

Universidade Estadual de Maringá

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Centro de Ciências Exatas

(Mestrado)

Octantes Invariantes para Sistemas Bilineares

Rafael Mestrinheire Hungaro

Orientador: Osvaldo Germano do Rocio

Co-Orientador: Alexandre José Santana

Maringá - Pr

2009

Rafael Mestrinheire Hungaro

Octantes Invariantes para Sistemas Bilineares

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Matemática
Área de Concentração: Geometria.

Orientador: Prof^o Dr^o Osvaldo Germano do Rocio
Co-Orientador: Prof^o Dr^o Alexandre José Santana

Maringá - Pr

2009

“Para realizar grandes conquistas, devemos não apenas agir, mas também sonhar; não apenas planejar, mas também acreditar.”
[Anatole France]

Aos que amo.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos a todo que de alguma forma contribuíram para o êxito deste trabalho, e em especial:

- À minha mãe Orasilia pela fé, amizade e por sempre acreditar em mim. Ao meu pai Clézio, que sempre foi meu maior exemplo de honestidade e perseverança. Ao meu irmão Lucas pelo carinho, apoio e incentivo, e minha avó Deolinda pela fé, carinho, e incentivo;

- À minha família pelo incentivo e apoio sempre que necessário e por saber entender minhas dificuldades e minhas ausências;

- À minha namorada Renata, por estar sempre ao meu lado me incentivando e me oferecendo seu amor;

- Ao professor Osvaldo Germano do Rocio, pela excelente orientação, paciência, por acreditar que seria possível a realização deste estudo e por ser esse exemplo de profissional o qual me orgulho muito em dizer que fui seu orientando;

- Ao professor Alexandre José Santana, pela excelente co-orientação, que mesmo estando longe sempre esteve dando dicas e ajudando para o bom desempenho do trabalho;

- Aos anjos que chamo amigos. Aqueles que mesmo distantes se fazem presentes... Pessoas com quem dividi as alegrias e tristezas da caminhada. Em especial aos amigos Raphael, Miguel, Valter, José Tiago e Júnior que me ajudaram a enfrentar as dificuldades e me fizeram acreditar que sempre vale a pena viver. À todas

as pessoas que fizeram e fazem parte da minha vida, todos os amigos cujos nomes não foram citados mas que são igualmente importantes.

- Aos meus amigos de mestrado pela força nas horas difíceis, conversas e trocas de conhecimentos;

-Aos professores do DMA que contribuíram para minha formação acadêmica e pessoal. Em especial à Professora e grande amiga Valéria Cavalcanti, pessoa maravilhosa que sempre esteve ao nosso lado se mostrando sensível às nossas fraquezas e ajudando de todas as formas possíveis, oferecendo seus conhecimentos, experiência de vida, abraço amigo e seu sorriso contagiante. Também aos professores Marcos Verdi e Josiney pela paciência e valiosas sugestões, e aos professores Luiz Antônio Barreira San Martin e Ryuichi Fukuoka pela atenção e correções neste trabalho;

- Ao Programa de Mestrado, em especial a amiga Lucia, pela atenção e amizade, e também a amiga Silvana pela alegria, bate papos e cafezinhos.

- À CAPES pelo tão importante apoio financeiro.

RESUMO

O objetivo desta dissertação de mestrado é apresentar condições para a não controlabilidade global de sistemas bilineares da forma

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^m u_i B_i x, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad u_i \in \mathbb{R} \quad (1)$$

onde A e B_i são matrizes quadradas com entradas reais. Uma vez que as condições de existência de octantes invariantes são condições suficientes para a não controlabilidade global, estaremos interessados em descrever condições sobre as entradas de matrizes A e B afim de que o sistema bilinear

$$\dot{x} = Ax + uBx$$

possua octantes invariantes.

ABSTRACT

In this work we present conditions for global noncontrollability of bilinear systems of the form

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^m u_i B_i x, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad u_i \in \mathbb{R} \quad (2)$$

where A and B_i are square matrices with real entries. A since the conditions of existence of invariant orthants are sufficient conditions of global noncontrollability, we are interested in describing conditions on the entries of matrices A and B so that the bilinear system

$$\dot{x} = Ax + uBx$$

has invariant orthants.

SUMÁRIO

Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Grupos de Lie e Subgrupos de Lie	4
1.2 Álgebras de Lie e Subálgebras de Lie	5
1.3 Ações de Grupos	7
1.4 Aplicação Exponencial	9
1.5 Representação Adjunta	11
1.6 Semigrupos de grupos de Lie	13
1.7 Controlabilidade	14
2 Cones de Lie de semigrupos de compressão	22
2.1 Variedades Grassmannianas	22
2.2 Cones associados à semigrupos	26
2.3 Semigrupos de compressão de octantes de \mathbb{R}^n	30
2.4 Semigrupos de compressão de cones no produto exterior $\Lambda^k \mathbb{R}^n$	36
3 Grafos associados a matrizes sinal simétricas	45
4 Octantes invariantes	51

4.1	Octantes invariantes para campos vetoriais lineares	52
4.2	Octantes invariantes de sistemas bilineares	59
4.3	Matrizes simétricas	61
4.4	Octantes invariantes e controlabilidade	64
5	Conclusão	69

INTRODUÇÃO

A controlabilidade de sistemas de controle vem sendo sistematicamente estudada e o enfoque do problema via a teoria de semigrupos tem contribuído significativamente para o seu entendimento. Mesmo assim ainda são poucos os resultados que, de maneira simples, garantem a controlabilidade de sistemas de controle em geral.

O objetivo deste trabalho é estudar condições para a não controlabilidade de sistemas bilineares da forma

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^m u_i B_i x, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad u_i \in \mathbb{R} \quad (3)$$

onde A e B_i são matrizes quadradas com entradas reais.

Este tipo de estudo geralmente é realizado analisando o semigrupo gerado pelas matrizes associadas ao sistema e sua ação em variedades homogêneas do grupo de Lie gerado pelo semigrupo.

De maneira mais específica estaremos preocupados em descrever condições sobre as entradas de matrizes A e B afim de que o sistema bilinear

$$\dot{x} = Ax + uBx \quad (4)$$

possua octantes invariantes.

O trabalho em si é motivado por uma conjectura formulada por V.Jurdjevic e I.Kupka a qual estabelece que, se as matrizes A e B são simétricas então o sistema bilinear (4) não é controlável.

Este trabalho esta organizado como segue:

No Capítulo 1 iniciamos com algumas informações a respeito da teoria de Lie que consideramos necessárias para o desenvolvimento deste trabalho, com o objetivo exclusivo de estabelecer a linguagem e as notações que serão adotadas durante todo o texto.

No Capítulo 2 consideramos os semigrupos de compressão de octantes no \mathbb{R}^n e exibimos um resultado caracterizando os cones de Lie desses semigrupos. Com o intuito de generalizar a caracterização dos cones de Lie dos semigrupos de compressão no \mathbb{R}^n para semigrupos de compressão de octantes no produto exterior $\Lambda^k \mathbb{R}^n$, realizamos um estudo breve sobre este objeto algébrico e, como ele esta relacionado com a variedade grassmanianna, também apresentamos um estudo breve sobre estas variedades. Se \mathcal{O}_k é um octante positivo do produto exterior $\Lambda^k \mathbb{R}^n$ denotamos por S_k o semigrupo de compressão de \mathcal{O}_k . O principal resultado deste capítulo é o Teorema 2.20, o qual caracteriza o cone de Lie $L(S_k)$ do semigrupo S_k .

No Capítulo 3 apresentamos a definição de matriz sinal-simétrica bem como, a construção do grafo $\Gamma(A)$ associado a mesma. O principal resultado deste capítulo é o Teorema 3.7, o qual fornece um método explícito de determinar o conjunto de vértices do grafo com uma certa propriedade (par ou ímpar) em relação a um dado vértice fixo do grafo.

No Capítulo 4 obtemos condições de existência de octantes invariantes positivo (negativo) para o campo Ax em termos do grafo $\Gamma(A)$. Estes resultados são aplicados para obter o principal teorema deste capítulo, o Teorema 4.14, o qual nos fornece testes de existência de octantes invariantes para um sistema bilinear. Em seguida, discutimos a relação dos nossos resultados obtidos com a conjectura de V.Jurdjevic e I.Kupka sobre não controlabilidade do sistema

$$\dot{x} = Ax + uBx, \tag{5}$$

onde A e B são matrizes simétricas de dimensão $n \times n$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $u \in \mathbb{R}$. Para

finalizar o trabalho, exibimos um exemplo em dimensão 4 para demonstrar que o problema proposto por YU.L. Sachkov, o qual estabelece que se $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$ é um matriz diagonal com $b_i \neq b_j$ para $i \neq j$, e se o sistema (5) não deixa octante invariante e satisfaz a condição do posto da álgebra de Lie, então ele é globalmente controlável em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, não é verdadeiro.

Preliminares

Apresentaremos neste capítulo algumas informações que consideramos básicas para o desenvolvimento deste trabalho. O objetivo será introduzir a linguagem matemática necessária para o entendimento dos conceitos mencionados nos capítulos subsequentes, sem a intenção de apresentar todos os pré-requisitos necessários para a literatura do mesmo. O capítulo está dividido em seções onde são abordados os seguintes tópicos: Grupos de Lie, Álgebras de Lie, Ações de grupos, Aplicação exponencial, Representação adjunta, Semigrupos e Controlabilidade.

A referência para o material mencionado no capítulo é [16].

1.1 Grupos de Lie e Subgrupos de Lie

Nesta seção, começaremos introduzindo definições de grupos e subgrupos de Lie e depois apresentaremos alguns exemplos clássicos que serão necessários para nossos estudos em seções subsequentes.

Definição 1.1. *Um grupo Lie G é uma variedade diferenciável de classe C^∞ , munida de uma estrutura de grupo abstrato, na qual a aplicação $G \times G \rightarrow G$, dada por $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau^{-1}$ é de classe C^∞ .*

O principal exemplo de grupo de Lie é o grupo $GL(n, \mathbb{R})$ das matrizes $n \times n$ com entradas reais. A estrutura diferenciável de $GL(n, \mathbb{R})$ é herdada da estrutura canônica de \mathbb{R}^{n^2} .

Podemos então definir homomorfismo de grupos de Lie:

Definição 1.2. *Sejam G e H grupos de Lie. Uma aplicação $\Psi : G \longrightarrow H$ é um homomorfismo de grupos de Lie se Ψ é C^∞ e é um homomorfismo de grupos abstratos. Se além disso Ψ é um difeomorfismo, então dizemos que Ψ é um isomorfismo de grupos de Lie. Neste caso, se ainda tivermos $G = H$ dizemos que Ψ é um automorfismo.*

Definição 1.3. *Dizemos que (H, Ψ) é um subgrupo de Lie do grupo de Lie G se:*

- (i) H é um subgrupo abstrato de G ;
- (ii) (H, Ψ) é uma subvariedade de G ;
- (iii) $\Psi : H \longrightarrow G$ é um homomorfismo de grupos abstratos.

O grupo linear especial $SL(n, \mathbb{R})$, das matrizes $n \times n$ com determinante igual à 1 é um subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$. Assim como o grupo ortogonal especial $SO(n, \mathbb{R}) = \{X \in SL(n, \mathbb{R}) \mid XX^t = Id\}$ também é um subgrupo de Lie de $SL(n, \mathbb{R})$.

1.2 Álgebras de Lie e Subálgebras de Lie

Seguindo a mesma linha da seção anterior, vamos definir agora o que é uma álgebra de Lie e uma subálgebra de Lie e depois expor alguns exemplos.

Definição 1.4. *Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é um espaço vetorial munido de uma operação $[\cdot, \cdot]$ denominada colchete satisfazendo:*

- (i) $[\cdot, \cdot]$ é bilinear;
- (ii) $[X, X] = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{g}$;
- (iii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [X, Z]] + [Z, [X, Y]] = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

As propriedades (i) e (ii) implicam a anti-simetria do colchete de Lie, isto é, $[X, Y] = -[Y, X]$.

Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita *abeliana* se $[X, Y] = 0$, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Em seguida, seguem alguns exemplos ilustrando a definição de álgebra de Lie, os quais serão muito usados em futuras seções.

Exemplo 1.5. O espaço vetorial \mathbb{R}^3 , munido do produto vetorial $[X, Y] = X \times Y$, constitui uma álgebra de Lie.

Exemplo 1.6. Em $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ definimos o colchete entre duas matrizes X e Y por $[X, Y] = XY - YX$. Então $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ munido com esta operação é uma álgebra de Lie. Este colchete é chamado de comutador de matrizes.

Exemplo 1.7. A álgebra de Lie do grupo linear especial $SL(n, \mathbb{R})$ é dada por $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \text{tr}A = 0\}$.

Exemplo 1.8. A álgebra de Lie do grupo ortogonal especial $SO(n, \mathbb{R})$ é dada por $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid A = -A^t\}$.

Agora, vamos definir o conceito de homomorfismo, isomorfismo e automorfismo de álgebras de Lie e em seguida veremos um exemplo para ilustrar este conceito.

Definição 1.9. Sejam \mathfrak{g} e \mathfrak{h} álgebras de Lie. Uma transformação linear $\Psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ é dita um homomorfismo de álgebras de Lie se $\Psi([X, Y]) = [\Psi(X), \Psi(Y)]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Se além disso Ψ for invertível, então dizemos que Ψ é um isomorfismo de álgebras de Lie. Neste caso, se tivermos ainda $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$ então dizemos que Ψ é um automorfismo.

Exemplo 1.10. A álgebra de Lie (\mathbb{R}^3, \times) é isomorfa à $(\mathfrak{so}(3, \mathbb{R}), [., .])$ (onde \times é o produto vetorial e $[., .]$ é o comutador), já que a aplicação

$$\begin{aligned} \sigma : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

é um isomorfismo entre as álgebras de Lie dadas acima.

Em seguida definiremos o conceito de subálgebra de Lie de uma álgebra de Lie dada.

Definição 1.11. Uma subálgebra de Lie \mathfrak{h} da álgebra de Lie \mathfrak{g} é um subespaço vetorial de \mathfrak{g} tal que $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, $\forall X, Y \in \mathfrak{h}$. Em outras palavras, \mathfrak{h} é um subespaço vetorial de \mathfrak{g} que é fechado para o colchete de Lie de \mathfrak{g} . Com a estrutura herdada de \mathfrak{g} , \mathfrak{h} é naturalmente uma álgebra de Lie.

As subálgebras de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, tendo como colchete de Lie o comutador de matrizes, são chamadas de álgebras de Lie lineares. Veja os seguintes exemplos:

Exemplo 1.12. A álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : \text{tr}X = 0\}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, e é designada por álgebra de Lie linear especial.

Exemplo 1.13. A álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ dada no exemplo 1.8 é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ e é chamada de álgebra de Lie linear ortogonal especial.

1.3 Ações de Grupos

Iremos agora definir o conceito de ação de um grupo de Lie sobre uma variedade M . Este conceito é importante no estudo dos semigrupos que veremos mais adiante.

Definição 1.14. Sejam G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável. Uma ação de G sobre M é uma aplicação $\varphi : G \times M \rightarrow M$, satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) φ é C^∞ ;
- (ii) $\varphi(e, x) = x$, $\forall x \in M$, onde e denota o elemento identidade de G ;
- (iii) $\varphi(gh, x) = \varphi(g, \varphi(h, x))$, $\forall g, h \in G$ e $x \in M$.

Usaremos a seguinte notação para a ação de G sobre M , $\varphi(g, x) = gx$, onde $g \in G$ e $x \in M$.

Sejam G um grupo de Lie e $\varphi : G \times M \rightarrow M$ uma ação. Dizemos que a ação é *transitiva* se para quaisquer $x, y \in M$, existe $g \in G$ tal que $gx = y$. Nesse caso diremos que G *age transitivamente* sobre M .

Uma ação $\varphi : G \times M \rightarrow M$ é dita ser uma *ação efetiva* se $gx = x$ para todo $x \in M$ implicar que $g = e$.

Exemplo 1.15. O grupo linear geral $GL(n, \mathbb{R})$ age linearmente em \mathbb{R}^n através da aplicação canônica

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (A, x) &\longmapsto Ax. \end{aligned}$$

Exemplo 1.16. O grupo $SO(2, \mathbb{R})$, das matrizes 2×2 ortogonais ($A^t A = Id$) com determinante 1, que é formado pelas matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

age em S^1 através de:

$$\begin{aligned} SO(2, \mathbb{R}) \times S^1 &\longrightarrow S^1 \\ (A, x) &\longrightarrow Ax. \end{aligned}$$

A ação de

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

em S^1 pode ser visualizada, geometricamente, como a rotação de um ponto de S^1 por um ângulo θ .

O próximo exemplo será útil nos estudos posteriores.

Exemplo 1.17. A álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ é transitiva em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. De fato, para mostrar que $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ é transitivo em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, devemos mostrar que, fixado

qualquer $\lambda_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ o conjunto $\{A\lambda_0; A \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})\}$ coincide com $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Para $x_0 \neq 0$, tome $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{x_0} & 0 \end{pmatrix}$, observe que $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e que $B \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Logo, dado qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, considere $C = xA + yB$. Assim temos que $C \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Agora, supondo que $y_0 \neq 0$, considere $D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{y_0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y_0} \end{pmatrix}$, note que, $D \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e que $E \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Logo, dado qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ basta considerar $F = xD + yE$ e obtemos que $F \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Note que, A, B, C, D, E e F pertencem a álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ e portanto $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ é transitiva em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

1.4 Aplicação Exponencial

Nesta seção definiremos o conceito de aplicação exponencial a qual é uma aplicação da álgebra de Lie no grupo de Lie. Esta aplicação tem o papel de transferir propriedades da álgebra de Lie para o grupo de Lie. Antes de definir esta aplicação precisamos do conceito de subgrupo a um parâmetro, que é dado a seguir:

Definição 1.18. Dado um grupo de Lie G chamaremos qualquer homomorfismo $\Psi : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow G$ de subgrupo a um parâmetro de G .

Conforme provado em ([16], Teorema 3.27), dados dois grupos de Lie G e H , com G simplesmente conexo, se $\Psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ é um homomorfismo então existe um único homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow H$ tal que $d\varphi = \Psi$.

Como a álgebra de Lie de um grupo de Lie se identifica com o espaço tangente na identidade então a álgebra de Lie de \mathbb{R} é dada pelos campos de vetores constantes $\{\lambda \frac{d}{dt} : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Para cada $X \in \mathfrak{g}$ definimos o homomorfismo entre a álgebra de Lie de \mathbb{R} e \mathfrak{g} por

$$\lambda \frac{d}{dr} \mapsto \lambda X.$$

Como a reta real é simplesmente conexa, existe um único subgrupo a um parâmetro $\exp_X : \mathbb{R} \rightarrow G$ tal que

$$d(\exp_X(\lambda \frac{d}{dr})) = \lambda X.$$

Em outras palavras, aplicação definida por $t \mapsto \exp_X(t)$ é o único subgrupo a um parâmetro de G cujo vetor tangente em 0 é $X(e)$. Então definimos a *aplicação exponencial* por

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$$

considerando $\exp X = \exp_X(1)$.

Este é o ente matemático que transporta algumas propriedades da álgebra de Lie para o grupo de Lie. A seguir daremos um exemplo que justifica a terminologia de exponencial.

Exemplo 1.19. *Seja $G = GL(n, \mathbb{R})$. Então $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ e a aplicação exponencial, é dada pela exponencial de matrizes, isto é, se $X \in \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ então*

$$\exp(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} \dots + \frac{X^n}{n!} + \dots$$

O próximo resultado fornece uma propriedade sobre aplicação exponencial e será muito utilizada, principalmente na seção seguinte. A demonstração encontra-se em [16].

Teorema 1.20. *Sejam G, H grupos de Lie, $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ suas respectivas álgebras de Lie e $\varphi : G \rightarrow H$ um homomorfismo. Então o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{h} & \xrightarrow{\varphi} & G \\
 \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\
 \mathfrak{h} & \xrightarrow{d\varphi} & \mathfrak{g}
 \end{array}$$

Figura 1.1:

1.5 Representação Adjunta

Nesta seção veremos os conceitos de representação adjunta de grupos e álgebra de Lie, bem como relações existentes entre estes conceitos.

Dado um grupo de Lie G , temos uma ação natural de G em si próprio por meio dos automorfismos internos:

$$a : G \times G \longrightarrow G, \quad a(g, x) = gxg^{-1} = a_g(x).$$

Para cada $g \in G$ a aplicação a_g induz uma transformação linear $da_g|_{G_e} \approx \mathfrak{g}$ do plano tangente a identidade em si próprio. A aplicação que a cada $g \in G$ associa a transformação linear da_g define uma *representação* de G em $\text{Aut}(\mathfrak{g})$. Esta representação é chamada de *representação adjunta* de G e denotada por

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ad} : G & \longrightarrow & \text{Aut}(\mathfrak{g}) \\
 g & \longrightarrow & da_g.
 \end{array}$$

A diferencial da representação adjunta de G induz uma representação de \mathfrak{g} em $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ definida da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{ad} : \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\
 X & \longrightarrow & ad(X)
 \end{array}$$

onde $\text{ad} = d(\text{Ad})_e$.

Esta representação é chamada de *representação adjunta da álgebra de Lie \mathfrak{g}* .

Pelo Teorema 1.20 temos o seguinte diagrama comutativo:

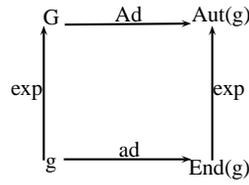


Figura 1.2:

Aplicando o Teorema 1.20 novamente, para o automorfismo interno a_g de G , temos que o diagrama abaixo também é comutativo:

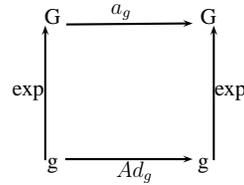
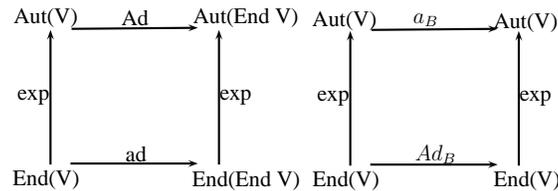


Figura 1.3:

Em outras palavras,

$$\exp t\text{Ad}_g(X) = g(\exp tX)g^{-1}. \tag{1.1}$$

No caso em que $G = \text{Aut}(V)$ e $B \in \text{Aut}(V)$, os diagramas acima tornam-se



Se $C \in \text{End}(V)$, então usando (1.1) temos :

$$\begin{aligned}
 B(\exp tC)B^{-1} &= \exp(t\text{Ad}_B(C)) \Rightarrow \exp(BtCB^{-1}) = \exp(t\text{Ad}_B(C)) \Rightarrow \\
 BtCB^{-1} &= t\text{Ad}_B(C) \Rightarrow BCB^{-1} = \text{Ad}_B(C).
 \end{aligned}$$

Portanto temos que:

$$\text{Ad}_B C = B \circ C \circ B^{-1}.$$

Semelhantemente, no caso em que $G = GL(n, \mathbb{R})$ e $B \in GL(n, \mathbb{R})$ e $C \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, então

$$\text{Ad}_B C = BCB^{-1}.$$

1.6 Semigrupos de grupos de Lie

Nesta seção apresentaremos conceitos básicos de semigrupos e subsemigrupos que posteriormente serão utilizados, e veremos alguns exemplos. Iniciamos a seção com a definição do que vem a ser um semigrupo.

Definição 1.21. *Um semigrupo é um conjunto não vazio S munido de uma operação associativa.*

Alguns exemplos bem conhecidos de semigrupos são: o conjunto dos números naturais \mathbb{N} e o conjunto dos números reais positivos \mathbb{R}^+ , munidos tanto da adição como da multiplicação usual.

Temos como exemplo também, o conjunto das funções de um conjunto nele próprio munido da operação de composição de função e o conjunto $GL(n, \mathbb{R})$ das matrizes inversíveis munido do produto usual de matrizes.

Definição 1.22. *Um subconjunto não vazio T contido em um semigrupo S é chamado de subsemigrupo se $TT \subset T$.*

A seguir, exibiremos alguns exemplos para ressaltar a definição acima.

Exemplo 1.23. *O conjunto \mathbb{R}^+ dos números reais positivos é um subsemigrupo do grupo multiplicativo dos números reais não nulos.*

Um exemplo de maior interesse é o subconjunto $SL^+(n, \mathbb{R}) \subset SL(n, \mathbb{R})$, das matrizes com entradas não negativas e determinante igual a 1, que é um subsemi-

grupo de $SL(n, \mathbb{R})$. De fato, o produto de duas matrizes com entradas não negativas é ainda uma matriz com entradas não negativas.

Observe que a intersecção (não vazia) de uma coleção de subsemigrupos de um semigrupo S é ainda um subsemigrupo. Mas para a união a afirmação não é verdadeira. De fato, basta considerar o semigrupo \mathbb{N} e os subsemigrupos $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{3n : n \in \mathbb{N}\}$. Assim $2, 3 \in A \cup B$ mas $2 + 3 \notin A \cup B$.

1.7 Controlabilidade

O objetivo desta seção é apresentar alguns resultados de controlabilidade de sistemas de controle invariantes a direita em grupos de Lie. Começaremos apresentando algumas definições, notações e resultados gerais. Apesar de nos referirmos habitualmente a sistemas de controle invariante a direita num grupo de Lie qualquer, interessa-nos sobretudo uma classe particular, a dos sistemas de controle em grupos de Lie matriciais, a qual daremos um destaque especial. Em todo este capítulo G denotará um grupo de Lie e \mathfrak{g} sua álgebra de Lie associada.

Um sistema de controle *invariante a direita* em um grupo de Lie G é um conjunto arbitrário Γ de campos de vetores invariantes a direita em G , isto é, qualquer subconjunto $\Gamma \subset \mathfrak{g}$.

Por simplicidade, sempre que nos referirmos a “sistema” estaremos nos referindo a um sistema invariante a direita, ou seja, a um subconjunto da álgebra de Lie.

Neste trabalho vamos considerar *sistemas de controle*, definidos por:

$$\dot{x} = A(x) + \sum_{i=1}^m u_i B_i(x), \quad u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^m, \quad x \in G \quad (1.2)$$

onde $A, B_1, \dots, B_m \in \mathfrak{g}$ e as funções de controle $u_1(\cdot), \dots, u_m(\cdot)$ pertencem a classe das funções seccionalmente constantes.

De modo alternativo, podemos associar ao sistema (1.2) o seguinte subconjunto de \mathfrak{g} :

$$\Gamma = \left\{ A + \sum_{i=1}^m u_i B_i \mid u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^m \right\}. \quad (1.3)$$

Definição 1.24. *Uma trajetória de um sistema de controle Γ em \mathbf{G} é uma curva contínua $x(t)$ em G definida sobre um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, tal que existe uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ e elementos A_1, A_2, \dots, A_k em Γ tais que a restrição de $x(t)$ a cada intervalo aberto (t_{i-1}, t_i) é diferenciável e $x'(t) = A_i(x(t))$ para $t \in (t_{i-1}, t_i)$ e $i = 1, \dots, k$. Em outras palavras, uma trajetória de Γ é uma concatenação de trajetórias de campos de Γ .*

Uma noção fundamental para esta seção é a de conjunto de atingibilidade.

Definição 1.25. *Dados um sistema de controle invariante a direita Γ , e $x_0 \in G$, chama-se conjunto de atingibilidade de Γ , a partir de x_0 , ao conjunto de todos os pontos de G que podem ser atingidos a partir de x_0 em tempo não negativo, isto é,*

$$\mathbb{A}_\Gamma(x_0) := \{x(T) \mid x(\cdot) \text{ é uma trajetória de } \Gamma, x(0) = x_0 \text{ e } T \geq 0\}.$$

Notação: Quando o contexto deixar claro abreviaremos a notação $\mathbb{A}_\Gamma(x_0)$ por $\mathbb{A}(x_0)$ ou simplesmente por \mathbb{A} quando $x_0 = e$ for o elemento identidade do grupo.

Definição 1.26. *Um sistema de controle Γ diz-se acessível a partir de $x_0 \in G$ se o conjunto de atingibilidade $\mathbb{A}(x_0)$ tem interior não vazio em G .*

Definição 1.27. *Um sistema Γ diz-se controlável se, dados dois pontos quaisquer x_0 e x_1 em G , o ponto x_1 pode ser atingido a partir de x_0 , através de uma trajetória de Γ em tempo não negativo, isto é, $x_1 \in \mathbb{A}(x_0)$, $\forall x_0, x_1 \in G$. De maneira equivalente, Γ é controlável se $\mathbb{A}(x) = G$, $\forall x \in G$.*

Da mesma forma que definimos conjunto de atingibilidade podemos definir *órbita* de um sistema de controle Γ através de um ponto $x_0 \in G$. Contudo, tem-se agora que o tempo T pode ser negativo ou positivo:

$\mathcal{O}_\Gamma(x_0) = \{x(T) \mid x(\cdot) \text{ é uma trajetória de } \Gamma, \ x(0) = x_0 \text{ e } T \in \mathbb{R}\}$.

Notação: Se não houver ambiguidade denotaremos $\mathcal{O}_\Gamma(x_0)$ por $\mathcal{O}(x_0)$.

Observação 1.28. *A aplicação*

$$\begin{aligned} i : G &\longrightarrow G \\ x &\longrightarrow x^{-1} \end{aligned}$$

induz um isomorfismo entre a álgebra de Lie dos campos de vetores invariantes à direita num grupo de Lie G e a álgebra de Lie dos campos de vetores invariantes à esquerda em G . Portanto, todos os problemas para sistemas de controle invariante a esquerda, incluindo controlabilidade, são equivalentes ao estudo de sistemas invariantes a direita.

Dado um subconjunto $\Gamma \subset \mathfrak{g}$, denotaremos por $Lie(\Gamma)$ a álgebra de Lie gerada por Γ , isto é, a menor subálgebra de Lie de \mathfrak{g} que contém Γ .

Agora vamos enunciar dois lemas que nos fornecem propriedades básicas das órbitas de sistemas de campos de vetores invariantes a direita e de conjuntos acessíveis. Estas propriedades são obtidas da teoria de grupos de Lie e da própria definição de conjunto acessível. As demonstrações podem ser encontradas em [11].

Lema 1.29. *Sejam G um grupo de Lie, \mathfrak{g} a sua álgebra de Lie e Γ um subconjunto de \mathfrak{g} . Se x é um ponto arbitrário de G então:*

(i) $\mathcal{O}(x) = \{\exp(t_k A_k) \cdot \exp(t_{k-1} A_{k-1}) \dots \exp(t_1 A_1) x \mid A_i \in \Gamma, \ t_i \in \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{N}\}$;

(ii) $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(e)x$;

(iii) $\mathcal{O}(e)$ é o subgrupo de Lie conexo de G cuja álgebra de Lie é $Lie(\Gamma)$;

(iv) $\mathcal{O}(x)$ é a variedade integral maximal da distribuição involutiva invariante à direita $Lie(\Gamma)$ em G passando pelo ponto x .

Lema 1.30. *Sejam G um grupo de Lie, \mathfrak{g} a sua álgebra de Lie e Γ um subconjunto de \mathfrak{g} . Se x é um ponto arbitrário de G então:*

- (i) $\mathbb{A}_\Gamma(x) = \{\exp(t_k A_k) \cdot \exp(t_{k-1} A_{k-1}) \dots \exp(t_1 A_1)x \mid A_i \in \Gamma, t_i \geq 0, k \in \mathbb{N}\};$
- (ii) $\mathbb{A}_\Gamma(x) = \mathbb{A}(e)x;$
- (iii) $\mathbb{A}_\Gamma(e)$ é um subsemigrupo de G ;
- (iv) $\mathbb{A}_\Gamma(x)$ é um subconjunto conexo por caminhos de G .

Notação: Denotaremos $\mathbb{A}_\Gamma(e)$ simplesmente por \mathbb{A} e $\mathcal{O}(e)$ por \mathcal{O} .

Daremos agora a noção de acessibilidade normal, que é um conceito mais forte.

Definição 1.31. Um ponto $y \in G$ é chamado normalmente acessível a partir de um ponto $x \in G$ se existem elementos $A_1, A_2, \dots, A_k \in \Gamma$ e $t' \in \mathbb{R}^k$ com coordenadas positivas t'_1, \dots, t'_k tais que a aplicação

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^k &\longrightarrow G \\ (t'_1, \dots, t'_k) &\longrightarrow \exp(t'_k A_k) \dots \exp(t'_1 A_1) \end{aligned}$$

satisfaz:

- (i) $F(t') = y$
- (ii) O posto da diferencial $dF|_{t'}$ é igual a dimensão de G .

O próximo resultado é importante na demonstração de alguns teoremas dentro do assunto de controlabilidade. Sua demonstração pode ser encontrada em [11].

Teorema 1.32. Se $\text{Lie}(\Gamma) = \mathfrak{g}$ então em qualquer vizinhança \mathcal{O} da identidade $e \in G$ existem pontos Γ -normalmente acessíveis a partir de $e \in G$. Consequentemente o conjunto $\text{int}\mathbb{A} \cap \mathcal{O}$ é não vazio.

Agora vamos estabelecer algumas condições para controlabilidade de um sistema Γ em um grupo de Lie G .

Teorema 1.33. Uma condição necessária para que um sistema invariante a direita Γ seja controlável é que o grupo de Lie G seja conexo.

Demonstração: Pelo ítem (iv) do Lema 1.30 temos que $\mathbb{A}(x)$ é um subconjunto de G conexo por caminhos, e portanto conexo. Se Γ é controlável, por definição temos que $\mathbb{A}(x) = G, \forall x \in G$. Logo, G é conexo. \square

Em vista do teorema anterior, na sequência todos os grupos de Lie considerados serão conexos.

Uma condição fundamental necessária de controlabilidade é dada no próximo teorema e é usualmente citada como *condição do posto*.

Teorema 1.34. *Se Γ é controlável, então $Lie(\Gamma) = \mathfrak{g}$.*

Demonstração: Como Γ é controlável temos que $\mathbb{A}(x) = G, \forall x \in G$. Em particular $\mathbb{A} = G$, logo $\mathcal{O} = G$. Pelo item (iii) do Lema 1.29, $Lie(\Gamma) = \mathfrak{g}$. \square

Em geral, a condição do posto não é suficiente para controlabilidade, mas é equivalente à acessibilidade.

Teorema 1.35. *$\Gamma \subset \mathfrak{g}$ é acessível na identidade (e portanto em qualquer ponto de G) se, e somente se, $Lie(\Gamma) = \mathfrak{g}$.*

Demonstração: Se o sistema Γ é acessível a partir da identidade, temos que o interior de \mathbb{A} é não vazio em G . Como $\mathbb{A} \subset \mathcal{O}$, temos também que $int\mathcal{O} \neq \emptyset$. O que nos permite afirmar que $e \in int\mathcal{O}$ (pois \mathcal{O} é um grupo de Lie e portanto um espaço topológico). Assim, existe uma vizinhança V de e tal que $V \subset \mathcal{O}$, logo Vx é uma vizinhança de x contida em $\mathcal{O}(x)$. Desta forma $x \in int\mathcal{O}(x), \forall x \in G$, ou seja, $\mathcal{O}(x) = G, \forall x \in G$, donde $Lie\Gamma = \mathfrak{g}$.

Reciprocamente, se $Lie\Gamma = \mathfrak{g}$ então pelo Teorema 1.32 temos que $int\mathbb{A} \neq \emptyset$, e por definição temos que Γ é acessível a partir da identidade. \square

Um subconjunto $\Gamma \in \mathfrak{g}$ é dito ter *posto máximo* se a condição do posto é válida, isto é, se $Lie(\Gamma) = \mathfrak{g}$.

Teorema 1.36. *Um sistema Γ invariante à direita é controlável em um grupo de Lie conexo G se, e somente se, é controlável a partir da identidade, isto é, $\mathbb{A} = G$.*

Demonstração: Se Γ é controlável e $x \in G$ então por definição $\mathbb{A}(x) = G$ e, em particular, $\mathbb{A}(e) = \mathbb{A} = G$. Reciprocamente, se $\mathbb{A} = G$, então por (ii) do Lema 1.30 tem-se, para qualquer $x \in G$, que $\mathbb{A}(x) = \mathbb{A}x = Gx = G$, $\forall x \in G$, pois G é um grupo. Portanto, $\mathbb{A}(x) = G$ e, por definição, Γ é controlável. \square

Teorema 1.37. *Um sistema invariante à direita Γ num grupo de Lie G conexo é controlável se, e somente se*

(i) *o conjunto de atingibilidade \mathbb{A} é um subgrupo de G ;*

(ii) *$Lie(\Gamma) = \mathfrak{g}$.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente que Γ seja um sistema controlável. Logo $\mathbb{A}(x) = G$, $\forall x \in G$. Em particular temos que $\mathbb{A} = \mathbb{A}(e) = G$, e daí temos que \mathbb{A} é subgrupo de G . Pelo Teorema 1.34 temos que $Lie(\Gamma) = \mathfrak{g}$. Portanto (i) e (ii) estão satisfeitas. Reciprocamente, suponha que são válidas as condições (i) e (ii) e mostraremos que o sistema Γ é controlável. Considere $A \in \Gamma$. Como \mathbb{A} é um subgrupo de G , temos que $\exp(tA)$ bem como seu inverso $\exp(-tA)$ estão em \mathbb{A} para todo $t \geq 0$. Assim, o conjunto de atingibilidade \mathbb{A} coincide com a órbita \mathcal{O} do sistema Γ . Como $Lie(\Gamma) = \mathfrak{g}$ e \mathcal{O} é variedade maximal da distribuição $Lie\Gamma$ passando por e temos que $\mathcal{O} = G$. Portanto $\mathbb{A} = G$, e pelo Teorema 1.36 temos que Γ é controlável. \square

Antes de enunciar o próximo resultado de controlabilidade, convém realçar que, em geral, não sabemos se o elemento identidade e está no interior de \mathbb{A} ou na sua fronteira. Quando o sistema é de posto máximo temos que $int\mathbb{A} \neq \emptyset$, mas isto não garante que $e \in int\mathbb{A}$. Quando isto ocorre, obtemos uma das principais condições para a ocorrência da controlabilidade.

Teorema 1.38. *Um sistema invariante à direita Γ em um grupo de Lie conexo \mathbf{G} é controlável se, e somente se, o elemento identidade e pertencer ao interior de \mathbb{A} .*

Demonstração: Suponha Γ controlável, isto é, $\mathbb{A} = G$. Nesse caso $e \in \text{int}\mathbb{A}$. Reciprocamente, seja $U = \text{int}\mathbb{A}$ e suponha que $e \in U$. Conforme [16], Proposição 3.18, segue que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$, onde U^n consiste de todos os produtos com n parcelas de elementos de U . Por (iii) do Lema 1.30, \mathbb{A} é um semigrupo de \mathbf{G} e portanto $U^n \in \mathbb{A}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Assim $\bigcup_{n=1}^{\infty} U^n \subset \mathbb{A}$ e temos que $\mathbb{A} \subset G \subset \mathbb{A}$. Portanto $\mathbb{A} = G$ e assim Γ é controlável em G . \square

A próxima condição é fundamental pois nos mostra que no estudo de controlabilidade de sistemas de posto máximo podemos substituir o conjunto de atingibilidade \mathbb{A} pelo seu fecho.

Teorema 1.39. *Se \mathbf{G} é um grupo de Lie conexo e o conjunto de atingibilidade \mathbb{A} de um sistema invariante à direita Γ de posto máximo é denso em \mathbf{G} , então Γ é controlável em \mathbf{G} .*

Demonstração: Consideremos o sistema $-\Gamma = \{-A \mid A \in \Gamma\}$ cujas trajetórias são as trajetórias de Γ percorridas em sentido contrário. O conjunto de atingibilidade de $-\Gamma$ é:

$$\mathbb{A}_{-\Gamma} = \{\exp(-t_k A_k) \dots \exp(-t_1 A_1) \mid A_i \in \Gamma, t_i \geq 0, k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{A}^{-1}.$$

Como o sistema $-\Gamma$ também tem posto máximo já que $\text{Lie}(-\Gamma) = \text{Lie}(\Gamma) = \mathfrak{g}$, seu conjunto de atingibilidade \mathbb{A}^{-1} tem interior não vazio e assim existe um conjunto aberto O_1 tal que $O_1 \subset \mathbb{A}^{-1}$. Por outro lado, também $\text{int}\mathbb{A} \neq \emptyset$, donde existe um ponto $x \in G$ que tem uma vizinhança aberta $O(x)$ contida em \mathbb{A} . Como $\overline{\mathbb{A}} = G$, então $\overline{\mathbb{A}(x)} = \overline{\mathbb{A}x} = G$. Assim, existe um elemento $y \in \mathbb{A}(x) \cap O_1$. Portanto $y \in \mathbb{A}x$, donde $yx^{-1} \in \mathbb{A}$. Uma vez que \mathbb{A} é um subsemigrupo e que $O(x) \subset \mathbb{A}$, obtemos ainda que a vizinhança $O(y) = yx^{-1}O(x)$ do ponto y está contida em \mathbb{A} . Mas, $y \in O_1 \subset \mathbb{A}^{-1}$, donde $y^{-1} \in \mathbb{A}$ e a vizinhança da identidade $O(e) = y^{-1}O(y)$ está

contida em \mathbb{A} . Pelo Teorema 1.38 tem-se que o sistema Γ é controlável. \square

Cones de Lie de semigrupos de compressão

O objetivo deste capítulo é descrever detalhadamente cones de Lie de semigrupos de compressão. Na Seção 2.3 são considerados semigrupos de compressão de octantes no \mathbb{R}^n e o Teorema 2.16 caracteriza os cones de Lie desses semigrupos.

Com o intuito de generalizar os resultados da Seção 2.3 para semigrupos de compressão no produto exterior $\Lambda^k \mathbb{R}^n$ na Seção 2.1 faremos uma breve explanação sobre este objeto algébrico e, como existe uma relação entre variedades Grassmannianas e o produto exterior também apresentamos uma breve explanação sobre estas variedades.

Se O_k é o octante positivo do produto exterior $\Lambda^k \mathbb{R}^n$ denotaremos por S_k o semigrupo de compressão de O_k . O principal resultado deste capítulo é o Teorema 2.20 devido a San Martin [12], o qual caracteriza o cone de Lie $L(S_k)$ do semigrupo S_k .

2.1 Variedades Grassmannianas

Nesta seção, veremos uma representação algébrica das Grassmannianas e mostraremos que a Grassmanniana é uma variedade homogênea e compacta. Em seguida, exibiremos o conceito de produto exterior e forneceremos uma base para o produto exterior, que será essencial na Seção 2.4 quando definirmos octante positivo do produto ex-

terior $\Lambda^k \mathbb{R}^n$. Iniciamos com a definição da Variedade Grassmanniana de subespaços de dimensão k em \mathbb{R}^n .

Definição 2.1. *Sejam k e n inteiros positivos com $1 \leq k < n$. A variedade de Grassmann de subespaços de dimensão k em \mathbb{R}^n é o conjunto de todos os subespaços k -dimensionais de \mathbb{R}^n . Em termos de notação, a variedade de Grassmann é definida por:*

$$Gr_k(n) = \{S : S \text{ é subespaço de dimensão } k \text{ em } \mathbb{R}^n\}.$$

Cada subespaço $\xi \in Gr_k(n)$ pode ser representado de maneira não única por uma matriz $n \times k$, cujas colunas desta matriz formam uma base para este subespaço. Assim, $Gr_k(n)$ pode ser identificada com um subconjunto das matrizes $n \times k$, de posto k , que denotaremos por $B_k(n)$.

Em $B_k(n)$ definimos uma relação de equivalência, que denotaremos por \sim , da seguinte maneira:

$$\text{Para } A, B \in B_k(n), A \sim B \iff A = Ba, \text{ para algum } a \in GL(k, \mathbb{R}).$$

Deste modo, $Gr_k(n)$ se identifica de forma natural com o conjunto quociente $B_k(n)/\sim$, identificando cada classe $\bar{\xi}$ em $B_k(n)/\sim$ com o subespaço de dimensão k gerado pelos vetores coluna de ξ .

Através desta representação algébrica, veremos agora duas propriedades da variedade Grassmanniana. Provaremos que a variedade Grassmanniana é uma variedade homogênea e compacta. Primeiramente provaremos que a variedade Grassmanniana é uma variedade homogênea.

Considere a ação,

$$\begin{aligned} \phi : SL(n, \mathbb{R}) \times Gr_k(n) &\longrightarrow Gr_k(n) \\ (g, \bar{\xi}) &\longmapsto g\bar{\xi} = \overline{g\xi} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Em termos da descrição dos subespaços k -dimensionais como classes de equivalência

em $B_k(n)$, a ação ϕ é a multiplicação de uma matriz g de ordem $n \times n$ por uma matriz $\bar{\xi}$ de ordem $n \times k$.

Veja que a ação ϕ está bem definida. De fato em $B_k(n)$ temos que $\xi \sim \eta \Leftrightarrow \xi = \eta a$ para algum $a \in GL(k, \mathbb{R})$ e se $\xi \sim \eta$ então $\bar{\xi} = \bar{\eta}$. Desta maneira,

$$g\bar{\xi} = \overline{g\xi} = \overline{g\eta} = g\bar{\eta}.$$

Temos que esta ação é transitiva em $Gr_k(n)$, isto é, dados $\bar{\xi}, \bar{\eta} \in Gr_k(n)$, existe $g \in SL(n, \mathbb{R})$ tal que $g\bar{\xi} = \bar{\eta}$. Isto segue do fato de que qualquer matriz $n \times k$ de posto k , pode ser complementada a uma matriz $n \times n$ com determinante 1.

Fixemos uma base ortonormal de \mathbb{R}^n e consideremos o subespaço k -dimensional ξ_0 de \mathbb{R}^n gerado pelos k -primeiros vetores dessa base. Denotando por H_k , o subgrupo de isotropia de ξ_0 , temos que $Gr_k(n)$ pode ser identificada com a variedade homogênea $SL(n, \mathbb{R})/H_k$. Portanto $Gr_k(n)$ é uma variedade homogênea.

Agora mostraremos que a variedade Grassmanniana é uma variedade compacta. Com efeito, restringindo a ação dada em (2.1) de $SL(n, \mathbb{R})$ ao grupo ortogonal $O(n, \mathbb{R})$ temos também uma ação transitiva em $Gr_k(n)$. De fato, tomando $\bar{\xi}, \bar{\eta} \in Gr_k(n)$, queremos mostrar que existe $g \in O(n, \mathbb{R})$ tal que $\bar{\xi} = g\bar{\eta}$. O subespaço $\bar{\xi}$ pode ser representado por uma matriz $n \times k$, de posto k , cujas colunas formam uma base para este espaço. Completando esta matriz até uma matriz $n \times n$ e ortonormalizando-a pelo processo de Gram-Schmidt, temos que a matriz obtida ξ pertence ao grupo ortogonal $O(n, \mathbb{R})$. Realizando este mesmo processo com a matriz $n \times k$ que representa $\bar{\eta}$, a matriz obtida η também pertence a $O(n, \mathbb{R})$. Como $O(n, \mathbb{R})$ é um grupo, existe uma matriz $\gamma \in O(n, \mathbb{R})$ (a saber, $\gamma = \xi\eta^{-1}$) tal que $\xi = \gamma\eta$.

Um fato importante, que garante que as matrizes $\xi, \eta \in O(n, \mathbb{R})$ representam os subespaços $\bar{\xi}, \bar{\eta} \in Gr_k(n)$, respectivamente, é que pelo processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, a partir da base $\{u_1, \dots, u_k, \dots, u_n\}$ obtemos uma base ortonormal $\{v_1, \dots, v_k, \dots, v_n\}$, e as bases $\{u_1, \dots, u_k\}$ e $\{v_1, \dots, v_k\}$ geram o mesmo subespaço.

Seja agora $\bar{\xi}_0 \in Gr_k(n)$ o subespaço gerado pelos k primeiros vetores da base

canônica de \mathbb{R}^n . O subgrupo de isotropia H_0 de $\overline{\xi_0}$ determinado por esta ação é o subgrupo das matrizes da forma

$$H_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A_{k \times k} & 0_{k \times (n-k)} \\ 0_{(n-k) \times k} & D_{(n-k) \times (n-k)} \end{pmatrix}; A \in O(n, \mathbb{R}) \text{ e } D \in O(n-k, \mathbb{R}) \right\}.$$

que é isomorfa a $O(k) \times O(n-k)$. Logo, $Gr_k(n)$ é uma variedade compacta.

Com o intuito de dar uma caracterização algébrica para as variedades Grassmannianas introduziremos agora o conceito do produto exterior, $\Lambda^k E$, onde E denota um espaço vetorial de dimensão finita e determinaremos uma base para este espaço. Antes, veremos duas definições que serão úteis na definição do produto exterior.

Definição 2.2. *Sejam E e F espaços vetoriais. Uma aplicação $\varphi : E \times \dots \times E \longrightarrow F$, definida no produto cartesiano de k fatores iguais a E , diz-se k -linear quando é linear em cada uma de suas entradas.*

Quando $F = \mathbb{R}$, φ recebe o nome de forma k -linear.

Definição 2.3. *Uma aplicação k -linear $\varphi : E \times \dots \times E \longrightarrow F$ diz-se alternada quando se tem $\varphi(v_1, \dots, v_k) = 0$, sempre que existirem $i \neq j$ tais que $v_i = v_j$, ou, equivalentemente, $\varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\varphi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$ para quaisquer $v_1, \dots, v_k \in E$.*

Usaremos a notação $\Lambda^k E$ para indicar o conjunto das formas k -lineares alternadas em E . Este conjunto, munido da adição e produto por escalar usuais é um espaço vetorial. Seus elementos são denominados formas k -lineares alternadas, ou simplesmente, k -formas.

A partir de k funcionais lineares $f_1, \dots, f_k \in E^*$, podemos definir uma forma k -linear alternada $f_1 \wedge \dots \wedge f_k : E \times \dots \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, chamada o *produto exterior* desses funcionais, definida por

$$(f_1 \wedge \dots \wedge f_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(f_i(v_j)),$$

onde, à direita, temos o determinante da matriz $k \times k$ cuja i -ésima linha é $(f_i(v_1), \dots, f_i(v_k))$ e cuja j -ésima coluna é $(f_1(v_j), \dots, f_k(v_j))$.

O próximo teorema fornece uma base do produto exterior $\Lambda^k E$. Uma demonstração detalhada pode ser encontrada em [6].

Teorema 2.4. *Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de E e $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ a base dual do espaço dual E^* . As k -formas $e_I = e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*$, onde $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$ percorre todos os subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$ com k elementos, constituem uma base de $\Lambda^k E$. Em particular, $\dim \Lambda^k E = \binom{n}{k}$*

Introduziremos agora as variedades Grassmanniana orientada $Gr_k^+(n)$ constituídas pelos subespaços orientados de dimensão k em \mathbb{R}^n .

A Grassmanniana orientada $Gr_k^+(n)$ se identifica de forma natural com o quociente $B_k(n)/\sim^+$, onde \sim^+ é a relação de equivalência definida da seguinte forma: Para $A, B \in B_k(n)$, $A \sim^+ B \iff A = Ba$, para algum $a \in GL(k, \mathbb{R})$ com $\det(a) > 0$.

Para terminar esta seção, observe que existe uma ação natural de $SL(n, \mathbb{R})$ no produto exterior $\Lambda^k \mathbb{R}^n$ definida por:

$$\begin{aligned} \rho_k : SL(n, \mathbb{R}) \times \Lambda^k \mathbb{R}^n &\longrightarrow \Lambda^k \mathbb{R}^n \\ (g, u_1 \wedge \dots \wedge u_k) &\longrightarrow \rho_k(g, (u_1 \wedge \dots \wedge u_k)) = gu_1 \wedge \dots \wedge gu_k \end{aligned}$$

Desta forma, esta ação induzida coincide com a ação de $SL(n, \mathbb{R})$ em $Gr_k(n)$.

2.2 Cones associados à semigrupos

Um dos conceitos intrinsecamente relacionado com semigrupos e controlabilidade é o conceito de cone que passamos a definir:

Definição 2.5. *Um subconjunto não vazio $W \subset \mathbb{R}^n$ é chamado um cone se ele satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $W + W \subset W$;
2. $\mathbb{R}^+W \subset W$ e
3. $\overline{W} = W$, isto é, W é fechado topologicamente.

Se $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ podemos considerar o fluxo $\exp(tA)x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $t \in \mathbb{R}$. Da dinâmica deste fluxo depende muitas propriedades, dentre elas a controlabilidade.

Através do fluxo de uma matriz $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, definiremos cone invariante:

Definição 2.6. *Um cone $W \subset \mathbb{R}^n$ é invariante sob o fluxo de uma matriz $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, ou simplesmente, A-invariante se $\exp(tA)W \subset W$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$.*

Vamos agora associar um objeto, na álgebra de Lie, associado a um semigrupo de um grupo de Lie.

Dado um semigrupo $S \subset GL(n, \mathbb{R})$, define-se cone associado ao semigrupo S , o seguinte conjunto:

$$L(S) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : \exp(tX) \in \overline{S}, \forall t \in \mathbb{R}^+\}.$$

Proposição 2.7. *$L(S)$ é de fato um cone.*

Demonstração: Provaremos primeiramente que $L(S)$ é topologicamente fechado. Tome $X \in \overline{L(S)}$. Logo, existe uma sequência $(X_n) \in L(S)$ tal que $X_n \rightarrow X$. Como para cada n temos que $X_n \in L(S)$, temos por definição que $\exp(tX_n) \in \overline{S}$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$. Sendo a exponencial uma aplicação contínua, temos que $\exp(tX_n) \rightarrow \exp(tX)$. Logo $\exp(tX) \in \overline{S}$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, o que implica que $X \in L(S)$. Portanto $L(S)$ é fechado. Mostraremos agora que $L(S) + L(S) \subset L(S)$. Tomemos $X, Y \in L(S)$. Pelo Corolário 2.15.5 de [15] temos que:

$$\exp(t(X + Y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\exp(\frac{t}{n}X) \exp(\frac{t}{n}Y))^n. \quad (2.2)$$

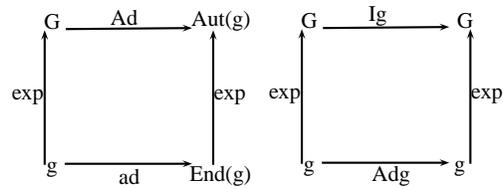
O que implica que $\exp(t(X + Y)) \in \overline{S}$, pois $\exp(\frac{t}{n}X)$, $\exp(\frac{t}{n}Y) \in \overline{S}$. Portanto $X + Y \in L(S)$.

E por fim, mostraremos que $\mathbb{R}^+L(S) \subset L(S)$. Para isto, seja $X \in L(S)$ e $s > 0$. Queremos mostrar que $sX \in L(S)$. Dado $t \geq 0$, temos que $ts > 0$ donde $\exp(tsX) \in \bar{S}$ por hipótese. Portanto $sX \in L(S)$. □

Na próxima proposição mostraremos que o cone $L(S)$ é invariante sob o fluxo da exponencial da adjunta de certos elementos da álgebra de Lie.

Proposição 2.8. *Sejam $L(S)$ o cone associado a um semigrupo $S \subset GL(n, \mathbb{R})$ e $A \in H(S) = L(S) \cap -L(S)$. Então, $\exp(t.ad(A))L(S) \subset L(S), \forall t \in \mathbb{R}^+$.*

Demonstração: Consideremos $A \in H(S)$, $t \in \mathbb{R}^+$ e $B \in L(S)$. Mostraremos que $\exp(t.ad(A))B \in L(S)$. Como $A \in H(S)$, temos que $\pm A \in L(S)$. Logo $\exp(tA), \exp(-tA) \in \bar{S}, \forall t \in \mathbb{R}^+$ e como $B \in L(S)$ temos também que $\exp(tB) \in \bar{S}, \forall t \in \mathbb{R}^+$. Pela comutatividade dos diagramas abaixo, temos que



$$\exp(s.\exp(t.ad(A))B) = \exp(s.Ad_{\exp(tA)}B) = \exp(tA)\exp(sB)\exp(-tA) \in \bar{S},$$

para todo $s, t \in \mathbb{R}^+$, pois S é um semigrupo e $\exp(tA), \exp(-tA), \exp(sB) \in \bar{S}$. Portanto $\exp(t.ad(A))B \in L(S), \forall t \in \mathbb{R}^+$, e assim temos que $\exp(t.ad(A))L(S) \subset L(S)$. □

Passaremos agora a tratar do importante conceito de *semigrupo de compressão*.

Dado um cone $W \subset \mathbb{R}^n$, definimos

$$S_W =: \{g \in GL(n, \mathbb{R}) : gW \subset W\}.$$

Note que o semigrupo de compressão S_W é fechado. De fato, seja $g \in \overline{S_W}$. Logo, existe uma sequência (g_i) em S_W convergindo para g . Considere agora $w \in W$, temos que $g_i w \in W$, pois $g_i \in S_W$. Como W é fechado, $(g_i w)$ converge em W . Mas sabemos que $g_i w$ converge para gw , o que implica que $gw \in W$. Como w é arbitrário, temos que $gw \in W$, para todo $w \in W$. Logo, $g \in S_W$ e portanto $\overline{S_W} \subset S_W$. Como $S_W \subset \overline{S_W}$, temos que $S_W = \overline{S_W}$. Portanto S_W é fechado.

A relação entre invariância e cone é estabelecida na seguinte proposição.

Proposição 2.9. *Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ um cone e $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Então W é A -invariante se, e somente se, $A \in L(S_W)$.*

Demonstração: Suponha que W é A -invariante. Assim temos por definição que $\exp(tA)W \subset W$, $\forall t \geq 0$, ou seja, $\exp(tA) \in S_W$, o que implica que $A \in L(S_W)$. Reciprocamente, suponha que $A \in L(S_W)$. Assim, $\exp(tA) \in S_W$, $\forall t \geq 0$, o que implica que, $\exp(tA)W \subset W$, $\forall t \geq 0$. Portanto temos que W é A -invariante. \square

O próximo resultado nos afirma que se o campo Ax pertence a um cone para todo x no cone, então o fluxo de $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ também estará no cone.

Proposição 2.10. *Sejam W um cone fechado, e $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Se $Ax \in W$, $\forall x \in W$ então $\exp(tA)x \in W$, $\forall t \geq 0$.*

Demonstração: Seja $x \in W$. Como $Ax \in W$ então, por indução, concluímos que $A^n x \in W$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e como W é um cone temos então que

$$\frac{t^n}{n!} A^n x = \frac{(tA)^n}{n!} x \in W, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ e daí } S_n = \sum_{i=0}^n \frac{(tA)^i}{i!} x \in W, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Usando agora o fato que W é um cone fechado concluímos que

$$\exp(tA)x = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \in W, \quad \forall t \geq 0.$$

\square

2.3 Semigrupos de compressão de octantes de \mathbb{R}^n

Apresentaremos agora alguns conceitos e propriedades de octantes de \mathbb{R}^n , os quais serão fundamentais para o estudo da próxima seção.

Todo *octante* de \mathbb{R}^n pode ser parametrizado por uma n-upla de sinais $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, onde $\sigma_i \in \{-1, 1\}$, $\forall i = 1, \dots, n$. O *octante* associado a σ é dado por :

$$\mathbb{R}_\sigma^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sigma_i x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Denominaremos de octante positivo ao octante parametrizado por $\sigma^+ = \{1, 1, \dots, 1\}$ e de octante negativo ao octante parametrizado por $\sigma^- = \{-1, -1, \dots, -1\}$.

Observação 2.11. *Note que todo octante de \mathbb{R}_σ^n é, em particular, um cone.*

Vamos agora demonstrar um resultado que será muito útil na demonstração da próxima proposição.

Lema 2.12. *Seja $\mathbb{R}_{\sigma^+}^n$ o octante positivo. Então, $\exp(tX)\mathbb{R}_{\sigma^+}^n \subset \mathbb{R}_{\sigma^+}^n$, $\forall t \geq 0$ se, e somente se, $\langle Xe_i, e_j \rangle \geq 0$ se $i \neq j$.*

Demonstração: Observe que, se $\exp(tX)\mathbb{R}_{\sigma^+}^n \subset \mathbb{R}_{\sigma^+}^n$, $\forall t \geq 0$ então em particular $\exp(tX)e_i \in \mathbb{R}_{\sigma^+}^n$, $\forall t \geq 0$ e $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Daí $\langle \exp(tX)e_i, e_j \rangle \geq 0$, $\forall t \geq 0$, e $i \neq j$. De fato, se $\langle \exp(tX)e_i, e_j \rangle < 0$ para algum $t \geq 0$ e $i \neq j$ teríamos que o ângulo entre e_j e $\exp(tX)e_i$ seria maior que 90° , o que contradiz o fato que $\exp(tX)\mathbb{R}_{\sigma^+}^n \subset \mathbb{R}_{\sigma^+}^n$. Como $\langle \exp(tX)e_i, e_j \rangle \geq 0$ temos que $\langle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n X^n}{n!} e_i, e_j \rangle \geq 0$, $\forall t \geq 0$. Logo $\langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n X^n}{n!} e_i, e_j \rangle \geq 0$, $\forall t \geq 0$, pois $\langle e_i, e_j \rangle = 0$, se $i \neq j$. Assim $\frac{1}{t} \langle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n X^n}{n!} e_i, e_j \rangle \geq 0$, $\forall t > 0$ e portanto $\langle Xe_i + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1} X^n}{n!} e_i, e_j \rangle \geq 0$, $\forall t > 0$. Aplicando agora o limite quando $t \rightarrow 0$ temos $\langle Xe_i, e_j \rangle \geq 0$, $\forall i \neq j$.

Reciprocamente, suponhamos que $\langle Xe_i, e_j \rangle \geq 0$, $\forall i \neq j$. Mostraremos que o campo X deixa o octante positivo $\mathbb{R}_{\sigma^+}^n$ invariante. Para isto consideremos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_{\sigma^+}^n$, ou seja, $x_i \geq 0 \forall i = 1, 2, \dots, n$. Observe que $\langle Xe_i, e_j \rangle = x_{ji} \geq 0$ por hipótese. Logo, fora da diagonal, X possui entradas não negativas. Note que podemos escrever $X = A + B$, onde

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x_{nn} \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & 0 & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que $A, B \in L(S_{\mathbb{R}_{\sigma^+}^n})$, pois $\exp(tA), \exp(tB) \in S_{\mathbb{R}_{\sigma^+}^n}, \forall t \geq 0$. Como $L(S_{\mathbb{R}_{\sigma^+}^n})$ é um cone, temos que $X = A + B \in L(S_{\mathbb{R}_{\sigma^+}^n})$. Portanto $\exp(tX)\mathbb{R}_{\sigma^+}^n \subset \mathbb{R}_{\sigma^+}^n, \forall t \geq 0$. \square

O próximo resultado caracteriza o cone tangente, $L(S_W)$, associado ao semi-grupo de compressão S_W , onde W é um octante positivo de \mathbb{R}^n .

Proposição 2.13. *Seja $W = \mathbb{R}_{\sigma^+}^n$ o octante positivo de \mathbb{R}^n . Então $L(S_W) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : x_{ij} \geq 0 \text{ se } i \neq j\}$.*

Demonstração: Seja $X = (x_{ij})$ com $x_{ij} \geq 0$, se $i \neq j$. Mostraremos que $X \in L(S_W)$. Temos dois casos à analisar:

1. Se X é uma matriz diagonal, isto é,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x_{nn} \end{pmatrix}$$

temos que $X \in L(S_W)$, pois

$$\exp(tX) = \begin{pmatrix} \exp(tx_{11}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \exp(tx_{nn}) \end{pmatrix} \in S_W.$$

2. Se X for uma matriz arbitrária não diagonal, isto é,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

podemos escreve-la como a soma de duas matrizes, onde a primeira é uma matriz diagonal e a segunda é uma matriz com as entradas da diagonal principal todas nulas, isto é, $X = A + B$, onde

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x_{nn} \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & 0 & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Pela Proposição 2.10, temos que $B \in L(S_W)$ e de maneira análoga ao caso anterior, temos que $A \in L(S_W)$. Como $L(S_W)$ é um cone, temos então que $X = A + B \in L(S_W)$.

Para a inclusão contrária, tome $X \in L(S_W)$. Mostraremos que $x_{ij} \geq 0$, se $i \neq j$. Para isto, basta observar que $\langle X e_i, e_j \rangle = x_{ji}$, e pelo Lema 2.12, temos que $\langle X e_i, e_j \rangle \geq 0$, $\forall i \neq j$. Portanto $x_{ij} \geq 0$, $\forall i \neq j$. \square

Na Proposição 2.13 caracterizamos o cone $L(S_W)$ onde W é o octante positivo $\mathbb{R}_{\sigma^+}^n$. Afim de se obter uma caracterização do cone tangente dos semigrupos de compressão dos outros octantes consideremos a função:

$$F_{\tau} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definida por $F_{\tau}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\tau_1 x_1, \tau_2 x_2, \dots, \tau_n x_n)$, onde $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ é uma n -upla de sinais.

Proposição 2.14. *A função F_{τ} satisfaz as seguintes propriedades*

(a) F_{τ} é um isomorfismo;

$$(b) F_\tau(\mathbb{R}_{\sigma^+}^n) = \mathbb{R}_\tau^n;$$

$$(c) F_\tau \circ F_\tau = id.$$

Demonstração:

(a) Vamos mostrar que F_τ é um isomorfismo. Para isto, basta observar que a linearidade da função F_τ segue da linearidade de cada coordenada e como F_τ leva base em base temos que F_τ é um isomorfismo.

(b) Agora, provaremos que $F_\tau(\mathbb{R}_{\sigma^+}^n) = \mathbb{R}_\tau^n$.

Tome $x \in F_\tau(\mathbb{R}_{\sigma^+}^n)$ e provaremos que $x \in \mathbb{R}_\tau^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; \tau_i x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n\}$. Como $x \in F_\tau(\mathbb{R}_{\sigma^+}^n)$, temos que $x = F_\tau(y)$ onde $y \in \mathbb{R}_{\sigma^+}^n$. Logo, $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\tau_1 y_1, \tau_2 y_2, \dots, \tau_n y_n)$. Igualando coordenada a coordenada temos que $x_i = \tau_i y_i, \forall i = 1, \dots, n$. Daí, $\tau_i x_i = y_i, \forall i = 1, \dots, n$, pois $\tau_i^2 = 1, \forall i = 1, \dots, n$. Note que $y \in \mathbb{R}_{\sigma^+}^n$ e $\sigma^+ = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = (1, 1, \dots, 1)$, logo $\sigma_i y_i = y_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$. Portanto, $\tau_i x_i = y_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$, o que implica que $\tau_i x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$. Portanto $x \in \mathbb{R}_\tau^n$.

Para a inclusão contrária tome $x \in \mathbb{R}_\tau^n$, e provaremos que $x \in F_\tau(\mathbb{R}_{\sigma^+}^n)$, isto é, provaremos que $x = F_\tau(y)$, onde $y \in \mathbb{R}_{\sigma^+}^n$, e por definição de $\mathbb{R}_{\sigma^+}^n$, temos que $\sigma_i y_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$, mas $\sigma_i = 1, \forall i = 1, \dots, n$, e daí segue que $y_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$. Como $x \in \mathbb{R}_\tau^n$, pela definição de \mathbb{R}_τ^n temos que $\tau_i x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$, portanto podemos considerar $y_i = \tau_i x_i, com i = 1, \dots, n$, e portanto $x_i = \tau_i y_i, \forall i = 1, \dots, n$. Então temos que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\tau_1 y_1, \tau_1 y_1, \dots, \tau_n y_n) = F_\tau(y)$, e portanto temos que $x \in F_\tau(\mathbb{R}_{\sigma^+}^n)$.

(c) Finalmente vamos provar que $F_\tau \circ F_\tau = id$.

$$F_\tau \circ F_\tau(x) = F_\tau(F_\tau(x)) = F_\tau(\tau_1 x_1, \tau_2 x_2, \dots, \tau_n x_n) = (\tau_1 \tau_1 x_1, \tau_2 \tau_2 x_2, \dots, \tau_n \tau_n x_n) = (\tau_1^2 x_1, \tau_2^2 x_2, \dots, \tau_n^2 x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x = Id$$

□

Se $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ definimos uma matriz $F_\tau(A)$ por:

$$F_\tau(A) = \begin{cases} a_{ij} & \text{se } i = j \\ \tau_i \tau_j a_{ij} & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (2.3)$$

A próxima proposição nos fornece uma propriedade importante a respeito da matriz $F_\tau(A)$.

Proposição 2.15. *Sejam $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Então*

$$F_\tau(\exp(tA)x) = \exp(tF_\tau(A))F_\tau(x), \quad \forall t \geq 0.$$

Em particular

$$F_\tau(\exp(tA)\mathbb{R}_{\sigma^+}^n) = \exp(tF_\tau(A))(\mathbb{R}_\tau^n), \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração: Sejam $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ e $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Note que $Ax = (y_1, \dots, y_n)$ onde $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$. Logo,

$$F_\tau(Ax) = (\tau_1 \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \dots, \tau_n \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j). \quad (2.4)$$

Por outro lado,

$$F_\tau(A).F_\tau(x) = \left(\sum_{j=1}^n \tau_1 \tau_j a_{1j} \cdot \tau_j x_j, \dots, \sum_{j=1}^n \tau_n \tau_j a_{nj} \cdot \tau_j x_j \right) = \left(\tau_1 \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \dots, \tau_n \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \right). \quad (2.5)$$

De (2.4) e (2.5) segue que $F_\tau(Ax) = F_\tau(A).F_\tau(x)$.

Desse modo, como $F_\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo então

$$\begin{aligned} F_\tau(\exp(tA)x) &= F_\tau\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n\right)(x)\right) = F_\tau\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} F_\tau(A^n x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} F_\tau(A)^n F_\tau(x) = \exp(tF_\tau(A))F_\tau(x), \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Como $F_\tau(\mathbb{R}_{\sigma^+}^n) = \mathbb{R}_\tau^n$, temos o seguinte caso particular:

$$F_\tau(\exp(tA)\mathbb{R}_{\sigma^+}^n) = \exp(tF_\tau(A))F_\tau(\mathbb{R}_{\sigma^+}^n) = \exp(tF_\tau(A))\mathbb{R}_\tau^n, \quad \forall t \geq 0.$$

□

Finalizando o presente capítulo vamos agora descrever os cones tangentes dos semigrupos de compressão de todos os octantes de \mathbb{R}^n .

Teorema 2.16. *Sejam $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ um conjunto de sinais, \mathbb{R}_τ^n o octante correspondente a τ e S_τ o semigrupo de compressão de \mathbb{R}_τ^n . Então uma matriz $n \times n$ $A = (a_{ij})$ pertence ao cone tangente $L(S_\tau)$ se, e somente se, $\tau_i \tau_j a_{ij} \geq 0, \forall i \neq j$.*

Demonstração: Suponha que $A = (a_{ij})$ pertence ao cone tangente $L(S_\tau)$. Logo, $\exp(tA) \in S_\tau, \forall t \geq 0$. Como S_τ é o semigrupo de compressão de \mathbb{R}_τ^n , segue que $\exp(tA)\mathbb{R}_\tau^n \subset \mathbb{R}_\tau^n, \forall t \geq 0$. Através da função F_τ temos que,

$$F_\tau(\exp(tA)\mathbb{R}_\tau^n) \subset F_\tau(\mathbb{R}_\tau^n), \quad \forall t \geq 0.$$

Daí, pela Proposição 2.15 junto com as propriedades da função F_τ ,

$$\exp(tF_\tau(A))\mathbb{R}_{\sigma^+}^n \subset \mathbb{R}_{\sigma^+}^n, \quad \forall t \geq 0.$$

Portanto, pela Proposição 2.13, as entradas da matriz $F_\tau(A)$, fora da diagonal principal, são todas não negativas. Mas as entradas da matriz $F_\tau(A)$ fora da diagonal principal são exatamente $\tau_i \tau_j a_{ij}$. Portanto $\tau_i \tau_j a_{ij} \geq 0, \forall i \neq j$.

Reciprocamente, suponha que $\tau_i \tau_j a_{ij} \geq 0, \forall i \neq j$. Neste caso as entradas da matriz $F_\tau(A)$, fora da diagonal principal, são não negativas. Portanto, pela Proposição 2.13, $F_\tau(A) \in L(S_{\mathbb{R}_{\sigma^+}^n})$. Assim por definição, temos que $\exp(tF_\tau(A)) \in S_{\mathbb{R}_{\sigma^+}^n}, \forall t \geq 0$, o que nos dá que $\exp(tF_\tau(A))\mathbb{R}_{\sigma^+}^n \subset \mathbb{R}_{\sigma^+}^n, \forall t \geq 0$. Logo, aplicando F_τ em ambos os lados obtemos:

$$F_\tau(\exp(tF_\tau(A))\mathbb{R}_{\sigma^+}^n) \subset F_\tau(\mathbb{R}_{\sigma^+}^n), \quad \forall t \geq 0.$$

Através das propriedades da função F_τ , temos

$$\exp(tF_\tau(F_\tau(A)))F_\tau(\mathbb{R}_{\sigma^+}^n) \subset F_\tau(\mathbb{R}_{\sigma^+}^n).$$

Como $F_\tau \circ F_\tau = Id$ e $F_\tau(\mathbb{R}_{\sigma^+}^n) = \mathbb{R}_\tau^n$, concluímos que

$$\exp(tA)\mathbb{R}_\tau^n \subset \mathbb{R}_\tau^n.$$

Portanto, $A \in L(S_\tau)$. □

2.4 Semigrupos de compressão de cones no produto exterior $\Lambda^k \mathbb{R}^n$

Nessa seção vamos generalizar os conceitos e resultados da seção anterior para “cones” no produto exterior. Porém, o nosso principal objetivo nesta seção é determinar o cone de Lie, $L(S_k)$, associado ao semigrupo de compressão S_k .

Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica de \mathbb{R}^n . Para cada índice múltiplo k entre 1 e n $I = (1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n)$ definimos $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$. O conjunto $\{e_I\}$, com I percorrendo os k índices múltiplos é uma base do produto exterior $\Lambda^k := \Lambda^k \mathbb{R}^n$.

Denotemos por \mathcal{O}_k o octante positivo com respeito a esta base:

$$\mathcal{O}_k = \left\{ \sum_I a_I e_I : a_I \geq 0 \right\}.$$

Vamos mostrar que \mathcal{O}_k realmente é um octante positivo. De fato, considere $I = (1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n)$. Como $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ pode ser visto como uma matriz $n \times k$, podemos considerar cada uma das k colunas desta matriz como elementos do \mathbb{R}^n com $e_{i_j} = 1$ na posição i_j , onde $j \in \{1, \dots, k\}$ e 0 nas outras posições, pois estamos considerando a base canônica do \mathbb{R}^n . Ao multiplicarmos por a_{i_j} com $a_{i_j} \geq 0$, chegaremos em elementos do \mathbb{R}^n com a_{i_j} na posição i_j onde $j \in \{1, \dots, k\}$ e 0 nas outras posições. Obtendo assim, $a_{i_j} e_{i_j} = a_{i_j} 1 = a_{i_j} \geq 0$ para cada $j \in \{1, \dots, k\}$. Somando cada elemento desse, o qual é positivo para todo j , obtemos que $\sum_I a_I e_I \geq 0$, mostrando assim que \mathcal{O}_k realmente é um octante positivo.

Seja $G = SL(n, \mathbb{R})$ e considere sua representação natural, denotada por ρ_k ,

sobre $\Lambda^k \mathbb{R}^n$, a qual é definida por,

$$\rho_k(g)(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k) = gv_1 \wedge gv_2 \wedge \dots \wedge gv_k \tag{2.6}$$

onde $g \in SL(n, \mathbb{R})$ e $v_i \in \mathbb{R}^n$.

A representação da álgebra é definida como $d\rho_k$, mas por simplicidade de notação, também será denotada por ρ_k . As duas representações são conectadas pela seguinte igualdade

$$\rho_k(\exp X) = \exp(\rho_k(X)) \tag{2.7}$$

onde $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Pelo diagrama abaixo, como $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ então $\exp X \in$

$$\begin{array}{ccc} SL(n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\rho_k} & \text{Aut}(\Lambda^k \mathbb{R}^n) \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\rho_k} & \text{End}(\Lambda^k \mathbb{R}^n) \end{array}$$

$SL(n, \mathbb{R})$. Logo a primeira exponencial em (2.7) significa a exponencial em $SL(n, \mathbb{R})$.

Como

$$\begin{array}{ccc} \rho_k : \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \text{End}(\Lambda^k \mathbb{R}^n) \\ X & \longrightarrow & \rho_k(X) \end{array}$$

temos que a segunda exponencial em (2.7) significa a exponencial de aplicações lineares em $\Lambda^k \mathbb{R}^n$. Assim, através da representação definida em (2.6) temos que a representação do grupo é dada por

$$\rho_k(\exp(tX))(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k) = \exp(tX)v_1 \wedge \exp(tX)v_2 \wedge \dots \wedge \exp(tX)v_k,$$

para $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ e $t \geq 0$. Desta forma, a representação da álgebra de Lie, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, é dada por

$$\begin{aligned} \rho_k(X)(u_1 \wedge \dots \wedge u_k) &= d\rho_k(\exp(tX))(u_1 \wedge \dots \wedge u_k) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \rho_k(\exp tX)(u_1 \wedge \dots \wedge u_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\exp(tX)u_1 \wedge \dots \wedge \exp(tX)u_k) = Xu_1 \wedge \dots \wedge Xu_k \\
&= (Xu_1 \wedge \dots \wedge u_k) + (u_1 \wedge Xu_2 \wedge \dots \wedge u_k) + \dots + (u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge Xu_k)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\rho_k(X)(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = (Xv_1 \wedge \dots \wedge v_k) + \dots + (v_1 \wedge \dots \wedge Xv_k)$$

onde $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ e $v_i \in \mathbb{R}^n$.

Agora, para cada inteiro k entre 1 e n defina:

$$S_k = \{g \in SL(n, \mathbb{R}) : g\mathcal{O}_k \subset \mathcal{O}_k\}.$$

É fácil verificar que S_k é de fato um semigrupo.

Denote por $L(S_k) \subset \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ o cone de Lie de S_k definido por

$$L(S_k) := \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) : \exp(tX) \in S_k, t \geq 0\}.$$

O próximo lema fornece uma desigualdade que será muito utilizada para dar uma descrição explícita de $L(S_k)$, para todo k .

Lema 2.17. *Seja $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Temos que $X \in L(S_k)$ se, e somente se,*

$$\langle Xe_I, e_J \rangle \geq 0, \tag{2.8}$$

para todo par de k índices múltiplos $I \neq J$.

Demonstração: A demonstração é igual a demonstração do Lema 2.12, pois é um caso particular. □

Seja A o grupo das matrizes diagonais com entradas positivas e considere $h \in A$. Note que o grupo A está contido em S_k para todo k . Isto implica que $hS_k h^{-1} \subset S_k$, e daí $hL(S_k)h^{-1} \subset L(S_k)$ se $h \in A$. Desta inclusão temos:

Lema 2.18. *Se $X = (x_{ij}) \in L(S_k)$ então $x_{ij}E_{ij} \in L(S_k)$ para todo $i \neq j$, onde E_{ij} denota as matrizes básicas tendo 1 na entrada i, j e 0 nas outras entradas.*

Demonstração: Sejam A o grupo das matrizes diagonais com entradas positivas e H uma matriz diagonal $H = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Note que $\exp(tH) \in A$. Logo, usando a inclusão anterior temos:

$$\exp(tH)X \exp((tH))^{-1} = \exp(tH)X \exp(-tH) = (e^{t(a_i - a_j)}x_{ij}) \in L(S_k).$$

Fixe i, j tal que $i \neq j$, e escolha H tal que $a_i - a_j > a_r - a_s$ se $(i, j) \neq (r, s)$. Esta condição sobre H implica que $e^{-t(a_i - a_j)}(e^{t(a_r - a_s)}x_{rs})$ converge para $x_{ij}E_{ij}$ quando $t \rightarrow +\infty$. De fato, pois quando $(i, j) \neq (r, s)$ temos que $a_i - a_j > a_r - a_s$ e daí $e^{-t(a_i - a_j)}(e^{t(a_r - a_s)})$ converge para 0 e quando $(i, j) = (r, s)$ temos que $e^{-t(a_i - a_j)}(e^{t(a_i - a_j)})$ converge para 1. Logo $e^{-t(a_i - a_j)}(e^{t(a_i - a_j)}x_{ij})$ converge para $x_{ij}E_{ij}$. Como $L(S_k)$ é um cone fechado em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, temos que $x_{ij}E_{ij} \in L(S_k)$. \square

Vamos agora determinar condições sobre as entradas de uma matriz $X = (x_{ij})$ afim de que $X \in L(S_k)$. Quanto as entradas na diagonal principal estas tanto podem ser positivas, negativas ou nulas, pois as matrizes diagonais pertencem a $L(S_k)$.

Consideremos E_{ij} com $i \neq j$. Se $E_{ij} \notin L(S_k)$ e $-E_{ij} \notin L(S_k)$ então $x_{ij} = 0$. De fato, se $x_{ij} \neq 0$ temos dois casos a considerar:

- (i) se $x_{ij} > 0$ então, como $x_{ij}E_{ij} \in L(S_k)$, obtemos que $E_{ij} = \frac{1}{x_{ij}}x_{ij}E_{ij} \in L(S_k)$, o que é um absurdo;
- (ii) se $x_{ij} < 0$ então, $-E_{ij} = \frac{-1}{x_{ij}}x_{ij}E_{ij} \in L(S_k)$, que é um absurdo.

Portanto, $x_{ij} = 0$.

Se tanto E_{ij} , como $-E_{ij}$ pertencem a $L(S_k)$ então x_{ij} tanto pode ser positivo, negativo ou nulo.

Resta analisar dois casos:

1. se $E_{ij} \in L(S_k)$ e $-E_{ij} \notin L(S_k)$.

Neste caso, se $X = (x_{ij}) \in L(S_k)$ então, pelo Lema 2.18 $x_{ij}E_{ij} \in L(S_k)$. Se $x_{ij} < 0$ então $\frac{1}{-x_{ij}}x_{ij}E_{ij} = -E_{ij} \in L(S_k)$, gerando uma contradição.

Portanto, nesse caso $x_{ij} \geq 0$.

2. se $E_{ij} \notin L(S_k)$ e $-E_{ij} \in L(S_k)$.

Novamente $x_{ij}E_{ij} \in L(S_k)$. Se $x_{ij} > 0$ então $\frac{1}{x_{ij}}x_{ij}E_{ij} = E_{ij} \in L(S_k)$, gerando uma contradição. Logo, $x_{ij} \leq 0$.

Fica então demonstrado a seguinte proposição.

Proposição 2.19. *Uma matriz $X = (X_{ij}) \in L(S_k)$ se, e somente se, as seguintes condições são verificadas:*

(i) *Se tanto E_{ij} como $-E_{ij}$ pertencem a $L(S_k)$ então x_{ij} é arbitrário;*

(ii) *Se tanto E_{ij} como $-E_{ij}$ não pertencem a $L(S_k)$ então $x_{ij} = 0$;*

(iii) *Se $E_{ij} \in L(S_k)$ e $-E_{ij} \notin L(S_k)$ então $x_{ij} \geq 0$;*

(iv) *Se $E_{ij} \notin L(S_k)$ e $-E_{ij} \in L(S_k)$ então $x_{ij} \leq 0$.*

Uma consequência desta proposição é que, para determinar $L(S_k)$ basta determinar as condições sobre as quais $\pm E_{ij} \in L(S_k)$, para todo $i \neq j$.

Considere então os seguintes casos:

- Para $k = 1$ o cone de Lie é bem conhecido: Segue da condição que $\langle Xe_i, e_j \rangle \geq 0$ que $X = (x_{ij}) \in L(S_1)$ se, e somente se, $x_{ij} \geq 0$, para $i \neq j$. Basta usar a Proposição 2.13.
- Assuma $k = n - 1$. Seja $I = (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n)$ um k índice múltiplo. Agora note que:

$$E_{ij}e_I = E_{ij}e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} + e_{i_1} \wedge E_{ij}e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} + e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge E_{ij}e_{i_k}.$$

Através de alguns cálculos, notemos que:

$$E_{ij}e_{i_l} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq l \\ e_i & \text{se } j = l. \end{cases} \quad (2.9)$$

onde $l = 1, \dots, k$.

Considere $i < j$, e observe que se $i \in I$ ou $j \notin I$ temos que $E_{ij}e_I = 0$.

De fato, no caso em que $i \in I$, $j \in I$ e usando (2.4) temos que:

$$\begin{aligned} E_{ij}e_I &= E_{ij}e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_i \wedge e_j \wedge \dots \wedge e_{i_k} + \dots + e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_i \wedge E_{ij}e_j \wedge \dots \wedge e_{i_k} + \\ &\dots + e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_i \wedge e_j \wedge \dots \wedge E_{ij}e_{i_k} = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_i \wedge e_i \wedge \dots \wedge e_{i_k} = 0, \end{aligned}$$

pois ao fazer o mergulho da grassmanniana no produto exterior teremos 2 colunas da matriz iguais, daí teremos que $E_{ij}e_I = 0$.

No caso em que $j \notin I$, segue direto de (2.4) que $E_{ij}e_I = 0$.

Suponha que $i \notin I$ e $j \in I$, e considere $F = (I \setminus \{j\}) \cup \{i\}$, com os índices na ordem correta. Logo,

$$\begin{aligned} E_{ij}e_I &= E_{ij}e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} + \dots + e_{i_1} \wedge \dots \wedge E_{ij}e_j \wedge \dots \wedge e_{i_k} + \dots + e_{i_1} \wedge \dots \wedge E_{ij}e_{i_k} = \\ &0 \wedge \dots \wedge e_{i_k} + \dots + e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_i \wedge \dots \wedge e_{i_k} + \dots + e_{i_1} \wedge \dots \wedge 0 = \\ &e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_i \wedge \dots \wedge e_{i_k} = (-1)^{j-i-1}e_F. \end{aligned}$$

Portanto, temos que $E_{ij}e_I = (-1)^{j-i-1}e_F$.

Logo, $E_{ij} \in L(S_{n-1})$ se $j - i$ é ímpar, pois deste modo $(-1)^{j-i-1} = 1$ e a desigualdade (2.8) será satisfeita. De modo análogo $-E_{ij} \in L(S_{n-1})$ se $j - i$ é par, pois $(-1)^{j-i-1} = -1$ e a desigualdade (2.8) também será satisfeita. Logo, $X = (x_{ij}) \in L(S_{n-1})$ se, e somente se, $x_{ij} \geq 0$ se $j - i$ é ímpar, e $x_{ij} \leq 0$ se $i - j$ é par.

Por um raciocínio análogo, com $j < i$, chegamos que $X = (x_{ij}) \in L(S_{n-1})$ se, e somente se, $x_{ij} \geq 0$ se $|i - j|$ é ímpar, e $x_{ij} \leq 0$ se $i \neq j$ e $|i - j|$ é par.

- Tome k , com $1 < k < n - 1$. Seja E_{ij} tal que $1 < j - i < n - 1$, note que a última desigualdade assegura que $(i, j) \neq (1, n)$, pois se tivéssemos

$(i, j) = (1, n)$ teríamos $j - i = n - 1$ o que nos dá uma contradição. Vamos checar que $\pm E_{ij} \notin L(S_k)$.

Seja K um índice múltiplo com $i \notin K$ e $j \in K$, logo $K = (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < j < \dots < i_k \leq n)$. Por (2.4) temos que:

$$E_{ij}e_K = E_{ij}e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_j \wedge \dots \wedge e_{i_k} + \dots + e_{i_1} \wedge \dots \wedge E_{ij}e_j \wedge \dots \wedge e_{i_k} + \dots + e_{i_1} \wedge \dots \wedge E_{ij}e_{i_k} = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_i \wedge \dots \wedge e_{i_k} = (-1)^{\nu(i,j,K)} e_F,$$

onde $\nu(i, j, K)$ é o número de índices do intervalo aberto $int(i, j) = \{l; i < l < j\}$ que estão em K , e $F = (K \setminus \{j\}) \cup \{i\}$.

Construiremos dois índices múltiplos I e J que ambos não contêm i e contêm j , tal que $\nu(i, j, I) + \nu(i, j, J)$ é ímpar, o que nos implicará que $\pm E_{ij} \notin L(S_k)$.

Começaremos com o índice múltiplo I , existem as seguintes possibilidades:

1. $\nu(i, j, I) = 0$. Então $j - 1 \notin I$ e $j - 1 \neq i$. Além disso, como $2 \leq k$ segue que existe algum $l \in I$ com $l < i$ ou $l > j$. Então, tome $J = (I \setminus \{l\}) \cup \{j - 1\}$. Veja que J satisfaz, $i \notin J$, $j \in J$ e $\nu(i, j, J) = 1$. Logo $\nu(i, j, I) + \nu(i, j, J) = 0 + 1 = 1$ o qual é ímpar.
2. $\nu(i, j, I) > 0$. Isto significa que existe $l \in int(i, j) \cap I$. Existem ainda 2 possibilidades:
 - (a) Existe algum $p < i$ ou $p > j$ tal que $p \notin I$. Então $J = (I \setminus \{l\}) \cup \{p\}$ é tal que $\nu(i, j, I) = \nu(i, j, J) + 1$. Logo, $\nu(i, j, I) + \nu(i, j, J) = 2\nu(i, j, J) + 1$, o qual é ímpar.
 - (b) Para todo $p \notin I$ tal que $i \leq p < j$. Então existe um índice $t \in I$ com $t < i$ ou $t > j$, pois $(i, j) \neq (1, n)$. Como $k \leq n - 2$, existe $p \in int(i, j)$ fora de I . Substituindo t por p , chegamos à um índice múltiplo J com $\nu(i, j, I) + \nu(i, j, J)$ ímpar.

Portanto, $\pm E_{ij} \notin L(S_k)$. Assim, $x = (x_{ij}) \in L(S_k)$ se, e somente se, $x_{ij} = 0$.

Agora considere E_{1n} . Usando (2.4) obtemos que a única possibilidade para que $E_{1n}e_I$ seja diferente de zero é que I termine com n . Neste caso,

$$E_{1n}e_I = E_{1n}e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} + \dots + e_{i_1} \wedge \dots \wedge E_{1n}e_{i_n} = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_1 = (-1)^{k-1}e_F,$$

onde $F = (I \setminus \{n\}) \cup \{1\}$. Daí,

1. Se k é ímpar temos que $(-1)^{k-1} = 1$, e daí temos $E_{1n}e_I = e_F$. Logo, a desigualdade (2.8) será satisfeita. Portanto temos que $E_{1n} \in L(S_k)$.
2. Se k é par temos que $(-1)^{k-1} = -1$, e daí temos $E_{1n}e_I = -e_F$. Logo, $-E_{1n} \in L(S_k)$, pois a desigualdade (2.8) será satisfeita.

Portanto, $X = (x_{ij}) \in L(S_k)$ se e somente se, $x_{ij} \geq 0$ se k for ímpar, e $x_{ij} \leq 0$ se k for par.

Finalmente considere $E_{i,i+1}$. Se $i \notin I$ e $i+1 \in I$ então

$$\begin{aligned} E_{i,i+1}e_I &= E_{i,i+1}e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} + \dots + e_{i_1} \wedge \dots \wedge E_{i,i+1}e_{i_{i+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_k} + \dots + \\ &e_{i_1} \wedge \dots \wedge E_{i,i+1}e_{i_k} = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_i \wedge \dots \wedge e_{i_k} = e_F, \end{aligned}$$

onde $F = (I \setminus \{i+1\}) \cup \{i\}$, e portanto $E_{i,i+1} \in L(S_k)$. Logo, $X = (x_{ij}) \in L(S_k)$ se, e somente se, $x_{ij} \geq 0$.

Vamos resumir os resultados obtidos até aqui no seguinte teorema.

Teorema 2.20. *Os cones de Lie dos semigrupos S_k são*

1. $L(S_1) = \{(x_{ij}) : x_{ij} \geq 0 \text{ se } i \neq j\}$.
2. $L(S_{n-1}) = \{(x_{ij}) : (-1)^{|i-j|-1}x_{ij} \geq 0 \text{ se } i \neq j\}$.
3. Se $1 < k < n-1$ então $L(S_k)$ é dado pelas matrizes (x_{ij}) satisfazendo:
 - (a) $x_{ij} \geq 0$ se $|i-j| = 1$,
 - (b) $x_{ij} = 0$ se $2 \leq |i-j| < n-1$,

(c) $(-1)^{k-1}x_{ij} \geq 0$ se $|i - j| = n - 1$.

Este resultado é devido o San Martin [12].

O Teorema 2.20 merece um grande destaque em nosso trabalho, pois no Capítulo 4 usaremos ele para mostrar que em dimensão 4 o problema proposto por Sachkov (Problema 1) não é verdadeiro. Mais precisamente, usaremos tal teorema para mostrar que o semigrupo S_2 de $SL(4, \mathbb{R})$ gerado pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \text{diag}(1, 4, -2, -3)$$

é próprio. Concluindo assim, que o sistema (4.9) não é globalmente controlável.

Grafos associados a matrizes sinal simétricas

O objetivo deste curto e simples capítulo é introduzir conceitos e resultados básicos sobre grafos associados a certas matrizes. O principal resultado do capítulo é o Teorema 3.7 o qual fornece um método explícito de determinar o conjunto de vértices do grafo com uma certa propriedade (par ou ímpar) em relação a um dado vértice fixo do grafo. As definições e resultados que seguem esclarecem estas questões. Iniciaremos introduzindo o conceito de matriz sinal-simétrica.

Definição 3.1. *Uma matriz arbitrária $A = (a_{ij})$ de ordem $n \times n$ é chamada sinal-simétrica se $a_{ij}a_{ji} \geq 0$, $\forall i, j = 1, \dots, n$.*

Observe que, para que A seja sinal simétrica é suficiente que se verifique $a_{ij}a_{ji} \geq 0$ se $i \neq j$.

Por exemplo, a matriz

$$A = \begin{pmatrix} * & 2 & 0 & -3 \\ 3 & * & -2 & 0 \\ 0 & -5 & * & 6 \\ -1 & 0 & 8 & * \end{pmatrix}$$

onde as entradas da diagonal principal são arbitrárias é sinal-simétrica, pois $a_{ij}a_{ji} \geq 0$, quando $i \neq j$.

Note que toda matriz simétrica é sinal-simétrica. De fato, se $A = (a_{ij})$ é uma matriz simétrica $n \times n$, por definição, temos que $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j = 1, \dots, n$. Logo

$a_{ij}a_{ji} \geq 0, \forall i, j = 1, \dots, n$, e portanto A é sinal-simétrica. Note também que dada uma matriz anti-simétrica $n \times n$ $B = (b_{ij})$, por definição temos que $b_{ij} = -bj_i$, $\forall i, j = 1, \dots, n$. Logo B nunca vai ser sinal-simétrica, se for não nula.

Veremos agora um método para a construção de um grafo associada a uma matriz sinal simétrica.

Construção: Considere uma matriz sinal-simétrica A . O grafo $\Gamma(A)$ associado a A é construído da seguinte forma:

O grafo $\Gamma(A)$ tem n vértices $1, 2, \dots, n$. Seus vértices $i, j, i \neq j$, são conectados pela aresta (i, j) se, e somente se, pelo menos um dos números a_{ij}, a_{ji} é não nulo. Em todo este trabalho levaremos em consideração somente as arestas que conectam vértices distintos do grafo $\Gamma(A)$; auto-laços são portanto explicitamente excluídos da consideração. Cada aresta (i, j) será assinalada pelo sinal $+$ se $a_{ij} \geq 0$ e $a_{ji} \geq 0$ e pelo sinal $-$ se $a_{ij} \leq 0$ e $a_{ji} \leq 0$ (não existe outra combinação de sinais em virtude da sinal-simetria da matriz A). As arestas assinaladas são chamadas *positivas ou negativas* dependendo do sinal $(+)$ ou $(-)$. Para o grafo $\Gamma(A)$ definimos a seguinte função:

$$s(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{se os vértices } i, j \text{ não são conectados por uma aresta em } \Gamma(A) \\ 1 & \text{se os vértices } i, j \text{ forem conectados por uma aresta positiva em } \Gamma(A) \\ -1 & \text{se os vértices } i, j \text{ forem conectados por uma aresta negativa em } \Gamma(A) \end{cases}$$

onde $i, j = 1, \dots, n$, e $i \neq j$.

Em seguida veremos um exemplo ilustrando a construção dada acima.

Exemplo 3.2. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} * & 2 & 0 & -3 \\ 3 & * & -2 & 0 \\ 0 & -5 & * & 6 \\ -1 & 0 & 8 & * \end{pmatrix}.$$

Note que os vértices 1 e 3 não podem ser conectados, pois $a_{13} = a_{31} = 0$, e o mesmo ocorre com os vértices 2 e 4, pois $a_{24} = a_{42} = 0$. Observando a matriz A , temos que a aresta $(1, 2)$ e a aresta $(3, 4)$ são ambas positivas e as arestas $(2, 3)$ e

(1, 4) são ambas negativas. Temos então que

$s(1, 3) = s(2, 4) = 0$, $s(1, 2) = s(3, 4) = 1$ e $s(1, 4) = s(2, 3) = -1$. E o grafo $\Gamma(A)$ é representado na figura abaixo.

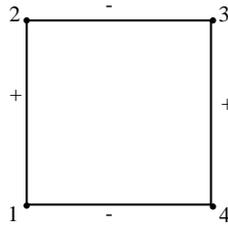


Figura 3.1:

Introduziremos agora o conceito de laço par de um grafo. Para isso convençionamos que um *laço* l de um grafo $\Gamma(A)$ é um caminho fechado composto por arestas, e denotado por:

$$l = (i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1} = i_1).$$

Definição 3.3. Um laço de um grafo é chamado par (ímpar) se ele contém um número par (ímpar) de arestas negativas. Dizemos que um grafo satisfaz a propriedade do laço-par se todos seus laços são pares.

Observe o grafo da matriz A mencionada no exemplo 3.2. Como todos os laços do grafo $\Gamma(A)$ são pares, temos que o grafo $\Gamma(A)$ satisfaz a propriedade do laço par.

Observe que um laço $(i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1} = i_1)$ de um grafo $\Gamma(A)$ é par se, e somente se,

$$s(i_1, i_2)s(i_2, i_3) \dots s(i_k, i_1) = 1. \quad (3.1)$$

Introduziremos agora o conceito de paridade de vértices de um grafo em relação a um vértice fixo. Antes porém, esclareceremos que um subconjunto U do conjunto de vértices de um grafo Γ é conexo se quaisquer dois vértices em U puderem ser ligados por um caminho constituídos de arestas com vértices em U .

A componente conexa de um subconjunto U de vértices é o maior subconjunto conexo contendo U .

Definição 3.4. *Seja Γ um grafo conexo satisfazendo a propriedade do laço-par, e seja v um vértice qualquer de Γ . Um vértice do grafo Γ é chamado par (ímpar) com respeito a v se ele puder ser conectado com v por um caminho contendo um número par (ímpar) de arestas negativas. O conjunto dos vértices pares (ímpares) com respeito ao vértice v será denotado por V_v^+ (V_v^-).*

O próximo exemplo esclarecerá a definição acima.

Exemplo 3.5. *Seja A a matriz dada no exemplo 3.2, e fixe o vértice $v = 1 \in \Gamma(A)$. Verificando o grafo $\Gamma(A)$ vemos que, o vértice 2 é par com respeito a v , pois ele é conectado com v por um caminho contendo um número par (zero) de arestas negativas e os vértices 3 e 4 são ímpares com respeito a v , pois ambos são conectados com v por um caminho contendo um número ímpar (uma) de aresta negativa.*

Veremos agora algumas observações a respeito da definição 3.4.

Observação 3.6. 1. *Paridade de um vértice p com respeito a um vértice v não depende de um caminho ligando p e v .*

De fato, o número de arestas negativas em diferentes caminhos conectando p e v tem a mesma paridade, pois Γ satisfaz a propriedade do laço-par.

2. *Pela conexidade do grafo Γ , alguns de seus vértices são pares ou ímpares com respeito a v , isto é, o conjunto de todos vértices de Γ pode ser representado na forma $V = V_v^+ \cup V_v^-$, e em virtude da observação anterior, $V_v^+ \cap V_v^- = \emptyset$.*

3. *Para todo vértice p do grafo Γ temos :*

$$\begin{aligned} p \in V_v^+ &\Rightarrow V_p^+ = V_v^+, & V_p^- &= V_v^-, \\ p \in V_v^- &\Rightarrow V_p^+ = V_v^-, & V_p^- &= V_v^+, \end{aligned}$$

pois para $p \in V_v^+$ a paridade com respeito a p e v coincide uma com a outra, e para $p \in V_v^-$ um ponto par com respeito a p é ímpar com respeito a v , e vice-versa.

O próximo resultado é uma versão mais forte de um teorema devido a M. Hirsch encontrado em [3]. O resultado garante a existência e fornece um método explícito para encontrar um subconjunto V , do conjunto de vértices de um grafo Γ satisfazendo a propriedade do laço par, satisfazendo as seguintes propriedades, que denominaremos de propriedades de Hirsch. Esta denominação se justifica devido ao teorema de [3] devido a M.Hirsch.

- (a) toda aresta negativa de um grafo Γ tem exatamente um vértice em V ;
- (b) toda aresta positiva de um grafo Γ tem 0 ou 2 vértices em V .

Precisamente temos

Teorema 3.7. *Seja Γ um grafo satisfazendo a propriedade do laço-par.*

1. *Se Γ é conexo, então existem dois subconjuntos distintos do conjunto de todos seus vértices que satisfazem as propriedades (a) e (b) de Hirsch. Eles tem a forma V_v^+ e V_v^- , onde v é um vértice qualquer de Γ .*
2. *Se Γ não é conexo e possui c componentes conexas, então existem 2^c formas de escolha do conjunto V .*

Demonstração:

1. Considere Γ um grafo conexo e v um vértice qualquer de Γ . Mostraremos que os conjuntos V_v^+ e V_v^- satisfazem as propriedades (a) e (b) de Hirsch. Note que os vértices de cada aresta negativa tem paridades distintas com respeito a v . Daí segue que um deles está contido em V_v^+ e o outro em V_v^- , e, portanto, a propriedade (a) esta satisfeita, pois pela observação 2 de 3.6 temos

que $V = V_v^+ \cup V_v^-$, e portanto V possui um vértice de uma aresta negativa arbitrária. Note que os vértices de cada aresta positiva tem a mesma paridade com respeito a v , e conseqüentemente eles pertencem à V_v^+ ou V_v^- , e portanto a propriedade (b) esta satisfeita, pois como $V = V_v^+ \cup V_v^-$, temos que V contém dois vértices de uma aresta positiva arbitrária. Logo, os conjuntos V_v^+ e V_v^- satisfazem as propriedades (a) e (b) de Hirsch.

Mostraremos agora que não existe outro conjunto. Seja V um conjunto qualquer. Se $V = \emptyset$, então todas arestas de Γ são positivas, daí $V_v^- = \emptyset = V$. Suponha agora que $V \neq \emptyset$, e escolha um vértice qualquer $w \in V$. Pelas propriedades (a) e (b) de Hirsch temos que todos os vértices pares do grafo Γ com respeito a w estão contido em V , e todos os vértices ímpares do grafo Γ com respeito a w não pertencem á V , isto é, $V = V_w^+$. Pela observação 3 de 3.6, temos que, $V_w^+ = V_v^+$ ou $V_w^+ = V_v^-$. Portanto qualquer conjunto V que satisfaz as propriedades (a) e (b) de Hirsch é igual a V_v^+ ou V_v^- .

2. Por hipótese Γ não é conexo e possui c componentes conexas, mas sabemos que as componentes conexas de Γ são subespaços conexos e disjuntos de Γ , logo pelo ítem 1 temos que existem 2^c caminhos para a escolha do conjunto V .

□

Exemplo 3.8. *Considere a matriz A mencionada no exemplo 3.2, e fixe o vértice $v = 1$. Já vimos que o grafo $\Gamma(A)$ satisfaz a propriedade do laço par. Como o grafo $\Gamma(A)$ é conexo, pelo ítem (1) do Teorema 3.7 temos que existem dois subconjuntos distintos do conjunto de seus vértices que satisfazem as propriedades (a) e (b) de Hirsch. Estes subconjuntos são $V_v^+ = \{1, 2\}$ e $V_v^- = \{3, 4\}$. Note que $V = V_v^+ \cup V_v^-$ e $V_v^+ \cap V_v^- = \emptyset$.*

Octantes invariantes

Neste capítulo discutiremos a controlabilidade de sistemas bilineares do tipo

$$\dot{x} = Ax + uBx \quad (4.1)$$

onde A e B são matrizes $n \times n$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ e u pode assumir qualquer valor real.

Mostrar a controlabilidade de um sistema bilinear da forma (4.1) é um problema que vem sendo muito estudado e ainda hoje permanece longe de ser totalmente resolvido. Até o presente momento somente soluções parciais vem sendo apresentadas. Por exemplo, em [1] é mostrado que, no caso das matrizes A e B de ordem 2×2 , o sistema (4.1) é controlável se, e somente se, o determinante do colchete $[A, B]$ é negativo. Uma das situações mais significantes e conhecidas são as condições estabelecidas por Jurdjevic e Kupka em [4].

Uma maneira de analisar a não controlabilidade de um sistema bilinear da forma (4.1) é verificando se tal sistema possui octantes invariantes. Neste sentido, nas Seções 4.1 e 4.2 exibiremos condições necessárias e suficientes para existência de octantes invariantes, tanto para campos vetoriais lineares (Seção 4.1), como para sistemas bilineares (Seção 4.2). O principal resultado deste capítulo é o Teorema 4.14 que nos fornece testes para existência de octantes invariantes de um sistema bilinear.

Levando em conta os resultados obtidos nas Seções 4.1 e 4.2, na Seção 4.3 os relacionaremos com a conjectura formulada por Jurdjevic e Kupka, a qual estabelece que, se as matrizes A e B são simétricas, então o sistema bilinear (4.1) não é

globalmente controlável.

Por fim, na Seção 4.4 verificaremos a veracidade do problema proposto por Sachkov, o qual diz que se $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$, $b_i \neq b_j$ se $i \neq j$, e se o sistema (4.1) não possui octante invariante e satisfaz a condição do posto da álgebra de Lie, então ele é globalmente controlável em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

4.1 Octantes invariantes para campos vetoriais lineares

O principal objetivo desta seção é estabelecer condições necessárias e suficientes para que campos vetoriais lineares tenham octantes invariante e fazer a descrição desses octantes caso existam.

Apresentaremos agora uma versão mais apropriada do Teorema 2.16, para os propósitos desse capítulo.

Teorema 4.1. *Sejam $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ um conjunto de sinais e $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Então, o octante \mathbb{R}_τ^n é A -invariante se, e somente se,*

$$\tau_i \tau_j a_{ij} \geq 0, \quad \forall i \neq j. \quad (4.2)$$

Demonstração: Suponha que \mathbb{R}_τ^n é A -invariante. Por definição temos que, $\exp(tA)\mathbb{R}_\tau^n \subset \mathbb{R}_\tau^n$, $\forall t \geq 0$. Já que S_τ é o semigrupo de compressão de \mathbb{R}_τ^n , temos que $A \in L(S_\tau)$. Portanto, pelo Teorema 2.16 temos que $\tau_i \tau_j a_{ij} \geq 0$, $\forall i \neq j$. Reciprocamente, suponha que $\tau_i \tau_j a_{ij} \geq 0$, $\forall i \neq j$. Pelo Teorema 2.16 temos que $A \in L(S_\tau)$. Logo, por definição segue que $\exp(tA) \in S_\tau$, $\forall t \geq 0$. Como S_τ é o semigrupo de compressão de \mathbb{R}_τ^n , temos que $\exp(tA)\mathbb{R}_\tau^n \subset \mathbb{R}_\tau^n$, $\forall t \geq 0$. Portanto o octante \mathbb{R}_τ^n é A -invariante. \square

Temos duas consequências imediatas deste teorema:

Corolário 4.2. *Se o campo Ax possui um octante invariante, então a matriz A é sinal-simétrica.*

Demonstração: Suponhamos que o octante \mathbb{R}_τ^n seja A -invariante. Nesse caso, pelo Teorema 4.1 $\tau_i \tau_j a_{ij} \geq 0$ se $i \neq j$. Portanto se $i \neq j$ então $a_{ij} a_{ji} = \tau_i \tau_j a_{ij} \tau_j \tau_i a_{ji} \geq 0$. Logo A é sinal simétrica. \square

Se $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ e \mathbb{R}_τ^n é um octante $(-A)$ -invariante diremos que \mathbb{R}_τ^n é um *octante invariante negativo* para o campo vetorial Ax . Quando é A -invariante, por coerência, diremos as vezes que é invariante positivo.

Observamos que \mathbb{R}_τ^n é invariante negativo por $A = (a_{ij})$ se, e somente se, $\tau_i \tau_j a_{ij} \leq 0, \forall i \neq j$.

Corolário 4.3. *Se existe um octante invariante positivo e negativo para um campo Bx , então a matriz B é diagonal.*

Demonstração: Sejam $B = (b_{ij})$ e \mathbb{R}_τ^n um octante invariante positivo e negativo para o campo Bx . Pelo Teorema 4.1, temos que $b_{ij} \tau_i \tau_j \geq 0$ e $b_{ij} \tau_i \tau_j \leq 0 \forall i \neq j$. Logo $b_{ij} \tau_i \tau_j b_{ij} \tau_i \tau_j = b_{ij}^2 \tau_i^2 \tau_j^2 = b_{ij}^2 \leq 0$. Portanto $b_{ij} = 0$ se $i \neq j$. \square

Vamos agora introduzir o conceito de índice de um grafo Γ .

Construção: Considere o conjunto $\sum_n = \{\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n); \sigma_i = \pm 1, \forall i = 1, \dots, n\}$. Assuma que o grafo Γ satisfaz a propriedade do laço-par e V é um subconjunto qualquer do conjunto de seus vértices que satisfaz as propriedades (a) e (b) de Hirsch. Então o *índice* do grafo Γ correspondente ao conjunto V é o conjunto $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \sum_n$ definido pelo seguinte:

$$\sigma_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i \notin V \\ -1, & \text{se } i \in V. \end{cases} \quad (4.3)$$

Exemplo 4.4. *Seja A a matriz dada no exemplo 3.2. Sabemos que $\Gamma(A)$ satisfaz a propriedade do laço par. Seja $V = \{1, 2\}$ um subconjunto do conjunto de seus*

vértices. Note que V satisfaz as propriedades (a) e (b) de Hirsch. Usando o algoritmo da construção do índice do grafo $\Gamma(A)$, obtemos que $\sigma = (1, 1, -1, -1)$. Através de simples cálculos notemos que, $a_{ij}\sigma_i\sigma_j \geq 0$, $\forall i \neq j$. Logo, pelo Teorema 4.1 o octante \mathbb{R}_σ^n é A -invariante ou invariante positivo. Observe ainda que, o fato de A possuir um octante invariante garante que a matriz A é sinal-simétrica, basta aplicar o Corolário 4.2.

Note que o índice de um grafo é determinado pelo conjunto V e pelo grafo Γ . Um grafo conexo qualquer possui apenas uma componente conexa. Logo, o Teorema 3.7 garante que existe exatamente 2 índices, diferenciados pelo múltiplo comum -1 . Para um grafo desconexo com c componentes conexas existe 2^c índices distintos.

O próximo resultado fornece uma condição necessária e suficiente para que o campo Ax tenha octante invariante, e ainda fornece a contagem desses octantes caso existam.

Teorema 4.5. *Seja A uma matriz $n \times n$ sinal-simétrica. O campo Ax possui octantes invariantes positivos se, e somente se, seu grafo $\Gamma(A)$ satisfaz a propriedade do laço-par. Neste caso os octantes invariantes positivos são \mathbb{R}_σ^n , onde σ é um índice qualquer do grafo $\Gamma(A)$, e o número de octantes invariantes positivos é 2^c , onde c é o número de componentes conexas do grafo $\Gamma(A)$.*

Demonstração: Suponha que o octante \mathbb{R}_σ^n seja invariante positivo para o campo Ax , onde $\sigma \in \sum_n$. Pelo Teorema 4.1, temos que $a_{ij}\sigma_i\sigma_j \geq 0$, $\forall i \neq j$. Logo

$$\text{sgn}(a_{ij}) = \begin{cases} \sigma_i\sigma_j & \text{se } a_{ij} \neq 0 \\ 0 & \text{se } a_{ij} = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Agora, escolha um laço qualquer $(i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1} = i_1)$ do grafo $\Gamma(A)$. Todo par de vértices (i_l, i_{l+1}) , $l = 1, \dots, k$ é conectado por uma aresta em $\Gamma(A)$. Logo $s(i_l, i_{l+1}) \neq 0$. Assim, pela igualdade (4.4) obtemos $s(i_l, i_{l+1}) = \sigma_{i_l}\sigma_{i_{l+1}}$, para $l = 1, \dots, k$. Consequentemente,

$$s(i_1, i_2)s(i_2, i_3) \dots s(i_k, i_1) = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\sigma_{i_2}\sigma_{i_3} \dots \sigma_{i_k}\sigma_{i_1} = \sigma_{i_1}^2\sigma_{i_2}^2 \dots \sigma_{i_k}^2 = 1.$$

Portanto, pela igualdade 3.1, temos que o laço $(i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1} = i_1)$ é par.

Reciprocamente, suponha que o grafo $\Gamma(A)$ satisfaz a propriedade do laço par. Considere V como sendo o subconjunto do conjunto de seus vértices, satisfazendo as propriedades (a) e (b) de Hirsch e seja σ o índice correspondente. Mostraremos que o octante \mathbb{R}_σ^n é invariante positivo para o campo Ax . Pelo Teorema 4.1, é suficiente mostrar a desigualdade (4.2). Escolha um par qualquer (i, j) , $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$. Temos 3 casos à analisar:

Se os vértices i, j não são conectados por uma aresta no grafo $\Gamma(A)$, então $a_{ij} = 0$ e a condição (4.2) esta satisfeita.

Se os vértices i, j são conectados por uma aresta positiva, pela construção do grafo $\Gamma(A)$, temos que $a_{ij} \geq 0$. Pela propriedade (b) de Hirsch a aresta positiva (i, j) tem 0 ou 2 vértices no conjunto V . Pela definição do índice σ , se V não possui nenhum vértice, isto é, se $i \notin V$ e $j \notin V$, então $\sigma_i = \sigma_j = 1$; e se V possui os dois vértices, isto é, se $i \in V$ e $j \in V$, então $\sigma_i = \sigma_j = -1$. Em ambos os casos $\sigma_i \sigma_j = 1$ e a condição (4.2) esta satisfeita.

Por último, suponha que os vértices i, j são conectados por uma aresta negativa. Pela construção do grafo $\Gamma(A)$, temos que $a_{ij} \leq 0$. Pela propriedade (a) de Hirsch a aresta negativa (i, j) tem exatamente 1 vértice no conjunto V . Se $i \in V$ e $j \notin V$, temos pela definição do índice σ que $\sigma_i = -1$ e $\sigma_j = 1$; e se $i \notin V$ e $j \in V$ temos que $\sigma_i = 1$ e $\sigma_j = -1$. Em ambos os casos temos que $\sigma_i \sigma_j = -1$, e a condição (4.2) esta satisfeita.

Consequentemente, o octante \mathbb{R}_σ^n é invariante positivo para o campo Ax . A fórmula 2^c para o número de octantes invariante segue do Teorema 3.7. \square

Uma versão do Teorema 4.5 para invariância negativa é a seguinte

Teorema 4.6. *Seja A uma matriz $n \times n$ sinal-simétrica. O campo Ax possui octantes*

invariantes negativos se, e somente se, o grafo $\Gamma(-A)$ da matriz oposta $-A$ satisfaz a propriedade do laço-par. Neste caso os octantes invariantes negativos são \mathbb{R}_σ^n , onde σ é um índice qualquer do grafo $\Gamma(-A)$, e o número de octantes invariantes negativos é 2^c , onde c é o número de componentes conexas do grafo $\Gamma(-A)$.

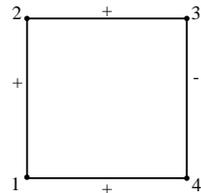
Demonstração: Suponha que o octante \mathbb{R}_σ^n é invariante negativo para o campo Ax . Logo, temos que $a_{ij}\sigma_i\sigma_j \leq 0, \forall i \neq j$. Isto implica que $-a_{ij}\sigma_i\sigma_j \geq 0, \forall i \neq j$. Assim, tem-se que \mathbb{R}_σ^n é invariante positivo para o campo $-Ax$. Portanto, pelo Teorema 4.5 segue que o grafo $\Gamma(-A)$ satisfaz a propriedade do laço par. Reciprocamente, suponha que o grafo $\Gamma(-A)$ satisfaz a propriedade do laço par. Novamente pelo teorema 4.5, temos que o octante \mathbb{R}_σ^n é invariante positivo para o campo $-Ax$. Pelo Teorema 4.1, segue que $-a_{ij}\sigma_i\sigma_j \geq 0, \forall i \neq j$. Logo, $a_{ij}\sigma_i\sigma_j \leq 0, \forall i \neq j$. Portanto \mathbb{R}_σ^n é invariante negativo para o campo Ax . A fórmula 2^c para o número de octantes invariante segue do Teorema 3.7. \square

Vejamos agora alguns exemplos para ilustrar os teoremas acima.

Exemplo 4.7. *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} * & + & 0 & + \\ + & * & + & 0 \\ 0 & + & * & - \\ + & 0 & - & * \end{pmatrix}$$

onde as entradas da diagonal principal são arbitrárias. O único laço $(1, 2, 3, 4, 1)$ é ímpar em ambos grafos $\Gamma(A)$ e $\Gamma(-A)$. Como os grafos $\Gamma(A)$ e $\Gamma(-A)$ não satisfazem a propriedade do laço-par, pelos Teoremas 4.5 e 4.6 temos que o campo Ax não possui octantes invariantes. O grafo $\Gamma(A)$ está representado na figura abaixo



Exemplo 4.8. *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} * & - & + & 0 & + \\ - & * & - & + & 0 \\ + & - & * & - & + \\ 0 & + & - & * & - \\ + & 0 & + & - & * \end{pmatrix}$$

O grafo $\Gamma(A)$ representado na figura 4.1 satisfaz a propriedade do laço-par. Vamos construir o conjunto V que é um subconjunto de seus vértices. Para isso escolha o vértice $v = 3$. Através das propriedades (a) e (b) de Hirsch e da definição 3.4, temos que $V = V_v^+ = \{1, 3, 5\}$. Logo, temos que o índice do grafo $\Gamma(A)$ correspondente ao conjunto V é o conjunto $\sigma = \{-, +, -, +, -\}$. Pelo Teorema 4.5 temos que o campo Ax possui os seguintes octantes invariante positivo:

$$\mathbb{R}_\sigma^5 = \{(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \geq 0, x_5 \leq 0\}$$

e o oposto

$$\mathbb{R}_{-\sigma}^5 = \{(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0, x_4 \leq 0, x_5 \geq 0\}.$$

Como o grafo $\Gamma(A)$ é conexo, temos que não existem outros octantes invariantes positivos.

Note que o grafo $\Gamma(-A)$ possui laços ímpares, por exemplo $(1, 2, 3)$. Logo o grafo $\Gamma(-A)$ não satisfaz a propriedade do laço-par e, pelo Teorema 4.6, temos que o campo Ax não possui octantes invariante negativo.

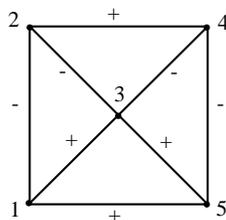


Figura 4.1: exemplo 4.9

Definiremos agora laços de comprimento três.

Definição 4.9. *Um laço de comprimento três é simplesmente um caminho fechado constituído por três arestas. Um laço de comprimento três será denotado por $l = (i_1, i_2, i_3)$.*

Vamos agora definir a soma de dois laços no contexto a ser utilizado na demonstração do Teorema 4.12, ou seja, consideraremos laços que possuem ou vértices em comum ou arestas em comum.

Definição 4.10. *Se dois laços l e r possuírem uma aresta em comum, definimos a soma de l com r como sendo o laço constituído de todas as arestas de l e r com exceção da aresta em comum.*

Em seguida mostraremos um lema que nos afirma que a soma de laços pares é par.

Lema 4.11. *Soma de laços pares é par.*

Demonstração: Seja l_1, l_2, \dots, l_k laços pares de $\Gamma(A)$. Mostraremos que $l = l_1 + l_2 + \dots + l_k = \sum_{i=1}^k l_i$ é um laço par.

Note que as arestas negativas do somatório destes laços ou eliminam-se aos pares (se estão em arestas aderentes) ou entram na soma (caso contrário). Portanto l é um laço par. □

O próximo teorema afirma que se todas as entradas fora da diagonal principal de uma matriz A são não nulas, então para que o campo Ax possua octante invariante é suficiente verificar se os laços de comprimento três são pares.

Teorema 4.12. *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz sinal-simétrica $n \times n$ com*

$$a_{ij} \neq 0, \quad \forall i \neq j. \tag{4.5}$$

Um campo Ax tem octante invariante positivo (negativo) se, e somente se, todos os laços de comprimento três do grafo $\Gamma(A)$ (resp., $\Gamma(-A)$) são pares, ou, equivalentemente,

mente,

$$a_{ij}a_{jk}a_{ki} > 0 \quad (\text{resp.}, < 0) \quad \forall i \neq j, j \neq k, k \neq i. \quad (4.6)$$

Demonstração: Pela condição 4.5 temos que quaisquer dois vértices do grafo $\Gamma(A)$ são conectados por uma aresta. Vamos mostrar que se todos laços de comprimento três são pares, então os laços de comprimento arbitrário são pares. Suponha que todos laços de comprimento três são pares. Escolha uma laço qualquer l do grafo $\Gamma(A)$ e represente-o como a soma de laços de comprimento três, pois qualquer laço pode ser escrito como a soma de laços de comprimento três. Como soma de laços pares é par (Lema 4.11), temos que l é par. Assim, temos que todo laço em $\Gamma(A)$ é par. Agora o resultado segue direto dos Teoremas 4.5 e 4.6.

Provaremos agora que um laço de comprimento três $l = (i, j, k)$ é par se, e somente se, $a_{ij}a_{jk}a_{ki} > 0$. De fato, seja $l = (i, j, k)$ um laço par de comprimento três. Por definição, $l = (i, j, k)$ é um caminho fechado composto por 3 arestas e como l é um laço par, temos que l possui duas ou nenhuma aresta negativa. Logo, em ambos os casos $a_{ij}a_{jk}a_{ki} > 0$. Note que $a_{ij}a_{jk}a_{ki}$ nunca vai ser zero, pois $a_{ij} \neq 0, \forall i \neq j$. Reciprocamente, suponha que $a_{ij}a_{jk}a_{ki} > 0$. Logo, teremos duas arestas negativas ou todas arestas positivas. Observe que, em ambos os casos o laço $l = (i, j, k)$ de comprimento três é par. Para o grafo $\Gamma(-A)$ esta desigualdade torna-se $(-a_{ij})(-a_{jk})(-a_{ki}) = -a_{ij}a_{jk}a_{ki} > 0$. Logo, $a_{ij}a_{jk}a_{ki} < 0$. \square

4.2 Octantes invariantes de sistemas bilineares

O objetivo desta seção é exibir condições necessárias e suficiente para que o sistema bilinear

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^m u_i B_i x, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad u_i \in \mathbb{R} \quad (4.7)$$

possua octante invariante positivo ou negativo.

Associado ao sistema (4.7), temos a família de campos vetoriais:

$$\Sigma = \{(A + uB); u \in \mathbb{R}\}. \quad (4.8)$$

e o respectivo semigrupo

$$S_\Sigma = \{\exp(t_1(A + u_1B)) \cdot \exp(t_2(A + u_2B)) \dots \exp(t_k(A + u_kB)); t_i \geq 0, u_i \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}\}$$

do subgrupo

$$G_\Sigma = \{\exp(t_1(A + u_1B)) \cdot \exp(t_2(A + u_2B)) \dots \exp(t_k(A + u_kB)); t_i \in \mathbb{R}, u_i \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}\}$$

de $GL(n, \mathbb{R})$.

Antes de provar o principal resultado desta seção, iremos provar um lema que usaremos na demonstração de tal teorema.

Lema 4.13. *Se o sistema (4.7) tem um octante invariante positivo ou negativo, então a matriz A é sinal-simétrica e as matrizes B_i , $i = 1, \dots, m$ são diagonais.*

Demonstração: Seja W um octante invariante positivo (negativo) para o sistema (4.7). Primeiramente, mostraremos que W é invariante positivo (negativo) para o campo Ax , isto é, mostraremos que $A \in L(S_\Sigma)$. Considerando $k = 1$ e $u = 0$ em S_Σ , temos que

$$\exp(tA) \in S_\Sigma \Rightarrow \exp(tA) \in \overline{S_\Sigma}, \forall t \geq 0$$

ou seja, $A \in L(S_\Sigma)$. Logo, pelo Corolário 4.2 temos que a matriz A é sinal-simétrica.

Agora, queremos mostrar que W é um octante invariante positivo e negativo para todos os campos $B_i x$. Para isso, mostraremos que $\pm B_i \in L(S_\Sigma)$. Observe então o seguinte:

$$\exp(\pm t B_i) = \exp\left(\lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{u} A \pm t B_i\right)\right) = \exp\left(\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} (A \pm t B_i u)\right),$$

e como $\exp\left(\frac{1}{u} (A \pm t B_i u)\right) \in S_\Sigma$ para algum $u \in \mathbb{R}^*$, segue que $\exp(\pm t B_i) \in \overline{S_\Sigma}$, $\forall t \geq 0$. Logo, $B_i \in L(S_\Sigma)$. Daí, pelo Corolário 4.3, temos que as matrizes B_i são diagonais.

□

O próximo teorema é o mais importante do nosso trabalho. Ele fornece testes para existência de octantes invariantes para o sistema (4.7).

Teorema 4.14. *Sejam A, B_1, \dots, B_m matrizes $n \times n$. O sistema (4.7) possui octantes invariantes positivos (negativos) se, e somente se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. a matriz A é sinal-simétrica;
2. as matrizes B_i , $i = 1, \dots, m$, são diagonais;
3. o grafo $\Gamma(A)$ (resp. $\Gamma(-A)$) satisfaz a propriedade do laço par.

Então octantes invariantes positivos (negativos) são \mathbb{R}_σ^n , onde σ é um índice qualquer do grafo $\Gamma(A)$ (resp. $\Gamma(-A)$), e seu número é igual à 2^c , onde c é o número de componentes conexas do grafo $\Gamma(A)$.

Demonstração: Assuma que o sistema (4.7) possua octantes invariantes positivos (negativos). Portanto os itens 1 e 2 seguem do Lema 4.13, enquanto que o item 3 segue dos Teoremas 4.5 e 4.6.

Reciprocamente, assumindo que as condições 1, 2 e 3 são satisfeitas provaremos que o sistema (3) possui octantes invariantes positivos (negativos). Pela condição 3, temos que o grafo $\Gamma(A)$ (resp. $\Gamma(-A)$) satisfaz a propriedade do laço par. Pelos Teoremas 4.5 e 4.6 temos que o campo Ax possui octantes invariantes positivos (negativos). Como as matrizes B_i são diagonais segue o resultado. □

4.3 Matrizes simétricas

Considerando a conjectura proposta por V.Jurdjevic e I.Kupka

Conjectura: Sejam A, B matrizes $n \times n$ com entradas reais. Se A e B são simétricas, então o sistema bilinear

$$\dot{x} = Ax + uBx, \quad (4.9)$$

com controle irrestrito $u \in \mathbb{R}$, não é globalmente controlável em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, temos como objetivo nesta seção, mostrar através de resultados obtidos nas seções anteriores que esta conjectura é verdadeira para dimensões 2 e 3, porém para dimensão 4 encontra-se em aberta. E para finalizar, exibiremos um resultado que nos fornece uma condição necessária para que a conjectura seja verdadeira.

Antes de mostrar que a conjectura é verdadeira para dimensões 2 e 3, observemos o seguinte:

Dada uma matriz simétrica B , sabemos que existe uma transformação ortogonal de \mathbb{R}^n que diagonaliza B , ou seja, dada uma matriz simétrica B temos que $PBP^T = D$, onde P é uma matriz ortogonal e D é uma matriz diagonal. Observe também que, se A é uma matriz simétrica, então $(PAP^T)^T = PA^T P^T = PAP^T$. Portanto, PAP^T também é simétrica.

Usando o Teorema 4.14 mostraremos agora que conjectura acima é verdadeira para dimensões 2 e 3. Na hipótese da conjectura, temos que A e B são matrizes simétricas, logo pelo que observamos acima podemos assumir sem perda de generalidade que B é uma matriz diagonal e que A é uma matriz sinal-simétrica. Verificaremos agora que o grafo $\Gamma(A)$ (*resp.* $\Gamma(-A)$) satisfaz a propriedade do laço par.

Se a dimensão for 2 temos duas possibilidades para a matriz A :

$$\begin{pmatrix} * & + \\ + & * \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} * & - \\ - & * \end{pmatrix}.$$

No primeiro caso temos que o grafo $\Gamma(A)$ satisfaz a propriedade do laço par, pois ele possui um número par de arestas negativas. No segundo caso o grafo $\Gamma(A)$ não satisfaz a propriedade do laço par, pois ele possui um número ímpar de arestas negativas, mas se considerarmos o grafo de $\Gamma(-A)$ temos que este satisfaz a propriedade do

laço par.

Se a dimensão for 3 temos as seguintes possibilidades para as matriz A :

$$\begin{pmatrix} * & + & + \\ + & * & + \\ + & + & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & - \\ + & * & - \\ - & - & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & - & - \\ - & * & + \\ - & + & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & - & + \\ - & * & - \\ + & - & * \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} * & - & - \\ - & * & - \\ - & - & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & + \\ + & * & - \\ + & - & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & + & - \\ + & * & + \\ - & + & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & - & + \\ - & * & + \\ + & + & * \end{pmatrix}.$$

Note que nas quatro primeiras possibilidades para a matriz A o grafo $\Gamma(A)$ satisfaz a propriedade do laço par, pois possui duas arestas negativas em todos os casos. Nas outras quatro possibilidades, o grafo $\Gamma(A)$ não satisfaz a propriedade do laço par, pois possui uma aresta negativa em todos os casos, mas se seguirmos o mesmo raciocínio que usamos para dimensão dois e considerarmos a matriz $-A$, temos que o grafo $\Gamma(-A)$ irá satisfazer a propriedade do laço par, pois possuirá duas arestas negativas em todos os casos. Portanto, tanto para dimensão 2, quanto para dimensão 3, temos o seguinte:

- A é uma matriz sinal simétrica;
- B é uma matriz diagonal;
- o grafo $\Gamma(A)$ (*resp.* $\Gamma(-A)$) satisfaz a propriedade do laço par.

Logo, pelo Teorema 4.14 temos que o sistema (4.9) possui octantes invariante positivos (negativos). Portanto a conjectura é verdadeira para dimensões 2 e 3.

Se considerarmos a dimensão igual a 4, note que existem matrizes simétricas A para os quais o campo Ax e o sistema (4.9) não possui octantes invariante, basta considerar o exemplo 4.7. Neste caso, a questão da controlabilidade global, isto é, da ausência de conjuntos invariantes é deixada em aberto.

O próximo teorema afirma que para matrizes simétricas A e B , com pelo menos um dos grafos $\Gamma(A)$, $\Gamma(-A)$ satisfazendo a propriedade do laço par, a conjectura de V.Jurdjevic e I.Kupka é verdadeira.

Teorema 4.15. *Sejam A e B matrizes simétricas, tal que pelo menos um dos grafos $\Gamma(A)$ ou $\Gamma(-A)$ satisfaz a propriedade do laço par. Então o sistema (4.9) não é globalmente controlável em $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$.*

Demonstração: Como A é simétrica temos que A é sinal-simétrica. Através de uma transformação ortogonal de \mathbf{R}^n podemos diagonalizar a matriz simétrica B . Por hipótese temos que um dos grafos $\Gamma(A)$ ou $\Gamma(-A)$ satisfaz a propriedade do laço par. Logo, pelo Teorema 4.14, temos que o sistema (4.9) possui octante invariante positivo (negativo). Portanto o sistema (4.9) não é globalmente controlável em $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$. \square

4.4 Octantes invariantes e controlabilidade

Considere o seguinte problema formulado por YU.L.Sachkov:

Problema 1: *Suponha que $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$, $b_i \neq b_j$, $i \neq j$. Se o sistema (4.9) não tem octante invariante e satisfaz a condição do posto da álgebra de Lie, então ele é globalmente controlável em $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$?*

O objetivo desta seção é mostrar que o Problema 1 não é verdadeiro para dimensão 4. Para isto, consideraremos um exemplo do artigo devido a O.G. Do Rocio, L.A.B. San Martin, e A.J. Santana [8].

Primeiramente, vamos analisar este problema para o caso bidimensional. Para efeito de simplicidade consideremos A e B matrizes em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, pois assim poderemos tirar nossas conclusões a partir dos resultados do artigo devido a C.J. Braga Barros, J.G.F. Ribeiro, O.G. Do Rocio e L.A.B. San Martin [1].

Considere então

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Afim de verificar a condição do posto observamos que

$$[A, B] = \begin{pmatrix} 0 & -2b\lambda \\ 2c\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, conforme Corolário 5.2 de [1] a condição do posto é satisfeita se, e somente se, $\det[A, B] = 4\lambda^2bc \neq 0$.

Se $bc > 0$, então A é uma matriz sinal simétrica cujo grafo $\Gamma(A)$ satisfaz a propriedade do laço par. Logo, pelo Teorema 4.14 o sistema (4.9) possui octantes invariantes e conseqüentemente, não é controlável.

Se $bc < 0$, então $\det[A, B] < 0$ e daí, pelo Teorema 5.3 de [1] o sistema é controlável.

Este resultado poderia ser obtido diretamente analisando os conjuntos de controle de semigrupos de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ no espaço projetivo real ou então analisando as formas de Jordan de A .

Para dimensão 4, temos que o Problema 1 não é verdadeiro. De fato, considere o seguinte exemplo de [8]:

Sejam A e B matrizes de dimensões 4×4 dadas da seguinte maneira:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \text{diag}(-3, -2, 1, 4).$$

Mostraremos que os sistema satisfaz a condição do posto, e no entanto o semigrupo de $SL(4, \mathbb{R})$ gerado por A e B é próprio, implicando que o sistema é não controlável e finalmente mostraremos que não existe octante invariante.

De fato, primeiramente mostraremos que o sistema (4.9) satisfaz a condição do posto. Para isto, considere

$$\beta = \{E_{11}-E_{22}, E_{22}-E_{33}, E_{33}-E_{44}, E_{12}, E_{13}, E_{14}, E_{21}, E_{23}, E_{24}, E_{31}, E_{32}, E_{34}, E_{41}, E_{42}, E_{43}\},$$

a base canônica de $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$, onde E_{ij} é a matriz básica cuja entrada ij é igual a 1 e as demais entradas são todas nulas. Através de um software matemático, obtemos as matrizes, $ad(B)^k A$, com $1 \leq k \leq 7$, $ad(A)^l B$ com $l = 2, 4, 6, 8$, $ad(B)(ad(A)^2 B)$ e $ad(A)^2(ad(B)(ad(A)^2 B))$.

Escrevendo as matrizes A , B , $ad(B)^k A$, com $1 \leq k \leq 7$, $ad(A)^l B$ com $l = 2, 4, 6, 8$, $ad(B)(ad(A)^2 B)$ e $ad(A)^2(ad(B)(ad(A)^2 B))$ como combinação linear dos elementos da base β , obtemos os seguintes vetores:

$$V_1 = [0, 0, 0, 1, 0, -2, 1, 1, 0, 0, 1, 1, -2, 0, 1]$$

$$V_2 = [1, 5, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$V_3 = [0, 0, 0, -3, 0, -8, 3, 6, 0, 0, -6, 1, 8, 0, -1]$$

$$V_4 = [0, 0, 0, 9, 0, -32, 9, 36, 0, 0, 36, 1, -32, 0, 1]$$

$$V_5 = [0, 0, 0, -27, 0, -128, 27, 216, 0, 0, -216, 1, 128, 0, -1]$$

$$V_6 = [0, 0, 0, 81, 0, -512, 81, 1296, 0, 0, 1296, 1, -512, 0, 1]$$

$$V_7 = [0, 0, 0, -243, 0, -2048, 243, 7776, 0, 0, -7776, 1, 2048, 0, -1]$$

$$V_8 = [0, 0, 0, 729, 0, -8192, 729, 46656, 0, 0, 46656, 1, -8192, 0, 1]$$

$$V_9 = [0, 0, 0, -2187, 0, -32768, 2187, 279936, 0, 0, -279936, 1, 32768, 0, -1]$$

$$V_{10} = [26, 44, 34, 0, -19, 0, 0, 0, 7, -19, 0, 0, 0, 7, 0]$$

$$V_{11} = [590, 692, 694, 0, -307, 0, 0, 0, 151, -307, 0, 0, 0, 151, 0]$$

$$V_{12} = [13070, 13220, 14422, 0, -5419, 0, 0, 0, 3391, -5419, 0, 0, 0, 3391, 0]$$

$$V_{13} = [283742, 270692, 301318, 0, -103411, 0, 0, 0, 77047, -103411, 0, 0, 0, 77047, 0]$$

$$V_{14} = [0, 0, 0, 0, -57, 0, 0, 0, 49, 57, 0, 0, 0, -49, 0]$$

$$V_{15} = [-57, -8, 49, 5194, -432, -7595, 6042, 8835, 269, 261, 7987, 5194, -9291, -416, 6042]$$

onde cada coordenada de cada vetor são os escalares da combinação linear da respectiva matriz em relação a base β . Considere agora a matriz formada pelos vetores obtidos acima, onde cada vetor se tornará uma coluna desta matriz e denote-a por H .

Através do mesmo software matemático usado acima, calculamos o determinante de H e obtemos:

$$\det H = 238476330158065112359895040000000 \neq 0.$$

Como $\det H \neq 0$, concluímos que o conjunto

$$\{A, B, ad(B)^k A, ad(A)^l B, ad(B)(ad(A)^2 B), ad(A)^2(ad(B)(ad(A)^2 B))\}$$

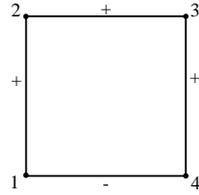
onde $1 \leq k \leq 7$ e $l = 2, 4, 6, 8$, é linearmente independente.

Sabemos que a álgebra de Lie gerada por A e B é o menor subespaço de $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ que contém $\{A, B\}$ e seus colchetes. Como a dimensão de $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ é 15 e o conjunto $\{A, B, ad(B)^k A, ad(A)^l B, ad(B)(ad(A)^2 B), ad(A)^2(ad(B)(ad(A)^2 B))\}$ com $1 \leq k \leq 7$ e $l = 2, 4, 6, 8$ é linearmente independente, temos que a álgebra de Lie gerada por A e B coincide com $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$. Portanto, o sistema (4.9) satisfaz a condição do posto.

Agora verificaremos que o semigrupo de $SL(4, \mathbb{R})$, gerado pelas matrizes A e B é próprio. Pelo Teorema 2.20 temos que ambas as matrizes A e B pertencem ao cone de Lie $L(S_2)$ do semigrupo S_2 de $SL(4, \mathbb{R})$. De fato, primeiramente mostraremos que $A \in L(S_2)$, ou seja, mostraremos que a matriz A satisfaz as condições do Teorema 2.20. Se $|i - j| = 1$, temos $a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = a_{34} = a_{43} = 1 \geq 0$. Logo a condição 3.(a) do Teorema 2.20 está satisfeita. Se $2 \leq |i - j| < n - 1$ temos $a_{13} = a_{31} = a_{24} = a_{42} = 0$. Logo a condição 3.(b) do Teorema 2.20 também está satisfeita. Note que, $(-1)^{k-1}a_{1n} = (-1)^1 a_{14} = (-1)(-2) = 2 \geq 0$ e $(-1)^{k-1}a_{n1} = (-1)^1 a_{41} = (-1)(-2) = 2 \geq 0$. Logo a condição 3.(c) do Teorema 2.20 também está satisfeita. Portanto $A \in L(S_2)$.

Como B é uma matriz diagonal, é fácil ver que $B \in L(S_2)$. Provando assim que, $A, B \in L(S_2)$. Como S_2 é um semigrupo próprio de $SL(4, \mathbb{R})$ e $A, B \in L(S_2)$ então o semigrupo de $SL(4, \mathbb{R})$ gerado por A e B é próprio. Portanto os sistema (4.9) é não controlável.

Finalmente, mostraremos que o sistema (4.9) não deixa octante invariante. Para demonstrar esta afirmação, devemos verificar que nem o grafo $\Gamma(A)$ e nem o grafo $\Gamma(-A)$ satisfazem a propriedade do laço par. Através do grafo $\Gamma(A)$, representado na figura abaixo,



verificamos que este não satisfaz a propriedade do laço par, pois possui um número ímpar (uma) de aresta negativa. Note que, se considerarmos o grafo $\Gamma(-A)$, também verificamos que este não satisfaz a propriedade do laço par, pois possui um número ímpar (três) de arestas negativas. Portanto, pelo Teorema 4.14 temos que o sistema (4.9) não possui octantes invariantes.

Em [8] foi mostrado que o semigrupo de $SL(4, \mathbb{R})$ gerado por A e B não deixa nenhum cone pontual invariante. A condição para que a não existência de cones invariantes implique a controlabilidade depende do tipo parabólico do semigrupo. Assunto este que foge dos propósitos deste trabalho.

Conclusão

Em [8] foi mostrado que, se um semigrupo de $SL(3, \mathbb{R})$ não deixa nenhum cone pontual gerador invariante (positivo e negativo) então ocorre a controlabilidade. Isto ocorre devido ao fato de o tipo parabólico de S ou de S^{-1} ser igual a 1. No caso do exemplo acima, foi também mostrado em [8] que S não deixa nenhum cone pontual gerador invariante. Estes resultados mostram a eficácia da teoria de controle no estudo de sistemas de controle. As técnicas estudadas neste trabalho possuem o mérito de somente envolver conceitos simples e de proporcionar um método de obter sistemas bilineares que deixam octantes invariantes.

BIBLIOGRAFIA

- [1] C.J. Braga Barros, J.G.F. Ribeiro, O.G. do Rocio e L.A.B. San Martin, *Controllability of two-dimensional bilinear systems*. Proyecciones, Vol. 15, 1996, 111-139.
- [2] J. Hilgert, K. H. Hofmann, and J. D. Lawson, *Lie groups, Convex Cones and Semigroups*. Oxford University Press, Oxford, 1989.
- [3] M.W.Hirsch, *Convergence in neural nets*. Proc. Int. Conf. Neural Networks, Vol.II, IEEE, USA, (1987), 115-125.
- [4] V. Jurdjevic and I. Kupka, *Control Systems subordinate to a group action: acessibility*. J. Differential Equations, 39(1981), 186-211.
- [5] V. Jurdjevic and J.H. Sussmann, *Control Systems on Lie Goups*. Journal of Differential Equations Vol.12, 1972, 313-329.
- [6] E. L. Lima, *Curso de análise; Vol.2*. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2005.
- [7] C.A. Martins, *Controlabilidade de Sistemas bilineares bidimensionais*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Maringá, (2006).
- [8] O.G. Do Rocio, L.A.B. San Martin, and A.J. Santana, *Invariant cones and convex sets for bilinear control systems and parabolic type of semigroups*. J. Dynam. and Control Systems, Vol.12, (2006), No.3, 419-432.

- [9] YU.L. Sachkov, *On invariants orthants of bilinear systems*. J. Dynam. and Control Syst. 4 (1998), No.1, 137-147.
- [10] YU.L. Sachkov, *Invariant orthants of bilinear systems*. J. Differential Equations 31 (1995), No.6, 1027-1029.
- [11] YU.L. Sachkov, *Controllability of invariant systems on Lie groups and homogeneous spaces*, Program Systems Institute, Russian Academy of Science (1999).
- [12] L.A.B. San Martin, *A family of maximal noncontrollable Lie wedges with empty interior*. Systems e Control Letters 43 (2001), 53-57.
- [13] L.A.B. San Martin, *Álgebras de Lie*. Editora da Unicamp (1999).
- [14] L.A.B. San Martin, *Homogeneous spaces admitting transitive semigroups*. J. of Lie Theory, Vol. 8, 1998, 111-128.
- [15] V. S. Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras, and their representations*. Prentice-Hall, New Jersey, (1974).
- [16] F. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Scott, Foresman and Company, 1971.