}$ é todo G. Portanto, existem $z_1, \cdots, z_{k+1} \in S^{-1}$ e inteiros positivos $n_1, \cdots, n_k$ tais que

$$y^{-1} = z_1 x^{n_1} z_2 \cdots z_k x^{n_k} z_{k+1}.$$

Como S é invariante, $gS \subset Sg$, para todo $g \in G$, ou seja, $S^{-1}g \subset gS^{-1}$, para todo $g \in G$. Aplicando esta inclusão à equação acima é possível agrupar as potências de x à esquerda e reescrevê-las como $y^{-1} = x^n z$, onde $n = n_1 + \cdots + n_k$ e $z \in S^{-1}$. Isto mostra que $yx^n = z^{-1} \in S$. Portanto, S é arquimediano à direita. Usando argumento similar obtemos que S é também arquimediano à esquerda. ■

A afirmação contida no próximo teorema será de fundamental importância para caracterização dos semigrupos maximais invariantes na Seção 3.1. Sua demonstração pode ser encontrada em [11].

Teorema 1.55. *Seja G um grupo totalmente ordenado. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) G é arquimediano;

(ii) G é isomorfo a um subgrupo do grupo aditivo dos números reais.

A terminologia G é *arquimediano* é no sentido de que G está munido de uma ordem arquimediana.

Capítulo 2

Semigrupos Maximais

Neste capítulo introduziremos as noções básicas de semigrupos maximais, nosso principal objeto de estudo, visando estabelecer uma base adequada para o próximo capítulo. Além dos conceitos de semigrupo maximal, semigrupo total e das relações existentes entre eles, desenvolveremos alguns mecanismos algébricos que serão muito úteis, no Capítulo 3, para caracterização dos semigrupos maximais.

Definição 2.1. Um subsemigrupo M de um grupo G é um *subsemigrupo maximal* de G se satisfaz as seguintes condições:

(i) os únicos subsemigrupos contendo M são M e G;

(ii) M não é grupo.

Observação 2.2. Note que se M é um subsemigrupo maximal então $1 \in M$, pois caso contrário poderíamos considerar o subsemigrupo $\{1\} \cup M$ contendo M. Em outras palavras todo subsemigrupo maximal é um submonóide.

Observação 2.3. A condição (ii) da definição acima é uma conveniência técnica que garante a existência não vazia do ideal maximal $M^{\#} = M \backslash H(M)$.

Registraremos as seguintes observações sobre homomorfismos para uso posterior:

Observação 2.4. Seja $\varphi : G \to H$ um homomorfismo sobrejetor de grupos.

(i) Se S é um subsemigrupo de H então $\varphi^{-1}(S)$ é um subsemigrupo de G. Com efeito, se $g_1, g_2 \in \varphi^{-1}(S)$ então $\varphi(g_1)\varphi(g_2) = \varphi(g_1 g_2) \in S$. Assim $g_1 g_2 \in \varphi^{-1}(S)$, isto é, $\varphi^{-1}(S)$ é um subsemigrupo de G.

(ii) Se S é um subsemigrupo maximal de H, então $\varphi^{-1}(S)$ não é subgrupo de G. De fato, basta ver que $\varphi(\varphi^{-1}(S)) = S$. Assim se $\varphi^{-1}(S)$ fosse um subgrupo então S também o seria, contrariando o fato de S ser subsemigrupo maximal.

Lema 2.5. *Sejam M um subsemigrupo maximal de G e T um submonóide, tais que $T^{-1} \not\subseteq M$. Se $MT^{-1} \subseteq T^{-1}M$, então $T^{-1}M = G$.*

Demonstração: Como $MT^{-1} \subseteq T^{-1}M$ temos que $T^{-1}MT^{-1} \subseteq T^{-1}T^{-1}M$ e então $T^{-1}MT^{-1}M \subseteq T^{-1}T^{-1}MM \subseteq T^{-1}M$. Logo $T^{-1}M$ é um subsemigrupo que contém T^{-1} e M, pois $1 \in M$ e $1 \in T^{-1}$. Sendo $T^{-1}M$ um subsemigrupo contendo M temos, pela maximalidade de M, que $T^{-1}M = M$ ou $T^{-1}M = G$. Como $T^{-1} \not\subseteq M$, então $M \neq T^{-1}M$. Portanto, $T^{-1}M = G$.■

Se ao invés de um submonóide considerarmos apenas um subsemigrupo S de G obtemos um derivado do lema acima, conhecido na literatura como "Swallowing Lemma", que é crucial na teoria de semigrupos maximais. Ele garante que S intercepta M ou, caso contrário, M contém a imagem inversa de S.

Proposição 2.6. *Sejam M e S subsemigrupos de G com M maximal e $MS^{-1} \subseteq S^{-1}M$. Então ocorre uma das condições abaixo:*

(i) $S \cap I \neq \emptyset$, para todo ideal à esquerda I de M ou

(ii) $S^{-1} \subseteq M$.

Demonstração: Suponhamos que $S^{-1} \nsubseteq M$. Considere $T = S \cup \{1\}$, então $MT^{-1} \subseteq T^{-1}M$ e $T^{-1} \nsubseteq M$. Como T é um submonóide temos, pelo Lema 2.5, que $T^{-1}M = G$.

Seja I um ideal à esquerda de M. Se $x \in M^{\#}$ e $y \in I$, então $xy \in I \subset M$ e, como $M^{\#}$ é um ideal de M temos que $z = xy \in M^{\#} \cap I$. Uma vez que $T^{-1}M = G$, existem $s \in T$ e $m \in M$ tais que $z^{-1} = s^{-1}m$. Assim, pela definição de ideal à esquerda, temos que $s = mz \in MI \subseteq I$. Como $z \in M^{\#}$ então $z \notin M^{-1}$, ou seja, $z^{-1} \notin M$. Isto implica que $1 \neq s \in T = S \cup \{1\}$. Assim, $s \in S \cap I$ e, conseqüentemente, $S \cap I \neq \emptyset$. ■

Lema 2.7. *Seja S um subsemigrupo dos inteiros $(\mathbb{Z},+)$ contendo números positivos e negativos. Então S é um subgrupo de $\mathbb{Z}$.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente que o ideal maximal $S^{\#} = S \backslash H(S)$ é não vazio. Desta forma, considere $m \in S^{\#}$ tal que m é mais próximo possível de zero e $n \in S$ um número mais próximo possível de zero, mas com o sinal oposto de m. Nesse caso, $m + n \in S^{\#}$ e está mais próximo de zero do que m ou n, contrariando a escolha de m ou de n. Logo $S^{\#} = \emptyset$, ou seja, $S = H(S)$ e, pela Proposição 1.34, temos que S é um subgrupo. ■

Proposição 2.8. *Seja M um subsemigrupo maximal de G e seja $x \in G$ tal que $xM \subseteq Mx$. Então $x \in M \cup M^{-1}$.*

Demonstração: Sejam $T = \{x^n : n \geq 1\}$ e $Q = \{y : yM \subseteq My\}$. Se $y_1, y_2 \in Q$ temos que $y_1 M \subseteq My_1$ e $y_2 M \subseteq My_2$ e conseqüentemente $y_1 y_2 M \subseteq y_1 M y_2 \subseteq My_1 y_2$. Desta forma, $y_1 y_2 \in Q$ e então Q é um subsemigrupo. Como $T \subseteq Q$ temos que $TM \subseteq MT$. Analogamente, podemos mostrar que se $Mx^{-1} \subseteq x^{-1}M$, então $MT^{-1} \subseteq T^{-1}M$.

Observe que se $T \subseteq M$ ou $T^{-1} \subseteq M$ temos o desejado. Caso contrário, isto é, $T \nsubseteq M$ e $T^{-1} \nsubseteq M$, temos pelo Lema 2.6 que $T \cap M^{\#} \neq \emptyset$ e $T^{-1} \cap M^{\#} \neq \emptyset$. Consideremos agora $S = \{m \in \mathbb{Z} : x^m \in M^{\#}\}$. Uma vez que S é um semigrupo que contém números positivos e negativos temos, pelo Lema 2.7, que S é um subgrupo de $\mathbb{Z}$. Logo $0 \in S$ e daí segue que $1 = x^0 \in M^{\#}$, o que é uma contradição. Assim, $T \subseteq M$ ou $T^{-1} \subseteq M$ e, portanto, $x \in M \cup M^{-1}$. ■

Essa proposição tem conseqüências importantes as quais apresentaremos a seguir. A primeira delas é bastante útil uma vez que os subsemigrupos maximais nem sempre são totais, como mostra o exemplo.

Exemplo 2.9. Seja $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Gl}(2, \mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$. Então $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R}^+) \subset \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ é um subsemigrupo maximal mas não é total, pois $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ mas A não é inversa de nenhuma matriz em $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R}^+)$.

Lembremos que um subconjunto $M \subset G$ é dito invariante se $gMg^{-1} = M$, para todo $g \in G$.

Corolário 2.10. *Seja M um subsemigrupo maximal de G. Se M é invariante, então M é total.*

Demonstração: Claramente, $M \cup M^{-1} \subset G$. Por outro lado, como M é invariante, segue que $GM \subset MG$. Assim, pela Proposiçao 2.8, temos que $G \subseteq M \cup M^{-1}$ e, conseqüentemente, $G = M \cup M^{-1}$. ■

Corolário 2.11. *Sejam M um subsemigrupo maximal de G e $Z(G)$ o centro de G. Então $M \cap Z(G)$ é total em $Z(G)$ se, e somente se, $Z(G) \subseteq M \cup M^{-1}$.*

Demonstração: Suponhamos que $M \cap Z(G)$ seja total em $Z(G)$. Se $x \in Z(G)$, então $xg = gx$, para todo $g \in G$. Como $M \subset G$ temos que $xM = Mx$. Assim, segue da Proposição 2.8 que $x \in M \cup M^{-1}$. Logo, $Z(G) \subset M \cup M^{-1}$.

Reciprocamente, se $Z(G) \subset M \cup M^{-1}$ então

$$Z(G) \subseteq (M \cup M^{-1}) \cap Z(G) \subseteq (M \cap Z(G)) \cup (M^{-1} \cap Z(G)).$$

Como $Z(G)$ é um subgrupo temos que $[Z(G)]^{-1} = Z(G)$. Logo

$$Z(G) \subseteq (M \cap Z(G)) \cup (M^{-1} \cap [Z(G)]^{-1}) \subseteq (M \cap Z(G)) \cup (M \cap Z(G))^{-1}.$$

Claramente, $(M \cap Z(G)) \cup (M \cap Z(G))^{-1} \subseteq Z(G)$. Desta forma, temos que $Z(G) = (M \cap Z(G)) \cup (M \cap Z(G))^{-1}$ e, portanto, $M \cap Z(G)$ é total em $Z(G)$. ■

O próximo corolário irá mostrar como os semigrupos maximais se relacionam com o centro do grupo.

Corolário 2.12. *Sejam M um subsemigrupo maximal de G e $Z(G)$ o centro de G. Então $M \cap Z(G)$ é total em $Z(G)$.*

Demonstração: Se $x \in Z(G)$ então $xg = gx$, para todo $g \in G$. Logo, $Z(G)M \subseteq MZ(G)$ e, pela Proposição 2.8, $Z(G) \subseteq M \cup M^{-1}$. Assim, pelo Corolário 2.11 temos que $M \cap Z(G)$ é total em $Z(G)$. ■

Como vimos nem todo semigrupo maximal é total, mas se o grupo for abeliano a afirmação é verdadeira como mostra o corolário abaixo.

Corolário 2.13. *Todo subsemigrupo maximal de um grupo abeliano é total.*

Demonstração: Seja M um subsemigrupo maximal de um grupo abeliano G. Como G é abeliano, temos que $Z(G) = G$. Desta forma, pelo Corolário 2.12, segue que $M \cap Z(G) = M \cap G = M$ é total em G. ∎

O resultado que segue é conhecido na literatura como "Purity Lemma", nele consideraremos a relação dos semigrupos maximais com subgrupos normais abelianos.

Lema 2.14. *Sejam M um subsemigrupo maximal de G, H um subgrupo normal abeliano e $y \in H$. Se $y^n \in M$, para algum $n > 1$, então $y \in M$.*

Demonstração: Suponhamos que $y \notin M$. Então M é um subconjunto próprio do subsemigrupo gerado por $M \cup \{y\}$. Como M é maximal temos que o subsemigrupo gerado por $M \cup \{y\}$ é todo o grupo G. Como $1 \in M$ segue que qualquer elemento de G é um elemento de M ou tem a forma $m_1 y m_2 y \ldots m_{k-1} y m_k$, uma vez que este produto junto com M forma um subsemigrupo contendo M e y. Temos por hipótese que H é normal, logo $MH^{-1} \subseteq H^{-1}M$. Além disso, $y \in H = H^{-1}$ então $H^{-1} \nsubseteq M$. Como $y \notin M$ segue, pelo Lema 2.6, que existe $g \in M^{\#} \cap H$. Assim, para certos $m_1, \ldots, m_k \in M$ temos:

$$g^{-1} = m_1 y m_2 y \ldots m_{k-1} y m_k = (m_1 \ldots m_k) y^{m_2 \ldots m_k} y^{m_3 \ldots m_k} \ldots y^{m_k} = mb$$

onde $z^w = w^{-1} z w$, $m = m_1 \ldots m_k$ e b é o produto dos fatores restantes.

Como H é normal temos que $b \in H$ e, assim, $m = g^{-1}b^{-1} \in H$. Como $m, b \in H$ e H é abeliano então m e b comutam.

Daí temos

$$\begin{aligned} g^{-n} = m^n b^n &= m^{n-1} m (y^n)^{m_2 \dots m_k} \dots (y^n)^{mk} \\ &= m^{n-1} m_1 y^n m_2 y^n \dots y^n m_k \in M, \end{aligned}$$

pois $y^n \in M$. Como $g \in M^{\#}$ e $M^{\#}$ é subsemigrupo temos que $g^n \in M^{\#}$ e, como $M^{\#}$ é um ideal à direita de M, então $1 = g^n g^{-n} \in M^{\#}M \subseteq M^{\#}$, o que é uma contradição. Portanto, $y \in M$. ■

Os três lemas que seguem são conhecidos como "Lema da Redução"e, por meio deles, em alguns casos, é possível trabalhar na redução de um subsemigrupo, como veremos mais adiante.

Lema 2.15. *Sejam $\varphi : G \to H$ um homomorfismo sobrejetor e S um submonóide de H. Então S é um subsemigrupo maximal em H se, e somente se, $\varphi^{-1}(S)$ é um subsemigrupo maximal em G.*

Demonstração: Suponhamos que S seja maximal em H. Segue dos itens (i) e (ii) da Observação 2.4 que $\varphi^{-1}(S)$ é subsemigrupo de G mas não é um grupo. Seja T um subsemigrupo de G tal que $\varphi^{-1}(S) \subset T$. Vamos mostrar que $T = \varphi^{-1}(S)$ ou $T = G$. Para tanto, note primeiramente que como $1 \in S$ então $\ker(\varphi) \subset \varphi^{-1}(S)$. Assim $\ker(\varphi) \subset \varphi^{-1}(S) \subset T$ e, pela Observação 1.39 temos que $T = \varphi^{-1}(\varphi(T))$. Como $\varphi^{-1}(S) \subset T$ segue que $S \subset \varphi(T)$ e, como S é maximal, então $\varphi(T) = S$ ou $\varphi(T) = H$. Conseqüentemente, $T = \varphi^{-1}(\varphi(T)) = \varphi^{-1}(S)$ ou $T = \varphi^{-1}(\varphi(T)) = \varphi^{-1}(H) = G$. Logo, $\varphi^{-1}(S)$ é um subsemigrupo maximal em G.

Reciprocamente, suponhamos que $\varphi^{-1}(S)$ seja um subsemigrupo maximal em G. Então S é subsemigrupo mas não é grupo, pois caso contrário $\varphi^{-1}(S)$

também o seria. Seja T um subsemigrupo tal que $S \subset T \subset H$. Como φ é sobrejetora então $\varphi(\varphi^{-1}(T)) = T$ e como $S \subset T$ temos que $\varphi^{-1}(S) \subset \varphi^{-1}(T)$. Mas, como $\varphi^{-1}(S)$ é maximal, então $\varphi^{-1}(T) = \varphi^{-1}(S)$ ou $\varphi^{-1}(T) = G$. Assim, $T = \varphi(\varphi^{-1}(T)) = \varphi(\varphi^{-1}(S)) = S$ ou $T = \varphi(\varphi^{-1}(T)) = \varphi(G) = H$. Portanto, S é um subsemigrupo maximal em H. ■

De maneira análoga ao que fizemos acima podemos demonstrar os seguintes lemas.

Lema 2.16. *Seja $\varphi : G \to H$ um homomorfismo sobrejetor e seja S um submonóide de H. Então S é invariante em H se, e somente se, $\varphi^{-1}(S)$ é invariante em G.*

Lema 2.17. *Sejam $\varphi : G \to H$ um homomorfismo sobrejetor e S um submonóide de H. Então S é total em H se, e somente se, $\varphi^{-1}(S)$ é total em G.*

Corolário 2.18. *Seja S um submonóide de G. Então S é maximal em G se, e somente se, S_R é maximal em G_R.*

Demonstração: Para ver isto, basta considerarmos o homomorfismo canônico $\varphi : G \to G/C(S)$ e aplicar o Lema 2.15. ■

2.1 Generalidades Topológicas

As generalidades topológicas, a que se refere o título desta seção, são resultados válidos para semigrupos em grupos topológicos conexos. Por isso, ao longo desta seção G designará sempre um grupo possuindo estas propriedades.

Lema 2.19. *Sejam S um subsemigrupo próprio de G e U um aberto tal que $U \subseteq S \subset G$. Então $S \cap U^{-1} = \emptyset$.*

Demonstração: Suponhamos que $S \cap U^{-1} \neq \emptyset$. Desta forma, existe $s \in S$ tal que $s \in U^{-1}$. Assim, $s^{-1} \in U \subseteq S$. Como $1 = ss^{-1} \in sU \subseteq sS \subseteq S$, temos então que sU é uma vizinhança aberta de 1 contida em S, isto é, $1 \in \text{int}(S)$. Sendo G conexo temos, pela Proposição 1.44, que $S = G$, o que contradiz o fato de S ser um subsemigrupo próprio de G. Portanto, $S \cap U^{-1} = \emptyset$. ■

Em geral, um subsemigrupo não tem por que estar contido em um subsemigrupo maximal. Porém, no caso em que o subsemigrupo é próprio e tem interior não vazio é possível mostrar a existência de um subsemigrupo maximal que o contém.

Proposição 2.20. *Seja S um subsemigrupo próprio de G tal que* $\text{int}(S) \neq \emptyset$. *Então S está contido em um subsemigrupo maximal.*

Demonstração: Seja X a família dos subsemigrupos de G que são próprios, têm interior não vazio e contém S. Note primeiramente que $S \in X$, logo $X \neq \emptyset$. Considere $\mathcal{M}$ uma cadeia em X e seja $T = \bigcup_{K \in \mathcal{M}} K$. Afirmamos que T é subsemigrupo. De fato, se $x, y \in T$, então $x \in K_1$ e $y \in K_2$, com K_1 e $K_2 \in \mathcal{M}$. Como M é uma cadeia temos que $K_1 \subset K_2$ ou $K_2 \subset K_1$. Assim $xy \in K_1$ ou $xy \in K_2$ e, conseqüentemente, $xy \in T$. Isto mostra que T é um subsemigrupo.

Além disso, como $\text{int}(K) \neq \emptyset$ temos que $\text{int}(T) \neq \emptyset$ e, como $S \subset K$, para todo $K \in \mathcal{M}$, segue que $S \subset T$. Afirmamos agora que $T \neq G$. De fato, seja $U = \text{int}(S)$. Pelo Lema 2.19, temos que $K \cap U^{-1} = \emptyset$, para todo $K \in M$.

Logo T é um subsemigrupo próprio de G e T também é um limitante superior de $\mathcal{M}$. Assim, pelo Lema de Zorn, X possui elementos maximais. ■

Por meio deste resultado podemos determinar uma condição para os subconjuntos de G, de tal forma que o subsemigrupo gerado por esse conjunto seja todo o grupo G.

Corolário 2.21. *Seja $B \subseteq G$ tal que* $\mathrm{int}(B) \neq \emptyset$ *e seja S o subsemigrupo gerado por B em G. Se B não está contido em nenhum subsemigrupo maximal com interior não vazio, então $S = G$.*

Demonstração: Se S é um subsemigrupo próprio de G então, pela Proposição 2.20, S está contido em um subsemigrupo maximal. Assim, B está contido em um subsemigrupo maximal uma vez que $B \subset S$, o que é uma contradição. Portanto, $S = G$. ■

Proposição 2.22. *Se M um subsemigrupo maximal de G tal que* $\mathrm{int}(M) \neq \emptyset$, *então M é fechado.*

Demonstração: Seja $U = \mathrm{int}(M)$. Afirmamos que $\overline{M} \cap U^{-1} = \emptyset$. De fato: como U é aberto temos que U^{-1} também o é, e então $(U^{-1})^c$ é fechado. Segue do Lema 2.19 que $M \cap U^{-1} = \emptyset$ e daí $M \subset ((U^{-1})^c)$. Conseqüentemente, $\overline{M} \subset \overline{((U^{-1})^c)} = (U^{-1})^c$ e, assim, $\overline{M} \cap U^{-1} = \emptyset$. Logo, $\overline{M}$ é um subsemigrupo próprio de G contendo M. Como M é maximal temos que $\overline{M} = G$ ou $\overline{M} = M$. Desta forma, como $\overline{M}$ é próprio, concluímos que $\overline{M} = M$, ou seja, M é fechado. ■

Proposição 2.23. *Se S é um subsemigrupo fechado de G, então $H(S)$ e $C(S)$ são fechados.*

Demonstração: Primeiramente, note que se S é fechado então S^{-1} também o é. Sendo assim $H(S) = S \cap S^{-1}$ é fechado. Agora, se $H(S)$ é fechado, segue que $gH(S)g^{-1}$ é fechado para todo $g \in G$. Logo, $C(S) = \bigcap_{g \in G} gH(S)g^{-1}$ também é fechado. ■

Proposição 2.24. *Seja M um subsemigrupo maximal de G com $\operatorname{int}(M) \neq \emptyset$. Se H é um subgrupo compacto de G, então $H \cap \operatorname{int}(M) = \emptyset$.*

Demonstração: Suponhamos que $H \cap \operatorname{int}(M) \neq \emptyset$. Como a interseção de dois subsemigrupos é ainda um subsemigrupo, temos que $H \cap \operatorname{int}(M)$ é um subsemigrupo aberto do grupo compacto H. Pela Proposição 1.48, $H \cap \operatorname{int}(M)$ é um subgrupo compacto e aberto de H. Assim, $1 \in H \cap \operatorname{int}(M)$ e, conseqüentemente, $1 \in \operatorname{int}(M)$. Como G é conexo, segue da Proposição 1.44 que $M = G$, o que é uma contradição pois M é maximal. Portanto, $H \cap int(M) = \emptyset$. ■

Proposição 2.25. *Seja M um subsemigrupo maximal de G com $\operatorname{int}(M) \neq \emptyset$. Se H é subgrupo compacto e normal, então $H \subset C(M)$.*

Demonstração: Sabemos que $\operatorname{int}(M)$ é um ideal de M e, pela Proposição 2.24, que $H \cap \operatorname{int}(M) = \emptyset$. Como H é normal temos que $MH \subset HM$ e então, pelo Lema 2.6, $H \subseteq M$. Desta forma, segue da Proposição 1.38 que $H \subset C(M)$. ■

Proposição 2.26. *Seja M um subsemigrupo maximal do grupo G tal que $H(M) \cap \overline{\operatorname{int}(\mathrm{M})} \neq \emptyset$. Então $\operatorname{int}(M)$ é um subsemigrupo maximal aberto e $M = \overline{\operatorname{int}(M)}$.*

Demonstração: Seja $I = \text{int}(M)$. Segue da Proposição 1.45 que I é um ideal de M assim, I é um subsemigrupo aberto. Como $I \subset M$ temos que $\overline{I} \subset \overline{M}$ então, pela Proposição 2.22, $\overline{I} \subset M$. Se $g \in H(M) \cap \overline{I}$, então $M = Mg \subseteq M\overline{I} \subseteq \overline{MI} \subseteq \overline{I}$, isto é, $M \subset \overline{I}$ e assim $\overline{I} = M$.

Resta mostrarmos que I é um subsemigrupo maximal. Para tanto, considere $T \neq G$ um subsemigrupo aberto tal que $I \subset T$. Assim, $M = \overline{I} \subset \overline{T}$ e, pelo Lema 2.19, $\overline{T} \neq G$. Logo, $\overline{T} = M$ uma vez que M é maximal. Então $T = \text{int}(T) \subseteq I$. Assim, $T = I$ e, portanto, I é um subsemigrupo maximal aberto. ■

2.2 Semigrupos Totais

Ao longo desta seção G continuará denotando um grupo topológico conexo.

Mesmo quando consideramos os grupos abelianos os subsemigrupos totais de um grupo nem sempre são maximais, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 2.27. Seja $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$.

Note que $\mathbb{R}^2 = S \cup S^{-1}$, isto é, S é total. Agora se considerarmos $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, teremos $S \subset M \subset \mathbb{R}^2$ e $S \neq M \neq \mathbb{R}^2$, ou seja, M não é maximal.

No próximo resultado estabelemos uma condição para que um subsemigrupo total seja maximal.

Proposição 2.28. *Seja M um subsemigrupo próprio total e fechado de G. Então M é maximal.*

Demonstração: Sejam $x \notin M$ e $U = G \backslash M$. Como $G = M \cup M^{-1}$ segue que $U \subseteq M^{-1}$ e daí $U^{-1} \subseteq M$. Desta forma, o subsemigrupo T gerado por $\{x\} \cup M$ contém xU^{-1}. Sendo U aberto e $x \in U$ temos que xU^{-1} também é aberto e, além disso, $1 \in xU^{-1}$. Logo, $1 \in xU^{-1} \subset T$ e, conseqüentemente, T é um subsemigrupo tal que $1 \in \text{int}(T)$. Da Proposição 1.44, segue que $T = G$ e, portanto, M é maximal. ∎

Proposição 2.29. *Seja M um subsemigrupo fechado de G. Então M é total se, e somente se, $G = M^{\#} \cup H(M) \cup (M^{\#})^{-1}$. Neste caso, $M^{\#} = \text{int}(M)$, $M = \overline{M^{\#}}$ e $H(M) = \partial(M^{\#})$, onde $\partial(M^{\#})$ denota a fronteira de $M^{\#}$.*

Demonstração: A equivalência segue da igualdade

$$M \cup M^{-1} = M^{\#} \cup H(M) \cup (M^{\#})^{-1}$$

a qual é facilmente verificada. Com efeito, se $x \in M \cup M^{-1}$ então $x \in M$ ou $x \in M^{-1}$. Se $x \in M$ e $x \notin M^{-1}$, então $x \in M^{\#}$. Se $x \in M$ e $x \in M^{-1}$, então $x \in H(M)$. Se $x \in M^{-1}$ e $x \notin M$, temos que $x^{-1} \in M$ e $x^{-1} \notin M^{-1}$, logo $x^{-1} \notin H(M)$. Como $x^{-1} \in M$ e $x^{-1} \notin H(M)$, então $x^{-1} \in M^{\#}$. Logo $x \in (M^{\#})^{-1}$ e, portanto, $M \cup M^{-1} \subset M^{\#} \cup H(M) \cup (M^{\#})^{-1}$.

Por outro lado, se $x \in M^{\#} \cup H(M) \cup (M^{\#})^{-1}$ então $x \in M^{\#}$ ou $x \in H(M)$ ou $x \in (M^{\#})^{-1}$. Se $x \in M^{\#}$ então $x \in M$. Se $x \in H(M)$ então temos que $x \in M \cup M^{-1}$. E se $x \in (M^{\#})^{-1}$, então $x^{-1} \in M^{\#} = M \backslash H(M)$. Logo $x^{-1} \in M$ e $x^{-1} \notin H(M)$, então $x \in M^{-1}$. Daí $M^{\#} \cup H(M) \cup (M^{\#})^{-1} \subset M \cup M^{-1}$ e, portanto, $M \cup M^{-1} = M^{\#} \cup H(M) \cup (M^{\#})^{-1}$.

Se M é total, então como $M = M^{\#} \cup H(M)$ e $M \cap (M^{\#})^{-1} = \emptyset$, temos que $(M^{\#})^{-1} = G \backslash M$ é aberto, pois M é fechado e, conseqüentemente, $M^{\#}$

é aberto. Como $M^{\#}$ é aberto e $M^{\#} \subset M$ então $M^{\#} \subset \text{int}(M)$. Pela Proposição 1.45 temos que $\text{int}(M)$ é um ideal e, pela Proposição 1.35, $M^{\#}$ é o maior ideal de M. Logo, $M^{\#} = \text{int}(M)$.

Logo $M = \overline{M^{\#}}$. De fato, se $M^{\#} = \overline{M^{\#}}$ então $M^{\#} = \text{int}(M) = \overline{M^{\#}}$ é aberto e fechado, o que é uma contradição, pois G é conexo. Assim temos que $M^{\#} \neq \overline{M^{\#}}$, isto é, existe $g \in H(M) \cap \overline{M^{\#}}$. Como M é maximal temos que $H(M) \cap \overline{M^{\#}} = H(M) \cap \overline{\text{int}(M)} \neq \emptyset$. Segue da Proposição 2.26 que $M = \overline{\text{int}(M)} = \overline{M^{\#}}$.

Além disso, como $\overline{M^{\#}} = M$ e $\text{int}(M) = \overline{M^{\#}}$ temos que
$\partial(M^{\#}) = \overline{M^{\#}} \backslash \text{int}(M^{\#}) = \overline{M^{\#}} \backslash \text{int}(\text{int} M) = \overline{M^{\#}} \backslash \text{int}(M) = M \backslash M^{\#} = H(M)$. ■

A proposição seguinte determina os subsemigrupos maximais do grupo aditivo dos reais.

Proposição 2.30. *Seja M um subsemigrupo maximal fechado do grupo aditivo dos números reais. Então $M = \mathbb{R}^+$ ou $M = -\mathbb{R}^+$.*

Demonstração: Suponhamos que existe $y \in M$ tal que $y > 0$. Considere $y' = \dfrac{1}{n} y \in \mathbb{R}$, onde n é um inteiro positivo. Assim, $ny' = n(\dfrac{1}{n} y) = y \in M$. Aplicando o Lema 2.14 para $H = \mathbb{R}$, temos então que $y' \in M$, para todo inteiro positivo n. Portanto, como M é subsemigrupo, $ry \in M$, para todos os racionais positivos r. Como M é fechado temos daí que $\mathbb{R}^+ \subseteq M$ e, como $\mathbb{R}^+$ é fechado e total, da Proposição 2.28 segue que $\mathbb{R}^+$ é maximal. Portanto, $M = \mathbb{R}^+$. Analogamente, se M contém um número negativo obtemos que $M = -\mathbb{R}^+$. ■

Capítulo 3

Semigrupos Maximais em Grupos de Lie Nilpotentes

Neste capítulo estudaremos semigrupos maximais em grupos de Lie nilpotentes. Primeiramente, caracterizaremos os semigrupos maximais invariantes e, como conseqüência obteremos que os semigrupos maximais fechados dos espaços vetoriais topológicos são semi-espaços. Veremos que todo semigrupo maximal é total e invariante.

3.1 Semigrupos Maximais Invariantes

O teorema seguinte estabelece, como caso particular, que todo subsemigrupo maximal em um grupo topológico abeliano é total. Mais precisamente temos:

Teorema 3.1. *Seja G um grupo topológico conexo o qual é localmente compacto ou localmente conexo, e seja M um subsemigrupo fechado. Então as* *seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *M é maximal e invariante;*

(2) *M é total e invariante;*

(3) *M é total, invariante e $H(M) = C(M)$, isto é, $H(M)$ é normal;*

(4) *existe um homomorfismo aberto e contínuo de G sobre $(\mathbb{R}, +)$ tal que a imagem de M é $\mathbb{R}^+$;*

(5) *M é maximal e G_R é topologicamente isomorfo ao grupo aditivo dos números reais. Neste caso o isomorfismo topológico leva M_R em $\mathbb{R}^+$ ou em $-\mathbb{R}^+$.*

Além disso, no caso em que G é localmente compacto estas condições implicam em $H(M)$ ser conexo.

Demonstração: Primeiramente, note que (1) e (2) são equivalentes:

(1)$\Longrightarrow$ (2) Segue imediatamente do Corolário 2.10.

(2)$\Longrightarrow$(1) Conseqüência imediata da Proposição 2.28.

(2)$\Longrightarrow$ (3) Em primeiro lugar, observemos que se M é invariante, então M^{-1} também o é. Assim, $H(M) = M \cap M^{-1}$ é subgrupo normal de G. Desta forma, pelas Proposições 1.34 e 1.38 temos que $H(M) = C(M)$.

(3)$\Longrightarrow$ (5) Como M é total e fechado, segue da Proposição 2.28 que M é maximal. Pelo item (3), temos que $H(M) = C(M)$ é normal, então $G_R = G/C(M) = G/H(M)$ é um grupo conexo, pois G é conexo. Como a aplicação quociente é aberta, temos que G_R é localmente compacto ou localmente conexo.

Além disso, a relação $\leqq_{M_R}$, definida na Seção 1.9, é uma relação de ordem total sobre G_R. De fato, primeiramente note que $C(M) \subset M/C(M)$, já que

$1 \in M$ pois M é maximal. Assim, pelo item (i) da Proposição 1.50, temos que $\leqq_{M_R}$ é reflexiva. Como $C(M_R) = C(M) = H(M)$, segue do item (ii) da Proposição 1.50 que $\leqq_{M_R}$ é anti-simétrica. Por definição temos que $\leqq_{M_R}$ é transitiva. Como M é total, segue do Lema 2.17 que M_R é total. Logo, pela Proposição 1.52, quaisquer $x, y \in G_R$ são comparáveis, ou seja, G_R é totalmente ordenado. Assim, concluímos que G_R é um grupo topológico conexo totalmente ordenado o qual é localmente compacto ou localmente conexo.

Como M é fechado temos que M_R é fechado. Então M_R é um conjunto fechado de elementos positivos, isto é, maiores ou iguais a 1.

Já sabemos que M_R é total, então $G_R \backslash C(M)$ é a união disjunta dos conjuntos fechados $M_R \backslash C(M)$ e $M_R^{-1} \backslash C(M)$. Daí segue que $G_R \backslash C(M)$ não é conexo. Como M_R é total e fechado então M_R é maximal e como M_R também é invariante segue do Lema 1.54 que M_R é arquimediano. Assim, G_R está munido de uma ordem arquimediana, ou seja, G_R é arquimediano. Logo, pelo Teorema 1.55 segue que G_R é isomorfo a um subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$ e, portanto, G_R é abeliano. Mais ainda, como G_R é conexo obtemos que G_R é isomorfo a $(\mathbb{R}, +)$. Desta forma, existe um isomorfismo $\varphi : G_R \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$. Como M_R é fechado e total temos, pela Proposição 2.28, que M_R é maximal e fechado em G_R. Assim, pelo Lema 2.15, $\varphi(M_R)$ é maximal em $(\mathbb{R}, +)$. Daí, pela Proposição 2.30, $\varphi(M_R)$ é $\mathbb{R}^+$ ou $-\mathbb{R}^+$.

(5)$\Longrightarrow$ (4) De (5), sabemos que existe um isomorfismo $\varphi : G_R \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ tal que $\varphi(M_R) = \mathbb{R}^+$ ou $\varphi(M_R) = -\mathbb{R}^+$. Considere $\theta : G \longrightarrow G/C(M)$ o homomorfismo sobrejetor canônico. Se $\varphi(M_R) = \mathbb{R}^+$ então $\varphi \circ \theta$ será um homomorfismo aberto contínuo tal que $(\varphi \circ \theta)(M) = \mathbb{R}^+$. Caso contrário, isto é, $\varphi(M_R) = -\mathbb{R}^+$ basta considerarmos o isomorfismo $\mu : -\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dado por $\mu(x) = -x$ e, assim, $(\mu \circ \varphi \circ \theta)(M) = \mathbb{R}^+$.

(4)$\Longrightarrow$ (2) Note que $\mathbb{R}^+$ e $-\mathbb{R}^+$ são invariantes e totais, pois $\mathbb{R}$ é abeliano e $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup -\mathbb{R}^+$. Desta forma, como M_R é isomorfo a $\mathbb{R}^+$ ou a $-\mathbb{R}^+$, segue que M_R é invariante e total. Aplicando os Lemas 2.16 e 2.17 para o homomorfismo sobrejetor $\theta : G \longrightarrow G/C(M)$, obtemos que $\theta^{-1}(M_R) = M$ é invariante e total.

Agora, no caso em que G é localmente compacto. Como $H(M)$ é fechado e normal, $\mathbb{R}$ é simplesmente conexo e $G/H(M) = G/C(M) \simeq (\mathbb{R}, +)$, segue da Proposição 1.5 que $H(M)$ é conexo.

■

Vale lembrar que no caso em que o grupo é abeliano todos os subsemigrupos são invariantes.

Corolário 3.2. *Os subsemigrupos maximais fechados de um espaço vetorial topológico V são os semi-espaços.*

Demonstração: Seja M um subsemigrupo maximal fechado de V. Como todo espaço vetorial é um grupo abeliano temos que M é invariante. Desta forma, pelo item (4) do teorema anterior existe um homomorfismo contínuo $\varphi : V \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ tal que $\varphi(M) = \mathbb{R}^+$, ou seja, $M = \{x \in V : \varphi(x) \geq 0\}$. Pelo Teorema de Riesz sabemos existe um $v_\varphi \in V$ tal que $\varphi(x) = \langle x, v_\varphi \rangle$, para todo $x \in V$. Portanto, $M = \{x \in V : \langle x, v_\varphi \rangle \geq 0\}$ é um semi-espaço. ■

3.2 Semigrupos Maximais

O estudo dos grupos nilpotentes teve início em 1897 com W. Burnside, autor do livro "The Theory of Groups of Finite Order" (veja [1]) inteiramente dedicado à teoria abstrata de grupos. Embora a classe de grupos nilpotentes seja mais ampla que a dos grupos abelianos as técnicas envolvidas no estudo de questões relacionadas com ela lembram, em muito, técnicas relacionadas com os grupos abelianos. Este fato ficará claro no transcorrer desta seção.

Começaremos com a seguinte definição.

Definição 3.3. Seja G um grupo. O *comutador* de dois elementos $g, h \in G$ é o produto $g^{-1}h^{-1}gh$ o qual denotaremos por $[g, h]$.

Se H e K são subgrupos de G, denotaremos por [K, H] o subgrupo de G gerado pelo conjunto $\{[k, h] : k \in K, h \in H\}$.

A *série central descendente* do grupo G é definida, por indução, como:

$$\begin{aligned} &G_0 = G \\ &G_1 = [G, G] \\ &\vdots \\ &G_{n+1} = [G, G_n] \end{aligned}$$

onde n é um inteiro não negativo.

Definição 3.4. Um grupo G é dito *nilpotente* se $G_{n+1} = \{1\}$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.5. Todo grupo abeliano é nilpotente pois o mesmo só possui comutadores triviais.

No próximo exemplo temos um protótipo dos grupos de Lie nilpotentes, conhecido como *grupo de Heisenberg.*

Exemplo 3.6. (Grupo de Heisenberg) Seja $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$, munido com o produto usual de matrizes. Identificando a matriz $\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ com $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ temos $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$ munido da operação

$$(x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + x_1 y_2).$$

Por meio de cálculos diretos podemos provar que H é um grupo que tem $(0, 0, 0)$ como elemento neutro e $(-x_1, -y_1, x_1 y_1 - z_1)$ como inverso do elemento $(x_1, y_1, z_1) \in H$. E como se verifica facilmente $H_2 = \{1\}$ e então H é nilpotente.

O próximo resultado garante que o quociente de um grupo nilpotente é ainda um grupo nilpotente.

Lema 3.7. *Sejam G um grupo nilpotente e N um subgrupo normal de G. Então o grupo quociente G/N é nilpotente.*

Demonstração: Seja $H = G/N = \{gN : g \in G\}$. Se $x, y \in H$ então $x = aN$ e $y = bN$, com $a, b \in G$. Assim

$$\begin{aligned} H_1 = [H, H] &= \{x^{-1}y^{-1}xy : x, y \in H\} = \\ &= \{(a^{-1}N)(b^{-1}N)(aN)(bN) : a, b \in G\} = \\ &= \{(a^{-1}b^{-1}ab)N : a, b \in G\} = \{[a, b]N : a, b \in G\} = \\ &= [G, G]N = G_1 N. \end{aligned}$$

Assumindo $H_n = G_n N$ obtemos que

$H_{n+1} = [H, H_n] = \{x^{-1}y^{-1}xy : x \in H, y \in H_n\} =$

$$= \{(a^{-1}N)(b^{-1}N)(aN)(bN) : a \in G, b \in G_n\} =$$
$$= \{(a^{-1}b^{-1}ab)N : a \in G, b \in G_n\} =$$
$$= \{[a,b]N : a \in G, b \in G_n\} = [G, G_n]N = G_{n+1}N.$$

Assim, pelo princípio de indução, $H_n = G_nN$ para todo $n \geq 1$. Como G é grupo nilpotente, então existe $n \geq 1$ tal que $G_n = \{1\}$. Logo $H_n = G_nN = N$ e, portanto, H é nilpotente. ■

Lembremos que o centro de um grupo G, denotado por $Z(G)$, é definido como: $Z(G) = \{x \in G : gx = xg, \text{para todo}\, g \in G\}$.

Proposição 3.8. *Seja G um grupo. Se $G_{n+1} = \{1\}$ então $G_n \subset Z(G)$.*

Demonstração: Seja $h \in G_n$. Como

$$G_{n+1} = [G, G_n] = \{g^{-1}h^{-1}gh : g \in G, h \in G_n\} = \{1\},$$

temos que $g^{-1}h^{-1}gh = 1$, para todo $g \in G$, isto é, $gh = hg$, para todo $g \in G$. Assim, $h \in Z(G)$. ■

Alguns resultados necessários para o estudo dos subsemigrupos maximais dos grupos nilpotentes são válidos para grupos em geral. Como, por exemplo, o próximo lema.

Lema 3.9. *Sejam G um grupo e M um subsemigrupo maximal de G. Se $g, h \in G$ são tais que $[g, h] \in Z(G)$, então $[g, h]$, $[g, h]^{-1} \in M$.*

Demonstração: Seja $w = [g, h]$. Se $w = 1$, o lema é trivial, pois como M é maximal temos que $1 \in M$. Pela Proposição 2.8, $w \in M \cup M^{-1}$, isto é, $w \in M$ ou $w^{-1} \in M$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $w \in M$ e mostrar que $w^{-1} \in M$. Para tanto, suponhamos que $w^{-1} \notin M$ e consideremos $S = \{w^{-n} : n \geq 0\}$. Como $w \in Z(G)$, então SM é um semigrupo contendo w^{-1} e M. Pela maximalidade de M, temos que $SM = M$ ou $SM = G$. Mas $w^{-1} \notin M$, daí obtemos que $SM = G$. Assim, $g = w^{-r}u$, $h = w^{-m}v$, $g^{-1} = w^{-k}x$, $h^{-1} = w^{-p}y$, para alguns $r, m, k, p \geq 0$ e $u, v, x, y \in M$. Como $g = w^{-r}u$ temos que $w^r g = u \in M$. Da mesma forma, $w^m h, w^k g^{-1}, w^p h^{-1} \in M$. Se $q = r + m + k + p$ então $w^q g, w^q h, w^q g^{-1}, w^q h^{-1} \in M$, pois $w \in M$. Como $gh = hgg^{-1}h^{-1}gh = hg[g,h]$ e $[g,h] \in Z(G)$, por indução, temos que $g^n h^n = h^n g^n [g,h]^{n^2}$, isto é, $g^n h^n [g,h]^{-n^2} = h^n g^n$. Consideremos $z = w^q$, logo $(zg^{-1})^n (zh)^n (zg)^n (zh^{-1})^n \in M$, para todo $n \geq 1$. Como $z \in Z(G)$ temos

$$\begin{aligned}
(zg^{-1})^n (zh)^n (zg)^n (zh^{-1})^n &= z^n g^{-n} z^n h^n z^n g^n z^n h^{-n} = z^{4n} g^{-n} (h^n g^n) h^{-n} \\
&= z^{4n} g^{-n} (g^n h^n [g,h]^{-n^2}) h^{-n} = z^{4n} h^n [g,h]^{-n^2} h^{-n} \\
&= z^{4n} h^n w^{-n^2} h^{-n}
\end{aligned}$$

e como $w \in Z(G)$ obtemos que

$$z^{4n} h^n w^{-n^2} h^{-n} = z^{4n} h^n h^{-n} w^{-n^2} = z^{4n} w^{-n^2} = w^{4nq} w^{-n^2} = w^{4nq-n^2} \in M.$$

Para n suficientemente grande $4nq - n^2 < 0$, assim $(w^{-1})^{4nq-n^2} \in M$. Desta forma, segue do Lema 2.14, que $w^{-1} \in M$, o que é uma contradição. Portanto, $[g,h]$, $[g,h]^{-1} \in M$. ∎

Proposição 3.10. *Seja M um subsemigrupo maximal de G tal que M é reduzido em G. Então, $G/Z(G)$ tem centro trivial.*

Demonstração: Suponhamos que $Z(G/Z(G)) \neq Z(G)$. Consideremos $\varphi : G \longrightarrow G/Z(G)$ o homomorfismo canônico, então existe $g \in G$ tal que $\varphi(g) \in Z(G/Z(G))$ mas $\varphi(g)$ não é a identidade. Como $g \notin Z(G)$, existe $h \in G$ tal que $gh \neq hg$. Desta forma, $[g,h] = g^{-1}h^{-1}gh \neq 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
\varphi([g,h]) &= \varphi(g^{-1}h^{-1}gh) = \varphi(g^{-1})\varphi(h^{-1})\varphi(g)\varphi(h) \\
&= \varphi(g^{-1})\varphi(g)\varphi(h^{-1})\varphi(h) = \varphi(g^{-1}gh^{-1}h) = \varphi(1)
\end{aligned}$$

e então $[g,h] \in Z(G)$.

Pelo Lema 3.9, $[g,h]$, $[g,h]^{-1} \in M$ e, como $[g,h] \in Z(G)$, o subgrupo gerado $S = \{[g,h] : g,h \in G\}$ é normal e está contido em M, mas isto contradiz o fato de M ser reduzido em G. Assim, $G/Z(G)$ tem centro trivial. ■

Teorema 3.11. *Seja M um subsemigrupo maximal de um grupo nilpotente G. Então M é total e invariante em G e $[G,G] \subseteq H(M)$. Em particular $G_R = G/H(M)$ é abeliano.*

Demonstração: Seja (G_R, M_R) a redução de (G,M), isto é, $G_R = G/C(M)$ e $M_R = M/C(M)$. Pelo Lema 2.15, M_R é maximal em G_R e, pelo Lema 3.7, G_R é nilpotente. Novamente pelo Lema 3.7 temos que qualquer quociente de G_R é nilpotente, em particular, $G_R/Z(G_R)$ é nilpotente e, se não for trivial, possui centro não trivial. Mas M_R é um semigrupo maximal de G_R e é reduzido. Então, segue da Proposição 3.10 que $G_R/Z(G_R)$ possui centro trivial. Desta forma, concluímos que $G_R/Z(G_R)$ é trivial, isto é, $Z(G_R) = G_R$ e, conseqüentemente, G_R é abeliano. Então $[G_R, G_R] = \{1\} = C(M)$.

Mas

$$\begin{aligned}[G_R, G_R] &= \{a^{-1}C(M)b^{-1}C(M)aC(M)bC(M) : a,b \in G\} \\ &= \{a^{-1}b^{-1}abC(M) : a,b \in G\} \\ &= \{[a,b]C(M) : a,b \in G\} = [G,G]C(M).\end{aligned}$$

Assim $[G_R, G_R] = [G,G]C(M) = C(M)$ e, conseqüentemente temos que $[G,G] \subset C(M) \subset H(M)$. Pelo Corolário 2.13, M_R é total e, pelo Lema 2.17, M é total em G. Como $[G,G] \subseteq H(M) \subseteq M$ então, para $g \in G$ e $m \in M$, temos que $[g, m^{-1}] = g^{-1}mgm^{-1} \in M$, isto implica que $(g^{-1}mgm^{-1})m = g^{-1}mg \in M$. Logo M e, conseqüentemente, $H(M)$ são invariantes. Assim, $C(M) = H(M)$ e, portanto, $G_R = G/C(M) = G/H(M)$ é abeliano. ■

Corolário 3.12. *Seja G um grupo topológico conexo nilpotente que é localmente compacto ou localmente conexo. Seja M um subsemigrupo maximal com* $\text{int}(M) \neq \emptyset$. *Então* (G_R, M_R) *é topologicamente isomorfo a* $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$. *Daí* $C(M) = H(M)$ *é um subgrupo normal fechado, que também é conexo no caso localmente compacto.*

Demonstração: Pelo Teorema 3.11 M é total e invariante, e pela Proposição 2.22 M é fechado. O restante segue do Teorema 3.1. ■

Proposição 3.13. *Seja H um subgrupo conexo, normal e nilpotente de um grupo conexo G e seja M um subsemigrupo maximal tal que* $\text{int}(M) \neq \emptyset$. *Então* $[H, H] \subseteq C(M)$.

Demonstração: Mostremos inicialmente que $[H, H] \cap \text{int}(M) = \emptyset$. De fato, suponha que $[H, H] \cap \text{int}(M) \neq \emptyset$. Como $1 \notin \text{int}(M)$ pois, caso contrário, teríamos $M = G$, então $\text{int}(M) \cap H$ é um subsemigrupo próprio de H tal que $\text{int}(\text{int}(M) \cap H) \subset H$. Pela Proposição 2.20, existe um subsemigrupo maximal S de H tal que $\text{int}(M) \cap H \subseteq S$. Assim, pelo Teorema 3.11, temos que $[H, H] \subseteq H(S) \subseteq S$. Se $g \in [H, H] \cap \text{int}(M)$, então segue que $g^{-1} \in [H, H] \cap (\text{int}(M))^{-1} \subset S \cap (\text{int}(M))^{-1}$, o que contradiz o Lema 2.19. Logo, $[H, H] \cap int(M) = \emptyset$.

Além disso, $\text{int}(M)$ é um ideal em M e $[H, H]$ é normal. Assim, pelo Lema 2.6, temos que $[H, H] \subset M$, e da Proposição 1.38 segue que $[H, H] \subset C(M)$.

■

No próximo resultado vamos determinar condições sob as quais um subconjunto de um grupo é gerador do grupo.

Corolário 3.14. *Seja G um grupo topológico conexo e nilpotente. Se $A \subseteq G$ e $\mathrm{int}(A) \cap [G,G] \neq \emptyset$, então o subsemigrupo gerado por A é todo G.*

Demonstração: Seja S o semigrupo gerado por A. Se $S \neq G$ então, pela Proposição 2.20, $S \subset M$, onde M é um subsemigrupo maximal. Note que $\mathrm{int}(M) \cap H(M) = \emptyset$ pois caso contrário $1 \in \mathrm{int}(M)$ e, daí, teríamos $M = G$. Segue da Proposição 3.13 que $[G,G] \subseteq C(M) \subseteq H(M)$ mas, por hipótese, $\emptyset \neq \mathrm{int}(A) \cap [G,G] \subseteq \mathrm{int}(M) \cap [G,G]$, o que contradiz $H(M) \cap \mathrm{int}(M) = \emptyset$. Portanto, $S = G$. ■

Como aplicação deste resultado, veremos agora que os subsemigrupos maximais de interior não vazio do grupo de Heisenberg H são os semi-espaços que contém o centro do grupo.

Proposição 3.15. *O conjunto $\pi = \{(x,y,z) \in H : ax + by \geq 0\}$ é um subsemigrupo maximal de H, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a^2 + b^2 \neq 0$.*

Demonstração: Sejam $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \pi$, ou seja, $ax_1 + by_1 \geq 0$ e $ax_2 + by_2 \geq 0$. Mas $(x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + x_1 y_2)$ e, como $a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) = ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2 = ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2 \geq 0$, temos que $(x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) \in \pi$. Portanto, π é subsemigrupo.

Para ver que π é maximal, suponhamos que exista um subsemigrupo A em H tal que $\pi \subset A \subset H$ e $\pi \neq A$. Como $\pi \neq A$ existe $(x_0, y_0, z_0) \in A$ tal que $ax_0 + by_0 < 0$. Assim, $a(-x_0) + b(-y_0) > 0$ e conseqüentemente $(-x_0, -y_0, -z_0) \in \mathrm{int}(\pi)$. Logo $(x_0, y_0, z_0) * (-x_0, -y_0, -z_0) = (0, 0, -x_0 y_0)$. Mas $\pi \subset A$, logo $\mathrm{int}(\pi) \subset \mathrm{int}(A)$, e como $(-x_0, -y_0, -z_0) \in \mathrm{int}(\pi)$ então $(-x_0, -y_0, -z_0) \in \mathrm{int}(A)$. Como $(x_0, y_0, z_0) \in A$ e $\mathrm{int}(A)$ é ideal em A temos que $(x_0, y_0, z_0) * (-x_0, -y_0, -z_0) = (0, 0, -x_0 y_0) \in \mathrm{int}(A)$.

Sabemos que $[H,H]=\{(0,0,z): z\in \mathbb{R}\}$, então $(0,0,-x_0y_0)\in[H,H]$. Assim $(0,0,-x_0y_0)\in \text{int}(A)\cap[H,H]$ e, pelo Corolário 3.14, $A=H$. Portanto, π é um subsemigrupo maximal de H. ∎

Teorema 3.16. *Seja M um semigrupo maximal do grupo H. Então existem $a,b\in\mathbb{R}$, onde $a^2+b^2\neq 0$, tais que $M=\{(x,y,z): ax+by\geq 0\}$.*

Demonstração: Considere o homomorfismo sobrejetor $\theta: H\longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\theta(x,y,z)=(x,y)$. Afirmamos que $\theta(M)$ é um subsemigrupo maximal de $\mathbb{R}^2$. De fato, $\theta(M)$ é um subsemigrupo, pois M é subsemigrupo. Resta mostrar que $\theta(M)$ é maximal. Suponhamos que exista um subsemigrupo S em $\mathbb{R}^2$ tal que $\theta(M)\subset S\subset\mathbb{R}^2$ e $\theta(M)\neq S$. Logo existe $(x', y')\in S$ tal que $(x', y', z)\notin M$, para algum $z\in\mathbb{R}$. Como $(0,0,-z)\in M$ temos que $(x', y', z)*(0,0,-z)=(x', y', 0)\notin M$.

Pelo Teorema 3.11 temos que M é total, isto é, $H=M\cup M^{-1}$ logo $(x', y', 0)\in M^{-1}$, o que implica $(-x', -y', 0)\in M$. Desta forma, temos que $\theta(-x', -y', 0)=(-x', -y')\in\theta(M)\subset S$, logo $(x', y')+(-x', -y')=(0,0)\in \text{int}(S)$. Como $\mathbb{R}^2$ é conexo e a identidade pertence ao interior de S temos, pela Proposição 1.44, que $S=\mathbb{R}^2$. Logo $\theta(M)$ é um subsemigrupo maximal de $\mathbb{R}^2$. Segue do Lema 2.15 que $\theta^{-1}(\theta(M))$ é um subsemigrupo maximal de H. Como $\theta(M)$ é subsemigrupo maximal do $\mathbb{R}^2$, pelo Corolário 3.2 sabemos que existem a e b, não simultaneamente nulos, tais que $\theta(M)=\{(x,y): ax+by\geq 0\}$. Assim,

$$\theta^{-1}(\theta(M))=\theta^{-1}\{(x,y): ax+by\geq 0\}=\{(x,y,z): ax+by\geq 0\}.$$

Como $M\subset\theta^{-1}(\theta(M))\subset H$ e, M é maximal então $M=\theta^{-1}(\theta(M))$ ou $\theta^{-1}(\theta(M))=H$, mas claramente $\theta^{-1}(\theta(M))\neq H$. Assim, concluímos que $M=\theta^{-1}(\theta(M))=\{(x,y,z): ax+by\geq 0\}$. ∎

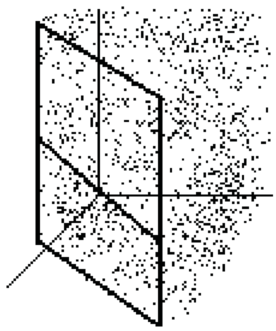

Figura 3.1: Subsemigrupos maximais no grupo de Heisenberg.

Capítulo 4

Semigrupos Maximais em Grupos de Lie Solúveis

Neste capítulo vamos tratar dos semigrupos maximais em grupos de Lie solúveis. Para tanto, apresentaremos alguns resultados sobre cones invariantes e grupos de Frobenius-Perron. Dedicaremos uma das seções a caracterização dos semigrupos maximais do grupo afim. O principal resultado do capítulo é o Teorema 4.22; como conseqüência de tal teorema concluiremos que os semigrupos maximais de interior não vazio de grupos de Lie solúveis conexos são totais.

Comecemos definindo o que vem a ser um grupo solúvel.
Seja G um grupo. Como no capítulo anterior, $[G, G] = \{[g, h] : g, h \in G\}$.

Definimos por indução

$$
\begin{aligned}
&G^0 = G\\
&G^1 = [G, G]\\
&G^2 = [G^1, G^1]\\
&\vdots\\
&G^{n+1} = [G^n, G^n]
\end{aligned}
$$

Definição 4.1. Dizemos que um grupo G é *solúvel* se $G^{n+1} = \{1\}$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que todo grupo nilpotente é solúvel. O grupo afim, o qual introduziremos na Seção 4.2 é um exemplo de grupo solúvel não nilpotente.

Apresentamos agora alguns resultados referentes a cones invariantes que nos ajudarão a caracterizar os semigrupos maximais em grupos solúveis. No que segue G denotará um grupo de Lie conexo e $L(G)$ sua álgebra de Lie.

Lema 4.2. *Sejam G um grupo de Lie conexo, $\exp : L(G) \to G$ a aplicação exponencial e I um ideal abeliano de $L(G)$. Se M é um subsemigrupo maximal de G com $\mathrm{int}(M) \neq \emptyset$, então $W = \{X \in I : \exp(X) \in M\}$ é um cone fechado em $L(G)$.*

Demonstração: Se $\exp(I) \subseteq W$, então $W = I$ e o lema é trivial.

Suponhamos então que $\exp(I) \not\subseteq M$. Pela Proposição 1.45, $\mathrm{int}(M)$ é um ideal de M e como I é um ideal temos, pela Proposição 1.20, que $\exp(I)$ é um subgrupo normal de G. Desta forma, aplicando a Proposição 2.6 para o ideal $\mathrm{int}(M)$ e para $S = \exp(I)$ temos que $\exp(I) \cap \mathrm{int}(M) \neq \emptyset$. Consideremos $h \in \exp(I) \cap \mathrm{int}(M)$, ou seja, $h = \exp(y)$, com $h \in \mathrm{int}(M)$ e $y \in I$. Como M

é maximal e $\mathrm{int}(M) \neq \emptyset$ segue da Proposição 2.22 que M é fechado e, como exp é uma aplicação contínua temos que $W = \exp^{-1}(M) \cap I$ é fechado.

Observe que I, munido da soma, é grupo. Sendo I abeliano temos que $[X,Y] = 0$, $\forall\ X,Y \in I$. Assim, pela Proposição 1.18, temos que $\exp(X+Y) = \exp(X)\exp(Y)$, $\forall\ X,Y \in I$. Então, exp restrita a I é um homomorfismo de grupos. Afirmamos que W é fechado sob a adição. De fato, considere $w_1, w_2 \in W$. Como M é um subsemigrupo temos que $\exp(w_1+w_2) = \exp(w_1)\exp(w_2) \in M$. Então $w_1 + w_2 \in \exp^{-1}(M)$, ou seja, W é fechado sob a adição.

Vamos aplicar o Lema 2.14 para $H = \exp(I)$ e concluir que W é fechado sob multiplicação por escalares $\dfrac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$. Para tanto, note primeiramente que $\exp(I)$ é um subgrupo abeliano. Agora considere $w \in W$. Como I é ideal temos que $\mathbb{R}^+ I \subset I$, isto implica que $\dfrac{1}{n}w \in I$.

Então

$$\exp(\frac{1}{n}w)^n = \exp(\frac{1}{n}w)\ldots\exp(\frac{1}{n}w) = \exp(\frac{1}{n}w + \ldots + \frac{1}{n}w) = \exp(w) \in M.$$

Logo, pelo Lema 2.14, $\exp(\frac{1}{n}w) \in M$ e, conseqüentemente, $\frac{1}{n}w \in W$, para todo $n \in N$. Assim, W é fechado sob multiplicação por $\mathbb{Q}^+$, ou seja, $Q^+W \subset W$. Daí segue que $\mathbb{R}^+W \subset \overline{W} = W$. Logo, W é um cone. ■

Teorema 4.3. *(Teorema do Cone Invariante) Sejam G um grupo de Lie conexo, exp : $L(G) \to G$ a aplicação exponencial e I um ideal abeliano de $L(G)$. Se M é um subsemigrupo maximal de G com $\mathrm{int}(M) \neq \emptyset$, então $W = \{X \in I : \exp(X) \in M\}$ é um cone fechado em $L(G)$ o qual é invariante sob a ação adjunta de G, e $W - W = I$.*

Demonstração: Se $\exp(I) \subseteq M$, então pelo lema anterior W é um cone fechado e $W - W = I$. Como I é um ideal, em particular, I é subálgebra de $L(G)$. Assim, pela Proposição 1.19, I é invariante sob ação de $Ad\, g$, isto é, $Ad\, g(I) \subseteq I$.

Suponhamos agora que $\exp(I) \not\subseteq M$. Novamente pelo lema anterior W é um cone. Vimos também que existe $h \in \exp(I) \cap \mathrm{int}(M)$, ou seja, $h = \exp(y)$, com $h \in \mathrm{int}(M)$ e $y \in I$. Como $h \in \mathrm{int}(M)$, então existe uma vizinhança V de y tal que $\exp(V) \subset M$. Assim, o cone W tem interior não vazio em I e y é um ponto interior.

Seja $x \in \mathrm{int}(W)$. Então $nx = y + z_n$, para algum $z_n \in W$ com n suficientemente grande. De fato, seja U um aberto em I tal que $x \in U \subseteq W$. Então $\frac{1}{n}y \in x - U$ para todo n suficientemente grande. Assim, $\frac{1}{n}y + u_n = x$, isto é, $y + z_n = nx$ com $z_n = nu_n \in W$. Como $h \in \mathrm{int}(M)$, então, pela Proposição 1.3, existe um aberto N tal que $N = N^{-1}$, $1 \in N$ e $Nh \subseteq int(M)$. Sejam $g \in N$ e $x \in \mathrm{int}(M)$. Para n suficientemente grande, escolha $z_n \in W$ tal que $nx = y + z_n$. Seja $b_n = \exp(z_n)$. Então

$$\begin{aligned}
\exp((Ad\, g)(nx) + y) &= \exp((Ad\, g)(nx) \exp(y) = g \exp(nx) g^{-1} h \\
&= g \exp(y + z_n) g^{-1} h = g \exp(y) \exp(z_n) g^{-1} h \\
&= g h b_n g^{-1} h \in Nh \cdot M \cdot Nh \subseteq M.
\end{aligned}$$

Como $Ad\, g(nx) + y \in I$ e $\exp(Ad\, g(nx) + y) \in M$, então $Ad\, g(nx) + y \in \exp^{-1}(M) \cap I = W$, para n suficientemente grande. Como W é um cone temos que $\frac{1}{n}(Ad\, g(nx) + y) = Ad\, g(x) + \frac{1}{n}y \in W$ para n suficientemente grande. Mas W é fechado então $(Ad\, g)(x) \in W$ e daí $Ad\, g(intW) \subset W$. Como $int(W)$ é denso em W temos que $Ad\, g(W) \subseteq W$. Isto ocorre para todo $g \in N$. Mas $1 \in N$ e G é conexo, então N gera G. Desta forma, como $Ad\,(g_1 \ldots g_n) = Ad\, g_1 \circ Ad\, g_2 \circ \ldots \circ Ad\, g_m$, temos que $Ad\, g(W) \subseteq W$ para todo $g \in G$, ou seja, W é invariante sob a ação adjunta de G.

Resta mostrarmos que $W - W = I$. Para tanto, lembremos que conforme foi concluído acima W possui interior não vazio em I. Logo $W - W$ é um subespaço vetorial de I, possuindo interior não vazio em I. Portanto, $W - W = I$. ■

4.1 Grupos de Frobenius-Perron

Nesta seção V denota um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita. Sejam G um grupo e $\pi : G \longrightarrow Gl(V)$ uma representação de G em V.

Então π dá origem a uma ação linear contínua de G em V definida por $g \cdot v = \pi(g)(v)$.

E. B. Vinberg mostrou que se G é conexo, solúvel e preserva um cone pontual em V, então G tem um autovetor comum no cone. Uma versão mais geral que segue deste resultado é a seguinte:

Teorema 4.4. *(Vinberg) Seja G um grupo de Lie, S um subgrupo de Lie solúvel. Se W é um cone pontual invariante sob a ação de G, então existe $v \in W$ tal que $S \cdot v \subseteq \mathbb{R}^+ v$.*

A demonstração deste teorema é dada em [13].

Demonstraremos este resultado para o caso abeliano.

Teorema 4.5. *(Teorema de Frobenius-Perron para Semigrupos abelianos) Seja W um cone em um espaço vetorial de dimensão finita L e $W \neq H(W)$. Se S é um subsemigrupo abeliano de $Hom_L W$, então existe $w \in W$, não nulo, tal que $Sw \subseteq \mathbb{R}^+ \cdot w$.*

Demonstração: A demonstração será feita em várias etapas.

Afirmação 1: Todo $g \in Hom_L W$ tem um autovetor não nulo em W.

De fato, se existe $w \in W$ tal que $w \neq 0$ e $gw = 0$, então w é o autovetor procurado.

Suponhamos então que $gw \neq 0$, para todo $w \in W \backslash \{0\}$. Neste caso g induz uma aplicação contínua $\overline{g}$ do espaço semi-projetivo $\prod(W)$ definida por $\overline{g}(\overline{w}) = \overline{g(w)}$. Como $W \neq H(W)$, pela Proposição 1.27, este espaço é um $n-1$ compacto com $n = \dim(W - W)$. Pelo teorema do Ponto Fixo de Brouwer, $\overline{g}$ tem pelo menos um ponto fixo em $\prod(W)$ e, conseqüentemente, existe um $w \in W$ não nulo tal que $gw \in \mathbb{R}^+ \cdot w$.

Somente para os propósitos dessa demonstração diremos que um subcone S-invariante W' de W é *irredutível* se ele for não nulo e não contém nenhum subcone próprio não nulo S-invariante.

Afirmação 2: W contém subcones irredutiveis.

Primeiramente, observe que o conjunto de todos os subcones S-invariantes não nulos de W é indutivo com respeito a $\subseteq$. Na verdade, se $\{W_j : j \in J\}$ é uma torre descendente de subcones S-invariantes não nulos, então $V = \bigcap_{j \in J} W_j$ é certamente um subcone S-invariante de W. Desta forma, temos também uma torre descendente de $\prod(W_j)$. Entretanto, pela compacidade de todos $\prod(W_j)$, a interseção $\bigcap_{j \in J} \prod(W_j)$ é não vazia. Daí se $\overline{x} \in \prod(W_j)$ então $Sx \subset W_j$, para todo j. Logo, $\bigcap_{j \in J} W_j$ é não vazia, daí V é não nulo. Agora, pelo Lema de Zorn, temos que W contém um subcone minimal W' não nulo e S-invariante. Desta forma, pela minimalidade, W' é irredutível.

Afirmação 3: Todo cone irredutível é unidimensional.

Suponha que o cone W seja irredutível. Vamos mostrar que $\dim W = 1$. Seja $g \in S$. Pela afirmação 1, g tem um autovetor não nulo para o autovalor λ em W. Se L_λ denota o auto- espaço de g para o autovalor λ, então $W \cap L_\lambda$ é diferente de zero. Seja $x \in L_\lambda$ e $h \in S$. Como S é abeliano, temos que $g(hx) = h(gx) = h(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (hx)$, isto é, $hx \in L_\lambda$. Então L_λ é S-invariante, ou seja, $SL_\lambda \subset L_\lambda$. Assim, $W \cap L_\lambda$ é um subcone de W diferente de zero e S-invariante. Como $W \cap L_\lambda \subset W$, pela irredutibilidade de W, temos que $W \cap L_\lambda =$ W. Então $W \subseteq L_\lambda$. Logo $g|_{(W-W)}$ é uma multiplicação escalar. Como $g \in S$ é arbitrário, todo subcone de W é invariante. Assim, pela irredutibilidade de W, temos que $\dim W = 1$.

Com isto, concluímos que existe um cone $W' \subset W$ irredutível S-invariante que é unidimensional, isto é, $W' = \mathbb{R}^+ w$. Portanto, como W' é S-invariante temos que $Sw \subseteq W' = \mathbb{R}^+ \cdot w$. ■

O Teorema 4.4 motiva a seguinte definição.

Definição 4.6. Um grupo de Lie G é dito um *grupo de Frobenius-Perron se para toda ação linear contínua de* G *em um espaço vetorial real* V *de dimensão finita que deixa um cone pontual* W *invariante, existe* $v \in W$ *tal que* $G \cdot v \subseteq \mathbb{R}^+ v$.

Uma ação $G \times V \longrightarrow V$ induz uma ação dual $G \times V^* \longrightarrow V^*$ definida por: se $g \in G, \alpha \in V^*$ e $v \in V$ então $(g \cdot \alpha)(v) = \alpha(g \cdot v)$. Considerando a aplicação bilinear $\langle , \rangle : V^* \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\langle \alpha, v \rangle = \alpha(v)$, é fácil ver que $\langle g \cdot \alpha, v \rangle = \langle \alpha, g \cdot v \rangle$, quaisquer que sejam $g \in G, \alpha \in V^*$ e $v \in V$.

Teorema 4.7. *Seja* G *um grupo de Frobenius-Perron com uma ação linear contínua num espaço vetorial de dimensão finita* V. *Se* $W \neq V$ *é um* *cone gerador invariante em V, então W está contido em um semi-espaço invariante pela ação de G.*

Demonstração: Seja W^* o cone dual de W. Como $W \neq V$ temos que W^* é não vazio e, se considerarmos a ação natural de G no espaço dual V^* dada por $(g.\alpha)(v) = \alpha(g.v)$, onde $g \in G, \alpha \in V^*$ e $v \in V$, então a ação de G em V^* deixa o cone dual W^* invariante. Como G é um grupo de Frobenius-Perron, então existe $\alpha_0 \in W^*$ tal que $G \cdot \alpha_0 \subseteq \mathbb{R}^+\alpha_0$. Consideremos o semi-espaço $U = \{v \in V : \alpha_0(v) \geq 0\}$. Este semi-espaço é G-invariante pois, se $g \in G$ existe $\lambda \geq 0$ tal que $g.\alpha_0 = \lambda\alpha_0$ e assim para todos $v \in U$, $\alpha_0(g.v) = (g.\alpha_0)(v) = (\lambda\alpha_0)(v) = \lambda\alpha_0(v) \geq 0$. Além disto, $W \subset U$ pois, como $\alpha_0 \in W^*$ então, para todo $w \in W$ temos que $\alpha_0(w) \geq 0$. ■

4.2 Semigrupos Maximais no Grupo Afim da Reta

Esta seção será dedicada ao estudo dos semigrupos maximais do grupo afim da reta, que é um protótipo de grupo de Lie solúvel. Mais especificamente iremos mostrar que os semigrupos maximais fechados deste grupo são os semi-espaços cuja fronteira é um subgrupo unidimensional. Comecemos definindo o grupo afim da reta.

Lembremos de que uma função afim da reta é uma aplicação $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são números reais fixos sendo $a \neq 0$. Neste caso o conjunto das aplicações afins da reta se identificam naturalmente com o conjunto $Aff = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \neq 0\}$.

Motivados pela composição de aplicações afins definimos no conjunto Aff a operação $(a,b)(x,y) = (ax, ay+b)$. Munido desta operação Aff torna-se um grupo cujo elemento neutro é $(1,0)$ e o elemento inverso de $(x,y) \in Aff$ é o elemento $(x,y)^{-1} = (\frac{1}{x}, \frac{-y}{x})$. A componente conexa da identidade do grupo Aff será denominado de *grupo afim* e será denotado por Aff^+. Mais precisamente $Aff^+ = \{(x,y) \in Aff : x > 0\}$.

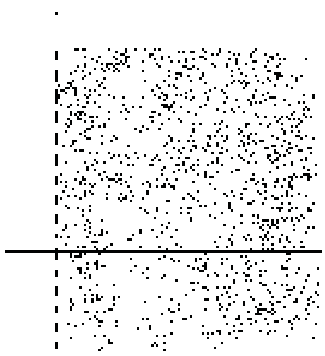

Figura 4.1: Representação geométrica do grupo afim.

Observação 4.8. Se $m \neq 0$ é um número real fixo temos que a semi-reta $K_m = \{(x,y) \in Aff^+ : y = mx - m, \text{para algum } m \text{ fixo}\}$ é um subgrupo unidimensional do grupo Aff^+.

Proposição 4.9. *O grupo afim é um grupo solúvel.*

Demonstração: Seja $G = Aff^+$. Vamos calcular $G^1 = [G^0, G^0] = [G, G]$.

Para tanto, consideremos $g=(a,b), h=(x,y)\in G$. Então

$$\begin{aligned}
[g,h] = g^{-1}h^{-1}gh &= (\frac{1}{a},\frac{-b}{a})(\frac{1}{x},\frac{-y}{x})(a,b)(x,y) \\
&= (\frac{1}{ax},\frac{-y}{ax}-\frac{-b}{a})(ax,ay+b) \\
&= (1,\frac{ay+b}{ax}-\frac{y}{ax}-\frac{b}{a}) \\
&= (1,z), \ \text{ com } \ z=\frac{ay+b}{ax}-\frac{y}{ax}-\frac{b}{a}.
\end{aligned}$$

Assim, $G^1=\{(1,z) : z\in \mathbb{R}\}$.

Vamos calcular $G^2=[G^1,G^1]$. Sejam $g=(1,a), h=(1,b)\in G^1$. Então

$$\begin{aligned}
[g,h] = g^{-1}h^{-1}gh &= (1,-a)(1,-b)(1,a)(1,b) \\
&= (1,-b-a)(1,b+a) = (1,b+a-b-a) \\
&= (1,0).
\end{aligned}$$

Logo, $G^2=\{(1,0)\}$ e, portanto, Aff^+ é um grupo solúvel. ■

Os próximos resultados serão utilizados quando discutirmos os semigrupos maximais do grupo afim da reta.

Proposição 4.10. *Os conjuntos* $M_1=\{(x,y)\in Aff^+ : 0<x\leq 1\}$ *e* $M_2=\{(x,y)\in Aff^+ : x\geq 1\}$ *são subsemigrupos totais do grupo* Aff^+.

Demonstração: Primeiramente, note que $1=(1,0)\in M_1$, ou seja, $M_1\neq\emptyset$. Se $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in M_1$, então temos $(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1x_2,x_1y_2+y_1)$. Como $0<x_1x_2\leq 1$ temos que $(x_1x_2,x_1y_2+y_1)\in M_1$. Logo, M_1 é um subsemigrupo. Analogamente mostra-se que M_2 é um subsemigrupo.

Além disso, $M_1^{-1}=M_2$. De fato, se considerarmos $(x,y)\in M_1$ então $(x,y)^{-1}=(\frac{1}{x},\frac{-y}{x})\in M_2$, pois $\frac{1}{x}\geq 1$ e quando $x\to 0$ temos que $\frac{1}{x}\to\infty$.

Portanto, $G = M_1 \cup M_2 = M_1 \cup M_1^{-1} = M_2^{-1} \cup M_2$, ou seja, M_1 e M_2 são totais. ■

Lembre-se que os pontos de uma reta de inclinação m que passa pelo ponto $(1,0)$ são da forma $(x, mx - m)$.

Proposição 4.11. *Se* $m \neq 0$*, o conjunto* $M = \{(x,y) \in Aff^+ : y \geq mx - m\}$ *é um subsemigrupo total do grupo* Aff^+*.*

Demonstração: Claramente $(1,0) \in M$, isto é, $M \neq \emptyset$. Consideremos então $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M$. Como $y_1 \geq mx_1 - m$ e $y_2 \geq mx_2 - m$ resulta que

$x_1y_2 + y_1 \geq x_1(mx_2 - m) + mx_1 - m = mx_1x_2 - mx_1 + mx_1 - m = mx_1x_2 - m.$

Desta forma, $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2, x_1y_2 + y_1) \in M$ e, então, M é um subsemigrupo. Resta mostrarmos que M é total. Para tanto, vamos verificar que $M^{-1} = G \backslash M$. De fato, se $(x,y) \in M$ então $y \geq mx - m$. Como $(x,y)^{-1} = (\frac{1}{x}, \frac{-y}{x})$ e, como $y \geq mx - m$, temos que $-y \leq -mx + m$ e, conseqüentemente, $\frac{-y}{x} \leq m\frac{1}{x} - m$. Assim, $(x,y)^{-1} \in G \backslash M$. Portanto, M é total. ■

Observação 4.12. Os conjuntos $M = \{(x,y) \in Aff^+ : y \geq mx - m\}$ são todos isomorfos ao conjunto $Aff^{++} = \{(x,y) \in Aff^+ : y \geq 0\}$. Para ver isto basta considerarmos o automorfismo interno pelo elemento $(1,m)$, o mesmo não ocorre com os conjuntos $M_1 = \{(x,y) \in Aff^+ : 0 < x \leq 1\}$ e $M_2 = \{(x,y) \in Aff^+ : x \geq 1\}$.

A proposição seguinte garante que o grupo afim da reta só possui um subgrupo normal não trivial.

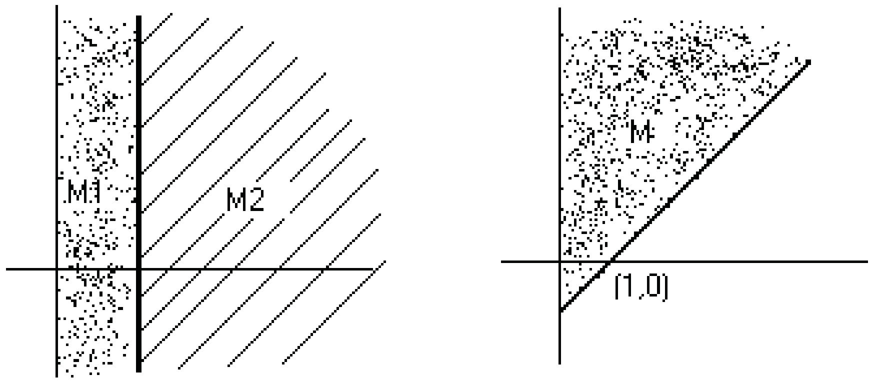

Figura 4.2: Subsemigrupos totais do grupo Aff^+

Proposição 4.13. *O conjunto* $H = \{(1, y) \in Aff^+ : y \in \mathbb{R}\}$ *é o único subgrupo normal não trivial do grupo* Aff^+*.*

Demonstração: Primeiramente, note que os subgrupos unidimensionais de Aff^+ são H e K_m. Sejam $x = (a, b) \in Aff^+$ e $h = (1, y) \in H$. Então $xhx^{-1} = (a, b)(1, y)(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a}) = (1, ay) \in H$. Logo, H é um subgrupo normal de Aff^+.

Consideremos agora $x = (a, b) \in Aff^+$ e $k = (x, mx - m) \in K_m$. Então, $xkx^{-1} = (a, b)(x, mx - m)(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a}) = (x, -bx + amx - am + b)$. Para que $xkx^{-1} \in K_m$ devemos ter $-bx + amx - am + b = mx - m$ para todo x. Tomando $a = 1$ e $b = m$ temos $-mx + mx - m + m = mx - m$, ou seja, $mx - m = 0$. Assim, $xkx^{-1} \in K_m$ somente quando $x = 1$, conseqüentemente K_m não é subgrupo normal de Aff^+. Logo, o único subgrupo normal não trivial de Aff^+ é H. ∎

Proposição 4.14. *Os subconjuntos do grupo* H*:* $H^+ = \{(1, y) : y \geq 0\}$ *e* $H^- = \{(1, y) : y \leq 0\}$ *são subsemigrupos invariantes de* Aff^+*.*

Demonstração: Como $(1,0) \in H^+$, então $H^+ \neq \emptyset$. Sejam $(1,a),(1,b) \in H^+$. Como $a+b \geq 0$ obtemos que $(1,a)(1,b) = (1,b+a) \in H^+$. Assim, H^+ é um subsemigrupo. Resta mostrar que H^+ é invariante. Para tanto, considere $x = (a,b) \in Aff^+$ e $h = (1,y) \in H^+$. Então $xhx^{-1} = (1,ay) \in H^+$ e, portanto, H^+ é um subsemigrupo invariante de Aff^+. De maneira análoga mostra-se que H^- é um subsemigrupo invariante de Aff^+. ■

Antes de enunciarmos o resultado principal desta seção necessitamos do seguinte lema técnico.

Lema 4.15. *Seja G o grupo dos reais positivos munido da multiplicação usual. Dados $s,t \in G$ com $0 < 1 < t$, $\epsilon > 0$, e N um inteiro positivo. Então existem inteiros positivos j,k com $j \geq N$ tais que $|s^j t^k - 1| < \epsilon$*

Demonstração: Considere a aplicação

$$\theta : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$

definida por $\theta(t) = e^{2\pi \frac{t}{y} i}$. Como θ é um homomorfismo sobrejetor contínuo de grupos topológicos cujo núcleo é $\mathbb{Z}y$, temos que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}y$ é um grupo homeomorfo ao grupo compacto S^1. Considere a aplicação quociente

$$\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}y$$

e o semigrupo cíclico $S = \{nx : n \geq 1\}$ do grupo aditivo $\mathbb{R}$. O fecho $\overline{\theta(S)}$ é então um semigrupo compacto e portanto, pela Proposição 1.48, é um subgrupo compacto de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}y$.

Agora $\theta(0) = \mathbb{Z}y$ e portanto, dado $\epsilon > 0$ existem $j \in \mathbb{N}$ tal que $jx + \mathbb{Z}y \subset (-\epsilon, \epsilon) + \mathbb{Z}y$.

Com isso, para $0 \in \mathbb{Z}$ existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $jx + 0y \in (-\epsilon, \epsilon) + ky$, ou seja, $jx - ky \in (-\epsilon, \epsilon)$, ou ainda $|jx - ky| < \epsilon$ ou $|j(-x) + ky| < \epsilon$.

Note que como $x > 0$ e $j > 0$ também $k > 0$. Além disto, j poderia ser tomado de forma que $j \geq N$ pois poderíamos considerar $2j, 3j, ...$ e fazer a mesma coisa.

Considere agora a aplicação exponencial $e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $e(t) = e^t$. Sejam $s, t \in \mathbb{R}^+$ tais que $0 < s < 1 < t$. Então $ln(t) > 0$ e $-ln(s) > 0$. Pela primeira parte, dado $\epsilon > 0$, existem $j \geq N$ tal que $|j \ln(s) + k \ln(t)| < \epsilon$, exponenciando obtemos $e^{j \ln(s)} e^{k \ln(t)} < e^{\epsilon}$ ou $s^j t^k < e^{\epsilon}$.

Agora, quando $\epsilon \longrightarrow 0$, $e^{\epsilon} \longrightarrow 1$. Portanto escolhendo ϵ convenientemente tem-se que $|s^j t^k - 1| < \epsilon$. ■

Por fim, o próximo resultado caracteriza os subsemigrupos maximais de interior não vazio do grupo afim da reta.

Teorema 4.16. *Se M é um subsemigrupo maximal fechado de Aff^+, então existe um grupo unidimensional tal que M é a união deste grupo com uma das componentes do seu complementar. Em particular M é total.*

Demonstração: Seja $H = \{(1, y) \in Aff^+ : y \in \mathbb{R}\}$. Do Lema 4.13 segue que H é um subgrupo normal de Aff^+ e, em particular $MH = HM$. Então, pelo Lema 2.6, temos que $H \cap M^{\#} \neq \emptyset$ ou $H \subseteq M$.

Vamos supor, primeiramente, que $H \subseteq M$. Consideremos o homomorfismo sobrejetor $\varphi : Aff^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ dado por $\varphi(x, y) = x$. Note que $\ker(\varphi) = \{(x, y) \in Aff^+ : \varphi(x, y) = 1\} = H$. Assim, pelo Teorema Fundamental do Homomorfismo temos que $Aff^+/H \simeq \mathbb{R}^+$. Consideremos agora o isomorfismo $\theta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\theta(x) = ln(x)$. Logo, o grupo

$(\mathbb{R}^+, \cdot) \simeq (\mathbb{R}, +)$. Se $\tau : G \longrightarrow G/H$ é o homomorfismo sobrejetor então, como $\tau^{-1}(M/H) = M$ é maximal em Aff^+ temos, pelo Lema 2.15 e 2.22, que M/H é fechado. Da Proposição 2.30 segue que os subsemigrupos maximais de $(\mathbb{R}, +)$ são $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ e $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$. Como um homomorfismo sobrejetor leva subsemigrupo maximal em subsemigrupo maximal temos que M/H corresponde a $(0, 1]$ ou $[1, \infty)$. Então, $M = \{(x, y) : 0 < x \leq 1\}$ ou $M = \{(x, y) : 1 \leq x\}$. Em ambos os casos M é um semi-espaço que tem como hiperplano suporte a reta H e, pela Proposição 4.10, concluímos que M é um semigrupo total de Aff^+.

Suponhamos agora que $H \cap M^{\#} \neq \emptyset$. Neste caso tomemos $(1, y) \in M^{\#}$, com $y > 0$. Como $(1, \frac{1}{n}y)^n \in M$ então, pelo Lema 2.14, $(1, \frac{1}{n}y) \in M$ para todo n positivo e, como M é semigrupo temos que $(1, \frac{m}{n}y) \in M$ para $\frac{m}{n} > 0$. Como M é fechado obtemos que $H^+ = \{(1, y) : y \geq 0\} \subseteq M$ e, como $H = H^+ \cap -H^+ = H^+ \cap H^-$ então H^+ é fechado e total em H. Desta forma, segue da Proposição 2.28, que H^+ é maximal. Note que $H \not\subseteq M$, pois caso contrário como $M^{\#} = M \setminus M \cap M^{-1}$ e $H \subset M \cap M^{-1}$ teríamos que $M^{\#} \cap H = \emptyset$. Sendo assim, temos que $M \cap H = H^+$. De fato, como $H^+ \subset M$ então $H^+ = M \cap H^+ \subset M \cap H^+ \subset M \cap H \subset H$. Mas $H^+ = M \cap H^+$ é maximal em H, logo $H^+ = M \cap H$ ou $M \cap H = H$. Como $H \not\subseteq M$ temos que $H^+ = M \cap H$.

Mostremos que $H^-M = G$. De fato, primeiramente note que $H^-M \neq \emptyset$ pois $(1, 0) \in H^-$ e, como M é maximal temos que $1 \in M$. Além disso, segue do Lema 4.14 que H^- é um subsemigrupo invariante, assim $(H^-M)(H^-M) \subseteq H^-H^-MM \subseteq H^-M$ e $H^-M \neq M$, pois $M \cap H = H^+$ logo $H^- \not\subseteq M$. Como $1 \in M$ temos que $M \subset H^-M$. Mas M é maximal, logo $H^-M = Aff^+$. Se

$(x, y) \in Aff^+ = H^-M$, então $(x, y) = (1, y)m$ com $y < 0$ e $m \in M$. Assim, $(1, y)^{-1}(x, y) = m$ e conseqüentemente $(x, 0) = m \in M \cap (\{x\} \times \mathbb{R})$. Logo, $(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap M \neq \emptyset$, para todo $x > 0$.

Sejam $(s, ms - m), (t, \mu t - \mu) \in M$ com $0 < s < 1 < t$. Calculando as potências obtemos que

$$(s, ms - m)^j = (s^j, ms^j - m) \text{ e } (t, \mu t - \mu)^k = (t^k, \mu t^k - \mu).$$

Logo,

$$\begin{aligned}(s, ms - m)^j(t, \mu t - \mu)^k &= (s^j, ms^j - m)(t^k, \mu t^k - \mu) \\ &= (s^j t^k, s^j(\mu t^k - \mu) + ms^j - m) \\ &= (s^j t^k, s^j \mu t^k - s^j \mu + ms^j - m) = (s^j t^k, \mu(s^j t^k - 1) + (m - \mu)(s^j - 1).\end{aligned}$$

Se j e k são escolhidos como no Lema 4.15, vimos que esse produto pode ser construído arbitrariamente limitado por $(1, \mu - m)$. Como $(1, \mu - m) \in M$, pois M é fechado, $(1, \mu - m) \in H$ e $M \cap H = H^+$ temos que $\mu - m \geq 0$, isto é, $\mu \geq m$. Seja $a = \sup\{m : (s, ms - m) \in M \text{ para algum } s < 1\}$

$$\leq \inf\{\mu : (t, \mu t - \mu) \in M \text{ para algum } t > 1\} = b.$$

Se d é escolhido tal que $a \leq d \leq b$ então segue que a região acima da reta de inclinação d passando por $(1, 0)$ contém M. Mas M é maximal, logo essa região coincide com M. ■

Sendo assim, da observação 4.12 e do teorema anterior concluímos que, com uma exceção, todos os subsemigrupos maximais do grupo afim da reta são isomorfos ao semigrupo Aff^{++}. A exceção ocorre quando a fronteira do semigrupo maximal é o subgrupo normal unidimensional H.

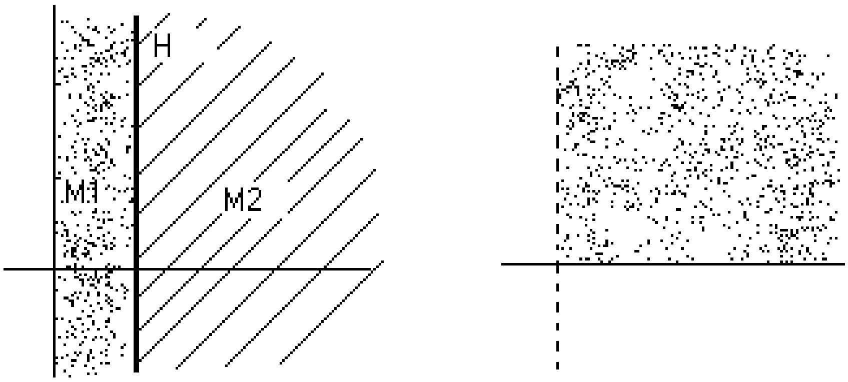

Figura 4.3: Subsemigrupos maximais do grupo Aff^+

4.3 Semigrupos Maximais em Grupos Solúveis

Nesta seção vamos usar a teoria desenvolvida previamente para obter o resultado mais importante deste capítulo, o qual garante que os semigrupos maximais com interior de grupos de Lie solúveis conexos são totais. Antes disso precisamos de mais algumas definições e resultados.

Definição 4.17. Um grupo G é dito *semi-simples se* $\{1\}$ *é o único subgrupo normal solúvel de* G.

As três proposições seguintes são conseqüência imediata da Proposição 1.20, e também das Proposições 1.28, 2.17 e 2.18 e Corolário 2.19 de [12].

Proposição 4.18. *Seja* G *um grupo de Lie conexo de dimensão finita. Então* G *tem um único subgrupo maximal, normal, conexo e solúvel, denotado por* $Rad\, G$.

Proposição 4.19. *Seja* G *um grupo de Lie conexo de dimensão finita. Então existe um subgrupo normal conexo de* G*, denotado por* $RN(G)$ *e denominado* *de radical nilpotente ou nil-radical de G, que contém todo subgrupo normal conexo nilpotente de G.*

Proposição 4.20. *Se G é um grupo de Lie solúvel, então $[G, G] \subset RN(G)$.*

Antes de enunciarmos o resultado principal precisamos definir o que vem a ser o centralizador de um subconjunto de uma álgebra de Lie.

Definição 4.21. O *centralizador* de um subconjunto $A \subset \mathfrak{g}$ é definido como sendo $\mathfrak{z}(A) = \{Y \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0, \text{ para todo } X \in A\}$.

Observe que se $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é uma subálgebra, então $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ é um ideal.

Teorema 4.22. *Seja G um grupo de Lie conexo de dimensão finita o qual é um grupo de Frobenius-Perron, e seja M um subsemigrupo maximal que é reduzido em G e $\mathrm{int}(M) \neq \emptyset$. Então uma das seguintes afirmações ocorre:*

(i) $Rad\ G = \{1\}$, ou seja, G é semi-simples;

(ii) $(Rad\, G, Rad\, G \cap M)$ é topologicamente isomorfo a $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$;

(iii) $Rad\ G$ é topologicamente isomorfo a Aff^+.

Demonstração: Se o radical $R = Rad\, G$ é trivial, então G é semi-simples.

Vamos considerar o caso em que $R \neq \{1\}$ e mostrar que (i) ou (ii) ocorre.

Afirmação 1. O nil-radical $N = RN(G)$ é abeliano.

Sabemos que N é um subgrupo nilpotente, conexo e normal, M é um semigrupo maximal e $\mathrm{int}(M) \neq \emptyset$. Então, pela Proposição 3.13, temos que $[N, N] \subseteq C(M)$. Como M é reduzido, isto é, $C(M) = \{1\}$, segue que $[N, N] = \{x^{-1}y^{-1}xy : x, y \in N\} = \{1\}$ e, conseqüentemente, N é abeliano.

Afirmação 2. O radical R é metabeliano, isto é, [R, R] é abeliano.

De fato, como R é solúvel segue da Proposição 4.20 que $[R, R] \subset N$. Por(1), temos que N é abeliano. Logo, $[R, R]$ é abeliano.

Afirmação 3. $dim[R, R] = 1$ ou $[R, R] = \{1\}$.

Como R é maximal temos que R é fechado. Assim, pela Proposição 1.21, R é subgrupo de Lie de G e, conseqüentemente, $[R, R]$ é um subgrupo de Lie.

Desta forma, seja I a álgebra de Lie de [R, R]. Como R é normal temos que $[R, R]$ também o é. Daí, pela Proposição 1.20, segue que I é um ideal em $L(G)$. Além disso, I é abeliano pois, pela Afirmação 2, $[R, R]$ é abeliano. Consideremos $W = \{X \in I : \exp(X) \in M\}$. Pelo Teorema 4.3 concluímos que W é um cone gerador invariante.

Se $W = I$, então $\exp(I) = [R, R]$ é um subgrupo normal contido em M. Sabemos que $C(M)$ é o maior subgrupo normal de G contido em M. Assim, $[R, R] \subset C(M) = \{1\}$ pois M é reduzido, ou seja, $[R, R] = \{1\}$.

Suponhamos agora que $W \neq I$. Como G é um grupo de Frobenius - Perron, pelo Teorema 4.7 existe um semi-espaço invariante $Q \supseteq W$. Então $Q \cap -Q$ é um hiperplano invariante em I, pois $W \subset I$. Assim, pela Proposição 1.20, $F = \exp(Q \cap -Q)$ é um subgrupo normal. Mas

$$\exp^{-1}(\mathrm{int}(M)) \cap I \subseteq \mathrm{int}(W) \subseteq \mathrm{int}(Q) \subseteq Q \backslash (Q \cap -Q),$$

então $\mathrm{int}(M) \cap F = \emptyset$.

Aplicando a Proposição 2.6 para $S = F$, temos que $F \subset M$. Como F é normal, segue que $F \subset C(M) = \{1\}$, ou seja, $F = \exp(Q \cap -Q) = \{1\}$ e, conseqüentemente, $Q \cap -Q = \{0\}$. Desta forma, como $Q \cap -Q$ é um hiperplano em I, temos que I é unidimensional e, como $\exp(I) = [R, R]$ concluímos que $\dim[R, R] = 1$.

Afirmação 4. Se $[R, R] = \{1\}$ então ocorre (ii).

De fato, se $[R, R] = \{1\}$ então R é abeliano. Seja $L(R)$ a álgebra de Lie de R. De maneira análoga ao que foi feito em (3), podemos obter um cone invariante $W = \{X \in L(R) : \exp(X) \in M\}$ e concluir que W é um cone gerador invariante e que $W \subsetneq L(R)$. Como M é reduzido e (i) não ocorre então, com argumentos similares aos anteriores, temos que $L(R)$ é unidimensional. Como os únicos grupos de Lie cuja álgebra de Lie é unidimensional são $\mathbb{R}$ e S^1, então $R \simeq \mathbb{R}$ ou $R \simeq S^1$. Mas S^1 é compacto assim, pela Proposição 2.25, temos que $R \subset C(M) = \{1\}$, o que é uma contradição. Logo, $R \simeq \mathbb{R}$ e, portanto, a aplicação exponencial leva $L(R)$ numa cópia de $\mathbb{R}$ e W sobre uma semi-reta que podemos tomar como sendo $\mathbb{R}^+$.

Afirmação 5. Se $I = [L(R), L(R)]$ é unidimensional, então o centralizador de I em $L(R)$ é I.

De fato, como I é um ideal abeliano pois, pela Afirmação 2, $[R, R]$ é abeliano, segue então que $[I, I] = 0$. Desta forma, temos que o centralizador $\mathfrak{z}(I) = \{Y \in L(R) : [X, Y] = 0 \, \text{para todo} \, X \in I\}$ é um ideal que contém I e, conseqüentemente, $A = \mathfrak{z}(I) \cap L(R)$ é um ideal que contém I. Como $A \subset \mathfrak{z}(I)$ e $[A, A] \subseteq [L(R), L(R)] = I$ temos que $[A, [A, A]] \subseteq [A, I] = \{0\}$. Então A é um ideal nilpotente. Logo, $\exp(A)$ é um grupo normal nilpotente. Segue da Proposição 3.13, que $[\exp(A), \exp(A)] \subseteq C(M) = \{1\}$, ou seja, $[\exp(A), \exp(A)] = \{1\}$ isto implica que $\exp(A)$ é abeliano e, conseqüentemente, A é abeliano.

Por um processo análogo ao feito em (3) para I, garantimos que A é unidimensional. Então $I \subset A$ temos que $I = A = \mathfrak{z}(I) \cap L(\mathbb{R})$ e, portanto, $\mathfrak{z}(I) = I$.

Afirmação 6. Se $I = [L(R), L(R)]$ é unidimensional, então R é topologicamente isomorfo a $Aff^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x > 0, y \in \mathbb{R}\}$.

De fato, seja $z \in I$ tal que $z \neq 0$. Considere $ad\, z : L(R) \longrightarrow I$. Por (5), temos que $\mathfrak{z}(I) = I$. O núcleo desta aplicação é I, que é unidimensional, então, pelo Teorema do núcleo e da imagem, $L(R)$ é bi-dimensional. Como $[L(R), L(R)] = I \neq \{0\}$, isto é, $L(R)$ não é abeliano temos que $L(R)$ é a única álgebra de Lie bi-dimensional não abeliana e, como Aff^+ é simplesmente conexo concluímos que $R \simeq Aff^+$. ∎

Corolário 4.23. *Seja G um grupo de Lie solúvel, conexo de dimensão finita e seja M um subsemigrupo maximal tal que* $\text{int}(M) \neq \emptyset$. *Então M é total e ocorre uma das seguintes afirmações:*

(i) (G_R, M_R) *é topologicamente isomorfo a* $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$*;*

(ii) (G_R, M_R) *é topologicamente isomorfo a* (Aff^+, Aff^{++}).

Demonstração: Pelo Teorema 4.4, temos que G é um grupo de Frobenius-Perron. Como G é solúvel segue que $G/C(M) = G_R$ é solúvel e, como M é um semigrupo maximal em G, então M_R é um semigrupo maximal em G_R. Logo, M_R não é grupo e, conseqüentemente, $M_R \neq \{1\}$. Então $G_R \neq \{1\}$, pois $M_R \subseteq G_R$.

Como G_R é solúvel temos que $Rad(G_R) = G_R$. Desta forma, segue do Teorema 4.22 que $(G_R, G_R \cap M_R) = (G_R, M_R)$ é topologicamente isomorfo a $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ ou G_R é topologicamente isomorfo a Aff^+.

Se $(G_R, G_R \cap M_R) = (G_R, M_R)$ é topologicamente isomorfo a $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, então ocorre (i). Assim M_R é total e, conseqüentemente, M é total.

Agora se $G_R \simeq Aff^+$, então $L(G_R)$ é a álgebra de Lie bi-dimensional não abeliana. Como M_R é reduzido em G_R temos que o maior subgrupo normal contido em M_R é $C(M_R) = \{1\}$. Logo, M_R não contém subgrupos normais unidimensionais. Pelo Teorema 4.16, M_R é total e, conseqüentemente, M é total. Além disso, M_R é um semi-espaço, ou seja, um semigrupo cuja fronteira é um grupo que não é normal. Desta forma, pelo Teorema 4.16, $M_R \simeq Aff^{++} = \{(x, y) \in Aff^+ : y \geq 0\}$. Logo M_R é total e, portanto, M é total. ■

Capítulo 5

Semigrupos bem limitados em grupos localmente conexos

Neste capítulo estudaremos os semigrupos abertos em grupos topológicos cuja fronteira é um subgrupo de G. O principal resultado desse capítulo é o Teorema 5.14 onde apresentaremos uma caracterização de tais semigrupos.

5.1 Semigrupos bem limitados

Ao longo dessa seção, G denotará um grupo localmente compacto e S um subsemigrupo aberto tal que 1, identidade de G, não pertence a S.

Lema 5.1. *Se K é um subsemigrupo compacto de G, então $K \cap S = \emptyset$.*

Demonstração: Suponhamos que $K \cap S \neq \emptyset$. Como K é compacto temos, pela Proposição 1.48, que K é um subgrupo compacto de G. Então $K \cap S$ é um subsemigrupo aberto do grupo compacto K e $1 \notin K \cap S$ uma vez que

$1 \notin S$. Desta forma, temos pela Proposição 1.48 que $K \cap S$ é um subgrupo compacto aberto e daí $1 \in (K \cap S) \subset S$, o que é uma contradição. Portanto, $K \cap S = \emptyset$. ■

Definição 5.2. Um semigrupo S, como descrito no início dessa seção, é dito *bem limitado* se a fronteira de S em G, que denotamos por $\partial(S)$, for um subgrupo de G.

Exemplo 5.3. Os semigrupos $\mathbb{R}^+$, $M_1 = \{(x, y) \in Aff^+ : x < 1\}$ e $M_2 = \{(x, y) \in Aff^+ : x > 1\}$ são semigrupos bem limitados.

Para facilitar denotaremos $\partial(S)$ por H.

Lema 5.4. *Seja S um semigrupo bem limitado de G. Se N é um subgrupo conexo fechado tal que $N \cap S = \emptyset$, então $N \subset H$.*

Demonstração: Afirmamos que $NS = S$.

De fato, como $1 \in N$, claramente $S \subset NS$. Resta mostrarmos que $NS \subset S$. Para tanto, suponhamos que $NS \not\subset S$, isto é, existe $s \in S$ tal que $Ns \not\subset S$, e suponhamos também que $Ns \cap H = \emptyset$. Sendo assim $Ns \cap (\overline{S})^c \neq \emptyset$. Então $Ns = (Ns \cap S) \cup (Ns \cap \overline{S}^c)$. Mas Ns é conexo uma vez que N é conexo, o que contraria a última igualdade. Assim, $Ns \cap H \neq \emptyset$, ou seja, $ns = h$ para algum $n \in N$ e $h \in H$, ou ainda $n^{-1} = (hs^{-1})^{-1} = sh^{-1}$.

Afirmamos que S é um ideal do semigrupo $S \cup H$. De fato, consideremos $s \in S$ e $h \in H$. Se $sh \in S$ temos o desejado. Note que, como $h \in H$ existe uma seqüência $x_n \longrightarrow h$ onde $x_n \in S$, isto implica que $sx_n \longrightarrow sh$. Assim $sh \in H$ uma vez que $sx_n \in S$. Desta forma, se $sh \notin S$ então $sh \in H$ e, conseqüentemente, $(sh)h^{-1} = s \in S$. Portanto, S é um ideal de $S \cup H$.

Daí segue que $sh^{-1} \in S$ e, conseqüentemente, $sh^{-1} \in N \cap S$, o que é uma contradição. Então $Ns \subset S$ para todo $s \in S$, ou seja, $NS \subset S$. Assim, $NS = S$.

Finalmente, sejam $n \in N$ e α uma seqüência em S convergindo para 1, que existe pois $1 \in H$. Como $n \in N$ e $NS \subset S$ então $n\alpha$ é uma seqüência em S convergindo para n, o que implica que $n \in H$. Portanto, $N \subset H$. ■

Definição 5.5. Seja S um semigrupo bem limitado de G. Dizemos que (G, S) é *reduzido* se $\{1\}$ é o único subgrupo normal fechado que não intercepta S.

Lema 5.6. *Seja G um grupo localmente compacto tal que G/G_0 é compacto, onde G_0 é a componente conexa da identidade. Seja U uma vizinhança de 1. Então existe em U um subgrupo compacto e normal H tal que G/H é isomorfo a um grupo de Lie.*

Demonstração: Ver Teorema 4.6 em [9].

Lema 5.7. *Seja G_0 a componente conexa da identidade de G. Se (G, S) é reduzido e G/G_0 é compacto, então G é um grupo de Lie.*

Demonstração: Pelo teorema anterior, G tem um subgrupo normal e compacto N tal que G/N é um grupo de Lie. Assim, pelo Lema 5.1, temos que $N \cap S = \emptyset$ e, como (G, S) é reduzido segue que $N = \{1\}$. Portanto, $G/N = G/\{1\} = G$ é um grupo de Lie. ■

Lema 5.8. *Seja G um grupo conexo. Se (G, S) é reduzido, então G é um grupo de Lie simplesmente conexo.*

Demonstração: Seja G_0 a componente conexa da identidade de G. Então, $G_0 = G$ uma vez que G é conexo. Assim, $G/G_0 = G/G = \{1\}$ é compacto e, como (G, S) é reduzido temos, pelo Lema 5.7, que G é um grupo de Lie. Pelo Teorema 4.13 em [9], G tem subgrupos compactos maximais e todos esses subgrupos são conexos e conjugados um dos outros. Além disso, se K denota um desses subgrupos compactos maximais então G, como um espaço topológico, é homeomorfo ao espaço produto $K \times \mathbb{R}^n$, onde $\mathbb{R}^n$ denota o espaço euclidiano n-dimensional para algum inteiro positivo n. Como K é um grupo compacto, em particular K é um subsemigrupo compacto de G então, pelo Lema 5.1, temos que $K \cap S = \emptyset$. Sendo G um grupo topológico segue que G é Hausdorff e, como K é compacto então K é fechado. Desta forma, segue do Lema 5.4 que $K \subset H$. Assim, concluímos que todos os subgrupos compactos maximais de G estão na fronteira de S.

Seja N o menor subgrupo de H tal que $\bigcup K_i \subset N$, onde os K_i são os subgrupos compactos maximais de G. Afirmamos que N é normal em G. De fato, note primeiramente que N é formado por produtos finitos de elementos de $\bigcup K_i$. Assim, se $g \in G$ então $g(x_1...x_n)g^{-1} = gx_1g^{-1}gx_2g^{-1}...gx_ng^{-1} \in \bigcup K_i$ uma vez que os K_i são todos conjugados entre si. Portanto, N é normal. Como $N \subset H$ e S é aberto temos que $N \cap S = \emptyset$ e, como (G, S) é reduzido em G resulta que $N = \{1\}$ e, conseqüentemente, $K = \{1\}$. Logo $G \simeq K \times \mathbb{R}^n$, ou seja, $G \simeq \{1\} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ e, portanto, G é simplesmente conexo. ■

Lema 5.9. *Seja S um semigrupo bem definido do grupo de Lie conexo G. Então H é um subgrupo de Lie fechado e* $\dim(H) = \dim(G) - 1$.

Demonstração: Seja U uma vizinhança aberta do zero na álgebra de Lie $L(G)$. Então, pela Proposição 1.17, U é aplicada homeomorficamente sobre uma vizinhança aberta V de $1 \in G$, através da aplicação exponencial. Como H é um subgrupo fechado de G resulta da Proposição1.21 que H é um grupo de Lie cuja álgebra de Lie $L(H)$ é uma subálgebra de $L(G)$. Desta forma podemos escolher U pequeno tal que a função exponencial aplica $U \cap L(H)$ homeomorficamente sobre $V \cap H$. Como H separa G segue que $V \cap H$ separa V. Para ver isso, note que V é a união disjunta de $V \cap S$, $V \cap H$ e $V \cap (G \backslash (S \cup H))$. Além disso, essas interseções são não vazias. De fato, como $1 \in V \cap H$ e V é vizinhança de 1, claramente $V \cap S$ e $V \cap H$ são não vazias. Resta mostrar que $V \cap (G \backslash (S \cup H)) \neq \emptyset$. Para tanto, suponhamos que $V \cap (G \backslash (S \cup H)) = \emptyset$. Isto implica que $V \subset S \cup H$. Pela Proposição 1.3 podemos escolher um conjunto aberto $W \subset V$, ou seja, $W \subset S$ tal que $W = W^{-1}$. Considere $w \in W \cap S$, logo $w^{-1} \in W \cap S$. Sendo assim, concluímos que $1 = ww^{-1} \in SS \subset S$ o que contradiz a hipótese. Logo, $V \cap (G \backslash S \cup H) = \emptyset$.

Portanto, $V \cap H$ separa V. O subespaço linear $L(H)$ separa a vizinhança U. Assim, $L(H)$ deve ser um hiperplano e então $\dim H = \dim L(H) = \dim L(G) - 1 = \dim G - 1$. Portanto, H é um subgrupo de Lie fechado de dimensão $\dim G - 1$. ■

Lema 5.10. *Seja G um grupo conexo. Se (G, S) é reduzido em G, então $C(H) = \{1\}$. Além disso, se G for um grupo de Lie, então $L(H)$ não contém ideal não degenerado e* $\dim L(G) = \dim L(H) + 1$.

Demonstração: Como S é aberto temos que $S \cap H = \emptyset$ e, como $C(H) \subset H$ segue que $C(H) \cap S = \emptyset$. Assim, $C(H) = \{1\}$ uma vez que (G, S) é reduzido.

Agora no caso em que G é um grupo de Lie resulta do Lema 5.9 que H é um subgrupo de Lie conexo de G e $\dim H = \dim G - 1$. Como $C(H) = \{1\}$

decorre que $\{1\}$ é o único subgrupo normal contido em H. Assim, pela Proposição 1.20, o ideal nulo é o único ideal em $L(H)$. Portanto, a subálgebra $L(H)$ não contém ideal não degenerado em $L(G)$ e $\dim L(G) = \dim L(H) + 1$.

■

Antes de enunciarmos o resultado principal desta seção precisamos de mais um teorema cuja demonstração pode ser encontrada em [7].

Teorema 5.11. *Sejam* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie real e* $\mathfrak{h}$ *uma subálgebra tal que* $\dim \mathfrak{h} = (n-1)$. *Então uma, e somente uma, das seguintes afirmações ocorre:*

(i) $\mathfrak{h}$ *é um ideal;*

(ii) $\mathfrak{h}$ *contém um ideal* $\mathfrak{i}$ *de* $\mathfrak{g}$ *tal que* $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ *é uma subálgebra unidimensional mas não é um ideal;*

(iii) $\mathfrak{h}$ *contém um ideal* $\mathfrak{i}$ *de* $\mathfrak{g}$ *tal que* $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ *é isomorfo a* $\mathfrak{sl}(2)$ *e* $\mathfrak{h}/\mathfrak{i}$ *é uma subálgebra solúvel bidimensional.*

Lema 5.12. *Seja* L *uma álgebra de Lie real com subálgebra* A *tal que* A *não contém ideal não degenerado de* L *e* $\dim A + 1 = \dim L$. *Então um dos três casos ocorre:*

(i) $L = \mathbb{R}$, *álgebra de Lie real unidimensional, e* $A = \{0\}$;

(ii) $\dim L = 2$, $\dim A = 1$, *L é solúvel e consiste de todas as matrizes reais* 2×2 *da forma* $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix}$ *e* A *é uma subálgebra unidimensional diferente de um ideal unidimensional de* L;

(iii) $\dim L = 3$, $\dim A = 2$, *L não é solúvel e consiste de todas as matrizes reais* 2×2 *da forma* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ *e A é isomorfa a álgebra L do caso (ii).*

Em particular, se L for solúvel então somente os casos (i) e (ii) podem ocorrer.

Demonstração: Primeiramente, note que as hipóteses desse lema satisfazem as condições do Teorema 5.11. Vamos analisar as dimensões de L.

Se $\dim L = 1$ então $\dim A = 0$. Assim, $A = \{0\}$ e $L = \mathbb{R}$, ou seja, a afirmação (i) ocorre.

Observe que se $\dim(L) \geq 2$ então A não será um ideal uma vez que A não contém ideal não degenerado de L.

Afirmamos que se $\dim L = 2$ então (ii) ocorre. De fato, suponhamos que $\dim L = 2$. Então $\dim A = 1$ e, pelo Teorema 5.11, obtemos que A contém um ideal I de L tal que L/I é isomorfo a $\mathfrak{sl}(2)$ e A/I é uma subálgebra solúvel bi-dimensional ou A contém um ideal I de L tal que L/I é isomorfo a álgebra de Lie solúvel não comutativa e A/I é uma subálgebra unidimensional a qual não é um ideal. Observe que a primeira afirmação não ocorre, pois $\dim(\mathfrak{sl}(2)) = 3$ e, como $\dim L = 2$ não existe ideal I tal que L/I tenha dimensão 3. Logo L/I não será isomorfo a $\mathfrak{sl}(2)$. Desta forma, resulta que A contém um ideal I de L tal que L/I é isomorfo a álgebra de Lie solúvel não comutativa e A/I é uma subálgebra unidimensional o qual não é um ideal. Como A não contém ideal não degenerado temos que $I = \{0\}$. Assim $L/I = L/\{0\} = L$ é isomorfo a álgebra de Lie bi-dimensional solúvel não comutativa que sabemos ter a representação matricial $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix}$ e $A/I = A$

é uma subálgebra unidimensional, e como não é ideal é diferente do ideal unidimensional de L.

Agora se $\dim L = 3$ então $\dim A = 2$. Como $\dim L = 3$ para que L/I tenha dimensão 1 devemos ter que $dim I = 2$. Mas $I \subset A$, o que contradiz o fato de A não conter ideais não degenerados. Assim, segue do Teorema 5.11 que A contém um ideal I de L tal que L/I é isomorfo a $\mathfrak{sl}(2)$ e A/I é uma subálgebra solúvel bi-dimensional. Como A não contém ideal não degenerado temos que $I = \{0\}$ assim $L/I = L/\{0\} = L$ é isomorfo a $\mathfrak{s}l(2)$. Como $\mathfrak{s}l(2)$ não é solúvel temos que L também não o é. Portanto L é simples e sabemos que as álgebras simples tem representação matricial da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$

Logo L tem essa forma e $A/I = A/\{0\} = A$ é uma subálgebra solúvel como no caso (ii). Note também que A não pode ser abeliano, pois senão A seria um ideal contradizendo o fato de A não conter ideal não degenerado.

Por fim, observe que se $\dim L = 4$ então nenhuma das afirmações do Teorema 5.11 ocorre, pois em todos os casos $\dim I$ teria que ser maior que 1, contrariando o fato de A não conter ideal não degenerado. Sendo assim, concluímos que sob estas hipóteses $\dim L \leq 3$. ■

Observação 5.13. Entre os grupos de Lie conexos G que tem L(G) como álgebra de Lie, existe exatamente um que é simplesmente conexo. Este grupo, denotado por $\widetilde{G}$, é o grupo de recobrimento simplesmente conexo de G.

Teorema 5.14. *Seja G um grupo conexo. Se (G, S) é reduzido, então ocorre os isomorfismos:*

(i) $G \simeq \mathbb{R}$ *e* $S \simeq \mathbb{R}^+$*;*

(ii) $G \simeq Aff^+$ *e* $S \simeq Aff^{++} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \, e \, y \geq 0\}$*;*

(iii) $G \simeq \widetilde{\mathrm{Sl}}(2, \mathbb{R})$*, o grupo de recobrimento simplesmente conexo de* $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ *com* H *um subgrupo maximal conexo solúvel.*

Demonstração: Pelo Lema 5.9, temos que H é um grupo de Lie, logo podemos considerar a álgebra de Lie $L(H)$. Do Lema 5.10 resulta que $L(G)$ e $L(H)$ satisfazem as hipóteses do Lema 5.12 com $L = L(G)$ e $A = L(H)$.

Suponhamos, primeiramente, que ocorre o item (i) do Lema 5.12, isto é, $L(G) = \mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é um grupo simplesmente conexo tal que $L(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ temos, pelo Lema 5.8 e pela Observação 5.13, que $G = \mathbb{R}$ e $S = \mathbb{R}^+$.

Agora suponhamos que ocorre a condição (ii) do Lema 5.12, ou seja, $\dim L(G) = 2$, $\dim A = 1$ e $L(G)$ é solúvel não abeliana. Como $G = Aff^+$ é um grupo simplesmente conexo e sua álgebra de Lie é a única álgebra bi-dimensional solúvel não abeliana, obtemos que $G = Aff^+$ e $S = Aff^{++}$.

Por fim, se ocorre o item (iii) do Lema 5.12 então $\dim L(G) = 3$ e $\dim L(H) = 2$. Como $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ não é solúvel, obtemos que $\widetilde{\mathrm{Sl}}(2, \mathbb{R})$ não é solúvel. Mas $\widetilde{\mathrm{Sl}}(2, \mathbb{R})$ é simplesmente conexo. Logo $G = \widetilde{\mathrm{Sl}}(2, \mathbb{R})$ e, conseqüentemente, G tem a mesma álgebra de Lie de $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$. Além disso, H é subgrupo maximal, conexo e solúvel uma vez que $\dim H = \dim G - 1$ e $L(H)$ é solúvel. ∎

Referências Bibliográficas

[1] BURNSIDE, W.: **The theory of groups of finite order.** Cambridge Univ. Press, Cambrigde, 1911.

[2] CARRUTH, J., A. HILDEBRANT and R. J. KOCH: **The theory of topological semigroups.** Vol.1, Marcel Dekker, New York, 1983.

[3] DOBBINS, J. G.: **Well-bounded semigroup in locally compact groups.** Math. Z., 148, 155-167, 1976.

[4] DUGUNDJI, J.: **Topology.** Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1968.

[5] HILGERT, J; HOFMANN,K. H. e LAWSON, J. D.: **Lie groups, convex cones, and semigroups.** Oxford University Press, 1989.

[6] HOFMANN,K. H.: **A history of topological and analytical semigroups.** Semigroup Forum 61, 1-25, 2000.

[7] HOFMANN,K. H.: **Lie Algebras with subalgebras of codimension one.** Illinois J. Math 9, 636-643, 1965.

[8] LAWSON, J. D.: **Maximal subsemigroups of Lie groups that are total.** Proc. Edinburgh Math. Soc. 30, 479-501, 1987.

[9] MONTGOMERY, D., Zippin, L.: **Topological transformation groups.** New York, Interscience 1955.

[10] PONTRYAGIN, L.S.: **Topological groups.** New York, Gordon and Breach, 1966.

[11] RIBENBOIM, P.: **Théorie des groupes ordonnés.** Bahia Blanca, 1959.

[12] SAN MARTIN, L.A.B.: **Álgebras de Lie.** Editora da Unicamp, 1999.

[13] VINBERG, E.: **Invariant cones and orderings in Lie groups.** Functional Anal. Appl. 14, 1980.

[14] WARNER, F.W.: **Foundations of diferentiable manifolds and Lie groups.** Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1971.