Controlabilidade Aproximada da Equação do Calor Semilinear Envolvendo Termos Gradientes

Rodrigo André Schulz

Centro de Ciências Exatas
Universidade Estadual de Maringá
Programa de Pós-Graduação em Matemática
(Mestrado)

Orientador: Juan Amadeo Soriano Palomino

Maringá - PR
Março - 2008

Controlabilidade Aproximada da Equação do Calor Semilinear Envolvendo Termos Gradientes

Rodrigo André Schulz

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Prof. Juan Amadeo Soriano Palomino (orientador) ....
Universidade Estadual de Maringá

Prof. Valéria Neves Domingues Cavalcanti ....
Universidade Estadual de Maringá

Prof. Mauro de Lima Santos ....
Universidade Federal do Pará

Maringá - PR
Março - 2008

À minha família e
aos meus amigos e irmãos em Cristo.

Agradecimentos

Poderiam dizer que esse trabalho é um fruto do curso de Mestrado em Matemática da Universidade Estadual de Maringá que levou dois anos para ser formado.

Poderiam ainda falar que tudo isso começou quando marquei a opção "Licenciatura em Matemática" na ficha de inscrição do vestibular da Unioeste.

No entanto, eu diria que esse trabalho carrega a história de uma vida...

Por esse motivo agradeço a todos que em algum momento estiveram presente em minha vida, amigos, familiares, professores e tantos outros que, mesmo sendo uma quantidade finita, sou incapaz de enumerá-los.

Em especial agradeço:

Ao meu Senhor que, em meio a muitas provas e tribulações, sempre nos conduz em triunfo;

À minha família, por todo apoio e incentivo ao longo desses anos;

Ao Prof. Juan, por toda paciência e longanimidade ao me auxiliar em todas aquelas questões óbvias e também nas não óbvias.

Aos santos da igreja em Maringá pois, para mim, são amigos de inestimável valor.

Aos meus amigos Flávio, Laerte, Waldir e Robson que foram companheiros em todos o momentos do mestrado.

E, por fim, a você que está lendo e apreciando nosso trabalho.

Nisso exultais, embora, no presente, por breve tempo, se necessário, sejais contristados por várias provações, para que, uma vez confirmado o valor da vossa fé, muito mais preciosa do que o ouro perecível, mesmo apurado pelo fogo, redunde em louvor, glória e honra na revelação de Jesus Cristo.

1 Pedro 1:6-7.

Conteúdo

Resumo

Este trabalho tem por base o artigo de L. A. Fernández e E. Zuazua, referência [8], e trata da controlabilidade aproximada da equação do calor semilinear

$$\left|\begin{array}{ll} y_t - \Delta y + f(x,t,y,\nabla y) = u\chi_q & \text{em } Q = \Omega \times (0,T) \\ y(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma = \Gamma \times (0,T) \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{em } \Omega, \end{array}\right. ,$$

onde Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira suficientemente regular, $y = y(x,t)$ é o estado a ser controlado e $q = \omega \times (0,T)$, com ω um subconjunto aberto não vazio de Ω, é o cilindro no qual o controle u está agindo.

Palavras chave: equação do calor semilinear, controlabilidade aproximada, método de Faedo-Galerkin.

Abstract

This work is based in the work due to L. A. Fernández and E. Zuazua, reference [8], and it deals with the approximate controllability of the semilinear heat equation

$$\left|\begin{array}{ll} y_t - \Delta y + f(x,t,y,\nabla y) = u\chi_q & \text{in } Q = \Omega \times (0,T) \\ y(x,t) = 0 & \text{on } \Sigma = \Gamma \times (0,T) \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{in } \Omega, \end{array}\right.,$$

where Ω is a bounded open subset of $\mathbb{R}^n$ with smooth boundary, $y = y(x,t)$ is the state to be controlled and $q = \omega \times (0,T)$, ω being a nonempty open subset of Ω, is the cylinder where the control u is effective.

Key words: semilinear heat equation, approximate controllability, Faedo-Galerkin's method.

Capítulo 1

Introdução

Esse trabalho trata-se de uma dissertação de mestrado do Programa de Pós-graduação em Matemtática da Universidade Estadual de Maringá da turma de 2006. O trabalho foi realizado na cidade de Maringá, entre os meses agosto de 2007 e janeiro de 2008 e é parte dos requisitos necessários a obtenção do título de mestre em matemática.

Essa dissertação não contém resultados inéditos, apenas é baseada no artigo de Fernandez e Zuazua, referência [8], e visa a controlabilidade aproximada da equação do calor semilinear

$$\left| \begin{array}{ll} y_t - \Delta y + f(x,t,y,\nabla y) = u\chi_q & \text{em } Q = \Omega \times (0,T) \\ y(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma = \Gamma \times (0,T) \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{em } \Omega, \end{array} \right. , \tag{1.1}$$

onde Ω é um conjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega = \Gamma$ suficientemente regular, $y = y(x,t)$ é o estado a ser controlado, $u = u(x,t)$ é o controle, χ_q é a função característica de $q = \omega \times (0,T)$ no qual o controle age e ω é um subconjunto aberto não vazio de Ω. A notação y_t indica a derivada da função y com relação a variável t que eventualmente escreveremos $y_t = \dfrac{d}{dt}y$. Para o operador laplaciano utilizamos a notação $\Delta y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} y(x,t)$ e para o vetor gradiente $\nabla y = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1} y(x,t), ..., \dfrac{\partial}{\partial x_n} y(x,t) \right)$. Quanto a $f = f(x,t,y(x,t),\nabla y(x,t))$ assumiremos que

i) $f(x,t,\xi,\eta)$ é uma função mensurável com respeito a $(x,t) \in Q$;

ii) $f(x,t,\xi,\eta)$ é de classe C^1 com respeito a $(\xi,\eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$;

iii) $f(.,.,0,0) \in L^2(Q)$;

iv) $\left|\frac{\partial}{\partial\xi}f(x,t,\xi,\eta)\right| + \left\|\frac{\partial}{\partial\eta}f(x,t,\xi,\eta)\right\| \leq k_0$, para todo $(x,t,\xi,\eta) \in Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, onde k_0 é uma constante positiva.

Para conseguir a controlabilidade aproximada do problema 1.1 (teorema 4.8, página 110), é necessário obter a controlabilidade aproximada do problema linearizado[1]

$$\left|\begin{array}{ll} z_t - \Delta z + az + \vec{b}\nabla z = u\chi_q & \text{em } Q = \Omega \times (0,T) \\ z(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma = \Gamma \times (0,T) \\ z(x,0) = z_0(x) & \text{em } \Omega \\ (a,\vec{b}) \in L^\infty(Q) \times [L^\infty(Q)]^n & \end{array}\right. \tag{1.2}$$

a qual por sua vez nos leva a estudar a solução por transposição ou solução ultrafraca de 1.2.

Para o estudo da controlabilidade é necessário saber algo sobre as soluções dos problemas envolvidos, por exemplo, se existem, em que espaço estão, se são únicas. Para isso usamos o método de Faedo-Galerkin, e então as demonstrações de tais resultados de existência e unicidade de solução são sempre divididos em 5 etapas: 1 - problema aproximado, 2 - estimativas, 3 - passagem ao limite, 4 - dados iniciais, 5 - unicidade.

A controlabilidade é inspirada no trabalho de Lions [11], onde é vista como o limite de uma sequência de problemas de controle ótimo, e tem por ingrediente principal um resultado de continuação única provado por Fabre em [6], o qual enunciamos como teorema 2.26, na página 19.

Antes de provar o teorema principal, teorema 4.8, fez-se necessário o estudo do funcional envolvido neste, sobretudo da diferenciabilidade do mesmo, com a finalidade de estabelecer as condições ótimas de sua solução. Este estudo é feito no teorema 4.7, página 94.

Visando uma melhor exposição didática da resolução do problema a dissertação foi dividida da seguinte maneira: no capítulo 2 temos algumas definições, notações e resultados que serão utilizados no desenrolar do texto. O capítulo 3 é dedicado ao problema linearizado 1.2, as vezes referenciado como problema linear ou equação do calor linear, do qual mostramos a existência e a unicidade de soluções fraca e forte, assim como solução ultrafraca e a controlabilidade aproximada. Para finalizar, o capítulo 4 trata do problema não linear, ou equação do calor não linear 1.1, abrangendo solução fraca,

[1] Na ocasião de seu estudo, no capítulo 3, esse problema é referenciado como problema 3.1 ou 3.55

solução forte, resultados de continuidade e diferenciabilidade de soluções culminando na controlabilidade aproximada.

Esse trabalho obteve o suporte da Capes - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - em forma de bolsa de estudos.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Espaços Funcionais

2.1.1 Distribuições

Sejam $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ pontos do $\mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2..., \alpha_n)$, n-uplas de números inteiros não negativos. Considerando $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2... + \alpha_n$ e $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n!$ denotaremos o operador derivação em $\mathbb{R}^n$ por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$. Definimos o *suporte* da função φ em Ω e denotamos por $supp(\varphi)$ o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$. Quando $supp(\varphi)$ é compacto, dizemos que φ tem suporte compacto em Ω. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que possuem suporte compacto.

O *espaço das funções testes* de Ω, $\mathcal{D}(\Omega)$, é o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido da seguinte noção de convergência: Dada uma sucessão $\{\varphi_\nu\}$ de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ dizemos que

$$\varphi_\nu \to \varphi \text{ em } \mathcal{D}(\Omega) \tag{2.1}$$

se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω tal que

i) $supp(\varphi_\nu) \subset K$, $\forall \nu$ e $supp(\varphi) \subset K$;

ii) $D^\alpha\varphi_\nu \to D^\alpha\varphi$ uniformemente sobre K, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Uma *distribuição* sobre Ω é uma forma linear sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência dada em 2.1. Chamaremos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o *espaço vetorial das distribuições* sobre Ω. Diremos que $\{T_\nu\}$, uma sucessão de elementos de $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e escreveremos

$$T_\nu \to T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega)$$

quando

$$\langle T_\nu, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \,,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dada uma distribuição T sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a derivada distribucional de ordem α da distribuição T, denotada por $D^\alpha T$, é dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \,,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com essa definição, uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ possui derivada distribucional de todas as ordens e $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e além disso a aplicação

$$\begin{array}{rcl} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) & \to & \mathcal{D}'(\Omega) \\ T & \mapsto & D^\alpha T \end{array}$$

é linear e contínua.

2.1.2 Espaços $L^p(\Omega)$

Sejam Ω um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ e p um número real tal que $1 \leq p < \infty$. Denotaremos por $L^p(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis u, definidas em Ω tais que $|u|^p$ é Lebesgue integrável sobre Ω.

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach.

Se define por $L^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que u é mensurável e existe uma constante C tal que $|u(x)| \leq C$ para quase todo $x \in \Omega$. Uma norma em $L^{\infty}(\Omega)$ é dada por

$$||u||_{L^{\infty}(\Omega)} = \inf\{C; |u(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\}$$

a qual o torna um espaço de Banach.

Em particular, $L^2(\Omega)$, com o produto interno

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)\, dx$$

e a norma $|u|^2 = (u, u)$, é um espaço de Hilbert.

Seja $1 \leq p \leq \infty$. Diz-se que p' é o *índice conjugado* de p se $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Proposição 2.1 ***(Desigualdade de Young)*** *Se a e b são números reais não negativos então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

sempre que $1 \leq p \leq \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Demonstração: Ver [1].

□

Proposição 2.2 ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |uv| \leq ||u||_{L^p(\Omega)} ||v||_{L^{p'}(\Omega)}$$

Demonstração: Ver [1].

□

Proposição 2.3 ***(Desigualdade de Minkowski)*** *Sejam u, $v \in L^p(\Omega)$ e $1 \leq p < \infty$ então*

$$||u + v||_{L^p(\Omega)} \leq ||u||_{L^p(\Omega)} + ||v||_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [14].

□

Teorema 2.4 ***(Convergência Dominada de Lebesgue)*** *Se uma sequência* $\{f_k\}$ *de funções integráveis a Lebesgue num conjunto* Ω *converge quase sempre em* Ω *para um função* f*, e se* $|f_k|_{L^1(\Omega)} \leq \psi$*, quase sempre em* Ω*,* $\forall k \in \mathbb{N}$*, para um certa função* $\psi \in L^1(\Omega)$*, então a integral* $\displaystyle\int_\Omega f$ *existe e*

$$\int_\Omega f \; dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \; dx$$

Demonstração: Ver [7].

□

Denota-se por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é lebesgue integrável sobre cada subconjunto compacto de Ω.

Proposição 2.5 ***(Du Bois Raymond)*** *Sejam* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x) \; dx = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

então $u = 0$ *quase sempre em* Ω*.*

Demonstração: Ver [2].

□

2.1.3 Espaços de Sobolev

Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \geq 1$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é o espaço vetorial de todas as funções de $L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo $\alpha \leq m$. Simbolicamente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega);\; D^\alpha u \in L^p(\Omega),\; \forall |\alpha| \leq m\right\}.$$

Uma norma em $W^{m,p}(\Omega)$ é dada por

$$||u||^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx, \text{ se } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$||u||^p_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} \text{ess } |D^\alpha u(x)|^p \, dx, \text{ se } p = \infty,$$

a qual o torna um espaço de Banach. No caso $p = 2$, escreve-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ e munindo-o com o produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) \, dx$$

temos um espaço de Hilbert.

Define-se o espaço $W^{m,p}_0(\Omega)$ como sendo fecho de $C^\infty_0(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, ou seja,

$$\overline{C^\infty_0(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W^{m,p}_0(\Omega).$$

Quando Ω é limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$ então a norma em $W^{m,p}_0(\Omega)$ dada por

$$||u||^p = \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx$$

é equivalente a norma induzida por $W^{m,p}(\Omega)$.

Representa-se por $W^{-m,p'}(\Omega)$ o dual topológico de $W^{m,p}_0(\Omega)$, onde $1 \leq p < \infty$ e p' é o índice conjugado de p. Por $H^{-m}(\Omega)$ denota-se o dual topológico de $H^m_0(\Omega)$.

2.2 Espaços de Funcionais à Valores Vetoriais

Seja X um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{D}(0, T; X)$ o espaço localmente convexo completo das funções vetoriais $\varphi : (0, T) \to X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em (0,T). Dizemos que uma sucessão

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{D}(0, T; X)$$

se

i) Existe um compacto K de (0,T) tal que $supp(\varphi_\nu)$ e $supp(\varphi)$ estão contidos em K, para todo ν;

ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{d^k}{dt^k}\varphi_\nu(t) \to \dfrac{d^k}{dt^k}\varphi$ em X, uniformemente em $t \in (0,T)$.

O espaço das aplicações lineares contínuas de $\mathcal{D}(0,T) = \mathcal{D}(0,T;\mathbb{R})$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$, ou seja, $S \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ se $S : \mathcal{D}(0,T) \to X$ é linear e se $\theta_\nu \to \theta$ em $\mathcal{D}(0,T)$ implicar que $\langle S, \theta_\nu \rangle \to \langle S, \theta \rangle$ em X. Diremos que

$$S_\nu \longrightarrow S \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;X)$$

se

$$\langle S_\nu, \theta \rangle \to \langle S, \theta \rangle \text{ em }, \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T).$$

O espaço $\mathcal{D}(0,T;X)$ equipado com a convergência acima é denominado espaço das *distruibuições vetoriais* de $(0,T)$ com valores em X.

Denota-se por $L^2(0,T;X)$ o espaço das (classes de) funções vetoriais $u : (0,T) \to X$ mensuráveis em $(0,T)$, $(0,T)$ dotado da medida de Lebesgue, tais que

$$\int_0^T ||u(t)||_X^2 dt < \infty.$$

O espaço $L^2(0,T,X)$ munido do produto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T,X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt$$

é um espaço de Hilbert.

2.3 Topologias Fracas, Espaços Reflexivos e Separáveis

Nesta seção temos algumas propriedades das topologias fraca e fraca $*$, assim como resultados de convergência nestas topologias envolvendo a reflexividade e a separabilidade dos espaços.

2.3.1 Topologia Fraca

Considerando E um espaço de Banach, a *topologia fraca* $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E que torna contínuas todas as aplicações $f \in E'$.

Seja $\{x_n\}$ uma sucessão convergente para x na topologia fraca $\sigma(E, E')$. Quando não houver possibilidade de confusão diremos apenas que $\{x_n\}$ converge fraco para x e denotaremos por

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E$$

Proposição 2.6 *Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão em E, então*

i) $x_n \rightharpoonup x$ em E se, e somente se, $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall f \in E'$;

ii) Se $x_n \to x$ em E, então $x_n \rightharpoonup x$ em E;

iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E, então $||x||_E$ é limitada e $||x||_E \leq \liminf ||x_n||_E$;

iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E e $f_n \to f$ em E', então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [1].

□

Considere $F : M \subset E \to [-\infty, \infty]$ e E um espaço de Banach. O funcional F é dito ser *fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente* num ponto $u \in M$ se, e somente se,

$$F(u) \leq \liminf_{n\to\infty} F(u_n)$$

para cada sequência $\{u_n\}$ em M tal que $u_n \rightharpoonup u$.

2.3.2 Topologia Fraca ∗

Sejam E um espaço de Banach e $x \in E$ fixo. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rcl} J_x : E' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \langle J_x, f\rangle = \langle f, x\rangle \end{array}$$

que é linear e contínua e portanto $J_x \in E''$, $\forall x \in E$. Deste modo, definamos a aplicação $J : E \to E''$ tal que $J(x) = J_x$, a qual é chamada de *injeção canônica* de E em E''.

A topologia fraca $*$, ou $\sigma(E', E)$, é a topologia menos fina sobre E' que faz contínuas todas as aplições J_x.

Seja $\{f_n\}$ uma sucessão convergente para f na topologia fraca $*$ $\sigma(E, E')$. Com vistas a simplificação das notações escreveremos apenas que $\{f_n\}$ converge fraco $*$ para f, ou simbolicamente

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } E'$$

quando não houver possibilidade confusão.

Proposição 2.7 *Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão em E', então*

i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E' *se, e somente se,* $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \ \forall x \in E$;

ii) Se $f_n \to f$ *forte, então* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(E', E'')$;

iii) Se $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(E', E'')$, *então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E';

iv) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E', *então* $||f_n||_{E'}$ *está limitada e* $||f||_{E'} \leq \liminf ||f_n||_{E'}$;

v) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E' *e* $x_n \to x$ *em* E, *então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [1].

□

2.3.3 Espaços Reflexivos e Espaços Separáveis

Nesta subseção se encontram os resultados essenciais para a demonstração de existência e unicidade de solução do problema em questão.

Dizemos que um espaço de Banach é *reflexivo* quando a injeção canônica $J : E \to E''$ é sobrejetora. Um funcional $F : M \subset E \to [-\infty, \infty]$ é *coercivo* se $F(u) \to \infty$ sempre que $||u||_E \to \infty$, $u \in M$.

O seguinte resultado é de fundamental importância na demonstração do controle da equação do calor, usaremos diretamente no caso linear.

Teorema 2.8 *Seja E um espaço de Banach reflexivo, $M \subset E$ um convexo fechado não vazio e $F : M \to (-\infty, \infty]$ uma função convexa, semicontínua inferiormente, coerciva e*

$F \neq \infty$. Então F alcança seu mínimo sobre M, isto é, existe $u_0 \in M$ tal que $F(u_0) = \min_{u \in M} F(u)$.

Demonstração: Ver [1].

□

Para a unicidade do mínimo no teorema anterior precisamos que F seja estritamente convexo, como diz o

Teorema 2.9 *O funcional $F : M \subset E \to \mathbb{R}$ tem quando muito um mínimo sobre M no caso que*

i) M é um subconjunto convexo de um espaço linear E;

ii) F é estritamente convexo*, isto é,*

$$F((1-t)u + tv) < (1-t)F(u) + tF(v)$$

para todo $u, v \in M$, $u \neq v$, e para todo $t \in (0,1)$.

Demonstração: Ver [16].

□

Para o controle do problema não linear precisamos do

Teorema 2.10 *Seja um funcional $F : M \subset E \to [-\infty, \infty]$ sobre um convexo, fechado e M um subconjunto não vazio de um espaço de Banach reflexivo real. Se F é fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente e coercivo, então F possui um mínimo em M.*

Demonstração: Ver [16].

□

Um espaço métrico E é dito *separável* quando existe um subconjunto $M \subset E$ enumerável e denso em E.

Teorema 2.11 *Seja E um espaço de Banach tal que E' é separável. Então E é separável.*

Demonstração: Ver [1].

□

Teorema 2.12 *Seja E um espaço de Banach separável e seja $\{f_n\}$ uma sequência limitada em E'. Então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ que converge na topologia fraca $*$ $(\sigma(E', E))$.*

Demonstração: Ver [1].

□

Teorema 2.13 *Seja E um espaço de Banach reflexivo e seja $\{x_n\}$ um sequência limitada em E. Então existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ que converge na topologia fraca $(\sigma(E, E'))$.*

Demonstração: Ver [1].

□

2.4 O Espaço $W(0,T;X,Y)$

Sejam X e Y dois espaços de Hilbert separáveis, $X \subset Y$ com imersão contínua e densa. Definimos um novo espaço de Hilbert

$$W(0,T;X,Y) = \big\{u \in L^2(0,T;X); u_t \in L^2(0,T;Y)\big\}$$

com a norma

$$||u||^2_{W(0,T;X,Y)} = ||u||^2_{L^2(0,T;X)} + ||u_t||^2_{L^2(0,T;Y)}.$$

Para mais detalhes ver [4].

Considere o espaço $C([0,T];E)$ como sendo o conjunto das funções contínuas de $[0,T]$ em E, munido da norma

$$||u||_{C([0,T];E)} = \sup_{t\in[0,T]} ||u(t)||_E.$$

Com essas notações, temos o

Teorema 2.14 *Se* $u \in W(0,T;X,Y)$ *então* $u \in C([0,T];[X,Y]_{\frac{1}{2}})$, *onde* $[X,Y]_\theta$ *denota a interpolação*[1] *entre os espaços* X *e* Y.

Demonstração: Ver [12].

□

2.5 Alguns Resultados

2.5.1 Teorema de Carathéodory

O teorema de Carathéodory é indispensável para a resolução de nosso problema, por isso o enunciamos aqui e uma demonstração pode ser encontrada na referência [5].

Considere $Q = (0,T) \times \Omega$ um aberto do $\mathbb{R}^{n+1}$, $(t,x) \in Q$ tal que $t \in (0,T)$ e $x \in \Omega$, a função $f : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ e o problema de valor inicial

$$\left| \begin{array}{l} x'(t) = f(t,x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. . \tag{2.2}$$

Diz-se que a função f satisfaz as condições de Carathéodory se

i) $f(x,t)$ é mensurável em t para cada x fixado;

ii) $f(x,t)$ é contínua em x para todo t fixo e

iii) para todo compacto $K \in Q$ existe uma função real $m_K(t)$, integrável, tal que $||f(t,x)||_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t)$, para todo par $(t,x) \in K$.

Teorema 2.15 ***(de Carathéodory)*** *Seja* $f : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ *satisfazendo as condições de Carathéodory. Então o problema 2.2 tem uma solução* $x(t)$ *em algum intervalo* $|t-t_0| \leq \beta$, *com* $\beta > 0$.

[1] Para mais detalhes sobre espaços interpolados veja [12].

Corolário 2.16 *Sejam* $Q = [0, T[\times B$ *com* $T > 0$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \leq b\}$, *onde* $b > 0$ *e* $f : Q \to \mathbb{R}^n$ *nas condições de Carathédory. Suponhamos que* $x(t)$ *é uma solução de 2.2 tal que* $|x_0| \leq b$ *e que em qualquer intervalo* I, *onde* $x(t)$ *está definida, se tenha* $|x(t)| \leq M$, *para todo* $t \in I$, M *independente de* I *e* $M < b$. *Então* $x(t)$ *possui um prolongamento à todo* $[0, T]$.

2.5.2 Mais alguns Resultados

Devido a dimensão do trabalho, enuciamos nesta seção mais alguns resultados bastante utilizados no texto.

Teorema 2.17 ***(do Valor Médio)*** *Seja* $f : U \to \mathbb{R}$ *diferenciável em todos os pontos do segmento de reta* $(a, a+v)$ *e seja contínua sua restrição ao segmento fechado* $[a, a+v] \subset U \subset \mathbb{R}^n$. *Existe* $\theta \in (0,1)$ *tal que*

$$f(a+v) - f(a) = df(a+\theta v).v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f(a+\theta v).\alpha_i,$$

onde $v = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

Demonstração: Ver [10].

□

Proposição 2.18 ***(Lema de Gronwall)*** *Sejam* $z \in L^\infty(0,T)$ *e* $\varphi \in L^1(0,T)$ *tais que* $z(x) \geq 0$, $\varphi(t) \geq 0$ *e seja* $c \geq 0$ *uma constante. Se*

$$\varphi(t) \leq c + \int_0^t z(s)\varphi(s)ds,\ \forall t \in [0,T],$$

então

$$\varphi(t) \leq c.e^{\int_0^t z(s)ds},\ \forall t \in [0,T].$$

Demonstração: Ver [13].

□

Teorema 2.19 ***(de Representação de Riesz-Fréchet)*** *Seja H um espaço de Hilbert. Dada $\varphi \in H'$, existe $f \in H$ único tal que*

$$\langle \varphi, u \rangle = (f, u)\,,\ \forall u \in H.$$

Além disso,

$$||f||_H = ||\varphi||_{H'}$$

Demonstração: Ver [1].

□

Definição 2.20 *Seja H um espaço de Hilbert. Se diz que uma forma bilinear $a(u, v) : H \times H \to \mathbb{R}$ é*

i) contínua *se existe uma constante C tal que*

$$|a(u, v)| \leq C|u||v|,\ \forall u, v \in H \ \ e$$

ii) coerciva *se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$a(v, v) \geq \alpha |v|^2,\ \forall v \in H.$$

Teorema 2.21 ***(Lax-Milgram)*** *Seja $a(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então para toda $\varphi \in H'$ existe único $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle\,,\ \forall v \in H.$$

Além disso, se a é simétrica então u se caracteriza pela propriedade

$$u \in H \ \ e \ \ \frac{1}{2}a(u, v) - \langle \varphi, v \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

Demonstração: Ver [1]

□

Se chama *base hilbertiana*, ou simplesmente base, de um um espaço de Hilbert H a toda sucessão $\{e_n\}$ de elementos de H tais que

i) $||e_n||_H = 1\ \forall n \in \mathbb{N},\ (e_m, e_n)_H = 0\ \forall m,\ n,\ m \neq n.$

ii) O espaço vetorial gerado pelos $\{e_n\}$ é denso em H.

Com essa definição temos o

Teorema 2.22 *Todo espaço de Hilbert separável admite uma base Hilbertiana.*

Demonstração: Ver [1].

□

Teorema 2.23 ***(da Regularidade Elítica)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de classe C^2 com fronteira Γ limitada. Seja $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi,\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então, $u \in H^2(\Omega)$ e $||u||_{H^2(\Omega)} \leq c||f||_{L^2(\Omega)}$ onde c é uma constante que só depende de Ω.

Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e $f \in H^m(\Omega)$, então

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \text{ com } ||u||_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c||f||_{H^m(\Omega)}.$$

Em particular, se $m > \dfrac{n}{2}$ então $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Se Ω é de classe C^∞ e $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, então $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Demonstração: Ver [1]

□

Teorema 2.24 ***(de Aubin-Lions)*** *Sejam B_0, B e B_1 espaços de Banach tais que $B_0 \overset{comp}{\hookrightarrow} B \overset{cont}{\hookrightarrow} B_1$, onde B_0 e B_1 são reflexivos. Definamos*

$$W = \{u \in L^{p_0}(0,T;B_0); u_t \in L^{p_1}(0,T;B_1)\},$$

onde $1 < p_0, p_1 < \infty$. Consideremos W munido da norma

$$||u||_W = ||u||_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + ||u||_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

a qual o torna um espaço de Banach. Então a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Proposição 2.25 ***(Lema de Lions)*** *Seja $\{u_\nu\}$ uma sucessão de funções pertencentes a $L^q(Q)$ com $1 < q < \infty$. Se*

i) $u_\nu \longrightarrow u$ *quase sempre em Q e*

ii) $||u_\nu||_{L^q(Q)} \leq c$, *para todo $\nu \in \mathbb{N}$,*

então $u_\nu \rightharpoonup u$ fraco em $L^q(Q)$.

Teorema 2.26 ***(da Continuação Única)*** *Seja $(a,\vec{b}) \in [L^\infty(Q)]^{n+1}$ e seja $p \in L^2_{loc}(0,T;H^1_{loc}(\Omega))$ a solução da seguinte equação do calor:*

$$p_t - \Delta p + ap + div(\vec{b}p) = 0, \;\; em\ Q,$$

a qual se anula em um aberto O de Ω. Então p se anula na componente horizontal de O em Q, isto é, no conjunto

$$\{(x,t) \in Q; \;\; existe\ \tilde{x} \in \Omega, \;\; tal\ que\ (\tilde{x},t) \in O\}.$$

Demonstração: Ver [6].

□

Proposição 2.27 ***(Desigualdade de Ladyzhenskaya)*** *Para toda $u \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$ é possível escolher $q \in (2,\infty)$ e uma constante $c > 0$ tal que*

$$||u||_{L^q(Q)} \leq c\left(||z||_{C([0,T];L^2(\Omega))} + ||\nabla u||_{L^2(Q)}\right),$$

onde $Q = (0,T) \times \Omega$.

Demonstração: Ver [9].

□

Capítulo 3

A Equação do Calor Linear

Este capítulo dedica-se ao estudo da equação do calor linear, equação 3.1, contemplando existência e unicidade de soluções e a controlabilidade aproximada da mesma. Os resultados desse capítulo servirão para auxiliar a demonstração dos principais teoremas do capitulo 4.

Para isso considere Ω um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 1$ e $\partial\Omega = \Gamma$ de classe C^2 e o problema

$$\left|\begin{array}{ll} z_t - \Delta z + az + \vec{b}\nabla z = u & \text{em } Q = \Omega \times (0,T) \\ z(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma = \Gamma \times (0,T) \\ z(x,0) = z_0(x) & \text{em } \Omega \end{array}\right. \tag{3.1}$$

onde $(a, \vec{b}) \in L^\infty(Q) \times [L^\infty(Q)]^n$.

3.1 Existência e Unicidade de Solução Fraca

Nesta seção provaremos a existência de solução fraca do problema 3.1, o teorema 3.2, segundo a definição 3.1. Esse resultado nos será útil na demonstração de um resultado de continuidade enunciado como teorema 4.6. A prova é baseado no método de Faedo-Galerkin.

Definição 3.1 *Diz-se que z é uma* solução fraca *para o problema 3.1 se:*

i) $z \in W(0,T; H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$;

ii) $\displaystyle\int_Q z\psi' + \int_Q \nabla z \nabla \psi + \int_Q az\psi + \int_Q (\vec{b}\ \nabla z)\psi = \int_Q u\psi,$

para toda $\psi \in X = \{\psi \in W(0,T; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)); \psi(0) = \psi(T) = 0\}$ *e*

iii) $z(x,0) = z_0(x)$ *em* Ω.

Teorema 3.2 *Dado* $u \in L^2(Q)$ *e* $z_0 \in L^2(\Omega)$, *então existe única solução fraca* $z = z(x,t)$ *de 3.1 e além disso* $z \in C\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right)$

Demonstração:

A demonstração é feita usando o método de Faedo-Galerkin.

Etapa 1: Problema Aproximado

Considere $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma base especial de $H_0^1(\Omega)$, isto é:

- $\forall m \in \mathbb{N}$, os vetores $w_1, ..., w_m$ são L.I.;
- o conjunto das combinações lineares finitas dos $w_i's$ é denso em $H_0^1(\Omega)$ e
- os elementos w_j satisfazem $\left\{ \begin{array}{l} -\Delta w_j = \lambda_j w_j \\ w_j \mid_\Gamma = 0 \end{array} \right.$.

Seja $V_m = [w_1, ..., w_m]$ o subespaço gerado pelos m primeiros vetores da base acima.

Definimos

$$z^m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_i^m(t) w_i \in V_m$$

Consideremos o seguinte problema finito dimensional, ou problema aproximado,

$$\left| \begin{array}{l} (z_t^m(t), w_j) + ((z^m(t), w_j)) + (az^m(t), w_j) + (\vec{b}\nabla z^m(t), w_j) = (u, w_j) \\ z^m(x,0) = z_0^m(x) \\ z_0^m \longrightarrow z_0 \text{ em } L^2(\Omega) \end{array} \right. \tag{3.2}$$

onde $(.,.)$ e $((.,.))$ denotam os produtos internos em $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ respectivamente.

Pelo teorema de Carathéodory[1] o problema acima possui solução local em um intervalo $[0, t_m)$, $t_m < T$. As estimativas a seguir permitirão estender a solução à todo

[1]Teorema 2.15, página 15

intervalo $[0, T]$.

Etapa 2: Estimativas

Multiplicando 3.2 por $g_i^m(t)$ e somando de $j = 1$ até m obtemos

$$(z_t^m(t), z^m(t)) + ((z^m(t), z^m(t))) + (az^m(t), z^m(t)) + (\vec{b}\nabla z^m(t), z^m(t)) = (u, z^m(t)).$$

Da desigualdade de Holder vem que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z^m(t)|^2 + ||z^m(t)||^2 &= (u, z^m(t)) - (az^m(t), z^m(t)) - (\vec{b}\nabla z^m(t), z^m(t)) \\
&\leq |u|.|z^m(t)| + |a|_{L^\infty(\Omega)}|z^m(t)|.|z_m(t)| + |\vec{b}|_{L^\infty(\Omega)}|\nabla z^m(t)|.|z^m(t)|
\end{aligned}$$

onde $| \,.\, |$ e $|| \,.\, ||$ denotam as normas em $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ respectivamente.

Do fato que $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ para quaisquer dois números reais a e b não negativos, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z^m(t)|^2 + ||z^m(t)|| &\leq \frac{1}{2}|u|^2 + \frac{1}{2}|z^m(t)|^2 + \frac{|a|^2_{L^\infty(\Omega)}}{2}|z^m(t)|^2 + \frac{1}{2}|z^m(t)|^2 \\
&\quad + \frac{|\vec{b}|^2_{L^\infty(\Omega)}}{2}|\nabla z_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|z^m(t)|^2 \\
&= \frac{1}{2}|u|^2 + \left[1 + \frac{|a|^2_{L^\infty(\Omega)}}{2} + \frac{|\vec{b}|^2_{L^\infty(\Omega)}}{2}\right]|z^m(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla z^m(t)| \\
&= \frac{1}{2}|u|^2 + \frac{c_1}{2}|z_m(t)|^2 + \frac{1}{2}||z_m(t)||^2
\end{aligned}$$

onde

$$c_1 = 2 + |a|^2_{L^\infty(\Omega)} + |\vec{b}|^2_{L^\infty(\Omega)}$$

é uma constante pois $a \in L^\infty(Q)$ e $\vec{b} \in [L^\infty(Q)]^n$. Em resumo temos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z^m(t)|^2 + \frac{1}{2}||z^m(t)||^2 \leq \frac{1}{2}|u|^2 + \frac{c_1}{2}|z^m(t)|^2,$$

ou melhor,

$$\frac{d}{dt}|z^m(t)|^2 + ||z^m(t)||^2 \leq |u|^2 + c_1|z^m(t)|^2. \tag{3.3}$$

Como $||z^m(t)|| \geq 0$ então

$$\frac{d}{dt}|z^m(t)|^2 \leq |u|^2 + c_1|z^m(t)|^2.$$

Integrando de 0 a t, $t \leq t_m$, vem que

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{ds}|z^m(s)|^2 ds &\leq \int_0^t |u(s)|^2 ds + \int_0^t c_1|z^m(s)|^2 ds \\ &\leq |u|_{L^2(Q)} + \int_0^t c_1|z^m(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

Como

$$\int_0^t \frac{d}{ds}|z^m(s)|^2 ds = |z^m(t)|^2 - |z^m(0)|^2 = |z^m(t)|^2 - |z_0^m|$$

então

$$|z^m(t)|^2 \leq |z_0^m|^2 + |u|^2_{L^2(Q)} + \int_0^t c_1|z^m(s)|^2 ds.$$

Da desigualdade de Gronwall[2] vem que

$$\begin{aligned} |z^m(t)|^2 &\leq \left[|z_0^m|^2 + |u|^2_{L^2(Q)}\right].e^{\int_0^t c_1 dt} \\ &= \left[|z_0^m|^2 + |u|^2_{L^2(Q)}\right].e^{tc_1} \\ &\leq \left[|z_0^m|^2 + |u|^2_{L^2(Q)}\right].e^{Tc_1}, \end{aligned}$$

isto é,

$$|z^m(t)|^2 \leq \left[|z_0^m|^2 + |u|^2_{L^2(Q)}\right].e^{Tc_1},\ \forall t \in [o, t_m];\ t_m < T$$

Assim podemos prolongar[3] a solução a todo intervalo $[0, T]$ e além disso,

$$|z^m|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = \sup_{t\in[0,T]} \text{ess } |z^m(t)|^2 \leq \left[|z_0^m|^2 + |u|^2_{L^2(Q)}\right].e^{Tc_1} < \infty,$$

isto é,

$$z^m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \tag{3.4}$$

[2]Proposição 2.18, página 16.
[3]Ver corolário 2.16, página 16

Integrando 3.3 de 0 a T vem que

$$|z^m(T)|^2 + \int_0^T ||z^m(t)||^2 dt \leq |z_0^m| + |u|_{L^2(Q)} + c_1 \int_0^T |z^m(t)|^2 dt.$$

Como $|z^m(T)|^2 \geq 0$ e $\displaystyle\int_0^T ||z^m(t)||^2 dt = ||z^m||^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}$ então

$$||z^m||^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq |z_0^m|^2 + |u|^2_{L^2(Q)} + c_1 |z^m|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{3.5}$$

Levando em conta que $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^2(0,T;L^2(\Omega))$ vem que

$$\begin{aligned} |z^m|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\leq c_2 |z^m|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\leq c_2 \left[|z_0^m|^2 + |u|^2_{L^2(Q)} \right] . e^{Tc_1}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

De 3.5 e 3.6 vem que

$$||z^m||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq \left[|z_0^m|^2 + |u|^2_{L^2(Q)} \right] \left[1 + c_2 e^{Tc_1} \right] < \infty,$$

ou seja,

$$z^m \text{ é limitada em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{3.7}$$

Das limitações 3.4 e 3.7, passando a uma subsequência se necessário,

$$z^m \overset{*}{\rightharpoonup} z \text{ fraco } * \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.8}$$

$$z^m \rightharpoonup z \text{ fraco em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{3.9}$$

De fato, como $L^1(0,T;L^2(\Omega))$ é um espaço de Banach separável e por 3.4, $\{z^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) = (L^1(0,T;L^2(\Omega)))'$, então[4] existe uma subsequência, a qual ainda denotaremos por $\{z^m\}_{m\in\mathbb{N}}$, que converge fraco $*$ para z, o que justifica 3.8.

Para a convergência 3.9, observe que $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ é um espaço de Banach reflexivo e por 3.7 a sequência $\{z^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Logo[5] existe uma subsequência, ainda denotada por $\{z^m\}_{m\in\mathbb{N}}$, que converge fraco para z.

[4]corolário 2.12, página 14
[5]teorema 2.13, página 14

Etapa 3: Passagem ao Limite

Fixando j, $j \leq m$, multiplicando o problema aproximado 3.2 por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando-o de 0 a T obtemos:

$$\int_0^T (z_t^m(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((z^m(t), w_j))\theta(t)dt + \int_0^T (az^m(t), w_j)\theta(t)dt \\ + \int_0^T (\vec{b}\nabla z^m(t), w_j)\theta(t)dt = \int_0^T (u(t), w_j)\theta(t)dt.$$

Integrando por partes e usando que $\theta(0) = \theta(T) = 0$ vem que

$$\int_0^T (z^m(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T ((z^m(t), w_j))\theta(t)dt + \int_0^T (az^m(t), w_j)\theta(t)dt \\ + \int_0^T (\vec{b}\nabla z^m(t), w_j)\theta(t)dt = \int_0^T (u(t), w_j)\theta(t)dt. \tag{3.10}$$

ou ainda,

$$-\int_0^T (z^m(t), w_j\theta'(t))dt + \int_0^T ((z^m(t), w_j\theta(t)))dt + \int_0^T (az^m(t), w_j\theta(t))dt \\ + \int_0^T (\vec{b}\nabla z^m(t), w_j\theta(t))dt = \int_0^T (u(t), w_j\theta(t))dt, \tag{3.11}$$

De 3.8 obtemos:

$$\int_0^T (z^m(t), w_j\theta'(t))dt \longrightarrow \int_0^T (z(t), w_j\theta'(t))dt \tag{3.12}$$

$$\int_0^T (az^m(t), w_j\theta(t))dt \longrightarrow \int_0^T (az(t), w_j\theta(t))dt \tag{3.13}$$

De 3.9 vem que:

$$\int_0^T ((z^m(t), w_j\theta(t)))dt \longrightarrow \int_0^T ((z(t), w_j\theta(t)))dt \tag{3.14}$$

$$\int_0^T (\vec{b}\nabla z^m(t), w_j\theta(t))dt \longrightarrow \int_0^T (\vec{b}\nabla z(t), w_j\theta(t))dt \tag{3.15}$$

Assim, das convergências 3.12, 3.13, 3.14, 3.15 e da equação 3.11 resulta que

$$-\int_0^T (z(t), w_j\theta'(t))dt + \int_0^T ((z(t), w_j\theta(t)))dt + \int_0^T (az(t), w_j\theta(t))dt$$
$$+\int_0^T (\vec{b}\nabla z(t), w_j\theta(t))dt = \int_0^T (u(t), w_j\theta(t))dt.$$

Como o conjunto das combinações lineares finitas dos $w_j's$ é denso em $H_0^1(\Omega)$, então

$$-\int_0^T (z(t), v\theta'(t))dt + \int_0^T ((z(t), v\theta(t)))dt + \int_0^T (az(t), v\theta(t))dt$$
$$+\int_0^T (\vec{b}\nabla z(t), v\theta(t))dt = \int_0^T (u(t), v\theta(t))dt. \tag{3.16}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Como $\{v\theta; v \in H_0^1(\Omega) \text{ e } \theta \in \mathcal{D}(0,T)\}$ é denso em $\mathcal{D}(0,T;H_0^1(\Omega)$ que por sua vez é denso em $X = \{\psi \in W(0,T;H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)); \psi(0) = \psi(T) = 0\}$, por integração por partes temos:

$$\int_0^T (z_t(t), \psi(t))dt + \int_0^T ((z(t), \psi(t)))dt + \int_0^T (az(t), \psi(t))dt$$
$$+\int_0^T (\vec{b}\nabla z(t), \psi(t))dt = \int_0^T (u(t), \psi(t))dt. \tag{3.17}$$

para todo $\psi \in X = \{\psi \in W(0,T;H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)); \psi(0) = \psi(T) = 0\}$ e deste modo z já satisfaz um dos requisitos da solução fraca de 3.1.

No que segue mostraremos que $z \in W(0,T;H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$. Com efeito, da equação 3.16 vem que

$$-\int_0^T (z(t), v)\theta'(t)dt + \int_0^T \langle -\Delta z(t), v\rangle\, \theta(t)dt + \int_0^T (az(t), v)\theta(t)dt$$
$$+\int_0^T (\vec{b}\nabla z(t), v)\theta(t)dt = \int_0^T (u(t), v)\theta(t)dt. \tag{3.18}$$

Utilizando propriedades da integral de Bochner, se X um espaço de Hilbert, X' seu dual topológico e se $f \in L^2(0,T;X')$, então

$$\langle f, \theta \rangle = \int_0^T f(t)\theta(t)dt \ \in X', \ \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T),$$

de onde vem que

$$\begin{aligned} \langle \langle f, \theta \rangle, \varphi \rangle &= \left\langle \int_0^T f(t)\theta(t)dt, \varphi \right\rangle \\ &= \int_0^T \langle f(t), \varphi \rangle \, \theta(t)dt, \ \forall \varphi \in X, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle \langle f, \theta \rangle \varphi \rangle = \int_0^T \langle f(t), \varphi \rangle \, \theta(t)dt.$$

Assim, considerando $X = H_0^1(\Omega)$ e $\varphi = v \in H_0^1(\Omega)$, de 3.18 temos que:

$$\langle \langle z_t, \theta \rangle, v \rangle + \langle \langle -\Delta z, \theta \rangle, v \rangle + \langle \langle az, \theta \rangle, v \rangle + \left\langle \left\langle \vec{b}\nabla z, \theta \right\rangle, v \right\rangle = \langle \langle u, \theta \rangle, v \rangle,$$

isto é,

$$\left\langle \langle z_t, \theta \rangle + \langle -\Delta z, \theta \rangle + \langle az, \theta \rangle + \left\langle \vec{b}\nabla z, \theta \right\rangle - \langle u, \theta \rangle, v \right\rangle = 0, \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

De onde vem que

$$\langle z_t, \theta \rangle + \langle -\Delta z, \theta \rangle + \langle az, \theta \rangle + \left\langle \vec{b}\nabla z, \theta \right\rangle - \langle u, \theta \rangle = 0 \text{ em } H^{-1}(\Omega),$$

ou ainda,

$$\left\langle z_t - \Delta z + az + \vec{b}\nabla z - u, \theta \right\rangle = 0 \text{ em } H^{-1}(\Omega),$$

o que implica que

$$z_t - \Delta z + az + \vec{b}\nabla z - u = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

isto é,

$$z_t = \Delta z - az - \vec{b}\nabla z + u \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Como
$$\Delta z - az - \vec{b}\nabla z + u \ \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$
então, de 3.1,
$$z_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$
isto é,
$$z_t - \Delta z + az + \vec{b}\nabla z = u \text{ em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$
Disso e da convergencia 3.9 temos
$$z \in W(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)). \tag{3.19}$$

Etapa 4: Dados inicias

Pelo teorema 2.14 o espaço $W(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega))$ tem imersão contínua em $C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$. Logo
$$z \in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$$
e portanto faz sentido calcular $z(x,0)$ e $z(.,0) \in L^2(\Omega)$. Mostraremos que $z(x,0) = z_0(x)$ em Ω. Para tal multiplicamos a equação aproximada 3.2 por $\theta \in C^1\left([0,T]\right)$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Após isso, a integramos de 0 a T obtendo
$$\underbrace{\int_0^T (z_t^m(t),w_j)\theta(t)dt}_{I_1} + \int_0^T ((z^m(t),w_j))\theta(t)dt + \int_0^T (az^m(t),w_j)\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T (\vec{b}\nabla z^m(t),w_j)\theta(t)dt = \int_0^T (u,w_j)\theta(t)dt. \tag{3.20}$$

Integrando I_1 por partes, temos:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^T (z_t^m(t), w_j)\theta(t)dt \\
&= -\int_0^T (z^m(t), w_j)\theta'(t)dt + (z^m(t), w_j)\theta(t)\Big|_0^T \\
&= -\int_0^T (z^m(t), w_j)\theta'(t)dt - (z^m(0), w_j) \\
&= -\int_0^T (z^m(t), w_j)\theta'(t) - (z_0^m, w_j). \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

Da equação 3.20 e de 3.21 vem que

$$
\begin{aligned}
-\int_0^T (z^m(t), w_j)\theta'(t) - (z_0^m, w_j) + \int_0^T ((z^m(t), w_j))\theta(t)dt + \int_0^T (az^m(t), w_j)\theta(t)dt \\
+ \int_0^T (\vec{b}\nabla z^m(t), w_j)\theta(t)dt = \int_0^T (u, w_j)\theta(t)dt. \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

Usando as convergencias 3.8 e 3.9 e a hipótese que $z_0^m \longrightarrow z_0$ em $L^2(\Omega)$, podemos tomar o limite na equação 3.22 e obter

$$
\begin{aligned}
-\int_0^T (z(t), w_j)\theta'(t) - (z_0, w_j) + \int_0^T ((z(t), w_j))\theta(t)dt + \int_0^T (az(t), w_j)\theta(t)dt \\
+ \int_0^T (\vec{b}\nabla z(t), w_j)\theta(t)dt = \int_0^T (u, w_j)\theta(t)dt.
\end{aligned}
$$

Levando em conta que o conjunto formado pelas combinações lineares finitas dos $w_j's$ é denso em $H_0^1(\Omega)$ resulta que

$$
\begin{aligned}
-\int_0^T (z(t), v)\theta'(t) - (z_0, v) = -\int_0^T ((z(t), v))\theta(t)dt - \int_0^T (az(t), v)\theta(t)dt \\
-\int_0^T (\vec{b}\nabla z(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T (u, v)\theta(t)dt, \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

Por outro lado, como

$$z_t = \Delta z - az - \vec{b}\nabla z + u \ \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

então

$$\int_0^T \langle z_t(t), v\rangle\, \theta(t)dt = -\int_0^T ((z(t), v))\theta(t)dt - \int_0^T (az(t), v)\theta(t)dt$$
$$-\int_0^T (\vec{b}\nabla z(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T (u, v)\theta(t)dt, \tag{3.24}$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$ e θ definida como acima. De 3.23 e 3.24 vem que

$$-\int_0^T (z(t), v)\theta'(t)dt - (z_0, v) - \int_0^T \langle z_t(t), v\rangle\, \theta(t)dt = 0,$$

isto é,

$$-\int_0^T \frac{d}{dt}\left[(z(t), v)\theta(t)\right] dt = (z_0, v),$$

ou seja,

$$-(z(t), v)\theta(t)\Big|_0^T = (z_0, v)$$

e portanto

$$(z(0), v) = (z_0, v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Do fato que $H_0^1(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$ chegamos que

$$z(0) = z_0 \text{ quase sempre em } \Omega. \tag{3.25}$$

De 3.17, 3.19 e 3.25 segue que o problema 3.1 tem solução fraca segundo a definição 3.1

Etapa 5: Unicidade

Suponha z_1 e z_2 duas soluções fracas do problema linear. Defina $z = z_1 - z_2$. Da definição de solução fraca e da linearidade do sistema vem que

$$z_t - \Delta z + az + \vec{b}\nabla z = 0 \text{ em } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Multiplicando por $z \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ e integrando em Ω obtemos:

$$\int_\Omega z_t(t)\ dx - \int_\Omega \Delta z(t).z(t)\ dx + \int_\Omega az(t)z(t)\ dx + \int_\Omega \vec{b}\nabla z(t).z(t)\ dx = 0,$$

o que implica que

$$\langle z_t(t), z(t)\rangle + ((z(t), z(t))) + (az(t), z(t)) + (\vec{b}z(t), z(t)) = 0.$$

Disso temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z(t)|^2 + ||z(t)||^2 &\leq |a|_{L^\infty(\Omega)}|z(t)|^2 + |\vec{b}|_{[L^\infty(\Omega)]^n}|\nabla z(t)|^2.|z(t)|^2 \\ &\leq |a|_{L^\infty(\Omega)}|z(t)|^2 + \frac{1}{2}||z(t)||^2 + |\vec{b}|^2_{[L^\infty(\Omega)]^n}|z(t)|^2,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z(t)|^2 + ||z(t)||^2 \leq \left(|a|_{L^\infty(\Omega)} + |\vec{b}|^2_{[L^\infty(\Omega)]^n}\right)|z(t)|^2$$

.

Integrando em $(0,t)$, $t \in (0,T)$, vem que

$$\frac{d}{dt}|z(t)|^2 + \int_0^t ||z(s)||^2\, ds \leq |z(0)|^2 + \int_0^t \left(|a|_{L^\infty(\Omega)} + |\vec{b}|^2_{[L^\infty(\Omega)]^n}\right)|z(s)|^2\, ds.$$

Como $\displaystyle\int_0^t ||z(s)||^2\, ds \geq 0$, $z(x,0) = 0$ e $\left(|a|_{L^\infty(\Omega)} + |\vec{b}|_{[L^\infty(\Omega)]^n}\right) \in L^\infty(0,T)$ então, por Gronwall,

$$|z(t)|^2 \leq 0.$$

Logo $|z(t)|^2 = ||z(t)||^2 = 0$ e, portanto,

$$z \equiv 0, \ \forall t \in [0,T].$$

□

3.2 Existência e Unicidade de Solução Forte

A solução forte do problema linear 3.1 é amplamente utilizada em todo o trabalho. Para evitar repetições, sempre que julgarmos adequado, faremos referência aos resultados do teorema anterior, já que a demonstração segue o mesmo roteiro.

Definição 3.3 *Dizemos que $z = z(x,t)$ é uma* solução forte *do problema 3.1 se:*

i) $z \in W(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap H^2(\Omega), L^2(\Omega)$;

ii) $z_t - \Delta z + az + \vec{b}\nabla z = u$ *q.s. em* Q *e*

iii) $z(0) = z_0$ *em* Ω.

Teorema 3.4 *Dado $u \in L^2(Q)$ e $z_0 \in H_0^1(\Omega)$ então existe única $z = z(x,t)$ solução forte de 3.1 e, além disso, $z \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))$.*

Demonstração:

Consideremos uma base especial de $H_0^1(\Omega)$, conforme feito na etapa 1 do teorema anterior, página 22. Também, como antes, definimos

$$z^m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_i^m(t) w_i \ \in V_m$$

e consideremos o problema aproximado

$$\left| \begin{array}{l} (z_t^m(t), w_j)_{L^2(\Omega)} + ((z^m(t), w_j))_{H_0^1(\Omega)} + (az^m(t), w_j)_{L^2(\Omega)} + (\vec{b}\nabla z_m(t), w_j)_{L^2(\Omega)} = (u, w_j)_{L^2(\Omega)} \\ z^m(x,0) = z_0^m(x); \ z_0^m \longrightarrow z_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \tag{3.26}$$

que pelo teorema de Carathéodory[6] possui solução local em um intervalo $[0, t_m]$, $t_m < T$.

Como $z_0 \in H_0^1(\Omega)$, todos os resultados obtidos no teorema 3.2 são válidos para esse caso. Em particular, podemos estender[7] a solução a todo intervalo $[0,T]$ e utilizar as convergências 3.8 e 3.9.

Etapa 2: Estimativa 1

Multiplicando o problema aproximado 3.2 por $\left(g_j^m\right)'(t)$ e somando com j variando de 1 até m obtemos:

$$\begin{aligned} (z_t^m(t), z_t^m(t))_{L^2(\Omega)} + ((z^m(t), z_t^m(t)))_{H_0^1(\Omega)} + (az^m(t), z_t^m(t))_{L^2(\Omega)} \\ +(\vec{b}\nabla z^m(t), z_t^m(t))_{L^2(\Omega)} = (u, z_t^m(t))_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

[6] Teorema 2.15, página 15.
[7] Corolário 2.16, página 16.

De onde vem que

$$\begin{aligned} & |z_t^m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||z^m(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} \\ = \; & (u, z_t^m(t))_{L^2(\Omega)} - (az^m(t), z_t^m(t))_{L^2(\Omega)} - (\vec{b}\nabla z^m(t), z_t^m(t))_{L^2(\Omega)} \\ \leq \; & |u|_{L^2(\Omega)}|z_t^m(t)|_{L^2(\Omega)} + |a|_{L^\infty(\Omega)}|z^m(t)|_{L^2(\Omega)}|z_t^m(t)|_{L^2(\Omega)} + |\vec{b}|_{L^\infty(\Omega)}|\nabla z^m(t)|_{L^2(\Omega)}|z_t^m(t)|. \end{aligned}$$

Como $ab \leq \frac{1}{n}a^2 + nb^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e a e b reais não negativos, tomando $n = 6$ e aplicando à estimativa acima obtemos:

$$\begin{aligned} & |z_t^m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||z^m(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} \\ \leq \; & 6|u|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{6}|z_t^m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + 6|a|^2_{L^\infty(\Omega)}|z^m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{6}|z_t^m(t)|^2_{L^2(\Omega)} \\ & +6|\vec{b}|^2_{L^\infty(\Omega)}|\nabla z^m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{6}|z_t^m(t)|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (3.27) \\ = \; & 6|u|^2_{L^2(\Omega)} + 6|a|^2_{L^\infty(\Omega)}|z^m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + 6|\vec{b}|^2_{L^\infty(\Omega)}||z^m(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{1}{2}|z_t^m(t)|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Do fato que $z^m(t) \in H_0^1(\Omega)$ para todo $t \in (0, T)$ então, $|z^m(t)|_{L^2(\Omega)} \leq c_3||z^m(t)||_{H_0^1(\Omega)}$. Aplicando isso à desigualdade 3.27, vem que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}|z_t^m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||z^m(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} \\ \leq \; & 6|u|^2_{L^2(\Omega)} + \left[6c_3|a|^2_{L^\infty(\Omega)} + 6|\vec{b}|^2_{L^\infty(\Omega)}\right]||z^m(t)||^2_{H_0^1(\Omega)}. \qquad (3.28) \end{aligned}$$

Considerando

$$c_4 = 2\left[6c_3|a|^2_{L^\infty(\Omega)} + 6|\vec{b}|^2_{L^\infty(\Omega)}\right],$$

multiplicando 3.28 por 2 e levando em conta que $|z_t^m(t)|^2_{L^2(\Omega)} \geq 0$ temos que

$$\frac{d}{dt}||z^m(t)||_{H_0^1(\Omega)} \leq 12|u|^2_{L^2(\Omega)} + c_4||z^m(t)||^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Integrando esta última desigualdade de 0 a t, $t \in [0, T]$ vem que

$$||z^m(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} \leq ||z^m(0)||^2_{H_0^1(\Omega)} + 12|u|_{L^2(Q)} + \int_0^t c_4||z^m(s)||^2_{H_0^1(\Omega)}ds.$$

Por Gronwall[8]

$$
\begin{aligned}
||z^m(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq \left[||z^m(0)||^2_{H_0^1(\Omega)} + 12|u|_{L^2(Q)}\right].e^{\int_0^t c_4 ds} \\
&\leq \left[||z^m(0)||^2_{H_0^1(\Omega)} + 12|u|_{L^2(Q)}\right].e^{Tc_4} \qquad (3.29) \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Tomando o supremo essencial com $t \in [0,T]$ vem que

$$z^m \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \qquad (3.30)$$

isto é,

$$z^m \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Multiplicando 3.28 por 2 e integrando de 0 a T temos:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T |z_t^m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + ||z^m(T)||^2_{H_0^1(\Omega)} \\
\leq\ & ||z^m(0)||^2_{H_0^1(\Omega)} + 12|u|^2_{L^2(Q)} + \int_0^T c_4||z^m(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} dt \\
\leq\ & ||z^m(0)||^2_{H_0^1(\Omega)} + 12|u|^2_{L^2(Q)} + c_4\int_0^T \left[||z^m(0)||^2_{H_0^1(\Omega)} + 12|u|^2_{L^2(Q)}\right].e^{Tc_4} dt \\
=\ & \left[||z^m(0)||^2_{H_0^1(\Omega)} + 12|u|^2_{L^2(Q)}\right].\left[1 + c_4Te^{Tc_4}\right] \qquad (3.31) \\
<\ & \infty.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$z_t^m \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \qquad (3.32)$$

ou seja,

$$z_t^m \in L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Etapa 2: Estimativa 2

[8] Proposição 2.18, página 16.

Multiplicando o problema aproximado 3.2 por $g_j^m(t)\lambda_j$ e somando com j variando de 1 até m temos:

$$\begin{aligned}(z_t^m(t), -\Delta z^m(t)) + ((z^m(t), -\Delta z^m(t))) + (az^m(t), -\Delta z^m(t))\\ +(\vec{b}\nabla z^m(t), -\Delta z^m(t)) = (u, -\Delta z^m(t)),\end{aligned}$$

de onde vem que

$$\begin{aligned}((z_t^m(t), z^m(t))) + (-\Delta z^m(t), -\Delta z^m(t)) + (az^m(t), -\Delta z^m(t))\\ +(\vec{b}\nabla z^m(t), -\Delta z^m(t)) = (u, -\Delta z^m(t)),\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||z^m(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} + |\Delta z^m(t)|^2_{L^2(\Omega)}\\ =\;& (u, -\Delta z^m(t)) - (az^m(t), -\Delta z^m(t)) - (\vec{b}\nabla z^m(t), -\Delta z^m(t)) \qquad (3.33)\\ \leq\;& |u|_{L^2(\Omega)}|\Delta z^m(t)|_{L^2(\Omega)} + |a|_{L^\infty(\Omega)}|z^m(t)|_{L^2(\Omega)}|\Delta z^m(t)|_{L^2(\Omega)}\\ &+|\vec{b}|_{L^\infty(\Omega)}|\nabla z^m(t)|_{L^2(\Omega)}|\Delta z^m(t)|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Levando em conta que $ab \leq \frac{1}{n}a^2 + nb^2$, para $n \in \mathbb{N}$ e a e b reais não negativos, segue que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||z^m(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} + |\Delta z^m(t)|^2_{L^2(\Omega)}\\ \leq\;& 6|u|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{6}|\Delta z^m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + 6|a|^2_{L^\infty(\Omega)}|z^m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{6}|\Delta z^m(t)|^2_{L^2(\Omega)}\\ &+6|\vec{b}|^2_{L^\infty(\Omega)}|\nabla z^m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{6}|\Delta z^m(t)|^2_{L^2(\Omega)}\\ \leq\;& 6|u|^2_{L^2(\Omega)} + 6|a|^2_{L^\infty(\Omega)}|z^m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + 6|\vec{b}|^2_{L^\infty(\Omega)}||z^m(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{1}{2}|\Delta z^m(t)|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}||z^m(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} + |\Delta z^m(t)|^2_{L^2(\Omega)}\\ \leq\;& 12|u|^2_{L^2(\Omega)} + 12|a|^2_{L^\infty(\Omega)}|z^m(t)|^2_{L^2(\Omega)} + 12|\vec{b}|^2_{L^\infty(\Omega)}||z^m(t)||^2_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Integrando em $[0,t],\ t \leq T$, vem que

$$\begin{aligned} & ||z^m(t)||^2_{H^1_0(\Omega)} + \int_0^t |\Delta z^m(s)|^2_{L^2(\Omega)} ds \qquad (3.34) \\ \leq \quad & |z^m_0|^2_{H^1_0(\Omega)} + 12|u|^2_{L^2(\Omega)} + 12|a|^2_{L^\infty(Q)} \int_0^t |z^m(s)|^2_{L^2(\Omega)} ds + |\vec{b}|^2_{L^\infty(Q)} \int_0^t ||z^m(s)||^2 ds \end{aligned}$$

e de 3.30 temos que

$$||z^m(t)||^2_{H^1_0(\Omega)} + \int_0^t |\Delta z^m(s)|^2_{L^2(\Omega)} ds \text{ é limitada, } \forall t \leq T$$

isto é,

$$z^m \in L^2(0,T; H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)). \qquad (3.35)$$

De 3.30, 3.32 e 3.35, passando a uma subsequência, se necessário,

$$z^m \overset{*}{\rightharpoonup} z \text{ fraco em } L^\infty(0,T; H^1_0(\Omega)), \qquad (3.36)$$

$$z^m_t \rightharpoonup z_t \text{ fraco em } L^2(0,T; L^2(\Omega)), \qquad (3.37)$$

$$z^m \rightharpoonup z \text{ fraco em } L^2(0,T; H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \qquad (3.38)$$

cujas demonstrações são análogas àquelas da solução fraca, página 25.

Etapa 3: Passagem ao limite

De modo análogo à etapa 3 do teorema 3.2 obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T (z_t(t), w_j)_{L^2(\Omega)} \theta(t) dt + \int_0^T ((z(t), w_j))_{H^1_0(\Omega)} \theta(t) dt + \int_0^T (az(t), w_j)_{L^2(\Omega)} \theta(t) dt \\ + \int_0^T (\vec{b} \nabla z(t), w_j)_{L^2(\Omega)} \theta(t) dt = \int_0^T (u, w_j)_{L^2(\Omega)} \theta(t) dt. \end{aligned}$$

Como o conjunto das combinações lineares finitas dos $w_j's$ é denso em $H^1_0(\Omega)$, da igualdade acima temos:

$$\int_0^T (z_t(t),v)_{L^2(\Omega)}\theta(t)dt + \int_0^T ((z(t),v))_{H_0^1(\Omega)}\theta(t)dt + \int_0^T (az(t),v)_{L^2(\Omega)}\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T (\vec{b}\nabla z(t),v)_{L^2(\Omega)}\theta(t)dt = \int_0^T (u,v)_{L^2(\Omega)}\theta(t)dt \quad (3.39)$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

De 3.38 temos que

$$z(t) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

e portanto

$$\Delta z(t) \in L^2(\Omega) \quad (3.40)$$

Deste modo, de 3.39 e 3.40 vem que

$$\int_0^T (z_t(t) - \Delta z(t) + az(t) + \vec{b}\nabla z(t) - u, v)_{L^2(\Omega)}\theta(t)dt = 0$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Em particular,

$$\int_0^T (z_t(t) - \Delta z(t) + az(t) + \vec{b}\nabla z(t) - u, \phi)_{L^2(\Omega)}\theta(t)dt = 0$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

Como $\{\phi\theta; \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)\}$ é denso em $\mathcal{D}(Q)$ então

$$\int_0^T (z_t(t) - \Delta z(t) + az(t) + \vec{b}\nabla z(t) - u, \psi(t))_{L^2(\Omega)}dt = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(Q),$$

ou seja,

$$z_t - \Delta z + az + \vec{b}\nabla z - u = 0 \text{ q.s. em } Q$$

e portanto

$$z_t - \Delta z + az + \vec{b}\nabla z = u \text{ q.s. em } Q.$$

Etapa 4: Dados iniciais

Pode ser feito de modo análogo à etapa 4, (página 29), do teorema 3.2.

Etapa 5: Unicidade

Sejam z^1 e z^2 soluções fortes do problema em questão. Defina $z = z^1 - z^2$, então, devido a linearidade do problema, temos:

$$\left| \begin{array}{ll} z_t - \Delta z + az + \vec{b}\nabla z = 0 & \text{q.s. em } Q \\ z(x,0) = 0 & \text{em } \Omega \\ z \in W(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), L^2(\Omega)). & \end{array} \right.$$

Multiplicando por z e integrando em Ω obtemos:

$$\int_\Omega z_t(t)z(t)dx - \int_\Omega \Delta z(t)z(t)dx + \int_\Omega az(t)z(t)dx + \int_\Omega \vec{b}\nabla z(t)z(t)dx = 0,$$

ou seja,

$$(z_t(t), z(t)) + ((z(t), z(t))) + (az(t), z(t)) + (\vec{b}\nabla z(t), z(t)) = 0,$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z(t)|^2_{L^2(\Omega)} + ||z(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} = -(az(t), z(t))_{L^2(\Omega)} - (\vec{b}\nabla z(t), z(t))_{L^2(\Omega)}.$$

Procedendo de forma análoga a etapa 2, vem que

$$\frac{d}{dt}|z(t)|^2_{L^2(\Omega)} + ||z(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \left[1 + |a|^2_{L^\infty(\Omega)} + |\vec{b}|^2_{L^\infty(\Omega)}\right] |z(t)|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Denotando

$$c_5 = \left[1 + |a|^2_{L^\infty(\Omega)} + |\vec{b}|^2_{L^\infty(\Omega)}\right]$$

e integrando de 0 a t, $t \in [0,T]$, segue que

$$|z(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t ||z(s)||^2_{H_0^1(\Omega)} ds \leq \int_0^t c_5 |z(s)|^2_{L^2(\Omega)} ds + |z(0)|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.41}$$

Como $\displaystyle\int_0^t ||z(s)||_{H_0^1(\Omega)} ds \geq 0$ e $|z(0)|_{L^2(\Omega)} = 0$, por Gronwall[9], temos que

$$\begin{aligned} |z(t)|^2_{L^2(\Omega)} &\leq 0.e^{\int_0^t c_4 ds} \\ &\leq 0.e^{Tc_4} \\ &= 0, \ \forall t \in [0,T], \end{aligned}$$

isto é,

$$|z(t)|^2_{L^2(\Omega)} = 0, \ \forall t \in [0,T].$$

Logo, substituíndo na inequação 3.41,

$$||z(t)||_{H_0^1(\Omega)} = |z(t)|_{L^2(\Omega)} = 0 \ \forall t \in [0,T],$$

donde vem que

$$z^1 = z^2.$$

$\square$

Observação 3.5 *Seguindo o mesmo roteiro da demonstração do teorema acima, mas para o problema*

$$\left| \begin{array}{ll} z_t - \Delta z = u & em \ Q \\ z(x,0) = z_0(x) & em \ \Omega \end{array} \right. , \tag{3.42}$$

então a equação 3.33 será da forma

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||z^m(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} + |\Delta z^m(t)|^2_{L^2(\Omega)} = (u, -\Delta z^m(t)) \tag{3.43}$$

e a desigualdade 3.34 será da forma

$$||z^m(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_0^t |\Delta z^m(s)|^2_{L^2(\Omega)} ds \leq |z_0^m|^2_{H_0^1(\Omega)} + |u|^2_{L^2(Q)}. \tag{3.44}$$

para todo $t \in [0,T]$.

[9]página 16.

Corolário 3.6 *Nas mesmas hipóteses do teorema 3.4 tem-se que*

$$||z||^2_{C([0,T];H^1_0(\Omega))} \leq C_T \left(||z_0||^2 + \int_0^T |u(s)|^2_{L^2(\Omega)} ds \right)$$

para z solução forte de 3.1.

Demonstração: De fato, como $W(0,T;H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega), L^2(\Omega))$ tem imersão contínua em $C([0,T];H^1_0(\Omega))$ vem que

$$\begin{aligned}
||z||_{C([0,T];H^1_0(\Omega))} &\leq C||z||_{W(0,T;H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))} \\
&= C\left(||z||_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} + ||z||_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + ||z_t||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \right) \\
&\leq \liminf_{m\to\infty} C\left(||z^m||_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} + ||z^m||_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + ||z^m_t||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \right) \\
&\overset{*}{\leq} \liminf_{m\to\infty} C_T \left(||z^m_0||^2 + \int_0^T |u(s)|^2_{L^2(\Omega)} ds \right) \\
&= C_T \left(||z_0||^2 + \int_0^T |u(s)|^2_{L^2(\Omega)} ds \right),
\end{aligned}$$

onde a desigualdade em $*$ provem das estimativas 3.29, 3.31 e 3.34 e assim provamos o corolário.

□

3.3 Solução Ultrafraca

A busca pela solução ultrafraca ou solução por transposição é motivada pelo teorema da controlabilidade aproximada do problema linear, na seção seguinte, o qual auxilia a prova do resultado principal desse trabalho.

Consideremos o seguinte problema:

$$\left| \begin{array}{ll} z_t - \Delta z + az + \vec{b}\nabla z = u & \text{em } Q \\ z(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma = \partial\Omega \times (0,T) \\ z(x,0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \tag{3.45}$$

No que segue procederemos heuristicamente em busca de uma definição para solução por transposição do problema 3.45

Multiplicando 3.45 por $p = p(x,t)$ e integrando em Q obtemos:

$$\int_Q z_t.p\ dxdt - \int_Q \Delta z.p\ dxdt + \int_Q az.p\ dxdt + \int_Q \vec{b}\nabla z.p\ dxdt = \int_Q u.p\ dxdt. \quad (3.46)$$

Integrando por partes a primeira parcela da equação acima vem

$$\begin{aligned}\int_Q z_t.p\ dxdt &= -\int_Q z.p_t\ dxdt + \int_\Omega \left[z.p\Big|_0^T\right. dx \\ &= -\int_Q z.p_t\ dxdt + \int_\Omega z(x,T)p(x,T)dx - \int_\Omega z(x,0)p(x,0)dx\end{aligned}$$

e usando que $z(x,0) = 0$ em Ω resulta que

$$\int_Q z_t.p\ dxdt = -\int_Q z.p_t\ dxdt + \int_\Omega z(x,T)p(x,T)dx \quad (3.47)$$

Note, também, que ao aplicar duas vezes a fórmula de Green na segunda parcela de 3.46 obtemos:

$$-\int_Q \Delta z.p\ dxdt = -\int_Q z.\Delta p\ dxdt + \int_\Sigma \frac{\partial p}{\partial \nu} z\ d\Gamma dt - \int_\Sigma \frac{\partial z}{\partial \nu} p\ d\Gamma dt.$$

Tendo em conta que $z(x,t) = 0$ em Σ vem

$$-\int_Q \Delta z.p\ dxdt = -\int_Q z.\Delta p\ dxdt - \int_\Sigma \frac{\partial z}{\partial \nu} p\ d\Gamma dt. \quad (3.48)$$

Da definição de vetor gradiente temos que

$$\begin{aligned}\int_Q \vec{b}\nabla z.p\ dxdt &= \int_0^T \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial z}{\partial x_i}\right) p\ dxdt \\ &= \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_\Omega (p.b_i)\frac{\partial z}{\partial x_i}\ dxdt,\end{aligned}$$

aplicando a fórmula de Green vem que

$$\begin{aligned}
\int_Q \vec{b}\nabla z.p\ dxdt &= \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_\Omega -\frac{\partial p.b_i}{\partial x_i} z\ dxdt + \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_\Gamma p.b_i.z.\nu_i\ d\Gamma dt \\
&= \int_0^T \int_\Omega -div(p\vec{b}) z\ dxdt + \sum_{i=1}^n \int_\Sigma p.b_i.z.\nu_i\ d\Gamma dt
\end{aligned}$$

e como $z(x,t) = 0$ em Σ temos que

$$\int_Q \vec{b}\nabla z.p\ dxdt = -\int_Q div(p\vec{b}) z\ dxdt. \tag{3.49}$$

Substituíndo 3.47, 3.48 e 3.49 em 3.46 vem que

$$\begin{aligned}
&-\int_Q z.p_t\ dxdt + \int_\Omega z(x,T)p(x,T)\ dx - \int_Q z\Delta p\ dxdt - \int_\Sigma \frac{\partial z}{\partial \nu} p\ d\Gamma dt \\
&\qquad + \int_Q az.p\ dxdt - \int_Q div(p\vec{b}) z\ dxdt = \int_Q u.p\ dxdt.
\end{aligned}$$

Assumindo:

$$\begin{aligned}
&p(x,t) = 0 \text{ em } \Sigma \\
&p(x,T) = g \text{ em } \Omega
\end{aligned}$$

temos que

$$\int_Q z\left(-p_t - \Delta p + ap - div(p\vec{b})\right)\ dxdt + \int_\Omega z(x,T) g\ dx = \int_Q up\ dxdt$$

e isso nos motiva a seguinte definição:

Definição 3.7 ***(Solução Ultrafraca)*** *Dado $g \in H^{-1}(\Omega)$, chamaremos de solução ultrafraca, ou solução por transposição, do problema*

$$\left|\begin{array}{ll}
-p_t - \Delta p + ap - div(\vec{b}p) = 0 & em\ Q \\
p(x,t) = 0 & em\ \Sigma \\
p(x,T) = g & em\ \Omega
\end{array}\right. \tag{3.50}$$

à função $p \in L^2(Q)$ que satisfaz a igualdade

$$\int_Q p(x,t)u(x,t)\ dxdt = \langle g, z(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$$

para toda $u \in L^2(Q)$, onde z é solução forte de 3.45.

Teorema 3.8 *Dada $g \in H^{-1}(\Omega)$, existe única solução ultrafraca $p \in L^2(Q)$ de 3.50 e além disso $p \in C\left([0,T]; H^{-1}(\Omega)\right)$.*

Demonstração: Considere o funcional

$$\begin{array}{rcl} L : L^2(Q) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \langle L, u\rangle = \langle g, z(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \end{array}$$

então

$$\begin{array}{rcl} |\langle L, u\rangle| & = & |\langle g, z(T)\rangle| \\ & \leq & ||g||_{H^{-1}(\Omega)}||z(T)||_{H_0^1(\Omega)} \\ & \leq & ||g||_{H^{-1}(\Omega)}||z(t)||_{C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)} \end{array}$$

e pelo corolário 3.6, já que $z(x,0)=0$, vem que

$$|\langle L, u\rangle| \leq C_T||g||_{H^{-1}(\Omega)}|u|_{L^2(Q)}$$

e tomando o supremo de $|\langle L, u\rangle|$, com $|u|_{L^2(Q)} = 1$, vem que

$$||L||_{L^2(Q)} \leq C_T||g||_{H^{-1}(\Omega)},$$

o que prova que $L \in (L^2(Q))' = L^2(Q)$.

Pelo teorema de Representação de Riesz-Fréchet[10], existe única $\tilde{p} \in L^2(Q)$ tal que

$$\langle L, u\rangle = \int_Q \tilde{p}.u\ dxdt,\ \forall u \in L^2(Q)$$

[10]página 17

e $||L||_{L^2(Q)} = |\tilde{p}|_{L^2(Q)}$. Como

$$\langle L, u\rangle = \langle g, z(T)\rangle = \int_Q p.u \; dxdt,$$

temos que $p = \tilde{p}$ e portanto existe única solução ultrafraca do problema 3.50.

Para mostrar que $p \in C\left([0,T]; H^{-1}(\Omega)\right)$, *a priori* observemos que $\Delta p \in H^{-2}(\Omega)$. De fato, basta considerar $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e então

$$\begin{aligned} |\left\langle \Delta p(t), \varphi\right\rangle| &= |\left\langle p(t), \Delta\varphi\right\rangle| \\ &\leq |p(t)|_{L^2(\Omega)}|\Delta\varphi|_{L^2(\Omega)} \\ &= |p(t)|_{L^2(\Omega)}||\varphi||_{H_0^2(\Omega)}, \; \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{aligned}$$

Levando em conta que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H_0^2(\Omega)$, tem-se

$$|\left\langle \Delta p(t), v\right\rangle| \leq |p(t)|_{L^2(\Omega)}||v||_{H_0^2(\Omega)} \; \forall v \in H_0^2(\Omega)$$

e tomando a norma do supremo, quando $|v|_{H_0^2(\Omega)} = 1$, obtemos:

$$||\Delta p(t)||_{H^{-2}(\Omega)} \leq |p(t)|_{L^2(\Omega)},$$

donde vem que

$$\Delta p(t) \in H^{-2}(\Omega). \tag{3.51}$$

De forma análoga tem-se

$$div(p(t)\vec{b}(t)) \in H^{-1}(\Omega). \tag{3.52}$$

De 3.51, 3.52 e do fato que $ap \in L^2(Q)$ vem que

$$\Delta p - ap + div(p\vec{b}) \in L^2(0,T; H^{-2}(\Omega)). \tag{3.53}$$

De 3.53 e 3.50 temos

$$p_t \in L^2(0,T; H^{-2}(\Omega)). \tag{3.54}$$

De 3.54 e tendo em conta que $p \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ segue que

$$p \in C\left([0,T];\left[L^2(\Omega),H^{-2}(\Omega)\right]_{\frac{1}{2}}\right),$$

ou seja,

$$p \in C\left([0,T];H^{-1}(\Omega)\right).$$

□

3.4 Controlabilidade Aproximada

Considere Ω um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 1$ e $\partial\Omega = \Gamma$ de classe C^2. Seja

$$\left|\begin{array}{ll} z_t - \Delta z + az + \vec{b}\nabla z = u\chi_q & \text{em } Q = \Omega \times (0,T) \\ z(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma = \Gamma \times (0,T) \\ z(x,0) = z_0(x) & \text{em } \Omega \end{array}\right. \tag{3.55}$$

onde:

- $(a,\vec{b}) \in L^\infty(Q) \times [L^\infty(Q)]^n$;
- $z = z(x,t)$ é o estado a ser controlado;
- u é o controle;
- ω é um subconjunto aberto de Ω e
- $q = \omega \times (0,T)$ é o cilindro sobre o qual o controle está atuando.

A prova da controlabilidade aproximada para o problema 3.55 segue a sugestão dada por Fernandez e Zuazua na referência [8], cujo ingrediente principal é a propriedade da continuação única provada por Fabre em [6], a qual enunciamos como teorema 2.26.

Comecemos observando que se $u \in L^2(q)$ então $u\chi_q \in L^2(Q)$. Logo valem os teoremas 3.2, 3.4, 3.8 e o corolário 3.6. Em particular denotaremos a solução do problema 3.55 por z_{u,z_0}.

Teorema 3.9 *Dado $z_0 \in H_0^1(\Omega)$, o conjunto dos estados alcançáveis, com $T > 0$, isto é:*

$$R_L(T) = \left\{ z_{u,z_0}(T); z_{u,z_0} \text{é solução forte de 3.1 com } u \in L^2(q) \right\}$$

é denso em $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: Seja $z_d \in H_0^1(\Omega)$ devemos mostrar que existe $\{z_{u_k,z_0}(T)\}_{k\in\mathbb{N}} \in R_L(T)$ tal que $z_{u_k,z_0}(T) \longrightarrow z_d$ em $H_0^1(\Omega)$

Já que o problema 3.1 é linear, é possível decompô-lo da seguinte forma:

$$\left| \begin{array}{ll} z_t - \Delta z + az + \vec{b}\nabla z = 0 & \text{em } \; Q = \Omega \times (0,T) \\ z = 0 & \text{em } \; \Sigma = \Gamma \times (0,T) \\ z(0) = z_0 & \text{em } \; \Omega \end{array} \right. \tag{3.56}$$

e

$$\left| \begin{array}{ll} z_t - \Delta z + az + \vec{b}\nabla z = u\chi_q & \text{em } \; Q = \Omega \times (0,T) \\ z = 0 & \text{em } \; \Sigma = \Gamma \times (0,T) \\ z(0) = 0 & \text{em } \; \Omega \end{array} \right. \tag{3.57}$$

onde $z_{0,z_0} + z_{u,0} = z_{u,z_0}$ é solução forte de 3.55, para $u \in L^2(q)$.

Devido a linearidade do problema 3.55 podemos supor que $z_0 = 0$. De fato, se $z_0 \neq 0$ definimos o estado $y(x,t) = z(x,t) - z_0(x)$. Assim, encontrar uma solução para 3.56 com $z(x,0) = z_0(x)$ é equivalente a encontrar uma solução para

$$\left| \begin{array}{ll} y_t - \Delta y + ay + \vec{b}\nabla y = v & \text{em } \; Q = \Omega \times (0,T) \\ y = 0 & \text{em } \; \Sigma = \Gamma \times (0,T) \\ y(0) = z(0) - z_0 = 0 & \text{em } \; \Omega \end{array} \right.$$

com $y(x,0) = z(x,0) - z_0(x)$. Sendo assim denotaremos $z_u = z_{u,0}$.

Considere o funcional $J_k : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_k(u) = \frac{1}{2}||u||^2_{L^2(q)} + \frac{k}{2}||z_u(T) - z_d||^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Já que z_u é solução forte de 3.55, então $z_u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))$ e portanto $z_u(T) \in H_0^1(\Omega)$ o que implica que $(z_u(T) - z_d) \in H_0^1(\Omega)$. Assim J_k está bem definido.

Afirmação 1: J_k é contínuo em $L^2(q)$.

De fato, considere

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^2(q). \tag{3.58}$$

Denotando por z_{u_n} a solução forte de 3.55 com o controle u_n e sendo z_u a solução forte de 3.55, definamos

$$z_n = z_{u_n} - z_u. \tag{3.59}$$

Deste modo z_n é solução forte de

$$\left| \begin{array}{ll} z_t - \Delta z + az + \vec{b}\nabla z = (u_n - u)\chi_q & \text{em } Q \\ z(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ z(x,0) = 0 & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

com $(u_n - u) \in L^2(q)$. Pelo corolário 3.6 temos:

$$\begin{aligned} ||z_n||^2_{C([0,T];H_0^1(\Omega))} &\leq C_T \int_0^T |(u_n - u)\chi_q|^2_{L^2(\Omega)} ds \\ &= C_T |u_n - u|^2_{L^2(q)}. \end{aligned}$$

Combinando isso com 3.58 e 3.59 vem que

$$||z_{u_n} - z_u||_{C([0,T];H_0^1(\Omega))} = ||z_n||_{C([0,T];H_0^1(\Omega))} \longrightarrow 0$$

quando $u_n \longrightarrow u$ em $L^2(q)$. Em particular,

$$z_{u_n}(T) \longrightarrow z_u(T) \text{ em } H_0^1(\Omega)$$

o que implica que

$$z_{u_n}(T) - z_d \rightarrow z_u(T) - z_d \text{ em } H_0^1(\Omega)$$

logo

$$J_k(u_n) \rightarrow J_k(u)$$

de onde segue que J_k é contínuo em u.

✓

Afirmação 2: J_k é semicontínua inferiormente.

De fato, já que J_k é contínua, então $J_k^{-1}((-\infty, a])$ é fechado para todo $a \in \mathbb{R}$, o que implica que o epigráfico de J_k, $epi(J_k)$, é fechado e portanto J_k é semicontínua inferiormente.

$\checkmark$

Afirmação 3: J_k é coerciva.

Com efeito, considere $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $||u_n||_{L^2(q)} \to \infty$. Uma vez que $J_k(u) \geq \dfrac{1}{2}||u||^2_{L^2(q)}$ para qualquer que seja $u \in L^2(q)$, então, dado $A \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$J_k(u_n) \geq \frac{1}{2}||u_n||^2_{L^2(q)} > A,$$

isto é,

$$J_k(u_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

$\checkmark$

Afirmação 4: J_k é estritamente convexo.

Para tal considere u_1 e $u_2 \in L^2(q)$ tais que z_{u_1} seja solução de

$$\left| \begin{array}{ll} z_t - \Delta z + az + \vec{b}\nabla z = u_1\chi_q & \text{em } Q \\ z(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ z(x,0) = 0 & \text{em } \Omega \end{array} \right. \tag{3.60}$$

e z_{u_2} seja solução de

$$\left| \begin{array}{ll} z_t - \Delta z + az + \vec{b}\nabla z = u_2\chi_q & \text{em } Q \\ z(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ z(x,0) = 0 & \text{em } \Omega \end{array} \right. \tag{3.61}$$

Seja, também, $\alpha \in (0,1)$. Então, da definição de J_k, segue:

$$J_k(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2) = \frac{1}{2}||\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2||^2_{L^2(q)} + \frac{k}{2}||z_{\alpha u_1+(1-\alpha)u_2}(T) - z_d||^2_{H_0^1(\Omega)} \tag{3.62}$$

Da linearidade dos problemas 3.60 e 3.61 vem que

$$z_{\alpha u_1+(1-\alpha)u_2} = \alpha z_{u_1} + (1-\alpha)z_{u_2}. \tag{3.63}$$

e sendo Ω limitado, no que segue utilizaremos a norma $||u||^2_{H^1_0(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx$ para funções de $H^1_0(\Omega)$.

Usando esses fatos e a igualdade 3.63 vem que

$$
\begin{aligned}
& J_k(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2) \\
= \; & \frac{1}{2}|\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2|^2_{L^2(q)} + \frac{k}{2}||z_{\alpha u_1+(1-\alpha)u_2}(T) - z_d||^2_{H^1_0(\Omega)} \\
= \; & \frac{1}{2}\int_q |\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2|^2_{\mathbb{R}} dxdt + \frac{k}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x_i}(z_{\alpha u_1+(1-\alpha)u_2}(T) - z_d)\right|^2_{\mathbb{R}} dx \\
= \; & \frac{1}{2}\int_q g(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2)dxdt \\
& \qquad + \frac{k}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha z_{u_1}(T) + (1-\alpha)z_{u_2}(T) - \alpha z_d - (1-\alpha)z_d)\right|^2_{\mathbb{R}} dx \\
= \; & \frac{1}{2}\int_q g(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2)dxdt \\
& \qquad + \frac{k}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha(z_{u_1}(T) - z_d)) + \frac{\partial}{\partial x_i}((1-\alpha)z_{u_2}(T) - z_d)\right|^2_{\mathbb{R}} dx \\
= \; & \frac{1}{2}\int_q g(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2)dxdt \\
& \qquad + \frac{k}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\alpha \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(z_{u_1}(T) - z_d)\right]}_{B_i(u_1)} + (1-\alpha)\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(z_{u_2}(T) - z_d)\right]}_{B_i(u_2)}\right|^2_{\mathbb{R}} dx \\
= \; & \frac{1}{2}\int_q g(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2)dxdt + \frac{k}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega g\left(\alpha(B_i(u_1)) + (1-\alpha)(B_i(u_2))\right) dx \\
\overset{*}{<} \; & \frac{1}{2}\int_q \alpha g(u_1) + (1-\alpha)g(u_2)dxdt + \frac{k}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \alpha g(B_i(u_1)) + (1-\alpha)g(B_i(u_2))dx \\
= \; & \frac{1}{2}\alpha\int_q g(u_1)dxdt + \frac{1}{2}(1-\alpha)\int_q g(u_2)dxdt \\
& \qquad + \frac{k}{2}\alpha\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega g(B_i(u_1))dx + \frac{k}{2}(1-\alpha)\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega g(B_i(u_2))dx \\
= \; & \frac{1}{2}\alpha\int_q |u_1|^2_{\mathbb{R}} dxdt + \frac{1}{2}\int_q |u_2|^2_{\mathbb{R}} dxdt \\
& \qquad \frac{k}{2}\alpha\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x_i}(z_{u_1}(T) - z_d)\right|^2_{\mathbb{R}} dx + \frac{k}{2}(1-\alpha)\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x_i}(z_{u_2}(T) - z_d)\right|^2_{\mathbb{R}} dx \\
= \; & \alpha\frac{1}{2}|u_1|^2_{L^2(q)} + (1-\alpha)\frac{1}{2}|u_2|^2_{L^2(q)} + \alpha\frac{k}{2}||z_{u_1}(T) - z_d||^2_{H^1_0(\Omega)} + (1-\alpha)\frac{k}{2}||z_{u_2}(T) - z_d||^2_{H^1_0(\Omega)} \\
= \; & \alpha\left[\frac{1}{2}|u_1|^2_{L^2(q)} + \frac{k}{2}||z_{u_1}(T) - z_d||^2_{H^1_0(\Omega)}\right] + (1-\alpha)\left[\frac{1}{2}|u|^2_{L^2(q)} + \frac{k}{2}||\_u_2(T) - z_d||^2_{H^1_0(\Omega)}\right] \\
= \; & \alpha J_k(u_1) + (1-\alpha)J_k(u_2)
\end{aligned}
$$

onde a desigualdade $*$ vem do fato que a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(s) = \frac{1}{2}|s|^2$ é estritamente convexa. Logo

$$J_k(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2) < \alpha J_k(u_1) + (1-\alpha)J_k(u_2),$$

isto é, J_k é estritamente convexo.

$\checkmark$

Assim, J_k é semicontínuo inferiormente, coercivo e estritamente convexo. Logo[11], para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $u_k \in L^2(q)$ tal que

$$J_k(u_k) = \min_{u \in L^2(q)} J_k(u), \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Daí resulta que

$$\begin{aligned} J_k(u_k) &\leq J_k(0) \\ &= \frac{1}{2}|0|^2_{L^2(q)} + \frac{k}{2}||z_0(T) - z_d||^2 \\ &= \frac{k}{2}||z_d||^2 \end{aligned}$$

onde a última igualdade vem do fato que $z_{0,0} = 0$. Assim

$$\begin{aligned} \frac{k}{2}||z_d||^2 &\geq J_k(u_k) \\ &\geq \frac{1}{2}|u_k|^2_{L^2(q)} + \frac{k}{2}||z_{u_k}(T) - z_d||^2. \end{aligned}$$

[11] teorema 2.8, página 12

Dividindo por k vem que

$$\begin{aligned}
||z_d||^2 &\geq \frac{1}{2k}|u_k|^2_{L^2(q)} + \frac{k}{2k}||z_{u_k}(T) - z_d||^2 \\
&\geq \frac{1}{2}\int_q \frac{1}{k}|u_k|^2 \ dxdt + \frac{1}{2}||z_{u_k}(T) - z_d||^2 \\
&\geq \frac{1}{2}\int_q \left|\frac{u_k}{\sqrt{k}}\right|^2 dxdt + \frac{1}{2}||z_{u_k}(T) - z_d||^2 \\
&\geq \frac{1}{2}\left|\frac{u_k}{\sqrt{k}}\right|^2_{L^2(q)} + \frac{1}{2}||z_{u_k}(T) - z_d||^2.
\end{aligned}$$

Como $z_d \in H_0^1(\Omega)$, então $||z_d|| < \infty$ e assim,

$$\left|\frac{u_k}{\sqrt{k}}\right|^2_{L^2(q)} < \infty$$

e

$$||z_{u_k}(T) - z_d||^2 < \infty$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$\left\{\frac{u_k}{\sqrt{k}}\right\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(q),$$

e

$$\{z_{u_k}(T) - z_d\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } H_0^1(\Omega).$$

Passando a uma subsequência, se necessário, tem-se que

$$z_{u_k}(T) - z_d \longrightarrow \psi \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

para alguma $\psi \in H_0^1(\Omega)$.

Por outro lado, vale a

Afirmação 5: da definição de derivada de Gateux vem que

$$0 = J_k'(u_k)v = \int_q u_k v \ dx \ dt + k((z_{u_k}(T) - z_d, z_v(T))) \tag{3.64}$$

onde z_v é solução forte do problema

$$\left|\begin{array}{ll} z_t - \Delta z + az + \vec{b}\nabla z = v\chi_q & \text{em } Q \\ z(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ z(x,0) = 0 & \text{em } \Omega \end{array}\right. \tag{3.65}$$

e $((.,.))$ é o produto interno em $H_0^1(\Omega)$.

De fato, $J_k'(u_k) = 0$ porque u_k é mínimo de J_k. Para a segunda igualdade, da definição de derivada de Gateux, tem-se:

$$\begin{aligned} J_k'(u_k)v &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}\left(J_k(u_k+\lambda v) - J_k(u_k)\right) \\ &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{1}{2}|u_k+\lambda v|^2_{L^2(q)} + \frac{k}{2}||z_{u_{k+\lambda v}}(T) - z_d||^2\right)\right. \\ &\qquad \left. - \left(\frac{1}{2}|u_k|^2_{L^2(q)} + \frac{k}{2}||z_{u_k}(T) - z_d||^2\right)\right] \\ &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{2}\left(|u_k+\lambda v|^2_{L^2(q)} - \frac{1}{2}|u_k|^2_{L^2(q)}\right)\right. \\ &\qquad \left. + k\left(\frac{1}{2}||z_{u_k+\lambda v}(T) - z_d||^2 - \frac{1}{2}||z_{u_k}(T) - z_d||^2\right)\right] \\ &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{2}|u_k+\lambda v|^2_{L^2(q)} - \frac{1}{2}|u_k|^2_{L^2(q)}\right) \\ &\qquad + \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda} k\left(\frac{1}{2}||z_{u_k+\lambda v}(T) - z_d||^2 - \frac{1}{2}||z_{u_k}(T) - z_d||^2\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} J_k'(u_k)v &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{2}|u_k+\lambda v|^2_{L^2(q)} - \frac{1}{2}|u_k|^2_{L^2(q)}\right) \\ &\qquad + \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda} k\left(\frac{1}{2}||z_{u_k+\lambda v}(T) - z_d||^2 - \frac{1}{2}||z_{u_k}(T) - z_d||^2\right). \end{aligned} \tag{3.66}$$

▲ Cálculo da primeira parcela de 3.66:

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{2}|u_k+\lambda v|^2_{L^2(q)}-\frac{1}{2}|u_k|^2_{L^2(q)}\right) &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{2}\int_q |u_k+\lambda v|^2\ dx\ dt-\frac{1}{2}\int_q |u_k|^2\ dx\ dt\right)\\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_q \frac{1}{2}|u_k+\lambda v|^2-\frac{1}{2}|u_k|^2\ dx\ dt\\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_q g(u_k+\lambda v)-g(u_k)\ dx\ dt.
\end{aligned}$$

Pelo teorema do valor médio segue que existe $\theta\in[0,1]$ tal que

$$\begin{aligned}
g(u_k+\lambda v)-g(u_k) &= g'(u_k+\theta\lambda v)\lambda v\\
&= (u_k+\theta\lambda v)\lambda v
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_q g(u_k+\lambda v)-g(u_k)\ dx\ dt &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_q (u_k+\theta\lambda v)\lambda v\ dx\ dt\\
&= \lim_{\lambda\to 0}\int_q u_k v\ dx\ dt+\underbrace{\lambda\theta\int_q v^2\ dx\ dt}_{\to 0\ \ pois\ \ v\in L^2(q)}\\
&= \lim_{\lambda\to 0}\int_q u_k v\ dx\ dt,
\end{aligned}$$

o que mostra que

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{2}|u_k+\lambda v|^2_{L^2(q)}-\frac{1}{2}|u_k|^2_{L^2(q)}\right)=\lim_{\lambda\to 0}\int_q u_k v\ dx\ dt. \tag{3.67}$$

▲ Cálculo da segunda parcela de 3.66:

$$
\begin{aligned}
& \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} k \left(\frac{1}{2} ||z_{u_k+\lambda v}(T) - z_d||^2 - \frac{1}{2} ||z_{u_k}(T) - z_d||^2 \right) \\
= \; & \lim_{\lambda \to 0} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \left(z_{u_k+\lambda v}(T) - z_d \right) \right|_{\mathbb{R}}^2 dx - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \left(z_{u_k}(T) - z_d \right) \right|_{\mathbb{R}}^2 dx \right) \\
= \; & \lim_{\lambda \to 0} \frac{k}{\lambda} \sum_{i=0}^{n} \int_\Omega \frac{1}{2} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \left((z_{u_k}(T) - z_d) + \lambda z_v(T) \right) \right|_{\mathbb{R}}^2 - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \left(z_{u_k}(T) - z_d \right) \right|_{\mathbb{R}}^2 dx \\
= \; & \lim_{\lambda \to 0} \frac{k}{\lambda} \sum_{i=0}^{n} \int_\Omega \frac{1}{2} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \left(z_{u_k}(T) - z_d \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left(z_v(T) \right) \right|_{\mathbb{R}}^2 - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \left(z_{u_k}(T) - z_d \right) \right|_{\mathbb{R}}^2 dx \\
= \; & \lim_{\lambda \to 0} \frac{k}{\lambda} \sum_{i=0}^{n} \int_\Omega g \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(z_{u_k}(T) - z_d \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left(z_v(T) \right) \right) - g \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(z_{u_k}(T) - z_d \right) \right) dx.
\end{aligned}
$$

Segue, do teorema do valor médio, que existe $\theta \in [0, 1]$ tal que

$$
\begin{aligned}
& g \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(z_{u_k}(T) - z_d \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left(z_v(T) \right) \right) - g \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(z_{u_k}(T) - z_d \right) \right) \\
= \; & g' \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(z_{u_k}(T) - z_d \right) + \theta \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left(z_v(T) \right) \right) \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left(z_v(T) \right) \\
= \; & \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(z_{u_k}(T) - z_d \right) + \theta \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left(z_v(T) \right) \right] \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left(z_v(T) \right).
\end{aligned}
$$

Assim, das duas estimativas anteriores, vem que

$$
\begin{aligned}
& \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} k \left(\frac{1}{2} ||z_{u_k+\lambda v}(T) - z_d||^2 - \frac{1}{2} ||z_{u_k}(T) - z_d||^2 \right) \\
= & \lim_{\lambda \to 0} \frac{k}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(z_{u_k}(T) - z_d) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i}(z_v(T)) \right) - g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(z_{u_k}(T) - z_d) \right) dx \\
= & \lim_{\lambda \to 0} \frac{k}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(z_{u_k}(T) - z_d) + \theta\lambda \frac{\partial}{\partial x_i}(z_v(T)) \right] \lambda \frac{\partial}{\partial x_i}(z_v(T))\, dx \\
= & \lim_{\lambda \to 0} k \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(z_{u_k}(T) - z_d) \frac{\partial}{\partial x_i}(z_v(T)) + \theta\lambda \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(z_v(T)) \right]^2 dx \\
= & \lim_{\lambda \to 0}\ k \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(z_{u_k}(T) - z_d) \frac{\partial}{\partial x_i}(z_v(T))\, dx + k\lambda\theta \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(z_v(T)) \right]^2 dx \\
= & \lim_{\lambda \to 0}\ k\left((z_{u_k}(T) - z_d, z_v(T))\right) + \underbrace{k\lambda\theta \left\| z_v(T) \right\|^2}_{*} \\
= & \ k((z_{u_k}(T) - z_d, z_v(T)))
\end{aligned}
$$

pois a parcela $*$ da penúltima igualdade converge para zero quando $\lambda \to 0$. De fato, basta observar que

$$
\begin{aligned}
||z_v(T)||_{H_0^1(\Omega)} & \leq \sup_{t \in [0,T]} ||z_v(t)||_{H_0^1(\Omega)} \\
& = |z_v|_{C\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right)} \\
& \overset{cor.\ 3.6}{\leq} C_T |v|_{L^2(q)} \\
& < \infty
\end{aligned}
$$

onde z_v é solução forte de 3.65. Assim,

$$
\begin{aligned}
& \lim_{\lambda \to 0} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{1}{2} \left\| z_{u_k+\lambda v}(T) - z_d \right\|_{H_0^1(\Omega)} - \frac{1}{2} \left\| z_{u_k}(T) - z_d \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right) \\
= & \ k\left((z_{u_k}(T) - z_d, z_v(T))\right). \qquad (3.68)
\end{aligned}
$$

De 3.66, 3.67 e 3.68 vem que

$$
J_k'(u_k)v = \int_q u_k v\ dx\ dt + k((z_{u-k}(T) - z_d, z_v(T)))
$$

o que prova a afirmação 5.

✓

Dividindo 3.64 por k segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{k}\int_q u_k v\ dx\ dt + \frac{k}{k}((z_{u_k}(T) - z_d, z_v(T))) \\ &= \frac{1}{\sqrt{k}}\int_q \frac{u_k}{\sqrt{k}} v\ dx\ dt + ((z_{u_k}(T) - z_d, z_v(T))). \end{aligned} \tag{3.69}$$

Agora, note que $\displaystyle\int_q \frac{u_k}{\sqrt{k}} v\ dx\ dt$ é limitada, pois,

$$\begin{aligned} \left|\int_q \frac{u_k}{\sqrt{k}} v\ dx\ dt\right|_{\mathbb{R}} &\leq \int_q \left|\frac{u_k}{\sqrt{k}} v\right|_{\mathbb{R}}\ dx\ dt \\ &= \int_q \left|\frac{u_k}{\sqrt{k}}\right|_{\mathbb{R}} . |v|_{\mathbb{R}}\ dx\ dt \\ &\leq \left(\int_q \left|\frac{u_k}{\sqrt{k}}\right|_{\mathbb{R}}^2\ dx\ dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_q |v|_{\mathbb{R}}^2\ dx\ dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left|\frac{u_k}{\sqrt{k}}\right|_{L^2(q)} |v|_{L^2(q)} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

uma vez que $\left\{\dfrac{u_k}{\sqrt{k}}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(q)$ e $v \in L^2(q)$.

Assim tomando o limite na expressão 3.69 quando k tende ao infinito obtem-se

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\int_q \frac{u_k}{\sqrt{k}} v\ dx\ dt + ((z_{u_k}(T) - z_d, z_v(T)))\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{k}}}_{\to 0} \underbrace{\int_q \frac{u_k}{\sqrt{k}} v\ dx\ dt}_{limitada} + \lim_{k\to\infty}((\underbrace{z_{u_k}(T) - z_d}_{\to\psi}, z_v(T))) \\ &= ((\psi, z_v(T))) \end{aligned}$$

de onde tem-se que

$$((\psi, z_v(T))) = 0 \quad \forall v \in L^2(q). \tag{3.70}$$

Como feito na seção 3.3, por transposição, define-se o estado adjunto $p = p(x,t) \in L^2(Q)$ que é a única solução ultrafraca do problema

$$\left| \begin{array}{ll} -p_t - \Delta p + ap - div(\vec{b}p) = 0 & \text{em } Q \\ p(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ p(x,T) = -\Delta\psi & \text{em } \Omega \end{array} \right. \tag{3.71}$$

Como $\psi \in H_0^1(\Omega)$ segue que $-\Delta\psi \in H^{-1}(\Omega)$. Da definição de solução ultrafraca vem que

$$\int_Q p(x,t)(v\chi_q)(x,t)\ dx\ dt = \langle -\Delta\psi, z_v(T)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \tag{3.72}$$

onde $z_v \in W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega), L^2(\Omega))$ e $z_v(x,0) = 0$ pois z_v é solução forte do problema 3.65. Pelo teorema 3.8

$$p \in L^2(Q) \cap C\left([0,T]; H^{-1}(\Omega)\right).$$

De 3.72 e 3.70 segue que

$$\int_q p(x,t)v(x,t)\ dx\ dt = 0,\ \forall v \in L^2(q),$$

isto é, $p = 0$ quase sempre em $q = \omega \times (0,T)$.

Definamos

$$P = \begin{cases} -3p(-t) + 4p\left(-\frac{t}{2}\right), & \text{se } t \in [-T,0] \\ p(t), & \text{se } t \in [0,T], \end{cases}$$

e consideramos a seguinte sucessão regularizante:

$$\rho_\nu \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \rho_\nu \geq 0,\ supp(\rho_\nu) \subset \left(-\frac{1}{\nu}, 0\right),\ \int_{-\frac{1}{\nu}}^0 \rho_\nu(t)dt = 1,\ \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, definamos para ν suficientemente grande a sequência

$$p_\nu(t) = (P * \rho_\nu)(t) = \int_{-\frac{1}{\nu}}^0 P(t-s)\rho_\nu(s)ds,\ \forall t \in [0, T-\varepsilon].$$

Como $p \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e $\dfrac{d^k}{dt^k}p_\nu(t) = (P * \dfrac{d^k}{dt^k}\rho_\nu)(t) \in L^2(\Omega),\ \forall k,\nu \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$(p_\nu)_t \in L^2(0,T-\varepsilon;L^2(\Omega)),\ \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Logo, p_ν satisfaz

$$-(p_\nu)_t - \Delta p_\nu + ap_\nu - div(\vec{b}p_\nu) = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T-\varepsilon) \tag{3.73}$$

o que implica que

$$-\Delta p_\nu = -ap_\nu + div(\vec{b}p_\nu) + (p_\nu)_t \text{ em } L^2(0,T-\varepsilon;H^{-1}(\Omega))$$

e assim, por Lax-Milgram,

$$p_\nu \in L^2(0,T-\varepsilon;H_0^1(\Omega)) \tag{3.74}$$

Pela definição de p_ν vem que

$$p_\nu = 0 \text{ em } \omega \times (0,T-\varepsilon). \tag{3.75}$$

De 3.73, 3.74, 3.75 e pelo resultado de Caroline Fabre[12] tem-se que $p_\nu = 0$ sobre toda componente horizontal de $\Omega \times (0,T-\varepsilon)$. Somando isso a definição de p_ν vem que

$$0 = p_\nu \longrightarrow p \text{ em } L^2(0,T-\varepsilon;L^2(\Omega)),$$

ou seja, $p(x,t) = 0$ quase sempre em $\Omega \times (0,T-\varepsilon)$ e como $p \in C(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e ε é arbitrário segue que

$$0 = p(x,T) = -\Delta\psi, \quad \text{com } \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Como $-\Delta$ é um operador que para cada $\psi \in H_0^1(\Omega)$ associa $-\Delta\psi \in H^{-1}(\Omega)$ tem-se que

$$0 = \langle 0,\psi\rangle = \langle -\Delta\psi,\psi\rangle = ((\psi,\psi))_{H_0^1(\Omega)} = ||\psi||^2_{H_0^1(\Omega)}$$

o que implica que

$$||\psi||_{H_0^1(\Omega)} = 0,$$

isto é,

$$\psi = 0 \text{ em } \Omega.$$

[12] ver teorema 2.26, página 19

Deste modo,

$$z_{u_k}(T) - z_d \overset{k\to\infty}{\rightharpoonup} \psi = 0 \text{ fraco em } H_0^1(\Omega),$$

ou seja,

$$z_{u_k}(T) \overset{k\to\infty}{\rightharpoonup} z_d \text{ fraco em } H_0^1(\Omega) \tag{3.76}$$

De 3.69, tomando em particular $v = u_k$, vem que

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{\sqrt{k}} \int_q \frac{u_k}{\sqrt{k}} u_k \, dx \, dt + ((z_{u_k}(T) - z_d, z_{u_k}(T))) \\
&= \int_q \left(\frac{u_k}{\sqrt{k}}\right)^2 dx \, dt + ((z_{u_k}(T) - z_d, z_{u_k}(T))) \\
&\qquad -((z_{u_k}(T) - z_d, z_d(T))) + ((z_{u_k}(T) - z_d, z_d(T))) \\
&= \int_q \left(\frac{u_k}{\sqrt{k}}\right)^2 dx \, dt + ||z_{u_k}(T) - z_d|| + ((z_{u_k}(T) - z_d, z_d(T)))
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\underbrace{\int_q \left(\frac{u_k}{\sqrt{k}}\right)^2 dx \, dt}_{\geq 0} + \underbrace{||z_{u_k}(T) - z_d||^2}_{\geq 0} = -((z_{u_k}(T) - z_d, z_d)) \tag{3.77}$$

Por 3.76 temos que a expressão do lado direito de 3.77 converge para zero quando $k \to \infty$. Portanto,

$$||z_{u_k}(T) - z_d|| \xrightarrow{k\to 0} 0$$

isto é,

$$z_{u_k}(T) \xrightarrow{k\to 0} z_d \text{ forte em } H_0^1(\Omega)$$

Como $z_{u_k} \in R_L(T)$ vem que

$$R_L(T) \text{ é denso em } H_0^1(\Omega)$$

o que prova a controlabilidade aproximada.

□

Observação 3.10 *Levando em conta que $H_0^1(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$ segue do teorema acima que $R_L(T)$ é denso em $L^2(\Omega)$ e portanto o sistema 1.2 é aproximadamente controlável no tempo T em $L^2(\Omega)$.*

Capítulo 4

A Equação do Calor Semilinear

Neste capítulo mostramos a existência e unicidade de soluções forte e fraca para a equação 4.1 abaixo. Em seguida temos dois resultados, um sobre dependência contínua da solução e outro sobre diferenciabilidade do funcional envolvido no teorema 4.8.

Para dar continuidade, considere Ω um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira Γ de classe C^2 e $T > 0$. Considere também o problema

$$\left| \begin{array}{ll} y_t - \Delta y + f(x,t,y,\nabla y) = u & \text{em } Q = \Omega \times (0,T) \\ y(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma = \Gamma \times (0,T) \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{em } \Omega, \end{array} \right. \tag{4.1}$$

tal que

$$\begin{array}{rl} i) & f(x,t,\xi,\eta) \text{ é mensurável com respeito a } (x,t) \in Q; \\ ii) & f(x,t,\xi,\eta) \text{ é de classe } C^1 \text{ com respeito a } (\xi,\eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \\ iii) & f(.,.,0,0) \in L^2(Q) \text{ e} \\ iv) & \left| \dfrac{\partial f}{\partial \xi}(x,t,\xi,\eta) \right|_{\mathbb{R}} + \left\| \dfrac{\partial f}{\partial \eta}(s,t,\xi,\eta) \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq k_0, \ \forall (x,t,\xi,\eta) \in Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \end{array} \tag{4.2}$$

Com vistas a facilitar nosso estudo no decorrer do capítulo, temos a

Proposição 4.1 *Se f satisfaz as condições dadas em 4.2, então:*

$$|f(x,t,y,\nabla y) - f(x,t,y^m,\nabla y^m)|_{\mathbb{R}} \ \leq \ k_0|y - y^m|_{\mathbb{R}} + k_0\|\nabla y - \nabla y^m\|_{\mathbb{R}^n} \tag{4.3}$$

e

$$|f(.,.,y,\nabla y)-f(.,.,y^m,\nabla y^m)|^2_{L^2(Q)}$$
$$\leq 2k_0^2\left(\int_0^T |y(t)-y^m(t)|^2\,dt+\int_0^T \|y(t)-y^m(t)\|^2\,dt\right). \quad (4.4)$$

Demonstração: Como $f\in C^1$ em (ξ,η) e $\left|\dfrac{\partial f}{\partial \xi}\right|+\left\|\dfrac{\partial f}{\partial \eta}\right\|\leq k_0$ em $Q\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, pelo teorema do valor médio, temos que

$$\begin{aligned}
&|f(x,t,y,\nabla y)-f(x,t,y^m,\nabla y^m)|_{\mathbb{R}}\\
\overset{T.V.M.}{=}\;&\left|\frac{\partial}{\partial \xi}f((x,t,y,\nabla y)+\theta(0,0,y^m,\nabla y^m)).(y-y^m)\right.\\
&\left.+\frac{\partial}{\partial \eta}f((x,t,y,\nabla y)+\theta(0,0,y^m,\nabla y^m)).(\nabla y-\nabla y^m)\right|_{\mathbb{R}}.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade triangular, Cauchy-Schwarz e *iv*) de 4.2,

$$\begin{aligned}
&|f(x,t,y,\nabla y)-f(x,t,y^m,\nabla y^m)|_{\mathbb{R}}\\
\overset{D.T.\ C-S}{\leq}\;&\left|\frac{\partial}{\partial \xi}f((x,t,y,\nabla y)+\theta(0,0,y^m,\nabla y^m))\right|_{\mathbb{R}}.\,|y-y^m|_{\mathbb{R}}\\
&+\left\|\frac{\partial}{\partial \eta}f((x,t,y,\nabla y)+\theta(0,0,y^m,\nabla y^m))\right\|_{\mathbb{R}^n}.\,\|\nabla y-\nabla y^m)\|_{\mathbb{R}^n}\\
\overset{iv)}{\leq}\;& k_0|y-y^m|_{\mathbb{R}}+k_0\|\nabla y-\nabla y^m\|_{\mathbb{R}^n},
\end{aligned}$$

de onde temos que

$$|f(x,t,y,\nabla y)-f(x,t,y^m,\nabla y^m)|_{\mathbb{R}}\leq (k_0|y-y^m|_{\mathbb{R}}+k_0\|\nabla y-\nabla y^m\|_{\mathbb{R}^n}).$$

o que demonstra a veracidade de 4.3.

Elevando ao quadrado e usando a desigualdade de Schwarz, $\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$, na expressão acima, vem que

$$|f(x,t,y,\nabla y)-f(x,t,y^m,\nabla y^m)|^2_{\mathbb{R}}\;\leq\;2k_0^2\left(|y-y^m|^2_{\mathbb{R}}+\|\nabla y-\nabla y^m\|^2_{\mathbb{R}^n}\right).$$

Integrando sobre Q tem-se

$$\begin{aligned} & |f(.,.,y,\nabla y) - f(.,.,y^m,\nabla y^m)|^2_{L^2(Q)} \\ \leq\ & 2k_0^2\left(\int_0^T |y(t)-y^m(t)|^2\ dt + \int_0^T |\nabla y(t) - \nabla y^m(t)|^2\ dt\right) \\ =\ & 2k_0^2\left(\int_0^T |y(t)-y^m(t)|^2\ dt + \int_0^T \|y(t) - y^m(t)\|^2\ dt\right), \end{aligned}$$

isto é,

$$|f(.,.,y,\nabla y) - f(.,.,y^m,\nabla y^m)|^2_{L^2(Q)} \leq 2k_0^2\left(\int_0^T |y(t)-y^m(t)|^2\ dt + \int_0^T \|y(t) - y^m(t)\|^2\ dt\right).$$

o que encerra a demonstração.

□

4.1 Existência e Unicidade de Solução Fraca

A existência e unicidade de solução fraca permitirá a demonstração do teorema 4.6, da continuidade com respeito aos dados iniciais, item a), o qual será usado diretamente na demonstração do resultado principal.

Definição 4.2 *diz-se que $y = y(x,t)$ é solução fraca de 4.1 se*

i) $y \in W(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega))$;

ii) $-\int_Q y\psi_t + \int_Q \nabla y \nabla \psi + \int_Q f(x,t,y,\nabla y)\psi = \int_Q u\psi,$
para toda $\psi \in X = \{\varphi \in W(0,T;H_0^1(\Omega),L^2(Q));\varphi(0)=\varphi(T)=0\}$ *e*

iii) $y(x,0) = y_0(x)$.

Teorema 4.3 *Dado $u \in L^2(Q)$ e $y_0 \in L^2(\Omega)$, existe única solução fraca y_{u,y_0} de 4.1 pertencente ao espaço $W(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega))$ e além disso $y_{u,y_0} \in C([0,T];L^2(\Omega))$.*

Demonstração: A prova baseia-se no método de Faedo-Galerkin.

Etapa 1: Problema Aproximado.

Considere $\{w_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma base especial[1] de $H_0^1(\Omega)$ tal que

i) $\forall m,\ \{w_1, ..., w_m\}$ é linearmente independente;

ii) o conjunto das combinações lineares finitas dos $w_i's$ é denso em $H_0^1(\Omega)$ e

iii) os elementos w_j são tais que $\left| \begin{array}{l} -\Delta w_j = \lambda_j w_j \\ w_j \,|_\Gamma = 0 \end{array} \right.$.

Seja

$$V_m = [w_1, ..., w_m]$$

o subespaço gerado pelos m primeiros vetores da base, defina

$$y^m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_i^m(t) w_i \in V_m = [w_1, ..., w_m], \forall m \in \mathbb{N}$$

e considere o problema aproximado, ou finito dimensional,

$$\left| \begin{array}{l} (y_t^m(t), w_j) + ((y^m(t), w_j)) + (f(.,t,y^m(t),\nabla y^m(t)), w_j) = (u, w_j),\ j \leq m \\ y^m(0) = y_0^m \ \text{ tal que } \ y_0^m \to y_0 \ \text{ em } \ L^2(Q) \end{array} \right. \tag{4.5}$$

onde $(.,.)$ e $((.,.))$ denotam os produtos internos em $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$, respectivamente.

Pelo teorema de Carathéodory[2] o problema 4.5 possui uma solução $y^m(t)$ em algum intervalo $[0, t_m], 0 < t_m < T$.

Etapa 2: Estimativas

Multiplicando o problema aproximado 4.5 por $g_j^m(t)$ e somando com j variando de 1 até m, temos

$$(y_t^m(t), y^m(t)) + ((y^m(t), y^m(t))) + (f(.,t,y^m(t),\nabla y^m(t)), y^m(t)) = (u, y^m(t)),$$

[1]a hipótese iii) sobre essa base é um tanto forte para o momento, mas é fundamental para a solução forte na próxima seção, o que a justifica.

[2]ver teorema 2.15, página 15.

isto é,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y^m(t)|^2 + ||y^m(t)||^2 &= (u, y^m(t)) - (f(., t, y^m(t), \nabla y^m(t)), y^m(t)) \\ &\leq |(u, y^m(t))|_{\mathbb{R}} + |(f(., t, y^m(t), \nabla y^m(t)), y^m(t))|_{\mathbb{R}} \\ &\leq (|u| + |f(., t, y^m(t), \nabla y^m(t))|)\, |y^m(t)|. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Usando a desigualdade triangular invertida na inequação 4.3 da proposição 4.1, no caso particular em que $y = 0$ e $\nabla y = 0$, resulta que

$$|f(x, t, y^m, \nabla y^m)| \leq k_0(|y^m|_{\mathbb{R}} + |\nabla y^m|_{\mathbb{R}^n}) + |f(x, t, 0, 0)|_{\mathbb{R}}. \tag{4.7}$$

De 4.7 vem:

$$\begin{aligned}|f(x, t, y^m(t), \nabla y^m(t))|^2 &\leq (k_0(|y^m(t)|_{\mathbb{R}} + |\nabla y^m(t)|_{\mathbb{R}^n}) + |f(x, t, 0, 0)|_{\mathbb{R}})^2 \\ &\leq (k_0^2 + 2)\left[|y^m(t)|^2_{\mathbb{R}} + ||\nabla y^m(t)||^2_{\mathbb{R}^n} + |f(x, t, 0, 0)|^2_{\mathbb{R}}\right],\end{aligned}$$

integrando sobre Ω tem-se:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x, t, y^m(t), \nabla y^m(t))|^2_{\mathbb{R}}\, dx &\leq (k_0^2 + 2)\left[\int_\Omega |y^m(t)|^2_{\mathbb{R}}\, dx + \int_\Omega ||\nabla y^m(t)||^2_{\mathbb{R}^n}\, dx \right. \\ &\qquad \left. + \int_\Omega |f(x, t, 0, 0)|^2_{\mathbb{R}}\, dx\right] \\ &\leq (k_0^2 + 2)\left[|y^m(t)|^2 + ||y^m(t)||^2 + |f(x, t, 0, 0)|^2\right],\end{aligned}$$

ou seja,

$$|f(., t, y^m(t), \nabla y^m(t)|^2 \leq (k_0^2 + 2)\left[|y^m(t)|^2 + ||y^m(t)||^2 + |f(., t, 0, 0)|^2\right].$$

Como $a^2 + b^2 + c^2 \leq (a + b + c)^2$ para a, b, c reais não negativos,

$$|f(., t, y^m(t), \nabla y^m(t)| \leq (k_0^2 + 2)^{\frac{1}{2}}\left[|y^m(t)| + ||y^m(t)|| + |f(., t, 0, 0)|\right]. \tag{4.8}$$

Substituindo 4.8 em 4.6 segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y^m(t)|^2 + ||y^m(t)||^2 \leq \Big(|u(t)| + (k_0^2 + 2)^{\frac{1}{2}}\left[|y^m(t)| + ||y^m(t)|| + |f(., t, 0, 0)|\right]\Big)\, |y^m(t)|.$$

Donde temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y^m(t)|^2 + ||y^m(t)||^2 &\leq |u(t)|.|y^m(t)| + (k_0^2+2)^{\frac{1}{2}}|y^m(t)|^2 \\
&\quad +(k_0^2+2)^{\frac{1}{2}}||y^m(t)||.|y^m(t)| + |f(.,t,0,0)|.|y^m(t)| \\
&\leq (k_0^2+2)^{\frac{1}{2}}|y^m(t)|^2 + \frac{1}{2}||y^m(t)||^2 + \frac{(k_0^2+2)}{2}|y^m(t)|^2 \\
&\quad +\frac{1}{2}|f(.,t,0,0)|^2 + \frac{1}{2}|y^m(t)|^2 + \frac{1}{2}|u(t)|^2 + \frac{1}{2}|y^m(t)|^2 \\
&= \left((k_0^2+2)^{\frac{1}{2}} + \frac{(k_0^2+2)}{2} + 1\right)|y^m(t)|^2 + \frac{1}{2}||y^m(t)||^2 \\
&\quad +\frac{1}{2}|f(.,t,0,0)|^2 + \frac{1}{2}|u(t)|^2,
\end{aligned}$$

o que implica em:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y^m(t)|^2 + \frac{1}{2}||y^m(t)||^2 \leq \left((k_0^2+2)^{\frac{1}{2}} + \frac{(k_0^2+2)}{2} + 1\right)|y^m(t)|^2 + \frac{1}{2}|f(.,t,0,0)|^2 + \frac{1}{2}|u(t)|^2.$$

Multiplicando por 2 a expressão acima resulta que

$$\frac{d}{dt}|y^m(t)|^2 + ||y^m(t)||^2 \leq \left(2(k_0^2+2)^{\frac{1}{2}} + k_0^2 + 3\right)|y^m(t)|^2 + |f(.,t,0,0)|^2 + |u(t)|^2. \quad (4.9)$$

Integrando 4.9 de 0 a t, $t \in (0, t_m)$ e usando que $||y^m(t)||^2 \geq 0$ tem-se

$$|y^m(t)|^2 \leq \left(2(k_0^2+2)^{\frac{1}{2}} + k_0^2 + 3\right)\int_0^t |y^m(s)|^2 ds + |f(.,.,0,0)|^2_{L^2(Q)} + |u|^2_{L^2(Q)} + |y^m(0)|^2.$$

Da hipótese $iii)$ de 4.2, do fato que $y^m(0)$ converge para y_0 em $L^2(\Omega)$ e levando em conta que a função $u \in L^2(Q)$ vem que

$$|y^m(t)|^2 \leq c_1 + c_2\int_0^t |y^m(s)|^2 ds \quad (4.10)$$

onde $c_1 = |f(.,.,0,0)|^2_{L^2(Q)} + |u|^2_{L^2(Q)} + |y^m(0)|^2$ e $c_2 = \left(2(k_0^2+2)^{\frac{1}{2}} + k_0^2 + 3\right)$.

Aplicando a desigualdade de Gromwall à inequação 4.10, obtem-se

$$\begin{aligned}
|y^m(t)| &\leq c_1 e^{c_2 t} \quad \forall t \in [0, t_m] \text{ tal que } t_m < T && (4.11) \\
&\leq c_1 e^{c_2 T} && (4.12)
\end{aligned}$$

e assim podemos estender[3] a solução y^m de 4.5 a todo intervalo $[0, T]$.

Tomando o supremo essencial em 4.11 vem que

$$|y^m|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq c_1 e^{c_2 T},$$

isto é,

$$y^m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \tag{4.13}$$

Integrando 4.9 de 0 a T e considerando que $|y^m(T)| \geq 0$, vem que

$$\int_0^T ||y^m(t)||^2 \, dt \quad \leq \quad c_2 |y^m|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + |f(.,.,0,0)|^2_{L^2(Q)} + |u|^2_{L^2(Q)} + |y^m(0)|,$$

ou seja,

$$|y^m|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} < \infty,$$

e isso implica que

$$y^m \text{ é limitada em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \tag{4.14}$$

Das limitações 4.13 e 4.14, do corolário 2.12 e do teorema 2.13, existe uma subsequência, ainda denotada por $\{y^m\}_{m\in\mathbb{N}}$, tal que

$$y^m \overset{*}{\rightharpoonup} y \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \tag{4.15}$$

$$y^m \rightharpoonup y \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \tag{4.16}$$

Para a etapa 3, passagem ao limite, precisaremos ao menos que

$$f(.,.,y^m, \nabla y^m) \overset{*}{\rightharpoonup} f(.,.,y, \nabla y) \text{ em } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Deste modo, consideremos o problema

$$\left|\begin{array}{ll} y_t^m - \Delta y^m + f(x, t, y^m, \nabla y^m) = u & \text{em } Q \\ y^m(x, t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ y^m(x, 0) = y_0^m(x) & \text{em } \Omega \end{array}\right.$$

[3]ver corolário 2.16 na página 16.

tal que $y_0^m \in H_0^1(\Omega)$ e $y_0^m \to y_0$ em $L^2(\Omega)$. Seja o mesmo para n no lugar de m. Fazendo a diferença dos dois problemas e denotando

$$z^\mu = y^m - y^n$$

temos que

$$\left| \begin{array}{ll} z_t^\mu - \Delta z^\mu + f(x,t,y^m,\nabla y^m) - f(x,t,y^n,\nabla y^n) = 0 & \text{em } Q \\ z^\mu(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ z^\mu(x,0) = y_0^m(x) - y_0^n(x), & \text{em } \Omega \end{array} \right. .$$

Compondo com z^μ, vem que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z^\mu|^2 + ||z^\mu||^2 + (f(.,t,y^m,\nabla y^m) - f(.,t,y^n,\nabla y^n), z^\mu) = 0.$$

Assim, de modo análogo ao feito na proposição 4.1 e da definição de z^μ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z^\mu(t)|^2 + ||z^\mu(t)||^2 &\leq |f(.,t,y^m,\nabla y^m) - f(.,t,y^n,\nabla y^n)| \,.|z^\mu(t)| \\ &\leq 2k_0^2\left(|z^\mu(t)| + |\nabla z^\mu(t)|\right)|z^\mu(t)| \\ &\leq \frac{8k_0^4+1}{2}|z^\mu(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla z^\mu(t)|^2 \\ &\leq \frac{8k_0^4+1}{2}|z^\mu(t)|^2 + \frac{1}{2}||z^\mu(t)||^2. \end{aligned}$$

Multiplicando por 2 e integrando os extremos da estimativa acima de 0 a t, $t \leq T$,

$$|z^\mu(t)|^2 + \int_0^t ||z^\mu(t)||^2 ds \leq |z_0^\mu| + \frac{8k_0^4+1}{2}\int_0^t |z^\mu(s)|^2 ds. \tag{4.17}$$

Por Gronwall

$$|z^\mu(t)|^2 \leq |z_0^\mu|.e^{T\frac{8k_0^4+1}{2}}.$$

Tomando o supremo essencial com $t \in (0,1)$, vem que

$$|z^\mu|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq |z_0^\mu|.e^{T\frac{8k_0^4+1}{2}}$$

e portanto

$$|z^\mu|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \leq |z_0^\mu|.e^{T\frac{8k_0^4+1}{2}}. \tag{4.18}$$

De 4.17 e 4.18 vem que

$$||z^\mu||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq c_3|z_0^\mu|,$$

onde $c_3 = 1 + \dfrac{8k_0^2+1}{2} e^{T\left(\frac{8k_0^2+1}{2}\right)}$. Como

$$z_0^\mu = y_0^m - y_0^n \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(\Omega),$$

então

$$z^\mu \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

ou seja,

$$y^m - y^n \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{4.19}$$

o que prova que y^m é de Cauchy em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, portanto convergente. Por unicidade de limites

$$y^m \longrightarrow y \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{4.20}$$

Da desigualdade 4.4, proposição 4.1, e da convergência 4.20, vem que

$$f(.,.,y^m,\nabla y^m) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} f(.,.,y,\nabla y) \text{ em } L^2(Q). \tag{4.21}$$

Etapa 3: Passagem ao limite.

Multiplicando o problema aproximado 4.5 por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando em $(0,T)$ vem que

$$\int_0^T (y_t^m(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((y^m(t), w_j))\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T (f(.,t,y^m(t),\nabla y^m(t)), w_j)\theta(t)dt = \int_0^T (u, w_j)\theta(t)dt. \tag{4.22}$$

Integrando por partes o primeiro termo da equação 4.22 vem que

$$\begin{aligned}\int_0^T (y_t^m(t), w_j)\theta(t)dt &= \int_0^T (y_t^m(t), w_j\theta(t))dt \\ &= -\int_0^T (y^m(t), w_j\theta'(t))dt + \int_0^T \frac{d}{dt}(y^m(t), w_j\theta(t))dt \\ &= -\int_0^T (y^m(t), w_j\theta'(t))dt + \underbrace{(y^m(t), w_j\theta(t))\Big|_0^T}_{=0} \\ &= -\int_0^T (y^m(t), w_j)\theta'(t)dt,\end{aligned}$$

disso e da equação 4.22 obtemos

$$\begin{aligned}-\int_0^T (y^m(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T ((y^m(t), w_j))\theta(t)dt \\ + \int_0^T (f(.,t,y^m(t),\nabla y^m(t)), w_j)\theta(t)dt = \int_0^T (u, w_j)\theta(t)dt.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Aplicando o limite em 4.23 quando $k \to \infty$ tem-se

$$\begin{aligned}-\int_0^T (y(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T ((y(t), w_j))\theta(t)dt \\ + \int_0^T (f(.,t,y(t),\nabla y(t)), w_j)\theta(t)dt = \int_0^T (u, w_j)\theta(t)dt\end{aligned} \tag{4.24}$$

para toda w_j em V_m e para toda $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Como o conjunto das combinações lineares finitas dos $w_j's$ é denso em $H_0^1(\Omega)$, então

$$\begin{aligned}-\int_0^T (y(t), v)\theta'(t)dt + \int_0^T ((y(t), v))\theta(t)dt \\ + \int_0^T (f(.,t,y(t),\nabla y(t)), v)\theta(t)dt = \int_0^T (u, v)\theta(t)dt,\ \forall v \in H_0^1(\Omega).\end{aligned} \tag{4.25}$$

Como $\{v\theta; v \in H_0^1(\Omega) \text{ e } \theta \in \mathcal{D}(0,T)\}$ é denso em $\mathcal{D}(0,T; H_0^1(\Omega))$, que por sua vez é denso em $X = \{\psi \in W(0,T; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)); \psi(0) = \psi(T) = 0\}$, de 4.25 vem que

$$-\int_Q y\psi'\ dxdt + \int_Q \nabla y \nabla \psi\ dxdt + \int_Q f(x,t,y,\nabla y)\psi\ dxdt = \int_Q u\psi\ dxdt,\ \forall \psi \in X. \tag{4.26}$$

Por outro lado, de 4.25, temos:

$$-\int_0^T (y(t),v)\theta'(t)dt + \int_0^T \langle -\Delta y(t), v\rangle \theta(t)dt \\ + \int_0^T (f(.,t,y(t),\nabla y(t)),v)\theta(t)dt = \int_0^T (u,v)\theta(t)dt$$

donde vem que

$$-\int_0^T (y(t)\theta'(t),v)dt + \int_0^T \langle -\Delta y(t)\theta(t), v\rangle dt \\ + \int_0^T (f(.,t,y(t),\nabla y(t))\theta(t),v)dt = \int_0^T (u\theta(t),v)dt$$

e assim

$$\left(-\int_0^T y(t)\theta'(t)dt, v\right) + \left\langle \int_0^T -\Delta y(t)\theta(t)dt, v\right\rangle \\ + \left(\int_0^T f(.,t,y(t),\nabla y(t))\theta(t)dt, v\right) = \left(\int_0^T u\theta(t), v\right) \tag{4.27}$$

para qualquer que seja $v \in H_0^1(\Omega)$. Donde vem que

$$-\int_0^T y(t)\theta'(t)dt + \int_0^T \Delta y(t)\theta(t)dt \\ + \int_0^T f(.,t,y,\nabla y)\theta(t)dt = \int_0^T u\theta(t)dt \text{ em } H^{-1}(\Omega),$$

para toda $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, o que implica que

$$-\int_0^T y(t)\theta'(t)dt \quad = \quad \int_0^T (\Delta y(t) - f(.,t,y,\nabla y) + u)\,\theta(t)dt \tag{4.28}$$

em $H^{-1}(\Omega)$, para toda $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, ou seja,

$$\begin{aligned}\langle y', \theta\rangle_{D'(0,T),D(0,T)} &= -\int_0^T y(t)\theta'(t)dt \\ &\overset{4.28}{=} \int_0^T (\Delta y(t) - f(.,t,y,\nabla y) + u)\,\theta(t)dt \\ &= \langle \Delta y(t) - f(.,.,y,\nabla y) + u, \theta\rangle_{D'(0,T),D(0,T)} \quad \text{em } H^{-1}(\Omega),\ \forall\theta \in \mathcal{D}(0,T),\end{aligned}$$

donde tem-se:

$$y_t = \Delta y - f(.,.,y,\nabla y) + u \text{ em } D'(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{4.29}$$

Uma vez que $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ então, $\Delta y \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Por hipótese $u \in L^2(Q)$ e da convergência 4.21 temos que $f(.,.,y,\nabla y) \in L^2(Q)$. Logo

$$\Delta y(t) - f(.,.,y,\nabla y) + u \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{4.30}$$

Como $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \subset \mathcal{D}'(0,T;H^{-1}(\Omega))$, de 4.29 e 4.30, vem que

$$y_t = \Delta y - f(.,.,y,\nabla y) + u \text{ em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \tag{4.31}$$

e portanto

$$y_t - \Delta y + f(.,.,y,\nabla y) = u \text{ em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{4.32}$$

Assim, como $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $y_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$,

$$y \in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right) \tag{4.33}$$

e por isso tem sentido calcular $y(0)$ e $y(0) \in L^2(\Omega)$.

Etapa 4: Dados iniciais.

Para tal, multiplica-se o problema aproximado 4.5 por uma função $\theta \in C^1([0,T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$ e integra-se de 0 a T obtendo

$$\int_0^T (y_t^m(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((y^m(t), w_j))\theta(t)dt \\ + \int_0^T (f(x,t,y^m(t),\nabla y^m(t)), w_j)\theta(t)dt = \int_0^T (u, w_j)\theta(t)dt \quad \forall w_j \in V_m.$$

Usando integração por partes vem que

$$-\int_0^T (y^m(t), w_j)\theta'(t)dt + (y^m(t), w_j)\theta(t)\Big|_0^T + \int_0^T ((y^m(t), w_j))\theta(t)dt \\ + \int_0^T (f(.,t,y^m(t),\nabla y^m(t)), w_j)\theta(t)dt = \int_0^T (u, w_j)\theta(t)dt$$

donde vem que

$$-\int_0^T (y^m(t), w_j)\theta'(t)dt - (y^m(0), w_j) + \int_0^T ((y^m(t), w_j))\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T (f(., t, y^m(t), \nabla y^m(t)), w_j)\theta(t)dt = \int_0^T (u, w_j)\theta(t)dt.$$

Usando as convergências obtidas em 4.15, 4.16 e 4.21 segue que

$$-\int_0^T (y(t), w_j)\theta'(t)dt - (y_0, w_j) + \int_0^T ((y(t), w_j))\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T (f(., t, y(t), \nabla y(t)), w_j)\theta(t)dt = \int_0^T (u, w_j)\theta(t)dt$$

e novamente pela densidade das combinações lineares finitas dos $w_j' s$ em $H_0^1(\Omega)$ vem que

$$-\int_0^T (y(t), v)\theta'(t)dt - (y_0, v) = -\int_0^T ((y(t), v))\theta(t)dt$$
$$-\int_0^T (f(., t, y(t), \nabla y(t)), v)\theta(t)dt + \int_0^T (u, v)\theta(t)dt \qquad (4.34)$$

para todo v em $H_0^1(\Omega)$.

Por outro lado, de 4.31, vem que

$$\int_0^T \langle y_t(t), v\rangle\, \theta(t)dt = \int_0^T \langle \Delta y(t), v\rangle\, \theta(t)dt$$
$$-\int_0^T (f(., t, y(t), \nabla y(t)), v)\theta(t)dt + \int_0^T (u, v)\theta(t)dt \qquad (4.35)$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ e $\theta \in C^1([0, T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Como

$$\int_0^T \langle \Delta y, v\rangle\, \theta(t)dt = -\int_0^T ((y, v))\theta(t)dt,$$

então das equações 4.34 e 4.35 segue que

$$-\int_0^T (y(t), v)\theta'(t)dt - (y_0, v) = \int_0^T \langle y_t(t), v\rangle\, \theta(t)dt. \qquad (4.36)$$

Observe que, por um lado,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \frac{d}{dt}\left[(y(t),v)\theta(t)\right]dt &= \int_0^T \frac{d}{dt}(y(t),v)\theta(t) + (y(t),v)\theta'(t)dt \\
&= \int_0^T (y_t(t),v)\theta(t) + (y(t),v)\theta'(t)dt \\
&= \int_0^T (y_t(t),v)\theta(t)dt + \int_0^T (y(t),v)\theta'(t)dt \\
&= \int_0^T (y_t(t),v)\theta(t)dt + \int_0^T \langle y(t),v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\,\theta'(t)dt
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\left[(y(t),v)\theta(t)\right]dt = \int_0^T (y_t(t),v)\theta(t)dt + \int_0^T \langle y(t),v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\,\theta'(t)dt. \tag{4.37}$$

Por outro lado, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^T \frac{d}{dt}\left[(y(t),v)\theta(t)\right]dt &= (y(t),v)\theta(t)\Big|_0^T \\
&= (y(T),v)\underbrace{\theta(T)}_{=0} - (y(0),v)\underbrace{\theta(0)}_{=1} \\
&= -(y(0),v),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\left[(y(t),v)\theta(t)\right]dt = -(y(0),v) \tag{4.38}$$

e da combinação de 4.37 com 4.38 vem que

$$-(y(0),v) = \int_0^T (y'(t),v)\theta(t)dt + \int_0^T \langle y(t),v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\,\theta'(t)dt. \tag{4.39}$$

Assim, da equação 4.39 e da igualdade dada por 4.36 temos que

$$(y(0),v) = (y_0,v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Do fato que $H_0^1(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$ tem-se

$$y(0) = y_0 \text{ em } L^2(\Omega).$$

Etapa 5: Unicidade

Suponha y^1 e y^2 soluções fracas de 4.5. Seja $v = y^1 - y^2$, logo $v \in W(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega))$ e

$$\left| \begin{array}{ll} v_t - \Delta v + [f(x,t,y^1,\nabla y^1) - f(x,t,y^2,\nabla y^2)] = 0 & \text{em } \; L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \\ v(0) = y^1(0) - y^2(0) = 0 & \text{em } \; L^2(\Omega) \end{array} \right. . \tag{4.40}$$

Multiplicando a primeira equação de 4.40 por $\theta v(t) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando em $(0,T)$ vem que

$$\int_0^T \left\langle v_t(t) - \Delta v(t) + \left[f(.,t,y^1,\nabla y^1) - f(.,t,y^2,\nabla y^2)\right], v(t) \right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \theta(t)dt = 0$$

isto é,

$$\left\langle v_t(t) - \Delta v(t) + \left[f(.,t,y^1,\nabla y^1) - f(x,t,y^2,\nabla y^2)\right], v(t) \right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0,T),$$

mas pelo fato que

$$\left\langle v_t(t) - \Delta v(t) + \left[f(.,t,y^1,\nabla y^1) - f(.,t,y^2,\nabla y^2)\right], v(t) \right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \in L^2(0,T)$$

vem que

$$\left\langle v_t(t) - \Delta v(t) + \left[f(.,t,y^1,\nabla y^1) - f(.,t,y^2,\nabla y^2)\right], v(t) \right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = 0$$

para quase todo $t \in [0,T]$, que por sua implica em

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v(t)|^2 + ||v(t)||^2 &= -\left\langle f(.,t,y^1,\nabla y^1) - f(.,t,y^2,\nabla y^2), v(t)\right\rangle_{L^2(\Omega),L^2(\Omega)} \\
&\overset{C-S}{\leq} \left|f(.,t,y^1,\nabla y^1) - f(.,t,y^2,\nabla y^2)\right| |v(t)| \\
&\overset{TVM}{\leq} k_0\left(|v(t)| + ||v(t)||\right)|v(t)| \\
&\leq k_0|v(t)|^2 + \frac{k_0^2}{2}|v(t)|^2 + \frac{1}{2}||v(t)||^2 \\
&= \left(k_0 + \frac{k_0^2}{2}\right)|v(t)|^2 + \frac{1}{2}||v(t)||^2
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}|v(t)|^2 + ||v(t)||^2 \leq \left(k_0 + \frac{k_0^2}{2}\right)|v(t)|^2. \tag{4.41}$$

Como $||v(t)||^2 \geq 0$ então

$$\frac{d}{dt}|v(t)|^2 \leq \left(k_0 + \frac{k_0^2}{2}\right)|v(t)|^2.$$

Integrando em $(0,t)$ obtem-se

$$|v(t)|^2 - |v(0)|^2 \leq \int_0^t \left(k_0 + \frac{k_0^2}{2}\right)|v(t)|^2 dt$$

o que implica que

$$|v(t)|^2 \leq |v(0)|^2 + \int_0^t \left(k_0 + \frac{k_0^2}{2}\right)|v(t)|^2 dt.$$

Usando a desigualdade de Gronwall vem que

$$\begin{aligned}
|v(t)|^2 &\leq |v(0)|^2 e^{\int_0^t \left(k_0 + \frac{k_0^2}{2}\right)ds} \\
&= |v(0|^2 e^{\left(k_0 + \frac{k_0^2}{2}\right)t} \\
&\leq \underbrace{|v(0)|^2}_{=0} e^{\left(k_0 + \frac{k_0^2}{2}\right)T} \\
&= 0
\end{aligned}$$

donde vem que $|v(t)|^2 = 0$ para todo $t \in [0,T]$. Disso e de 4.41 segue que $||v(t)|| = |v(t)| = 0$ para todo $t \in [0,T]$.

$\square$

4.2 Existência e Unicidade de Solução Forte

A solução forte de 4.1 é utilizada nos dois resultados da seção seguinte assim como no teorema da controlabilidade. A demonstração baseia-se no método de Faedo-Galerkin e sempre que possível utilizaremos resultados da solução fraca provada a pouco.

Definição 4.4 *Dizemos que $y = y(x,t)$ é solução forte de 4.1 se:*

i) $y \in W(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), L^2(\Omega))$;

ii) $y_t - \Delta y + f(x,t,y,\nabla y) = u$ *q.s. em* Q *e*

iii) $y(x,0) = y_0(x)$ *em* Ω.

Teorema 4.5 ***(Existência e Unicidade de Solução Forte)*** *Dado $u \in L^2(Q)$ e $y_0 \in H_0^1(\Omega)$, existe única solução y_{u,y_0} do problema 4.1 pertencente ao espaço $W\left(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), L^2(\Omega)\right)$ e, além disso, $y_{u,y_0} \in C\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right)$.*

Demonstração: Levando em conta que $y_0 \in H_0^1(\Omega)$ então $y_0 \in L^2(\Omega)$ e, como $u \in L^2(\Omega)$, valem todas as afirmações do teorema anterior.

Etapa 1: Problema aproximado.

Como no teorema anterior, tendo em conta que, agora, $y_0^m \to y_0$ em $H_0^1(\Omega)$.

Etapa 2: Estimativa 1.

Multiplicando o problema aproximado 4.5, por $(g_j^m)'(t)$ e somando com j variando de 1 até m, temos

$$(y_t^m(t), y_t^m(t)) + ((y^m(t), y_t^m(t))) + (f(.,t,y^m(t),\nabla y^m(t)), y_t^m(t)) = (u, y_t^m(t)),$$

isto é,

$$|y_t^m(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||y^m(t)||^2 + (f(.,t,y^m(t),\nabla y^m(t)), y_t^m(t)) = (u, y_t^m(t)),$$

donde vem que

$$\begin{aligned}
|y_t^m(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||y^m(t)||^2 &= -\left(f(.,t,y^m(t),\nabla y^m(t)),y_t^m(t)\right) + (u,y_t^m(t) \\
&\leq |f(.,t,y^m(t),\nabla y^m(t))|.|y_t^m(t)| + |u|.|y_t^m(t)| \\
&= \left(|f(.,t,y^m(t),\nabla y^m(t))| + |u|\right)|y_t^m(t)| \\
&\overset{Young}{\leq} \frac{1}{2}\left(|f(.,t,y^m(t),\nabla y^m(t))| + |u|\right)^2 + \frac{1}{2}|y_t^m(t)|^2 \\
&= \frac{1}{2}|f(.,t,y^m(t),\nabla y^m(t))|^2 \\
&\qquad + |f(.,t,y^m(t),\nabla y^m(t))|.|u| + \frac{1}{2}|u|^2 + \frac{1}{2}|y_t^m(t)|^2 \\
&\overset{Young}{\leq} |f(.,t,y^m(t),\nabla y^m(t))|^2 + |u|^2 + \frac{1}{2}|y_t^m(t)|^2.
\end{aligned}$$

Tendo em consideração a desigualdade 4.8, página 67, vem que

$$|y_t^m(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||y^m(t)||^2 \leq (k_0^2+2)\left[|y^m(t)|^2 + ||y^m(t)||^2 + |f(.,t,0,0)|^2\right] + |u|^2 + \frac{1}{2}|y_t^m(t)|^2$$

donde vem que

$$\begin{aligned}
|y_t^m(t)|^2 + \frac{d}{dt}||y^m(t)||^2 &\leq 2(k_0^2+2)\left[|y^m(t)|^2 + ||y^m(t)||^2\right] \\
&\qquad + 2(k_0^2+2)|f(.,t,0,0)|^2 + 2|u|^2. \qquad (4.42)
\end{aligned}$$

Pelo fato de $H_0^1(\Omega)$ ter imersão contínua em $L^2(\Omega)$, então, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ existe $c_4 > 0$ tal que $|v|_{L^2(\Omega)} \leq c_4||v||_{H_0^1(\Omega)}$. Disso e da inequação 4.42 vem que

$$\begin{aligned}
|y_t^m(t)|^2 + \frac{d}{dt}||y^m(t)||^2 &\leq 2(k_0^2+2)(c_4^2+1)||y^m(t)||^2 \\
&\qquad + 2(k_0^2+2)|f(.,t,0,0)|^2 + 2|u|^2
\end{aligned}$$

Integrando em $(0,t)$, $t \leq T$ e usando que $|y_t^m(t)| \geq 0$ tem-se

$$\begin{aligned}
||y^m(t)||^2 - ||y^m(0)||^2 &\leq 2(k_0^2+2)(c_4^2+1)\int_0^t ||y^m(s)||^2 ds \\
&\qquad + 2(k_0^2+2)|f(.,.,0,0)|^2_{L^2(Q)} + 2|u|^2_{L^2(Q)}
\end{aligned}$$

donde vem que

$$\begin{aligned}||y^m(t)||^2 &\leq ||y^m(0)||^2 + 2(k_0^2+2)|f(.,.,0,0)|^2_{L^2(Q)} + 2|u|^2_{L^2(Q)} \\ &\quad +2(k_0^2+2)(c_4^2+1)\int_0^t ||y^m(s)||^2 ds. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Por hipótese, $f(.,.,0,0) \in L^2(Q)$, $u \in L^2(Q)$. Do problema aproximado vem que $y_0^m \in H_0^1(\Omega)$. Logo, usando a desigualdade de Gronwall obtemos da expressão 4.43

$$\begin{aligned}||y^m(t)||^2 &\leq \left[||y_0^m||^2 + 2(k_0^2+2)|f(.,.,0,0)|^2_{L^2(Q)} + 2|u|^2_{L^2(Q)}\right].e^{\int_0^t 2(k_0^2+2)(c_4^2+1)ds} \\ &\leq \left[||y_0^m||^2 + 2(k_0^2+2)|f(.,.,0,0)|^2_{L^2(Q)} + 2|u|^2_{L^2(Q)}\right].e^{2(k_0^2+2)(c_4^2+1)T} \\ &\leq \infty,\end{aligned}$$

donde vem que

$$y^m \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$$

e

$$y_t^m \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Pelo teorema 2.12 existe uma subsucessão, ainda denotada por $\{y^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$y^m \overset{*}{\rightharpoonup} y \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{4.44}$$

Do teorema 2.13 obtemos uma subsucessão, ainda denotada por $\{y_t^m\}_{m\in\mathbb{N}}$, que converge na topologia fraca $\sigma(E,E')$, isto é,

$$y_t^m \rightharpoonup y_t \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.45}$$

Etapa 2: Estimativa 2.

Multiplicando o problema aproximado por λ_j e somando de $j=1$ até m, vem que

$$(y_t^m(t), -\Delta y^m(t)) + ((y^m(t), -\Delta y^m(t))) + (f(.,t,y^m,\nabla y^m), -\Delta y^m(t)) = (u, -\Delta y^m(t)),$$

ou seja,

$$((y_t^m(t), y^m(t))) + (\Delta y^m(t), \Delta y^m(t)) + (f(., t, y^m, \nabla y^m), -\Delta y^m(t)) = (u, -\Delta y^m(t))\,.$$

Disso vem que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y^m(t)\| + |\Delta y^m(t)| &= (u, -\Delta y^m(t)) + (f(., t, y^m, \nabla y^m), -\Delta y^m(t)) \\
&\leq |u|.|\Delta y^m(t)| + |f(., t, y^m, \nabla y^m)|.|\Delta y^m(t)| \\
&\leq 4|u|^2 + 4|f(., t, y^m, \nabla y^m(t))|^2 + \frac{1}{2}|\Delta y^m(t)|^2,
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos que $ab \leq 4a^2 + \frac{1}{4}b^2$ para a e b reais não negativos. Logo

$$\frac{d}{dt}\|y^m(t)\| + |\Delta y^m(t)| \leq 8|u|^2 + 8|f(., t, y^m, \nabla y^m(t))|^2. \tag{4.46}$$

Da estimativa 4.3, página 63, obtemos

$$|f(., t, y^m, \Delta y^m)|^2 \leq (k_0^2 + 2)\left(|y^m(t)|^2 + |\nabla y^m(t)|^2\right) + |f(., t, 0, 0)|^2. \tag{4.47}$$

Substituindo 4.47 em 4.46 temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|y^m(t)\| + |\Delta y^m(t)| &\leq 8|u|^2 + 8\left[(k_0^2 + 2)\left(|y^m(t)|^2 + |\nabla y^m(t)|^2\right) + |f(., t, 0, 0)|^2\right] \\
&= 8|u|^2 + 8(k_0^2 + 2)|y^m(t)|^2 + 8(k_0^2 + 2)|\nabla y^m(t)|^2 + 8|f(., t, 0, 0)|^2.
\end{aligned}$$

Integrando em $(0, t)$, $t \leq T$

$$\begin{aligned}
&||y^m(t)||^2 + \int_0^t |\Delta y^m(s)|^2 ds \\
\leq\ & 8|u|^2_{L^2(Q)} + 8|f(., ., 0, 0)|^2_{L^2(Q)} + 8(k_0^2 + 2)\int_0^T |y^m(s)|^2 ds \\
&\qquad + 8(k_0^2 + 2)\int_0^T |\nabla y^m(s)|^2 ds + ||y_0^m(t)||^2 \\
=\ & 8|u|^2_{L^2(Q)} + 8|f(., ., 0, 0)|^2_{L^2(Q)} + 8(k_0^2 + 2)|y^m|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\qquad + 8(k_0^2 + 2)||y^m||^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + ||y_0^m||,
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\Delta y^m \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \Rightarrow y^m \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)). \tag{4.48}$$

Como $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ tem imersão compacta em $H_0^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$ então, pelo teorema de Aubin-Lions[4], $W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))$ tem imersão compacta em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, de onde segue que

$$y^m \longrightarrow y \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$$

Etapa 3: Passagem ao limite.

Análogo ao feito na Etapa 3 do teorema anterior, obtem-se:

$$\int_0^T ((y(t),\psi(t)))dt = \int_0^T (-y_t(t) - f(.,t,y,\nabla y) + u, \psi(t))dt, \tag{4.49}$$

para toda $\psi \in X = \{\varphi \in W(0,T;H_0^1(\Omega),L^2(\Omega)); \varphi(0)=\varphi(T)=0\}$.

Tomando, em particular, $\psi = \phi \in \mathcal{D}(Q)$ em 4.49 tem-se

$$\int_Q -\Delta y.\phi = \int_Q y_t\phi - \int_Q f(x,t,y,\nabla y)\phi + \int_Q u\phi,\ \forall\phi \in \mathcal{D}(Q)$$

de onde vem que

$$\int_Q (y_t - \Delta y + f(x,t,y,\nabla y))\phi = \int_Q u\phi,\ \forall\phi\in\mathcal{D}(Q)$$

e por Du Bois Raymond

$$y_t - \Delta y + f(x,t,y,\nabla y) = u \text{ q.s. em } Q.$$

De 4.45 e 4.48 vem que

$$y \in W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))$$

[4]teorema 2.24, página 18.

e portanto

$$y \in C\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right)$$

fazendo sentido calcular $y(x,0)$ e $y(.,0) \in H_0^1(\Omega)$.

Etapa 4: Dados iniciais.

De modo análogo ao teorema anterior prova-se que $y(.,0) = y_0$.

Etapa 5: Unicidade.

Para demonstrar a unicidade, suponha y^1 e y^2 duas soluções fortes do problema 4.1. Defina $v = y^1 - y^2$, logo

$$\left| \begin{array}{ll} v_t - \Delta v + [f(x,t,y^1,\nabla y^1) - f(x,t,y^2,\nabla y^2)] = 0 & \text{q.s. em } Q \\ v(x,0) = 0 & \text{em } \Omega \\ v \in W(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), L^2(\Omega)) & \end{array} \right.$$

Multiplicando a equação acima por v e integrando em Ω obtem-se

$$\int_\Omega v_t(t)v(t)dx - \int_\Omega \Delta v(t)v(t)dx + \int_\Omega [f(x,t,y^1,\nabla y^1) - f(x,t,y^2,\nabla y^2)]v(t)dx = 0$$

o que implica que

$$(v_t(t), v(t)) + ((v(t), v(t))) + ([f(x,t,y^1,\nabla y^1) - f(x,t,y^2,\nabla y^2)], v(t)) = 0,$$

donde vem que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v(t)|^2 + ||v(t)||^2 &= -\big(f(x,t,y^1,\nabla^1) - f(x,t,y^2,\nabla y^2), v(t)\big) \\
&\leq \big|(f(x,t,y^1,\nabla y^1) - f(x,t,y^2,\nabla y^2), v(t))\big|_{\mathbb{R}} \\
&\overset{Schwarz}{\leq} \big|f(x,t,y^1,\nabla y^1) - f(x,t,y^2,\nabla y^2)\big|\,|v(t)| \\
&\overset{T.V.M.}{\leq} \big(k_0|y^1(t) - y^2(t)| + k_0|\nabla y^1(t) - \nabla y^2(t)|\big)\,|v(t)| \\
&= k_0\left(|v(t)| + ||v(t)||\right)|v(t)| \\
&\leq \frac{k_0^2}{2}|v(t)|^2 + \frac{1}{2}|v(t)|^2 + \frac{k_0^2}{2}|v(t)|^2 + \frac{1}{2}||v(t)||^2 \\
&= \left(k_0^2 + \frac{1}{2}\right)|v(t)|^2 + \frac{1}{2}||v(t)||^2,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}|v(t)|^2 + ||v(t)||^2 \leq \big(2k_0^2 + 1\big)\,|v(t)|^2. \tag{4.50}$$

Integrando de 0 a t, $t \leq T$ e usando que $||v(t)||^2 \geq 0$ segue que

$$|v(t)|^2 = |v(0)|^2 + \big(2k_0^2 + 1\big)\int_0^t |v(s)|^2 ds$$

e por Gronwall

$$
\begin{aligned}
|v(t)|^2 &\leq |v(0)|^2.e^{\left(2k_0^2+1\right)t} \\
&\leq |v(0)|^2.e^{\left(2k_0^2+1\right)T}.
\end{aligned}
$$

Como $v(x,0) = 0$ em Ω, $|v(0)|^2 = 0$ e portanto $|v(t)|^2 = 0$ para todo $t \in [0,T]$. Disso e de 4.50 vem que $||v(t)||^2 = 0$ e assim $v = 0 \ \ \forall t \in [0,T]$, e portanto $y^1 = y^2$.

□

4.3 Continuidade e Diferenciabilidade

Esta seção foi criada especialmente para conter os teoremas 4.6 e 4.7, os quais vêm para facilitar a demonstração da controlabilidade aproximada.

4.3.1 Continuidade com Respeito aos Dados Iniciais

No que segue mostraremos a continuidade da solução de 4.1 com relação aos dados iniciais.

Teorema 4.6 ***(Continuidade com respeito aos dados iniciais)*** *Considere o problema 4.1 e as hipóteses 4.2 sobre a função f.*

a) Suponha que

$$y_0^m \to y_0, \ \text{em } L^2(\Omega) \text{ e } u^m \rightharpoonup u \text{ fraco em } L^2(Q).$$

Então

$$\begin{aligned}
&y_{u^m,y_0^m} \rightharpoonup y_{u,y_0} \text{ em } W(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega));\\
&y_{u^m,y_0^m} \to y_{u,y_0} \text{ em } C([0,T];L^2(\Omega));\\
&y_{u^m,y_0^m} \to y_{u,y_0} \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ e}\\
&y_{u^m,y_0^m}(T) \rightharpoonup y_{u,y_0}(T) \text{ em } H_0^s(\Omega), \ \forall s \in [0,1).
\end{aligned}$$

b) Suponha que

$$y_0^m \to y_0, \ \text{em } H_0^1(\Omega) \text{ e } u^m \to u \text{ forte em } L^2(Q).$$

Então

$$y_{u^m,y_0^m} \to y_{u,y_0} \text{ em } W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega)).$$

Demonstração:
Item a)

Suponha $\{y_0^m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ tal que $y_0^m \to y_0$ em $L^2(\Omega)$.

Pelo teorema 4.3 o problema

$$\left|\begin{array}{ll}
y_t - \Delta y + f(x,t,y,\nabla y) = u^m & \text{em } Q\\
y(x,0) = 0 & \text{em } \Sigma\\
y(x,0) = y_0^m(x) & \text{em } \Omega
\end{array}\right. \tag{4.51}$$

tem única solução fraca $y_{u_m,y_{0m}} \in W(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega))$.

Analogamente, existe única $y_{u,y_0} \in W(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega))$ que é solução fraca de

$$\left|\begin{array}{ll} y_t - \Delta y + f(x,t,y,\nabla y) = u & \text{em } Q \\ y(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{em } \Omega \end{array}\right. .$$

Denotando $z^m = y^m - y$, onde $y^m = y_{u^m,y_0^m}$ e $y = y_{u,y_0}$, temos que existe única $z^m \in W(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega))$

$$\int_Q (z_t^m - \Delta z^m + f(x,t,y^m,\nabla y^m) - f(x,t,y,\nabla y))\psi = \int_Q (u^m - u)\psi \tag{4.52}$$

para toda $\psi \in W(0,T;H_0^1(\Omega),L^2(\Omega))$ tal que $\psi(0) = \psi(T) = 0$ e além disso $z^m(x,0) = z_0^m(x) = y_0^m - y_0$ em Ω e $z^m(.,0) \to 0$ em $L^2(\Omega)$.

Do teorema do valor médio temos a existência de $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} & f(x,t,y^m,\nabla y^m) - f(x,t,y,\nabla y) \\ = \; & \frac{\partial}{\partial \xi} f\left((x,t,y,\nabla y) + \theta(0,0,y^m - y,\nabla y^m - \nabla y)\right)(y^m - y) \\ & \quad \frac{\partial}{\partial \eta} f\left((x,t,y,\nabla y) + \theta(0,0,y^m - y,\nabla y^m - \nabla y)\right)(\nabla y^m - \nabla y) \\ = \; & \frac{\partial}{\partial \xi} f\left((x,t,y,\nabla y) + \theta(0,0,z^m,\nabla z^m)\right)(z^m) \\ & \quad \frac{\partial}{\partial \eta} f\left((x,t,y,\nabla y) + \theta(0,0,z^m,\nabla z^m)\right)(\nabla z^m). \end{aligned}$$

No que segue usaremos a notação:

$$a_m = \frac{\partial}{\partial \xi} f\left((x,t,y,\nabla y) + \theta(0,0,z^m,\nabla z^m)\right);$$

$$\vec{b}_m = \frac{\partial}{\partial \eta} f\left((x,t,y,\nabla y) + \theta(0,0,z^m,\nabla z^m)\right).$$

Deste modo, da equação 4.52 vem que

$$\int_Q (z_t^m - \Delta z^m + a_m z^m + \vec{b}_m \nabla z^m)\psi = \int_Q (u^m - u)\psi \tag{4.53}$$

para toda $\psi \in W(0,T;H_0^1(\Omega),L^2(\Omega))$ tal que $\psi(0)=\psi(T)=0$. Donde resulta que

$$z_t^m - \Delta z^m + a_m z^m + \vec{b}_m \nabla z^m = (u^m - u) \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{4.54}$$

Como $z^m \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ então compondo a equação acima com z^m vem que

$$(z_t^m(t), z^m(t)) - (\Delta z^m(t), z^m(t)) + (a_m z^m(t), z^m(t)) + (\vec{b}_m \nabla z^m(t), z^m(t)) = (u^m - u, z^m(t))$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z^m(t)|^2 + ||z^m(t)||^2 \\
\leq\ & \int_\Omega |a_m z^m(t) z^m(t)|_{\mathbb{R}} dx + \int_\Omega |\vec{b}_m \nabla z^m(t) z^m(t)|_{\mathbb{R}} dx + \int_\Omega |(u^m - u) z^m(t)|_{\mathbb{R}} dx \\
\leq\ & k_0 \int_\Omega |z^m(t)|_{\mathbb{R}}^2 + k_0 \int_\Omega |\nabla z^m(t)|_{\mathbb{R}}^n |z^m(t)|_{\mathbb{R}} dx + \int_\Omega |u^m - u|_{\mathbb{R}} |z^m(t)|_{\mathbb{R}} dx \\
\leq\ & k_0 |z^m(t)|^2 + \frac{1}{2}||z^m(t)||^2 + \frac{k_0^2}{2}|z^m(t)|^2 + \frac{1}{2}|u^m - u|^2 + \frac{1}{2}|z^m(t)|^2 \\
=\ & \frac{1}{2}(k_0+1)^2 |z^m(t)|^2 + \frac{1}{2}||z^m(t)||^2 + \frac{1}{2}|u^m - u|^2,
\end{aligned}$$

donde vem que

$$\frac{d}{dt}|z^m(t)|^2 + ||z^m(t)||^2 \leq (k_0+1)^2 |z^m(t)|^2 + |u^m - u|^2.$$

Integrando de 0 a t, $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
&|z^m(t)|^2 + \int_0^t ||z^m(s)||^2 ds \\
&\leq (k_0+1)^2 \int_0^t |z^m(s)|^2 ds + \int_0^t |u^m - u|^2 ds + |z^m(0)|^2 \\
&\leq (k_0+1)^2 \int_0^t |z^m(s)|^2 ds + \underbrace{\int_0^T |u^m - u|^2 ds + |z^m(0)|^2}_{\text{limitado por C}} \\
&\leq C + (k_0+1)^2 \int_0^t |z^m(s)|^2 ds
\end{aligned}$$

e por Gronwall

$$z^m \text{ é limintada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

e além disso,

$$z^m \text{ é limitada em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Das limitações acima temos que

$$z_t^m = \Delta z^m - a_m z^m - \vec{b}_m \nabla z^m + u^m - u \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Logo,

$$\begin{array}{l} z^m \overset{*}{\rightharpoonup} z \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \\ z^m \rightharpoonup z \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ e} \\ z_t^m \rightharpoonup z_t \text{ em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \end{array}$$

de onde vem que

$$z^m \rightharpoonup z \text{ em } W(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega))$$

e como $W(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega))$ tem imersão compacta em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ vem que

$$z^m \to z \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Da equação 4.54, tomando n no lugar de m, temos que

$$z_t^n - \Delta z^n + a_n z^n + \vec{b}_n \nabla z^n = u^n - u. \tag{4.55}$$

Considerando $w^{m,n} = z^m - z^n$, da diferença de 4.54 e 4.55 temos que

$$w_t^{m,n} - \Delta w^{m,n} + a_m z^m - a_n z^n + \vec{b}_m \nabla z^m - \vec{b}_n \nabla z^n = u^m - u^n.$$

Compondo com $w^{m,n}(t)$ vem que

$$\begin{array}{r} (w_t^{m,n}(t), w^{m,n}(t)) - (\Delta w^{m,n}(t), w^{m,n}(t)) + (a_m z^m(t), w^{m,n}(t)) - (a_n z^n(t), w^{m,n}(t)) \\ +(\vec{b}_m \nabla z^m(t), w^{m,n}(t)) - (\vec{b}_n \nabla z^n(t), w^{m,n}(t)) = (u^m - u^n, w^{m,n}(t)) \end{array}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w^{m,n}(t)|^2 + ||w^{m,n}(t)||^2 \\ = \; & \Big(-a_m z^m(t) + a_n z^n(t) - \vec{b}_m \nabla z^m(t) + \vec{b}_n \nabla z^n(t) + u^m - u^n, w^{m,n}(t)\Big). \end{aligned}$$

Integrando de 0 a t, $t \in [0,T]$,

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}|w^{m,n}(t)|^2 + \int_0^t ||w^{m,n}(s)||^2 ds \\
= & \int_0^t \Big(-a_m z^m(s) + a_n z^n(s) - \vec{b}_m \nabla z^m(s) + \vec{b}_n \nabla z^n(s) + u^m - u^n, w^{m,n}(s) \Big) ds \\
& \qquad + \frac{1}{2}|w^{m,n}(0)|^2 \\
\leq & \Bigg[\underbrace{\left(\int_0^T \left| -a_m z^m(s) + a_n z^n(s) - \vec{b}_m \nabla z^m(s) + \vec{b}_n \nabla z^n(s) + u^m - u^n \right|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{limitada por C}} \\
& \qquad . \left(\int_0^T |w^{m,n}(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \Bigg] + \frac{1}{2}|w^{m,n}(0)|^2 \\
\leq & \ C|w^{m,n}|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \frac{1}{2}|w^{m,n}(0)|^2,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
|w^{m,n}(t)|^2 + \int_0^t ||w^{m,n}(s)||^2 ds \leq 2C|w^{m,n}|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + |w^{m,n}(0)|^2 \tag{4.56}
$$

tomando o supremo com $t \in [0,T]$ vem que

$$
||w^{m,n}||_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leq \underbrace{C|w^{m,n}|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + |w^{m,n}(0)|^2}_{\text{limitada e } \to 0},
$$

logo

$$
w^{m,n} \to 0 \text{ em } C([0,T];L^2(\Omega)),
$$

ou seja, z^m é de Cauchy em $C([0,T];L^2(\Omega))$ e portanto

$$
z^m \to z \text{ em } C([0,T];L^2(\Omega)).
$$

Do mesmo modo, de 4.56, resulta que

$$
z^m \to z \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).
$$

Como as sequências $\{a_m\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(Q)$ e $\left\{\vec{b}_m\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $[L^\infty(Q)]^n$ vem que

$$a_m \overset{*}{\rightharpoonup} a \text{ fraco } * \text{ em } L^\infty(Q) \tag{4.57}$$

e

$$\vec{b}_m \overset{*}{\rightharpoonup} \vec{b} \text{ fraco } * \text{ em } [L^\infty(Q)]^n \tag{4.58}$$

Assim, usando as convergências obtidas com as estimativas anteriores, aplicamos o limite em 4.53 e obtemos

$$-\int_Q z\psi_t + \int_Q \nabla z \nabla \psi + \int_Q az\psi + \int_Q \vec{b}\nabla z\psi = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{X}$$

e ainda temos que $z(x,0) = 0$ em Ω, uma vez que $z_0^m = (y_0^m - y_0) \to 0$ em $L^2(\Omega)$, isto é, z é a única solução fraca do problema

$$\left| \begin{array}{ll} z_t - \Delta z + az + \vec{b}\nabla z = 0 & \text{em } Q \\ z(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ z(x,0) = 0 & \text{em } \Omega \end{array} \right. , \tag{4.59}$$

o que implica que $z \equiv 0$ em Q. Logo, da definição de z^m vem que

$$\begin{array}{l} y_{u^m,y_0^m} \rightharpoonup y_{u,y_0} \text{ em } W(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)); \\ y_{u^m,y_0^m} \to y_{u,y_0} \text{ forte em } C(0,T;L^2(\Omega)) \text{ e} \\ y_{u^m,y_0^m} \to y_{u,y_0} \text{ forte em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \end{array}$$

Como $W(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega))$ tem imersão contínua em $C(0,T;H_0^s(\Omega))$, $s \in [0,1)$, das limitações anteriores vem que

$$z^m \text{ é limitada em } C(0,T;H_0^s(\Omega)), \ \forall s \in [0,1)$$

e com maior razão,

$$z^m(T) \text{ é limitada em } H_0^s(\Omega), \ \forall s \in [0,1)$$

e passando a subsequência, se necessário, temos que

$$z^m(T) \rightharpoonup \psi \text{ em } H_0^s(\Omega).$$

No entanto, $z^m(T) \to 0$ em $L^2(\Omega)$ e, como $H_0^s(\Omega) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, por unicidade de limites segue que

$$y^m(T) - y(T) \rightharpoonup 0 \text{ em } H_0^s(\Omega),\ \forall s \in [0,1).$$

e pela definição de y^m e y temos que

$$y_{u^m,y_0^m}(T) \rightharpoonup y_{u,y_0}(T) \text{ em } H_0^s(\Omega),\ \forall s \in [0,1).$$

o que demonstra o item a).

Item b)

Suponha, agora, $y_0^m \to y_0$ em $H_0^1(\Omega)$ e $u^m \to u$ em $L^2(Q)$. Pelo Teorema 4.5 o problema

$$\left| \begin{array}{ll} y_t^m - \Delta y^m + f(x,t,y^m,\nabla y^m) = u^m & \text{em } Q \\ y^m(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ y^m(x,0) = y_0^m(x) & \text{em } \Omega \end{array} \right. \tag{4.60}$$

possui única solução forte y_{u^m,y_0^m} pertencente a $W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))$.

Analogamente, para $u \in L^2(Q)$ e $y_0 \in H_0^1(\Omega)$, o problema

$$\left| \begin{array}{ll} y_t - \Delta y + f(x,t,y,\nabla y) = u & \text{em } Q \\ y(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{em } \Omega \end{array} \right. \tag{4.61}$$

tem única solução forte y_{u,y_0} em $W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))$.

Considerando $y^m = y_{u^m,y_0^m}$ e $y = y_{u,y_0}$, então $z^m = y^m - y \in W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))$ e

$$\left| \begin{array}{ll} z_t^m - \Delta z^m + [f(x,t,y^m,\nabla y^m) - f(x,t,y,\nabla y)] = u^m - u & \text{em } Q \\ z^m(x,0) = z_0^m(x) = y_0^m(x) - y_0(x) & \text{em } \Omega \end{array} \right. . \tag{4.62}$$

Multiplicando 4.62 por $z^m(t)$ e integrando em Ω obtemos

$$\begin{aligned} &(z_t^m(t), z^m(t)) - \langle \Delta z^m(t), z^m(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \\ &\qquad + \int_\Omega [f(x,t,y^m,\nabla y^m) - f(x,t,y,\nabla y)]\, z^m(t)dx = \int_\Omega (u^m - u) z^m(t)dx, \end{aligned}$$

de onde vem que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z^m(t)|^2 + ||z^m(t)||^2 \leq \left(k_0 + \frac{k_0^2}{2}\right)|z^m(t)|^2 + \frac{1}{2}||z^m(t)||^2 + \frac{1}{2}|u^m - u| + \frac{1}{2}|z^m(t)|.$$

Integrando em $(0,t)$, $t \leq T$ vem

$$\begin{aligned} & |z^m(t)|^2 + \int_0^t ||z^m(s)||^2 ds \\ \leq \ & |z_0^m|^2 + \left(\frac{k_0^2}{2} + k_0 + \frac{1}{2}\right)\int_0^t |z^m(s)|^2 ds + \int_0^t \frac{1}{2}|(u^m - u)|^2 ds \\ \leq \ & |z_0^m|^2 + \frac{1}{2}(k_0+1)^2 \int_0^t |z_m(s)|^2 ds + \frac{1}{2}|u^m - u|^2_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Por Gronwall

$$\begin{aligned} |z^m(t)|^2 \ & \leq \ \left(|z_0^m|^2 + \frac{1}{2}|u^m - u|^2_{L^2(Q)}\right).e^{\int_0^t \frac{1}{2}(k_0+1)^2 ds} \\ & \leq \ \left(|z_0^m|^2 + \frac{1}{2}|u^m - u|^2_{L^2(Q)}\right).e^{\frac{1}{2}(k_0+1)^2 T}. \end{aligned}$$

Como $y_0^m \to y_0$ em $H_0^1(\Omega)$ implica que $y_0^m \to y_0$ em $L^2(\Omega)$ e portanto $z_0^m = y_0^m - y_0 \to 0$ em $L^2(\Omega)$. Também, pelo fato que $u^m \to u$ em $L^2(Q)$ vem que $u^m - u \to 0$ em $L^2(Q)$, assim

$$z^m \longrightarrow 0 \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

e

$$z^m \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Analogamente, multiplicando 4.62 por $z_t^m(t)$ e usando a regularidade elítica[5] obtem-se

$$z^m \longrightarrow 0 \text{ em } W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega)),$$

portanto

$$y_{u^m,y_0^m} \longrightarrow y_{u,y_0} \text{ em } W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega)).$$

[5]teorema 2.23, página 18.

□

4.3.2 Diferenciabilidade com Respeito aos Dados Iniciais

Esse resultado é o primeiro passo para estabelecer a controlabilidade. Ele nos será útil para calcular a derivada de Gateux do funcional envolvido no teorema 4.8.

Teorema 4.7 ***(Diferenciabilidade com respeito aos dados iniciais)*** *Considere as hipóteses 4.2 sobre a função f. Dada $y_0 \in H_0^1(\Omega)$, o funcional*

$$\begin{array}{rcl} F : L^2(Q) & \rightarrow & H_0^1(\Omega) \\ u & \mapsto & F(u) = y_{u,y_0}(T) \end{array}$$

é de classe C^1. Além disso, $DF(u).v = z_v(T)$, onde z_v é solução forte do seguinte P.V.I.F:

$$\left| \begin{array}{ll} z_t - \Delta z + \dfrac{\partial}{\partial \xi} f(x,t,y_{u,y_0},\nabla y_{u,y_0}) z + \dfrac{\partial}{\partial \eta} f(x,t,y_{u,y_0},\nabla y_{u,y_0}) \nabla z = v & em\ Q \\ z(x,t) = 0 & em\ \Sigma \\ z(x,0) = 0 & em\ \Omega \end{array} \right. .$$

Demonstração: Pelo teorema 4.5, dado $y_0 \in H_0^1(\Omega)$ e $u \in L^2(Q)$, existe única solução do problema

$$\left| \begin{array}{ll} y_t - \Delta y + f(x,t,y,\nabla y) = u & \text{em } Q \\ y(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{em } \Omega \end{array} \right. . \tag{4.63}$$

tal que $y_{u,y_0} \in C\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right)$. Logo $y_{u,y_0}(T) \in H_0^1(\Omega)$ e portanto o funcional F está bem definido.

No que segue vamos considerar as seguintes notações:

$$y = y_{u,y_0}, \quad y^\lambda = y_{u+\lambda v, y_0}, \quad z^\lambda = \frac{(y^\lambda - y)}{\lambda}$$

Para provar que F é de classe C^1, inicialmente é necessário mostrar que a derivada de Gateux existe, isto é, mostraremos que

$$DF(u).v = \lim_{\lambda \to 0} \frac{F(u+\lambda v) - F(u)}{\lambda} = z_v(T), \tag{4.64}$$

para todo $u, v \in L^2(Q)$. Entretanto, veja que

$$z^\lambda(T) = \frac{(y^\lambda(T) - y(T))}{\lambda} = \frac{F(u+\lambda v) - F(u)}{\lambda}.$$

Assim, para mostrar a existência do limite em 4.64, basta provar que

$$z^\lambda(T) \to z_v(T) \text{ em } H_0^1(\Omega) \text{ quando } \lambda \to 0.$$

Consideremos $v \in L^2(Q)$ então $(u + \lambda v) \in L^2(Q)$ e pelo teorema 4.5, o problema

$$\left| \begin{array}{ll} y_t - \Delta y + f(x,t,y,\nabla y) = u + \lambda v & \text{em } Q \\ y(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{em } \Omega \end{array} \right. \tag{4.65}$$

tem única solução

$$y^\lambda = y_{u+\lambda v, y_0} \in W\left(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), L^2(\Omega)\right).$$

Da mesma forma, o problema 4.63 tem única solução forte

$$y = y_{u,y_0} \in W\left(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), L^2(\Omega)\right).$$

Deste modo, para cada λ real , $z^\lambda \in W\left(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), L^2(\Omega)\right)$ e

$$\left| \begin{array}{ll} z_t^\lambda - \Delta z^\lambda + \dfrac{1}{\lambda}\left[f(x,t,y^\lambda,\nabla y^\lambda) - f(x,t,y,\nabla y)\right] = v & \text{em } Q \\ z^\lambda(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ z^\lambda(x,0) = 0 & \text{em } \Omega \end{array} \right. . \tag{4.66}$$

Denotando $g_\lambda(x,t) = \dfrac{1}{\lambda}\left[f(x,t,y^\lambda,\nabla y^\lambda) - f(x,t,y,\nabla y)\right]$, então o problema 4.66 é equivalente a

$$\left|\begin{array}{ll} z_t^\lambda - \Delta z^\lambda = -g_\lambda(x,t) + v & \text{em } Q \\ z^\lambda(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ z^\lambda(x,0) = 0 & \text{em } \Omega \end{array}\right. . \tag{4.67}$$

Pelo teorema do valor médio existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} g_\lambda(x,t) &= \frac{1}{\lambda}\left[f(x,t,y^\lambda,\nabla y^\lambda) - f(x,t,y,\nabla y)\right] \qquad (4.68)\\ &= \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}f\left((x,t,y^\lambda,\nabla y^\lambda) + \theta(0,0,y^\lambda - y,\nabla y^\lambda - \nabla y)\right)(y^\lambda - y)\right.\\ &\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial\eta}f\left((x,t,y^\lambda,\nabla y^\lambda) + \theta(0,0,y^\lambda - y,\nabla y^\lambda - \nabla y)\right)(\nabla y^\lambda - \nabla y)\right]. \end{aligned}$$

Denotando $w^\lambda = y + \theta(y^\lambda - y)$, usando a linearidade do gradiente e a definição de z^λ tem-se

$$g_\lambda(x,t) = \left[\frac{\partial}{\partial\xi}f\left(x,t,w^\lambda,\nabla w^\lambda\right)z^\lambda + \frac{\partial}{\partial\eta}f\left(x,t,w^\lambda,\nabla w^\lambda\right)\nabla z^\lambda\right]. \tag{4.69}$$

Substituindo 4.69 em 4.67,

$$\left|\begin{array}{ll} z_t^\lambda - \Delta z^\lambda = -\left[\dfrac{\partial}{\partial\xi}f\left(x,t,w^\lambda,\nabla w^\lambda\right)z^\lambda + \dfrac{\partial}{\partial\eta}f\left(x,t,w^\lambda,\nabla w^\lambda\right)\nabla z^\lambda\right] + v & \text{em } Q \\ z^\lambda(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ z^\lambda(x,0) = 0 & \text{em } \Omega \end{array}\right. .$$

Multiplicando por $z^\lambda(x,t)$ e integrando sobre $\Omega \times (0,\tilde{t})$, $\tilde{t} \in [0,T]$, obtemos:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\tilde{t}}\int_\Omega z_t^\lambda(x,t)z^\lambda(x,t)dxdt - \int_0^{\tilde{t}}\int_\Omega \Delta z^\lambda(x,t)z^\lambda(x,t)dxdt = \int_0^{\tilde{t}}\int_\Omega vz^\lambda(x,t)dxdt \\ &- \int_0^{\tilde{t}}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial\xi}f(x,t,w^\lambda,\nabla w^\lambda)(z^\lambda(x,t))^2 + z^\lambda(x,t)\frac{\partial}{\partial\eta}f(x,t,w^\lambda,\nabla w^\lambda)\nabla z^\lambda dxdt, \end{aligned}$$

donde vem que

$$\int_0^{\tilde{t}} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z^\lambda(x,t)|^2 dt + \int_0^{\tilde{t}} |\nabla z^\lambda(x,t)|^2 dt = \int_0^{\tilde{t}}\int_\Omega v z^\lambda(x,t)dxdt$$
$$-\int_0^{\tilde{t}}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial \xi} f(x,t,w^\lambda,\nabla w^\lambda)(z^\lambda(x,t))^2 + z^\lambda(x,t)\frac{\partial}{\partial \eta} f(x,t,w^\lambda,\nabla w^\lambda)\nabla z^\lambda dxdt.$$

Do fato que $z^\lambda(x,0) = 0$ em Ω vem que

$$\frac{1}{2}|z^\lambda(\tilde{t})|^2 + \int_0^{\tilde{t}} ||z^\lambda(t)||^2 dt = \int_0^{\tilde{t}}\int_\Omega v z^\lambda(x,t)dxdt$$
$$-\int_0^{\tilde{t}}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial \xi} f(x,t,w^\lambda,\nabla w^\lambda)(z^\lambda(x,t))^2 + z^\lambda(x,t)\frac{\partial}{\partial \eta} f(x,t,w^\lambda,\nabla w^\lambda)\nabla z^\lambda dxdt.$$

Da hipótese iv) de 4.2 e da desigualdade de Young obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}|z^\lambda(\tilde{t})|^2 + \int_0^{\tilde{t}} ||z^\lambda(t)||^2 dt \\
\leq\ & \int_0^{\tilde{t}}\int_\Omega |v(x,t)z^\lambda(x,t)|_{\mathbb{R}} dxdt + \int_0^{\tilde{t}}\int_\Omega k_0|z^\lambda(x,t)|^2_{\mathbb{R}} + k_0||z^\lambda(x,t)\nabla z^\lambda(x,t)||_{\mathbb{R}^n} dxdt \\
\leq\ & \int_0^{\tilde{t}}\int_\Omega k_0|z^\lambda(x,t)|^2_{\mathbb{R}} + k_0|z^\lambda(x,t)|_{\mathbb{R}}||\nabla z^\lambda(x,t)||_{\mathbb{R}^n} + |v(x,t)|_{\mathbb{R}}|z^\lambda(x,t)|_{\mathbb{R}} dxdt \\
\overset{Young}{\leq}\ & \int_0^{\tilde{t}}\int_\Omega k_0|z^\lambda(x,t)|^2_{\mathbb{R}} + \frac{k_0^2}{2}|z^\lambda(x,t)|^2_{\mathbb{R}} + \frac{1}{2}|\nabla z^\lambda(x,t)|^2_{\mathbb{R}^n} \\
& \quad + \frac{1}{2}|v(x,t)|^2_{\mathbb{R}} + \frac{1}{2}|z^\lambda(x,t)|^2_{\mathbb{R}} dxdt \\
\leq\ & \frac{1}{2}(k_0+1)^2 \int_0^{\tilde{t}} |z^\lambda(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^{\tilde{t}} ||z^\lambda(t)|| dt + \frac{1}{2}\int_0^{\tilde{t}} |v(t)|^2 dt
\end{aligned}$$

donde vem

$$|z^\lambda(\tilde{t})|^2 + \int_0^{\tilde{t}} ||z^\lambda(t)||^2 dt \leq |v|^2_{L^2(Q)} + (k_0+1)^2 \int_0^{\tilde{t}} |z^\lambda(t)|^2 dt \tag{4.70}$$

para todo $\tilde{t} \in [0,T]$ e $\lambda \in (0,1)$.

Pela desigualdade de Gronwall, tem-se

$$\begin{aligned} |z^\lambda(\tilde{t})|^2 &\leq |v|_{L^2(Q)} e^{\int_0^{\tilde{t}} (k_0+1)^2 dt} \\ &\leq |v|_{L^2(Q)} e^{(k_0+1)^2 T} \end{aligned}$$

e assim

$$z^\lambda \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\ \forall \lambda \in (0,1).$$

Disso e de 4.70 vem que

$$z^\lambda \text{ é limitada em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\ \forall \lambda \in (0,1). \tag{4.71}$$

Sendo o Laplaciano um operador contínuo em $H_0^1(\Omega)$, segue que

$$||\Delta z^\lambda(t)||_{H^{-1}(\Omega)} \leq c_6 ||z^\lambda(t)||_{H_0^1(\Omega)},$$

isto é,

$$\Delta z^\lambda \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),\ \forall \lambda \in (0,1).$$

Dessa última estimativa, de 4.67 e 4.69 vem que

$$z_t^\lambda = \Delta z^\lambda - g_\lambda + v \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{4.72}$$

De 4.71 e 4.72 resulta que

$$z^\lambda \text{ é limitada em } W(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)),\ \forall \lambda \in (0,1).$$

Por outro lado, considere $u = g_\lambda - v \in L^2(Q)$. Assim o problema 4.67 pode ser visto como

$$\left| \begin{array}{ll} z_t^\lambda - \Delta z^\lambda = u & \text{em } Q \\ z^\lambda(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ z^\lambda(x,0) = z_0^\lambda(x) = 0 & \text{em } \Omega \end{array} \right. \tag{4.73}$$

onde $u \in L^2(Q)$ e $z_0^\lambda \in H_0^1(\Omega)$.

Pela observação 3.5 temos que

$$||z^{\lambda m}(t)||_{H_0^1(\Omega)}^2 + \int_0^t |\Delta z^{\lambda m}(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq |u|_{L^2(Q)}^2,\ \forall t \in [0,T].$$

donde vem que

$$z^{\lambda m} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \subset L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{4.74}$$

também

$$z^{\lambda m} \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^2(\Omega)),\ \forall t \in [0,T] \tag{4.75}$$

e passando a uma subsequência, se necessário,

$$z^{\lambda m} \rightharpoonup z^\lambda \text{ fraco em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$$

e

$$z^{\lambda m} \rightharpoonup z^\lambda \text{ fraco em } L^2(0,T;H^2(\Omega)),\ \forall t \in [0,T]. \tag{4.76}$$

Tomando $\theta \in C[0,T];\ \theta \geq 0,\ \forall t \in [0,T]$, então $\sqrt{\theta} \in C[0,T]$ e

$$\sqrt{\theta} z^{\lambda m} \rightharpoonup \sqrt{\theta} z^\lambda \text{ fraco em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Novamente da observação 3.5, equação 3.43, temos

$$\frac{1}{2}||z^{\lambda m}(t)||^2 + \int_0^t |\Delta z^{\lambda m}(s)|^2 ds = \int_0^t \big(u(s), -\Delta z^{\lambda m}(s)\big)\, ds. \tag{4.77}$$

Multiplicando 4.77 por $\theta(t)$ e integrando em [0,T] segue que

$$\frac{1}{2}\int_0^T ||z^{\lambda m}(t)||^2\theta(t)dt + \int_0^T \theta(t)\int_0^t |\Delta z^{\lambda m}(s)|^2 dsdt = \int_0^T \theta(t)\int_0^t (u(s), -\Delta z^{\lambda m}(s))dsdt$$

Pela proposição 2.6, item iii), vem que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^T ||z^\lambda(t)||^2\theta(t)dt = \frac{1}{2}||z^\lambda\sqrt{\theta}||^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} &\leq \liminf_{m\to\infty} \frac{1}{2}||z^{\lambda m}\sqrt{\theta}||^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\ &= \liminf_{m\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^T ||z^{\lambda m}(t)||^2\theta(t)dt\end{aligned}$$

e

$$\int_0^T \theta(t)\int_0^t |\Delta z^\lambda(s)|^2 dsdt \leq \liminf_{m\to\infty} \int_0^T \theta(t)\int_0^t |\Delta z^{\lambda m}(s)|^2 dsdt$$

Como $\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n)$ então

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_0^T ||z^\lambda(t)||^2\theta(t)dt + \int_0^T \theta(t)\int_0^t |\Delta z^\lambda(s)|^2 ds \\
\leq \;& \liminf_{m\to\infty}\left[\frac{1}{2}\int_0^T ||z^{\lambda m}(t)||^2\theta(t)dt + \int_0^T \theta(t)\int_0^t |\Delta z^{\lambda m}(s)|^2 ds\right] \\
= \;& \liminf_{m\to\infty}\left[\int_0^T \theta(t)\int_0^t (u(s), -\Delta z^{\lambda m}(s))dsdt\right] \\
\overset{4.76}{=} \;& \int_0^T \theta(t)\int_0^t (u(s), -\Delta z^\lambda(s))dsdt
\end{aligned}
$$

o que implica que

$$
\frac{1}{2}\int_0^T ||z^\lambda(t)||^2\theta(t)dt + \int_0^T \theta(t)\int_0^t |\Delta z^\lambda(s)|^2 dsdt \leq \int_0^T \theta(t)\int_0^t (u(s), -\Delta z^\lambda(s))dsdt
$$

para toda $\theta \in C([0,T])$, ou seja,

$$
\frac{1}{2}||z^\lambda(t)||^2 + \int_0^t |\Delta z^\lambda(s)|^2 ds \leq \int_0^t \left|(u(s), -\Delta z^\lambda(s))\right|_{\mathbb{R}} ds
$$

donde vem que

$$
||z^\lambda(t)||^2 + \int_0^t |\Delta z^\lambda(s)|^2 ds \leq \int_0^t |u(s)|^2\, ds \leq |u|_{L^2(Q)}, \tag{4.78}
$$

isto é,

$$
z^\lambda \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{4.79}
$$

e

$$
z^\lambda \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^2(\Omega)). \tag{4.80}
$$

Combinando 4.69, 4.79 e 4.80 vem que

$$
z_t^\lambda = \Delta z^\lambda + v - g_\lambda \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.81}
$$

Assim de 4.79, 4.80 e 4.81 segue que

$$
z^\lambda \text{ é limitada em } W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega), L^2(\Omega)).
$$

e em virtude das limitações anteriores e das definições de u e g_λ temos que

$$||z^\lambda||_{W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))} \leq c_7|v|_{L^2(Q)} \tag{4.82}$$

Sendo $W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))$ reflexivo, passando a uma subsequência, se necessário, tem-se que

$$z^\lambda \rightharpoonup \bar{z} \text{ fraco em } W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega)). \tag{4.83}$$

Disso e de $W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))$ ter imersão compacta em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ vem que

$$z^\lambda \to \bar{z} \text{ forte em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \subset L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q) \tag{4.84}$$

e

$$\frac{\partial z^\lambda}{\partial x_i} \to \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_i} \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q),$$

donde vem que

$$\nabla z^\lambda \to \nabla \bar{z} \text{ forte em } L^2(Q). \tag{4.85}$$

Como $y^\lambda(0) \to y_0$ em $H_0^1(\Omega)$ e $u+\lambda v \to u$ em $L^2(Q)$ quando $\lambda \to 0$, do teorema da dependência contínua dos dados iniciais vem que

$$y^\lambda \to y \text{ em } W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega)).$$

Somando isso ao fato de θ, obtido em 4.68, ser limitada vem que

$$w^\lambda = y + \theta(y^\lambda - y) \to y \text{ em } W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))$$

e sendo f de classe C^1 nas variáveis (ξ,η) resulta que

$$\frac{\partial}{\partial \xi} f(x,t,w^\lambda,\nabla w^\lambda) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} f(x,t,y,\nabla y) \text{ q.s. em } Q, \tag{4.86}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} f(x,t,w^\lambda,\nabla w^\lambda) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \eta} f(x,t,y,\nabla y) \text{ q.s. em } Q. \tag{4.87}$$

Assim de 4.69, 4.84, 4.85, 4.86, 4.87 e do teorema da convergência dominada de Lebesgue vem que

$$\begin{aligned} g_\lambda(x,t) &= \frac{\partial}{\partial \xi} f(x,t,w^\lambda,\nabla w^\lambda) z^\lambda + \frac{\partial}{\partial \eta} f(x,t,w^\lambda,\nabla w^\lambda)\nabla z^\lambda \\ &\longrightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} f(x,t,y,\nabla y)\bar{z} + \frac{\partial}{\partial \eta} f(x,t,y,\nabla y)\nabla \bar{z} \text{ em } L^2(Q) \end{aligned} \tag{4.88}$$

e da unicidade da solução do problema linear vem que

$$\bar{z} = z_v \text{ em } Q. \tag{4.89}$$

Afirmação:

$$z^\lambda \to z_v \text{ forte em } W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega)).$$

De fato, considere

$$\left| \begin{array}{ll} z_t^\lambda - \Delta z^\lambda = v - g_\lambda & \text{em } Q \\ z^\lambda(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ z^\lambda(x,0) = 0 & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

e

$$\left| \begin{array}{ll} z_t^\omega - \Delta z^\omega = v - g_\omega & \text{em } Q \\ z^\omega(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ z^\omega(x,0) = 0 & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

Da diferença vem

$$\left| \begin{array}{ll} (z_t^\lambda - z_t^\omega) - \Delta(z^\lambda - z^\omega) = -g_\lambda + g_\omega & \text{em } Q \\ (z^\lambda - z^\omega)(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ (z^\lambda - z^\omega)(x,0) = 0 & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

Com um procedimento análogo ao usado na obtenção de 4.78, temos:

$$||z^\lambda(\tilde{t}) - z^\omega(\tilde{t})||^2 + \int_0^{\tilde{t}} |\Delta(z^\lambda(t) - z^\omega(t))|^2 dt \le \int_0^{\tilde{t}} |g_\lambda - g_\omega|^2 dt, \ \forall \tilde{t} \in [0,T].$$

Estendendo a T, vem que

$$||z^\lambda(\tilde{t}) - z^\omega(\tilde{t})||^2 + \int_0^T |\Delta(z^\lambda(t) - z^\omega(t))|^2 dt \leq \int_0^T |g_\lambda - g_\omega|^2 dt$$

e integrando em $(0, T)$ obtem-se

$$\int_0^T ||z^\lambda(\tilde{t}) - z^\omega(\tilde{t})||^2 dt + T \int_0^T |\Delta(z^\lambda(t) - z^\omega(t))|^2 dt \leq T \int_0^T |g_\lambda - g_\omega|^2 dt.$$

De 4.88 a sequência $\{g_\lambda\}$ é convergente, portanto de Cauchy, e assim o termo da direita tende para zero a medida que λ e ω se aproximam de zero. Logo

$$z^\lambda - z^\omega \rightarrow 0 \text{ forte em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \subset L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(Q)$$

e

$$\Delta(z^\lambda - z^\omega) \rightarrow 0 \text{ forte em } L^2(Q)$$

o que implica que

$$z^\lambda \rightarrow \hat{z} \text{ forte em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \subset L^2(Q)$$

e

$$\Delta z^\lambda \rightarrow \Delta \hat{z} \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(Q),$$

donde

$$z^\lambda \rightarrow \hat{z} \text{ forte em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \subset L^2(Q) \tag{4.90}$$

e portanto

$$z_t^\lambda = \Delta z^\lambda - g_\lambda + v \rightarrow \hat{z}_t \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \tag{4.91}$$

Assim, de 4.90 e 4.91, vem que

$$z^\lambda \rightarrow \hat{z} \text{ forte em } W(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), L^2(\Omega))$$

e por unicidade de limite,

$$z^\lambda \rightarrow \bar{z} \text{ forte em } W(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), L^2(\Omega))$$

disso e da igualdade 4.89 conclui-se a veracidade da afirmação.

✓

Pelo fato de $W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))$ ter imersão contínua em $C([0,T];H_0^1(\Omega))$ tem-se
$$z^\lambda(T) \overset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} z_v(T) \text{ forte em } H_0^1(\Omega)$$
o que prova a diferenciabilidade.

Agora provaremos a continuidade de
$$DF : L^2(Q) \to \mathcal{L}\left(L^2(Q), H_0^1(\Omega)\right).$$

Para tal considere
$$u_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \text{ forte em } L^2(Q).$$
Assim dado $v \in L^2(Q)$ denote
$$y_m = y_{u_m,y_0}, \qquad y = y_{u,y_0}, \qquad z_v^m(T) = DF(u_m)v,$$
$$z_v(T) = DF(u)v, \qquad e \qquad \varphi_v^m = z_v^m - z_v$$
onde z_v^m é a única solução forte de
$$\left|\begin{array}{ll} z_t - \Delta z + \dfrac{\partial}{\partial\xi}f(x,t,y_m,\nabla y_m)z + \dfrac{\partial}{\partial\eta}f(x,t,y_m,\nabla y_m)\Delta z = v & \text{em } Q \\ z(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ z(x,0) = 0 & \text{em } \Omega \end{array}\right. \tag{4.92}$$
e z_v é a única solução forte de
$$\left|\begin{array}{ll} z_t - \Delta z + \dfrac{\partial}{\partial\xi}f(x,t,y,\nabla y)z + \dfrac{\partial}{\partial\eta}f(x,t,y,\nabla y)\Delta z = v & \text{em } Q \\ z(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ z(x,0) = 0 & \text{em } \Omega \end{array}\right. . \tag{4.93}$$

Da diferença de 4.92 e 4.93 tem-se
$$(z_v^m - z_v) - \Delta(z_v^m - z_v) + \frac{\partial}{\partial\xi}f(x,t,y_m,\nabla y_m)z_v^m + \frac{\partial}{\partial\eta}f(x,t,y_m,\nabla y_m)\nabla z_v^m$$
$$-\frac{\partial}{\partial\xi}f(x,t,y,\nabla y)z_v - \frac{\partial}{\partial\eta}f(x,t,y,\nabla y)\nabla z_v = 0.$$

Somando $\dfrac{\partial}{\partial \xi} f(x,t,y,\nabla y)(z_v^m - z_v) + \dfrac{\partial}{\partial \eta} f(x,t,y,\nabla y)\nabla(z_v^m - z_v)$ em ambos lados da expressão acima vem

$$\begin{aligned}(z_v^m - z_v) - \Delta(z_v^m - z_v) + \frac{\partial}{\partial \xi} f(x,t,y,\nabla y)(z_v^m - z_v) + \frac{\partial}{\partial \eta} f(x,t,y,\nabla y)\nabla(z_v^m - z_v)\\ = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} f(x,t,y,\nabla y) - \frac{\partial}{\partial \xi} f(x,t,y_m,\nabla y_m)\right] z_v^m\\ + \left[\frac{\partial}{\partial \eta} f(x,t,y,\nabla y) - \frac{\partial}{\partial \eta} f(x,t,y_m,\nabla y_m)\right] \nabla z_v^m.\end{aligned}$$

Logo $\varphi_v^m = z_v^m - z_v \in W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega);L^2(\Omega))$ é a única solução do sistema

$$\left|\begin{array}{ll} \varphi_t - \Delta\varphi + \dfrac{\partial}{\partial \xi} f(x,t,y,\nabla y)\varphi + \dfrac{\partial}{\partial \eta} f(x,t,y,\nabla y)\Delta\varphi = h_v^m & \text{em } Q\\ \varphi(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma\\ \varphi(x,0) = 0 & \text{em } \Omega \end{array}\right. \tag{4.94}$$

onde

$$\begin{aligned} h_v^m &= \left[\frac{\partial}{\partial \xi} f(x,t,y,\nabla y) - \frac{\partial}{\partial \xi} f(x,t,y_m,\nabla y_m)\right] z_v^m\\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial \eta} f(x,t,y,\nabla y) - \frac{\partial}{\partial \eta} f(x,t,y_m,\nabla y_m)\right] \nabla z_v^m.\end{aligned}$$

Argumentando exatamente como para chegar em 4.82, obtemos:

$$||\varphi_v^m||_{W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega);L^2(\Omega))} \leq c_7 |h_v^m|_{L^2(Q)} \tag{4.95}$$

e pela mesma razão

$$||z_v^m||_{W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega);L^2(\Omega))} \leq c_7 |v|_{L^2(Q)}. \tag{4.96}$$

Pela desigualdade de Holder, com $\dfrac{1}{\tilde{q}} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2}$, vem que

$$\begin{aligned} |h_v^m|_{L^2(Q)} &= \left|\frac{\partial}{\partial \xi} f(x,t,y,\nabla y) - \frac{\partial}{\partial \xi} f(x,t,y_m,\nabla y_m)\right|_{L^{\tilde{q}}(Q)} |z_v^m|_{L^q(Q)}\\ &+ \left|\frac{\partial}{\partial \eta} f(x,t,y,\nabla y) - \frac{\partial}{\partial \eta} f(x,t,y_m,\nabla y_m)\right|_{L^{\tilde{q}}(Q)} |\nabla z_v^m|_{L^q(Q)}. \end{aligned} \tag{4.97}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|DF(u_m) - DF(u_m)|_{\mathcal{L}(L^2(Q),H_0^1(\Omega))} &= \sup_{v \in L^2(Q)} \frac{||\left\langle DF(u_m) - DF(u), v\right\rangle||}{|v|_{L^2(Q)}} \\
&= \sup_{v \in L^2(Q)} \frac{||DF(u_m)v - DF(u)v||}{|v|_{L^2(Q)}} \\
&= \frac{||z_v^m(T) - z_v(T)||}{|v|_{L^2(Q)}} \\
&= \frac{||\varphi_v^m(T)||}{|v|_{L^2(Q)}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|DF(u_m) - DF(u_m)|_{\mathcal{L}(L^2(Q),H_0^1(\Omega))} = \frac{||\varphi_v^m(T)||}{|v|_{L^2(Q)}}. \tag{4.98}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
||\varphi_v^m(T)|| &\leq \sup_{t \in [0,T]} ||\varphi_v^m(t)|| \\
&= |\varphi_v^m|_{C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)} \\
&\overset{*}{\leq} c_8 |\varphi_v^m|_{W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))} \\
&\overset{4.95}{\leq} c_7.c_8 |h_v^m|_{L^2(Q)},
\end{aligned}$$

onde a desigualdade $*$ vem do fato que $W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))$ tem imersão contínua em $C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)$. Logo vale

$$||\varphi_v^m(T)|| \leq c_7.c_8 |h_v^m|_{L^2(Q)}. \tag{4.99}$$

Substituindo 4.96 e 4.99 em 4.98 vem que

$$|DF(u_m) - DF(u_m)|_{\mathcal{L}(L^2(Q),H_0^1(\Omega))} \leq \frac{c_7^2.c_8 |h_v^m|_{L^2(Q)}}{|z_v^m|_{W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))}}. \tag{4.100}$$

De 4.97 vem que

$$\begin{aligned}
&\frac{|h_v^m|_{L^2(Q)}}{|z_v^m|_{W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))}}\\
= \ & \left|\frac{\partial}{\partial \xi}f(x,t,y,\nabla y)-\frac{\partial}{\partial \xi}f(x,t,y_m,\nabla y_m)\right|_{L^{\tilde{q}}(Q)}\frac{|z_v^m|_{L^q(Q)}}{|z_v^m|_{W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))}} \qquad (4.101)\\
&+\left|\frac{\partial}{\partial \eta}f(x,t,y,\nabla y)-\frac{\partial}{\partial \eta}f(x,t,y_m,\nabla y_m)\right|_{L^{\tilde{q}}(Q)}\frac{|\nabla z_v^m|_{L^q(Q)}}{|z_v^m|_{W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))}}.
\end{aligned}$$

Como $q\in(2,\infty)$, por Ladyzhenskaia

$$\begin{aligned}
&\frac{|z_v^m|_{L^q(Q)}}{|z_v^m|_{W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))}}\\
\leq \ & c\left(\frac{|z_v^m|_{C(0,T;L^2(\Omega))}}{|z_v^m|_{W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))}}+\frac{|\Delta z_v^m|_{L^2(Q)}}{|z_v^m|_{W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))}}\right). \qquad (4.102)
\end{aligned}$$

De $W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))\overset{cont}{\hookrightarrow}C(0,T;L^2(\Omega))$ vem que

$$|z_v^m|_{C([0,T];L^2(\Omega))}\leq c_9|z_v^m|_{W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))}. \qquad (4.103)$$

Lembremos também o fato que

$$|\Delta z_v^m|_{L^2(Q)}\leq c_{10}|z_v^m|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))}\leq c_{10}|z_v^m|_{W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))}. \qquad (4.104)$$

De 4.102, 4.103 e 4.104 vem que

$$\begin{aligned}
&\frac{|z_v^m|_{L^q(Q)}}{|z_v^m|_{W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))}}\\
\leq \ & c\left(\frac{c_9|z_v^m|_{W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))}}{|z_v^m|_{W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))}}+\frac{c_{10}|z_v^m|_{W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))}}{|z_v^m|_{W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))}}\right) \qquad (4.105)\\
= \ & c(c_9+c_{10})=C_1.
\end{aligned}$$

Agora, veja que

$$\frac{|\nabla z_v^m|_{L^q(Q)}}{|z_v^m|_{W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))}}\leq 2c.c_8=C_2. \qquad (4.106)$$

De fato, usando a norma do máximo em $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
|\nabla z_v^m|_{L^q(Q)}^q &= \int_Q |\nabla z_v^m|_{max}^q \, dxdt \\
&= \int_Q \left|\left(\frac{\partial z_v^m}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial z_v^m}{\partial x_n}\right)\right|_{max}^q dxdt \\
&= \int_Q \left|\frac{\partial z_v^m}{\partial x_j}\right|_{\mathbb{R}}^q dxdt \\
&= \left|\frac{\partial z_v^m}{\partial x_j}\right|_{L^q(Q)}^q, \text{ para algum } j \in \{1, 2, ..., n\},
\end{aligned}$$

isto é,

$$|\nabla z_v^m|_{L^q(Q)} = \left|\frac{\partial z_v^m}{\partial x_j}\right|_{L^q(Q)}, \text{ para algum } j \in \{1, 2, ..., n\}. \tag{4.107}$$

Como $z_v^m \in W(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), L^2(\Omega))$, que por sua vez tem imersão contínua em $C([0, T]; H_0^1(\Omega))$, então

$$\frac{\partial z_v^m}{\partial x_j} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Por Ladyzhenskaya,

$$\begin{aligned}
|\nabla z_v^m|_{L^q(\Omega)} &= \left|\frac{\partial z_v^m}{\partial x_j}\right|_{L^q(Q)} \\
&\leq c\left[\left|\frac{\partial z_v^m}{\partial x_j}\right|_{C([0,T];L^2(\Omega))} + \left|\nabla\left(\frac{\partial z_v^m}{\partial x_j}\right)\right|_{L^2(Q)}\right] \\
&\leq c\left[\left|\frac{\partial z_v^m}{\partial x_j}\right|_{C([0,T];L^2(\Omega))} + \left|\left(\frac{\partial^2 z_v^m}{\partial x_1 \partial x_j}, \frac{\partial^2 z_v^m}{\partial x_2 \partial x_j}, ..., \frac{\partial^2 z_v^m}{\partial x_n \partial x_j}\right)\right|_{L^2(Q)}\right] \\
&\leq c\left[\left|\frac{\partial z_v^m}{\partial x_j}\right|_{C([0,T];L^2(\Omega))} + |z_v^m|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))}\right] \\
&\leq c\left[|z_v^m|_{C([0,T];H_0^1(\Omega))} + |z_v^m|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))}\right].
\end{aligned}$$

Levando em consideração que $W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega)) \overset{cont}{\hookrightarrow} C([0,T];H_0^1(\Omega))$,

$$\begin{aligned} |\nabla z_v^m|_{L^2(Q)} &\leq c.c_8\left(|z_v^m|_{W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))} + |z_v^m|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))}\right) \\ &\leq 2c.c_8|z_v^m|_{W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))}, \end{aligned}$$

donde

$$\frac{|\nabla z_v^m|_{L^q(Q)}}{|z_v^m|_{W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))}} \leq 2c.c_8 = C_2.$$

De 4.100, 4.101, 4.105, 4.106 e tomando o máximo $C = \max\{C_1, C_2\}$ vem que

$$\begin{aligned} |DF(u_m) - DF(u)|_{\mathcal{L}(L^2(Q),H_0^1(\Omega))} &\leq C\left[\left|\frac{\partial}{\partial\xi}f(x,t,y,\nabla y) - \frac{\partial}{\partial\xi}f(x,t,y_m,\nabla y_m)\right|_{L^{\tilde{q}}(Q)}\right. \\ &\quad \left. + \left|\frac{\partial}{\partial\eta}f(x,t,y,\nabla y) - \frac{\partial}{\partial\eta}f(x,t,y_m,\nabla y_m)\right|_{L^{\tilde{q}}(Q)}\right]. \end{aligned}$$

Como $u_m \to u$ em $L^2(Q)$ quando m tende ao infinito, pelo teorema 4.6, da continuidade dos dados iniciais, vem que $y_m \to y$ em $W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))$. Da hipótese $f \in C^1$ em ξ e η, então $\dfrac{\partial}{\partial\xi}$ e $\dfrac{\partial}{\partial\eta}$ são contínuas em $(.,.,\xi,\eta)$. Juntando isso à hipótese $iv)$ de 4.2 e aplicando o teorema da convergência dominada de Lebesgue temos que cada parcela do termo da direita da desigualdade acima converge para 0 quando m tende ao infinito. Portanto

$$|DF(u_m) - DF(u)|_{\mathcal{L}(L^2(Q),H_0^1(\Omega))} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

isto é, DF é contínua.

$\square$

4.4 Controlabilidade Aproximada

A partir de agora dediquemo-nos a prova da controlabilidade aproximada da equação do calor semilinear. No que segue, ω é um aberto não vazio de Ω e χ_q é a função característica de $q = \omega \times (0,T)$. Considere o problema

$$\left| \begin{array}{ll} y_t - \Delta y + f(x,t,y,\nabla y) = u\chi_q & \text{em } Q \\ y(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{em } \Omega \end{array} \right. \tag{4.108}$$

Teorema 4.8 ***(Controlabilidade Aproximada)*** *Assuma as hipóteses 4.2 sobre a função f. Para cada $y_0 \in H_0^1(\Omega)$, o conjunto dos estados alcançáveis no tempo $T > 0$,*

$$R_{NL}(T) = \left\{ y_{u,y_0}(x,T);\ y_{u,y_0} \text{ é solução de 4.108 com } u \in L^2(q) \right\},$$

é denso em $H_0^s(\Omega)$ para cada $s \in [0,1)$.

Demonstração: A prova segue um argumento similar à do caso linear. Como

$$H_0^1(\Omega) \overset{denso}{\hookrightarrow} H_0^s(\Omega),\ \forall s \in [0,1),$$

basta provar que para cada $y_d \in H_0^1(\Omega)$ existe $y_{u_k,y_0}(T) \in R_{NL}(T)$ tal que $|y_{u_k,y_0}(T) - y_d|_{H_0^s(\Omega)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ em $H_0^s(\Omega)$ com $u_k \in L^2(q)$.

Deste modo para cada $k \in \mathbb{N}$ considere

$$\begin{array}{rcl} J_k : L^2(q) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & J_k(u) = \dfrac{1}{2}|u|^2_{L^2(q)} + \dfrac{k}{2}||y_{u,y_0}(T) - y_d||^2_{H_0^s(\Omega)} \end{array}$$

Veja que J_k está bem definida. De fato, para cada $u \in L^2(q)$ e $y_0 \in H_0^1(\Omega)$ existe única solução forte y_{u,y_0} de 4.108 tal que $y_{u,y_0}(T) \in H_0^1(\Omega)$. Logo

$$\begin{array}{rcl} ||y_{u,y_0}(T)||_{H_0^s(\Omega)} & \leq & c_9||y_{u,y_0}(T)||_{H_0^1(\Omega)} \\ & < & \infty \end{array}$$

e assim faz sentido calcular

$$||y_{u,y_0}(T) - y_d||_{H_0^s(\Omega)}.$$

Nosso objetivo agora é minimizar o funcional J_k. Para isso veja que:

$i)$ J_k é fracamente semicontínuo inferiormente.

De fato, considere $u_m \rightharpoonup u$ em $L^2(q)$. Disso vem que $u_m\chi_q \rightharpoonup u\chi_q$ em $L^2(Q)$. Denotando y_{u_m,y_0} a solução de 4.108 com u_m no lugar de u, pelo teorema 4.6, da continuidade dos dados iniciais, item $a)$ temos que

$$y_{u_m,y_0}(T) \rightharpoonup y_{u,y_0}(T) \text{ fraco em } H_0^s(\Omega), \forall s \in [0,1).$$

Em particular

$$y_{u_m,y_0}(T) - y_d \rightharpoonup y_{u,y_0}(T) - y_d \text{ fraco em } H_0^s(\Omega), \forall s \in [0,1)$$

e disso vem que

$$\liminf_{m\to\infty} ||y_{u_m,y_0}(T) - y_d||_{H_0^s(\Omega)} \geq ||y_{u,y_0} - y_d||_{H_0^s(\Omega)}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \liminf_{m\to\infty} ||y_{u_m,y_0}(T) - y_d||^2_{H_0^s(\Omega)} &\geq \liminf_{m\to\infty} ||y_{u_m,y_0}(T) - y_d||_{H_0^s(\Omega)} . \liminf_{m\to\infty} ||y_{u_m,y_0}(T) - y_d||_{H_0^s(\Omega)} \\ &\geq ||y_{u,y_0}(T) - y_d||^2_{H_0^s(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.109}$$

Por outro lado, já que $u_m\chi_q \rightharpoonup u\chi_q$ em $L^2(Q)$,

$$\liminf_{m\to\infty} |u_m|_{L^2(q)} \geq |u|_{L^2(q)}.$$

Logo

$$\liminf_{m\to\infty} |u_m|^2_{L^2(q)} \geq |u|^2_{L^2(q)}. \tag{4.110}$$

De 4.109 e 4.110 vem que

$$J_k(u) \leq \liminf_{m\to\infty} J_k(u_m)$$

e isso prova que J_k é fracamente semicontínuo inferiormente.

$ii)$ J_k é coercivo.

Com efeito, basta observar que $J_k(u) \geq \dfrac{1}{2}|u|^2_{L^2(q)}$ e assim $J_k(u) \to \infty$ quando $|u_k| \to \infty$.

Sendo $L^2(q)$ um espaço de Banach reflexivo, conexo, fechado e não vazio, $J_k : L^2(q) \longrightarrow \mathbb{R}$ é semicontínuo inferiormente e coercivo, então existe $u_k \in L^2(q)$ tal que

$$J_k(u_k) = \min_{u \in L^2(q)} J_k(u) \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.111}$$

Com isso mostraremos que existe $\psi \in H_0^s(\Omega)$ tal que $y_{u_k,y_0}(T) - y_d \rightharpoonup \psi$ em $H_0^s(\Omega)$ e que

$$J_k'(u_k)v = \int_q u_k v \ dx \ dt + k((z_v^k(T), y_k(T) - y_d))_{H_0^s(\Omega)}.$$

De fato, da igualdade 4.111 temos que

$$J_k(u_k) \leq J_k(0) = \frac{k}{2}||y_{0,y_0}(T) - y_d||^2_{H_0^s(\Omega)}, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

o que implica que

$$\frac{1}{2}|u_k|^2_{L^2(q)} + \frac{k}{2}||y_{u_k,y_0}(T) - y_d||^2_{H_0^s(\Omega)} \leq \frac{k}{2}||y_{0,y_0}(T) - y_d||^2_{H_0^s(\Omega)}.$$

Como $y_{0,y_0} \in C([0,T]; H_0^s(\Omega))$, então $y_{0,y_0}(T) \in H_0^s(\Omega)$ e portanto

$$\left|\frac{u_k}{\sqrt{k}}\right|^2_{L^2(q)} + ||y_{u_k,y_0}(T) - y_d||^2_{H_0^s(\Omega)} < \infty$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo

$$\left|\frac{u_k}{\sqrt{k}}\right|_{L^2(q)} < \infty \ \forall k \in \mathbb{N}$$

e

$$||y_{u_k,y_0}(T) - y_d||_{H_0^s(\Omega)} < \infty \ \forall k \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$\left\{\frac{u_k}{\sqrt{k}}\right\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(q) \tag{4.112}$$

e

$$\{y_{u_k,y_0}(T) - y_d\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ é limitada em } H_0^s(\Omega). \tag{4.113}$$

De 4.113 vem que existe uma subsequência, ainda denotada como acima, tal que

$$y_{u_k,y_0}(T) - y_d \rightharpoonup \psi \text{ fraco em } H_0^s(\Omega). \tag{4.114}$$

Agora vamos em busca da derivada de Gateux de J_k em u_k. Para tal considere $v \in L^2(q)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo

$$\begin{aligned} J_k(u_k+\lambda v) - J_k(u_k) &= \frac{1}{2}\left[|u_k+\lambda v|^2_{L^2(q)} - |u_k|^2_{L^2(q)}\right] \\ &\quad + \frac{k}{2}\left[||y_{u_k+\lambda v,y_0}(T) - y_d||^2_{H_0^s(\Omega)} - ||y_{u_k,y_0}(T) - y_d||^2_{H_0^s(\Omega)}\right]. \end{aligned} \tag{4.115}$$

A partir de agora usaremos a notação:

$$y_k^\lambda = y_{u_k+\lambda v,y_0} \quad \text{e} \quad y_k = y_{u_k,y_0}.$$

Da segunda parcela do lado direito de 4.115 temos:

$$\begin{aligned} &\frac{k}{2}\left[||y_k^\lambda(T) - y_d||^2_{H_0^s(\Omega)} - ||y_k(T) - y_d||^2_{H_0^s(\Omega)}\right] \\ = \; &\frac{k}{2}\left[((y_k^\lambda(T) - y_d, y_k^\lambda(T)))_{H_0^s(\Omega)} - ((y_k^\lambda(T) - y_d, y_d))_{H_0^s(\Omega)}\right. \\ &\quad \left. -((y_k(T) - y_d, y_k(T)))_{H_0^s(\Omega)} + ((y_k(T) - y_d, y_d))_{H_0^s(\Omega)}\right] \\ = \; &\frac{k}{2}\left[((y_k^\lambda(T) - y_d, y_k^\lambda(T)))_{H_0^s(\Omega)}\right. \\ &\quad \left. - ((y_k^\lambda(T) - y_k(T), y_d))_{H_0^s(\Omega)} - ((y_k(T) - y_d, y_k(T)))_{H_0^s(\Omega)}\right] \end{aligned} \tag{4.116}$$

Do teorema 4.7, da diferenciabilidade dos dados iniciais,

$$z_v(T) = DF(u)v = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{F(u+\lambda v) - F(u)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{y_{u+\lambda v,y_0}(T) - y_{u,y_0}(T)}{\lambda}$$

e portanto

$$\lambda z_v^k(T) = z_{\lambda v}^k(T) = y_k^\lambda(T) - y_k(T) \tag{4.117}$$

onde z_v^k é a única solução do problema de valor inicial e de fronteira

$$\left| \begin{array}{ll} z_t - \Delta z + \dfrac{\partial}{\partial \xi} f(x,t,y_k,\nabla y_k) z + \dfrac{\partial}{\partial \eta} f(x,t,y_k,\nabla y_k)\nabla z = v\chi_q & \text{em } Q \\ z(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ z(x,0) = 0 & \text{em } \Omega \end{array} \right. . \tag{4.118}$$

Assim, substituindo 4.117 em 4.116 vem:

$$
\begin{aligned}
& \frac{k}{2}\left[||y_k^\lambda(T)-y_d||^2_{H_0^s(\Omega)}-||y_k(T)-y_d||^2_{H_0^s(\Omega)}\right] \\
\overset{4.117}{=} & \frac{k}{2}\big[((y_k^\lambda(T)-y_k(T)+y_k(T)-y_d,y_k^\lambda(T)))_{H_0^s(\Omega)} \\
& \qquad -\lambda((z_v^k(T),y_d))_{H_0^s(\Omega)}-((y_k(T)-y_d,y_k(T)))_{H_0^s(\Omega)}\big] \\
= & \frac{k}{2}\big[((y_k^\lambda(T)-y_k(T),y_k^\lambda(T)))_{H_0^s(\Omega)} \\
& -\lambda((z_v^k(T),y_d))_{H_0^s(\Omega)}+((y_k(T)-y_d,y_k^\lambda(T)-y_k(T)))_{H_0^s(\Omega)}\big] \\
\overset{4.117}{=} & \frac{k}{2}\big[\lambda((z_v^k(T),y_k^\lambda(T)))_{H_0^s(\Omega)} \\
& -\lambda((z_v^k(T),y_d))_{H_0^s(\Omega)}+\lambda((y_k(T)-y_d,z_v^k(T)))_{H_0^s(\Omega)}\big] \\
= & \lambda\frac{k}{2}((z_v^k(T),y_k^\lambda(T)+y_k(T)))_{H_0^s(\Omega)}-\lambda k((z_v^k(T),y_d))_{H_0^s(\Omega)}
\end{aligned} \tag{4.119}
$$

Da primeira parcela do lado direito da desiguladade 4.115 temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[|u_k+\lambda v|^2_{L^2(q)}-|u_k|^2_{L^2(q)}\right] &= \frac{1}{2}\left[|u_k|^2_{L^2(q)}+2\lambda(u_k,v)+\lambda^2|v|^2_{L^2(q)}-|u_k|^2_{L^2(q)}\right] \\
&= \lambda(u_k,v)+\frac{\lambda^2}{2}|v|^2_{L^2(q)}.
\end{aligned} \tag{4.120}
$$

De 4.115, 4.119 e 4.120 vem que

$$
\begin{aligned}
& \frac{J_k(u_k+\lambda v)-J_k(u_k)}{\lambda} \\
= & \frac{\lambda(u_k,v)+\frac{\lambda^2}{2}|v|^2_{L_2(q)}+\lambda\frac{k}{2}((z_v^k(T),y_k^\lambda(T)+y_k(T)))_{H_0^s(\Omega)}-\lambda k((z_v^k(T),y_d))_{H_0^s(\Omega)}}{\lambda} \\
= & (u_k,v)_{L^2(q)}+\frac{\lambda}{2}|v|^2_{L^2(q)}+\frac{k}{2}((z_v^k(T),y_k^\lambda(T)+y_k(T)))_{H_0^s(\Omega)}-k((z_v^k,y_d))_{H_0^s(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Logo, do teorema 4.6, da continuidade com respeito aos dados iniciais, tomando o limite quando $\lambda \to 0$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to 0} \frac{J_k(u_k+\lambda v)-J_k(u_k)}{\lambda} \\
= \;& \lim_{\lambda\to 0}\left[(u_k,v)_{L^2(q)}+\frac{\lambda}{2}|v|^2_{L^2(q)}+\frac{k}{2}((z_v^k(T),y_k^\lambda(T)+y_k(T)))_{H_0^s(\Omega)}-k((z_v^k,y_d))_{H_0^s(\Omega)}\right] \\
= \;& (u_k,v)_{L^2(q)}+\frac{k}{2}((z_v^k(T),y_k(T)+y_k(T)))_{H_0^s(\Omega)}-k((z_v^k,y_d))_{H_0^s(\Omega)} \\
= \;& (u_k,v)_{L^2(q)}+k((z_v^k(T),y_k(T)-y_d))_{H_0^s(\Omega)},
\end{aligned}$$

ou seja, existe a derivada de Gateux de J_k em u_k e

$$J_k'(u_k)v=\int_q u_k v\ dx\ dt+k((z_v^k(T),y_k(T)-y_d))_{H_0^s(\Omega)}.$$

Como u_k é um mínimo para J_k então

$$0=J_k'(u_k)v=\int_q u_k v\ dx\ dt+k((z_v^k(T),y_k(T)-y_d))_{H_0^s(\Omega)}.$$

Dividindo por k vem que

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\int_q \frac{u_k}{\sqrt{k}} v\ dx\ dt+((z_v^k(T),y_k(T)-y_d))_{H_0^s(\Omega)}=0. \tag{4.121}$$

Sendo $\left\{\dfrac{u_k}{\sqrt{k}}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ limitada em $L^2(q)$ e $v\in L^2(q)$, então

$$\int_q \frac{u_k}{\sqrt{k}} v\ dx\ dt \text{ é limitada}$$

e portanto

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\int_q \frac{u_k}{\sqrt{k}} v\ dx\ dt \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{4.122}$$

Agora suponha[6] que

$$z_v^k(T)\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} z_v(T) \text{ forte em } H_0^s(\Omega),\ \forall s\in[0,1), \tag{4.123}$$

[6]Mostraremos isso posteriormente

onde z_v^k é a única solução de 4.118 e z_v é solução de

$$\left| \begin{array}{ll} z_t - \Delta z + az + \vec{b}\nabla z = v\chi_q & \text{em } Q \\ z(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ z(x,0) = 0 & \text{em } \Omega \end{array} \right. \tag{4.124}$$

com $a \in L^\infty(Q)$ e $\vec{b} \in [L^\infty(Q)]^n$ tais que

$$\frac{\partial}{\partial \xi} f(x,t,y_k,\nabla y_k) \overset{*}{\rightharpoonup} a \text{ fraco } * \text{ em } L^\infty(Q)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \eta} f(x,t,y_k,\nabla y_k) \overset{*}{\rightharpoonup} \vec{b} \text{ fraco } * \text{ em } [L^\infty(Q)]^n$$

quando $k \to \infty$, conforme visto no teorema 4.7, da continuidade com respeito aos dados iniciais.

De 4.123 e 4.114 vem que

$$((z_v^k(T), y_k(T) - y_d))_{H_0^s(\Omega)} \longrightarrow ((z_v(T), \psi))_{H_0^s(\Omega)}. \tag{4.125}$$

De 4.121, 4.122 e 4.125 vem que

$$((z_v(T), \psi))_{H_0^s(\Omega)} = 0 \ \forall v \in L^2(q). \tag{4.126}$$

Por outro lado, dado $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tem-se que $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ uma vez que $C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$. Do controle para o caso linear, $R_L(T)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$, o que implica que existe uma sequência $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in L^2(q)$ tal que

$$z_{v_j,z_0}(T) \longrightarrow \varphi \text{ forte em } H_0^1(\Omega),$$

com $z_{v_j,z_0}(T) \in R_L(T)$. Como $H_0^1(\Omega) \overset{cont}{\hookrightarrow} H_0^s(\Omega)$ $\forall s \in [0,1)$ vem que

$$z_{v_j,z_0}(T) \longrightarrow \varphi \text{ em } H_0^s(\Omega). \tag{4.127}$$

De 4.126 sabemos que

$$((z_{v_j,z_0}(T), \psi))_{H_0^s(\Omega)} = 0. \tag{4.128}$$

Tomando o limite em 4.128 quando $j \to \infty$ e usando 4.127 vem que

$$((\varphi, \psi))_{H_0^s(\Omega)} = 0. \tag{4.129}$$

Sendo $C_0^\infty(\Omega)$ denso em $H_0^s(\Omega)$, de 4.129

$$\psi = 0. \tag{4.130}$$

De 4.130 e 4.114 obtemos

$$y_{u_k, y_0} \rightharpoonup y_d \text{ fraco em } H_0^s(\Omega).$$

Como $H_0^s(\Omega) \overset{comp}{\hookrightarrow} H_0^{s'}(\Omega),\ \forall s' < s < 1$, segue que

$$y_{u_k, y_0} \longrightarrow y_d \text{ forte em } H_0^{s'}(\Omega),\ \forall s' \in [0,1)$$

o que era nosso objetivo.

Para finalizar, devemos mostrar a convergência dada em 4.123, isto é,

$$z_v^k(T) \longrightarrow z_v(T) \text{ forte em } H_0^s(\Omega),\ \forall s \in [0,1).$$

Sendo z_v^k a única solução forte de 4.118, então $z_v^k \in W(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), L^2(\Omega))$ e

$$\left|\begin{array}{ll} \dfrac{d}{dt} z_v^k - \Delta z_v^k + \dfrac{\partial}{\partial \xi} f(x,t,y_k,\nabla y_k) z_v^k + \dfrac{\partial}{\partial \eta} f(x,t,y_k,\nabla y_k) \nabla z_v^k = v\chi_q & \text{q.s. em } Q \\ z_v^k(x,t) = 0 & \text{em } \Sigma \\ z_v^k(x,0) = 0 & \text{em } \Omega \end{array}\right. . \tag{4.131}$$

Multiplicando 4.131 por $z_v^k(t)$ e integrando sobre Ω vem que

$$\int_\Omega \frac{d}{dt} z_v^k(t) z_v^k(t)\ dx - \int_\Omega \Delta z_v^k(t) z_v^k(t)\ dx + \int_\Omega \frac{\partial}{\partial \xi} f(x,t,y_k,\nabla y_k) \left(z_v^k(t)\right)^2\ dx$$
$$+ \int_\Omega \frac{\partial}{\partial \eta} f(x,t,y_k,\nabla y_k) \nabla z_v^k(t) z_v^k(t)\ dx = \int_\Omega v\chi_q z_v^k(t)\ dx,$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z_v^k(t)|^2_{L^2(\Omega)} + ||z_v^k(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq k_0\left(|z_v^k(t)|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla z_v^k(t)|_{L^2(\Omega)}|z_v^k|_{L^2(\Omega)}\right)\\
&\quad +|z_v^k|_{L^2(\Omega)}|v|_{L^2(\Omega)}\\
&\stackrel{Young}{\leq} k_0|z_v^k(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{k_0^2}{2}|z_v^k|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}||z_v^k(t)||^2_{H_0^1(\Omega)}\\
&\quad +\frac{1}{2}|z_v^k(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}|v\chi_q|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

donde vem que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|z_v^k(t)|^2_{L^2(\Omega)} + ||z_v^k(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq (k_0^2 + 2k_0 + 1)|z_v^k(t)|^2_{L^2(\Omega)} + |v\chi_q|^2_{L^2(\Omega)}\\
&= (k_0+1)^2|z_v^k(t)|^2_{L^2(\Omega)} + |v\chi_q|^2_{L^2(\Omega)}. \qquad (4.132)
\end{aligned}$$

Integrando 4.132 em $[0,t]$, $t \in [0,T]$, temos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \frac{d}{ds}|z_v^k(s)|^2_{L^2(\Omega)}\ ds + \int_0^t ||z_v^k(s)||^2_{H_0^1(\Omega)}\ ds\\
\leq\ & \int_0^t (k_0+1)^2|z_v^k(s)|^2_{L^2(\Omega)}\ ds + \int_0^t |v\chi_q|^2_{L^2(\Omega)}\ ds\\
\leq\ & |v|^2_{L^2(q)} + \int_0^t (k_0+1)^2|z_v^k(s)|^2_{L^2(\Omega)}\ ds. \qquad (4.133)
\end{aligned}$$

Como $z_v^k(x,0) = 0$ então $|z_v^k(0)|_{L^2(\Omega)} = 0$ e assim, de 4.133, vem que

$$|z_v^k(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t ||z_v^k(s)||^2_{H_0^1(\Omega)}\ ds \leq |v|^2_{L^2(q)} + \int_0^t (k_0+1)^2|z_v^k(s)|^2_{L^2(\Omega)}\ ds \qquad (4.134)$$

e sendo $\displaystyle\int_0^t ||z_v^k(s)||^2_{H_0^1(\Omega)}\ ds \geq 0$, por Gronwall

$$\begin{aligned}
|z_v^k(t)|_{L^2(\Omega)} &\leq |v|^2_{L^2(q)}.e^{\int_0^t (k+1)^2\ ds}\\
&\leq |v|^2_{L^2(q)}.e^{T(k+1)^2},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$z_v^k \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Disso e de 4.134 vem que

$$z_v^k \text{ é limitada em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{4.135}$$

Da continuidade do Laplaciano vem que

$$\Delta z_v^k \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{4.136}$$

Das limitações 4.135, 4.136 e do problema 4.118 temos que

$$\frac{d}{dt} z_v^k \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

e assim vem que

$$z_v^k \in W\left(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)\right). \tag{4.137}$$

Compondo 4.131 com $\frac{d}{dt} z_v^k(t)$ vem que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dt} z_v^k(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|z_v^k(t)\right\|^2 &\leq k_0\left(\left|z_v^k(t)\right| + \left\|z_v^k(t)\right\|\right)\left|\frac{d}{dt} z_v^k(t)\right| + \left|v\chi_q\right|\left|\frac{d}{dt} z_v^k(t)\right| \\
&\leq 2k_0\left\|z_v^k(t)\right\|\left|\frac{d}{dt} z_v^k(t)\right| + \left|v\chi_q\right|\left|\frac{d}{dt} z_v^k(t)\right| \\
&\leq \left(2k_0\left\|z_v^k(t)\right\| + \left|v\chi_q\right|\right)\left|\frac{d}{dt} z_v^k(t)\right| \\
&\overset{Young}{\leq} \frac{1}{2}\left(2k_0\left\|z_v^k(t)\right\| + \left|v\chi_q\right|\right)^2 + \frac{1}{2}\left|\frac{d}{dt} z_v^k(t)\right|^2 \\
&\overset{Young}{\leq} 4k_0^2\left\|z_v^k(t)\right\|^2 + \left|v\chi_q\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\frac{d}{dt} z_v^k(t)\right|^2,
\end{aligned}$$

logo

$$\left|\frac{d}{dt} z_v^k(t)\right|^2 + \frac{d}{dt}\left\|z_v^k(t)\right\|^2 \leq 8k_0^2\left\|z_v^k(t)\right\|^2 + 2\left|v\chi_q\right|^2.$$

Integrando de 0 a t, $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left|\frac{d}{ds} z_v^k(s)\right|^2 ds + \left\|z_v^k(t)\right\|^2 &\leq \left\|z_v^k(0)\right\| + 2\left|v\right|_{L^2(q)}^2 + 8k_0^2\int_0^t \left\|z_v^k(s)\right\|^2 ds \\
&\leq \left\|z_v^k(0)\right\| + 2\left|v\right|_{L^2(q)}^2 + 8k_0^2\int_0^T \left\|z_v^k(s)\right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

De 4.137 obtemos obtemos:

$$z_v^k \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ e} \tag{4.138}$$

$$\frac{d}{dt}z_v^k \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.139}$$

Tendo em conta que

$$\Delta z_v^k = \frac{d}{dt}z_v^k + \frac{\partial}{\partial \xi}f(x,t,y_k,\nabla y_k)z_v^k + \frac{\partial}{\partial \eta}f(x,t,y_k,\nabla y_k)\nabla z_v^k - v\chi_q,$$

de 4.138, 4.139 e das hipóteses sobre a f em 4.2 vem que

$$\Delta z_v^k \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

ou seja,

$$z_v^k \text{ é limitada em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)). \tag{4.140}$$

Pelas limitações 4.139 e 4.140 temos que

$$z_v^k \text{ é limitada em } W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega)).$$

Considerando ainda que $W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))$ tem imersão compacta em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, obtemos as convergências:

$$\begin{array}{ll} z_v^k \rightharpoonup \zeta & \text{fraco em } W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega)), \\ z_v^k \to \zeta & \text{forte em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ e} \\ \dfrac{d}{dt}z_v^k \rightharpoonup \zeta_t & \text{fraco em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{array}$$

Passando o limite em 4.131 vem que ζ é solução forte de 4.124, ou seja,

$$\left|\begin{array}{ll} \zeta_t - \Delta\zeta + a\zeta + \vec{b}\nabla\zeta = v\chi_q & \text{q.s. em } Q \\ \zeta(x,0) = 0 & \text{em } \Omega \end{array}\right. .$$

Entretanto, o problema 4.124 possui única solução, já denotada por z_v e portanto,

$$z_v = \zeta.$$

Logo

$$z_v^k \rightharpoonup z_v \text{ fraco em } W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega)).$$

Graças a imersão contínua de $W(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),L^2(\Omega))$ em $C([0,T];H_0^1(\Omega))$, deduzimos que

$$z_v^k(T) \rightharpoonup z_v(T) \text{ fraco em } H_0^1(\Omega),$$

quando $k\to\infty$. Combinado isso com a imersão compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $H_0^s(\Omega)$, para $s<1$, vem que

$$z_v^k(T) \to z_v(T) \text{ forte em } H_0^s(\Omega),\ \forall s<1,$$

o que prova a convergência dada em 4.123.

$\square$

Observação 4.9 *Como no caso linear, segue do teorema acima que $R_{NL}(T)$ é denso em $L^2(\Omega)$ e portanto o sistema 1.1 é aproximadamente controlável no tempo T em $L^2(\Omega)$.*

Índice

Bibliografia

[1] BRÉZIS, H.,*"Análisis Funcional: Teoría y Aplicaciones"*, Alianza Editorial, S.A., Madrid, España, 1984.

[2] CAVALCANTI,M. M. e DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.,*"Iniciação à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev"*, Vol. 1, DMA/UEM, Maringá, Brasil, 2000.

[3] CAVALCANTI,M. M. e DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.,*"Iniciação à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev"*, Vol. 2, DMA/UEM, Maringá, Brasil, 2000.

[4] DAUTRAY,R., e LIONS, J. L.,*"Analyse Mathématique et Calcul Numérique Pour les Sciences el les Techniques"*, Vol. 8 (Evolution: semi-groupe, varationnel), Masson, Paris, 1984.

[5] CODDINGTON, E., LEVINSON, N., *"Theory of Ordinary Differential Equations"*, Mac Graw-Hill, New York, 1955.

[6] FABRE,C., *"Uniqueness Results for Stokes Equations and Their Consequences in Linear and Nonlinear Control Problems"*, European Series in Applied and Industrial Mathematics: Contrôle, Optimisation et Calcul des Variations, Vol. 1, p. 267-302, 1996.

[7] FRID, H., *"Introdução a Integral de Lebesque*, IMCA - Instituto de Matemáticas y Ciências Afines, Universidad Nacional de Ingeniería, Peru.

[8] FERNANDEZ, L. A., e ZUAZUA, E., *"Approximate Controllability for the Semilinear Heat Equation Involving Gradient Terms"*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 101, p. 307-328, may 1999.

[9] LADYZHENSKAYA, O. A., SOLONNIKOV,V. A., and URAL'TSEVA, N. N., *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1968.

[10] LIMA, E. L., *"Curso de Análise"*, Vol. 2, ed. 8, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2005.

[11] LIONS, J. L., *"Remarques sur la Contrôlabilité Approchée"*, Jornadas Hipano-Francesas sobre Control de Sistemas Distribuídos, University of Málaga, Málaga, Spain, p.77-87, 1991.

[12] LIONS, J. L., MAGENES E., *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Vol.1, Springer Verlag, Berlin, 1972.

[13] MEDEIROS, L. A.,*"Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações"*, Textos de Métodos Matemáticos, Vol. 16, Institudo de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1983.

[14] MEDEIROS, L. A. e MELLO, E. A. de, *"A Integral de Lebesgue"*, Textos de Métodos Matemáticos, Vol. 18, ed. 4, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1989.

[15] MILLA MIRANDA, M, *Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev*, Instituto de Matemática - UFRJ.

[16] ZEIDLER, E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications III: Variational methods and Optimization*, Springer-Verlag, New York, 1985.