

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

RONALDO LOPES

MÉTODOS ABS

Maringá-PR

2014

Ronaldo Lopes

Métodos ABS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática Aplicada.

Orientador: Dr. Wesley Vagner Inês Shirabayashi

Maringá

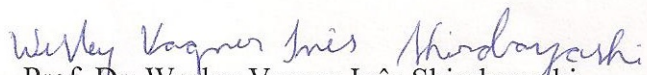
2014

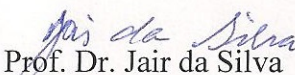
RONALDO LOPES

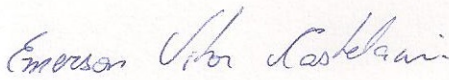
MÉTODOS ABS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:


Prof. Dr. Wesley Vagner Inês Shirabayashi
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)


Prof. Dr. Jair da Silva
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul – Campo Grande - MS


Prof. Dr. Emerson Vitor Castelani
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 18 de fevereiro de 2014.

Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho a todos que me apoiaram
e ajudaram a realizá-lo.

AGRADECIMENTOS

Ao concluir este trabalho, agradeço:

Aos meus familiares por todo apoio e carinho. Em especial, para minha mãe e esposa pessoas imprescindíveis em minha vida.

Aos professores Wesley Vagner Inês Shirabayashi e Emerson Vitor Castelani pela dedicação e companherismo tornando possível a realização deste trabalho e minha continuação nos estudos.

Aos amigos, pessoas especiais que cruzam nossos caminhos e que compartilham de nossas conquistas.

À CAPES, pelo fundamental apoio financeiro.

“O verdadeiro analfabeto é aquele que sabe ler, mas não lê.”

Mário Quintana.

RESUMO

Neste trabalho abordamos um método capaz de resolver sistemas lineares e não-lineares conhecido como método ABS, acompanhando diversos resultados relevantes sobre o assunto. Apresentamos o método de Broyden aplicado para resolver sistemas lineares, juntamente com um resultado que relaciona os iterandos obtidos pelo método de Broyden com os obtidos pelo método ABS, no caso de sistemas lineares quadrados. Também mostramos um conjunto de testes numéricos comparativos entre os métodos de Newton, Chebyshev e ABS envolvendo sistemas de equações não-lineares.

Palavras chave: sistemas lineares, sistemas não-lineares, método ABS, método de Broyden, método de Newton, método de Chebyshev.

ABSTRACT

In this paper we address a method to solve linear and nonlinear systems known as ABS, with many relevant results on the subject. We present Broyden's method for solving linear systems, and a result that relates iterates obtained by the method of Broyden and ABS method for linear systems square. We also show a set of comparative numerical tests between Newton methods, Chebyshev and ABS for nonlinear systems.

key words: linear systems, nonlinear systems, ABS methods, Broyden method, Newton method, Chebyshev method.

LISTA DE TABELAS

6.1	Função1	98
6.2	Função2	99
6.3	Função3	100
6.4	Função4	101
6.5	Função5	102
6.6	Função6	103
6.7	Função7(d5)	104
6.8	Função7(d10)	105
6.9	Função7(d50)	106
6.10	Função8(d5)	107
6.11	Função8(d10)	108
6.12	Função8(d50)	109
6.13	Função9(d5)	110
6.14	Função9(d10)	111
6.15	Função9(d50)	112
6.16	funçlcp11	113
6.17	funçlcp13	114
6.18	funçlcp14	115
6.19	funçlcp15	116
6.20	funçlcp31	117

6.21	funlcp33	118
6.22	funlcp34	119
6.23	Testes funlcp35	120
6.24	Testes funlcp35(2)	121
6.25	Testes onde algum método ABS converge e o método de Newton não (1). . .	122
6.26	Testes onde algum método ABS converge e o método de Newton não (2). . .	122

SUMÁRIO

1	Introdução	1
2	Preliminares	3
3	Métodos ABS Lineares	19
3.1	Classe de Métodos ABS	20
3.2	Classe de Métodos ABS em Blocos	27
4	Métodos ABS Não-Lineares	37
4.1	Classe de Métodos ABS	37
4.2	Classe de Métodos ABS em Blocos	54
5	Relações entre o Algoritmo de Broyden e o Algoritmo ABS	63
6	Testes dos Algoritmos	81
6.1	Funções Testadas	82
6.2	Tabelas	97
6.3	Conclusões	123
	Bibliografia	125

Introdução

No ano de 1984, os pesquisadores J. Abaffy, C. Broyden e E. Spedicato por meio do artigo [1], propuseram uma classe de métodos para resolução de sistemas de equações lineares, determinados e indeterminados, nomeada por eles de métodos ABS. Neste artigo são apresentadas propriedades que essa classe de métodos possui, dentre elas, a de terminação finita dada pela quantidade de linhas que o sistema linear contém. Essa propriedade de terminação decorre da característica que os métodos ABS têm, eles encontram na k -ésima iteração um vetor que resolve as k primeiras equações do sistema.

Alguns anos depois, em 1987 [2], J. Abaffy, A. Galántai e E. Spedicato publicaram uma modificação da classe de métodos ABS, para sistemas de equações não-lineares cuja quantidade de variáveis e incógnitas são iguais. Esses métodos, a partir de um vetor inicial, produzem uma sequência de vetores, por meio da aplicação do método ABS linear, usando informações do sistema não-linear e da matriz Jacobiana da função que representa o sistema não-linear. Foi apresentado, nesse artigo, um teorema de convergência local para a classe de métodos ABS quando a matriz Jacobiana é não-singular na solução.

Em um trabalho apresentado em um Colóquio da Sociedade Matemática János Bolyai [3], J. Abaffy e A. Galántai apresentaram uma generalização da classe de métodos ABS, tanto para o caso envolvendo sistemas lineares quanto não-lineares, por acrescentar uma matriz não-singular e pela fragmentação das matrizes envolvidas em blocos formados por suas colunas. Essa nova classe de métodos aparecerá com o nome de “Classe de Métodos ABS em Blocos” e ela contém a classe de métodos ABS, desenvolvida em [1], como obtida por escolhas particulares dos parâmetros presentes no algoritmo. Esse trabalho também apresenta um teorema de convergência local para os métodos ABS em Blocos aplicado a

sistemas de equações não-lineares.

No Capítulo 2 abordaremos resultados clássicos envolvendo os conteúdos de álgebra matricial e cálculo diferencial e integral. No final dele, também falaremos brevemente sobre dois métodos iterativos, Newton e Chebyshev, que resolvem sistemas de equações não-lineares.

No Capítulo 3 apresentaremos os algoritmos das classes de métodos ABS relacionados aos sistemas de equações lineares. Estarão contidos também, resultados que mostrarão algumas características que esses métodos possuem, principalmente, umas das quais já foi referida que é a de terminação finita.

No Capítulo 4 abordaremos os algoritmos que envolvem as classes de métodos ABS relacionados aos sistemas de equações não-lineares e um teorema de convergência local de cada método.

No Capítulo 5 apresentamos um resultado inédito que garante que sobre certas hipótese envolvendo um sistema de equações lineares, cuja matriz dos coeficientes é quadrada, os métodos de Broyden e a classe de métodos ABS são equivalentes. Por meio desse resultado também podemos concluir que sobre certas condições o método de Broyden tem terminação finita em $2n$ iterações.

No Capítulo 6 apresentaremos uma coleção de testes envolvendo os métodos de Newton, Chebyshev e alguns métodos da classe ABS, na resolução de sistemas de equações não-lineares, comparando a eficiência desses métodos em uma coleção de problemas. Abordaremos também detalhes envolvendo as tabelas apresentadas neste capítulo: as funções testadas, pontos iniciais e finais e matrizes usadas que não foram descritas nas tabelas.

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos conceitos e resultados básicos que serão utilizados no decorrer do trabalho.

A Desigualdade CBS que será apresentada a seguir é um importante resultado que relaciona o produto interno de dois vetores com o produto da norma euclidiana desses dois vetores. Com esse resultado podemos mostrar que a norma euclidiana para vetores satisfaz a desigualdade triangular. A demonstração foi obtida de [9] pg. 272.

Proposição 2.1. *Desigualdade de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz(CBS)*

$$|x^T y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

onde $x^T y$ representa o produto interno usual do \mathbb{R}^n . A igualdade ocorre se, e somente se, $y = \alpha x$ para $\alpha = x^T y / x^T x$.

Demonstração: Se $x = 0$ a desigualdade é trivialmente satisfeita.

Suponhamos $x \neq 0$ e tomamos $\alpha = x^T y / x^T x = x^T y / \|x\|_2^2$. Veja que

$$x^T (\alpha x - y) = \alpha x^T x - x^T y = \frac{x^T y}{x^T x} x^T x - x^T y = x^T y - x^T y = 0.$$

Agora,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|(\alpha x - y)\|_2^2 &= (\alpha x - y)^T (\alpha x - y) \\ &= (\alpha x^T - y^T) (\alpha x - y) \\ &= \alpha x^T (\alpha x - y) - y^T (\alpha x - y) \\ &= -y^T (\alpha x - y) \\ &= -\alpha y^T x + y^T y. \end{aligned}$$

Como $y^T x = x^T y$ temos que

$$\alpha y^T x = \frac{x^T y}{x^T x} x^T y = \frac{x^T y^2}{x^T x}.$$

Substituindo a igualdade acima na desigualdade anterior e usando $0 \leq \|x\|_2^2 = x^T x$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 \leq -\frac{x^T y^2}{x^T x} + y^T y &\Leftrightarrow \frac{x^T y^2}{x^T x} \leq y^T y \\ &\Leftrightarrow (x^T y)^2 \leq x^T x y^T y \\ &\Leftrightarrow |x^T y| \leq \sqrt{x^T x} \sqrt{y^T y} \\ &\Leftrightarrow |x^T y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2. \end{aligned}$$

Para mostrar a equivalência com relação a igualdade, na desigualdade CBS, suponhamos inicialmente que $y = \alpha x$, então

$$\begin{aligned} |x^T y| &= |x^T(\alpha x)| = |\alpha x^T x| = |\alpha| x^T x = |\alpha| \|x\|_2^2 \\ &= |\alpha| \|x\|_2 \|x\|_2 = \|x\|_2 |\alpha x|_2 = \|x\|_2 \|y\|_2. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponhamos que a igualdade na desigualdade CBS ocorre, então pelo desenvolvimento no início da demonstração, temos que nesse caso, a desigualdade $0 \leq \|(\alpha x - y)\|_2^2$ deve ser uma igualdade e assim

$$0 = \|(\alpha x - y)\|_2^2 \Leftrightarrow 0 = \|(\alpha x - y)\|_2 \Leftrightarrow 0 = (\alpha x - y) \Leftrightarrow \alpha x = y.$$

□

Pela associação que pode ser feita entre matrizes e transformações lineares é natural procurar introduzir uma unidade de medida entre matrizes. Devido ao fato que matrizes podem ser encaradas como uma generalização do conceito de vetores, nada mais natural do que definir uma noção de distância no espaço das matrizes que seja semelhante ao conceito de distância para vetores. A norma, a seguir, pode ser vista como uma generalização da norma euclidiana para matrizes.

Definição 2.2. Considere $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, a **Norma de Frobenius** para matrizes pode ser definida de qualquer uma das maneiras equivalentes a seguir

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \sum_i \|A_{i*}\|_2^2 = \sum_j \|A_{*j}\|_2^2 = \text{traço}(A^T A),$$

onde as notações A_{i*} e A_{*j} significam a linha i e a coluna j da matriz A , respectivamente.

A proposição a seguir foi retirada de [9], pg. 288, e fornece um limitante superior para a norma euclidiana de um vetor, obtido pelo produto matriz vetor, e ela é amplamente empregado em várias demonstrações durante o texto.

Proposição 2.3. *A norma de um produto entre uma matriz e um vetor são compatíveis em relação ao produto da norma de Frobenius e da norma euclidiana, no seguinte sentido*

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2,$$

para quaisquer $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: A desigualdade é obtida simplesmente pelo uso da definição da norma euclidiana de um vetor, da norma de Frobenius para uma matriz e da desigualdade CBS,

$$\begin{aligned} \|Ax\|_2^2 &= \sum_i |A_{i*}x|^2 \\ &\leq \sum_i (\|A_{i*}\|_2 \|x\|_2)^2 \\ &\leq \sum_i \|A_{i*}\|_2^2 \|x\|_2^2 \\ &\leq \left(\sum_i \|A_{i*}\|_2^2 \right) \|x\|_2^2 \\ &= \|A\|_F^2 \|x\|_2^2, \end{aligned}$$

onde a desigualdade desejada segue extraindo a raiz quadrada nos dois membros da desigualdade. \square

A seguir, definiremos um conceito que utilizaremos algumas vezes durante o texto, chamado número de condição de uma matriz, denotado por κ . Ele é uma medida envolvendo os autovalores de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e está relacionado à estabilidade da solução do

sistema de equações lineares $Ax = b$, no sentido que, se $\kappa \approx 1$, o sistema linear está menos suscetível a erros provocados por arredondamentos numéricos.

Definição 2.4. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz não-singular, então seu número de condição é dado por

$$\kappa(A) = \|A\|_F \|A^{-1}\|_F.$$

Alguns conceitos importantes envolvendo matrizes estão intimamente relacionados a noção geométrica de ortogonalidade entre vetores. Por exemplo, num sistema linear homogêneo representado na forma matricial $Ax = 0$, se olharmos para as linhas da matriz A como vetores, temos que os vetores solução x desse sistema são aqueles que são ortogonais a todos os vetores linha da matriz A .

O conceito de ortogonalidade entre vetores se faz presente quando trabalhamos com matrizes ortogonais. Elas aparecem com muita frequência nos resultados teóricos envolvendo o produto de matrizes, um dos principais motivos para isso se deve ao fato de que toda matriz ortogonal é não-singular, com inversa sendo sua matriz transposta.

Definição 2.5. Uma matriz $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz ortogonal, quando uma das propriedades a seguir é verificada

- i) As colunas da matriz U formam um conjunto de vetores unitários ortogonais.
- ii) As linhas da matriz U formam um conjunto de vetores unitários ortogonais.
- iii) $U^T U = U U^T = I$.

Durante o texto, utilizaremos resultados que envolvem o conceito de raio espectral de uma matriz quadrada. Neste sentido, apresentamos primeiramente uma definição deste conceito.

Definição 2.6. Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ temos que seu raio espectral, denotado por $\rho(A)$, é definido por

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|\},$$

onde λ indica um autovalor da matriz A .

O próximo resultado aborda o fato que para matrizes quadradas o raio espectral de uma matriz nunca pode ser maior do que sua norma de Frobenius. Na verdade essa desigualdade pode ser mostrada para qualquer norma matricial, recomendamos [9], Exemplo 7.1.4 pg. 497. Aqui segue uma demonstração para um caso particular.

Proposição 2.7. *Seja $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz quadrada, então temos*

$$\rho(B) \leq \|B\|_F.$$

Demonstração: A demonstração é feita por meio do uso da Proposição 2.3 e de alguns cálculos.

Suponha que (x, λ) seja um autopar para a matriz B , então

$$|\lambda| \|x\|_2 = \|\lambda x\|_2 = \|Bx\|_2 \leq \|B\|_F \|x\|_2.$$

Lembrando que um autovetor de uma matriz é sempre um vetor não-nulo, a desigualdade acima fica

$$|\lambda| \|x\|_2 \leq \|B\|_F \|x\|_2 \Leftrightarrow |\lambda| \leq \|B\|_F.$$

A demonstração é concluída pelo fato que a desigualdade anterior é satisfeita para qualquer autovalor associado a matriz B , então é satisfeita, em particular, para o autovalor de maior valor absoluto, isto é, o raio espectral da matriz B . \square

Este é um importante lema cuja demonstração foi retirada de [11], 2.2.9 pg. 44, e que servirá como base para demonstração do Lema 2.9 desse texto.

Lema 2.8. *Se $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ temos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} B^n = 0$ se, e somente se, $\rho(B) < 1$.*

Demonstração: Suponhamos que $\rho(B) < 1$. Se isso ocorre temos, por [11], 2.2.8 pg. 44, que existe alguma norma matricial tal que $\|B\| < 1$. Agora, usando a propriedade envolvendo o produto de matrizes conformes para normas matriciais

$$\|B^k\| \leq \|B\|^k,$$

e como $\|B\| < 1$ temos que a série geométrica $\|B\|^k \rightarrow 0$. Pelo Teorema do Confronto e

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|B^k\| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|B\|^k = 0.$$

concluimos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|B^k\| = 0$. Como as normas de matrizes satisfazem a condição que $\|B^k\| = 0 \Leftrightarrow B^k = 0$ finalizamos uma das implicações.

Para a recíproca, suponhamos por absurdo que a matriz B tenha algum autovalor $\lambda \geq 1$ e correspondente autovetor $x \neq 0$, ou seja, $Bx = \lambda x$. Então, por um simples argumento de indução conseguimos mostrar que $B^k x = \lambda^k x$ e assim

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B^n x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^n x \neq 0,$$

pois $x \neq 0$ e a série geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n$ é divergente. Logo, temos um absurdo pois, por hipótese, $\lim_{n \rightarrow +\infty} B^n = 0$. \square

O próximo lema é um resultado conhecido na literatura, envolvendo álgebra de matrizes, e garante que sobre determinadas condições impostas sobre a matriz B , teremos a não-singularidade da matriz $I - B$. O resultado apresentado foi retirado de [9], pg. 126.

Lema 2.9. *(Lema de Neumann) Suponhamos que a matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tenha raio espectral $\rho(B) < 1$. Então a matriz $(I - B)$ é não-singular e*

$$(I - B)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B^n.$$

Demonstração: Desde que $\rho(B) < 1$ temos claramente que $(I - B)$ não tem autovalores nulos (uma maneira de enxergar isso é pensar na forma de Jordan da matriz B). Agora para demonstrar o desejado note que

$$(I - B) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} B^n \right) = (I - B + B - B^2 + B^2 - B^3 + \dots) = I - \lim_{n \rightarrow +\infty} B^n = I,$$

onde a última igualdade decorre do Lema 2.8. Analogamente, mostramos que

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} B^n \right) (I - B) = I.$$

Assim, das duas últimas expressões concluimos o desejado. \square

O corolário a seguir pode ser encontrado em [11], pg. 45, e aqui aparece aplicado somente ao caso da norma de Frobenius. Contudo, como já foi comentado no texto, ele se aplica a qualquer outra norma matricial.

Corolário 2.10. *Se uma matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é tal que $\|B\|_F < 1$, então vale a seguinte desigualdade*

$$\|(I - B)^{-1}\|_F \leq \frac{1}{1 - \|B\|_F}.$$

Demonstração: Usando a Proposição 2.7, temos que $\rho(B) \leq \|B\|_F < 1$ e com esse fato, pelo Lema 2.9, sabemos que a matriz $I - B$ é não-singular. Assim, pela desigualdade triangular satisfeita pela norma de Frobenius, obtemos

$$\|(I - B)^{-1}\|_F = \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} B^n \right\|_F \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|B\|_F^n.$$

Agora, como $\|B\|_F < 1$ a série geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} \|B\|_F^n$ converge para o termo $1/(1 - \|B\|_F)$, temos:

$$\|(I - B)^{-1}\|_F \leq \frac{1}{1 - \|B\|_F},$$

o que conclui o corolário. □

O lema seguinte é outro importante resultado envolvendo a não-singularidade de matrizes. Ele garante que se uma matriz é não-singular e a norma da sua inversa é limitada, então para “pequenas” perturbações feitas nessa matriz não é alterada a sua não-singularidade. As perturbações podem ser vistas como a soma de uma outra matriz, e o quão pequena deve ser a perturbação depende do limitante superior da matriz inversa considerada. Tal fato é explicitado na demonstração, retirada de [11], (2.3.2) pg. 45.

Lema 2.11. *(Lema da Perturbação) Considere $B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e assumamos que B é não-singular com $\|B^{-1}\|_F \leq \alpha$. Se*

$$\|B - C\|_F \leq \beta \text{ e } \alpha\beta < 1,$$

então C também é não-singular e

$$\|C^{-1}\|_F \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta}.$$

Demonstração: Como

$$\|I - B^{-1}C\|_F = \|B^{-1}(B - C)\|_F \leq \alpha\beta < 1 \text{ e}$$

$$B^{-1}C = I - (I - B^{-1}C),$$

segue, do Lema 2.9, que $B^{-1}C$ é não-singular e pela não-singularidade de B^{-1} concluímos que C é não-singular.

Agora, pelo Corolário 2.10, temos

$$\begin{aligned} \|C^{-1}\|_F &= \|B^{-1}[I - (I - B^{-1}C)]^{-1}\|_F \\ &\leq \|B^{-1}\|_F \| [I - (I - B^{-1}C)]^{-1} \|_F \\ &\leq \|B^{-1}\|_F \| [I - (B^{-1}(B - C))]^{-1} \|_F \\ &\leq \alpha \frac{1}{1 - \|B^{-1}(B - C)\|_F}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Como $\|B^{-1}(B - C)\|_F \leq \alpha\beta < 1$, vemos que

$$1 - \alpha\beta \leq 1 - \|B^{-1}(B - C)\|_F \Leftrightarrow \frac{1}{1 - \|B^{-1}(B - C)\|_F} \leq \frac{1}{1 - \alpha\beta}. \tag{2.2}$$

De (2.1) e (2.2) concluímos

$$\|C^{-1}\|_F \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta}.$$

□

Durante o texto, em alguns momentos, será usado o conceito de pseudoinversa de uma matriz. Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a pseudoinversa (ou inversa de Moore-Penrose) de A denotada por $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a única matriz que satisfaz as quatro equações de Penrose

$$\begin{aligned} AA^+A &= A \\ A^+AA^+ &= A^+ \\ (AA^+)^T &= AA^+ \\ (A^+A)^T &= A^+A. \end{aligned}$$

Considerando agora a fatoração URV para uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (recomendamos [9] pg.407), temos:

$$A = U \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} V^T, \quad (2.3)$$

onde $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes ortogonais e $C \in \mathbb{R}^{r \times r}$ é uma matriz não-singular com $r = \text{posto}(A)$. Segundo [9], pg. 422, temos que nessas condições a pseudoinversa da matriz A pode ser definida como

$$A^+ = V \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n \times m} U^T.$$

Com o conceito de pseudoinversa, segue uma proposição que fornece um limitante superior para a norma de um determinado produto matricial.

Proposição 2.12. *Suponhamos $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $\text{posto}(A) = r$ e a fatoração URV de A dada por (2.3). A matriz AA^+ é dada por*

$$AA^+ = U \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^T = UDU^T,$$

e $\|AA^+\|_F \leq \sqrt{m}$.

Demonstração: A primeira parte é imediata, basta efetuar o produto entre as matrizes A e A^+ lembrando do fato que $V^T V = I$ e fazendo o produto em blocos das duas matrizes intermediárias dadas na decomposição de cada uma das duas matrizes envolvidas. Para a segunda parte usamos uma das definições equivalentes da norma de Frobenius dada pela Definição 2.2

$$\begin{aligned} \|AA^+\|_F^2 &= \text{traço}([AA^+]^T AA^+) \\ &= \text{traço}([UDU^T]^T [UDU^T]) \\ &= \text{traço}([UD^T U^T] [UDU^T]) \\ &= \text{traço}([UD^T] [DU^T]) \\ &= \text{traço}([UDU^T]), \end{aligned}$$

agora usando o fato que $\text{traço}(CB) = \text{traço}(BC)$ (para demonstração desse fato veja [9] Exemplo 3.6.5 pg. 110) com $C = UD$ e $B = U^T$, temos

$$\|AA^+\|_F^2 = \text{traço}([UDU^T]) = \text{traço}([U^TUD]) = \text{traço}(D) = r.$$

Observando que a matriz D pode, na melhor das hipóteses, ser igual a matriz identidade de ordem m temos que a norma $\|AA^+\|_F^2$ pode ter valor máximo m , isto é

$$\|AA^+\|_F^2 \leq m.$$

O resultado é obtido extraindo a raiz quadrada nos dois membros da última desigualdade.

□

Os próximos dois resultados foram retirados da referência [9], pg.124, e abordam questões relativas a existência de inversas de matrizes obtidas por uma correção de posto 1 de uma matriz não-singular. Além da garantia da existência da inversa, também apresentam uma maneira explícita de calcular essa inversa.

Proposição 2.13. *Dados vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz identidade, temos que a matriz $I + uv^T$ é não-singular se, $v^T u \neq -1$. Além disso,*

$$(I + uv^T)^{-1} = I - \frac{uv^T}{1 + v^T u}.$$

De maneira semelhante, temos que a matriz $I - uv^T$ é não-singular se, $v^T u \neq 1$.

Além disso,

$$(I - uv^T)^{-1} = I + \frac{uv^T}{1 - v^T u}.$$

Demonstração: A demonstração da proposição segue por meio da simples verificação que

$$(I + uv^T) \left(I - \frac{uv^T}{1 + v^T u} \right) = I \quad \text{e}$$

$$(I - uv^T) \left(I + \frac{uv^T}{1 - v^T u} \right) = I.$$

□

O próximo Corolário é uma extensão do resultado anterior.

Corolário 2.14. (*Fórmula de Sherman-Morrison*)

Dados $A, I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $u, v \in \mathbb{R}^n$ onde I é a matriz identidade e A é não-singular, temos que a matriz $A + uv^T$ é não-singular se, $v^T A^{-1}u \neq -1$. Além disso,

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1}u}. \quad (2.4)$$

De maneira semelhante, temos que a matriz $A - uv^T$ é não-singular se, $v^T A^{-1}u \neq 1$. Além disso,

$$(A - uv^T)^{-1} = A^{-1} + \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 - v^T A^{-1}u}. \quad (2.5)$$

Demonstração: A demonstração de (2.4) decorre da Proposição 2.13 e do cálculo envolvendo a inversa do produto de duas matrizes inversíveis, pois

$$A + uv^T = A(I + A^{-1}uv^T).$$

Seja $A^{-1}u = w$, temos que $v^T w \neq -1$ e assim pela Proposição 2.13 a matriz $(I + A^{-1}uv^T)$ é não-singular. Logo,

$$\begin{aligned} (A - uv^T)^{-1} &= [A(I + A^{-1}uv^T)]^{-1} = (I + A^{-1}uv^T)^{-1}A^{-1} \\ &= \left[I - \frac{A^{-1}uv^T}{1 + v^T A^{-1}u} \right] A^{-1} \\ &= A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1}u}. \end{aligned}$$

De maneira análoga, podemos mostrar que (2.5) ocorre. \square

O próximo lema é um resultado do cálculo diferencial e integral que será usado para auxiliar na demonstração de outro resultado que surgirá durante o texto. Esse resultado pode ser encontrado em [6], Lema 4.1.2 pg. 70.

Lema 2.15. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $f \in C^1(B(x^*, r))$. Então, para quaisquer $x, y \in B(x^*, r)$ temos*

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 J(y + t[x - y])(x - y) dt,$$

onde $J(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz Jacobiana da função $f(x)$.

Demonstração: Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos para uma função $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 que

$$\phi(b) - \phi(a) = \int_a^b \phi'(t) dt. \quad (2.6)$$

Defina a função $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi(t) = f(\gamma(t)),$$

onde $\gamma(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é da forma

$$\gamma(t) = y + t(x - y).$$

Pela diferenciabilidade das funções f e γ no segmento $[x, y] \forall x, y \in B(x^*, r)$ e no intervalo $[0, 1]$, respectivamente, temos pela regra da cadeia que a função ϕ é diferenciável no intervalo $[0, 1]$ e

$$\phi'(t) = J(\gamma(t))\gamma'(t) = J(y + t(x - y))(x - y). \quad (2.7)$$

Lembrando que $\phi(0) = f(y)$, $\phi(1) = f(x)$ e utilizando (2.6) e (2.7) obtemos

$$\phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t) dt \Leftrightarrow f(x) - f(y) = \int_0^1 J(y + t(x - y))(x - y) dt,$$

o que encerra a demonstração. □

Durante o texto abordaremos vários métodos iterativos que buscam encontrar aproximações para uma solução de um sistema de equações não-lineares. Os métodos iterativos apresentados nesse texto tem a característica que, dado um ponto inicial x_0 , geramos uma sequência de pontos $\{x_k\}$ segundo uma certa regra, específica para cada método, e caso essa sequência de pontos seja convergente, para alguma solução do sistema, tomamos algum ponto da sequência como aproximação para a solução do sistema não-linear desejado.

Um método iterativo muito eficiente e criado à centenas de anos é o *Método de Newton*. Esse método nasceu da ideia da aproximação em série de Taylor de primeira ordem

de uma função. Suponhamos que um sistema de equações não-lineares de n equações e n incógnitas seja descrito da forma

$$F(x) = 0, \quad (2.8)$$

onde $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))^T$ com $F_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e F uma função continuamente diferenciável em \mathbb{R}^n . Tomando x^* como sendo uma solução de (2.8), sabemos que a aproximação em série de Taylor para $F(x^*)$ em torno do ponto \bar{x} é dada por

$$F(x^*) \approx F(\bar{x}) + F'(\bar{x})(x^* - \bar{x}), \quad (2.9)$$

onde $F'(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz Jacobiana da função F no ponto x .

Tomando \bar{x} suficientemente próximo de x^* , de (2.9) e lembrando do fato que x^* é uma solução para o sistema (2.8), $F(x^*) = 0$, obtemos

$$0 \approx F(\bar{x}) + F'(\bar{x})(x^* - \bar{x}) \Leftrightarrow -F(\bar{x}) \approx F'(\bar{x})(x^* - \bar{x}) \quad (2.10)$$

Suponhamos que $F'(\bar{x})$ seja uma matriz não-singular, desse fato podemos reescrever (2.10) como

$$[F'(\bar{x})^{-1}] [-F(\bar{x})] \approx (x^* - \bar{x}),$$

ou equivalentemente,

$$\bar{x} + [F'(\bar{x})^{-1}] [-F(\bar{x})] \approx x^*. \quad (2.11)$$

De (2.10) e (2.11), segue o motivo para as atualizações nos vetores x_k que são feitas no método de Newton.

Algoritmo 2.16. (Método de Newton)

Passo 0 - Escolha um vetor $x_1 \in \mathbb{R}^n$ como aproximação inicial para uma solução do sistema.

Para $k = 1, 2, \dots$ execute os Passos de 1 à 4:

Passo 1 - Resolva o sistema de equações lineares

$$F'(x_k)s = -F(x_k).$$

Se o sistema admitir alguma solução s , vá ao Passo 3. Caso contrário, vá ao Passo 2.

Passo 2 - Escolha um novo vetor x_k e vá ao Passo 1.

Passo 3 - Atualize o vetor x_k da forma

$$x_{k+1} = x_k + s.$$

Passo 4 - Acrescente uma unidade ao índice k e retorne ao Passo 1.

Observamos que as expressões dos Passos 1 e 3 do Algoritmo 2.16 são similares a (2.10) e (2.11), respectivamente. Notemos que, no caso em que a matriz $F'(x_k)$ é não-singular, temos que a única solução para o sistema linear do Passo 1 do Algoritmo 2.16 é dada por

$$s = [F'(x_k)]^{-1}[-F(x_k)].$$

Salientamos para os menos familiarizados, que mesmo no caso em que a matriz $F'(x_k)$ é não-singular, resolvemos um sistema linear para encontrar o vetor s no Algoritmo 2.16, ao invés de calcular a inversa da matriz $F'(x_k)$. O motivo disso é que, computacionalmente, resolver um sistema de equações lineares exige menos operações aritméticas do que o cálculo da inversa de uma matriz, e portanto, acumulando menos erros.

Apresentaremos agora outro método iterativo para encontrar soluções de sistemas não-lineares conhecido como, *Método de Chebyshev*. Este método faz parte de uma classe de métodos conhecidos por Métodos Tensoriais que levam esse nome por utilizarem derivadas de ordem superior (ver [12]). Suponhamos que o sistema não-linear com solução x^* é dado como em (2.8) e que F é duas vezes continuamente diferenciável. Tomando a expansão em série de Taylor de segunda ordem de $F(x^*)$ em torno do ponto \bar{x} , temos

$$F(x^*) \approx F(\bar{x}) + F'(\bar{x})(x^* - \bar{x}) + (x^* - \bar{x})^T F''(\bar{x})(x^* - \bar{x}), \quad (2.12)$$

onde $F'(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz Jacobiana de F no ponto x e $F''(x) \in \mathbb{R}^{n \times n \times n}$ é dada por

$$[F''(x)]_{i,j,k} = [\nabla^2 F_k(x)]_{i,j},$$

com $\nabla^2 F_k(x)$ sendo a matriz hessiana da função $F_k(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $[A]_{i,j}$ denota o elemento pertencente a linha i e coluna j da matriz A . O produto tensorial $s^T F''(x)s \in \mathbb{R}^n$ com

$s = (s_1, \dots, s_n)^T \in \mathbb{R}^n$ é definido por

$$s^T F''(x)s = \begin{bmatrix} s^T \nabla^2 F_1(x)s \\ \vdots \\ s^T \nabla^2 F_n(x)s \end{bmatrix}.$$

Tomando a igualdade em (2.12), lembrando que $F(x^*) = 0$ e substituindo $(x^* - \bar{x}) = d + d_N$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= F(\bar{x}) + F'(\bar{x})(d + d_N) + (d + d_N)^T F''(\bar{x})(d + d_N) \\ \Leftrightarrow 0 &= F(\bar{x}) + F'(\bar{x})d_N + F'(\bar{x})d + \underbrace{d^T F''(\bar{x})d}_{(1)} + \underbrace{d_N^T F''(\bar{x})d}_{(2)} + \underbrace{d^T F''(\bar{x})d_N}_{(3)} + d_N^T F''(\bar{x})d_N, \end{aligned}$$

desconsiderando os termos (1), (2) e (3), chegamos a expressão que definirá a maneira como os vetores do método Chebyshev serão atualizados.

Algoritmo 2.17. (Método de Chebyshev)

Passo 0 - Escolha um vetor $x_1 \in \mathbb{R}^n$ como aproximação inicial para uma solução do sistema.

Para $k = 1, 2, \dots$ realize os passos a seguir:

Passo 1 - Encontre o vetor d_N como sendo uma solução do sistema de equações lineares

$$F'(x_k)d_N = -F(x_k).$$

Passo 2 - Encontre o vetor d como sendo uma solução do sistema de equações lineares

$$F'(x_k)d = -d_N^T F''(x_k)d_N.$$

Caso existam algum par de vetores $\{d_N, d\}$ satisfazendo as igualdades acima vá para o Passo 4. Caso contrário, vá para o Passo 3.

Passo 3 - Escolha um novo vetor x_k e vá ao Passo 1.

Passo 4 - Atualize o vetor x_k da forma

$$x_{k+1} = x_k + d_N + d.$$

Passo 5 - Acrescente uma unidade ao índice k e retorne ao Passo 1.

Observemos que o sistema linear do Passo 1 do Algoritmo 2.17 coincide com o sistema do Passo 1 do Algoritmo 2.16. Para maiores detalhes sobre os métodos de Newton e Chebyshev consultar [11, 12].

Métodos ABS Lineares

Neste capítulo apresentaremos duas classes de métodos capazes de resolver sistemas de equações lineares. A primeira será chamada de classe de Métodos ABS e a segunda de classe de Métodos ABS em Blocos e nossa abordagem baseia-se nos artigos [1] e [3], respectivamente.

Os métodos levam o nome de ABS devido a composição das iniciais dos sobrenomes de seus criadores (Abaffy, Broyden e Spedicato). Também enfatizamos o fato que apresentaremos em cada uma das seções uma dessas classes, Algoritmos 3.1 e 3.7.

Durante todo o capítulo vamos supor, salvo menção contrária, que a matriz dos coeficientes do sistema linear possui n linhas e m colunas com $n \leq m$, $\text{posto}(A) = n$ e o sistema linear que desejamos encontrar uma solução é dado por

$$Ax = b, \tag{3.1}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x \in \mathbb{R}^m$ e $b \in \mathbb{R}^n$. Consideramos também as linhas da matriz A representadas pelos vetores a_i^T , ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix},$$

com $a_i^T \in \mathbb{R}^m$.

3.1 Classe de Métodos ABS

Os métodos que compõem essa classe são caracterizados por serem do tipo direto. Tomando um ponto inicial, não sendo solução do sistema, e a matriz identidade, é gerada uma sequência de vetores $\{y_k\}$ e uma sequência de matrizes $\{H_k\}$, onde a atualização dos vetores satisfaz uma condição do tipo Newton

$$y_{k+1} = y_k - H_k z_k,$$

que encontram uma solução do sistema após a construção de um número finito de vetores.

As matrizes $\{H_k\}$ são obtidas por meio de correções de posto 1 com a propriedade que todos os vetores pertencentes ao $Nuc(H_k)$, estão contidos no $Nuc(H_{k+1})$ e na nova matriz obtida acrescentamos um vetor ao seu núcleo, específico para garantir a propriedade de convergência finita. Mais detalhes sobre esses fatos seguem no texto.

No artigo [1] os autores apresentam alguns métodos conhecidos na literatura que estão relacionados à classe ABS, sejam por corresponderem a escolhas específicas dos parâmetros do Algoritmo 3.1 ou por serem computacionalmente de implementação distintas, porém geram a mesma sequência de iterandos. Dentre os citados no texto, destacamos os métodos de Huang e Rosen equivalentes ao método simétrico, que será citado nesse texto, e o método de Brown equivalente as escolhas de $z_i = w_i = e_i$ no Algoritmo 3.1, onde e_i indica um vetor unitário com todas as coordenadas nulas, exceto a i -ésima, que é igual a 1.

Algoritmo 3.1. Dado um sistema linear como em (3.1), os passos para resolvê-lo são:

Passo 0 - Escolha um vetor inicial y_1 arbitrário e defina $H_1 = I_m$.

Para $k = 1, \dots, n$ realize os passos 1 à 4:

Passo 1 - Escolha um vetor $z_k \in \mathbb{R}^m$ não-nulo tal que $a_k^T p_k \neq 0$, onde p_k e α_k são dados por

$$p_k = H_k^T z_k \text{ e } \alpha_k = \frac{r_k}{a_k^T p_k},$$

com $r_k = a_k^T y_k - b_k$.

Passo 2 - Atualize o vetor y_k pela expressão

$$y_{k+1} = y_k - \alpha_k p_k.$$

Se $k = n$, **pare**, y_{n+1} é uma solução do sistema linear $Ax = b$. Caso contrário, realize o Passo 3.

Passo 3 - Escolha um vetor $w_k \in \mathbb{R}^m$ de tal forma que $w_k^T H_k a_k \neq 0$ e atualize a matriz H_k pela expressão

$$H_{k+1} = H_k - \frac{H_k a_k w_k^T H_k}{w_k^T H_k a_k}.$$

Passo 4 - Acrescente uma unidade ao índice k e volte ao Passo 1.

Algumas propriedades seguem imediatamente da estrutura do algoritmo apresentado anteriormente. Esse primeiro resultado é enunciado em [1], Teorema 1, porém nesse texto os autores não apresentaram uma demonstração para o resultado. Dessa forma, preenchamos esta lacuna com a seguinte proposição.

Proposição 3.2. *A classe de métodos ABS satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $H_j H_i = H_i H_j = H_j, \forall i \leq j.$

(ii) $H_i a_j = 0, \forall j < i.$

(iii) *Os vetores $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ formam um conjunto de vetores linearmente independente.*

Demonstração: A demonstração do item (i) será feita utilizando o argumento de indução. Para $j = 1$ obtemos que a igualdade é válida pois, $H_1 = I$, e

$$I^2 = I.$$

Suponhamos, por hipótese de indução, que a propriedade (i) seja válida para o

índice k , e temos para o índice $k + 1$ que

$$\begin{aligned}
H_i H_{k+1} &= H_i \left(H_k - \frac{H_k a_k w_k^T H_k}{w_k^T H_k a_k} \right) \\
&= H_i H_k - \frac{H_i H_k a_k w_k^T H_k}{w_k^T H_k a_k} \\
&= H_k - \frac{H_k a_k w_k^T H_k}{w_k^T H_k a_k} \\
&= H_{k+1}, \quad \forall i \leq k.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
H_{k+1} H_i &= \left(H_k - \frac{H_k a_k w_k^T H_k}{w_k^T H_k a_k} \right) H_i \\
&= H_k H_i - \frac{H_k a_k w_k^T H_k H_i}{w_k^T H_k a_k} \\
&= H_k - \frac{H_k a_k w_k^T H_k}{w_k^T H_k a_k} \\
&= H_{k+1}, \quad \forall i \leq k,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

onde (3.2) e (3.3) seguem pelo uso da hipótese de indução.

Agora para $i = k + 1$ e $s = w_k^T H_k a_k$, temos

$$\begin{aligned}
H_{k+1} H_{k+1} &= \left(H_k - \frac{H_k a_k w_k^T H_k}{s} \right) \left(H_k - \frac{H_k a_k w_k^T H_k}{s} \right) \\
&= H_k H_k - \frac{H_k H_k a_k w_k^T H_k}{s} - \frac{H_k a_k w_k^T H_k H_k}{s} \\
&\quad + \frac{H_k a_k w_k^T H_k H_k a_k w_k^T H_k}{s^2} \\
&= H_k - \frac{2H_k a_k w_k^T H_k}{s} + \frac{H_k a_k (s) w_k^T H_k}{s^2} \\
&= H_k - \frac{2H_k a_k w_k^T H_k}{s} + \frac{H_k a_k w_k^T H_k}{s} \\
&= H_k - \frac{H_k a_k w_k^T H_k}{s} = H_{k+1},
\end{aligned}$$

concluindo assim a demonstração do item (i).

Para demonstrar o item (ii), usamos novamente o argumento indutivo sobre o índice j . Tomando $j = 2$, temos que

$$\begin{aligned}
H_2 a_1 &= \left(H_1 - \frac{H_1 a_1 w_1^T H_1}{w_1^T H_1 a_1} \right) a_1 \\
&= H_1 a_1 - \frac{H_1 a_1 w_1^T H_1 a_1}{w_1^T H_1 a_1} \\
&= H_1 a_1 - H_1 a_1 = 0.
\end{aligned}$$

Suponhamos, por hipótese de indução, que a propriedade (ii) seja válida para o índice k . Segue para o índice $k + 1$ que

$$\begin{aligned} H_{k+1}a_k &= \left(H_k - \frac{H_k a_k w_k^T H_k}{w_k^T H_k a_k} \right) a_k \\ &= H_k a_k - \frac{H_k a_k w_k^T H_k a_k}{w_k^T H_k a_k} \\ &= H_k a_k - H_k a_k = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$H_{k+1}a_j = \left(H_k - \frac{H_k a_k w_k^T H_k}{w_k^T H_k a_k} \right) a_j = H_k a_j - \frac{H_k a_k w_k^T H_k a_j}{w_k^T H_k a_k} = 0, \quad \forall j < k, \quad (3.5)$$

onde (3.4) e (3.5) seguem da hipótese de indução. Concluindo assim a demonstração do item (ii).

Para demonstrar o item (iii), precisamos garantir que

$$\sum_{k=1}^n \beta_k p_k = 0 \Rightarrow \beta_k = 0, \quad \forall k. \quad (3.6)$$

Pré-multiplicando (3.6) pelo vetor a_1^T , temos

$$a_1^T \left(\sum_{k=1}^n \beta_k p_k \right) = a_1^T 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \beta_k a_1^T p_k = 0$$

Devido ao fato que

$$a_1^T p_k = a_1^T H_k^T z_k = (H_k a_1)^T z_k,$$

e pelo item (ii) dessa proposição, concluímos que $a_1^T p_k = 0, \forall k > 1$. Como $a_1^T p_1 \neq 0$, (isso ocorre pela hipótese do algoritmo), vemos que:

$$\sum_{k=1}^n \beta_k a_1^T p_k = 0 \Leftrightarrow \beta_1 a_1^T p_1 = 0 \Leftrightarrow \beta_1 = 0.$$

Aumentando sucessivamente o índice do vetor a_i^T em uma unidade e, com o argumento similar ao realizado anteriormente, podemos mostrar que $\beta_k = 0$, para $k = 2, \dots, n$. Concluindo assim a demonstração do item (iii) e da proposição.

□

Note que o item (i) garante que as matrizes H_i são idempotentes, ou seja, $H_i^2 = H_i$ e, portanto, matrizes de projeção (veja [9] pg. 386). O item (ii) mostra que as correções de posto 1 feitas sobre a matriz H_k , durante cada iteração do Algoritmo 3.1 vão diminuindo o posto da matriz H_k , porque a cada iteração um novo vetor a_j é acrescentado ao $Nuc(H_k)$.

Com a proposição anterior é possível mostrar que a classe de métodos ABS tem terminação finita ([1] Teorema 3), onde esse teorema também é enunciado no artigo sem demonstração.

Proposição 3.3. *Suponhamos que o sistema linear seja dado por (3.1). Então, para qualquer escolha de vetores y_1 , z_k e w_k , satisfazendo as condições do Algoritmo 3.1, na iteração k o vetor y_{k+1} resolve as k primeiras linhas do sistema (3.1), ou seja,*

$$A_k y_{k+1} = c_k,$$

onde,

$$A_k = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_k^T \end{bmatrix} \quad e \quad c_k = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}.$$

Em particular, na iteração n o vetor obtido pelo algoritmo, y_{n+1} , é uma solução de (3.1).

Demonstração: Primeiramente, mostraremos que y_2 satisfaz a primeira equação do sistema linear $Ax = b$. Isso pode ser feito mostrando a igualdade

$$a_1^T y_2 = b_1. \tag{3.7}$$

Usando a expressão dada pelo Algoritmo 3.1 para y_2 em (3.7), obtemos

$$\begin{aligned} a_1^T y_2 &= a_1^T \left(y_1 - \frac{r_1 p_1}{a_1^T p_1} \right) \\ &= a_1^T y_1 - \frac{r_1 a_1^T p_1}{a_1^T p_1} \\ &= a_1^T y_1 - r_1 \\ &= a_1^T y_1 - (a_1^T y_1 - b_1) \\ &= b_1, \end{aligned}$$

concluindo o desejado.

Suponhamos, por hipótese de indução, que a propriedade seja satisfeita até o índice k . Para o índice $k + 1$ devem ser satisfeitas as seguintes igualdades

$$a_j^T y_{k+1} = b_j, \quad \forall j \leq k.$$

Para $j = k$ e usando a expressão para y_{k+1} dada pelo Algoritmo 3.1, mostramos que

$$\begin{aligned} a_k^T y_{k+1} &= a_k^T \left(y_k - \frac{r_k p_k}{a_k^T p_k} \right) \\ &= a_k^T y_k - \frac{r_k a_k^T p_k}{a_k^T p_k} \\ &= a_k^T y_k - r_k \\ &= a_k^T y_k - (a_k^T y_k - b_k) \\ &= b_k. \end{aligned}$$

Agora, $\forall j < k$ temos

$$a_j^T y_{k+1} = a_j^T \left(y_k - \frac{r_k p_k}{a_k^T p_k} \right) = a_j^T y_k - \frac{r_k a_j^T p_k}{a_k^T p_k}. \quad (3.8)$$

Pela hipótese de indução, temos que $a_j^T y_k = b_j, \forall j < k$. Usando a Proposição 3.2 item (ii), obtemos

$$a_j^T p_k = a_j^T H_k^T z_k = (H_k a_j)^T z_k = 0, \quad \forall j < k.$$

Com as observações anteriores, (3.8) fica da forma

$$a_j^T y_{k+1} = b_j, \quad \forall j < k,$$

concluindo assim a demonstração. □

Conforme são escolhidos os vetores z_k e w_k , obtemos diferentes métodos ABS. Uma das escolhas que geram propriedades interessantes é a escolha dada por

$$z_k = a_k = w_k,$$

e essa escolha define, o entitulado, método ABS simétrico. A justificativa para esse nome segue na próxima proposição.

Proposição 3.4. *Se no Algoritmo 3.1 os vetores z_k e w_k são escolhidos de maneira que definam o método simétrico, então temos que as matrizes H_k são simétricas.*

Demonstração: Para $k = 1$, a propriedade é satisfeita já que $H_1 = I$. Suponhamos, por hipótese de indução, que a propriedade seja válida até o índice de ordem k . Para $k + 1$, temos que

$$H_{k+1}^T = (H_k - H_k a_k a_k^T H_k)^T = H_k^T - H_k^T a_k a_k^T H_k^T = H_k - H_k a_k a_k^T H_k = H_{k+1}, \quad (3.9)$$

onde (3.9) decorre da hipótese de indução. \square

Sabemos, da Proposição 3.2 item (iii), que os vetores p_k formam um conjunto linearmente independente, para todos os métodos da classe ABS, porém quando o método simétrico é aplicado, os vetores p_k satisfazem uma propriedade mais forte. Essa propriedade foi enunciada em [1], Teorema 2.

Proposição 3.5. *Se o método simétrico é utilizado, então os vetores p_k são ortogonais.*

Demonstração: A demonstração desse resultado é bem simples e decorre dos itens (i) e (ii) da Proposição 3.2 e da Proposição 3.4, pois supondo $k > j$ obtemos

$$p_k^T p_j = (H_k^T a_k)^T H_j^T a_j = a_k^T H_k H_j^T a_j = a_k^T H_k H_j a_j = a_k^T H_k a_j = 0.$$

Para os casos em que $k = j$ e $k < j$, podemos fazer uma demonstração de maneira similar, apenas recordando que, se $k < j$, temos $H_k H_j = H_j = H_j^T$. \square

Uma consequência desse resultado é que quando o método simétrico é empregado, conseguimos fazer uma fatoração do tipo RQ na matriz dos coeficientes do sistema linear, no caso da matriz dos coeficientes do sistema ser quadrada e não-singular. Isso ocorre porque o produto

$$AP = U,$$

onde P é a matriz tendo como vetores colunas os vetores p_k , origina uma matriz U que é triangular superior.

Para verificar isso, basta notar que a matriz tem elementos da diagonal não-nulos, visto que os elementos da diagonal principal da matriz produto são obtidos pelos termos, $a_i^T p_i$, e sabemos que esse produto é diferente de zero, por hipótese do Algoritmo 3.1. Vemos também que os elementos abaixo da diagonal principal da matriz U são nulos, para isso, devemos notar que os elementos nessas posições são obtidos pelos produtos $a_i^T p_j$, com $i < j$. E pela Proposição 3.2 item (ii), multiplicações desse tipo tem resultado nulo. Concluímos a observação desejada, usando a Proposição 3.5, os vetores p_k são ortogonais e assim, a matriz P é ortogonal com inversa $P^{-1} = P^T$, obtendo a fatoração RQ da matriz A como

$$A = UP^T.$$

Com o mesmo raciocínio, podemos obter uma fatoração QR para a matriz A^T , a diferença é que devemos fazer o produto $PA^T = L$ e a matriz L obtida será triangular inferior.

3.2 Classe de Métodos ABS em Blocos

Essa classe de métodos, como os métodos ABS descritos pelo Algoritmo 3.1, são métodos do tipo diretos que geram uma sequência de vetores baseadas nas atualizações do tipo Newton e em atualizações das matrizes K_k que acrescentam vetores ao seu núcleo. Como vimos na seção anterior, os métodos ABS encontram na i -ésima iteração um vetor capaz de resolver as $i - 1$ primeiras equações do sistema (3.1). Entretanto, no caso de problemas de grande porte, essa estratégia de resolver uma equação por vez, pode acabar tornando a resolução do sistema inviável.

Os métodos em blocos têm uma característica mais flexível, no sentido que podemos escolher a quantidade de linhas que desejamos resolver a cada passo do algoritmo, podendo variar desde 1 até n de uma só vez, essa escolha depende do parâmetro t que será definido a seguir. A característica da flexibilidade do método é obtida pela partição de matrizes em blocos e pelo uso da propriedade de conjugação da matriz A , retirada de [3], (Definição 2).

Definição 3.6. Sejam $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Assumimos que as matrizes U, V

são particionadas da forma $U = [U_0, U_1, \dots, U_r]$ e $V = [V_0, V_1, \dots, V_r]$, onde

$$U_k \in \mathbb{R}^{m \times s_k}, V_k \in \mathbb{R}^{n \times s_k}, (k = 0, 1, \dots, r).$$

O par (U, V) é dito ser A conjugado em blocos, com respeito a partição $\{s_0, s_1, \dots, s_r\}$, se

$$V_k^T A U_j = 0, \text{ sempre que } 0 \leq k < j \leq r.$$

Enfatizamos que, da forma como o Algoritmo 3.7 será definido, teremos a classe de métodos ABS como métodos particulares que podem ser obtidos pela classe de métodos ABS em Blocos. Para que isso ocorra basta escolhermos no Algoritmo 3.7 a matriz $V = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e particionar as matrizes de ordem $m \times n$ em n vetores coluna, fazendo assim com que as matrizes V_k, Z_k e W_k definidas no Algoritmo 3.7 sejam vetores coluna.

Algoritmo 3.7. Escolha um número de partições arbitrário, denotado por $t = r + 1$, para as colunas de uma matriz $m \times n$ de tal forma que podemos representar suas colunas pela composição de $r + 1$ matrizes da forma,

$$B = [B_0, B_1, \dots, B_r] \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

e as matrizes B_i com $i = 0, \dots, r$ possuem cada uma delas dimensão $m \times s_i$ com $\sum_{i=0}^r s_i = n$.

Passo 0 - Escolha uma aproximação inicial, para uma solução do sistema, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $K_0 = I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $V = [V_0, V_1, \dots, V_r] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não-singular.

Para $k = 0, \dots, r$ realize os passos:

Passo 1 - Defina a matriz P_k , dada pela expressão,

$$P_k = K_k^T Z_k,$$

onde $Z_k \in \mathbb{R}^{m \times s_k}$ é arbitrária e tal que $V_k^T A P_k$ seja não-singular.

Passo 2 - Atualize o vetor y_k da seguinte forma

$$y_{k+1} = y_k - P_k q_k,$$

onde o vetor $q_k = [V_k^T A P_k]^{-1} V_k^T r_k \in \mathbb{R}^{s_k \times 1}$ e $r_k = A y_k - b \in \mathbb{R}^n$.

Passo 3 - Se $k = r$, **pare**, y_{r+1} obtido no Passo 2 é uma solução para o sistema linear. Caso contrário vá ao Passo 4.

Passo 4 - Escolha uma matriz $W_k \in \mathbb{R}^{m \times s_k}$ satisfazendo a condição $[W_k^T K_k A^T V_k] = I$, sendo I a matriz identidade de ordem $s_k \times s_k$. E atualize a matriz K_k por

$$K_{k+1} = K_k - K_k A^T V_k W_k^T K_k \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

Passo 5 - Faça $k = k + 1$ e volte ao Passo 1.

A matriz $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, que aparece no Algoritmo 3.7, surge do fato de substituir o sistema de equações lineares que desejamos resolver, $Ax = b$, pelo sistema

$$V^T Ax = V^T b,$$

segue como uma simples observação que os dois sistemas anteriores possuem as mesmas soluções.

Na sequência, segue uma propriedade que essa classe de métodos possui, envolvendo as matrizes atualizadas K_i , muito semelhante a satisfeita pelos métodos da seção anterior, onde a cada iteração do algoritmo as correções feitas para a matriz K_i aumentam a dimensão do núcleo dessas matrizes, porém agora a quantidade desse aumento depende da maneira como se escolhe a partição t das colunas das matrizes envolvidas. A proposição seguinte aparece enunciada em, [3] Teorema 1.

Proposição 3.8. *Pelo Algoritmo 3.7 vemos que*

(i) $K_j A^T V_k = 0$, sempre que $k < j$.

(ii) $K_i K_j = K_j K_i = K_j$ se $i \leq j$.

Demonstração: A demonstração do item (i) será feita por indução sobre o índice j . Para $j = 1$, temos que o único k satisfazendo a hipótese da proposição é $k = 0$. Sendo assim,

$$K_1 A^T V_0 = [K_0 - K_0 A^T V_0 W_0^T K_0] A^T V_0 = K_0 A^T V_0 - K_0 A^T V_0 W_0^T K_0 A^T V_0, \quad (3.10)$$

lembrando que, pelo Algoritmo 3.7, temos

$$W_k^T K_k A^T V_k = I, \forall k, \quad (3.11)$$

vemos que (3.10) fica da forma

$$K_1 A^T V_0 = K_0 A^T V_0 - K_0 A^T V_0 = 0.$$

Suponhamos, por hipótese de indução, que a propriedade inicial é satisfeita $\forall j \leq r-1$. Temos, para $j = r$, que

$$\begin{aligned} K_r A^T V_{r-1} &= [K_{r-1} - K_{r-1} A^T V_{r-1} W_{r-1}^T K_{r-1}] A^T V_{r-1} \\ &= K_{r-1} A^T V_{r-1} - K_{r-1} A^T V_{r-1} W_{r-1}^T K_{r-1} A^T V_{r-1}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Novamente, usando (3.11) e substituindo em (3.12), temos

$$K_r A^T V_{r-1} = K_{r-1} A^T V_{r-1} - K_{r-1} A^T V_{r-1} = 0.$$

Agora, para todo $k < r-1$ concluímos, mediante o uso da hipótese de indução, (a saber $K_{r-1} A^T V_k = 0, \forall k < r-1$) que

$$\begin{aligned} K_r A^T V_k &= [K_{r-1} - K_{r-1} A^T V_{r-1} W_{r-1}^T K_{r-1}] A^T V_k \\ &= K_{r-1} A^T V_k - K_{r-1} A^T V_{r-1} W_{r-1}^T K_{r-1} A^T V_k \\ &= 0. \end{aligned}$$

Terminando assim a demonstração do item (i).

Para mostrar o item (ii), consideramos inicialmente o caso em que $j = 0$. Nesse caso, o único i satisfazendo a condição $i \leq j$ é $i = 0$. Assim sendo, como $K_0 = I$, temos

$$K_0 K_0 = I^2 = I = K_0 = K_0 K_0.$$

Suponhamos, por hipótese de indução, que a propriedade é válida para todos os índices até k . Obtemos, para $k+1$

$$\begin{aligned} K_{k+1} K_j &= (K_k - K_k A^T V_k W_k^T K_k) K_j \\ &= K_k K_j - K_k A^T V_k W_k^T K_k K_j \\ &= K_k - K_k A^T V_k W_k^T K_k \\ &= K_{k+1}, \forall j \leq k, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde (3.13) segue da hipótese de indução.

Agora, para $j = k + 1$, temos

$$\begin{aligned}
K_{k+1}K_{k+1} &= (K_k - K_k A^T V_k W_k^T K_k)(K_k - K_k A^T V_k W_k^T K_k) \\
&= K_k K_k - K_k K_k A^T V_k W_k^T K_k - K_k A^T V_k W_k^T K_k K_k \\
&\quad + K_k A^T V_k W_k^T K_k K_k A^T V_k W_k^T K_k \\
&= K_k - 2K_k A^T V_k W_k^T K_k + K_k A^T V_k (W_k^T K_k A^T V_k) W_k^T K_k. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Usando (3.11) em (3.14), concluímos que

$$\begin{aligned}
K_{k+1}K_{k+1} &= K_k - 2K_k A^T V_k W_k^T K_k + K_k A^T V_k W_k^T K_k \\
&= K_k - K_k A^T V_k W_k^T K_k \\
&= K_{k+1}.
\end{aligned}$$

De maneira análoga, podemos mostrar que $K_j K_{k+1} = K_{k+1}$, $j \leq k$. Terminando assim a demonstração do item (ii). \square

Uma observação, referente a Proposição 3.8 item (i), mostra que as matrizes V e P satisfazem a Definição 3.6, isto é, são A conjugadas em blocos.

Como a Classe de Métodos ABS em Blocos é uma classe de métodos mais abrangente do que a classe apresentada na Seção 3.1, é natural pensar que a propriedade anterior de terminação finita desse métodos seja preservada, porém para essa classe, a terminação do método depende da maneira como são particionadas as matrizes durante o processo.

Proposição 3.9. *Na iteração k do Algoritmo 3.7, o vetor y_{k+1} resolve os $k + 1$ primeiros blocos de equações do sistema linear $V^T A x = V^T b$, ou seja, satisfaz*

$$\begin{aligned}
V_0^T A y_{k+1} &= V_0^T b \\
V_1^T A y_{k+1} &= V_1^T b \\
&\vdots \\
V_k^T A y_{k+1} &= V_k^T b
\end{aligned}$$

Em particular, se as matrizes do Algoritmo 3.7 forem particionadas em $r + 1$ blocos de matrizes, então o vetor y_{r+1} é uma solução para o sistema de equações lineares $V^T A x = V^T b$ e também é uma solução para o sistema linear $A x = b$.

Demonstração: Inicialmente, mostramos que y_1 é uma solução do primeiro conjunto de equações lineares

$$V_0^T Ax = V_0^T b. \quad (3.15)$$

Para isso, usamos a expressão dada pelo Algoritmo 3.7 para y_1 da forma

$$y_1 = y_0 - P_0 q_0, \quad (3.16)$$

onde $q_0 = [V_0^T AP_0]^{-1} V_0^T r_0$, e lembrando que $r_0 = Ay_0 - b$.

Usando (3.16) temos

$$\begin{aligned} V_0^T Ay_1 &= V_0^T A(y_0 - P_0 q_0) \\ &= V_0^T Ay_0 - V_0^T AP_0 [V_0^T AP_0]^{-1} V_0^T r_0 \\ &= V_0^T Ay_0 - V_0^T r_0 \\ &= V_0^T Ay_0 - V_0^T (Ay_0 - b) \\ &= V_0^T b. \end{aligned}$$

Mostrando assim que y_1 satisfaz (3.15).

Suponhamos, por hipótese de indução, que essa propriedade seja válida até o índice k . Para o índice $k + 1$, obtemos

$$\begin{aligned} V_k^T Ay_{k+1} &= V_k^T A(y_k - P_k q_k) \\ &= V_k^T Ay_k - V_k^T AP_k [V_k^T AP_k]^{-1} V_k^T r_k \\ &= V_k^T Ay_k - V_k^T r_k \\ &= V_k^T Ay_k - V_k^T (Ay_k - b) \\ &= V_k^T b. \end{aligned}$$

Agora, $\forall j < k$ temos da hipótese de indução que $V_j^T Ay_k = V_j^T b$. Combinando a observação anterior com o item (i) da Proposição 3.8, obtemos

$$\begin{aligned} V_j^T Ay_{k+1} &= V_j^T A(y_k - P_k q_k) \\ &= V_j^T Ay_k - V_j^T A(K_k^T Z_k) q_k \\ &= V_j^T Ay_k - (K_k A^T V_j)^T Z_k q_k \\ &= V_j^T b. \end{aligned}$$

Das igualdades anteriores, concluímos que y_{k+1} satisfaz

$$\begin{aligned} V_0^T A y_{k+1} &= V_0^T b \\ V_1^T A y_{k+1} &= V_1^T b \\ &\vdots \\ V_k^T A y_{k+1} &= V_k^T b \end{aligned},$$

terminando assim o processo de indução e conseqüentemente a demonstração. \square

A proposição a seguir foi retirada de [3] Teorema 1, e garante que o conjunto de vetores

$$\{A^T V_k, A^T V_{k+1}, \dots, A^T V_r\},$$

é linearmente independente.

Um fato interessante dessa demonstração é que para mostrar essa propriedade os autores garantem que a matriz

$$K_k(A^T V_k | A^T V_{k+1} | \dots | A^T V_r),$$

é uma transformação linear injetiva (pensando na transformação associada a matriz).

Proposição 3.10. *Assuma que K_j ($j \leq k$, $k \geq 0$) já foram calculadas e suponhamos que a matriz dos coeficientes do sistema tenha posto linha completo. Então*

$$\text{posto}(K_k A^T V_k | K_k A^T V_{k+1} | \dots | K_k A^T V_r) = n - \{s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_{k-1}\}. \quad (3.17)$$

Demonstração: Para demonstrar esse resultado, usamos o fato de que se uma matriz tem posto coluna completo então, a única solução para o sistema homogêneo $Gx = 0$ é o vetor $x = 0$.

A demonstração será feita usando o argumento indutivo. Para $k = 0$, temos que $K_0 = I$ e a matriz (3.17) fica da forma

$$(A^T V_0 | A^T V_1 | \dots | A^T V_r) = A^T V,$$

e como, por hipótese, A é posto linha completo e V é não-singular, temos que o posto do produto é dado pelo posto da matriz A que é n . Suponhamos, por indução, que a propriedade

seja válida para todos os índices até, e incluindo, k . Para $k + 1$, temos

$$(K_{k+1}A^TV_{k+1}|K_{k+1}A^TV_{k+2}|\dots|K_{k+1}A^TV_r)y = 0, \quad (3.18)$$

onde $y \in \mathbb{R}^{n-\{s_0+\dots+s_k\}}$ e cada $y_i \in \mathbb{R}^{s_i}$ é dado por

$$y = \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}.$$

Podemos escrever (3.18) na forma

$$\begin{aligned} \sum_{j=k+1}^r K_{k+1}A^TV_jy_j = 0 &\Leftrightarrow \sum_{j=k+1}^r (K_k - K_kA^TV_kW_k^TK_k)A^TV_jy_j = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=k+1}^r K_kA^TV_jy_j - \sigma = 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde $\sigma = K_kA^TV_k \left(\sum_{j=k+1}^r W_k^TK_kA^TV_jy_j \right)$.

Note que (3.19) pode ser escrito como

$$(K_kA^TV_k|K_kA^TV_{k+1}|\dots|K_kA^TV_r)s = 0, \quad (3.20)$$

onde o vetor s é dado por

$$s = \begin{bmatrix} -\sum_{j=k+1}^r W_k^TK_kA^TV_jy_j \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}.$$

Aplicando a hipótese de indução, temos que o sistema (3.20) tem solução única, dada por $s = 0$, concluindo assim que $y_j = 0$, $\forall j \geq k + 1$ e garantindo o fato desejado. \square

A hipótese sobre a proposição de que a matriz dos coeficientes do sistema tem posto linha completo foi incluída somente para simplificar a demonstração do resultado, mas o resultado continua válido mesmo que a matriz não tenha posto linha completo.

Observação 3.11. No caso em que a matriz dos coeficientes do sistema é quadrada de ordem n e não-singular, temos que as matrizes $A^T V_j$ são matrizes com posto coluna completo. Pela Proposição 3.8, sabemos que $A^T V_j$, $j < k$ são matrizes que pertencem ao $Nuc(K_k)$. Pela Proposição 3.10, vimos que as matrizes $K_k A^T V_j$, $j \geq k$ pertencem a $Im(K_k)$ e formam um conjunto linearmente independente. Sendo assim, como o conjunto $\{A^T V_j\}$, $0 \leq j \leq r$ é uma base para o \mathbb{R}^n garantimos que o conjunto $K_k A^T V_j$, $j \geq k$ gera a $Im(K_k)$ e o conjunto $A^T V_j$, $j < k$ gera o $Nuc(K_k)$.

Para uso posterior, faremos uma pequena mudança no Algoritmo 3.7 apresentado inicialmente. Suponhamos que a matriz do sistema (3.1) seja quadrada. Pela característica do Algoritmo 3.7 para sistemas lineares, o objetivo é encontrar uma solução para o seguinte sistema linear

$$V^T A x = V^T b, \text{ onde } V \text{ é não-singular.}$$

No k -ésimo passo do Algoritmo 3.7, procuramos um vetor x_k que satisfaça os k primeiros conjuntos de linhas do sistema $V^T A x = V^T b$, ou seja, satisfaçam as equações

$$\begin{aligned} V_0^T A x &= V_0^T b \\ V_1^T A x &= V_1^T b \\ &\vdots \\ V_{k-1}^T A x &= V_{k-1}^T b \end{aligned}$$

Pelo Algoritmo 3.7 o vetor x_{k-1} satisfaz os $k-1$ primeiros conjuntos de linhas do sistema $V^T A x = V^T b$ e a matriz K_{k-1} é construída pelo algoritmo de tal forma que satisfaça a seguinte propriedade

$$K_{k-1} A^T V_j = 0, \text{ sempre que } j < k-1.$$

Escrevendo x_k da forma

$$x_k = x_{k-1} - P_{k-1} q_{k-1},$$

fazemos com que o vetor x_k satisfaça automaticamente, pelas propriedades expostas, os $k-1$ primeiros conjuntos de linhas do sistema $V^T A x = V^T b$, esse fato segue pelo uso de

$V_j^T AK_{k-1}^T = (K_{k-1} A^T V_j)^T$ e a Proposição 3.8 item (i), pois

$$\begin{aligned} V_j^T Ax_k &= V_j^T Ax_{k-1} - V_j^T AP_{k-1}q_{k-1} \\ &= V_j^T Ax_{k-1} - V_j^T AK_{k-1}^T Z_{k-1}q_{k-1} \\ &= V_j^T b - 0 = V_j^T b, \text{ sempre que } j < k - 1. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Assim, para que x_k cumpra a propriedade desejada, podemos escolher a matriz Z_{k-1} de forma que exista q_{k-1} satisfazendo a igualdade

$$V_{k-1}^T AP_{k-1}q_{k-1} = V_{k-1}^T r_{k-1}, \text{ onde } r_{k-1} = Ax_{k-1} - b. \quad (3.22)$$

Observação 3.12. Note que no Algoritmo 3.7 o vetor q_{k-1} é da forma

$$q_{k-1} = [V_{k-1}^T AP_{k-1}]^{-1} V_{k-1}^T r_{k-1},$$

e satisfaz (3.22).

Finalmente, temos que, se q_{k-1} satisfaz a igualdade

$$V_{k-1}^T AP_{k-1}q_{k-1} = V_{k-1}^T r_{k-1},$$

então x_k também satisfará o k -ésimo conjunto de equações $V_{k-1}^T Ax = V_{k-1}^T b$ pois

$$\begin{aligned} V_{k-1}^T Ax_k &= V_{k-1}^T Ax_{k-1} - V_{k-1}^T AP_{k-1}q_{k-1} \\ &= V_{k-1}^T Ax_{k-1} - V_{k-1}^T AK_{k-1}^T Z_{k-1}q_{k-1} \\ &= V_{k-1}^T Ax_{k-1} - V_{k-1}^T r_{k-1} \\ &= V_{k-1}^T Ax_{k-1} - V_{k-1}^T (Ax_{k-1} - b) \\ &= V_{k-1}^T Ax_{k-1} - V_{k-1}^T Ax_{k-1} + V_{k-1}^T b \\ &= V_{k-1}^T b. \end{aligned}$$

Motivados pelo Teorema 5.6 do Capítulo 5 e pelas observações anteriores, modificaremos a escolha da matriz Z_k e do vetor q_k no Algoritmo 3.7 de forma que Z_k e q_k sejam escolhidas satisfazendo a expressão

$$V_k^T AP_k q_k = V_k^T r_k.$$

Métodos ABS Não-Lineares

Durante todo o decorrer deste capítulo, vamos supor que o sistema não-linear que desejamos resolver está escrito da forma

$$f(x) = 0, \tag{4.1}$$

onde $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Uma observação, envolvendo as duas classes de métodos ABS apresentadas nas seções posteriores, é que quando esses métodos são aplicados a sistemas lineares satisfazem as mesmas propriedades dos métodos do Capítulo 3.

4.1 Classe de Métodos ABS

O conteúdo presente nessa seção está baseado na abordagem apresentado em [2]. Os métodos ABS não-lineares geram uma sequência de vetores, onde o k -ésimo vetor da sequência é encontrado fazendo uma iteração do Algoritmo 3.1, com o i -ésimo resíduo do sistema r_i dado pela i -ésima linha do sistema (4.1) e a matriz usada nas iterações é a matriz Jacobiana associada a função (4.1).

Pelas suposições feitas inicialmente sobre o sistema de equações não-lineares, denotaremos a matriz Jacobiana associada a (4.1) por $A(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Cada uma das linhas da matriz Jacobiana num ponto x será denotada por $a_j(x)^T$ e é com essa notação que a seção será desenvolvida.

Algoritmo 4.1. Este algoritmo gera a classe de métodos ABS para sistemas não-lineares e ele é apresentado pelos seguintes passos.

Passo 0 - Escolha um vetor inicial $x_1 \in \mathbb{R}^m$ e considere $H_1 = I \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Para $i = 1, 2, \dots$ realize os passos a seguir:

Passo 1 - Tome $y_1 = x_i$.

Para $k = 1, \dots, m$ faça:

Passo 2 - Escolha um vetor z_k não-nulo satisfazendo $a_k(y_k)^T H_k^T z_k = 1$ e defina

$$p_k = H_k^T z_k$$

Passo 3 - Atualize o vetor y_k da forma

$$y_{k+1} = y_k - f_k(y_k)p_k,$$

onde $f_k(y_k)$ é a coordenada k do vetor $f(y_k)$.

Passo 4 - Se $k = m$, faça $x_{i+1} = y_{m+1}$ e retorne ao Passo 1. Caso contrário, vá ao Passo 5.

Passo 5 - Escolha um vetor w_k tal que, $w_k^T H_k a_k(y_k) = 1$, e atualize a matriz H_k pela expressão

$$H_{k+1} = H_k - H_k a_k(y_k) w_k^T H_k.$$

Passo 6 - Acrescente uma unidade ao índice k e retorne ao Passo 2.

Visando mostrar que o algoritmo acima faz algum sentido, apresentaremos um algoritmo de convergência local obtido do artigo [2], que garante a convergência do método para uma solução do sistema, sob certas condições envolvendo a função (4.1), o ponto inicial x_1 e os vetores z_i e w_i do Algoritmo 4.1.

Primeiramente, seguem algumas hipóteses sobre a função f . Suponhamos que x^* é uma solução para (4.1).

(i) Existem constantes $K_0 \geq 0$ e $r_0 > 0$ tais que $f \in C^1(B(x^*, r_0))$ e

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \leq K_0 \|x - y\|_2, \quad \forall x, y \in B(x^*, r_0). \quad (4.2)$$

(ii) Existem constantes $K_1 \geq 0$ e $0 < \mu \leq 1$ tais que

$$\|A(x) - A(y)\|_F \leq K_1 \|x - y\|_2^\mu, \quad \forall x, y \in B(x^*, r_0). \quad (4.3)$$

(iii) A Jacobiana $A(x^*) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é não-singular.

O lema a seguir será utilizado durante a demonstração do teorema de convergência local. No artigo [2], esse resultado foi enunciado, no entanto, a demonstração omitida. Esse lema é muito interessante do ponto de vista teórico, pois ele garante que se em um ponto x^* a matriz Jacobiana de uma função, $A(x^*)$, for não-singular então, existe uma vizinhança do ponto x^* onde tomados m pontos pertencentes a essa vizinhança, aplicados aleatoriamente a cada um dos gradientes das funções f_i , o conjunto $\{f_i\}$ é linearmente independente.

Lema 4.2. Denotando a matriz C por $C = [a_1(y_1), \dots, a_m(y_m)]$ e assumindo que as condições (i), (ii) e (iii) são satisfeitas, temos que existe $r_4 > 0$ tal que posto(C) = m , se $y_j \in B(x^*, r_4)$ para $j = 1, \dots, m$.

Demonstração: Por (iii) temos que $A(x^*)^{-1}$ existe e

$$\|(A(x^*)^T)^{-1}\|_F \leq \alpha,$$

para algum $\alpha > 0$.

Considere $r_4 = \min\{r_0, [2\sqrt{m}K_0\alpha]^{-\mu}\}$. Vamos encontrar um limitante superior para a matriz $(A(x^*)^T - C)$.

$$\begin{aligned} \|A(x^*)^T - C\|_F^2 &= \|(A(x^*) - C^T)^T\|_F^2 \\ &= \sum_{i=1}^m \|a_i^T(x^*) - a_i^T(y_i)\|_2^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^m \max\{\|a_i^T(x^*) - a_i^T(y_i)\|_2, i = 1, \dots, m\}^2 \\ &\leq (m) \max\|a_l^T(x^*) - a_l^T(y_l)\|_2^2, \text{ para algum } 1 \leq l \leq m \\ &\leq (m) \|A(x^*) - A(y_l)\|_F^2 \leq m(K_0^2) \|x^* - y_l\|_2^{2\mu}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Extraindo a raiz quadrada em (4.4), obtemos

$$\|A(x^*)^T - C\|_F \leq \sqrt{m}K_0 \|x^* - y_l\|_2^\mu. \quad (4.5)$$

Agora, como $y_i \in B(x^*, r_4)$, segue que

$$\|x^* - y_i\|_2^\mu \leq ([2\sqrt{m}K_0\alpha]^{-\mu})^\mu = [2\sqrt{m}K_0\alpha]^{-1}. \quad (4.6)$$

Substituindo (4.6) em (4.5)

$$\|A(x^*)^T - C\|_F \leq \sqrt{m}K_0[2\sqrt{m}K_0\alpha]^{-1} = [2\alpha]^{-1}.$$

Fazendo

$$\beta = [2\alpha]^{-1},$$

concluimos que

$$\|A(x^*)^T\|_F \leq \alpha,$$

$$\|A(x^*)^T - C\|_F \leq \beta \text{ e}$$

$$\alpha\beta = \alpha[2\alpha]^{-1} = 1/2 < 1$$

e podemos aplicar o Lema 2.11. Pelo Lema 2.11 temos que a matriz C é não-singular, mostrando o desejado. \square

O próximo lema fornece um limitante superior para certas matrizes presentes na demonstração do teorema de convergência local e foi obtido por meio do Lema 5.1 [14].

Lema 4.3. *Suponhamos que as matrizes C_k , $A_k(x^*)$ e $A(x^*)^T$ sejam descritas como*

$$C_k = [(a_1(y_1), \dots, a_k(y_k))],$$

$$A_k(x^*) = [a_1(x^*), \dots, a_k(x^*)],$$

$$A(x^*)^T = [a_1(x^*), \dots, a_m(x^*)].$$

Então sob as mesmas condições do Lema 4.2 temos que

$$\|C_k^+\|_F \leq \delta \|A_k(x^*)^+\|_F, \quad (4.7)$$

ocorre $\forall k = 1, \dots, m$, se $y_j \in B(x^, r_4)$ para $j = 1, \dots, m$, onde r_4 vem do Lema 4.2 e $\delta > 0$.*

Demonstração: Devemos mostrar que a relação (4.7) é satisfeita. Usando o fato que

$$\|A_k(x^*)^+\|_F \leq \| [A(x^*)^T]^+ \|_F = \| [A(x^*)^T]^{-1} \|_F = \| A(x^*)^{-1} \|_F, \quad (4.8)$$

pois as colunas da matriz $A_k(x^*)$ correspondem as k primeiras colunas da matriz $A(x^*)^T$. Como a norma de Frobenius faz a soma do quadrado de todas as entradas de uma matriz, a soma feita para a matriz $A(x^*)^T$ sempre será maior ou igual a soma do quadrado das entradas da matriz $A_k(x^*)$. Também usamos o fato da matriz $A(x^*)^T$ ser não-singular e, portanto, sua pseudoinversa coincide com sua inversa.

De maneira análoga, mostramos que

$$\| [A_k(x^*) - C_k] \|_F \leq \| [A(x^*)^T - C] \|_F. \quad (4.9)$$

Usando (4.8), (4.9) e o Lema 4.2, para $y_i \in B(x^*, r_4)$, vemos que

$$\begin{aligned} \| [A_k(x^*)]^+ [A_k(x^*) - C_k] \|_F &\leq \| [A_k(x^*)]^+ \|_F \| [A_k(x^*) - C_k] \|_F \\ &\leq \| A(x^*)^{-1} \|_F \| [A(x^*)^T - C] \|_F \\ &< 1, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$\forall k = 1, \dots, m$.

Agora, como as matrizes $A_k(x^*)^T$ são matrizes de posto coluna completo, temos que

$$[A_k(x^*)]^+ A_k(x^*) = I.$$

Esse fato pode ser facilmente comprovado fazendo o uso da fatoração URV da matriz $A_k(x^*)$ e de sua pseudoinversa. Pois, se uma fatoração URV para a matriz $A_k(x^*)$ é dada por

$$A_k(x^*) = U \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} V^T,$$

onde $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{k \times k}$ são matrizes ortogonais, tais que, as k primeiras colunas de U geram a $Im(A_k(x^*))$, as k colunas da matriz V geram a $Im(A_k(x^*)^T)$ e a matriz $K \in \mathbb{R}^{k \times k}$ é não-singular. Sabemos que, a pseudoinversa de $A_k(x^*)$ é

$$[A_k(x^*)]^+ = V \begin{pmatrix} K^{-1} & 0 \end{pmatrix} U^T.$$

Assim,

$$[A_k(x^*)]^+ A_k(x^*) = V \begin{pmatrix} K^{-1} & 0 \\ & 0 \end{pmatrix} U^T U \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} V^T = V I_k V^T = I_k.$$

Utilizando o fato que $BB^+ = P_{Im(B)}$, onde $P_{Im(B)}$ é a projeção na $Im(B)$ ortogonal ao $Nuc(B^T)$, para qualquer matriz B , temos

$$\begin{aligned} C_k C_k^+ &= P_{Im(C_k)} \\ \Leftrightarrow \{A_k(x^*) - [A_k(x^*) - C_k]\}(C_k)^+ &= P_{Im(C_k)} \\ \Leftrightarrow [A_k(x^*)]^+ \{A_k(x^*) - [A_k(x^*) - C_k]\}(C_k)^+ &= [A_k(x^*)]^+ P_{Im(C_k)} \\ \Leftrightarrow \{[A_k(x^*)]^+ A_k(x^*) - [A_k(x^*)]^+ [A_k(x^*) - C_k]\}(C_k)^+ &= [A_k(x^*)]^+ P_{Im(C_k)} \\ \Leftrightarrow (I_k - [A_k(x^*)]^+ [A_k(x^*) - C_k])(C_k)^+ &= [A_k(x^*)]^+ P_{Im(C_k)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pelo Lema 2.9 e por (4.10) sabemos que a inversa da matriz

$$I_k - A_k(x^*)^+ [A_k(x^*) - C_k],$$

existe e, portanto, (4.11) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} (C_k)^+ &= (I_k - [A_k(x^*)]^+ [A_k(x^*) - C_k])^{-1} [A_k(x^*)]^+ P_{Im(C_k)} \\ \Leftrightarrow \|(C_k)^+\|_F &= \|(I_k - [A_k(x^*)]^+ [A_k(x^*) - C_k])^{-1} [A_k(x^*)]^+ P_{Im(C_k)}\|_F \\ \Leftrightarrow \|(C_k)^+\|_F &= \|(I_k - [A_k(x^*)]^+ [A_k(x^*) - C_k])^{-1}\|_F S, \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde $S = \|[A_k(x^*)]^+\|_F \|P_{Im(C_k)}\|_F$.

Pelo Corolário 2.10, temos

$$\|(I_k - [A_k(x^*)]^+ [A_k(x^*) - C_k])^{-1}\|_F \leq \frac{1}{1 - \|[A_k(x^*)]^+ [A_k(x^*) - C_k]\|_F}. \quad (4.13)$$

Substituindo (4.13) em (4.12), obtemos

$$\begin{aligned} \|(C_k)^+\|_F &\leq \frac{\|[A_k(x^*)]^+\|_F \|P_{Im(C_k)}\|_F}{1 - \|[A_k(x^*)]^+ [A_k(x^*) - C_k]\|_F} \\ \Leftrightarrow \|(C_k)^+\|_F &\leq \frac{\sqrt{m} \|[A_k(x^*)]^+\|_F}{1 - \|[A_k(x^*)]^+ [A_k(x^*) - C_k]\|_F} \\ \Leftrightarrow \|(C_k)^+\|_F &\leq \delta \|[A_k(x^*)]^+\|_F, \end{aligned}$$

onde $\|P_{Im(C_k)}\|_F \leq \sqrt{m}$ (Proposição 2.12) e

$$\delta = \frac{\sqrt{m}}{1 - \|[A_k(x^*)]^+ [A_k(x^*) - C_k]\|_F}.$$

Concluindo a demonstração desse lema. □

O próximo lema é resultado de uma pequena adaptação do Lema 20 [7], e servirá para uso durante o desenvolvimento do teorema de convergência local.

Lema 4.4. *Sob as mesmas condições do Lema 4.2 temos que existem $\delta > 0$ e r_2 tal que*

$$\|z - x^*\|_2 \leq \delta \|A^{-1}(x^*)\|_F \|f(z)\|_2, \forall z \in B(x^*, r_2). \quad (4.14)$$

Demonstração: A hipótese (i) sobre a função f garante a continuidade da Jacobiana $A(x)$, $\forall x \in B(x^*, r_0)$. Da continuidade de $A(x)$, podemos obter que, dado um $c > 1$ existe um $r_5 > 0$ tal que

$$\|A(y) - A(x^*)\|_F \leq \frac{1}{c \|A(x^*)^{-1}\|_F}, \forall y \in B(x^*, r_5). \quad (4.15)$$

Considere $r_2 = \min\{r_0, r_5, r_4\}$. Usando a continuidade da Jacobiana e o Lema 2.15, obtemos a relação

$$f(z) - f(x^*) = \int_0^1 A(x^* + t[z - x^*])(z - x^*) dt. \quad (4.16)$$

Tomando a norma euclidiana em (4.16) e lembrando que $f(x^*) = 0$ temos

$$\begin{aligned}
\|f(z)\|_2 &= \left\| \int_0^1 A(x^* + t[z - x^*])(z - x^*) dt \right\|_2 \\
&\geq - \left\| \int_0^1 A(x^* + t[z - x^*])(z - x^*) dt \right\|_2 \\
&\geq - \int_0^1 \|A(x^* + t[z - x^*])(z - x^*)\|_2 dt \\
&\geq - \int_0^1 \|A(x^* + t[z - x^*])\|_F \|z - x^*\|_2 dt \\
&\geq \int_0^1 \|A(x^*)\|_F \|z - x^*\|_2 dt - \int_0^1 \|A(x^*)\|_F \|z - x^*\|_2 dt \\
&\quad - \int_0^1 \|A(x^* + t[z - x^*])\|_F \|z - x^*\|_2 dt \\
&\geq \int_0^1 \|A(x^*)\|_F \|z - x^*\|_2 dt - \int_0^1 (\|A(x^* + t[z - x^*])\|_F + \|A(x^*)\|_F) \|z - x^*\|_2 dt \\
&\geq \int_0^1 \|A(x^*)\|_F \|z - x^*\|_2 dt - \int_0^1 \|A(x^* + t[z - x^*]) - A(x^*)\|_F \|z - x^*\|_2 dt \\
&\geq \|A(x^*)\|_F \|z - x^*\|_2 dt - \int_0^1 \|A(x^* + t[z - x^*]) - A(x^*)\|_F \|z - x^*\|_2 dt \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Agora, tomando $z \in B(x^*, r_2)$, podemos usar a desigualdade (4.15), pois como $t \in [0, 1]$ os vetores da relação $(x^* + t[z - x^*])$ pertencem ao segmento de extremidades z e x^* , e como a vizinhança $B(x^*, r_2)$ é convexa, ela contém o segmento completamente, porque contém os pontos extremos, e assim temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 [(\|A(x^* + t[z - x^*]) - A(x^*)\|_F) \|z - x^*\|_2] dt \\
&\leq \int_0^1 \left[\frac{\|z - x^*\|_2}{c \|A(x^*)^{-1}\|_F} \right] dt,
\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 [(\|A(x^* + t[z - x^*]) - \|A(x^*)\|_F) \|z - x^*\|_2] dt \\
& \geq - \int_0^1 \frac{\|z - x^*\|_2}{c \|A(x^*)^{-1}\|_F} dt.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Substituindo (4.18) em (4.17), vemos que

$$\begin{aligned}
\|f(z)\|_2 & \geq \|A(x^*)\|_F \|z - x^*\|_2 - \int_0^1 \frac{\|z - x^*\|_2}{c \|A(x^*)^{-1}\|_F} dt \\
& \geq \|A(x^*)\|_F \|z - x^*\|_2 - \frac{\|z - x^*\|_2}{c \|A(x^*)^{-1}\|_F}.
\end{aligned}$$

Vamos encontrar um limitante superior para $\|A(x^*)\|_F \|(z - x^*)\|_2$. Para isso, notemos que

$$\begin{aligned}
\|A(x^*)\|_F \|z - x^*\|_2 & \geq \frac{\|A(x^*)\|_F \|z - x^*\|_2}{\sqrt{(m)}} \\
& \geq \frac{\|A(x^*)\|_F \|z - x^*\|_2}{\|I\|_F} \\
& \geq \frac{\|A(x^*)\|_F \|z - x^*\|_2}{\|A(x^*)A(x^*)^{-1}\|_F}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
& \|A(x^*)A(x^*)^{-1}\|_F \leq \|A(x^*)\|_F \|A(x^*)^{-1}\|_F \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{\|A(x^*)A(x^*)^{-1}\|_F} \geq \frac{1}{\|A(x^*)\|_F \|A(x^*)^{-1}\|_F}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Substituindo (4.20) em (4.19), obtemos

$$\begin{aligned}
\|f(z)\|_2 & \geq \frac{\|A(x^*)\|_F \|z - x^*\|_2}{\|A(x^*)\|_F \|A(x^*)^{-1}\|_F} - \frac{\|z - x^*\|_2}{c \|A(x^*)^{-1}\|_F} \\
& \geq \frac{\|z - x^*\|_2}{\|A(x^*)^{-1}\|_F} - \frac{\|z - x^*\|_2}{c \|A(x^*)^{-1}\|_F} \\
& \geq \frac{(c - 1) \|z - x^*\|_2}{c \|A(x^*)^{-1}\|_F}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Reorganizando (4.21), temos

$$\delta \|A(x^*)^{-1}\|_F \|f(z)\|_2 \geq \|z - x^*\|_2, \text{ com } \delta = c/(c - 1) > 0.$$

□

O teorema de convergência local, que apresentaremos na sequência do texto, mostrará que o Algoritmo 4.1 é capaz de obter alguma solução de um sistema de equações não-lineares, desde que as condições descritas a seguir sejam satisfeitas, porém na prática podem haver situações em que algumas das condições não sejam satisfeitas e mesmo assim o método encontre alguma solução para o sistema. O teorema, bem como sua demonstração foram retirados de [2] (Teorema 2).

Teorema 4.5. *Suponhamos que x^* seja uma solução para (4.1), que as condições (i), (ii) e (iii) sejam satisfeitas para a função f e que a cada iteração do Algoritmo 4.1 os vetores z_i e w_i sejam escolhidos de tal forma que satisfaçam*

$$\left\| \frac{p_k}{p_k^T a_k} \right\|_2 \leq \Gamma \|C_k^+\|_2, \forall k = 1, \dots, m \text{ e } i = 1, 2, \dots, \quad (4.22)$$

para algum $\Gamma > 0$. Então, existe um número $r > 0$ tal que, para qualquer $x_1 \in B(x^*, r)$, o algoritmo gera uma sequência de vetores $\{x_i\}$ que converge para a solução x^* com Q -ordem de convergência não menor do que $1 + \mu$.

Demonstração: Faremos a demonstração do teorema por partes.

1) Existem constantes $0 < r_3 \leq r_2$ e $\Gamma_1 > 0$ tais que, se $y_1 \in B(x^*, r_3)$, então $y_{k+1} \in B(x^*, r_2)$ e

$$\|y_{k+1} - x^*\|_2 \leq (1 + \Gamma_1 K_0)^k \|y_1 - x^*\|_2, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.23)$$

2) Se $y_1 \in B(x^*, r_3)$, então

$$\|f_i(y_{i+1})\| \leq K_1 \|y_{i+1} - y_i\|_2^{1+\mu}, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.24)$$

3) Caso, $y_1 \in B(x^*, r_3)$, temos que

$$\|a_i(y_{i+1})^T [y_k - y_{k-1}]\| \leq K_1 \|y_k - y_{k-1}\|_2 \|y_{i+1} - y_i\|_2^\mu, \quad (i < k). \quad (4.25)$$

4) Se, $y_1 \in B(x^*, r_3)$, então

$$\|f(y_{m+1})\|_2 \leq 3K_1 \sqrt{m}(m+1)(2(1 + \Gamma_1 K_0)^m)^{1+\mu} \|y_1 - x^*\|_2^{1+\mu}. \quad (4.26)$$

5) Caso, $x_{n-1} = y_1 \in B(x^*, r_3)$, então para $x_n = y_{m+1}$ temos

$$\|x_n - x^*\|_2 \leq K_2 \|x_{n-1} - x^*\|_2^{1+\mu}, \quad (4.27)$$

onde $K_2 = \delta \|A^{-1}(x^*)\|_F \sqrt{m} 3K_1(m+1)[2(1+K_0\Gamma_1)^m]^{1+\mu}$.

6) Suponhamos que $0 < r_1 \leq r_3$ satisfaz a desigualdade $K_2 r_1^\mu \leq 1/2$ e $x_1 \in B(x^*, r_1)$, então

$$\|x_n - x^*\|_2 \leq 2^{-n+1} \|x_1 - x^*\|_2, \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (4.28)$$

Isso significa que $x_n \in B(x^*, r_1)$ e $x_n \rightarrow x^*$.

7) Mostraremos que a Q-ordem de convergência é ao menos $1 + \mu$.

Demonstração de (1): Das expressões (4.7) e (4.22) obtemos que

$$\left\| \frac{p_k}{p_k^T a_k} \right\|_2 \leq \Gamma_1, \quad k = 1, \dots, m, \quad (4.29)$$

onde $\Gamma_1 = \Gamma \delta \max_j \{ \|A_j(x^*)^+\|_2 \}$, sempre que $y_j \in B(x^*, r_2)$ para $j = 1, \dots, m$. Suponhamos que $0 < r_3 \leq (1 + \Gamma_1 K_0)^{-m} r_2$ e tome $y_1 \in B(x^*, r_3)$. Então, para $k = 2$ e usando a atualização do vetor y_2 dada pelo Algoritmo 4.1, temos

$$y_2 - x^* = y_1 - \frac{f_1(y_1)p_1}{p_1^T a_1 - x^*} + \frac{f_1(x^*)p_1}{p_1^T a_1} - x^* = y_1 - x^* - \frac{[f_1(y_1) - f_1(x^*)]p_1}{p_1^T a_1}, \quad (4.30)$$

lembrando que $f_1(x^*) = 0$, pois x^* , por hipótese, é uma solução do sistema não-linear. Agora, usando (4.30), e a desigualdade triangular da norma euclidiana, vemos que

$$\begin{aligned} \|y_2 - x^*\|_2 &= \left\| y_1 - x^* - \frac{[f_1(y_1) - f_1(x^*)]p_1}{p_1^T a_1} \right\|_2 \\ &\leq \|y_1 - x^*\|_2 + |f_1(y_1) - f_1(x^*)| \left\| \frac{p_1}{p_1^T a_1} \right\|_2. \end{aligned}$$

Como

$$|f_1(y_1) - f_1(x^*)| \leq \|f(y_1) - f(x^*)\|_2 \leq K_0 \|y_1 - x^*\|_2$$

por, (4.2) e (4.29), concluímos

$$\begin{aligned} \|y_1 - x^*\|_2 + |f_1(y_1) - f_1(x^*)| \left\| \frac{p_1}{p_1^T a_1} \right\|_2 &\leq \|y_1 - x^*\|_2 + K_0 \|y_1 - x^*\|_2 \Gamma_1 \\ &\leq (1 + K_0 \Gamma_1) \|y_1 - x^*\|_2. \end{aligned}$$

Chegando a desigualdade,

$$\|y_2 - x^*\|_2 \leq (1 + K_0\Gamma_1)\|y_1 - x^*\|_2. \quad (4.31)$$

Por hipótese, $0 < r_3 \leq (1 + \Gamma_1 K_0)^{-m} r_2$ e $y_1 \in B(x^*, r_3)$, assim (4.31) fica

$$\begin{aligned} \|y_2 - x^*\|_2 &\leq (1 + K_0\Gamma_1)(1 + \Gamma_1 K_0)^{-m} r_2 \\ &= (1 + \Gamma_1 K_0)^{-m+1} r_2 \\ &\leq r_2, \end{aligned}$$

concluindo que $y_2 \in B(x^*, r_2)$.

Fazendo uma hipótese de indução sobre os índices j , admitindo que os vetores $y_j \in B(x^*, r_2)$ e

$$\|y_j - x^*\|_2 \leq (1 + K_0\Gamma_1)^{j-1} \|y_1 - x^*\|_2,$$

para todos os índices $j \leq k$.

Para $j = k + 1$

$$\begin{aligned} \|y_{k+1} - x^*\|_2 &= \left\| y_k - \frac{f_k(y_k)p_k}{p_k^T a_k - x^*} + \frac{f_k(x^*)p_k}{p_k^T a_k} - x^* \right\|_2 \\ &\leq \|y_k - x^*\|_2 + |f_k(y_k) - f_k(x^*)| \left\| \frac{p_k}{p_k^T a_k} \right\|_2 \\ &\leq \|y_k - x^*\|_2 + \|f(y_k) - f(x^*)\|_2 \left\| \frac{p_k}{p_k^T a_k} \right\|_2 \\ &\leq \|y_k - x^*\|_2 + K_0 \|y_k - x^*\|_2 \Gamma_1 \\ &\leq (1 + K_0\Gamma_1) \|y_k - x^*\|_2 \\ &\leq (1 + K_0\Gamma_1)(1 + K_0\Gamma_1)^{k-1} \|y_1 - x^*\|_2 \\ &\leq (1 + K_0\Gamma_1)^k \|y_1 - x^*\|_2, \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde (4.32) segue por (4.2), (4.29) e da hipótese de indução. Também, pela hipótese de indução, concluímos que

$$\begin{aligned} \|y_{k+1} - x^*\|_2 &\leq (1 + K_0\Gamma_1)^k \|y_1 - x^*\|_2 \\ &\leq (1 + K_0\Gamma_1)^k (1 + K_0\Gamma_1)^{-m} r_2 \\ &\leq (1 + K_0\Gamma_1)^{-m+k} r_2 \\ &\leq r_2, \end{aligned}$$

pois $m \geq k$, tendo em vista que os vetores y_j existem até o índice $m + 1$, e para esse índice pela indução finita feita para a diferença em norma $\|y_j - x^*\|_2$, temos

$$\|y_{m+1} - x^*\|_2 \leq (1 + K_0 \Gamma_1)^m \|y_1 - x^*\|_2.$$

Concluindo assim o desejado.

Demonstração de (2): Usaremos a expansão de Taylor da função $f_i(y_{i+1})$ em torno de y_i , dada por

$$f_i(y_{i+1}) = f_i(y_i) + a_i(\xi_i)^T (y_{i+1} - y_i), \quad (4.33)$$

onde $\xi_i = y_{i+1} + t(y_i - y_{i+1})$ para algum $t \in (0, 1)$. Somando e subtraindo em (4.33) os termos

$$\frac{a_i(\xi_i)^T f_i(y_i) p_i}{p_i^T a_i} \text{ e } \frac{a_i(y_i)^T f_i(y_i) p_i}{p_i^T a_i},$$

temos

$$\begin{aligned} f_i(y_{i+1}) &= f_i(y_i) + a_i(\xi_i)^T (y_{i+1} - y_i) + \frac{a_i(\xi_i)^T f_i(y_i) p_i}{p_i^T a_i(y_i)} - \frac{a_i(\xi_i)^T f_i(y_i) p_i}{p_i^T a_i(y_i)} + \frac{a_i(y_i)^T f_i(y_i) p_i}{p_i^T a_i(y_i)} \\ &\quad - \frac{a_i(y_i)^T f_i(y_i) p_i}{p_i^T a_i(y_i)} \\ &= a_i(\xi_i)^T \left[y_{i+1} - y_i + \frac{f_i(y_i) p_i}{p_i^T a_i(y_i)} \right] + \frac{[a_i(y_i) - a_i(\xi_i)]^T f_i(y_i) p_i}{p_i^T a_i(y_i)} + f_i(y_i) \left[1 - \frac{a_i(y_i)^T p_i}{p_i^T a_i(y_i)} \right] \\ &= \frac{[a_i(y_i) - a_i(\xi_i)]^T f_i(y_i) p_i}{p_i^T a_i(y_i)} \\ &= [a_i(y_i) - a_i(\xi_i)]^T (y_{i+1} - y_i), \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde (4.34) segue pois, a atualização do vetor y_i no Algoritmo 4.1 é dada por

$$y_{i+1} = y_i - \frac{f_i(y_i) p_i}{p_i^T a_i(y_i)} \Leftrightarrow y_{i+1} - y_i + \frac{f_i(y_i) p_i}{p_i^T a_i(y_i)} = 0,$$

e também pelo fato que

$$\frac{a_i(y_i)^T p_i}{p_i^T a_i(y_i)} = \frac{(p_i^T a_i(y_i))^T}{p_i^T a_i(y_i)} = \frac{p_i^T a_i(y_i)}{p_i^T a_i(y_i)} = 1,$$

Utilizando em (4.34) a Proposição 2.1, (4.3),

$$\|[a_i(y_i) - a_i(\xi_i)]^T\|_2 \leq \|A(y_i) - A(\xi_i)\|_F,$$

e que $(1 - t) < 1$ para $0 < t < 1$, obtemos:

$$\begin{aligned}
|f_i(y_{i+1})| &= |[a_i(y_i) - a_i(\xi_i)]^T (y_{i+1} - y_i)| \\
&\leq \|[a_i(y_i) - a_i(\xi_i)]^T\|_2 \|y_{i+1} - y_i\|_2 \\
&\leq \|A(y_i) - A(\xi_i)\|_F \|y_{i+1} - y_i\|_2 \\
&\leq K_1 \|y_i - \xi_i\|_2^\mu \|y_{i+1} - y_i\|_2 \\
&\leq K_1 \|y_i - [y_{i+1} - t(y_i - y_{i+1})]\|_2^\mu \|y_{i+1} - y_i\|_2 \\
&\leq K_1 \|(1 - t)[y_i - y_{i+1}]\|_2^\mu \|y_{i+1} - y_i\|_2 \\
&\leq K_1 \|y_i - y_{i+1}\|_2^\mu \|y_{i+1} - y_i\|_2 \\
&\leq K_1 \|y_{i+1} - y_i\|_2^{1+\mu}.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Mostrando por fim que (4.24) ocorre.

Demonstração de (3): Como $H_k a_i(y_i) = 0$, $1 \leq i < k$, temos

$$p_k^T a_i(y_i) = z_k^T H_k a_i(y_i) = 0, \quad 1 \leq i < k,$$

e lembrando que $a_i(y_{i-1})^T [y_k - y_{k-1}] = 0$ se $i < k$, obtemos

$$\begin{aligned}
a_i(y_i)^T [y_k - y_{k-1}] &= a_i(y_i)^T [y_k - y_{k-1}] - a_i(y_{i-1})^T [y_k - y_{k-1}] \\
&= [a_i(y_i) - a_i(y_{i-1})]^T [y_k - y_{k-1}].
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Agora, (4.25) segue usando (4.36) junto com uma estratégia similar feita para obter (4.35):

$$\begin{aligned}
|a_i(y_i)^T [y_k - y_{k-1}]| &= |[a_i(y_i) - a_i(y_{i-1})]^T [y_k - y_{k-1}]| \\
&\leq \|[a_i(y_i) - a_i(y_{i-1})]^T\|_2 \|y_k - y_{k-1}\|_2 \\
&\leq \|A(y_i) - A(y_{i-1})\|_F \|y_k - y_{k-1}\|_2 \\
&\leq K_1 \|y_i - y_{i-1}\|_2^\mu \|y_k - y_{k-1}\|_2.
\end{aligned}$$

Demonstração (4): Para ver isso, usamos a expansão de Taylor de $f_i(y_{m+1})$ em torno de y_{i+1} , obtemos

$$f_i(y_{m+1}) = f_i(y_{i+1}) + a_i(\xi_i)^T (y_{m+1} - y_{i+1}), \tag{4.37}$$

onde $\xi_{i+1} = y_{m+1} + t(y_{i+1} - y_{m+1})$ para algum $t \in (0, 1)$. Tomando o módulo, somando e subtraindo o termo $a_i(y_{i+1})^T(y_{m+1} - y_{i+1})$ a direita, usando a desigualdade triangular e uma estratégia similar à utilizada em (4.24) em (4.37), temos

$$\begin{aligned} |f_i(y_{m+1})| &\leq |f_i(y_{i+1})| + |[a_i(\xi_{i+1}) - a_i(y_{i+1})]^T(y_{m+1} - y_{i+1})| + |a_i(y_{i+1})^T(y_{m+1} - y_{i+1})| \\ &\leq |f_i(y_{i+1})| + K_1 \|y_{m+1} - y_{i+1}\|_2^{1+\mu} + \left| a_i(y_{i+1})^T \left(\sum_{k=i+2}^{m+1} (y_k - y_{k-1}) \right) \right|. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Como $i < k$ no somatório em (4.38), podemos usar (4.25) e obtemos

$$\begin{aligned} |f_i(y_{m+1})| &\leq |f_i(y_{i+1})| + K_1 \|y_{m+1} - y_i\|_2^{1+\mu} \\ &\quad + K_1 \|y_k - y_{k-1}\|_2 \|y_{i+1} - y_i\|_2^\mu \\ &\quad + K_1 \sum_{k=i+2}^{m+1} \|y_k - y_{k-1}\|_2 \|y_{i+1} - y_i\|_2^\mu. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Desde que $y_j \in B(x^*, r_2)$, ($j = 1, \dots, m$) temos pela parte (1) da demonstração que:

$$\begin{aligned} \|y_l - y_s\|_2 &\leq \|y_l - x^* - (y_s - x^*)\|_2 \\ &\leq \|y_l - x^*\|_2 + \|(y_s - x^*)\|_2 \\ &\leq (1 + K_0 \Gamma_1)^{l-1} \|y_1 - x^*\|_2 + (1 + K_0 \Gamma_1)^{s-1} \|y_1 - x^*\|_2 \\ &\leq (1 + K_0 \Gamma_1)^m \|y_1 - x^*\|_2 + (1 + K_0 \Gamma_1)^m \|y_1 - x^*\|_2 \\ &= 2(1 + K_0 \Gamma_1)^m \|y_1 - x^*\|_2, \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde (4.40) é válida para $1 \leq j, s \leq m + 1$. Usando (4.40) em (4.39), vemos que

$$\begin{aligned} |f_i(y_{m+1})| &\leq |f_i(y_{i+1})| + K_1 [2(1 + K_0 \Gamma_1)^m \|y_1 - x^*\|_2]^{1+\mu} \\ &\quad + K_1 \sum_{k=i+2}^{m+1} [2(1 + K_0 \Gamma_1)^m \|y_1 - x^*\|_2] [2(1 + K_0 \Gamma_1)^m \|y_1 - x^*\|_2]^\mu \\ &\leq |f_i(y_{i+1})| + K_1 [2(1 + K_0 \Gamma_1)^m]^{1+\mu} \|y_1 - x^*\|_2^{1+\mu} \\ &\quad + K_1 [m + 1 - (i - 1)] [2(1 + K_0 \Gamma_1)^m]^{1+\mu} \|y_1 - x^*\|_2^{1+\mu}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Pela parte (2) da demonstração, podemos dar um limitante superior para

$|f_i(y_{i+1})|$, tornando (4.41) da forma

$$\begin{aligned}
|f_i(y_{m+1})| &\leq K_1 \|y_{i+1} - y_i\|_2^{1+\mu} + K_1 [2(1 + K_0 \Gamma_1)^m]^{1+\mu} \|y_1 - x^*\|_2^{1+\mu} \\
&\quad + K_1 (m+1) [2(1 + K_0 \Gamma_1)^m]^{1+\mu} \|y_1 - x^*\|_2^{1+\mu} \\
&\leq 3K_1 (m+1) [2(1 + K_0 \Gamma_1)^m]^{1+\mu} \|y_1 - x^*\|_2^{1+\mu}.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Agora, para a limitação de $\|f(y_{m+1})\|_2$, usamos (4.42)

$$\begin{aligned}
\|f(y_{m+1})\|_2 &= \sqrt{\sum_{j=1}^m |f_j(y_{m+1})|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{j=1}^m [3K_1 (m+1) [2(1 + K_0 \Gamma_1)^m]^{1+\mu} \|y_1 - x^*\|_2^{1+\mu}]^2} \\
&= \sqrt{m [3K_1 (m+1) [2(1 + K_0 \Gamma_1)^m]^{1+\mu} \|y_1 - x^*\|_2^{1+\mu}]^2} \\
&= 3\sqrt{m} K_1 (m+1) [2(1 + K_0 \Gamma_1)^m]^{1+\mu} \|y_1 - x^*\|_2^{1+\mu}.
\end{aligned}$$

Concluindo a demonstração da parte (4).

Demonstração de (5): A desigualdade (4.27) é consequência imediata da parte (4) dessa demonstração junto com o uso do Lema 4.4.

Demonstração de (6): Para demonstrar esta parte, notemos que, se $x_1 \in B(x^*, r_1)$, por (4.23) obtemos

$$\|x_2 - x^*\|_2 \leq K_2 \|x_1 - x^*\|_2^\mu \|x_1 - x^*\|_2 \leq K_2 r_1^\mu \|x_1 - x^*\|_2 \leq 2^{-1} \|x_1 - x^*\|_2.$$

Suponhamos, por hipótese de indução, que a propriedade seja satisfeita para todo $j \leq k$, ou seja,

$$\|x_k - x^*\|_2 \leq 2^{-k+1} \|x_1 - x^*\|_2 \text{ e } x_k \in B(x^*, r_1).$$

Para $j = k + 1$ temos

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|_2 &\leq K_2 \|x_k - x^*\|_2^{1+\mu} \\
&\leq K_2 r_1^\mu \|x_k - x^*\|_2 \\
&\leq 2^{-1} 2^{-k+1} \|x_1 - x^*\|_2 \\
&\leq 2^{-k} \|x_1 - x^*\|_2.
\end{aligned}$$

Concluindo assim a demonstração da parte (6).

Demonstração de (7): Utilizando (4.27) vemos que

$$r(n) = \|x_n - x^*\|_2 / \|x_{n-1} - x^*\|_2^{1+\mu} \leq K_2.$$

Logo, o limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} r(n) \leq K_2$, mostrando o desejado e concluindo a demonstração do teorema. \square

O Teorema 4.5, que acabamos de demonstrar, trouxe um resultado de convergência local para os algoritmos da classe ABS não-linear, além das hipóteses envolvendo a função associada ao sistema de equações não-lineares, utilizamos, como hipótese, uma condição de controle sobre a norma do vetor $p_k/p_k^T a_k$. A seguir mostramos um resultado retirado de [2] (Teorema 3), o qual garante que esse controle é possível de ser obtido mantendo o ângulo, entre determinados vetores, menor do que uma constante.

Proposição 4.6. *Seja $0 \leq \beta < \pi/2$ arbitrário mas fixo. Se os vetores z_i são escolhidos de forma que*

$$|(p_k, a_k)_\angle| \leq \beta, \quad 1 \leq k \leq m, \quad i = 1, 2, \dots,$$

onde $(p_k, a_k)_\angle$, representa o ângulo entre os vetores p_k e a_k , então (4.22) ocorre com $\Gamma = 1/|\cos\beta|$.

Demonstração: Primeiramente, relembremos que $B^+B = P_{Im(B^T)}$, então, se tomarmos $z \in Im(B^T)$, obtemos

$$B^+Bz = z \Leftrightarrow \|z\|_2 = \|B^+Bz\|_2 \Leftrightarrow \|z\|_2 \leq \|B^+\|_F \|Bz\|_2 \Leftrightarrow \|Bz\|_2 \geq \frac{\|z\|_2}{\|B^+\|_F}. \quad (4.43)$$

Tomando, em (4.43), $B = C_i$ e $z = e_i$, com $e_i \in \mathbb{R}^i$ sendo o vetor canônico com o valor 1 na coordenada i , temos

$$\|C_i e_i\|_2 = \|a_i\|_2 \geq \frac{\|e_i\|_2}{\|C_i^+\|_F} = \frac{1}{\|C_i^+\|_F}. \quad (4.44)$$

Usando (4.44), obtemos

$$\|C_i e_i\|_2 \geq \frac{1}{\|C_i^+\|_F} \Leftrightarrow \|C_i^+\|_F \geq \frac{1}{\|a_i\|_2}. \quad (4.45)$$

Agora, utilizando a hipótese que $|(p_k, a_k)_\angle| \leq \beta$, lembrando que o ângulo entre os vetores p_k e a_k é θ , então seu cosseno é dado por

$$\cos(\theta) = \frac{p_k^T a_k}{\|p_k\|_2 \|a_k\|_2},$$

e o fato da função $\cos(x)$ ser decrescente no intervalo $[-\beta, \beta]$, se $0 \leq \beta < \pi/2$, vemos que

$$\begin{aligned} |\cos(\beta)| \leq |\cos(\theta)| &= \frac{|p_k^T a_k|}{\|p_k\|_2 \|a_k\|_2} \Leftrightarrow \frac{\|p_k\|_2}{|p_k^T a_k|} \leq \frac{1}{\|a_k\|_2 |\cos(\beta)|} \\ &\Leftrightarrow \left\| \frac{p_k}{p_k^T a_k} \right\|_2 \leq \frac{1}{\|a_k\|_2 |\cos(\beta)|}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Usando (4.45) em (4.46) concluímos o desejado. \square

4.2 Classe de Métodos ABS em Blocos

Nesta seção consideramos novamente a Jacobiana da função f como sendo a matriz $A(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Assim como no caso de sistemas lineares, os métodos ABS em Blocos aparecem com o objetivo de serem generalizações dos métodos ABS, contendo os mesmos, como métodos particulares. Mostraremos também, por meio de alguns testes presentes no Capítulo 6 para uma coleção de problemas, que além dos métodos em Blocos serem mais viáveis com relação ao tempo gasto para encontrar uma solução, do que os métodos ABS dados pelo Algoritmo 4.1, eles são métodos mais robustos, isto é, capazes de obter soluções para uma quantidade maior de problemas. A nossa abordagem está baseada no artigo [3].

Algoritmo 4.7. Para a realização do algoritmo escolha primeiramente um número de partições arbitrário, denotado por $t = r + 1$, para as colunas de uma matriz $m \times m$ de tal forma que podemos representar suas colunas pela composição de $r + 1$ matrizes da forma,

$$B = (B_0, B_1, \dots, B_r) \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

e as matrizes B_i com $i = 0, \dots, r$ possuem cada uma delas dimensões $m \times s_i$ com $\sum_{i=0}^r s_i = m$.

Passo 0 - Escolha um vetor inicial $x_1 \in \mathbb{R}^m$.

Para $l = 1, 2, \dots$ realize os passos a seguir:

Passo 1 - Tome $y_0 = x_l$, $K_0 = I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $V = [V_0, V_1, \dots, V_r] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não-singular.

Para $k = 0, \dots, r$ faça:

Passo 2 - Defina η_k da forma

$$\eta_k = \sum_{j=0}^k \lambda_j y_j, \text{ onde } 0 \leq \lambda_j \leq 1.$$

Passo 3 - Defina a matriz P_k dada pela expressão

$$P_k = K_k^T Z_k,$$

onde $Z_k \in \mathbb{R}^{m \times s_k}$ é deve ser tal que $[V_k^T A(\eta_k) P_k]$ seja não-singular.

Passo 4 - Atualize o vetor y_k da seguinte forma

$$y_{k+1} = y_k - P_k q_k,$$

onde o vetor $q_k = [V_k^T A(\eta_k) P_k]^{-1} V_k^T f(y_k) \in \mathbb{R}^{s_k \times 1}$.

Passo 5 - Se $k = r$, faça $x_{l+1} = y_{r+1}$ e vá ao Passo 1. Caso contrário vá ao Passo 6.

Passo 6 - Escolha uma matriz $W_k \in \mathbb{R}^{m \times s_k}$ tal que

$$W = (W_0, \dots, W_r) \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

e satisfazendo a condição $[W_k^T K_k A(\eta_k)^T V_k] = I$, sendo I a matriz identidade de ordem $s_k \times s_k$. E atualize a matriz K_k por

$$K_{k+1} = K_k - K_k A(\eta_k)^T V_k W_k^T K_k \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

Passo 7 - Faça $k = k + 1$ e volte ao Passo 2.

Na sequência, apresentamos um teorema de convergência local para o Algoritmo 4.7, garantindo o funcionamento teórico do método para funções e matrizes escolhidas satisfazendo determinadas condições. Essa demonstração pode ser encontrada na referência [3] (Teorema 5).

Inicialmente, seguem algumas hipóteses envolvendo a função associada ao sistema de equações não-lineares. Suponhamos que x^* é uma solução do sistema (4.1).

(i) Existem dois números $r_0 > 0$ e $L_0 \geq 0$ tais que $f \in C^1(B(x^*, r_0))$ e

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \leq L_0 \|x - y\|_2, \quad \forall x, y \in B(x^*, r_0). \quad (4.47)$$

(ii) Existem duas constantes $0 < \mu \leq 1$, $L_1 \geq 0$ tais que

$$\|A(x) - A(y)\|_F \leq L_1 \|x - y\|_2^\mu, \quad \forall x, y \in (B(x^*, r_0)). \quad (4.48)$$

Teorema 4.8. *Suponha que x^* seja uma solução de (4.1) e que os pares de matrizes (P_k, V_k) gerados pelo Algoritmo 4.7 satisfaçam a condição*

$$\|[P_k[V_k^T A(\eta_k) P_k]^{-1} V_k^T]\|_F \leq L_2, \quad l = 1, 2, \dots, k = 1, \dots, m, \quad (4.49)$$

para algum $L_2 > 0$. Suponhamos também, que $\kappa(V) \leq L_3$ e que as condições (i) e (ii) são satisfeitas para f . Nessas condições, existe um $r^* > 0$, com $r^* \leq r_0$, tal que para todo $x_1 \in B(x^*, r^*)$ a sequência de vetores $\{x_l\}$, gerada pelo Algoritmo 4.7, converge para uma solução do sistema não-linear x^* com Q -ordem de convergência não menor do que $1 + \mu$.

Demonstração: Consideremos $L_4 = (1 + L_0 L_2)^m$ e tomamos $r_1 > 0$ satisfazendo $L_4 r_1 \leq r_0$. Então, para qualquer $y_0 \in B(x^*, r_1)$ temos

$$\begin{aligned} \|y_1 - x^*\|_2 &= \|y_0 - P_0[V_0^T A(\eta_0) P_0]^{-1} V_0^T f(y_0) - x^* + P_0[V_0^T A(\eta_0) P_0]^{-1} V_0^T f(x^*)\|_2 \\ &\leq \|y_0 - x^*\|_2 + \|P_0[V_0^T A(\eta_0) P_0]^{-1} V_0^T [f(y_0) - f(x^*)]\|_2 \\ &\leq \|y_0 - x^*\|_2 + \|P_0[V_0^T A(\eta_0) P_0]^{-1} V_0^T\|_F \|f(y_0) - f(x^*)\|_2 \\ &\leq \|y_0 - x^*\|_2 + L_2 L_0 \|y_0 - x^*\|_2 = (1 + L_2 L_0) \|y_0 - x^*\|_2, \end{aligned} \quad (4.50)$$

onde (4.50) é obtido usando (4.47), (4.49), a Proposição 2.3 e lembrando que $f(x^*) = 0$

Das hipóteses iniciais e do fato que $(1 + L_2 L_0) > 1$, (4.50) fica da forma

$$\begin{aligned} \|y_1 - x^*\|_2 &\leq (1 + L_2 L_0) \|y_0 - x^*\|_2 \\ &\leq (1 + L_2 L_0)^m \|y_0 - x^*\|_2 \\ &\leq L_4 r_1 \\ &\leq r_0. \end{aligned}$$

Concluindo que $y_1 \in B(x^*, r_0)$.

Suponhamos, por hipótese de indução, que $y_k \in B(x^*, r_0)$ e

$$\|y_k - x^*\|_2 \leq (1 + L_2 L_0)^{k-1} \|y_0 - x^*\|_2$$

para todos os índices $j \leq k$.

Temos, para $j = k + 1$, que

$$\begin{aligned} \|y_{k+1} - x^*\|_2 &= \|y_k - P_k[V_k^T A(\eta_k) P_k]^{-1} V_k^T f(y_k) - x^* + P_k[V_k^T A(\eta_k) P_k]^{-1} V_k^T f(x^*)\|_2 \\ &\leq \|y_k - x^*\|_2 + \|P_k[V_k^T A(\eta_k) P_k]^{-1} V_k^T [f(y_k) - f(x^*)]\|_2 \\ &\leq \|y_k - x^*\|_2 + \|P_k[V_k^T A(\eta_k) P_k]^{-1} V_k^T\|_F \|f(y_k) - f(x^*)\|_2 \\ &\leq \|y_k - x^*\|_2 + L_2 L_0 \|y_k - x^*\|_2 = (1 + L_2 L_0) \|y_k - x^*\|_2 \\ &\leq (1 + L_2 L_0)(1 + L_2 L_0)^{k-1} \|y_0 - x^*\|_2 \\ &= (1 + L_2 L_0)^k \|y_0 - x^*\|_2, \end{aligned} \tag{4.51}$$

onde (4.51) segue da hipótese de indução e as outras desigualdades seguem por argumentos similares da primeira parte da indução. Como o índice $k + 1$ dos vetores y_j pode ser no máximo igual à $r + 1 \leq m$, temos que

$$(1 + L_2 L_0)^k \leq (1 + L_2 L_0)^{r+1-1} \leq (1 + L_2 L_0)^m,$$

e assim, concluímos que

$$\begin{aligned} \|y_{k+1} - x^*\|_2 &\leq (1 + L_2 L_0)^k \|y_0 - x^*\|_2 \\ &\leq (1 + L_2 L_0)^m \|y_0 - x^*\|_2 \\ &\leq L_4 r_1 \\ &\leq r_0, \end{aligned}$$

terminando assim o processo de indução.

Agora, será estimado o valor em norma do vetor $f(y_{r+1})$, notemos que

$$\begin{aligned} \|f(y_{r+1})\|_2 &= \|(V^T)^{-1} V^T f(y_{r+1})\|_2 \\ &\leq \|(V^T)^{-1}\|_F \|V^T f(y_{r+1})\|_2 \\ &\leq \|V^{-1}\|_F \sum_{i=0}^r \|V_i^T f(y_{r+1})\|_2, \end{aligned} \tag{4.52}$$

onde as desigualdades decorrem da Proposição 2.3 e da desigualdade triangular. Também utilizamos a desigualdade

$$\|V^T f(y_{r+1})\|_2 \leq \sum_{i=0}^r \|V_i^T f(y_{r+1})\|_2,$$

que decorre do fato que, dado um vetor x de coordenadas x_1, x_2, \dots, x_m , temos

$$\begin{aligned} \|x\|_2^2 &= \sum_{i=1}^m x_i^2 \leq \sum_{i=0}^r \left(\sqrt{x_{is_i+1}^2 + x_{is_i+2}^2 + \dots + x_{is_i+s_i-1}^2} \right)^2 \\ &= \sum_{i=0}^r \|x_{is_i+1}, x_{is_i+2}, \dots, x_{is_i+s_i-1}\|_2^2, \end{aligned}$$

e a desigualdade acima acontece pela generalização da propriedade apresentada a seguir para o caso de 3 números:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &\leq (a^2 + b^2) + c^2 + 2(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2}) \\ &= (\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2})^2. \end{aligned}$$

Tomando agora, a expansão de Taylor de $f(y_{r+1})$ em torno de y_k , obtemos

$$f(y_{r+1}) = f(y_k) + A(\xi_k)[y_{r+1} - y_k], \quad (4.53)$$

onde $\xi_k = y_{r+1} - t(y_k - y_{r+1})$ para $t \in (0, 1)$. Multiplicando pela matriz V_k^T e somando e subtraindo o termo $V_k^T A(\eta_k)(y_{r+1} - y_k)$ em (4.53), vemos que

$$\begin{aligned} V_k^T f(y_{r+1}) &= V_k^T f(y_k) + V_k^T A(\xi_k)[y_{r+1} - y_k] \\ &= V_k^T f(y_k) + V_k^T A(\xi_k)[y_{r+1} - y_k] + V_k^T A(\eta_k)(y_{r+1} - y_k) - V_k^T A(\eta_k)(y_{r+1} - y_k) \\ &= V_k^T [f(y_k) + A(\eta_k)(y_{r+1} - y_k)] + V_k^T [A(\xi_k) - A(\eta_k)](y_{r+1} - y_k). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Pela Proposição 3.8, item (i), temos que

$$K_j A(\eta_i)^T V_i = 0, \text{ se } i < j, \quad (4.55)$$

e pelo Algoritmo 4.7, sabemos que o vetor y_k é atualizado da forma

$$y_{k+1} = y_k - P_k q_k \Leftrightarrow y_{k+1} - y_k = -P_k q_k. \quad (4.56)$$

Usando (4.55) e (4.56) obtemos

$$\begin{aligned}
V_k^T [f(y_k) + A(\eta_k)(y_{r+1} - y_k)] &= V_k^T f(y_k) + V_k^T A(\eta_k) \sum_{j=k}^r (y_{j+1} - y_j) \\
&= V_k^T f(y_k) + V_k^T A(\eta_k) \sum_{j=k}^r [-P_j q_j] \\
&= V_k^T f(y_k) - \sum_{j=k}^r V_k^T A(\eta_k) P_j q_j. \tag{4.57}
\end{aligned}$$

Como

$$V_k^T A(\eta_k) P_j q_j = V_k^T A(\eta_k) K_j^T Z_j q_j = [K_j A(\eta_k)^T V_k]^T Z_j q_j = 0, \quad j < k,$$

segue que na expressão (4.57) o somatório $\sum_{j=k}^r V_k^T A(\eta_k) P_j q_j$ tem como único termo que não se anula $V_k^T A(\eta_k) P_k q_k$. Portanto, por (4.57) temos

$$\begin{aligned}
V_k^T [f(y_k) + A(\eta_k)(y_{r+1} - y_k)] &= V_k^T f(y_k) - V_k^T A(\eta_k) P_k q_k \\
&= V_k^T f(y_k) - V_k^T A(\eta_k) P_k [V_k^T A(\eta_k) P_k]^{-1} V_k^T f(y_k) \\
&= V_k^T f(y_k) - V_k^T f(y_k) \\
&= 0. \tag{4.58}
\end{aligned}$$

Substituindo (4.58) em (4.54), vemos que

$$V_k^T f(y_{r+1}) = V_k^T [A(\xi_k) - A(\eta_k)](y_{r+1} - y_k). \tag{4.59}$$

Tomando a norma sobre a igualdade (4.59), temos

$$\begin{aligned}
\|V_k^T f(y_{r+1})\|_2 &= \|V_k^T [A(\xi_k) - A(\eta_k)](y_{r+1} - y_k)\|_2 \\
&\leq \|V_k^T\|_F \|A(\xi_k) - A(\eta_k)\|_F \|y_{r+1} - y_k\|_2 \\
&\leq \|V\|_F L_1 \|\xi_k - \eta_k\|_2^\mu \|y_{r+1} - y_k\|_2 \\
&\leq \|V\|_F L_1 \left\| y_{r+1} + t(y_k - y_{r+1}) - \sum_{i=0}^k \lambda_i y_i \right\|_2^\mu \|y_{r+1} - y_k\|_2 \\
&\leq \|V\|_F L_1 \left(\|y_k - y_{r+1}\|_2 + \left\| y_{r+1} - \sum_{i=0}^k \lambda_i y_i \right\|_2 \right)^\mu \|y_{r+1} - y_k\|_2 \\
&\leq \|V\|_F L_1 (2 \max \|y_{r+1} - y_j\|_2; j \leq r+1)^\mu \|y_{r+1} - y_k\|_2. \tag{4.60}
\end{aligned}$$

Agora a desigualdade

$$\|y_{r+1} - \sum_{i=0}^k \lambda_i y_i\|_2 \leq \max \|y_{r+1} - y_j\|_2,$$

vem da observação que a combinação convexa, dada pelo somatório, gera um polígono convexo, cujos vértices são dados pelos vetores y_j e a maior distância entre um vértice fixado de um polígono convexo e outro ponto qualquer no polígono, pensando no polígono como um objeto formado pelas arestas e pela sua área interior, deve ser encontrada em algum dos vértices desse polígono.

Recorrendo a expressão dada por (4.51), vemos que

$$\begin{aligned} \|y_s - y_j\|_2 &= \|y_s - x^* - (y_j - x^*)\|_2 \\ &\leq \|y_s - x^*\|_2 + \|y_j - x^*\|_2 \\ &\leq (1 + L_2 L_0)^{s-1} \|y_0 - x^*\|_2 + (1 + L_2 L_0)^{j-1} \|y_0 - x^*\|_2 \\ &\leq (1 + L_2 L_0)^m \|y_0 - x^*\|_2 + (1 + L_2 L_0)^m \|y_0 - x^*\|_2 \\ &= 2(1 + L_2 L_0)^m \|y_0 - x^*\|_2, \end{aligned} \tag{4.61}$$

onde

$$(1 + L_2 L_0)^{s-1} \leq (1 + L_2 L_0)^m \quad \text{e} \quad (1 + L_2 L_0)^{j-1} \leq (1 + L_2 L_0)^m,$$

decorrem do fato que $(1 + L_2 L_0) > 1$ e porque os índices dos y_j vão até o índice $r + 1$ e $r + 1 \leq m$.

Substituindo a desigualdade (4.61) em (4.60), obtemos

$$\begin{aligned} \|V_k^T f(y_{r+1})\|_2 &= \|V\|_F L_1 [2 \max \|y_{r+1} - y_j\|_2; j \leq r + 1]^\mu (y_{r+1} - y_k)\|_2 \\ &\leq \|V\|_F L_1 [2(2(1 + L_2 L_0)^m \|y_0 - x^*\|_2)]^\mu [2(1 + L_2 L_0)^m \|y_0 - x^*\|_2] \\ &\leq \|V\|_F L_1 2^{1+2\mu} [(1 + L_2 L_0)^m \|y_0 - x^*\|_2]^{1+\mu} \\ &\leq \|V\|_F L_1 2^{1+2\mu} [L_4 \|y_0 - x^*\|_2]^{1+\mu}. \end{aligned} \tag{4.62}$$

E de (4.62), temos

$$\|V_k^T f(y_{r+1})\|_2 \leq \|V\|_F L_5 \|y_0 - x^*\|_2^{1+\mu}, \tag{4.63}$$

onde $L_5 = 2^{1+2\mu} L_1 L_4^{1+\mu}$.

Substituindo (4.63) em (4.52), concluímos que

$$\begin{aligned}
\|f(y_{r+1})\|_2 &\leq \|V^{-1}\|_F \sum_{i=0}^r \|V_i^T f(y_{r+1})\|_2 \\
&\leq \|V^{-1}\|_F \sum_{i=0}^r (\|V\|_F L_5 \|y_0 - x^*\|_2^{1+\mu}) \\
&\leq \|V^{-1}\|_F (m) (\|V\|_F L_5 \|y_0 - x^*\|_2^{1+\mu}) = (m)\kappa(V)L_5 \|y_0 - x^*\|_2^{1+\mu}.
\end{aligned}$$

Das hipóteses do teorema e usando o Lema 4.4, com $x_{n-1} = y_0 \in B(x^*, r^*)$ e $r^* = \min\{r_0, r_1, r_2\}$, obtemos, para $x_n = y_{r+1}$

$$\begin{aligned}
\|x_n - x^*\|_2 &\leq \delta \|A^{-1}(x^*)\|_F \|f(y_{r+1})\|_2 \\
&\leq L_6 \|x_{n-1} - x^*\|_2^{1+\mu},
\end{aligned}$$

com $L_6 = m\delta\kappa(V)\|A^{-1}(x^*)\|_F L_5$ e $\delta > 1$.

Supondo que $L_6(r^*)^\mu \leq 1/2$, conseguimos mostrar de maneira análoga ao passo (6) do Teorema 4.5, que a sequência de vetores $\{x_l\} \rightarrow x^*$. E de maneira análoga ao passo (7) do Teorema 4.5, mostramos que o algoritmo tem Q-ordem de convergência não menor do que $1 + \mu$. Concluindo assim a demonstração do teorema. \square

Relações entre o Algoritmo de Broyden e o Algoritmo ABS

No artigo [5], publicado por C. G. Broyden no ano de 1965, foi introduzida uma classe de métodos iterativos para resolução de sistemas não-lineares da forma $F(x) = 0$, como em (2.8). Nesse método ele propôs que as atualizações dos vetores x_k fossem feitas seguindo a ideia do método de Newton, ou seja,

$$x_{k+1} = x_k + s,$$

onde s é uma solução para o sistema

$$H_k s = -F(x_k).$$

No método de Broyden a ideia é trocar a matriz $F'(x_k)$ por uma matriz mais fácil de ser calculada H_k , no sentido que exija menos operações computacionais para ser encontrada do que a Jacobiana da função. Intuitivamente, dependendo da proximidade dessa matriz H_k com relação a Jacobiana da função $F'(x_k)$, os vetores x_k encontrados pelo método de Broyden estariam próximos dos vetores encontrados pelo método de Newton e assim a perda ocasionada pela aproximação da Jacobiana seria compensada pelo cálculo de mais vetores x_k , tornando métodos desse tipo muito interessantes e promissores. Métodos iterativos que se apoiam na ideia de “imitar” as iterações do método de Newton são conhecidos na literatura como métodos Quase-Newton.

Broyden sugeriu que as matrizes H_k devem satisfazer a equação secante

$$H_k [F(x_k) - F(x_{k-1})] = (x_k - x_{k-1}),$$

com isso as matrizes H_k contém informações sobre a função F . Para reduzir o número de operações necessárias para obter as matrizes H_{k+1} , também foi imposto que H_{k+1} fosse obtida por meio de uma atualização de posto 1 da matriz anterior H_k fazendo com que a quantidade de operações de multiplicação, envolvidas para a obtenção das matrizes a cada iteração do método de Broyden, seja da ordem de n operações, enquanto a matriz Jacobiana do método de Newton necessita da ordem de n^2 operações de multiplicação para ser encontrada. Apresentaremos o algoritmo que representa a classe dos métodos de Broyden (retirado de [8]).

Algoritmo 5.1. (Método de Broyden)

Passo 0 - Escolha um vetor $x_0 \in \mathbb{R}^n$, como aproximação inicial para a solução do sistema, e uma matriz $H_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não-singular, como aproximação para a Jacobiana da função F .

Para $k = 0, 1, 2, \dots$ faça os passos a seguir:

Passo 1 - Encontre o vetor s_k dado por

$$s_k = -H_k F(x_k).$$

Passo 2 - Atualize o vetor x_k da forma

$$x_{k+1} = x_k + s_k.$$

Passo 3 - Calcule o vetor c_k da forma

$$c_k = F(x_{k+1}) - F(x_k).$$

Passo 4 - Se $c_k = 0$ então, faça $H_{k+1} = H_k$, acrescente uma unidade ao índice k e vá ao Passo 1. Caso contrário vá ao Passo 5.

Passo 5 - Escolha $z_k \in \mathbb{R}^n$ tal que $z_k^T c_k = 1$ e $z_k^T H_k^{-1} s_k \neq 0$. E atualize a matriz H_k por

$$H_{k+1} = H_k + (s_k - H_k y_k) z_k^T.$$

Passo 6 - Acrescente uma unidade ao índice k e retorne ao Passo 1.

Reparemos que o Algoritmo 5.1 gera um método diferente para cada escolha feita para os termos H e z , por isso Broyden se referiu aos seus métodos como uma classe. No Passo 5 a condição envolvendo o vetor z_k pode ser encarada como sendo bastante restritiva, porém podemos facilmente, dado um vetor c_k não-nulo, encontrar vetores z_k satisfazendo a condição do Passo 5. Por exemplo, tomando j_k um vetor que não seja ortogonal à c_k temos que o vetor

$$z_k = \frac{j_k}{j_k^T c_k},$$

satisfaz a condição desejada. Outra importante observação é relativa a escolha do vetor z_k satisfazendo a propriedade que $z_k^T H_k^{-1} s_k \neq 0$, essa propriedade é escolhida para garantir que a matriz H_{k+1} seja não-singular.

Teorema 5.2. *As matrizes H_k envolvidas no Algoritmo 5.1 são não-singulares.*

Demonstração: Esse fato pode ser mostrado por meio de um argumento indutivo. Para $k = 0$, temos que a propriedade é satisfeita, pois a matriz H_0 é não-singular, por hipótese do algoritmo.

Suponhamos agora, por hipótese de indução, que a propriedade seja válida para todos os índices menores ou iguais a k . Para $k + 1$, temos

$$\begin{aligned} H_{k+1} &= H_k + (s_k - H_k c_k) z_k^T \\ &= H_k + (-H_k F(x_k) - H_k c_k) z_k^T \\ &= H_k + (-H_k F(x_k) - H_k (F(x_{k+1}) - F(x_k))) z_k^T \\ &= H_k - H_k F(x_{k+1}) z_k^T \\ &= H_k (I - F(x_{k+1}) z_k^T). \end{aligned}$$

Se mostrarmos que $z_k^T F(x_{k+1}) \neq 1$ teremos, pela Proposição 2.13, que H_{k+1} será não-singular. Pelo Algoritmo 5.1 temos

$$z_k^T c_k = z_k^T (F(x_{k+1}) - F(x_k)) = z_k^T F(x_{k+1}) - z_k^T F(x_k).$$

Como, por hipótese do Algoritmo 5.1, $z_k^T c_k = 1$ e $z_k^T H_k^{-1} s_k \neq 0$, temos que $-z_k^T F(x_k) \neq 0$, pois

$$s_k = -H_k F(x_k) \Leftrightarrow H_k^{-1} s_k = -F(x_k) \Leftrightarrow z_k^T H_k^{-1} s_k = -z_k^T F(x_k) \neq 0,$$

onde o fato de H_k ser não-singular segue da hipótese de indução.

Das duas últimas expressões concluímos que $z_k^T F(x_{k+1}) \neq 1$ e já argumentamos que com essa condição obtemos a não-singularidade da matriz H_{k+1} . \square

Uma importante consequência do Teorema 5.2 é que, pela não-singularidade das matrizes H_k , temos que $s_k = 0$ se, e somente se, $F(x_k) = 0$, e isso decorre da forma como o vetor s_k é definido pelo Algoritmo 5.1.

Podemos facilmente aplicar a classe de métodos de Broyden para o caso de sistemas de equações lineares, cuja matriz dos coeficientes do sistema é quadrada. Considerando um sistema linear como em (3.1) com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$, encontrar uma solução para o sistema

$$Ax = b,$$

é equivalente a encontrar uma solução para o sistema homogêneo

$$g(x) = Ax - b = 0, \quad (5.1)$$

e durante todo este capítulo trabalharemos com o sistema linear (5.1).

Durante a sequência desse capítulo, apresentaremos vários resultados envolvendo o método de Broyden, aplicado à sistemas de equações lineares, mas antes disso, estabeleceremos algumas relações úteis que serão amplamente utilizadas nos resultados que seguirão.

Pelo Algoritmo 5.1, o incremento dado ao vetor x_k para obter o vetor x_{k+1} é descrito por

$$s_k = -H_k g(x_k).$$

Assim, a diferença entre os valores de $g(x)$ aplicados aos vetores x_{k+1} e x_k é

$$c_k = g(x_{k+1}) - g(x_k) = Ax_{k+1} - b - (Ax_k - b) = Ax_{k+1} - Ax_k = As_k = -AH_k g(x_k),$$

e podemos escrever $g(x_{k+1})$ como

$$g(x_{k+1}) = g(x_k) + c_k = g(x_k) - AH_k g(x_k) = (I - AH_k)g(x_k),$$

denotaremos as matrizes acima como $F_k = I - AH_k$.

Apresentaremos um lema retirado do artigo [8] (Lema 2.3), que traz certas propriedades das matrizes F_k .

Lema 5.3. Para $k \geq 1$, se $c_k \neq 0$, $z_k^T c_{k-1} \neq 0$ e $\text{posto}(F_k) = n - 1$, então o $\text{posto}(F_{k+1}) = n - 1$ e o vetor c_k gera o $\text{Nuc}(F_{k+1})$.

Demonstração: Para $k \geq 0$,

$$\begin{aligned}
 F_{k+1} &= I - AH_{k+1} \\
 &= I - A(H_k + (s_k - H_k c_k) z_k^T) \\
 &= I - AH_k - A s_k z_k^T + AH_k c_k z_k^T \\
 &= I - AH_k - c_k z_k^T + AH_k c_k z_k^T \\
 &= I - AH_k - (I - AH_k) c_k z_k^T \\
 &= (I - AH_k)(I - c_k z_k^T).
 \end{aligned}$$

Desde que $z_k^T c_k = 1$, vemos que

$$F_{k+1} c_k = (I - AH_k)(I - c_k z_k^T) c_k = (I - AH_k)(c_k - c_k z_k^T c_k) = (I - AH_k)(c_k - c_k) = 0. \quad (5.2)$$

Agora como, por hipótese, temos que $\text{posto}(F_k) = n - 1$ e de (5.2), segue que c_{k-1} gera o $\text{Nuc}(F_k)$, as únicas maneiras de $F_{k+1} y = 0$ com $y \neq 0$ são

$$y = \gamma c_k \text{ ou } (I - c_k z_k^T) y = \alpha c_{k-1}, \quad \gamma, \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

A segunda opção não pode acontecer, porque $c_{k-1} \notin \text{Im}(I - c_k z_k^T)$. Para ver isso, note que a matriz $(I - c_k z_k^T)$ é uma matriz de projeção e usando o resultado (5.9.11) [9], pg. 386, temos que

$$\text{Im}(I - c_k z_k^T) = \text{Nuc}(I - (I - c_k z_k^T)) = \text{Nuc}(c_k z_k^T),$$

mas, $c_{k-1} \notin \text{Nuc}(c_k z_k^T)$, desde que, pela hipótese do lema, temos que $c_k \neq 0$ e $z_k^T c_{k-1} \neq 0$, assim

$$(c_k z_k^T) c_{k-1} = (z_k^T c_{k-1}) c_k = \beta c_k, \quad \beta \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Portanto, concluímos que os únicos vetores não-nulos que pertencem ao $\text{Nuc}(F_{k+1})$ são os múltiplos escalares do vetor c_k , isto é, c_k gera o $\text{Nuc}(F_{k+1})$. \square

O próximo lema será de fundamental importância para a demonstração do teorema que garante a equivalência entre a classe de métodos de Broyden e a classe de métodos ABS, aplicados à sistemas de equações lineares quadrados. Esse lema foi retirado de [10] (Lema 3.2), e garante a existência de um conjunto de vetores linearmente independentes que será a peça chave para demonstração do teorema seguinte.

Lema 5.4. *Sejam $c_k \neq 0$, $z_j^T c_{j-1} \neq 0$, $j = 1, \dots, 2n - 1$, $z_0 \in \text{Im}(F_0^T)$, a matriz $F_0 = I - AH_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não-singular e que os índices $l \leq 2n - 1$ ímpares. Então, a sequência de vetores $\{t_l\}$ satisfazendo as condições*

$$t_1^T F_j = 0, \quad \forall j \geq 1,$$

$$t_l^T F_j = t_{l-2}^T, \quad l = 3, 5, 7, \dots, 2n - 1, \quad \forall j \geq l,$$

existe e é linearmente independente. Mais ainda, $t_i^T g(x_j) = 0$, $j = i + 1, i + 2, \dots, 2n - 1$.

Demonstração: Definimos t_1 por $t_1^T F_0 = z_0^T$. Obviamente t_1 existe, desde que, pela hipótese do lema, $z_0 \in \text{Im}(F_0^T)$. Observe que escrever F_j da forma

$$F_j = F_0(I - c_0 z_0^T) \dots (I - c_{j-1} z_{j-1}^T). \quad (5.3)$$

De fato, segue fazendo uma hipótese de indução sobre o índice j e usando o desenvolvimento de F_{k+1} feito no Lema 5.3 é fácil concluir (5.3).

Pela expressão (5.3), temos que $t_1^T F_j = 0$, $\forall j \geq 1$, pois

$$\begin{aligned} t_1^T F_j &= t_1^T F_0(I - c_0 z_0^T) \dots (I - c_{j-1} z_{j-1}^T) \\ &= z_0^T (I - c_0 z_0^T) \dots (I - c_{j-1} z_{j-1}^T) \\ &= (z_0^T - z_0^T c_0 z_0^T)(I - c_1 z_1^T) \dots (I - c_{j-1} z_{j-1}^T) \\ &= (z_0^T - z_0^T)(I - c_1 z_1^T) \dots (I - c_{j-1} z_{j-1}^T) \\ &= 0, \end{aligned}$$

lembrando que pelo Algoritmo 5.1 $z_k^T c_k = 1$.

Agora a propriedade $t_1^T g(x_j) = 0$, $j \geq 2$ segue imediatamente do fato que $g(x_j) = (I - AH_{j-1})g(x_{j-1}) = F_{j-1}g(x_{j-1})$, $j \geq 2$ e temos para $j \geq 2$ que $j - 1 \geq 1$ e,

portanto,

$$t_1^T g(x_j) = t_1^T F_{j-1} g(x_{j-1}) = 0.$$

Agora, para $j \geq 2$, temos

$$t_1^T c_j = t_1^T (g(x_{j+1}) - g(x_j)) = t_1^T g(x_{j+1}) - t_1^T g(x_j) = 0,$$

devido a última propriedade apresentada.

Para $l = 3$, vamos mostrar que existe t_3 tal que

$$t_3^T F_3 = t_1^T.$$

Para existir t_3 devemos concluir que $t_1 \in \text{Im}(F_3^T)$. Pelo Lema 5.3, sabemos que $\dim(\text{Im}(F_3^T)) = n - 1$ e como

$$\begin{aligned} F_3 c_2 &= F_0(I - c_0 z_0^T)(I - c_1 z_1^T)(I - c_2 z_2^T) c_2 \\ &= F_0(I - c_0 z_0^T)(I - c_1 z_1^T)(c_2 - c_2 z_2^T c_2) \\ &= F_0(I - c_0 z_0^T)(I - c_1 z_1^T)(c_2 - c_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Obtemos por [9] (5.10.1), pg. 394, que $\text{Nuc}(F_3) \oplus \text{Im}(F_3^T) = \mathbb{R}^n$. Como já foi mostrado que $t_1^T c_2 = 0$ e $c_2 \in \text{Nuc}(F_3)$ segue que existe $t_3 \in \mathbb{R}^n$ tal que $t_3^T F_3 = t_1^T$.

Consideramos agora $j \geq 4$, logo

$$t_3^T F_j = t_3^T F_0(I - c_0 z_0^T)(I - c_1 z_1^T)(I - c_2 z_2^T) \dots (I - c_{j-1} z_{j-1}^T),$$

com $j - 1 \geq 3$. Podemos reescrever a expressão acima como

$$t_3^T F_j = t_3^T F_3 \dots (I - c_{j-1} z_{j-1}^T) = t_1^T (I - c_3 z_3^T) \dots (I - c_{j-1} z_{j-1}^T) = t_1^T,$$

porque

$$t_1^T (I - c_{j-1} z_{j-1}^T) = t_1^T - t_1^T c_{j-1} z_{j-1}^T = t_1^T,$$

visto que $j - 1 \geq 3$ e já foi mostrado que $t_1^T c_k = 0$ se $k \geq 2$.

Mostraremos que $\{t_1, t_3\}$ forma um conjunto linearmente independente. Suponhamos que

$$\alpha_1 t_1 + \alpha_3 t_3 = 0, \tag{5.4}$$

então multiplicando (5.4) pela matriz F_3 , temos que

$$F_3^T(\alpha_1 t_1 + \alpha_3 t_3) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 F_3^T(t_1) + \alpha_3 F_3^T(t_3) = 0 \Leftrightarrow \alpha_3 t_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_3 = 0,$$

visto que $t_1 \neq 0$. Substituindo $\alpha_3 = 0$ em (5.4), obtemos que $\alpha_1 = 0$. Concluindo o desejado.

Fazendo uma hipótese de indução sobre os índices l dos vetores t_l , suponhamos que

$$t_l^T F_j = t_{l-2}^T, \quad \forall j \geq l,$$

$$t_i^T g(x_j) = 0, \quad j \geq i + 1 \quad \text{e}$$

$\{t_1, \dots, t_l\}$ forma um conjunto linearmente independente.

Então para $l + 2$, lembrando que os l são ímpares, pelo Lema 5.3 temos que $\dim(\text{Im}(F_{l+2}^T)) = n - 1$ e, por um argumento similar ao que já foi feito, podemos mostrar que c_{l+1} gera o $\text{Nuc}(F_{l+2})$. Da hipótese de indução, temos que $t_l^T c_{l+1} = 0$. Logo existe um vetor t_{l+2} tal que

$$t_{l+2}^T F_l = t_l^T.$$

Efetuando novamente abordagens similares às que foram feitas para o caso $l = 3$, podemos concluir as condições desejadas

$$t_{l+2}^T F_j = t_l^T, \quad \forall j \geq l + 2,$$

$$t_{l+2}^T g(x_j) = 0, \quad j \geq l + 3 \quad \text{e}$$

$\{t_1, \dots, t_{l+2}\}$ forma um conjunto linearmente independente.

Terminando assim a hipótese de indução e conseqüentemente o lema. \square

Segue, como um corolário do Lema 5.4, que se em um sistema de equações lineares quadrado de ordem n , os iterandos do método de Broyden satisfazem as condições do Lema 5.4, então o método encontrará uma solução em no máximo $2n$ iterações. Esse foi um teorema enunciado no artigo [10] (Teorema 3.3). No artigo [8] (Teorema 2.4), é apresentado um resultado que, sobre determinadas hipóteses, garante que o método de Broyden quando aplicado para resolver um sistema de equações lineares quadrado encontra uma solução exatamente após $2n$ iterações.

Corolário 5.5. *Sobre as mesmas hipóteses do Lema 5.4, temos que o método de Broyden aplicado ao sistema linear quadrado $g(x) = 0$ encontrará uma solução em no máximo $2n$ passos.*

Demonstração: Para a demonstração desse resultado usamos os vetores linearmente independentes t_l que foram construídos no Lema 5.4. Notemos que pelo Lema 5.4 temos que

$$t_l^T g(x_k) = 0, \quad \forall k > j.$$

Sendo assim, tomando $k = 2n$, temos que os vetores $S = \{t_1, t_3, \dots, t_{2n-1}\}$ formam um conjunto de vetores linearmente independente e ortogonais ao vetor $g(x_{2n})$, porém o conjunto S contém n vetores linearmente independentes com $t_l \in \mathbb{R}^n$. Logo, o único vetor do \mathbb{R}^n que pode ser ortogonal a um conjunto de n vetores linearmente independentes só pode ser o vetor nulo. Portanto, $g(x_{2n}) = 0$, ou seja, x_{2n} é uma solução para o sistema linear $g(x) = 0$. \square

Por fim, concluímos o capítulo com o teorema que garantirá que, sobre certas condições, os métodos de Broyden e ABS aplicados à sistemas de equações lineares estão relacionados de maneira que os vetores obtidos em cada iteração de um método ABS particular podem ser obtidos por algum método da classe de Broyden.

Teorema 5.6. *Considere um sistema linear $Ax = b$, onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, é não-singular, e suponha que os vetores z_k e c_k referentes ao Algoritmo 5.1 satisfaçam as condições do Lema 5.4. Sejam também os pares (x_0, H_0) e (y_0, K_0) os vetores e matrizes iniciais para os métodos definidos pelos Algoritmos 5.1 e 3.7, respectivamente, com $x_0 = y_0$. Nestas condições mostraremos que, para cada $2m_j$ passos do Algoritmo 5.1, conseguimos encontrar matrizes Z_k, W_k e V_k tais que, esse mesmo vetor pode ser obtido com j passos do Algoritmo 3.7, onde m_j refere-se a quantidade de colunas que a matriz \bar{V}_j possui, sendo $\bar{V}_j = (V_0, V_1, \dots, V_j)$. Resultando que,*

$$x_{2m_r} = y_{r+1}, \quad \text{onde } m_r = n.$$

Demonstração: A demonstração desse resultado será feita utilizando o método de indução sobre os índices dos vetores x e y . Primeiramente, mostraremos que existem escolhas para o

Algoritmo ABS tais que

$$x_{2m_0} = y_1, \quad (5.5)$$

onde m_0 representa a quantidade de colunas da matriz \bar{V}_0 definida pelo Algoritmo 3.7, com $V_0 \in \mathbb{R}^{n \times s_0}$.

Pelo Algoritmo 5.1, sabemos que

$$x_{p+1} = x_p + s_p, \text{ com } s_p = -H_p g_p. \quad (5.6)$$

Usando (5.6), podemos escrever x_{2m_0} como

$$x_{2m_0} = x_0 - d_1, \text{ onde } d_1 = \sum_{i=0}^{2m_0-1} H_i g_i. \quad (5.7)$$

Pelo Algoritmo 3.7, temos que y_1 pode se escrito como

$$y_1 = y_0 - K_0^T Z_0 q_0. \quad (5.8)$$

Para que (5.5) aconteça, analisando (5.7) e (5.8), devemos ter que

$$K_0^T Z_0 q_0 = d_1. \quad (5.9)$$

Sabemos, do Algoritmo 3.7, que a matriz K_0 escolhida é não-singular, sendo assim, existe um único vetor $Z_0 q_0$ satisfazendo (5.9), a saber $Z_0 q_0 = [K_0^T]^{-1} d_1 = w_1$. Escolhendo Z_0 tal que

$$w_1 \in \text{Im}(Z_0)$$

temos que existe q_0 tal que $Z_0 q_0 = w_1$.

Escolhendo Z_0 e q_0 como acima, devemos encontrar uma matriz V_0 satisfazendo a condição que

$$V_0^T A P_0 q_0 = V_0^T r_0,$$

ou equivalentemente, usando (5.9)

$$V_0^T A P_0 q_0 = V_0^T r_0 \Leftrightarrow V_0^T A K_0^T w_1 = V_0^T r_0 \Leftrightarrow V_0^T A d_1 = V_0^T r_0. \quad (5.10)$$

Para mostrar a igualdade (5.10), consideramos a matriz $V = (t_1, t_3, \dots, t_{2n-1})$, sendo os vetores t_i linearmente independentes satisfazendo o Lema 5.4. Considere a matriz

V_0 como sendo a matriz formada pelas m_0 primeiras colunas da matriz V de tal forma que $V = (V_0, V_1, \dots, V_r)$, com $V_k \in \mathbb{R}^{n \times s_k}$.

Por (5.7), temos que

$$V_0^T Ad_1 = V_0^T A \left(\sum_{i=0}^{2m_0-1} H_i g_i \right) = \sum_{i=0}^{2m_0-1} V_0^T A H_i g_i. \quad (5.11)$$

Podemos reescrever (5.11) como

$$V_0^T Ad_1 = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{2m_0-1} t_1^T A H_i g_i \\ \sum_{i=0}^{2m_0-1} t_3^T A H_i g_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{2m_0-1} t_{2m_1-1}^T A H_i g_i \end{bmatrix}.$$

Usando as propriedades satisfeitas pelos vetores t_k , apresentadas no Lema 5.4, temos que

$$t_1^T (I - A H_j) = 0 \quad \forall j \geq 1 \Leftrightarrow t_1^T = t_1^T A H_j \quad \forall j \geq 1, \quad (5.12)$$

$$t_k^T (I - A H_j) = t_{k-2}^T \quad \forall j \geq k \geq 3 \Leftrightarrow (t_k^T - t_{k-2}^T) = t_k^T A H_j \quad \forall j \geq k \geq 3, \quad (5.13)$$

$$t_k^T g_j = 0 \quad \forall j > k. \quad (5.14)$$

Pelas expressões (5.12) e (5.14), concluímos que o primeiro elemento do vetor (5.11) fica da forma

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2m_0-1} t_1^T A H_i g_i &= t_1^T A H_0 g_0 + t_1^T A H_1 g_1 + \sum_{i=2}^{2m_0-1} t_1^T A H_i g_i \\ &= t_1^T A H_0 g_0 + t_1^T A H_1 g_1 + \sum_{i=2}^{2m_0-1} t_1^T g_i \\ &= t_1^T A H_0 g_0 + t_1^T A H_1 g_1. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Como sabemos, pelo Algoritmo 5.1, que $g_{k+1} = (I - A H_k)g_k \quad \forall k \geq 0$, de (5.15), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2m_0-1} t_1^T AH_i g_i &= t_1^T AH_0 g_0 + t_1^T AH_1 (I - AH_0) g_0 \\
&= t_1^T AH_0 g_0 + t_1^T (I - AH_0) g_0 \\
&= t_1^T AH_0 g_0 + t_1^T g_0 - t_1^T AH_0 g_0 \\
&= t_1^T g_0.
\end{aligned}$$

Trabalhando agora com o segundo elemento do vetor (5.11) e usando as igualdades (5.13) e (5.14), temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2m_0-1} t_3^T AH_i g_i &= \sum_{i=0}^3 t_3^T AH_i g_i + \sum_{i=4}^{2m_0-1} t_3^T AH_i g_i \\
&= \sum_{i=0}^3 t_3^T AH_i g_i + \sum_{i=4}^{2m_0-1} (t_3^T - t_1^T) g_i \\
&= \sum_{i=0}^3 t_3^T AH_i g_i \\
&= \sum_{i=0}^1 t_3^T AH_i g_i + t_3^T AH_2 g_2 + (t_3^T - t_1^T) (I - AH_2) g_2, \tag{5.16}
\end{aligned}$$

pois $(t_3^T - t_1^T) = t_3^T AH_j \forall j \geq 3$ e $g_{k+1} = (I - AH_k) g_k \forall k \geq 0$.

Novamente por (5.12), (5.13) e (5.14)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2m_0-1} t_3^T AH_i g_i &= \sum_{i=0}^1 t_3^T AH_i g_i + t_3^T AH_2 g_2 + t_3^T g_2 - t_3^T AH_2 g_2 - t_1^T g_2 + t_1^T AH_2 g_2 \\
&= \sum_{i=0}^1 t_3^T AH_i g_i + t_3^T g_2. \tag{5.17}
\end{aligned}$$

Pelo uso, novamente da igualdade $g_{k+1} = (I - AH_k) g_k \forall k \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2m_0-1} t_3^T AH_i g_i &= t_3^T AH_0 g_0 + t_3^T AH_1 g_1 + t_3^T (I - AH_1) g_1 \\
&= t_3^T AH_0 g_0 + t_3^T AH_1 g_1 + t_3^T g_1 - t_3^T AH_1 g_1 \\
&= t_3^T AH_0 g_0 + t_3^T g_1 \\
&= t_3^T AH_0 g_0 + t_3^T (I - AH_0) g_0 \\
&= t_3^T AH_0 g_0 + t_3^T g_0 - t_3^T AH_0 g_0 \\
&= t_3^T g_0.
\end{aligned}$$

Para o caso geral, considerando j ímpar, temos que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{2m_0-1} t_j^T AH_i g_i &= \sum_{i=0}^j t_j^T AH_i g_i + \sum_{i=j+1}^{2m_0-1} t_j^T AH_i g_i \\
 &= \sum_{i=0}^j t_j^T AH_i g_i + \sum_{i=j+1}^{2m_0-1} (t_j^T - t_{j-2}^T) g_i \\
 &= \sum_{i=0}^j t_j^T AH_i g_i,
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

pois (5.18) segue pelo uso de (5.13) e (5.14).

Usando (5.13), (5.14) e $g_{k+1} = (I - AH_k)g_k \forall k \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^j t_j^T AH_i g_i &= \sum_{i=0}^{j-2} t_j^T AH_i g_i + t_j^T AH_{j-1} g_{j-1} + t_j^T AH_j g_j \\
 &= \sum_{i=0}^{j-2} t_j^T AH_i g_i + t_j^T AH_{j-1} g_{j-1} + (t_j^T - t_{j-2}^T) g_j \\
 &= \sum_{i=0}^{j-2} t_j^T AH_i g_i + t_j^T AH_{j-1} g_{j-1} + t_j^T g_j - t_{j-2}^T g_j \\
 &= \sum_{i=0}^{j-2} t_j^T AH_i g_i + t_j^T AH_{j-1} g_{j-1} + t_j^T g_j \\
 &= \sum_{i=0}^{j-2} t_j^T AH_i g_i + t_j^T AH_{j-1} g_{j-1} + t_j^T (I - AH_{j-1}) g_{j-1} \\
 &= \sum_{i=0}^{j-2} t_j^T AH_i g_i + t_j^T AH_{j-1} g_{j-1} + t_j^T g_{j-1} - t_j^T AH_{j-1} g_{j-1} \\
 &= \sum_{i=0}^{j-2} t_j^T AH_i g_i + t_j^T g_{j-1}.
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Com as mesmas propriedades usadas em (5.19), podemos reescrever (5.19) da forma

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{j-2} t_j^T AH_i g_i + t_j^T g_{j-1} &= \sum_{i=0}^{j-3} t_j^T AH_i g_i + t_j^T AH_{j-2} g_{j-2} + t_j^T g_{j-1} \\
&= \sum_{i=0}^{j-3} t_j^T AH_i g_i + t_j^T AH_{j-2} g_{j-2} + t_j^T (I - AH_{j-2}) g_{j-2} \\
&= \sum_{i=0}^{j-3} t_j^T AH_i g_i + t_j^T AH_{j-2} g_{j-2} + t_j^T g_{j-2} - t_j^T AH_{j-2} g_{j-2} \\
&= \sum_{i=0}^{j-3} t_j^T AH_i g_i + t_j^T g_{j-2}. \tag{5.20}
\end{aligned}$$

De maneira geral, podemos mostrar que

$$\sum_{i=0}^l t_j^T AH_i g_i + t_j^T g_{l+1} = \sum_{i=0}^{l-1} t_j^T AH_i g_i + t_j^T g_l, \tag{5.21}$$

sempre que $j \geq l$.

Para isso, faremos o uso das mesmas propriedades empregadas em (5.19), pois

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^l t_j^T AH_i g_i + t_j^T g_{l+1} &= \sum_{i=0}^{l-1} t_j^T AH_i g_i + t_j^T AH_l g_l + t_j^T g_{l+1} \\
&= \sum_{i=0}^{l-1} t_j^T AH_i g_i + t_j^T AH_l g_l + t_j^T (I - AH_l) g_l \\
&= \sum_{i=0}^{l-1} t_j^T AH_i g_i + t_j^T AH_l g_l + t_j^T g_l - t_j^T AH_l g_l \\
&= \sum_{i=0}^{l-1} t_j^T AH_i g_i + t_j^T g_l. \tag{5.22}
\end{aligned}$$

Considerando a propriedade recursiva dada por (5.21), conseguimos reduzir o índice do somatório em (5.20), sucessivamente até que o somatório seja composto por um único termo. Deste fato e com as expressões dadas por (5.19) e (5.20), podemos reescrever (5.18) como

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2m_0-1} t_j^T AH_i g_i &= t_j^T AH_0 g_0 + t_j^T g_1 \\
&= t_j^T AH_0 g_0 + t_j^T (I - AH_0) g_0 \\
&= t_j^T AH_0 g_0 + t_j^T g_0 - t_j^T AH_0 g_0 \\
&= t_j^T g_0. \tag{5.23}
\end{aligned}$$

Mostrando com (5.23) que a expressão

$$V_0^T A d_1 = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{2m_0-1} t_1^T A H_i g_i \\ \sum_{i=0}^{2m_0-1} t_3^T A H_i g_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{2m_0-1} t_{2m_0-1}^T A H_i g_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1^T g_0 \\ t_3^T g_0 \\ \vdots \\ t_{2m_0-1}^T g_0 \end{bmatrix} = V_0^T g_0 = V_0^T r_0,$$

é verdadeira, lembrando que $Ax_0 - b = g_0 = r_0 = Ay_0 - b$.

Vamos supor, por indução, que $x_{2m_k} = y_{k+1}$ $\forall 1 \leq k < r$, onde m_k representa a quantidade de colunas da matriz $\bar{V}_k = (V_0, V_1, \dots, V_k)$.

Mostraremos que $x_{2m_r} = y_{r+1}$. Como fizemos no início da demonstração, temos pelo Algoritmo 5.1 que

$$x_{2m_r} = x_{2m_{r-1}} - d_r, \text{ onde } d_r = \sum_{i=2m_{(r-1)}}^{2m_r-1} H_i g_i. \quad (5.24)$$

Pelo Algoritmo 3.7, temos

$$y_{r+1} = y_r - K_r^T Z_r q_r. \quad (5.25)$$

Assim, para que a igualdade $x_{2m_r} = y_{r+1}$ aconteça, devemos mostrar a existência de um vetor Z_r tal que

$$K_r^T Z_r q_r = d_r. \quad (5.26)$$

Pela característica do Algoritmo 3.7 também precisamos encontrar uma matriz V_r satisfazendo

$$V_r^T A P_r q_r = V_r^T r_r. \quad (5.27)$$

Para mostrar (5.26), usaremos o fato que o $Nuc(K_r) \perp Im(K_r^T)$ e a Observação 3.11, obtendo assim a equivalência

$$\begin{aligned} K_r^T Z_r q_r = d_r &\Leftrightarrow d_r \in Im(K_r^T) \\ &\Leftrightarrow d_r \perp \{A^T V_0, A^T V_1, \dots, A^T V_{r-1}\} \\ &\Leftrightarrow d_r \perp A^T V_k, \forall 0 \leq k \leq r-1. \end{aligned}$$

Para concluir que $d_r \perp A^T V_k, \forall 0 \leq k \leq r-1$ mostraremos

$$V_k^T Ad_r = 0, \forall 0 \leq k \leq r-1. \quad (5.28)$$

Observação 5.7. Note que a matriz V foi construída tendo as colunas como os vetores linearmente independentes do Lema 5.4 agrupados em ordem crescente de índices. Assim sendo, como estamos supondo que a quantidade de colunas que a matriz $\bar{V}_k = (V_0, V_1, \dots, V_k)$ possui é igual a m_k , temos que a matriz $\bar{V}_{r-1} = (V_0, V_1, \dots, V_{r-1})$ possui m_{r-1} colunas, sendo assim, devemos ter m_{r-1} vetores t_k (escritos em ordem crescente) ocupando as m_{r-1} colunas da matriz \bar{V}_{r-1} . Por esse motivo, a matriz \bar{V}_{r-1} contém os vetores de t_1 até $t_{2m_{(r-1)}-1}$.

Pela Observação 5.7, podemos escrever (5.28) da forma

$$\bar{V}_{r-1}^T Ad_r = \begin{bmatrix} V_0^T Ad_r \\ V_1^T Ad_r \\ \vdots \\ V_{r-1}^T Ad_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1^T Ad_r \\ t_3^T Ad_r \\ \vdots \\ t_{2m_{(r-1)}-1}^T Ad_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lembrando que $d_r = \sum_{i=2m_{(r-1)}}^{2m_r-1} H_i g_i$. A primeira linha do vetor $\bar{V}_{r-1}^T Ad_r$ fica da forma

$$t_1^T Ad_r = t_1^T A \left(\sum_{i=2m_{(r-1)}}^{2m_r-1} H_i g_i \right) = \sum_{i=2m_{(r-1)}}^{2m_r-1} t_1^T A H_i g_i = \sum_{i=2m_{(r-1)}}^{2m_r-1} t_1^T g_i = 0, \quad (5.29)$$

onde (5.29) segue de (5.12) e (5.14).

Para o caso geral, consideramos $j \leq 2m_{r-1} - 1$ e ímpar. Então, pelos mesmos argumentos feitos em (5.29) e como $j < 2m_{r-1}$ obtemos

$$t_j^T Ad_r = t_j^T A \left(\sum_{i=2m_{(r-1)}}^{2m_r-1} H_i g_i \right) = \sum_{i=2m_{(r-1)}}^{2m_r-1} t_j^T A H_i g_i = \sum_{i=2m_{(r-1)}}^{2m_r-1} t_j^T g_i = 0. \quad (5.30)$$

Portanto, mostramos que $t_j^T Ad_r = 0, \forall 1 \leq j \leq 2m_{(r-1)} - 1$

Assim, obtemos que $d_r \in \text{Im}(K_r^T)$ e concluimos que

$$\exists w_r \text{ tal que } K_r^T w_r = d_r.$$

Escolhendo Z_r , tal que $w_r \in \text{Im}(Z_r)$, temos que

$$\exists q_r \text{ tal que } Z_r q_r = w_r.$$

Tomando Z_r e q_r como acima, observamos que (5.26) é satisfeito para essas escolhas e (5.27) fica na forma

$$V_r^T A P_r q_r = V_r^T r_r \Leftrightarrow V_r^T A K_r^T w_r = V_r^T r_r \Leftrightarrow V_r^T A d_r = V_r^T r_r. \quad (5.31)$$

Mostraremos que (5.31) ocorre, para a escolha feita para a matriz V_r . Para isso, note que pela Observação 5.7, feita durante este teorema, que os vetores linearmente independentes do Lema 5.4 que compõem as colunas da matriz V_r são

$$V_r = \begin{bmatrix} t_{2m_{(r-1)}+1} & t_{2m_{(r-1)}+3} & \cdots & t_{2m_r-1} \end{bmatrix}.$$

Com essa observação, temos que $V_r^T A d_r$ pode ser escrito como o seguinte vetor

$$V_r^T A d_r = \begin{bmatrix} t_{2m_{(r-1)}+1}^T A d_r \\ t_{2m_{(r-1)}+3}^T A d_r \\ \vdots \\ t_{2m_r-1}^T A d_r \end{bmatrix}.$$

Usando, na primeira linha do vetor $V_r^T A d_r$, o fato que $d_r = \sum_{i=2m_{r-1}}^{2m_r-1} H_i g_i$, temos

$$\begin{aligned} t_{2m_{(r-1)}+1}^T A d_r &= t_{2m_{(r-1)}+1}^T A \left(\sum_{i=2m_{(r-1)}}^{2m_r-1} H_i g_i \right) \\ &= \sum_{i=2m_{(r-1)}}^{2m_r-1} t_{2m_{(r-1)}+1}^T A H_i g_i \\ &= \sum_{i=2m_{(r-1)}}^{2m_{(r-1)}+1} t_{2m_{(r-1)}+1}^T A H_i g_i + \sum_{i=2m_{(r-1)}+2}^{2m_r-1} t_{2m_{(r-1)}+1}^T A H_i g_i. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Como $2m_{(r-1)}+1 < 2m_{(r-1)}+2$ podemos usar (5.13), (5.14) e $g_{k+1} = (I - A H_k) g_k$

em (5.32), ficando com

$$\begin{aligned}
t_{2m_{(r-1)}+1}^T Ad_r &= \sum_{i=2m_{(r-1)}}^{2m_{(r-1)}+1} t_{2m_{(r-1)}+1}^T AH_i g_i + \sum_{i=2m_{(r-1)}+2}^{2m_r-1} (t_{2m_{(r-1)}+1}^T - t_{2m_{(r-1)}-1}^T) g_i \\
&= \sum_{i=2m_{r-1}}^{2m_{r-1}+1} t_{2m_{r-1}+1}^T AH_i g_i \\
&= t_{2m_{(r-1)}+1}^T AH_{2m_{(r-1)}} g_{2m_{(r-1)}} + (t_{2m_{(r-1)}+1}^T - t_{2m_{(r-1)}-1}^T) g_{2m_{(r-1)}+1} \\
&= t_{2m_{(r-1)}+1}^T AH_{2m_{(r-1)}} g_{2m_{(r-1)}} + t_{2m_{(r-1)}+1}^T (I - AH_{2m_{(r-1)}}) g_{2m_{(r-1)}} \\
&= t_{2m_{(r-1)}+1}^T AH_{2m_{(r-1)}} g_{2m_{(r-1)}} + t_{2m_{(r-1)}+1}^T g_{2m_{(r-1)}} - t_{2m_{(r-1)}+1}^T AH_{2m_{(r-1)}} g_{2m_{(r-1)}} \\
&= t_{2m_{(r-1)}+1}^T g_{2m_{(r-1)}}. \tag{5.33}
\end{aligned}$$

Com argumentos similares aos feitos nas expressões (5.18), (5.19), (5.20), (5.21) e (5.23), podemos mostrar que

$$t_k^T Ad_r = t_k^T g_{2m_{(r-1)}}, \quad \forall 2m_{(r-1)} + 1 \leq k \leq 2m_r - 1. \tag{5.34}$$

De (5.34), garantimos que a expressão

$$V_r^T Ad_r = \begin{bmatrix} t_{2m_{(r-1)}+1}^T Ad_r \\ t_{2m_{(r-1)}+3}^T Ad_r \\ \vdots \\ t_{2m_{r-1}}^T Ad_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{2m_{(r-1)}+1}^T g_{2m_{(r-1)}} \\ t_{2m_{(r-1)}+3}^T g_{2m_{(r-1)}} \\ \vdots \\ t_{2m_{r-1}}^T g_{2m_{(r-1)}} \end{bmatrix} = V_r^T g_{2m_{(r-1)}} = V_r^T r_r,$$

ocorre, lembrando que

$$g_{2m_{(r-1)}} = Ax_{2m_{(r-1)}} - b = Ay_r - b = r_r.$$

Com a última igualdade chegamos ao final da demonstração do teorema. \square

Observação 5.8. Pelo teorema anterior temos que $x_{2m_r} = y_{r+1}$, $2m_r = n$ e y_{r+1} é a solução do sistema linear. Portanto, para as hipóteses do teorema o método de Broyden encontra uma solução em $2n$ iterações.

Testes dos Algoritmos

Neste capítulo apresentaremos alguns testes envolvendo sistemas de equações não-lineares buscando mostrar a aplicação dos métodos presentes nesse texto e tornar possível a comparação entre os métodos da classe ABS e métodos mais consolidados na literatura, como os métodos de Newton e de Chebyshev.

Nas tabelas serão apresentadas na primeira coluna os métodos que foram testados, x_0 representa o ponto inicial escolhido, T indica o tempo gasto pelo método, M representa o número de iterações que o método executou, ou seja, quantas aproximações foram obtidas durante o processo e x^* representa a solução que o método obteve. Utilizamos dois critérios de parada, o método foi interrompido quando o número de iterações atingiu 100 ou quando $\|f(x_k)\| \leq 10^{-8}$.

Devido ao fato que simplificamos os nomes dos métodos nas tabelas e pelo motivo que os métodos ABS formam uma classe, precisamos especificar quais nomes representam determinados métodos e quais escolhas de parâmetros foram feitas para cada um dos métodos ABS aplicados.

A sigla NW indica o método de Newton, NWA indica o método de Newton, porém com a mudança que os sistemas lineares resolvidos a cada passo do Algoritmo 2.16 foram resolvidos utilizando o Algoritmo 3.1 com as escolhas que originam o método simétrico, NWB denota o método de Newton com a mudança que o sistema linear resolvido a cada passo do algoritmo foi resolvido utilizando o Algoritmo 3.7 fazendo as $V = I$, $W = I$ e $r = 1$. A sigla CH indica o método de Chebyshev e as siglas CHA e CHB indicam o método de Chebyshev com as mesmas modificações feitas no método de Newton, no método de final A os dois sistemas lineares em cada iteração foram resolvidos pelo método ABS linear e no de final B

pelo método ABS Linear em Blocos.

Os métodos ABS1 e ABS2 são métodos representados pelo Algoritmo 4.1 fazendo as escolhas para os parâmetros $z_i = a_i(y_i) = w_i$ e $z_i = e_i = w_i$, respectivamente. Os métodos dados pelo Algoritmo 4.6 serão representados em tabelas separadas devido ao fato que eles têm um parâmetro diferente dos métodos dados pelo Algoritmo 4.1, a escolha de uma matriz V . Para cada ponto inicial escolhido faremos três escolhas diferentes de matrizes V , buscando assim, mostrar a influência da escolha da matriz em cada método ABS em Blocos.

Lembrando do que já foi apresentado no texto, nos métodos representados pelo Algoritmo 4.6, existe uma escolha que se refere a maneira como são particionadas as colunas das matrizes, parâmetros V, W, Z , todas as implementações feitas nesse trabalho levam em conta o particionamento delas em blocos de vetores coluna de mesma quantidade, ou seja, se $r = 1$ no Algoritmo 4.6, então as matrizes V, W, Z , serão particionadas em um único bloco de vetores coluna, isto é, elas mesmas. Caso $r = 2$, então as matrizes V, W e Z serão particionadas em dois blocos de vetores coluna, o primeiro conterà a primeira metade das colunas das matrizes V, W, Z e serão denotadas por V_0, W_0, Z_0 e a outra metade das colunas das matrizes V, W, Z serão denotadas por V_1, W_1, Z_1 , e assim por diante.

A sigla ABSBL1 indica o método dado pelo Algoritmo 4.6 com as escolhas $Z_i = A_i(y_{i-1})$ e $W_i = X$, onde X é a matriz solução do sistema $V_i^T A(y_{i-1}) H_i^T X = I_{s_k \times s_k}$. A sigla ABSBL2 indica o método dado pelo Algoritmo 4.6 com as escolhas $Z_i = I_i$ e $W_i = X$. A sigla ABSBL3 corresponde ao Algoritmo 4.6 com as escolhas $Z_i = A_i(y_{i-1})$ e $W_i^T = X$, onde X é a matriz solução do sistema $V_i^T A P_i X = P_i$. O número correspondente a quantidade de partições feitas nas colunas das matrizes parâmetro, denotada por r , será colocado entre parênteses na frente de cada um dos métodos ABSBL, isto é, ABSBL1(5) indica que $r = 5$ no Algoritmo 4.6.

6.1 Funções Testadas

Legenda 6.1. Função1: $f(x) = (x_1^2 - x_2 - 1, -x_1^3 - x_2^2 + 1)$.

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -15 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Legenda 6.2. Função2: $f(x) = (3x_1^2 + x_2 - 3.5, x_1 + x_2^3 - 1.625)$.

(a)=[0.9338;0.8842].

(b)=[-0.8462;1.3520].

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -15 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Legenda 6.3. Função3: $f(x) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 9, x_1x_2x_3 - 1, x_1 + x_2 - x_3^2)$.

(a)=[2.4914;0.2427;1.6535].

(b)=[0.2427;2.4914;1.6535].

(c)=[-0.2554;2.5725;-1.5222].

(d)=[2.1403;-2.0903;-0.2235].

(e)=[-2.0903;2.1403;-0.2235].

(f)=[2.5725;-0.2554;-1.5222].

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 10 \\ 0 & 20 & 10 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Analisando as Tabelas 6.1, 6.2 e 6.3, vemos que para as funções 1, 2 e 3, a maioria dos algoritmos obteve uma solução, independentemente do ponto inicial e da escolha da matriz V . Dependendo destas escolhas, um ou outro algoritmo foi beneficiado com relação ao número de iterações e/ou tempo.

Legenda 6.4. Função4: $f(x) = (5x_1^2 - 3x_2^2 + 10x_3^3 - 9, x_1x_2x_3 - 1, 2x_1^3 + 8x_2 - 7x_3^2)$.

(a) x^* =[1.7160;-0.8065;-0.7226]

(b) x^* =[1.9688;-1.8413;-0.2758]

(c) x^* =[0.0143;16.2136;4.3046]

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 10 \\ 0 & 20 & 10 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Com relação à função 4, Tabela 6.4, houveram várias falhas na tentativa de obter uma solução. Também observamos que um mesmo algoritmo obteve soluções diferentes com pontos iniciais diferentes ou escolhas diferentes para a matriz V .

Legenda 6.5. Função de Rosenbrock Extendida - Exemplo 2 [15]

Função5: $f(x) = (10(x_2 - x_1^2), 1 - x_1, 10(x_4 - x_3^2), 1 - x_3)$.

(a) $x^* = [1.7160; -0.8065; -0.7226]$

(b) $x^* = [1.9688; -1.8413; -0.2758]$

(c) $x^* = [0.0143; 16.2136; 4.3046]$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 20 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

No caso da função 5, Tabela 6.5, observamos que o algoritmo ABSBL1(4) (ABS em blocos com um único bloco de 4 colunas) não obteve solução em nenhum caso.

Legenda 6.6. Função Singular de Powell Extendida - Exemplo 3 [15]

Função6: $f(x) = (x_1 + 10x_2, \sqrt{5}(x_3 - x_4), (x_2 - 2x_3)^2, \sqrt{10}(x_1 - x_4)^2)$.

(a) $x^* = [-0.2180; 0.0218; 0.2398; 0.2398]10^{-4}$.

(b) $x^* = [-0.3994; 0.0399; -0.1674; -0.1674]10^{-4}$.

(c) $x^* = [-0.5288; 0.0529; -0.2195; -0.2195]10^{-4}$.

(d) $x^* = [0.4408; -0.0441; 0.0268; 0.0268]10^{-4}$.

(e) $x^* = [-0.4223; 0.0422; -0.1267; -0.1267]10^{-4}$.

(f) $x^* = [-0.5309; 0.0531; -0.1937; -0.1937]10^{-4}$.

$$(g)x^*=[-0.7029;0.0703;-0.2534;-0.2534]10^{-4}.$$

$$(h)x^*=[0.3744;-0.0374;0.0378;0.0378]10^{-4}.$$

$$(i)x^*=[0.5858;-0.0586;0.1376;0.1376]10^{-4}.$$

$$(j)x^*=[0.7367;-0.0737;0.2256;0.2256]10^{-4}.$$

$$(k)x^*=[-0.4728;0.0473;-0.0531;-0.0531]10^{-4}.$$

$$(l)x^*=[0.1888;-0.0189;0.3815;0.3815]10^{-4}.$$

$$(m)x^*=[0.6790;-0.0679;0.2640;0.2640]10^{-4}.$$

$$(n)x^*=[-0.2172;0.0217;0.1240;0.1240]10^{-4}.$$

$$(o)x^*=[-0.6850;0.0685;-0.2664;-0.2664]10^{-4}.$$

$$(p)x^*=[-0.7844;0.0784;0.3318;-0.3318]10^{-4}.$$

$$(q)x^*=[0.3645;-0.0364;-0.1717;-0.1717]10^{-4}.$$

$$(r)x^*=[0.5711;-0.0571;0.2221;0.2221]10^{-4}.$$

$$(s)x^*=[0.6347;-0.0635;0.2685;0.2685]10^{-4}.$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 20 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Para a função 6, Tabela 6.6, houve uma grande variação entre ponto inicial e a solução obtida, e também algoritmos diferentes com mesmo ponto inicial, obtiveram soluções diferentes. O algoritmo ABS em blocos falhou em várias das tentativas de obter uma solução.

Legenda 6.7. Função 22 [13]

$$\text{Função7: } \begin{cases} f_1(x) = 3x_1 - 2x_1^2 - 2x_2 + 1, \\ f_i(x) = 3x_i - 2x_i^2 - x_{i-1} - 2x_{i+1} + 1, \text{ para } i = 2, \dots, n-1, \\ f_n(x) = 3x_n - 2x_n^2 - x_{n-1} + 1. \end{cases}$$

Função7(d5): $n = 5$

$$(a)x^*=[-0.5648;-0.6663;-0.6609;-0.5951;-0.4162].$$

$$(b)x^*=[1.8211;-0.0847;-0.5447;-0.5713;-0.4111].$$

$$V_1 = I_{5 \times 5}, \quad V_2 = \text{diag}([10; -15; 6; -9; 12]), \quad V_3 = \begin{cases} v_{ij} = 50, & \text{se } i = j, \\ v_{ij} = 10, & \text{se } 1 \leq i < j \leq 5, \\ v_{ij} = 0, & \text{se } 1 \leq j < i \leq 5. \end{cases}$$

Para a função 7, $n = 5$ (Tabela 6.7), os algoritmos só obtiveram solução com o ponto inicial $x_0 = [-10, -10, -10, -10, -10]$. Na verdade, para qualquer ponto inicial com todas as coordenadas negativas os algoritmos conseguem obter a solução.

Nos casos $n = 10$ (Tabela 6.8) e $n = 50$ (Tabela 6.9) ocorre o mesmo que no caso $n = 5$, com ponto inicial com coordenadas negativas os algoritmos obtêm a solução. Quando o ponto inicial utilizado foi a origem, houve sucesso em vários casos.

Função7(d10): $n = 10$

$$(1)x_0=\text{ones}(10,1).$$

$$(2)x_0=-10\text{ones}(10,1).$$

$$(3)x_0=\text{zeros}(10,1).$$

$$(a)x^*=[-0.5707;-0.6818;-0.7022;-0.7055;-0.7049;-0.7015;-0.6919;-0.6658;-0.5960;-0.4164].$$

$$V_1 = I_{10 \times 10}, \quad V_2 = \text{diag}([10; -15; 6; -9; 12; 17; 15; -13; -4; -2]),$$

$$V_3 = \begin{cases} v_{ij} = 100, & \text{se } i = j, \\ v_{ij} = 10, & \text{se } 1 \leq i < j \leq 10, \\ v_{ij} = 0, & \text{se } 1 \leq j < i \leq 10. \end{cases}$$

Função7(d50): $n = 50$

$$(1)x_0=\text{ones}(50,1).$$

$$(2)x_0=-10\text{ones}(50,1).$$

$$(3)x_0=\text{zeros}(50,1).$$

$$(a)x^*=[-0.5708;-0.6819;-0.7025;-0.7063;-0.7070;-0.7071*\text{ones}(36,1);-0.7070;-0.7068;-0.7064;-0.7051;-0.7015;-0.6919;-0.6658;-0.5960;-0.4164].$$

$$V_1 = I_{50 \times 50}, \quad V_2 = \text{diag}([v; v; v; v; v]), \quad \text{com } v = [10; -15; 6; -9; 12; 17; 15; -13; -4; -2]$$

$$V_3 = \begin{cases} v_{ij} = 500, & \text{se } i = j, \\ v_{ij} = 10, & \text{se } 1 \leq i < j \leq 50, \\ v_{ij} = 0, & \text{se } 1 \leq j < i \leq 50. \end{cases}$$

Legenda 6.8. Função8:
$$\begin{cases} f_i(x) = 1 - x_1 \dots x_{i+2}, & \text{para } i = 1, \dots, 3, \\ f_i(x) = 1 - x_{i-2} \dots x_{i+2}, & \text{para } i = 4, \dots, n-3, \\ f_i(x) = 1 - x_{i-2} \dots x_n, & \text{para } i = n-2, \dots, n. \end{cases}$$

No caso da função 8, Tabelas 6.10, 6.11 e 6.12, os algoritmos baseados no método de Newton e os algoritmos ABS em blocos, com blocos de uma única coluna, conseguiram obter a solução, em geral. Os demais algoritmos falharam, na grande maioria dos casos.

Função8(d5): $n = 5$

$$V_1 = I_{5 \times 5}, \quad V_2 = \text{diag}([10; -15; 6; -9; 12]), \quad V_3 = \begin{cases} v_{ij} = 50, & \text{se } i = j, \\ v_{ij} = 10, & \text{se } 1 \leq i < j \leq 5, \\ v_{ij} = 0, & \text{se } 1 \leq j < i \leq 5. \end{cases}$$

Função8(d10): $n = 10$

$$(1)x_0=[5\text{ones}(5,1);7\text{ones}(5,1)].$$

$$(2)x_0=[-10\text{ones}(3,1);12\text{ones}(4,1);15\text{ones}(3,1)].$$

$$(3)x_0=[20\text{ones}(3,1);-13\text{ones}(4,1);16\text{ones}(3,1)].$$

$$V_1 = I_{10 \times 10}, \quad V_2 = \text{diag}([10; -15; 6; -9; 12; 17; 15; -13; -4; -2]),$$

$$V_3 = \begin{cases} v_{ij} = 100, & \text{se } i = j, \\ v_{ij} = 10, & \text{se } 1 \leq i < j \leq 10, \\ v_{ij} = 0, & \text{se } 1 \leq j < i \leq 10. \end{cases}$$

Função8(d50): $n = 50$

$$(1)x_0 = [5\text{ones}(25,1); 7\text{ones}(25,1)].$$

$$(2)x_0 = [-10\text{ones}(15,1); 12\text{ones}(20,1); 15\text{ones}(15,1)].$$

$$(3)x_0 = [20\text{ones}(15,1); -13\text{ones}(20,1); 16\text{ones}(15,1)].$$

$$V_1 = I_{50 \times 50},$$

$$V_2 = \text{diag}([v; v; v; v; v]), \text{ com } v = [10; -15; 6; -9; 12; 17; 15; -13; -4; -2]$$

$$V_3 = \begin{cases} v_{ij} = 500, & \text{se } i = j, \\ v_{ij} = 10, & \text{se } 1 \leq i < j \leq 50, \\ v_{ij} = 0, & \text{se } 1 \leq j < i \leq 50. \end{cases}$$

Legenda 6.9. Função de Brown - Exemplo 1 [15]

$$\text{Função9: } \begin{cases} f_i(x) = \sum_{i=1}^n x_i + x_{i+1} - (n+1), & \text{para } i = 1, \dots, n-1, \\ f_n(x) = x_1 \dots x_n - 1. \end{cases}$$

Função9(d5): $n = 5$

$$(a)x^* = [8.8952; -0.5790; -0.5790; -0.5790; -0.5790].$$

$$V_1 = I_{5 \times 5}, \quad V_2 = \text{diag}([10; -15; 6; -9; 12]), \quad V_3 = \begin{cases} v_{ij} = 50, & \text{se } i = j, \\ v_{ij} = 10, & \text{se } 1 \leq i < j \leq 5, \\ v_{ij} = 0, & \text{se } 1 \leq j < i \leq 5. \end{cases}$$

Para a função 9, $n = 5$ (Tabela 6.13), a maioria dos algoritmos tiveram sucesso em obter uma solução, as falhas ocorreram no caso do algoritmo ABSBL2(5), mas nos 2 casos que este algoritmo obteve uma solução o número de iterações foi bem menor que nos demais.

Função9(d10): $n = 10$

$$(1)x_0=[5\text{ones}(5,1);7\text{ones}(5,1)].$$

$$(2)x_0=[-10\text{ones}(3,1);12\text{ones}(4,1);15\text{ones}(3,1)].$$

$$(3)x_0=[20\text{ones}(3,1);-13\text{ones}(4,1);16\text{ones}(3,1)].$$

$$V_1 = I_{10 \times 10}, \quad V_2 = \text{diag}([10; -15; 6; -9; 12; 17; 15; -13; -4; -2]),$$

$$V_3 = \begin{cases} v_{ij} = 100, & \text{se } i = j, \\ v_{ij} = 10, & \text{se } 1 \leq i < j \leq 10, \\ v_{ij} = 0, & \text{se } 1 \leq j < i \leq 10. \end{cases}$$

No caso $n = 10$, Tabela 6.14, houve grande número de sucessos na obtenção de soluções. Já para o caso $n = 50$, Tabela 6.15, na maioria dos casos os algoritmos falharam. Nenhuma das variantes de Newton obteve solução, bem como ABS em blocos com blocos de uma única coluna.

Função9(d50): $n = 50$

$$(1)x_0=[5\text{ones}(25,1);7\text{ones}(25,1)].$$

$$(2)x_0=[-10\text{ones}(15,1);12\text{ones}(20,1);15\text{ones}(15,1)].$$

$$(3)x_0=[20\text{ones}(15,1);-13\text{ones}(20,1);16\text{ones}(15,1)].$$

$$(a)x^*=[1.0403;0.9992\text{ones}(49,1)].$$

$$V_1 = I_{50 \times 50}, \quad V_2 = \text{diag}([v; v; v; v; v]), \text{ com } v = [10; -15; 6; -9; 12; 17; 15; -13; -4; -2]$$

$$V_3 = \begin{cases} v_{ij} = 500, & \text{se } i = j, \\ v_{ij} = 10, & \text{se } 1 \leq i < j \leq 50, \\ v_{ij} = 0, & \text{se } 1 \leq j < i \leq 50. \end{cases}$$

Legenda 6.10. Funções glcp: São sistemas não-lineares provenientes de problemas de complementaridade linear generalizados, onde foram desconsideradas as restrições de não negatividade das variáveis. Para mais detalhes ver [4] subseção 3.1, ou [12] subseção 5.4.1.

Para as funções glcp11, glcp13, glcp14 e glcp15, Tabelas 6.16 a 6.19, a maioria dos algoritmos obteve uma solução, as excessões ocorreram com os algoritmos ABS2 e ABSBL2.

Função glcp11: $n = 21$

(1) $x_0 = \text{ones}(21,1)$.

(2) $x_0 = [4\text{ones}(10,1); -3\text{ones}(11,1)]$.

(3) $x_0 = [-2\text{ones}(5,1); 4\text{ones}(5,1); 7\text{ones}(5,1); -3\text{ones}(6,1)]$.

(a) $x^* = [4.9190; 13.4320; 15.9627; 17.3838; 7.2063; 13.4476; 6.4079; 0.8786; 13.0718; 4.3048; -3.8049; 0.6022; 0.6981; 1.8254; -6.0914; 0; 0; 0; 0; -61.5272]$

(b) $x^* = [0.0071; 0.0131; 0.0130; 0.0137; 0.0035; 0.0141; 0.0045; 0.0028; 0.0039; 0.0048; -0.0031; -0.0007; -0.0000; 0.0025; -0.0063; 0.0000; 0.0000; -1.7417; 0.0000; -0.0000; -0.0567]10^3$

$$V_1 = I_{21 \times 21},$$

$$V_2 = \text{diag}([v; v; 17]), \text{ com } v = [10; -15; 6; -9; 12; 17; 15; -13; -4; -2]$$

$$V_3 = \begin{cases} v_{ij} = 210, & \text{se } i = j, \\ v_{ij} = 10, & \text{se } 1 \leq i < j \leq 21, \\ v_{ij} = 0, & \text{se } 1 \leq j < i \leq 21. \end{cases}$$

Função glcp13: $n = 41$

$$(1)x_0=\text{ones}(41,1).$$

$$(2)x_0=[4\text{ones}(20,1);-3\text{ones}(21,1)].$$

$$(3)x_0=[-2\text{ones}(10,1);4\text{ones}(10,1);7\text{ones}(10,1);-3\text{ones}(11,1)].$$

$$(a)x^*=[6.4685;2.1437;15.1038;-1.3550;-7.3952;6.9236;4.0149;7.2806;8.4517;1.4942;-2.7150;-0.2711; 5.3624;-1.7876;1.9580;-1.9181;9.0508;2.2913;-1.0708;-2.6480;-0.2417;0.2030;-0.3602;-0.0724;0.1379;0;-61.1104]$$

$$V_1 = I_{41 \times 41},$$

$$V_2 = \text{diag}([v; v; 17; v; v]), \text{ com } v = [10; -15; 6; -9; 12; 17; 15; -13; -4; -2]$$

$$V_3 = \begin{cases} v_{ij} = 410, & \text{se } i = j, \\ v_{ij} = 10, & \text{se } 1 \leq i < j \leq 41, \\ v_{ij} = 0, & \text{se } 1 \leq j < i \leq 41. \end{cases}$$

Função glcp14: $n = 205$

$$(1)x_0=\text{ones}(205,1).$$

$$(2)x_0=[4\text{ones}(100,1);-3\text{ones}(105,1)].$$

$$(3)x_0=[-2\text{ones}(50,1);4\text{ones}(50,1);7\text{ones}(50,1);-3\text{ones}(55,1)].$$

Obs: Para a tabela referente a esse método, como os vetores solução são inviáveis de serem escritos, quando o método converge para alguma solução escrevemos o asterisco no local correspondente a solução na tabela.

$$V_1 = I_{205 \times 205},$$

$$V_2 = \text{diag}(\underbrace{[\dots; c; \dots]}_{(5 \times)}), \text{ com } v = [10; -15; 6; -9; 12; 17; 15; -13; -4; -2] \text{ e } c = [v; v; 17; v; v],$$

$$V_3 = \begin{cases} v_{ij} = 2050, & \text{se } i = j, \\ v_{ij} = 10, & \text{se } 1 \leq i < j \leq 205, \\ v_{ij} = 0, & \text{se } 1 \leq j < i \leq 205. \end{cases}$$

Função glcp15: $n = 305$

$$(1)x_0 = \text{ones}(305,1).$$

$$(2)x_0 = [4\text{ones}(150,1); -3\text{ones}(155,1)].$$

$$(3)x_0 = [-2\text{ones}(75,1); 4\text{ones}(75,1); 7\text{ones}(75,1); -3\text{ones}(80,1)].$$

Obs: Para a tabela referente a esse método, como os vetores solução são inviáveis de serem escritos, quando o método converge para alguma solução escrevemos o asterisco no local correspondente a solução na tabela.

$$V_1 = I_{305 \times 305},$$

$$V_2 = \text{diag}(\underbrace{[\dots; c; \dots]}_{(5 \times)}; v; v; v; v; v), \text{ com } v = [10; -15; 6; -9; 12; 17; 15; -13; -4; -2]$$

e $c = [v; v; 17; v; v],$

$$V_3 = \begin{cases} v_{ij} = 3050, & \text{se } i = j, \\ v_{ij} = 10, & \text{se } 1 \leq i < j \leq 305, \\ v_{ij} = 0, & \text{se } 1 \leq j < i \leq 305. \end{cases}$$

No caso das funções glcp31 e glcp33, Tabelas 6.20 e 6.21, houveram mais sucessos do que falhas, as falhas ocorreram nos algoritmos ABS em blocos e em ABS2.

Função glcp31: $n = 21$

$$(1)x_0 = \text{ones}(21,1).$$

$$(2)x_0 = [4\text{ones}(10,1); -3\text{ones}(11,1)].$$

$$(3)x_0 = [-2\text{ones}(5,1); 4\text{ones}(5,1); 7\text{ones}(5,1); -3\text{ones}(6,1)].$$

(a) $x^*=[0.0773;0.2682;-0.2447;-2.8763;-0.3087;0.2751;-0.0583;0.3115;2.8179;-0.1978;0.0000;0.0122;0.3053;0.0913;-0.0465;0.0009;0;0;0;0;0.0086](10^3)$

(b) $x^*=[10.6836;27.9094;-9.0125;176.0644;-12.0116;26.8529;11.2793;20.6195;-101.2342;-1.9044;-20.7974;-17.8077;0;3.1681;1.7440;0;0;0.8042;0;0;8.5992]$

(c) $x^*=[13.0402;36.5615;-17.5181;66.1670;-22.7244;35.7895;8.7757;31.0909;3.9080;-8.9573;-20.0425;-16.7350;10.9846;6.3402;0;0;0;0;0;-1.7173;8.6691]$

$$V_1 = I_{21 \times 21},$$

$$V_2 = \text{diag}([v; v; 17]), \text{ com } v = [10; -15; 6; -9; 12; 17; 15; -13; -4; -2]$$

$$V_3 = \begin{cases} v_{ij} = 210, & \text{se } i = j, \\ v_{ij} = 10, & \text{se } 1 \leq i < j \leq 21, \\ v_{ij} = 0, & \text{se } 1 \leq j < i \leq 21. \end{cases}$$

Função glcp33: $n = 41$

(1) $x_0=\text{ones}(41,1)$.

(2) $x_0=[4\text{ones}(20,1);-3\text{ones}(21,1)]$.

(3) $x_0=[-2\text{ones}(10,1);4\text{ones}(10,1);7\text{ones}(10,1);-3\text{ones}(11,1)]$.

(a) $x^*=[-9.3958;1.3820;21.6985;45.6637;4.7762;11.8676;12.8342;19.4214;23.3520;28.8793;-2.1132;-4.9715;-3.3408;-4.7947;-1.0612;0;-0.8405;-1.7501;14.9660;2.3482;1.8277;-1.0652;-0.0499;1.0525;1.4554;0;0;0;0;0;-0.1517;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;6.2718]$

(b) $x^*=[-48.9316;60.1371;-13.7919;-6.5633;10.9481;35.7924;-31.7957;-3.9373;37.3980;-84.0864;7.2536;0;2.1543;-3.2037;-0.0605;14.1598;0.2885;4.4491;0;0.6942;1.2598;-0.7342;-0.0344;0.7255;1.0032;0;-167.2512;0;0;0;0;0;93.9629;0;0;0;0;0;0;-334.1164]$

(k) x^* =[-9.9628;1.4576;22.0256;13.1446;4.5641;11.5512;13.3741;19.6032;37.7040;
29.5603;-0.2963;2.0227;-3.0865;-2.8250;0.0199;1.6619;-0.7308;-0.7276;12.5220;
-1.2776;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;-0.0214;0.0065;0.0001;0.0679;0.4814;6.1376].

(1) x^* =[-9.9628;1.4576;22.0256;13.1446;4.5641;11.5512;13.3741;19.6032;37.7040;
29.5603;-0.2963;2.0227;-3.0865;-2.8250;0.0199;1.6619;-0.7308;-0.7276;12.5220;
-1.2776;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;1.0845;-0.6084;13.0540;-0.6019;-0.4251;6.1376].

$$V_1 = I_{41 \times 41},$$

$$V_2 = \text{diag}([v; v; 17; v; v]), \text{ com } v = [10; -15; 6; -9; 12; 17; 15; -13; -4; -2]$$

$$V_3 = \begin{cases} v_{ij} = 410, & \text{se } i = j, \\ v_{ij} = 10, & \text{se } 1 \leq i < j \leq 41, \\ v_{ij} = 0, & \text{se } 1 \leq j < i \leq 41. \end{cases}$$

Para a função `glcp34`, Tabela 6.23, foram poucos os casos de sucesso na obtenção de uma solução.

Função `glcp34`: $n = 205$

(1) x_0 =`ones(205,1)`.

(2) x_0 =[`4ones(100,1)`;-`3ones(105,1)`].

(3) x_0 =[-`2ones(50,1)`;`4ones(50,1)`;`7ones(50,1)`;-`3ones(55,1)`].

Obs: Para a tabela referente a esse método, como os vetores solução são inviáveis de serem escritos, quando o método converge para alguma solução escrevemos o asterisco no local correspondente a solução na tabela.

$$V_1 = I_{205 \times 205},$$

$$V_2 = \text{diag}(\underbrace{[\dots; c; \dots]}_{(5 \times)}), \text{ com } v = [10; -15; 6; -9; 12; 17; 15; -13; -4; -2]$$

e $c = [v; v; 17; v; v]$,

$$V_3 = \begin{cases} v_{ij} = 2050, & \text{se } i = j, \\ v_{ij} = 10, & \text{se } 1 \leq i < j \leq 205, \\ v_{ij} = 0, & \text{se } 1 \leq j < i \leq 205. \end{cases}$$

Para a função `glcp35`, Tabela 6.24, houveram mais casos de sucesso do que para `glcp34`.

Função `glcp35`: $n = 305$

(1) $x_0 = \text{ones}(305, 1)$.

(2) $x_0 = [4\text{ones}(150, 1); -3\text{ones}(155, 1)]$.

(3) $x_0 = [-2\text{ones}(75, 1); 4\text{ones}(75, 1); 7\text{ones}(75, 1); -3\text{ones}(80, 1)]$.

(4) $x_0 = 10\text{ones}(305, 1)$.

(5) $x_0 = [-2\text{ones}(34, 1); 4\text{ones}(34, 1); 7\text{ones}(34, 1); -3\text{ones}(34, 1); -2\text{ones}(34, 1);$
 $4\text{ones}(34, 1); 7\text{ones}(34, 1); -3\text{ones}(34, 1); -5\text{ones}(33, 1)]$.

(6) $x_0 = [-10\text{ones}(17, 1); -8\text{ones}(17, 1); -9\text{ones}(17, 1); -6\text{ones}(17, 1); 12\text{ones}(17, 1);$
 $5\text{ones}(17, 1); 10\text{ones}(17, 1); 13\text{ones}(17, 1); 15\text{ones}(17, 1); -5\text{ones}(17, 1); 8\text{ones}(17, 1);$
 $13\text{ones}(17, 1); -6\text{ones}(17, 1); -10\text{ones}(17, 1); 7\text{ones}(17, 1); 5\text{ones}(17, 1); -11\text{ones}(17, 1);$
 $-9\text{ones}(16, 1)]$.

Obs: Para a tabela referente a esse método, como os vetores solução são inviáveis de serem escritos, quando o método converge para alguma solução escrevemos o asterisco no local correspondente a solução na tabela.

$$V_1 = I_{305 \times 305},$$

$$V_2 = \text{diag}(\underbrace{[\dots; c; \dots]}_{(5 \times)}; v; v; v; v; v), \text{ com } v = [10; -15; 6; -9; 12; 17; 15; -13; -4; -2]$$

e $c = [v; v; 17; v; v]$,

$$V_3 = \begin{cases} v_{ij} = 3050, & \text{se } i = j, \\ v_{ij} = 10, & \text{se } 1 \leq i < j \leq 305, \\ v_{ij} = 0, & \text{se } 1 \leq j < i \leq 305. \end{cases}$$

Legenda 6.11. Função 5 [13]

$$\text{Função10: } \begin{cases} f_i(x) = x_i - \frac{\sum_{j=1}^n x_j^3 + 1}{2n}, & \text{para } i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

$$V_4 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Legenda 6.12. Função 9 [13]

$$\text{Função11: } \begin{cases} f_1(x) = x_1^2 - 1, \\ f_i(x) = x_{i-1}^2 + \ln(x_i) - 1, & \text{para } i = 2, \dots, n \end{cases}$$

$$V_4 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nas Tabelas 6.25 e 6.26 temos exemplos onde o algoritmo ABS em blocos obtêm uma solução enquanto os algoritmos baseados em Newton falham.

6.2 Tabelas

MÉTODOS	$x_0 = [3; 5]$			$x_0 = [-10; 25]$			$x_0 = [-17; -6]$		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
NW	0.0042	8	[1;0]	0.0045	24	[-2;3]	0.0038	11	[-2;3]
NWA	0.0074	8	[1;0]	0.0081	24	[-2;3]	0.0075	11	[-2;3]
NWB	0.0083	8	[1;0]	0.0093	24	[-2;3]	0.0080	11	[-2;3]
CH	0.0077	6	[1;0]	0.0084	7	[-2;3]	0.0086	9	[-2;3]
CHA	0.0122	6	[1;0]	0.0146	7	[-2;3]	0.0142	9	[-2;3]
CHB	0.0119	6	[1;0]	0.0131	7	[-2;3]	0.0142	9	[-2;3]
ABS1	0.0069	8	[1;0]	0.0069	9	[-2;3]	0.0076	20	[-0.0001;-1]
ABS2	0.0072	7	[1;0]	0.0069	9	[-2;3]	0.0086	21	[0.0001;-1]
	$x_0 = [3; 5]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0056	8	[1;0]	0.0058	8	[1;0]	0.0079	8	[1;0]
ABSBL2(1)	0.0050	8	[1;0]	0.0054	8	[1;0]	0.0063	8	[1;0]
ABSBL3(1)	0.0069	8	[1;0]	0.0063	8	[1;0]	0.0058	8	[1;0]
ABSBL1(2)	0.0065	8	[1;0]	0.0066	7	[1;0]	0.0076	8	[1;0]
ABSBL2(2)	0.0057	7	[1;0]	0.0057	7	[1;0]	0.0075	8	[1;0]
ABSBL3(2)	0.0078	8	[1;0]	0.0069	8	[1;0]	0.0074	8	[1;0]
	$x_0 = [-10; 25]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0068	24	[-2;3]	0.0067	24	[-2;3]	0.0079	24	[-2;3]
ABSBL2(1)	0.0058	24	[-2;3]	0.0061	24	[-2;3]	0.0073	24	[-2;3]
ABSBL3(1)	0.0083	24	[-2;3]	0.0070	24	[-2;3]	0.0071	24	[-2;3]
ABSBL1(2)	0.0071	9	[-2;3]	0.0074	9	[-2;3]	0.0068	9	[-2;3]
ABSBL2(2)	0.0059	9	[-2;3]	0.0059	9	[-2;3]	0.0062	9	[-2;3]
ABSBL3(2)	0.0084	21	[-2;3]	0.0085	21	[-2;3]	0.0102	21	[-2;3]
	$x_0 = [-17; -6]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0064	11	[-2;3]	0.0063	11	[-2;3]	0.0080	11	[-2;3]
ABSBL2(1)	0.0052	11	[-2;3]	0.0053	11	[-2;3]	0.0049	11	[-2;3]
ABSBL3(1)	0.0064	11	[-2;3]	0.0061	11	[-2;3]	0.0065	11	[-2;3]
ABSBL1(2)	0.0081	20	[-0.0001;-1]	0.0087	20	[-0.0001;-1]	0.0078	19	[-0.0001;-1]
ABSBL2(2)	0.0056	5	NaN	0.0056	5	NaN	0.0056	9	NaN
ABSBL3(2)	0.0080	18	[-0.0001;-1]	0.0081	18	[-0.0001;-1]	0.0086	18	[-0.0001;-1]

Tabela 6.1: Função1

MÉTODOS	$x_0 = [3; 5]$			$x_0 = [-10; 25]$			$x_0 = [-17; -6]$		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
NW	0.0047	9	(a)	0.0038	12	(b)	0.0039	12	(b)
NWA	0.0071	9	(a)	0.0077	12	(b)	0.0076	12	(b)
NWB	0.0080	9	(a)	0.0083	12	(b)	0.0081	12	(b)
CH	0.0086	7	(a)	0.0098	33	(a)	0.0095	37	(b)
CHA	0.0128	7	(a)	0.0178	33	(a)	0.0183	37	(b)
CHB	0.0147	7	(a)	0.0197	33	(a)	0.0187	37	(b)
ABS1	0.0068	9	(a)	0.0074	12	(b)	0.0074	10	(b)
ABS2	0.0069	9	(a)	0.0071	12	(b)	0.0067	12	(b)
	$x_0 = [3; 5]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0058	9	(a)	0.0060	9	(a)	0.0056	9	(a)
ABSBL2(1)	0.0053	9	(a)	0.0053	9	(a)	0.0049	9	(a)
ABSBL3(1)	0.0059	9	(a)	0.0057	9	(a)	0.0064	9	(a)
ABSBL1(2)	0.0066	9	(a)	0.0067	9	(a)	0.0065	9	(a)
ABSBL2(2)	0.0073	9	(a)	0.0062	9	(a)	0.0063	9	(a)
ABSBL3(2)	0.0067	9	(a)	0.0066	9	(a)	0.0076	9	(a)
	$x_0 = [-10; 25]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0069	12	(b)	0.0059	12	(b)	0.0060	12	(b)
ABSBL2(1)	0.0050	12	(b)	0.0050	12	(b)	0.0050	12	(b)
ABSBL3(1)	0.0061	12	(b)	0.0060	12	(b)	0.0065	12	(b)
ABSBL1(2)	0.0089	12	(b)	0.0073	12	(b)	0.0074	12	(b)
ABSBL2(2)	0.0058	6	NaN	0.0054	6	NaN	0.0105	6	NaN
ABSBL3(2)	0.0074	12	(b)	0.0073	12	(b)	0.0071	12	(b)
	$x_0 = [-17; -6]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0062	12	(b)	0.0062	12	(b)	0.0057	12	(b)
ABSBL2(1)	0.0062	12	(b)	0.0054	12	(b)	0.0072	12	(b)
ABSBL3(1)	0.0062	12	(b)	0.0060	12	(b)	0.0065	12	(b)
ABSBL1(2)	0.0069	10	(b)	0.0068	10	(b)	0.0077	11	(b)
ABSBL2(2)	0.0061	12	(b)	0.0063	12	(b)	0.0059	12	(b)
ABSBL3(2)	0.0068	10	(b)	0.0074	10	(b)	0.0068	11	(b)

Tabela 6.2: Função2

MÉTODOS	$x_0 = [3; 5; 4]$			$x_0 = [-10; 7; -22]$			$x_0 = [18; -13; 12]$		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
NW	0.0062	7	(a)	0.0045	9	(c)	0.0050	15	(d)
NWA	0.0079	7	(a)	0.0083	9	(c)	0.0087	15	(d)
NWB	0.0081	7	(a)	0.0089	9	(c)	0.0091	15	(d)
CH	0.0095	5	(a)	0.0111	9	(d)	0.0107	12	(b)
CHA	0.0140	5	(a)	0.0161	9	(d)	0.0160	12	(b)
CHB	0.0146	5	(a)	0.0163	9	(d)	0.0166	12	(b)
ABS1	0.0067	7	(b)	0.0078	12	(e)	0.0071	11	(d)
ABS2	0.0079	9	(a)	0.0108	43	(b)	0.0072	12	(a)
	$x_0 = [3; 5; 4]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0074	7	(a)	0.0062	7	(a)	0.0062	7	(a)
ABSBL2(1)	0.0076	7	(a)	0.0055	7	(a)	0.0052	7	(a)
ABSBL3(1)	0.0062	7	(a)	0.0065	7	(a)	0.0068	7	(a)
ABSBL1(3)	0.0075	7	(b)	0.0071	7	(b)	0.0071	9	(b)
ABSBL2(3)	0.0055	2	NaN	0.0052	2	NaN	0.0051	2	NaN
ABSBL3(3)	0.0073	6	(a)	0.0083	6	(b)	0.0071	6	(b)
	$x_0 = [-10; 7; -22]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0072	9	(c)	0.0063	9	(c)	0.0060	9	(c)
ABSBL2(1)	0.0057	9	(c)	0.0055	9	(c)	0.0056	9	(c)
ABSBL3(1)	0.0068	9	(c)	0.0072	9	(c)	0.0064	9	(c)
ABSBL1(3)	0.0083	12	(e)	0.0084	12	(e)	0.0077	11	(f)
ABSBL2(3)	0.0048	2	NaN	0.0049	2	NaN	0.0049	2	NaN
ABSBL3(3)	0.0080	9	(e)	0.0088	9	(e)	0.0086	11	(e)
	$x_0 = [18; -13; 12]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0069	15	(d)	0.0070	15	(d)	0.006	15	(d)
ABSBL2(1)	0.0061	15	(d)	0.0060	15	(d)	0.0065	15	(d)
ABSBL3(1)	0.0072	15	(d)	0.0146	15	(d)	0.0074	15	(d)
ABSBL1(3)	0.0079	9	(d)	0.0077	9	(d)	0.0077	11	(b)
ABSBL2(3)	0.0060	3	NaN	0.0061	3	NaN	0.0061	3	NaN
ABSBL3(3)	0.0083	8	(d)	0.0076	8	(d)	0.0074	8	(d)

Tabela 6.3: Função3

MÉTODOS	$x_0 = [3; 5; 4]$			$x_0 = [-10; 7; -22]$			$x_0 = [18; -13; 12]$		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
NW	0.0081	100		0.0069	72	(a)	0.0052	27	(a)
NWA	0.0157	100		0.0147	75	(a)	0.0102	27	(a)
NWB	0.0184	100	(a)	0.0175	100		0.0116	27	(a)
CH	0.0154	76	(a)	0.0108	12	(a)	0.0140	47	(a)
CHA	0.0361	100		0.0165	12	(a)	0.0244	47	(a)
CHB	0.0324	84	(b)	0.0171	12	(a)	0.0243	47	(a)
ABS1	0.0077	9	(c)	0.0109	34	(a)	0.0123	54	(c)
ABS2	0.0132	58	NaN	0.0116	47	NaN	0.0114	46	NaN
	$x_0 = [3; 5; 4]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0150	100	(a)	0.0110	52	(a)	0.0146	85	(a)
ABSBL2(1)	0.0106	61	(a)	0.0146	100		0.0135	100	
ABSBL3(1)	0.0232	100	(a)	0.0120	52	(a)	0.0149	85	(a)
ABSBL1(3)	0.0098	17	(a)	0.0121	17	(a)	0.0090	15	(a)
ABSBL2(3)	0.0051	2	NaN	0.0063	2	NaN	0.0054	2	NaN
ABSBL3(3)	0.0292	100		0.0292	100		0.0281	100	
	$x_0 = [-10; 7; -22]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0151	100		0.0154	100		0.0150	100	
ABSBL2(1)	0.0137	100		0.0127	72	(a)	0.0142	100	
ABSBL3(1)	0.0172	100		0.0158	100		0.0166	100	
ABSBL1(3)	0.0190	63	(a)	0.0181	60	(a)	0.0130	33	(c)
ABSBL2(3)	0.0064	2	NaN	0.0056	2	NaN	0.0062	2	NaN
ABSBL3(3)	0.0131	27	(b)	0.0121	27	(b)	0.0096	15	(b)
	$x_0 = [18; -13; 12]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0092	27	(a)	0.0092	27	(a)	0.0082	27	(a)
ABSBL2(1)	0.0077	27	(a)	0.0078	27	(a)	0.0083	27	(a)
ABSBL3(1)	0.0086	27	(a)	0.0100	27	(a)	0.0090	27	(a)
ABSBL1(3)	0.0207	71	(a)	0.0186	62	(c)	0.0097	15	(c)
ABSBL2(3)	0.0057	2	NaN	0.0054	2	NaN	0.0053	2	NaN
ABSBL3(3)	0.0092	11	(b)	0.0093	11	(b)	0.0290	100	

Tabela 6.4: Função4

MÉTODOS	$x_0 = [3; 5; 4; 6]$			$x_0 = [-10; 15; -8; 21]$			$x_0 = [18; -13; 11; -29]$		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
NW	0.0044	3	ones(4,1)	0.0037	3	ones(4,1)	0.0034	3	ones(4,1)
NWA	0.0075	3	ones(4,1)	0.0071	3	ones(4,1)	0.0072	3	ones(4,1)
NWB	0.0086	3	ones(4,1)	0.0079	3	ones(4,1)	0.0080	3	ones(4,1)
CH	0.0073	2	ones(4,1)	0.0082	2	ones(4,1)	0.0060	2	ones(4,1)
CHA	0.0100	2	ones(4,1)	0.0106	2	ones(4,1)	0.0102	2	ones(4,1)
CHB	0.0111	2	ones(4,1)	0.0111	2	ones(4,1)	0.0111	2	ones(4,1)
ABS1	0.0086	3	ones(4,1)	0.0074	3	ones(4,1)	0.0075	3	ones(4,1)
ABS2	0.0063	3	ones(4,1)	0.0073	3	ones(4,1)	0.0070	3	ones(4,1)
	$x_0 = [3; 5; 4; 6]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0065	3	ones(4,1)	0.0058	3	ones(4,1)	0.0056	3	ones(4,1)
ABSBL2(1)	0.0052	3	ones(4,1)	0.0051	3	ones(4,1)	0.0049	3	ones(4,1)
ABSBL3(1)	0.0071	3	ones(4,1)	0.0063	3	ones(4,1)	0.0058	3	ones(4,1)
ABSBL1(2)	0.0066	3	ones(4,1)	0.0068	3	ones(4,1)	0.0070	4	ones(4,1)
ABSBL2(2)	0.0056	3	ones(4,1)	0.0059	3	ones(4,1)	0.0056	4	ones(4,1)
ABSBL3(2)	0.0071	3	ones(4,1)	0.0069	3	ones(4,1)	0.0080	4	ones(4,1)
ABSBL1(4)	0.0092	2	NaN	0.0102	2	NaN	0.0107	2	NaN
ABSBL2(4)	0.0071	3	ones(4,1)	0.0061	3	ones(4,1)	0.0130	7	NaN
ABSBL3(4)	0.0376	100		0.0362	100		0.0365	100	
	$x_0 = [-10; 15; -8; 21]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0060	3	ones(4,1)	0.0057	3	ones(4,1)	0.0074	3	ones(4,1)
ABSBL2(1)	0.0055	3	ones(4,1)	0.0050	3	ones(4,1)	0.0064	3	ones(4,1)
ABSBL3(1)	0.0057	3	ones(4,1)	0.0061	3	ones(4,1)	0.0093	3	ones(4,1)
ABSBL1(2)	0.0081	3	ones(4,1)	0.0066	3	ones(4,1)	0.0063	4	ones(4,1)
ABSBL2(2)	0.0058	3	ones(4,1)	0.0066	3	ones(4,1)	0.0058	4	ones(4,1)
ABSBL3(2)	0.0063	3	ones(4,1)	0.0064	3	ones(4,1)	0.0117	4	ones(4,1)
ABSBL1(4)	0.0106	2	NaN	0.0121	2	NaN	0.0079	2	NaN
ABSBL2(4)	0.0066	3	ones(4,1)	0.0073	3	ones(4,1)	0.0120	2	NaN
ABSBL3(4)	0.0389	100		0.0519	100		0.0482	100	
	$x_0 = [18; -13; 11; -29]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0062	3	ones(4,1)	0.0208	3	ones(4,1)	0.0059	3	ones(4,1)
ABSBL2(1)	0.0053	3	ones(4,1)	0.0061	3	ones(4,1)	0.0052	3	ones(4,1)
ABSBL3(1)	0.0058	3	ones(4,1)	0.0084	3	ones(4,1)	0.0069	3	ones(4,1)
ABSBL1(2)	0.0068	3	ones(4,1)	0.0075	3	ones(4,1)	0.0068	5	ones(4,1)
ABSBL2(2)	0.0056	3	ones(4,1)	0.0068	3	ones(4,1)	0.0067	4	ones(4,1)
ABSBL3(2)	0.0079	3	ones(4,1)	0.0073	3	ones(4,1)	0.0067	5	ones(4,1)
ABSBL1(4)	0.0099	2	NaN	0.0108	2	NaN	0.0112	2	NaN
ABSBL2(4)	0.0069	3	ones(4,1)	0.0065	3	ones(4,1)	0.0290	75	NaN
ABSBL3(4)	0.0257	58	ones(4,1)	0.0255	58	ones(4,1)	0.0206	47	ones(4,1)

Tabela 6.5: Função5

MÉTODOS	$x_0 = [3; 5; 4; 6]$			$x_0 = [-10; 15; -8; 21]$			$x_0 = [18; -13; 11; -29]$		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
NW	0.0055	17	(a)	0.0057	16	(e)	0.1156	21	(i)
NWA	0.0100	17	(b)	0.0103	21	(e)	0.0105	21	(i)
NWB	0.0124	17	(a)	0.0114	21	(e)	0.0112	21	(i)
CH	0.0117	13	(b)	0.0103	15	(f)	0.00106	15	(j)
CHA	0.0173	13	(b)	0.0173	15	(f)	0.0170	15	(j)
CHB	0.0168	13	(c)	0.0176	15	(g)	0.0179	15	(j)
ABS1	0.0096	21	(d)	0.0098	21	(h)	0.0098	21	(k)
ABS2	0.0060	2	NaN	0.0061	2	NaN	0.0063	2	NaN
	$x_0 = [3; 5; 4; 6]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0860	17	(a)	0.0083	17	(a)	0.0086	17	(a)
ABSBL2(1)	0.0345	17	(a)	0.0550	17	(a)	0.0685	17	(a)
ABSBL3(1)	0.0088	17	(a)	0.0093	17	(a)	0.0091	17	(a)
ABSBL1(2)	0.0084	2	NaN	0.0083	2	NaN	0.5733	100	
ABSBL2(2)	0.0098	2	NaN	0.0106	2	NaN	0.0168	2	NaN
ABSBL3(2)	0.0112	18	(l)	0.0119	18	(l)	0.0109	18	(l)
ABSBL1(4)	0.0074	2	NaN	0.0075	2	NaN	0.0091	2	NaN
ABSBL2(4)	0.0111	2	NaN	0.0072	2	NaN	0.0481	2	NaN
ABSBL3(4)	0.0155	28	(m)	0.0161	28	(m)	0.0167	28	(m)
	$x_0 = [-10; 15; -8; 21]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0093	21	(e)	0.0098	21	(e)	0.0103	21	(e)
ABSBL2(1)	0.0922	21	(e)	0.1079	21	(e)	0.0079	21	(e)
ABSBL3(1)	0.0089	21	(e)	0.0158	21	(e)	0.0095	21	(e)
ABSBL1(2)	0.0807	2	NaN	0.0070	2	NaN	0.1087	100	
ABSBL2(2)	0.0139	2	NaN	0.0118	2	NaN	0.0658	2	NaN
ABSBL3(2)	0.0109	20	(n)	0.0142	20	(n)	0.0101	20	(n)
ABSBL1(4)	0.0073	2	NaN	0.0076	2	NaN	0.0085	2	NaN
ABSBL2(4)	0.0075	2	NaN	0.0080	2	NaN	0.0119	2	NaN
ABSBL3(4)	0.0173	28	(o)	0.0165	28	(o)	0.0156	27	(p)
	$x_0 = [18; -13; 11; -29]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0095	21	(i)	0.0091	21	(i)	0.0098	21	(i)
ABSBL2(1)	0.0742	21	(i)	0.0739	21	(i)	0.0078	21	(i)
ABSBL3(1)	0.0099	21	(i)	0.0107	21	(i)	0.0107	21	(i)
ABSBL1(2)	0.0085	2	NaN	0.0108	2	NaN	0.2058	100	
ABSBL2(2)	0.0096	2	NaN	0.0132	2	NaN	0.0085	2	NaN
ABSBL3(2)	0.0282	20	(q)	0.0110	20	(q)	0.0107	20	(q)
ABSBL1(4)	0.0086	2	NaN	0.0071	2	NaN	0.1065	2	NaN
ABSBL2(4)	0.0109	2	NaN	0.0083	2	NaN	0.0727	2	NaN
ABSBL3(4)	0.0178	30	(r)	0.0343	30	(r)	0.0228	29	(s)

Tabela 6.6: Função6

MÉTODOS	$x_0 = [2; 2; 4; 4; 4]$			$x_0 = [1; 1; 1; 1; 1]$			$x_0 = [-10; -10; -10; -10; -10]$		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
NW	0.0096	100		0.0092	100		0.0068	9	(a)
NWA	0.0202	100		0.0216	100		0.0102	9	(a)
NWB	0.0235	100		0.0234	100		0.0110	9	(a)
CH	0.0170	100		0.0187	100		0.00105	6	(a)
CHA	0.0475	100		0.0473	100		0.0156	6	(a)
CHB	0.0394	100		0.0405	100		0.0166	6	(a)
ABS1	0.0255	100		0.0277	100		0.0092	9	(a)
ABS2	0.0344	100		0.0322	100		0.0095	9	(a)
	$x_0 = [2; 2; 4; 4; 4]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0191	100		0.0195	100		0.0203	100	
ABSBL2(1)	0.0158	100		0.0262	100		0.0168	100	
ABSBL3(1)	0.0197	100		0.0207	100		0.0202	100	
ABSBL1(5)	0.0106	3	NaN	0.0077	2	NaN	0.0087	3	NaN
ABSBL2(5)	0.0092	3	NaN	0.0160	3	NaN	0.0104	3	NaN
ABSBL3(5)	0.0528	100		0.0536	100		0.0423	77	(b)
	$x_0 = [1; 1; 1; 1; 1]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0201	100		0.0231	100		0.0169	100	
ABSBL2(1)	0.0167	100		0.0204	100		0.0169	100	
ABSBL3(1)	0.0206	100		0.0210	100		0.0202	100	
ABSBL1(5)	0.0077	2	NaN	0.0078	2	NaN	0.0074	2	NaN
ABSBL2(5)	0.0129	2	NaN	0.0122	2	NaN	0.0106	2	NaN
ABSBL3(5)	0.0533	100		0.0533	100		0.0536	100	
	$x_0 = [-10; -10; -10; -10; -10]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0091	9	(a)	0.0089	9	(a)	0.0083	9	(a)
ABSBL2(1)	0.0080	9	(a)	0.0089	9	(a)	0.0080	9	(a)
ABSBL3(1)	0.0090	9	(a)	0.0085	9	(a)	0.0094	9	(a)
ABSBL1(5)	0.0112	9	(a)	0.0113	9	(a)	0.0112	9	(a)
ABSBL2(5)	0.0104	9	(a)	0.0118	9	(a)	0.0097	9	(a)
ABSBL3(5)	0.0122	10	(a)	0.0137	10	(a)	0.0115	9	(a)

Tabela 6.7: Função7(d5)

MÉTODOS	$x_0 = ones(10, 1)$			$x_0 = -10ones(10, 1)$			$x_0 = zeros(10, 1)$		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
NW	0.0126	100		0.0064	9	(a)	0.0080	9	(a)
NWA	0.0314	100		0.0105	9	(a)	0.0111	9	(a)
NWB	0.0256	100		0.0112	9	(a)	0.0115	9	(a)
CH	0.0213	100		0.0115	6	(a)	0.0217	100	
CHA	0.0773	100		0.0179	6	(a)	0.0770	100	
CHB	0.0461	100		0.0161	6	(a)	0.0465	100	
ABS1	0.0551	100		0.0121	9	(a)	0.0542	100	
ABS2	0.0826	100		0.0136	9	(a)	0.0136	9	(a)
	$x_0 = ones(10, 1)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.1545	100		0.0219	100		0.0296	100	
ABSBL2(1)	0.0166	100		0.0168	100		0.0198	100	
ABSBL3(1)	0.0285	100		0.0298	100		0.0256	100	
ABSBL1(2)	0.0076	2	NaN	0.0074	2	NaN	0.0095	2	NaN
ABSBL2(2)	0.0125	2	NaN	0.0069	2	NaN	0.0489	100	
ABSBL3(2)	0.0438	100		0.0429	100		0.0424	100	
ABSBL1(5)	0.0081	2	NaN	0.0080	2	NaN	0.0077	2	NaN
ABSBL2(5)	0.0107	2	NaN	0.0112	2	NaN	0.0109	2	NaN
ABSBL3(5)	0.0942	100		0.0764	100		0.0725	100	
ABSBL1(10)	0.0105	2	NaN	0.0084	2	NaN	0.0078	2	NaN
ABSBL2(10)	0.0097	2	NaN	0.0117	2	NaN	0.0122	2	NaN
ABSBL3(10)	0.1393	100		0.1351	100		0.1341	100	
	$x_0 = -10ones(10, 1)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0084	100		0.0095	9	(a)	0.0080	9	(a)
ABSBL2(1)	0.0072	9	(a)	0.0071	9	(a)	0.0070	9	(a)
ABSBL3(1)	0.0095	9	(a)	0.0102	9	(a)	0.0096	9	(a)
ABSBL1(2)	0.0100	9	(a)	0.0098	9	(a)	0.0096	9	(a)
ABSBL2(2)	0.0100	9	(a)	0.0085	9	(a)	0.0083	9	(a)
ABSBL3(2)	0.0119	9	(a)	0.0111	9	(a)	0.0101	9	(a)
ABSBL1(5)	0.0155	9	(a)	0.0146	9	(a)	0.0117	9	(a)
ABSBL2(5)	0.0133	9	(a)	0.0105	9	(a)	0.0094	8	(a)
ABSBL3(5)	0.0128	9	(a)	0.0138	9	(a)	0.0136	9	(a)
ABSBL1(10)	0.0184	9	(a)	0.0151	9	(a)	0.0155	9	(a)
ABSBL2(10)	0.0153	9	(a)	0.0134	9	(a)	0.0164	8	(a)
ABSBL3(10)	0.0197	10	(a)	0.0200	10	(a)	0.0194	9	(a)
	$x_0 = zeros(10, 1)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0111	9	(a)	0.0085	9	(a)	0.0087	9	(a)
ABSBL2(1)	0.0097	9	(a)	0.0070	9	(a)	0.0071	9	(a)
ABSBL3(1)	0.0097	9	(a)	0.0114	9	(a)	0.0085	9	(a)
ABSBL1(2)	0.0619	100		0.0409	59	NaN	0.0354	53	NaN
ABSBL2(2)	0.0105	9	(a)	0.0090	9	NaN	0.0605	100	
ABSBL3(2)	0.0409	100		0.0440	100		0.0409	100	
ABSBL1(5)	0.0231	27	NaN	0.0237	27	NaN	0.1573	100	
ABSBL2(5)	0.0116	9	(a)	0.0108	9	(a)	0.0118	7	(a)
ABSBL3(5)	0.0776	100		0.0852	100		0.0759	100	
ABSBL1(10)	0.0082	2	NaN	0.0081	2	NaN	0.0078	2	NaN
ABSBL2(10)	0.0132	9	(a)	0.0129	9	(a)	0.0115	7	(a)
ABSBL3(10)	0.1336	100		0.1396	100		0.1306	100	

Tabela 6.8: Função7(d10)

MÉTODOS	$x_0 = ones(50, 1)$			$x_0 = -10ones(50, 1)$			$x_0 = zeros(50, 1)$		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
NW	0.0451	100		0.0094	9	(a)	0.0112	12	(a)
NWA	0.2442	100		0.0285	9	(a)	0.0363	12	(a)
NWB	0.1674	100		0.0352	9	(a)	0.0250	12	(a)
CH	0.1575	100		0.0203	6	(a)	0.1575	100	
CHA	0.6822	100		0.0473	6	(a)	0.6475	100	
CHB	0.4828	100		0.0317	6	(a)	0.6178	100	
ABS1	1.6603	100		0.1435	9	(a)	1.6563	100	
ABS2	3.1672	100		0.2676	9	(a)	0.3584	12	(a)
	$x_0 = ones(50, 1)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.2051	100		0.1797	100		0.1715	100	
ABSBL2(1)	0.0796	100		0.0740	100		0.0832	100	
ABSBL3(1)	0.2410	100		0.4891	100		0.3198	100	
ABSBL1(2)	0.0193	2	NaN	0.0201	2	NaN	0.0212	2	NaN
ABSBL2(2)	0.1044	26	NaN	0.0163	2	NaN	0.2923	100	
ABSBL3(2)	0.2923	100		0.3146	100		0.2904	100	
ABSBL1(5)	0.0233	2	NaN	0.0226	2	NaN	0.0230	2	NaN
ABSBL2(5)	0.1325	9	NaN	0.0925	2	NaN	0.5134	100	
ABSBL3(5)	1.1181	100		0.7184	100		0.7632	100	
ABSBL1(10)	0.0280	2	NaN	0.0264	2	NaN	0.0275	2	NaN
ABSBL2(10)	0.2032	2	NaN	0.1213	2	NaN	0.7981	100	
ABSBL3(10)	1.5244	100		1.3365	100		1.4584	100	
	$x_0 = -10ones(50, 1)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0163	9	(a)	0.0160	9	(a)	0.0175	9	(a)
ABSBL2(1)	0.0124	9	(a)	0.0124	9	(a)	0.0131	9	(a)
ABSBL3(1)	0.0198	9	(a)	0.0264	9	(a)	0.0347	9	(a)
ABSBL1(2)	0.0238	9	(a)	0.0241	9	(a)	0.0243	9	(a)
ABSBL2(2)	0.0186	9	(a)	0.0177	9	(a)	0.0183	9	(a)
ABSBL3(2)	0.0503	9	(a)	0.0290	9	(a)	0.0266	9	(a)
ABSBL1(5)	0.0405	9	(a)	0.0400	9	(a)	0.0413	9	(a)
ABSBL2(5)	0.0271	9	(a)	0.0271	9	(a)	0.0281	9	(a)
ABSBL3(5)	0.0623	9	(a)	0.0655	9	(a)	0.0531	9	(a)
ABSBL1(10)	0.0710	9	(a)	0.0683	9	(a)	0.0695	9	(a)
ABSBL2(10)	0.0433	9	(a)	0.0440	9	(a)	0.0459	9	(a)
ABSBL3(10)	0.1194	9	(a)	0.1041	9	(a)	0.1062	9	(a)
	$x_0 = zeros(50, 1)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0191	12	(a)	0.0189	12	(a)	0.0193	12	(a)
ABSBL2(1)	0.0143	12	(a)	0.0140	12	(a)	0.0151	12	(a)
ABSBL3(1)	0.0327	12	(a)	0.0467	12	(a)	0.0228	12	(a)
ABSBL1(2)	1.0265	100		0.8413	100		0.4954	100	NaN
ABSBL2(2)	0.0209	12	(a)	0.0213	12	(a)	0.3990	100	
ABSBL3(2)	0.2916	100		0.2902	100		0.2767	100	
ABSBL1(5)	1.3609	100		1.1460	100		0.7600	100	
ABSBL2(5)	0.0365	12	(a)	0.0341	12	(a)	0.8686	100	(a)
ABSBL3(5)	0.6149	100		0.6159	100		0.7029	100	
ABSBL1(10)	1.2223	100		2.3543	100		8.5473	100	NaN
ABSBL2(10)	0.0575	12	(a)	0.0560	12	(a)	0.0400	8	(a)
ABSBL3(10)	1.2099	100		1.3912	100		1.3790	100	

Tabela 6.9: Função7(d50)

MÉTODOS	$x_0 = [2; 2; 4; 4; 4]$			$x_0 = [-10; -10; 15; 15; 15]$			$x_0 = [20; 20; 20; -13; -13]$		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
NW	0.0128	9	ones(5,1)	0.0149	29	ones(5,1)	0.0135	19	ones(5,1)
NWA	0.0163	9	ones(5,1)	0.0191	29	ones(5,1)	0.0178	19	ones(5,1)
NWB	0.0181	9	ones(5,1)	0.0190	29	ones(5,1)	0.0181	19	ones(5,1)
CH	0.257	7	ones(5,1)	0.0528	100		0.0581	100	
CHA	0.0307	7	ones(5,1)	0.0662	100		0.0400	35	NaN
CHB	0.0306	7	ones(5,1)	0.0658	18	NaN	0.0625	17	NaN
ABS1	0.0931	8	ones(5,1)	0.0203	30	NaN	0.0199	20	NaN
ABS2	0.0138	2	NaN	0.0139	2	NaN	0.0135	2	NaN
	$x_0 = [2; 2; 4; 4; 4]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0139	9	ones(5,1)	0.0146	9	ones(5,1)	0.0145	9	ones(5,1)
ABSBL2(1)	0.0136	9	ones(5,1)	0.0136	9	ones(5,1)	0.0136	9	ones(5,1)
ABSBL3(1)	0.0157	9	ones(5,1)	0.0171	9	ones(5,1)	0.0143	9	ones(5,1)
ABSBL1(5)	0.0149	3	NaN	0.0136	2	NaN	0.0135	2	NaN
ABSBL2(5)	0.0135	2	NaN	0.0128	2	NaN	0.0134	2	NaN
ABSBL3(5)	0.0454	65	NaN	0.0556	86	NaN	0.0601	100	
	$x_0 = [-10; -10; 15; 15; 15]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0171	29	ones(5,1)	0.0168	30	ones(5,1)	0.0181	43	ones(5,1)
ABSBL2(1)	0.0159	29	ones(5,1)	0.0155	29	ones(5,1)	0.0270	29	ones(5,1)
ABSBL3(1)	0.0169	29	ones(5,1)	0.0180	30	ones(5,1)	0.0202	43	ones(5,1)
ABSBL1(5)	0.0139	2	NaN	0.0151	4	NaN	0.0145	2	NaN
ABSBL2(5)	0.0144	3	NaN	0.0134	2	NaN	0.0134	2	NaN
ABSBL3(5)	0.0605	100		0.0597	100		0.0593	100	
	$x_0 = [20; 20; 20; -13; -13]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0165	19	ones(5,1)	0.0180	19	ones(5,1)	0.0153	19	ones(5,1)
ABSBL2(1)	0.0157	19	ones(5,1)	0.0147	19	ones(5,1)	0.0145	19	ones(5,1)
ABSBL3(1)	0.0167	19	ones(5,1)	0.0179	19	ones(5,1)	0.0165	19	ones(5,1)
ABSBL1(5)	0.0157	4	NaN	0.0159	6	NaN	0.0152	5	NaN
ABSBL2(5)	0.0138	2	NaN	0.0132	2	NaN	0.0221	2	NaN
ABSBL3(5)	0.0657	100		0.0327	40	NaN	0.0626	100	

Tabela 6.10: Função8(d5)

MÉTODOS	$x_0 = (1)$			$x_0 = (2)$			$x_0 = (3)$		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
NW	0.0141	25	ones(10,1)	0.0141	26	ones(10,1)	0.0153	32	ones(10,1)
NWA	0.0203	25	ones(10,1)	0.0213	26	ones(10,1)	0.0227	32	ones(10,1)
NWB	0.0203	25	ones(10,1)	0.0217	26	ones(10,1)	0.0181	38	ones(10,1)
CH	0.283	9	ones(10,1)	0.0583	100		0.0305	27	NaN
CHA	0.0333	9	ones(10,1)	0.0732	71	NaN	0.0576	47	ones(10,1)
CHB	0.0324	9	ones(10,1)	0.0787	19	NaN	0.0901	43	NaN
ABS1	0.0187	7	NaN	0.0211	12	NaN	0.0135	6	NaN
ABS2	0.0144	2	NaN	0.0142	2	NaN	0.0142	2	NaN
	$x_0 = (1)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0169	25	ones(10,1)	0.0171	25	ones(10,1)	0.0178	25	ones(10,1)
ABSBL2(1)	0.0161	25	ones(10,1)	0.0166	25	ones(10,1)	0.0172	25	ones(10,1)
ABSBL3(1)	0.0212	25	ones(10,1)	0.0180	25	ones(10,1)	0.0186	25	ones(10,1)
ABSBL1(2)	0.0490	16	NaN	0.0819	45	NaN	0.1663	73	NaN
ABSBL2(2)	0.0282	6	NaN	0.0433	17	NaN	0.0174	8	NaN
ABSBL3(2)	0.1606	38	NaN	0.0712	43	NaN	0.0332	13	NaN
ABSBL1(5)	0.0284	4	NaN	0.0140	2	NaN	0.0242	3	NaN
ABSBL2(5)	0.0285	2	NaN	0.0254	2	NaN	0.0245	2	NaN
ABSBL3(5)	0.0331	7	NaN	0.0440	9	NaN	0.0537	22	NaN
ABSBL1(10)	0.0160	2	NaN	0.228	6	NaN	0.210	6	NaN
ABSBL2(10)	0.0252	2	NaN	0.0266	2	NaN	0.0241	2	NaN
ABSBL3(10)	0.0988	38	NaN	0.0751	48	NaN	0.1419	100	
	$x_0 = (2)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0223	26	ones(10,1)	0.0275	26	ones(10,1)	0.0269	30	ones(10,1)
ABSBL2(1)	0.0191	26	ones(10,1)	0.0175	26	ones(10,1)	0.0159	26	ones(10,1)
ABSBL3(1)	0.0227	26	ones(10,1)	0.0338	26	ones(10,1)	0.0241	30	ones(10,1)
ABSBL1(2)	0.1522	55	NaN	0.1165	37	NaN	0.1168	52	NaN
ABSBL2(2)	0.0872	32	NaN	0.0403	12	NaN	0.0975	27	NaN
ABSBL3(2)	0.0221	10	NaN	0.0274	12	NaN	0.0397	17	NaN
ABSBL1(5)	0.0409	8	NaN	0.0412	11	NaN	0.0139	2	NaN
ABSBL2(5)	0.0247	2	NaN	0.0252	2	NaN	0.0236	2	NaN
ABSBL3(5)	0.0247	7	NaN	0.0273	9	NaN	0.0265	8	NaN
ABSBL1(10)	0.0175	3	NaN	0.0144	2	NaN	0.0169	3	NaN
ABSBL2(10)	0.0243	2	NaN	0.0245	2	NaN	0.0241	2	NaN
ABSBL3(10)	0.0366	18	NaN	0.0296	11	NaN	0.1452	100	
	$x_0 = (3)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0460	38	ones(10,1)	0.1674	82	ones(10,1)	0.0419	22	NaN
ABSBL2(1)	0.0187	32	ones(10,1)	0.0195	32	ones(10,1)	0.0187	32	ones(10,1)
ABSBL3(1)	0.0448	38	ones(10,1)	0.0908	82	NaN	0.0361	22	NaN
ABSBL1(2)	0.0580	24	NaN	0.0641	19	NaN	0.0789	29	NaN
ABSBL2(2)	0.0441	13	NaN	0.0434	14	NaN	0.1009	41	NaN
ABSBL3(2)	0.0430	14	NaN	0.0369	16	NaN	0.0864	48	NaN
ABSBL1(5)	0.0278	5	NaN	0.0281	5	NaN	0.0452	16	NaN
ABSBL2(5)	0.0274	2	NaN	0.0264	2	NaN	0.0276	2	NaN
ABSBL3(5)	0.0303	10	NaN	0.0302	9	NaN	0.0310	15	NaN
ABSBL1(10)	0.0185	4	NaN	0.0247	8	NaN	0.0202	6	NaN
ABSBL2(10)	0.0248	2	NaN	0.0261	2	NaN	0.0251	2	NaN
ABSBL3(10)	0.0677	40	NaN	0.0855	54	NaN	0.1430	100	

Tabela 6.11: Função8(d10)

MÉTODOS	$x_0 = (1)$			$x_0 = (2)$			$x_0 = (3)$		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
NW	0.0254	25	ones(50,1)	0.0305	39	ones(50,1)	0.0738	40	ones(50,1)
NWA	0.0724	25	ones(50,1)	0.1058	39	ones(50,1)	0.2552	100	
NWB	0.0400	25	ones(50,1)	0.0605	38	ones(50,1)	0.7218	49	NaN
CH	0.0439	9	ones(50,1)	0.6453	100	NaN	0.8495	100	
CHA	0.0811	9	ones(50,1)	0.5652	75	NaN	0.1770	16	NaN
CHB	0.0531	9	ones(50,1)	0.4583	14	NaN	0.4889	17	NaN
ABS1	0.1749	9	NaN	0.1493	7	NaN	0.1913	9	NaN
ABS2	0.0927	2	NaN	0.0823	2	NaN	0.0820	2	NaN
	$x_0 = (1)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0426	25	ones(50,1)	0.8502	25	ones(50,1)	0.0410	25	ones(50,1)
ABSBL2(1)	0.0329	25	ones(50,1)	0.1755	25	ones(50,1)	0.0330	25	ones(50,1)
ABSBL3(1)	0.0627	25	ones(50,1)	0.0641	25	ones(50,1)	0.0553	25	ones(50,1)
ABSBL1(2)	0.5463	20	NaN	3.3983	63	NaN	1.5526	52	NaN
ABSBL2(2)	4.8584	100		0.3577	10	NaN	5.3441	100	
ABSBL3(2)	1.4721	30	NaN	1.3226	27	NaN	1.2863	22	NaN
ABSBL1(5)	0.5917	13	NaN	1.0754	18	NaN	1.6158	18	NaN
ABSBL2(5)	0.2420	4	NaN	0.0306	2	NaN	5.5584	40	NaN
ABSBL3(5)	0.4130	20	NaN	0.5326	19	NaN	0.8895	18	NaN
ABSBL1(10)	0.3289	7	NaN	0.6052	11	NaN	0.0638	3	NaN
ABSBL2(10)	0.0817	2	NaN	0.1357	2	NaN	1.6704	11	NaN
ABSBL3(10)	0.8753	16	NaN	0.3027	13	NaN	0.2997	13	NaN
	$x_0 = (2)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0565	38	ones(50,1)	0.0794	39	ones(50,1)	0.0739	39	ones(50,1)
ABSBL2(1)	0.0438	39	ones(50,1)	0.0445	39	ones(50,1)	0.0447	39	ones(50,1)
ABSBL3(1)	0.0851	38	ones(50,1)	0.1305	39	ones(50,1)	0.1127	39	ones(50,1)
ABSBL1(2)	0.9919	28	NaN	2.5398	42	NaN	0.9279	29	NaN
ABSBL2(2)	3.8185	100		0.7986	20	NaN	6.7017	100	
ABSBL3(2)	1.9367	46	NaN	0.6115	23	NaN	1.1335	29	NaN
ABSBL1(5)	1.6957	23	NaN	2.2142	22	NaN	0.4550	11	NaN
ABSBL2(5)	0.0939	2	NaN	0.1752	3	NaN	1.4780	14	NaN
ABSBL3(5)	0.5562	16	NaN	0.4451	16	NaN	0.7070	11	NaN
ABSBL1(10)	0.3930	7	NaN	1.0700	12	NaN	0.1867	4	NaN
ABSBL2(10)	0.0801	2	NaN	0.4436	4	NaN	0.9738	9	NaN
ABSBL3(10)	0.3573	15	NaN	0.7063	13	NaN	0.3530	9	NaN
	$x_0 = (3)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.9074	49	NaN	1.1967	47	NaN	1.5109	56	NaN
ABSBL2(1)	0.2373	41	ones(50,1)	0.1955	41	ones(50,1)	0.3632	43	ones(50,1)
ABSBL3(1)	1.4151	49	NaN	0.6962	47	NaN	0.8863	56	NaN
ABSBL1(2)	1.2775	30	NaN	0.3130	13	NaN	0.8693	16	NaN
ABSBL2(2)	0.4546	22	NaN	4.9254	89	NaN	3.3939	58	NaN
ABSBL3(2)	0.5478	30	NaN	1.5253	35	NaN	1.0028	23	NaN
ABSBL1(5)	0.5646	13	NaN	1.5030	22	NaN	0.6980	11	NaN
ABSBL2(5)	0.3234	5	NaN	0.2006	4	NaN	1.0307	12	NaN
ABSBL3(5)	0.8078	20	NaN	0.9398	22	NaN	0.5462	13	NaN
ABSBL1(10)	0.4417	5	NaN	0.4397	6	NaN	0.7102	8	NaN
ABSBL2(10)	0.1351	2	NaN	0.1081	2	NaN	0.4784	4	NaN
ABSBL3(10)	1.2504	15	NaN	0.3377	13	NaN	1.4068	16	NaN

Tabela 6.12: Função8(d50)

MÉTODOS	$x_0 = [2; 2; 4; 4; 4]$			$x_0 = [-10; -10; 15; 15; 15]$			$x_0 = [0.8; 0.8; 0.8; 0.8; 0.8]$		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
NW	0.0059	7	(a)	0.0110	19	ones(5,1)	0.0067	12	ones(5,1)
NWA	0.0092	7	(a)	0.0118	19	ones(5,1)	0.0103	12	ones(5,1)
NWB	0.0101	7	(a)	0.0134	19	ones(5,1)	0.0111	12	ones(5,1)
CH	0.0161	13	(a)	0.0171	16	ones(5,1)	0.0149	11	(a)
CHA	0.0236	13	(a)	0.0254	16	ones(5,1)	0.0220	11	(a)
CHB	0.0240	13	(a)	0.0240	16	ones(5,1)	0.0218	11	(a)
ABS1	0.0095	7	ones(5,1)	0.141	15	ones(5,1)	0.0151	4	ones(5,1)
ABS2	0.0166	15	ones(5,1)	0.0209	21	ones(5,1)	0.0097	6	(b)
	$x_0 = [2; 2; 4; 4; 4]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0083	7	(a)	0.0085	7	(a)	0.0080	7	(a)
ABSBL2(1)	0.0077	7	(a)	0.0072	7	(a)	0.0073	7	(a)
ABSBL3(1)	0.0080	7	(a)	0.0094	7	(a)	0.0080	7	(a)
ABSBL1(5)	0.0141	8	ones(5,1)	0.0126	8	ones(5,1)	0.0130	8	ones(5,1)
ABSBL2(5)	0.0184	2	NaN	0.0083	2	(a)	0.0086	2	(a)
ABSBL3(5)	0.0140	7	ones(5,1)	0.0150	7	ones(5,1)	0.0144	7	ones(5,1)
	$x_0 = [-10; -10; 15; 15; 15]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0121	19	ones(5,1)	0.0116	19	ones(5,1)	0.0113	19	ones(5,1)
ABSBL2(1)	0.0092	19	ones(5,1)	0.0092	19	ones(5,1)	0.0091	19	ones(5,1)
ABSBL3(1)	0.0124	19	ones(5,1)	0.0116	19	ones(5,1)	0.0132	19	ones(5,1)
ABSBL1(5)	0.0200	16	ones(5,1)	0.0198	16	ones(5,1)	0.0241	16	ones(5,1)
ABSBL2(5)	0.0100	2	NaN	0.0087	2	NaN	0.0103	2	NaN
ABSBL3(5)	0.0220	15	ones(5,1)	0.0223	15	ones(5,1)	0.0214	15	ones(5,1)
	$x_0 = [0.8; 0.8; 0.8; 0.8; 0.8]$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0121	12	ones(5,1)	0.0099	12	ones(5,1)	0.0106	12	ones(5,1)
ABSBL2(1)	0.0088	12	ones(5,1)	0.0074	12	ones(5,1)	0.0081	12	ones(5,1)
ABSBL3(1)	0.0123	12	ones(5,1)	0.0105	12	ones(5,1)	0.0115	12	ones(5,1)
ABSBL1(5)	0.0137	3	ones(5,1)	0.0085	3	ones(5,1)	0.0205	3	ones(5,1)
ABSBL2(5)	0.0099	2	NaN	0.0095	2	NaN	0.0095	2	NaN
ABSBL3(5)	0.0116	4	ones(5,1)	0.0107	4	ones(5,1)	0.0110	4	ones(5,1)

Tabela 6.13: Função9(d5)

MÉTODOS	$x_0 = (1)$			$x_0 = (2)$			$x_0 = (3)$		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
NW	0.0181	74	ones(10,1)	0.0110	30	ones(10,1)	0.0244	91	ones(10,1)
NWA	0.0326	74	ones(10,1)	0.0177	30	ones(10,1)	0.0380	91	ones(10,1)
NWB	0.0626	74	ones(10,1)	0.0258	30	ones(10,1)	0.0479	91	ones(10,1)
CH	0.1083	63	ones(10,1)	0.0463	28	ones(10,1)	0.1539	91	ones(10,1)
CHA	0.1312	63	ones(10,1)	0.0638	28	ones(10,1)	0.1732	91	ones(10,1)
CHB	0.2782	63	ones(10,1)	0.1539	28	ones(10,1)	0.4880	91	ones(10,1)
ABS1	0.0158	7	ones(10,1)	0.0337	19	ones(10,1)	0.0243	13	ones(10,1)
ABS2	0.0690	29	ones(10,1)	0.0843	36	ones(10,1)	0.0865	37	ones(10,1)
	$x_0 = (1)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0555	74	ones(10,1)	0.0834	74	ones(10,1)	0.0861	74	ones(10,1)
ABSBL2(1)	0.0244	74	ones(10,1)	0.0255	74	ones(10,1)	0.0248	74	ones(10,1)
ABSBL3(1)	0.0877	74	ones(10,1)	0.0796	74	ones(10,1)	0.0916	74	ones(10,1)
ABSBL1(2)	0.1447	83	ones(10,1)	0.1680	83	ones(10,1)	0.1681	83	ones(10,1)
ABSBL2(2)	0.0428	19	NaN	0.1929	100		0.2507	100	
ABSBL3(2)	0.1650	83	ones(10,1)	0.1469	83	ones(10,1)	0.1513	83	ones(10,1)
ABSBL1(5)	0.0205	10	ones(10,1)	0.0188	10	ones(10,1)	0.0183	10	ones(10,1)
ABSBL2(5)	0.1618	28	NaN	0.3341	60	NaN	0.0203	2	NaN
ABSBL3(5)	0.0203	8	ones(10,1)	0.0197	8	ones(10,1)	0.0221	8	ones(10,1)
ABSBL1(10)	0.0287	10	ones(10,1)	0.0290	10	ones(10,1)	0.0287	10	ones(10,1)
ABSBL2(10)	0.0147	2	NaN	0.0293	2	NaN	0.0314	2	NaN
ABSBL3(10)	0.0272	7	ones(10,1)	0.0292	7	ones(10,1)	0.0264	7	ones(10,1)
	$x_0 = (2)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0273	30	ones(10,1)	0.0285	30	ones(10,1)	0.0283	30	ones(10,1)
ABSBL2(1)	0.0128	30	ones(10,1)	0.0130	30	ones(10,1)	0.0137	30	ones(10,1)
ABSBL3(1)	0.0350	30	ones(10,1)	0.0301	30	ones(10,1)	0.0525	30	ones(10,1)
ABSBL1(2)	0.1191	81	ones(10,1)	0.1364	81	ones(10,1)	0.1349	81	ones(10,1)
ABSBL2(2)	0.0733	20	NaN	0.2198	100		0.2240	100	
ABSBL3(2)	0.1205	81	ones(10,1)	0.1432	81	ones(10,1)	0.1373	81	ones(10,1)
ABSBL1(5)	0.0334	21	ones(10,1)	0.0326	21	ones(10,1)	0.0324	21	ones(10,1)
ABSBL2(5)	0.2011	26	NaN	0.3947	59	NaN	0.0183	2	NaN
ABSBL3(5)	0.0380	16	ones(10,1)	0.0325	16	ones(10,1)	0.0351	16	ones(10,1)
ABSBL1(10)	0.0552	21	ones(10,1)	0.0554	21	ones(10,1)	0.0549	21	ones(10,1)
ABSBL2(10)	0.0323	2	NaN	0.0334	2	NaN	0.0324	2	NaN
ABSBL3(10)	0.0684	19	ones(10,1)	0.0697	19	ones(10,1)	0.0731	19	ones(10,1)
	$x_0 = (3)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.1397	91	ones(10,1)	0.1289	91	ones(10,1)	0.1275	91	ones(10,1)
ABSBL2(1)	0.0735	91	ones(10,1)	0.0759	91	ones(10,1)	0.0750	91	ones(10,1)
ABSBL3(1)	0.1253	91	ones(10,1)	0.1365	91	ones(10,1)	0.1057	91	ones(10,1)
ABSBL1(2)	0.0348	46	ones(10,1)	0.0353	46	ones(10,1)	0.0351	46	ones(10,1)
ABSBL2(2)	0.0625	19	NaN	0.2596	100		0.2469	100	
ABSBL3(2)	0.0711	46	ones(10,1)	0.0513	46	ones(10,1)	0.0463	46	ones(10,1)
ABSBL1(5)	0.0413	27	ones(10,1)	0.0404	27	ones(10,1)	0.0397	27	ones(10,1)
ABSBL2(5)	0.2224	30	NaN	0.3851	60	NaN	0.0187	2	NaN
ABSBL3(5)	0.0651	34	ones(10,1)	0.0638	34	ones(10,1)	0.0627	34	ones(10,1)
ABSBL1(10)	0.0789	31	ones(10,1)	0.0798	31	ones(10,1)	0.0785	31	ones(10,1)
ABSBL2(10)	0.0326	2	NaN	0.0328	2	NaN	0.0218	2	NaN
ABSBL3(10)	0.0467	13	ones(10,1)	0.0467	13	ones(10,1)	0.0470	13	ones(10,1)

Tabela 6.14: Função9(d10)

MÉTODOS	$x_0 = (1)$			$x_0 = (2)$			$x_0 = (3)$		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
NW	0.4197	100		0.4378	100		0.4822	100	
NWA	0.3126	100		0.3162	100		0.3126	100	
NWB	1.8122	100		2.1006	100		1.9766	100	
CH	4.1223	100	NaN	4.1495	100		3.9480	100	
CHA	3.8475	100		3.7779	100		3.7804	100	
CHB	0.1899	10	NaN	8.8797	100		9.1816	100	
ABS1	0.2702	3	ones(50,1)	0.7371	26	ones(50,1)	0.0791	3	NaN
ABS2	5.4061	100		5.5191	100		7.2793	100	
	$x_0 = (1)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	3.3209	100		3.1379	100		3.0034	100	
ABSBL2(1)	3.0498	100		2.7274	100		2.9192	100	
ABSBL3(1)	3.3953	100		3.0041	100		3.1199	100	
ABSBL1(2)	0.1013	3	NaN	0.0975	3	NaN	0.0970	3	NaN
ABSBL2(2)	1.0033	33	NaN	1.0470	36	NaN	0.6452	21	NaN
ABSBL3(2)	0.1211	3	NaN	0.1206	3	NaN	0.1146	3	NaN
ABSBL1(5)	0.0816	12	ones(50,1)	0.0752	12	ones(50,1)	0.0772	12	ones(50,1)
ABSBL2(5)	0.6491	9	NaN	0.6765	9	NaN	0.4582	7	NaN
ABSBL3(5)	0.1798	4	NaN	0.1485	4	NaN	0.1189	4	NaN
ABSBL1(10)	0.1372	12	ones(50,1)	0.1420	12	ones(50,1)	0.1527	12	ones(50,1)
ABSBL2(10)	0.7467	6	NaN	1.8563	12	NaN	1.2311	8	NaN
ABSBL3(10)	0.1686	9	(a)	0.1573	9	(a)	0.1551	9	(a)
	$x_0 = (2)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	2.6195	100		2.8290	100		2.7069	100	
ABSBL2(1)	2.1677	100		2.2126	100		2.2558	100	
ABSBL3(1)	3.0632	100		1.8530	100		2.9806	100	
ABSBL1(2)	3.5056	100		3.4580	100		3.4828	100	
ABSBL2(2)	1.0136	34	NaN	1.1612	36	NaN	0.8880	28	NaN
ABSBL3(2)	3.1105	100		3.2955	100		3.4815	100	
ABSBL1(5)	0.1903	28	ones(50,1)	0.1880	28	ones(50,1)	0.1895	28	ones(50,1)
ABSBL2(5)	0.4245	7	NaN	0.5803	8	NaN	0.5973	7	NaN
ABSBL3(5)	0.0856	4	NaN	0.0734	4	NaN	0.0629	4	NaN
ABSBL1(10)	0.4431	33	ones(50,1)	0.4470	33	ones(50,1)	0.4465	33	ones(50,1)
ABSBL2(10)	1.0052	7	NaN	1.7566	11	NaN	1.0055	8	NaN
ABSBL3(10)	0.0876	3	NaN	0.0870	3	NaN	0.0924	3	NaN
	$x_0 = (3)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	3.3425	100		2.6759	100		3.3444	100	
ABSBL2(1)	3.0769	100		2.9538	100		3.1879	100	
ABSBL3(1)	2.9041	100		3.1439	100		2.7491	100	
ABSBL1(2)	0.2652	36	ones(50,1)	0.2802	36	ones(50,1)	0.2768	36	ones(50,1)
ABSBL2(2)	1.0690	32	NaN	1.1138	34	NaN	0.8451	26	NaN
ABSBL3(2)	0.4125	36	ones(50,1)	0.4301	36	ones(50,1)	0.4435	36	ones(50,1)
ABSBL1(5)	2.9931	100		3.1189	100		3.3926	100	
ABSBL2(5)	0.7683	9	NaN	0.6346	8	NaN	0.5059	6	NaN
ABSBL3(5)	3.1023	100		3.0645	100		2.8892	100	
ABSBL1(10)	0.3190	27	ones(50,1)	0.3204	27	ones(50,1)	0.3197	27	ones(50,1)
ABSBL2(10)	0.8232	8	NaN	1.6314	11	NaN	0.5131	8	NaN
ABSBL3(10)	0.3367	3	NaN	0.4316	3	NaN	0.3694	3	NaN

Tabela 6.15: Função9(d50)

MÉTODOS	$x_0 = (1)$			$x_0 = (2)$			$x_0 = (3)$		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
NW	0.0175	5	(a)	0.0165	5	(a)	0.0185	5	(a)
NWA	0.0219	5	(a)	0.0214	5	(a)	0.0208	5	(a)
NWB	0.0278	5	(a)	0.0326	5	(a)	0.0204	5	(a)
CH	0.0161	4	(a)	0.0163	4	(a)	0.0171	5	(a)
CHA	0.0216	4	(a)	0.0210	4	(a)	0.0216	5	(a)
CHB	0.0277	4	(a)	0.0291	4	(a)	0.0313	5	(a)
ABS1	0.1018	4	(a)	0.0948	4	(a)	0.1085	4	(a)
ABS2	3.8586	100		4.3446	100		4.6645	100	
	$x_0 = (1)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0301	5	(a)	0.0693	5	(a)	0.0200	5	(a)
ABSBL2(1)	0.0171	5	(a)	0.1790	5	(a)	0.0176	5	(a)
ABSBL3(1)	0.3871	5	(a)	0.0230	5	(a)	0.0661	5	(a)
ABSBL1(3)	0.0334	5	(a)	0.1056	5	(a)	0.0397	5	(a)
ABSBL2(3)	0.1105	2	NaN	0.1578	2	NaN	0.4019	10	NaN
ABSBL3(3)	0.0357	5	(a)	0.0385	5	(a)	0.0536	5	(a)
ABSBL1(7)	0.1461	5	(a)	0.1538	5	(a)	0.0583	5	(a)
ABSBL2(7)	0.0679	2	NaN	0.1064	2	NaN	0.3475	7	NaN
ABSBL3(7)	0.0675	5	(a)	0.0864	5	(a)	0.0821	5	(a)
ABSBL1(21)	0.1783	4	(a)	0.1081	4	(a)	0.1038	4	(a)
ABSBL2(21)	0.3800	2	NaN	0.3835	2	NaN	0.2101	2	NaN
ABSBL3(21)	0.1364	4	(a)	0.1510	4	(a)	0.1421	4	(a)
	$x_0 = (2)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0188	5	(a)	0.0200	5	(a)	0.0196	5	(a)
ABSBL2(1)	0.0162	5	(a)	0.4111	5	(a)	0.0164	5	(a)
ABSBL3(1)	0.0226	5	(a)	0.0205	5	(a)	0.0214	5	(a)
ABSBL1(3)	0.0579	10	(b)	0.3783	10	(b)	0.0558	10	(b)
ABSBL2(3)	0.0604	2	NaN	0.0254	2	NaN	0.3737	10	NaN
ABSBL3(3)	0.0455	5	(a)	0.0380	5	(a)	0.0375	5	(a)
ABSBL1(7)	0.0935	5	(a)	0.0560	5	(a)	0.2623	5	(a)
ABSBL2(7)	0.0599	2	NaN	0.1612	2	NaN	1.3043	7	NaN
ABSBL3(7)	0.0696	5	(a)	0.0994	5	(a)	0.0665	5	(a)
ABSBL1(21)	0.1569	4	(a)	0.1232	4	(a)	0.2945	4	(a)
ABSBL2(21)	0.3637	2	NaN	0.5296	2	NaN	0.2257	2	NaN
ABSBL3(21)	0.1369	4	(a)	0.1355	4	(a)	0.1345	4	(a)
	$x_0 = (3)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0191	5	(a)	0.1460	5	(a)	0.1002	5	(a)
ABSBL2(1)	0.0168	5	(a)	0.0165	5	(a)	0.0163	5	(a)
ABSBL3(1)	0.0338	5	(a)	0.0409	5	(a)	0.0211	5	(a)
ABSBL1(3)	0.0307	5	(a)	0.0995	5	(a)	0.1123	5	(a)
ABSBL2(3)	0.0755	2	NaN	0.0908	2	NaN	0.5851	10	NaN
ABSBL3(3)	0.0396	5	(a)	0.0350	5	(a)	0.0357	5	(a)
ABSBL1(7)	0.5526	5	(a)	0.0907	5	(a)	0.1567	5	(a)
ABSBL2(7)	0.1546	2	NaN	0.0769	2	NaN	0.4685	7	NaN
ABSBL3(7)	0.0673	5	(a)	0.0689	5	(a)	0.0674	5	(a)
ABSBL1(21)	0.3843	4	(a)	0.1141	4	(a)	0.3516	4	(a)
ABSBL2(21)	0.2671	2	NaN	0.2246	2	NaN	0.0926	2	NaN
ABSBL3(21)	0.1353	4	(a)	0.1381	4	(a)	0.1347	4	(a)

Tabela 6.16: funglcp11

MÉTODOS	$x_0 = (1)$			$x_0 = (2)$			$x_0 = (3)$		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
NW	0.0174	5	(a)	0.0172	5	(a)	0.0180	5	(a)
NWA	0.0274	5	(a)	0.0267	5	(a)	0.0273	5	(a)
NWB	0.0346	5	(a)	0.0534	5	(a)	0.0327	5	(a)
CH	0.0206	5	(a)	0.0182	4	(a)	0.0205	5	(a)
CHA	0.0340	5	(a)	0.0291	4	(a)	0.0349	5	(a)
CHB	0.0328	5	(a)	0.0330	4	(a)	0.0636	5	(a)
ABS1	0.1900	4	(a)	0.2015	4	(a)	0.1997	4	(a)
ABS2	9.2072	100		9.0814	100		9.1787	100	
	$x_0 = (1)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.1794	5	(a)	0.0238	5	(a)	0.0242	5	(a)
ABSBL2(1)	0.0200	5	(a)	0.0205	5	(a)	0.0206	5	(a)
ABSBL3(1)	0.0346	5	(a)	0.0225	5	(a)	0.0883	5	(a)
ABSBL1(41)	0.3659	4	(a)	0.2452	4	(a)	0.2354	4	(a)
ABSBL2(41)	0.3690	2	NaN	0.6805	2	NaN	1.0763	2	NaN
ABSBL3(41)	0.2777	4	(a)	0.2861	4	(a)	0.2795	4	(a)
	$x_0 = (2)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0494	5	(a)	0.0219	5	(a)	0.1034	5	(a)
ABSBL2(1)	0.0182	5	(a)	0.0189	5	(a)	0.0189	5	(a)
ABSBL3(1)	0.0229	5	(a)	0.0242	5	(a)	0.0723	5	(a)
ABSBL1(41)	0.2871	5	(a)	0.3056	5	(a)	0.2169	4	(a)
ABSBL2(41)	1.0712	2	NaN	0.8385	2	NaN	0.2002	2	NaN
ABSBL3(41)	0.2794	4	(a)	0.2941	4	(a)	0.2742	4	(a)
	$x_0 = (3)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.1239	5	(a)	0.0276	5	(a)	0.0212	5	(a)
ABSBL2(1)	0.0210	5	(a)	0.0197	5	(a)	0.0272	5	(a)
ABSBL3(1)	0.0304	5	(a)	0.0800	5	(a)	0.0720	5	(a)
ABSBL1(41)	0.2604	4	(a)	0.5229	4	(a)	0.2139	4	(a)
ABSBL2(41)	1.3212	2	NaN	0.4058	2	NaN	0.9677	2	NaN
ABSBL3(41)	0.2765	4	(a)	0.2983	4	(a)	0.2712	4	(a)

Tabela 6.17: funglcp13

MÉTODOS	$x_0 = (1)$			$x_0 = (2)$			$x_0 = (3)$		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
NW	0.0855	5	*	0.0921	5	*	0.0798	5	*
NWA	0.5661	5	*	0.5352	5	*	0.5270	5	*
NWB	0.2510	5	*	0.2482	5	*	0.2507	5	*
CH	0.1059	6	*	0.1161	5	*	0.0803	4	*
CHA	1.3495	6	*	1.0073	5	*	0.8309	4	*
CHB	0.3634	6	*	0.2856	5	*	0.3312	4	*
ABS1	19.9800	4	*	13.6684	4	*	13.7416	4	*
ABS2	333.2703	100		456.5233	100		420.3205	100	
	$x_0 = (1)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.2057	5	*	0.2064	5	*	0.6470	5	*
ABSBL2(1)	0.1650	5	*	0.2455	5	*	0.1600	5	*
ABSBL3(1)	0.4076	5	*	0.3644	5	*	0.2840	5	*
ABSBL1(5)	0.6976	5	*	0.4150	5	*	0.4463	5	*
ABSBL2(5)	0.1631	2	NaN	0.1662	2	NaN	0.3395	4	NaN
ABSBL3(5)	0.9707	5	*	0.7360	5	*	0.8422	5	*
ABSBL1(41)	2.0095	4	*	2.2327	4	*	2.1632	4	*
ABSBL2(41)	1.4650	2	NaN	1.6318	2	NaN	1.0907	2	NaN
ABSBL3(41)	4.0923	4	*	4.7570	4	*	4.6410	4	*
	$x_0 = (2)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.1965	5	*	0.1974	5	*	0.7224	5	*
ABSBL2(1)	0.8944	5	*	0.1554	5	*	0.8627	5	*
ABSBL3(1)	0.2245	5	*	0.3544	5	*	0.3482	5	*
ABSBL1(5)	0.4247	5	*	0.4366	5	*	0.5618	5	*
ABSBL2(5)	0.7242	2	NaN	0.1683	2	NaN	0.4581	4	NaN
ABSBL3(5)	0.8329	5	*	0.8821	5	*	0.8146	5	*
ABSBL1(41)	2.8323	5	*	2.8383	5	*	4.6167	5	*
ABSBL2(41)	1.5169	2	NaN	1.5639	2	NaN	1.0362	2	NaN
ABSBL3(41)	4.1324	4	*	4.4882	4	*	4.4252	4	*
	$x_0 = (3)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	1.0879	5	*	0.1984	5	*	0.1989	5	*
ABSBL2(1)	0.1602	5	*	0.1561	5	*	0.3416	5	*
ABSBL3(1)	0.2283	5	*	0.2866	5	*	0.3230	5	*
ABSBL1(5)	0.4321	5	*	0.4296	5	*	1.4806	5	*
ABSBL2(5)	0.1513	2	NaN	0.2459	2	NaN	0.3570	4	NaN
ABSBL3(5)	0.9312	5	*	0.8270	5	*	0.8573	5	*
ABSBL1(41)	2.8205	5	*	3.4711	5	*	2.8024	5	*
ABSBL2(41)	1.9503	2	NaN	1.3152	2	NaN	1.0167	2	NaN
ABSBL3(41)	4.2810	4	*	4.2723	4	*	4.0657	4	*

Tabela 6.18: funglcp14

MÉTODOS	$x_0 = (1)$			$x_0 = (2)$			$x_0 = (3)$		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
NW	0.1298	5	*	0.1746	6	*	0.2064	7	*
NWA	2.1540	5	*	2.7040	6	*	3.3091	7	*
NWB	0.5477	5	*	0.7192	6	*	0.7683	7	*
CH	0.2780	5	*	0.2933	5	*	0.2891	5	*
CHA	4.9055	5	*	4.2621	5	*	4.3473	5	*
CHB	1.0318	5	*	1.0796	5	*	1.0447	5	*
ABS1	33.9836	5	*	12.5459	5	*	17.4083	5	*
ABS2	1.0002e+003	100		653.5265	100		675.7819	100	
	$x_0 = (1)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.8972	5	*	0.6665	5	*	0.7286	5	*
ABSBL2(1)	0.4381	5	*	0.4898	5	*	0.5000	5	*
ABSBL3(1)	0.4568	5	*	0.7177	5	*	0.5778	5	*
ABSBL1(5)	1.1500	5	*	0.9716	5	*	1.3993	6	*
ABSBL2(5)	0.4750	2	NaN	0.3008	2	NaN	0.9418	5	NaN
ABSBL3(5)	1.3754	5	*	1.5658	5	*	1.4899	6	*
ABSBL1(61)	12.1068	5	*	10.8050	5	*	7.8419	4	*
ABSBL2(61)	3.6676	2	NaN	3.8480	2	NaN	4.0519	2	NaN
ABSBL3(61)	14.0618	5	*	15.9975	5	*	12.6591	5	*
	$x_0 = (2)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.9277	6	*	0.9477	6	*	0.6029	6	*
ABSBL2(1)	0.7548	6	*	0.6604	6	*	0.5993	6	*
ABSBL3(1)	0.5835	6	*	0.7051	6	*	0.8325	6	*
ABSBL1(5)	1.2487	5	*	1.2956	5	*	0.9204	5	*
ABSBL2(5)	0.4125	2	NaN	0.4154	2	NaN	0.9544	6	NaN
ABSBL3(5)	1.0864	5	*	1.4713	5	*	1.3844	5	*
ABSBL1(61)	11.2005	5	*	11.1527	5	*	8.6097	5	*
ABSBL2(61)	3.3391	2	NaN	3.2489	2	NaN	3.0818	2	NaN
ABSBL3(61)	13.3426	5	*	14.9357	5	*	13.4520	5	*
	$x_0 = (3)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	1.4115	7	*	1.2372	7	*	0.9317	7	*
ABSBL2(1)	0.6347	7	*	1.0014	7	*	0.9232	7	*
ABSBL3(1)	1.0403	7	*	0.9005	7	*	1.0546	7	*
ABSBL1(5)	1.0029	5	*	1.7565	5	*	1.4448	6	*
ABSBL2(5)	0.6095	2	NaN	0.4361	2	NaN	0.9288	5	NaN
ABSBL3(5)	1.1872	5	*	1.2831	5	*	2.3086	7	*
ABSBL1(61)	12.5397	5	*	10.9175	5	*	11.3450	5	*
ABSBL2(61)	3.8535	2	NaN	3.8250	2	NaN	3.3073	2	NaN
ABSBL3(61)	13.4440	5	*	14.3926	5	*	13.0711	5	*

Tabela 6.19: funglep15

MÉTODOS	$x_0 = (1)$			$x_0 = (2)$			$x_0 = (3)$		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
NW	0.0270	12	(b)	0.0207	8	(b)	0.0204	8	(b)
NWA	0.0380	12	(b)	0.0276	8	(b)	0.0276	8	(b)
NWB	0.0442	12	(b)	0.0308	8	(b)	0.0319	8	(b)
CH	0.0332	8	(a)	0.0230	8	(a)	0.0190	6	(a)
CHA	0.0327	8	(a)	0.0319	8	(a)	0.0269	6	(a)
CHB	0.0991	8	(a)	0.0349	8	(a)	0.0306	6	(a)
ABS1	0.1170	5	(c)	0.1388	5	(c)	0.1299	5	(c)
ABS2	0.1008	100	*	4.1471	100	*	4.2881	100	*
	$x_0 = (1)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0550	12	(b)	0.0344	12	(b)	0.3406	12	(b)
ABSBL2(1)	0.0298	12	(b)	0.0323	12	(b)	0.0279	12	(b)
ABSBL3(1)	0.0629	12	(b)	0.0434	12	(b)	0.1059	12	(b)
ABSBL1(3)	2.0019	100		2.5825	100		4.1970	100	
ABSBL2(3)	0.1634	2	NaN	0.8996	17	NaN	0.1033	2	NaN
ABSBL3(3)	0.1915	20	(a)	0.1731	20	(a)	0.1864	20	(a)
ABSBL1(7)	1.3738	100		1.5635	100		1.9897	100	
ABSBL2(7)	0.1223	2	NaN	0.0185	2	NaN	0.3899	10	NaN
ABSBL3(7)	0.0954	7	(c)	0.0963	7	(c)	0.0971	7	(c)
ABSBL1(21)	0.3590	2	NaN	0.2972	2	NaN	0.1246	2	NaN
ABSBL2(21)	0.2141	2	NaN	0.0921	2	NaN	0.1746	2	NaN
ABSBL3(21)	4.0772	100		4.0711	100		4.1775	100	
	$x_0 = (2)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.1963	8	(b)	0.2297	8	(b)	0.0258	8	(b)
ABSBL2(1)	0.0650	8	(b)	0.0215	8	(b)	0.0207	8	(b)
ABSBL3(1)	0.0585	8	(b)	0.0310	8	(b)	0.0784	8	(b)
ABSBL1(3)	3.3392	100		2.3931	100		2.0359	100	
ABSBL2(3)	0.0252	2	NaN	0.3231	17	NaN	0.0262	2	NaN
ABSBL3(3)	0.0512	7	(b)	0.0507	7	(b)	0.0495	7	(b)
ABSBL1(7)	1.3560	100		1.3041	100		1.1115	100	
ABSBL2(7)	0.1251	2	NaN	0.0192	2	NaN	0.3829	10	NaN
ABSBL3(7)	0.1129	8	(c)	0.1087	8	(c)	0.0951	7	(c)
ABSBL1(21)	0.0506	2	NaN	0.0498	2	NaN	0.0486	2	NaN
ABSBL2(21)	0.1067	2	NaN	0.0347	2	NaN	0.0355	2	NaN
ABSBL3(21)	0.2583	7	(c)	0.2719	7	(c)	0.2605	7	(c)
	$x_0 = (3)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0687	8	(b)	0.0254	8	(b)	0.0256	8	(b)
ABSBL2(1)	0.0225	8	(b)	0.0214	8	(b)	0.0212	8	(b)
ABSBL3(1)	0.0455	8	(b)	0.0518	8	(b)	0.0279	8	(b)
ABSBL1(3)	5.5077	100		4.6582	100		3.9295	100	
ABSBL2(3)	0.0575	2	NaN	1.1454	17	NaN	0.1713	2	NaN
ABSBL3(3)	0.0486	7	(b)	0.0484	7	(b)	0.0488	7	(b)
ABSBL1(7)	1.1905	100		1.1371	100		1.2916	100	
ABSBL2(7)	0.0642	2	NaN	0.0754	2	NaN	0.5239	10	NaN
ABSBL3(7)	1.4216	100		1.4270	100		0.0953	7	(c)
ABSBL1(21)	0.0917	2	NaN	0.0866	2	NaN	0.7018	2	NaN
ABSBL2(21)	0.4203	2	NaN	0.2176	2	NaN	0.0606	2	NaN
ABSBL3(21)	0.2574	7	(c)	0.2581	7	(c)	0.7989	20	(b)

Tabela 6.20: funglcp31

MÉTODOS	$x_0 = (1)$			$x_0 = (2)$			$x_0 = (3)$		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
NW	0.0309	12	(b)	0.0273	10	(e)	0.0310	11	(g)
NWA	0.0508	12	(b)	0.0440	10	(e)	0.0464	11	(g)
NWB	0.0525	12	(b)	0.0515	10	(e)	0.0533	11	(g)
CH	0.0687	19	(a)	0.0294	9	(d)	0.0267	8	(g)
CHA	0.1044	19	(a)	0.0537	9	(d)	0.0490	8	NaN
CHB	0.1089	19	(a)	0.0381	9	(d)	0.0362	8	(a)
ABS1	0.3990	7	(c)	0.3644	7	(f)	0.3925	8	(g)
ABS2	0.2314	2	NaN	0.2228	2	NaN	0.2125	2	NaN
	$x_0 = (1)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0523	12	(b)	0.0426	12	(b)	0.1560	12	(b)
ABSBL2(1)	0.0342	12	(b)	0.0326	12	(b)	0.0332	12	(b)
ABSBL3(1)	0.1203	12	(b)	0.1010	12	(b)	0.1196	12	(b)
ABSBL1(41)	0.5040	2	NaN	0.1682	2	NaN	0.5708	2	NaN
ABSBL2(41)	0.2746	2	NaN	1.3223	2	NaN	0.7093	2	NaN
ABSBL3(41)	0.5404	7	(h)	0.5515	7	(h)	0.3625	5	(i)
	$x_0 = (2)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0375	10	(e)	0.2379	10	(e)	0.3340	10	(e)
ABSBL2(1)	0.0313	10	(e)	0.0285	10	(e)	0.1764	10	(e)
ABSBL3(1)	0.1206	10	(e)	0.0991	10	(e)	0.0518	10	(e)
ABSBL1(41)	0.2821	2	NaN	0.2631	2	NaN	0.1431	2	NaN
ABSBL2(41)	0.7152	2	NaN	0.5772	2	NaN	0.6208	2	NaN
ABSBL3(41)	0.4528	6	(j)	0.4482	6	(j)	0.4621	6	(j)
	$x_0 = (3)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	0.0706	11	(g)	0.1642	11	(g)	0.0386	11	(g)
ABSBL2(1)	0.0307	11	(g)	0.0318	11	(g)	0.0324	11	(g)
ABSBL3(1)	0.1231	11	(g)	0.0962	11	(g)	0.1189	11	(g)
ABSBL1(41)	0.2820	2	NaN	0.3340	2	NaN	0.2687	2	NaN
ABSBL2(41)	0.2285	2	NaN	1.3230	2	NaN	0.8734	2	NaN
ABSBL3(41)	0.7190	9	(k)	0.7183	9	(k)	0.5419	7	(l)

Tabela 6.21: funglcp33

MÉTODOS	$x_0 = (1)$			$x_0 = (2)$			$x_0 = (3)$		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
NW	2.3558	100		2.6438	100		2.3419	100	
NWA	2.7617	21	*	2.0064	16	*	2.7284	21	*
NWB	8.1593	100		9.1114	100		8.2228	100	
CH	1.4049	68	NaN	1.4855	69	NaN	1.9827	89	*
CHA	2.9969	12	*	4.4991	18	*	3.0408	13	*
CHB	10.3615	100		10.0967	100		10.2539	100	*
ABS1	16.3612	11	*	18.0138	11	*	13.9335	10	*
ABS2	131.0005	2	NaN	132.0248	2	NaN	130.7793	2	NaN
	$x_0 = (1)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	8.6009	100		7.5306	100		8.9639	100	
ABSBL2(1)	6.1623	100		6.2344	100		5.8598	100	
ABSBL3(1)	12.5933	100		11.7541	100		11.5111	100	
ABSBL1(5)	6.4670	28	NaN	5.6063	27	NaN	11.7184	48	NaN
ABSBL2(5)	0.1116	2	NaN	0.2013	2	NaN	0.9260	4	NaN
ABSBL3(5)	11.4796	38	NaN	9.0444	35	NaN	3.4736	10	NaN
ABSBL1(41)	57.2810	35	NaN	2.3083	3	NaN	110.8664	100	
ABSBL2(41)	1.9980	2	NaN	1.9930	2	NaN	1.0197	2	NaN
ABSBL3(41)	163.5927	100		165.6054	100		162.7718	100	
	$x_0 = (2)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	10.0220	100		9.8827	100		7.7556	100	
ABSBL2(1)	7.1425	100		6.9032	100		7.2122	100	
ABSBL3(1)	12.9460	100		11.4424	100		11.1384	100	
ABSBL1(5)	5.3514	27	NaN	12.3053	27	NaN	12.3534	51	NaN
ABSBL2(5)	0.1989	2	NaN	0.4022	2	NaN	0.3763	4	NaN
ABSBL3(5)	10.4054	36	NaN	11.4136	40	NaN	27.5357	100	
ABSBL1(41)	56.9093	35	NaN	6.5437	6	NaN	122.0746	100	
ABSBL2(41)	1.5051	2	NaN	2.5098	2	NaN	5.0110	2	NaN
ABSBL3(41)	161.5304	100		167.8689	100		167.2505	100	
	$x_0 = (3)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	7.6118	100		9.1328	100		7.5532	100	
ABSBL2(1)	9.2251	100		4.9330	100		10.8278	100	
ABSBL3(1)	13.2492	100		12.0445	100		12.2041	100	
ABSBL1(5)	6.9294	27	NaN	11.1241	29	NaN	14.7729	49	NaN
ABSBL2(5)	0.2208	2	NaN	0.7942	2	NaN	0.9574	4	NaN
ABSBL3(5)	10.6178	37	NaN	12.1682	40	NaN	28.5852	100	
ABSBL1(41)	60.1951	34	NaN	14.3896	7	NaN	146.0371	100	
ABSBL2(41)	2.3070	2	NaN	5.3602	2	NaN	1.0533	2	NaN
ABSBL3(41)	170.0320	100		175.4877	100		174.1749	100	

Tabela 6.22: funglcp34

MÉTODOS	$x_0 = (1)$			$x_0 = (2)$			$x_0 = (3)$		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
NW	6.5614	100	*	0.9774	33	*	0.6194	26	*
NWA	9.9798	19	*	13.4545	25	*	13.1773	26	*
NWB	11.3719	100	*	1.7389	20	*	4.4237	44	*
CH	10.9979	97	NaN	1.4719	36	*	1.9458	49	*
CHA	22.7556	22	*	109.0547	100		114.7609	100	
CHB	19.5908	100	*	19.1076	100		13.5948	75	*
ABS1	46.5646	17	*	36.4045	13	*	57.4754	20	*
ABS2	468.7710	31	NaN	320.6374	30	NaN	443.5905	28	NaN
	$x_0 = (1)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	12.9975	100		11.2309	100		13.3019	100	
ABSBL2(1)	11.7112	100		12.9283	100		11.9672	100	
ABSBL3(1)	13.1467	100		12.7270	100		13.4330	100	
ABSBL1(5)	25.4910	100		24.4534	73	NaN	27.4856	100	
ABSBL2(5)	0.5469	2	NaN	0.6034	2	NaN	0.7337	4	NaN
ABSBL3(5)	28.1307	100		28.4556	100		28.0461	100	
ABSBL1(61)	5.5921	3	NaN	17.2948	4	NaN	225.1356	100	
ABSBL2(61)	3.2672	2	NaN	3.3202	2	NaN	2.8814	2	NaN
ABSBL3(61)	254.9202	100		256.9700	100		254.4090	100	
	$x_0 = (2)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	1.9900	20	*	2.1118	19	*	12.3958	100	
ABSBL2(1)	2.3056	28	*	1.9779	24	*	2.5878	30	*
ABSBL3(1)	2.0373	20	*	1.9631	19	*	13.0430	100	NaN
ABSBL1(5)	24.0954	100		15.5007	70	NaN	23.0001	100	
ABSBL2(5)	0.3296	2	NaN	0.2906	2	NaN	0.7697	4	NaN
ABSBL3(5)	28.8940	100		29.4699	100		28.4676	100	
ABSBL1(61)	12.9450	2	NaN	15.2417	3	NaN	13.8814	4	NaN
ABSBL2(61)	5.5961	2	NaN	2.8365	2	NaN	3.5703	2	NaN
ABSBL3(61)	256.9766	100		100.7218	39	*	262.0179	100	
	$x_0 = (3)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	4.9110	44	*	3.3980	29	*	4.7405	43	*
ABSBL2(1)	12.0161	100		3.1585	38	*	2.7608	31	*
ABSBL3(1)	5.6179	44	*	3.7319	29	*	5.7409	43	*
ABSBL1(5)	27.1867	100		22.2209	75	NaN	24.7918	100	
ABSBL2(5)	0.3423	2	NaN	0.4706	2	NaN	2.5914	4	NaN
ABSBL3(5)	28.9391	100		29.4939	100		29.2828	100	
ABSBL1(61)	12.8252	2	NaN	34.8571	12	NaN	216.9626	100	
ABSBL2(61)	6.0327	2	NaN	3.3366	2	NaN	2.9415	2	NaN
ABSBL3(61)	270.6588	100		273.6450	100		270.5904	100	

Tabela 6.23: Testes funglcp35

MÉTODOS	$x_0 = (4)$			$x_0 = (5)$			$x_0 = (6)$		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
NW	7.2906	100	NaN	6.3470	100		5.6749	100	
NWA	24.0396	44	*	17.6635	33	*	10.6534	20	*
NWB	10.9719	100		2.2205	24	*	9.8883	100	
CH	2.6672	64	*	1.8358	52	*	4.1696	100	
CHA	103.5256	96	*	110.2635	100		112.0969	100	
CHB	19.1444	100	*	7.3223	43	*	3.0072	19	*
ABS1	292.5905	100		31.5145	11	*	40.9917	10	*
ABS2	523.0622	28	NaN	256.5498	31	NaN	512.2645	31	NaN
	$x_0 = (4)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	12.7089	100		12.1367	100		13.3465	100	
ABSBL2(1)	14.3081	100		45.9772	100		11.5256	100	
ABSBL3(1)	14.1698	100		13.9102	100		14.1118	100	
ABSBL1(5)	28.4083	100		18.4983	72	NaN	26.8566	100	
ABSBL2(5)	0.2595	2	NaN	0.2397	2	NaN	0.6725	4	NaN
ABSBL3(5)	31.9468	100		32.0554	100		30.4199	100	
ABSBL1(61)	9.8889	2	NaN	19.5488	5	NaN	209.4227	100	
ABSBL2(61)	2.8146	2	NaN	3.7621	2	NaN	4.4151	2	NaN
ABSBL3(61)	279.0844	100		126.0628	46	*	277.1142	100	
	$x_0 = (5)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	2.5580	24	*	12.4039	100		8.7382	70	*
ABSBL2(1)	13.1783	100		10.9113	100		7.1500	60	*
ABSBL3(1)	2.9720	24	*	14.3024	100		10.3263	70	*
ABSBL1(5)	27.9866	100		19.7115	76	NaN	26.0556	100	
ABSBL2(5)	0.3030	2	NaN	0.5201	2	NaN	0.7970	4	NaN
ABSBL3(5)	31.9531	100		32.2711	100		31.4901	100	
ABSBL1(61)	17.2204	4	NaN	40.0720	16	NaN	209.5770	100	
ABSBL2(61)	3.0695	2	NaN	2.4590	10	NaN	4.5392	2	NaN
ABSBL3(61)	65.4391	24	*	288.7949	100		291.2764	100	
	$x_0 = (6)$								
	V_1			V_2			V_3		
	T	M	x^*	T	M	x^*	T	M	x^*
ABSBL1(1)	13.1454	100		12.6473	100		12.9199	100	
ABSBL2(1)	14.5258	100		11.6915	100		11.8159	100	
ABSBL3(1)	15.5447	100		15.1562	100		14.8172	100	
ABSBL1(5)	28.2328	100		20.6995	74	NaN	25.0455	100	
ABSBL2(5)	0.2551	2	NaN	1.2340	2	NaN	0.7306	4	NaN
ABSBL3(5)	34.8784	100		36.6490	100		32.4092	100	
ABSBL1(61)	10.6514	2	NaN	10.5770	2	NaN	216.2406	100	
ABSBL2(61)	3.4061	2	NaN	3.2660	2	NaN	3.3089	2	NaN
ABSBL3(61)	304.6613	100		299.9368	100		10.9311	36	NaN

Tabela 6.24: Testes funglcp35(2)

MÉTODOS	função10				
	x_0	T	M	x^*	V
NW	-10ones(5,1)	0.0052	11	NaN	
NWA	-10ones(5,1)	0.0113	13	NaN	
NWB	-10ones(5,1)	0.1202	100		
ABSBL3(5)	-10ones(5,1)	0.0170	10	-0.6303ones(5,1)	V_4

Tabela 6.25: Testes onde algum método ABS converge e o método de Newton não (1).

MÉTODOS	função11				
	x_0	T	M	x^*	V
NW	2ones(5,1)	0.0178	12	NaN	
NWA	2ones(5,1)	0.0146	9	NaN	
NWB	2ones(5,1)	0.0830	63	NaN	
ABSBL3(5)	2ones(5,1)	0.0838	176	ones(5,1)	V_4

Tabela 6.26: Testes onde algum método ABS converge e o método de Newton não (2).

6.3 Conclusões

A partir dos testes realizados na seção anterior verificamos, como já era esperado, que o método de Newton é mais robusto do que os métodos da classe ABS para os sistemas não-lineares analisados nesse trabalho. Contudo os métodos ABS mostraram-se muito promissores por serem capazes de encontrar soluções em casos onde os métodos de Newton não foram. Por exemplo, função 10 e 11.

Outra característica importante desses métodos é a capacidade de resolver sistemas de equações lineares mesmo quando a matriz do sistema não tenha posto linha completo, ou seja, este admite mais de uma solução. O Algoritmo 3.1 consegue resolver situações desse tipo sem necessitar de nenhuma modificação. Já o Algoritmo 3.7 nem sempre é capaz de resolver situações desse tipo sem alguma modificação.

Fazendo alguns testes verificamos que os casos em que os métodos determinados pelo Algoritmo 3.7 encontram mais problemas para obter uma solução do sistema, cuja a matriz não tenha posto linha completo, é no caso em que $t = 1$. Podemos justificar isso lembrando que nessa situação o vetor q_0 deve ser obtido como solução do sistema linear

$$V^T A P q_0 = V^T r_0,$$

e este não admite solução única. Alguns testes indicam que boas escolhas são aquelas que a quantidade de colunas de cada uma das matrizes V_k , denotadas por s_k , satisfaçam a condição $s_k < \text{posto}(A)$.

Usando a propriedade dos métodos ABS de encontrar alguma solução de sistemas lineares singulares, implantamos os métodos de Newton e Chebyshev resolvendo os sistemas lineares, presentes em cada uma das iterações desses métodos, utilizando alguns métodos ABS. Com essa mudança conseguimos encontrar situações em que algumas das implementações dos métodos de Newton e Chebyshev modificadas (NWA, NWB, CHA, CHB) encontraram uma solução, enquanto suas versões sem essa modificação (NW, CH) não o fizeram. Isso aconteceu nos casos onde os sistemas não-lineares cuja a matriz Jacobiana associada a função f era singular, por exemplo, função glcp34 e glcp35.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ABAFFY, J., BROYDEN, C.G., SPEDICATO, E., *A Class of Methods For Linear Systems*, Numerische Mathematik 45, p. 361-376, (1984).
- [2] ABAFFY, J., GALÁNTAI, A., SPEDICATO, E., *The Local Convergence of ABS Methods for Nonlinear Algebraic Equations*, Numerische Mathematik 51, p. 429-439, (1987).
- [3] ABAFFY, J., GALÁNTAI, A., *Conjugate Direction Methods for Linear and Nonlinear Systems of Algebraic Equations*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, Numerical Methods, Miskolc, Hungary, (1986). Edited by P. Rózsa and D. Greenspan, North Holland, Amsterdam, Netherlands, Vol. 50, p. 481-502, (1987).
- [4] ANDREANI, R., FRIEDLANDER, A., SANTOS, S. A., *Solving generalized nonlinear complementarity problems: Numerical experiments on polyhedral cones*. Technical Report, IMECC, State University of Campinas, Campinas, Brazil, (2001). Disponível em http://www1.ime.unicamp.br/rel_pesq/2001/rp17-01.html.
- [5] BROYDEN, C. G., *A class of methods for solving nonlinear simultaneous equation*, Math. Comp., 19, pp. 577-593, (1965).
- [6] DENNIS, J.E., SCHNABEL R.B., *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*, Englewood Cliffs, NJ. : Prentice-Hall, (1983)
- [7] GAY, D. M., *Brown's method and some generalizations, with applications to minimization problems*, Cornell Univ., Comput. Sci. Techn. Rep. p. 75-225, (1975).
- [8] GAY, D. M., *Some Convergence properties of Broyden's Method*, SIAM. J. Numer. Anal., 16, p. 623-630, (1979).

-
- [9] MEYER, C. D., *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, Philadelphia, PA, SIAM, (2000).
- [10] O'LEARY, D. P., *Why Broyden Nonsymmetric Method Terminates on Linear Equations*, SIAM. J. Optim., 5, No. 2, p. 231-235, (1995).
- [11] ORTEGA, J. M., RHEINBOLDT, W. C., *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, New York: Academic Press (1970).
- [12] SHIRABAYASHI, W. V. I., *Estratégias de Segunda Ordem para Problemas de Complementaridade*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Campinas, (2009).
- [13] SPEDICATO, E., HUANG, Z., *Numerical Experience with Newton-like Methods for Nonlinear Algebraic Systems*, Computing 58, p. 69-89, (1997).
- [14] STEWART, G.W., *On the continuity of the generalized inverse*, SIAM, J. Appl. Math. 17, p. 33-45, (1969).
- [15] ZHIJIAN, H., *Multi-step Nonlinear ABS Methods and Their Efficiency Analysis*, Computing 46, p. 143-153, (1991).