UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO DE MATEMÁTICA
(MESTRADO)

SIDINEY BRUNO MONTANHANO

Transformações Conformes

MARINGÁ
2018

SIDINEY BRUNO MONTANHANO

Transformações Conformes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas, da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria e Topologia

Orientador: Prof. Dr. Josiney Alves de Souza
Co-orientador: Prof. Dr. Pedro Rogerio Sergi Gomes

MARINGÁ
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Montanhano, Sidiney Bruno
M764t Transformações conformes / Sidiney Bruno Montanhano. -- Maringá, 2018.
74 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Josiney Alves de Souza.
Coorientador: Prof. Dr. Pedro Rogerio Sergi Gomes.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia, 2018.

1. Transformações conformes. 2. Grupo ortogonal generalizado. 3. Álgebra de Witt. 4. Álgebra de Virasoro. 5. Quantização. 6. Conformal transformations. 7. Generalized orthogonal group. 8. Witt algebra. 9. Virasoro algebra. 10. Quantization. I. Souza, Josiney Alves de, orient. II. Gomes, Pedro Rogerio Sergi, orient. III. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia. IV. Título.

CDD 22.ed. 512.55
Edilson Damasio CRB9-1.123

SIDINEY BRUNO MONTANHANO

TRANSFORMAÇÕES CONFORMES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Josiney Alves de Souza

Prof. Dr. Josiney Alves de Souza
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Carlos André Hernaski

Prof. Dr. Carlos André Hernaski
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Eduardo Brandani da Silva
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em 20 de fevereiro de 2018.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

"There is nothing, outside of yourself, that can ever enable you to get better, stronger, richer, quicker, or smarter. Everything is within. Everything exists. Seek nothing outside of yourself."
Miyamoto Musashi

"Nobody belongs anywhere. Nobody exists on purpose. Everybody is going to die. Come watch TV."
Morty, Rick and Morty

"Crianças, a ficção é a verdade dentro da mentira, e a verdade desta ficção é bem simples: a magia existe."
Stephen King, IT

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao Professor Doutor Josiney Alves de Souza pela orientação desde o começo da minha graduação em física, satisfazendo a minha curiosidade sobre assuntos matemáticos que encontrava ao longo de pesquisas casuais de física teórica, e que culminaram neste mestrado na matemática pura. Agradecer ao Professor Doutor Pedro Rogerio Sergi Gomes pela orientação no caminho de volta à física, mostrando como a bagagem que adquiri na matemática é muito mais útil do que a contemplação da matemática pura.

Agradecer à minha esposa Hamadalli Ladera de Camargo pelo apoio nos momentos mais difíceis, quando parecia que o tempo passava mais rápido mas os problemas não tinham a mesma pressa. E em especial agradecer às minhas filhas Hanna Mikaela Montanhano e Arya Gabriella Montanhano, que resolveram aparecer logo no começo do mestrado e me acompanharam durante todo o processo, em meio a livros, artigos, mamadeiras e fraldas.

Agradecer a CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho jamais seria escrito.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo das transformações conformes, mais especificamente no caso de espaços semi-riemannianos planos, como espaços Euclidianos e Minkowskianos. Este estudo é feito primeiramente com a exposição das relações das transformações conformes com as transformações ortogonais generalizadas. Tendo estas relações, identificamos as propriedades dessas transformações, e seus grupos de Lie. Focando no caso bidimensional, identificamos a álgebra de Witt e sua única extensão central unidimensional não trivial, a álgebra de Virasoro, como personificações das transformações conformes, e portanto fazemos um estudo destas álgebras e de suas representações. Além disso, ao longo do trabalho mostramos aplicações físicas, como a quantização, e de como as transformações conformes se comportam nessas aplicações. Por fim, introduzimos rapidamente a teoria de cordas bosônicas como uma aplicação tanto física quanto matemática do assunto do trabalho.

Palavras-chave: transformações conformes, grupo ortogonal generalizado, álgebra de Witt, álgebra de Virasoro, quantização.

Abstract

This work presents a study of conformal transformations, more specifically the case of semi-Riemannian flat spaces, like Euclidean and Minkowskian spaces. This study is made with an exposition of the relations of the conformal transformations with the generalized orthogonal transformations. Having these relationships, we identify the properties of these transformations, and their Lie groups. Focusing on the two-dimensional case, we identify the Witt algebra and its unique non-trivial one-dimensional central extension, the Virasoro algebra, as personifications of conformal transformations, and thus we do a study of these algebras and their representations. In addition, throughout the work we show physical applications, like the quantization, and how conformal transformations behave in those applications. Finally, we introduce bosonic string theory as a physical as well as a mathematical application of the subject of this work.

Keywords: conformal transformations, generalized orthogonal group, Witt algebra, Virasoro algebra, quantization.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

No contexto de variedades semi-riemannianas classe C^∞, uma questão interessante é qual a mais geral transformação de coordenadas locais que preserva a forma bilinear definida no espaço tangente. Intuitivamente, vemos as transformações usuais de rotação e translação como bons candidatos, e de fato elas preservam a forma bilinear euclidiana. Na verdade, a transformação mais geral é a transformação conforme, usualmente descrita como a transformação que preserva os ângulos entre vetores do espaço tangente.

Com a propriedade de ser a mais geral transformação, as transformações conformes incluem transformações conhecidas como a translação e a rotação em subespaços euclidianos, mas também incluem os boosts, que junto com as rotações anteriores descrevem as transformações ortogonais em espaços com forma bilinear não positiva definida, as dilatações, usualmente conhecidas como "transformações de escala", e as transformações conformes especiais. De fato, estas transformações encerram as transformações conformes.

Além da curiosa estrutura matemática, que por sinal é bem rica e se espalha por áreas inimagináveis da matemática, as aplicações para as teorias atuais de descrição da natureza também incluem estas transformações. Modelos físicos que possuem simetria conforme não são incomuns. Um exemplo é a teoria de campos com simetria conforme, cujas aplicações são diversas, indo da gravitação quântica à descrição de fenômenos críticos em duas dimensões. Outro exemplo interesante é a necessidade que a teoria de cordas têm quanto à simetria conforme local.

Portanto, vendo tamanha importância das transformações conformes, propôs-se o estudo da teoria de transformações conformes desde o seu início, de maneira detalhada, até sua realização nas aplicações mais simples, que seriam as primeiras teorias de cordas bosônicas primeiramente descritas nos anos 70. Com esse intuito, o presente trabalho se divide em cinco capítulos, além desta introdução, que podem ser lidos separadamente, mas que constroem progressivamente as ferramentas necessárias na descrição das transformações conformes. Além disso, por todo o trabalho existem comentários pertinentes à aplicações destes conceitos.

No Capítulo 2, procura-se descrever da maneira mais clara e suscinta possível os conceitos utilizados nos capítulos subsequentes. Primeiro, a definição e as propriedades estruturais e topológicas do grupo ortogonal generalizado são apresentadas, tanto por ser uma transformação conforme por si só, mas também por sua relação íntima com as transformações conformes em variedades semi-riemannianas planas, descrita no próximo capítulo. De curioso interesse são os isomorfismos existentes entre a álgebra de Lie associada às transformações ortogonais generalizadas, que descrevem parcialmente o que os físicos encontram atualmente nos aceleradores de partículas, no sentido de classificação das partículas elementares. Como interlúdio, apresenta-se o conceito de extensão central, necessário para a descrição das aplicações, e mais ainda, descrever uma versão mais interessante das transformações conformes, a álgebra de Virasoro, que conecta tais transformações com diversas áreas da matemática. Por fim, é descrito de maneira um pouco mais formal que a apresentada para físicos, a teoria quântica e o conceito de quantização tanto de sistemas clássicos quanto de suas simetrias, focando na quantização canônica.

No Capítulo 3, é apresentado as transformações conformes. Após as devidas definições, demonstra-se que as transformações conformes em variedades semi-riemannianas planas podem ser escritas como a composição entre transformações ortogonais generalizadas, dilatações, translações, e transformações conformes generalizadas. Com a álgebra das transformações conformes em mãos, expõe-se a sua relação com a álgebra de Lie do grupo ortogonal generalizado, fazendo com que a própria álgebra conforme seja uma álgebra de Lie. Desta álgebra, procura-se o grupo das transformações conformes, e sua relação com o grupo ortogonal generalizado em mais dimensões.

Para finalizar o estudo matemático das transformações conformes, no Capítulo 4 volta-se novamente à álgebra de Lie conforme, agora em variedades semi-riemannianas em duas dimensões. Identifica-se a álgebra de Witt, uma álgebra de dimensão infinita que descreve as transformações conformes locais no plano. Procura-se então uma extensão central unidimensional não trivial para a álgebra de Witt, e demonstra-se que a única extensão central desse tipo é a álgebra de Virasoro, que satisfaz o comutador

$$[L_n, L_m] = (n-m)\, L_{n+m} + \delta_{m,n} \frac{n}{12} \left(n^2 - 1\right) Z$$

$$[L_n, Z] = 0$$

para todo $m, n \in \mathbb{Z}$, cuja diferença com a álgebra de Witt é o termos central Z. Propõe-se o estudo das representações da álgebra de Virasoro a partir das chamadas representações de energia positiva, e nos módulos de Verma, que classificam as representações pelo par de números complexos inteiros (c, h). Ao restringir esse par aos números reais, obtem-se os valores para que a representação seja unitária e irredutível, condições necessárias para as aplicações físicas.

Por fim, no Capítulo 5 é dado uma pequena introdução à teoria de cordas bosônicas, de onde fica explícito uma simetria conforme interna nas cordas, possibilitando escrever as equações de solução clássicas por meio de coeficientes de série de Fourier cujo parênteses de Poisson satisfazem a álgebra de Witt. Fica claro então que a quantização das cordas depende da álgebra de Virasoro ser satisfeita pelos operadores lineares que representam estes coeficientes. E com o módulo de Verma necessário para quantização, fica natural perguntar em quais valores inteiros (c, h) a teoria faz sentido, de onde encontra-se afinal $h = 1$ e $c = 26$, sendo que este último é o número de dimensões da variedade em que a corda está imersa.

Finaliza-se o trabalho com as considerações finais, onde será descorrido algumas das curiosidades dos conceitos construídos neste trabalho.

Capítulo 2

Teoria Fundamental

2.1 Grupo Ortogonal Generalizado

Nesta seção será apresentado o bem conhecido grupo ortogonal generalizado. Sua importância ficará evidente quando pudermos descrever as transformações conformes por meio dos elementos deste grupo, no próximo capítulo. Um estudo mais completo sobre este grupo pode ser encontrado em [3, 5, 6, 19].

2.1.1 Definição do Espaço Vetorial $\mathbb{R}^{k,n}$

Definiremos tal grupo por meio do espaço vetorial $\mathbb{R}^{\rho}$ munido de uma forma bilinear simétrica não-degenerada.

Definição 2.1 *Sejam V um espaço vetorial real de dimensão n e $B = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base de V. Denotamos por $\mathrm{B}(V, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as formas bilineares reais sobre V. Para cada $f \in \mathrm{B}(V, \mathbb{R})$, a matriz de f na base B é definida por*

$$[f]_B = f(v_i, v_j)_{i,j} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}).$$

Seja $\mathbb{R}^{k+n}$, $k, n \geq 1$, munido da função $\langle ., . \rangle_{k,n} : \mathbb{R}^{k+n} \times \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle x, y \rangle_{k,n} = -\sum_{j=1}^{k} x_j y_j + \sum_{j=k+1}^{k+n} x_j y_j$$

onde $x = (x_i)$ e $y = (y_j)$ são coordenadas da base canônica C de $\mathbb{R}^{k+n}$. Denotaremos $\mathbb{R}^{k+n}$ munido desta função como $\mathbb{R}^{k,n}$.

Proposição 2.2 *A função $\langle ., . \rangle_{k,n}$ definida acima é uma forma bilinear simétrica não degenerada sobre $\mathbb{R}^{k,n}$. Sua matriz $\left[\langle ., . \rangle_{k,n}\right]_C$ com respeito à base canônica C de $\mathbb{R}^{k,n}$ é*

$$\left[\langle ., . \rangle_{k,n}\right]_C = \begin{pmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

onde 0 é o bloco nulo e I_m é o bloco matriz identidade de ordem m.

Demonstração: Dados $x, y, b \in \mathbb{R}^{k,n}$ e $a \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
\langle ax+b, y\rangle_{k,n} &= -a\sum_{j=1}^{k} x_j y_j + a\sum_{j=k+1}^{k+n} x_j y_j - \sum_{j=1}^{k} b_j y_j + \sum_{j=k+1}^{k+n} b_j y_j \\
&= a\left(-\sum_{j=1}^{k} x_j y_j + \sum_{j=k+1}^{k+n} x_j y_j\right) - \sum_{j=1}^{k} b_j y_j + \sum_{j=k+1}^{k+n} b_j y_j \\
&= a\langle x, y\rangle_{k,n} + \langle b, y\rangle_{k,n}.
\end{aligned}$$

Segue de forma análoga para a segunda entrada. Logo $\langle ., .\rangle_{k,n}$ é uma forma bilinear sobre $\mathbb{R}^{k,n}$. Da comutatividade dos números reais segue que

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle_{k,n} &= -\sum_{j=1}^{k} x_j y_j + \sum_{j=k+1}^{k+n} x_j y_j \\
&= -\sum_{j=1}^{k} y_j x_j + \sum_{j=k+1}^{k+n} y_j x_j \\
&= \langle y, x\rangle_{k,n}.
\end{aligned}$$

Portanto $\langle ., .\rangle_{k,n}$ é simétrico. A expressão da matriz $\left[\langle ., .\rangle_{k,n}\right]_C$ segue diretamente da Definição 2.1. Enfim, $\langle ., .\rangle_{k,n}$ é não degenada pois det $\left[\langle ., .\rangle_{k,n}\right]_C = \pm 1$. □

Em outras palavras, $\langle ., .\rangle_{k,n}$ é uma forma bilinear simétrica não-degenerada de assinatura (k, n).

Proposição 2.3 *Seja $T : \mathbb{R}^{k,n} \to \mathbb{R}^{k,n}$ o operador linear auto-adjunto tal que $\langle x, y\rangle_{k,n} = \langle T(x), y\rangle$, para todos $x, y \in \mathbb{R}^{k,n}$. Então*

$$[T]_C = \left[\langle ., .\rangle_{k,n}\right]_C$$

e $[T]_C = [T]_C^{-1}$.

Demonstração: Temos que

$$\langle x, y\rangle_{k,n} = -\sum_{j=1}^{k} x_j y_j + \sum_{j=k+1}^{k+n} x_j y_j$$

e

$$\langle T(x), y\rangle = \sum_{j=1}^{k} T(x_j) y_j + \sum_{j=k+1}^{k+n} T(x_j) y_j$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^{k,n}$. Logo, $T(x)_j = -x_j$ se $1 \leq j \leq k$, e $T(x)_j = x_j$ se $k+1 \leq j \leq k+n$. Portanto na base canônica C,

$$[T]_C = \begin{pmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \left[\langle ., .\rangle_{k,n}\right]_C$$

Agora,

$$\begin{aligned}
[T]_C [T]_C &= \begin{pmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \\
&= I_{k+n}
\end{aligned}$$

de onde temos $[T]_C^{-1} = [T]_C$. $\square$

Geralmente se denota $[T]_C$ por η ou g. Neste capítulo manteremos a notação como $[T]_C$, mas nos próximos capítulos, onde será utilizado com frequência a convenção de Einstein para índices, será mais utilizado η e g.

2.1.2 Definição do Grupo e da Álgebra

Definido o espaço $(\mathbb{R}^{k,n}, \langle .,. \rangle_{k,n})$, podemos finalmente definir o grupo ortogonal generalizado.

Definição 2.4 *Seja A uma matriz real $(k+n) \times (k+n)$. Dizemos que A preserva a forma bilinear $\langle .,. \rangle_{k,n}$ se*

$$\langle A(x), A(y) \rangle_{k,n} = \langle x, y \rangle_{k,n} \ , \forall x, y \in \mathbb{R}^{k,n}.$$

Denota-se por $O(k,n)$ o conjunto das matrizes $(k+n) \times (k+n)$ que preservam a forma bilinear $\langle .,. \rangle_{k,n}$.

Existe uma relação que facilita bastante na verificação de uma matriz pertencer ou não a $O(k,n)$, que obteremos no próximo teorema.

Teorema 2.5 *Seja $A \in GL(k+n, \mathbb{R})$. Então $A \in O(k,n)$ se e somente se $A^t[T]_C A = [T]_C$.*

Demonstração: Sejam $A \in O(k,n)$ e $x, y \in \mathbb{R}^{k,n}$. Temos pela forma matricial de T, encontrada na Proposição 2.3, que

$$\begin{aligned} \langle A(x), A(y) \rangle_{k,n} &= \langle T(A(x)), A(y) \rangle \\ &= [A(x)]^t \ [T]_C \ [A(y)] \\ &= [x]_C^t \ A^t \ [T]_C \ A \ [y]_C . \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \langle A(x), A(y) \rangle_{k,n} &= \langle x, y \rangle_{k,n} \\ &= \langle T(x), y \rangle \\ &= [x]_C^t \ [T]_C \ [y]_C . \end{aligned}$$

Como $x, y \in \mathbb{R}^{k,n}$ são arbitrários, segue que $A^t \ [T]_C \ A = [T]_C$. Reciprocamente, se $A^t \ [T]_C \ A = [T]_C$, então pelas igualdades acima temos $\langle A(x), A(y) \rangle_{k,n} = \langle x, y \rangle_{k,n}$, para todos $x, y \in \mathbb{R}^{k,n}$. Portanto $A \in O(k,n)$. $\square$

Na realidade, $O(k,n)$ não é apenas um grupo, mas um grupo de Lie de matrizes. Definiremos grupo de Lie na sua forma mais geral, e damos o resultado (sem prova, que pode ser encontrada em [27]) de que todo grupo linear, no sentido de subgrupo do grupo linear $GL(k+n, \mathbb{R})$, que é topologicamente fechado é um grupo de Lie.

Definição 2.6 *Um grupo de Lie é um grupo topológico (um espaço topológico munido com estrutura de grupo tais que as aplicações produto do grupo e inversão são contínuas), separável (possui um subconjunto denso enumerável), que tenha a estrutura de variedade diferenciável, tal que as aplicações produto do grupo e inversão são diferenciáveis.*

Proposição 2.7 *Se G é um grupo linear fechado, ou seja, um subgrupo de $GL(\rho, \mathbb{C})$ fechado, então G com a topologia herdada se torna um grupo de Lie de uma maneira única tal que*

- *as restrições de $GL(\rho, \mathbb{C})$ para G das partes imaginárias e reais são classe C^∞;*

- *se $\phi : M \to GL(\rho, \mathbb{C})$ é uma função em uma variedade diferenciável de classe C^∞ tal que $\phi(M) \subseteq G$, então $\phi : M \to G$ é de classe C^∞.*

A prova dessa proposição está além do escopo deste trabalho. Munido desta informação, podemos então provar que $O(k,n)$ é de fato um grupo de Lie de matrizes.

Teorema 2.8 *O grupo $O(k,n)$ é um grupo de Lie de matrizes em $GL(k+n,\mathbb{R})$.*

Demonstração: Dados $A, B \in O(k,n)$ e $x, y \in \mathbb{R}^{k,n}$, temos que

$$\begin{aligned} \langle AB(x), AB(y)\rangle_{k,n} &= \langle A(B(x)), A(B(y))\rangle_{k,n} \\ &= \langle B(x), B(y)\rangle_{k,n} \\ &= \langle x, y\rangle_{k,n} \end{aligned}$$

Logo $AB \in O(k,n)$. Como $A^t \ [T]_C \ A = [T]_C$, temos que

$$\begin{aligned} \det([T]_C) &= \det(A^t \ [T]_C \ A) \\ &= \det(A^t)\det([T]_C)\det(A) \\ &= \det([T]_C)\det(A)^2 \end{aligned}$$

e portanto $\det(A) = \pm 1 \neq 0$, e consequentemente A possui inversa. Além disso,

$$\left\langle A^{-1}(x), A^{-1}(y)\right\rangle_{k,n} = \left\langle AA^{-1}(x), AA^{-1}(y)\right\rangle_{k,n} = \langle x, y\rangle_{k,n}$$

e portanto $A^{-1} \in O(k,n)$, mostrando que $O(k,n)$ é um subgrupo de $GL(k+n,\mathbb{R})$. Agora, sabemos que um subconjunto de um espaço métrico ser fechado é equivalente a ser sequencialmente fechado. Suponha que $A \in GL(k+n,\mathbb{R})$ é o limite de uma sequência $(A_t)_{t\in\mathbb{N}}$ em $O(k,n)$. Dados $x, y \in \mathbb{R}^{k,n}$ quaisquer, segue por continuidade que

$$\begin{aligned} \langle A(x), A(y)\rangle_{k,n} &= \left\langle \lim_{t\to\infty} A_t(x), \lim_{t\to\infty} A_t(y)\right\rangle_{k,n} \\ &= \lim_{t\to\infty} \langle A_t(x), A_t(y)\rangle_{k,n} \\ &= \lim_{t\to\infty} \langle x, y\rangle_{k,n} = \langle x, y\rangle_{k,n} \end{aligned}$$

Logo $A \in O(k,n)$ e portanto $O(k,n)$ é fechado em $GL(k+n,\mathbb{R})$, sendo assim um grupo de Lie. □

Chamamos $O(k,n)$ de **grupo ortogonal generalizado**.

Geralmente se está interessado não em todo $O(k,n)$, mas no subgrupo que mantém a orientação do espaço vetorial.

Proposição 2.9 *O conjunto $SO(k,n) = \{A \in O(k,n); \det(A) = 1\}$ é um subgrupo de Lie de matrizes de $O(k,n)$.*

Demonstração: Se $A, B \in SO(k,n)$, então $\det(AB^{-1}) = \det(A)\det(B^{-1}) = 1$. Logo $SO(k,n)$ é um subgrupo de $O(k,n)$. Agora, considerando a restrição à $O(k,n)$ da função determinante, temos que $SO(k,n) = \det^{-1}(1)$. Segue pela continuidade do determinante que $SO(k,n)$ é fechado, pois é a imagem inversa de um conjunto fechado. □

Chamamos $SO(k,n)$ de **grupo ortogonal generalizado especial**.

Por serem grupos de Lie, esses grupos possuem uma álgebra de Lie associada. Primeiro, definamos álgebra de Lie. Para um estudo sobre as relações entre grupos de Lie e álgebras de Lie, veja [20, 21, 27, 28].

Definição 2.10 *Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial* $\mathfrak{g}$ *munido de um produto (colchete ou comutador)*

$$[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

com as seguintes propriedades

1. $[,]$ *é bilinear;*

2. *para todo* $X \in \mathfrak{g}$*, vale* $[X, X] = 0$*, ou seja, é antissimétrico;*

3. $[,]$ *satisfaz a identidade de Jacobi, isto é, para todo* $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$*,*

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

Um fato interessante, que será utilizado no próximo teorema, é que a álgebra de Lie de um grupo de Lie é isomorfa ao espaço vetorial tangente na identidade do grupo. Para mais detalhes, ver [21].

Teorema 2.11 *A álgebra de Lie* $\mathfrak{so}(k, n)$ *de* $O(k, n)$ *(e de* $SO(k, n)$*, e da componente conexa que contém a identidade, denotada por* $SO_0(k, n)$*) é*

$$\mathfrak{so}\,(k, n) = \left\{X \in \mathbb{M}_{k+n}\,(\mathbb{R})\,;\; gX^t g = -X\right\}$$

onde $g = [T]_C = \begin{pmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$*, e* $\mathbb{M}_{k+n}\,(\mathbb{R})$ *é o conjunto das matrizes de ordem* $k+n$ *com entradas em* $\mathbb{R}$*.*

Demonstração: Dados $X \in \mathfrak{so}\,(k, n)$ e $s \in \mathbb{R}$, temos

$$\left(e^{sX}\right)^{-1} = e^{-sX} = e^{s\left(gX^t g\right)} = e^{g(sX)^t g} = g\left(e^{sX}\right)g$$

e portanto $e^{sX} \in O\,(k, n)$. Como $\det\left(e^{sX}\right) = e^{tr(sX)} > 0$, então $e^{sX} \in SO(k, n)$. O fato de $e^{sX} \in SO_0\,(k, n)$ vem da continuidade da exponencial.

Por outro lado, seja $\gamma : \mathbb{R} \to O\,(k, n)$ uma curva diferenciável em $O(k; n)$ com $\gamma\,(0) = I$. Então $\gamma\,(s)^{-1} = g\gamma\,(s)^t\, g$, e derivando por s

$$-\gamma'\,(s)\,\gamma\,(s)^{-2} = g\left(\gamma'\,(s)\right)^t g.$$

Assim se $\gamma\,(s) = e^{sX}$, então em $s = 0$ temos $-X = gX^t g$, ou seja, $X \in \mathfrak{so}\,(k; n)$, de onde concluímos que $\mathfrak{so}\,(k; n)$ é a álgebra de Lie de $O(k; n)$, $SO(k; n)$ e $SO_0(k; n)$. $\square$

2.1.3 Topologia

Para completar uma exposição do grupo ortogonal generalizado e seus subgrupos mais importantes, um estudo da sua topologia é de grande interesse. Uma das razões é a importância da topologia na quantização, onde as propriedades topológicas do grupo a ser quantizado geram defeitos a serem tratados. Geralmente, em aplicações, se está interessado em $O\,(1, 3)$, conhecido como grupo de Lorentz homogêneo, que descreve a diferença em medidas físicas ao mudar de sistema de referência inercial. Um tratamento deste grupo, de sua generalização para o grupo de Poincaré pode ser encontrada em [3, 6, 32].

Proposição 2.12 *Os grupos* $SO\,(k, n)$ *e* $O\,(k, n)$ *não são compactos.*

Demonstração: Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cosh x & 0 \cdots 0 & \sinh x \\ 0 & & 0 \\ \vdots & I & \vdots \\ 0 & & 0 \\ \sinh x & 0 \cdots 0 & \cosh x \end{pmatrix}$$

que é uma matriz de ordem $k+n$. Sabemos que o

$$\det A = \cosh^2 x + (-1)^{k+n+1} (-1)^{k+n} \sinh^2 x = 1.$$

Agora, como $A = A^t$, podemos escrever a relação de $O(k,n)$ como $A^t[T]_C A = [T]_C$, e logo $A \in SO(k;n)$. Claramente os elementos dependentes de x não são limitados por qualquer constante C, de onde concluímos que $SO(k;n)$ é não compacto, e assim $O(k;n)$ também não o é. $\square$

Que $O(k,n)$ não é conexo fica claro ao se perceber que para todo $A \in O(k,n)$, temos $\det(A^t[T]_C A) = (\det(A))^2 \det([T]_C) = \det([T]_C)$, implicando $\det(A) = \pm 1$. Como a função determinante é contínua, temos que $O(k,n)$ é desconexo. Tecnicamente, tal desconexidade separa as transformações que preservam a orientação do espaço vetorial daquelas que não preservam. Outra desconexidade vem do fato que podemos escrever o espaço vetorial $\mathbb{R}^{k,n} = \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^n$, onde $O(k,n)$ agiria como rotações usuais em cada subespaço e como transformações chamadas boosts, misturando estes subespaços. A preservação ou não da orientação de cada subespaço gera mais desconexidade. Em especial é esta a razão de $SO(k,n)$ não ser conexo. Como cada boost pode ser escrito como produto de matrizes do tipo

$$A = \begin{pmatrix} I_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh x & 0 & \sinh x & 0 \\ 0 & 0 & I_j & 0 & 0 \\ 0 & \sinh x & 0 & \cosh x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_t \end{pmatrix}$$

onde I_ρ são blocos identidade de ordem ρ e os 0 são blocos nulos, $i < k$ e $t < n$, então temos somente estas duas desconexidades, implicando em quatro componentes conexas para $O(k,n)$ e em duas para $SO(k,n)$. Uma prova formal para esse fato pode ser encontrada em [33].

A partir da próxima proposição, e por todo o restante do trabalho, será utilizado a convenção de Einstein. Tal convenção diz que pares de índices iguais, geralmente um acima denotando coordenada contravariante e um abaixo denotando coordenada covariante, é implicitamente uma somatória. Por exemplo, seja x um vetor $\mathbb{R}^n$, e seja x^i a i-éssima coordenada de x no sistema de coordenadas canônico. Então

$$x^i x_i = \sum_{i=1}^{n} x^i x_i = \langle x, x \rangle .$$

Para mais detalhes, uma explicação simples pode ser encontrada em [2].

Proposição 2.13 *$SO_0(k,n)$ possui o mesmo grupo fundamental de $SO(k) \times SO(n)$.*

Demonstração: Mostremos primeiramente que podemos escrever $SO_0(k,n) \cong B(k,n) \times SO(k) \times SO(n)$, onde $B(k,n)$ é o conjunto dos boosts, e que é difeomorfo a $\mathbb{R}^{kn}$. Para isso, como $SO_0(k,n)$ é a componente conexa da identidade, podemos mostrar essa decomposição na álgebra de Lie $\mathfrak{so}(k,n)$.

Utilizaremos a partir dessa demonstração o colchete da álgebra de Lie do grupo ortogonal generalizado, que será provado explicitamente no contexto das transformações conformes. Para $SO_0(1,3)$, temos que é gerado pelo conjunto de matrizes ω que satisfazem

$$[T]_C \omega^t + \omega [T]_C = 0,$$

ou em notação de índices (utilizando a convensão de Einstein) e definindo $g = [T]_C$ para abaixar índices,

$$g_{\mu\rho}\omega^{\rho}_{\nu} + g_{\nu\rho}\omega^{\rho}_{\mu} = 0,$$

temos que $A \in SO_0(k,n)$ se e somente se $A = exp\left(\omega^{\mu}_{\nu}q^{\nu}\partial_{\mu}\right)$, onde estamos usando a base canônica do espaço tangente do grupo. Definindo

$$\Omega_{i\mu} = -i\left(g_{i\nu}q^{\nu}\partial_{\mu} - g_{\mu\nu}q^{\nu}\partial_{i}\right),$$

podemos escrever $A = exp\left(\alpha^{i\mu}\Omega_{i\mu}\right)$, onde $\alpha^{i\mu} = \beta^{i\mu} + \omega^{i\mu}$ com β simétrico, e portanto α é uma matriz qualquer. O termo imaginário i multiplicando a definição de Ω pode ser visto tanto como uma constante qualquer e a álgebra ser real, como no caso desta demonstração, quanto como a constante imaginária para a complexificação da álgebra, que será utilizado no Teorema 2.15. Isso não muda as identidades a seguir. Nessa notação, o comutador da álgebra será

$$\left[\Omega_{j\mu}, \Omega_{i\nu}\right] = i\left(g_{\mu i}\Omega_{j\nu} + g_{j\nu}\Omega_{\mu i} - g_{\mu\nu}\Omega_{ji} - g_{ji}\Omega_{\mu\nu}\right).$$

Por ser uma constante, pode-se encontrar um isomorfismo entre as duas álgebras, implicando não haver problemas quanto a unidade imaginária na teoria de representação da álgebra.

Definamos então o conjunto dos pares de números

$$I = \left\{(x,y) \in \mathbb{N}^2; 0 \leq x \leq k+n, 0 \leq y \leq k+n\right\}$$

necessário para indexar uma nova base em $\mathfrak{so}(k,n)$. Como nova base, definamos

- $J^{(t)}_{(i,j)} = \Omega_{ij}$ se $i \leq k$ e $j \leq k$;
- $K_{(i,j)} = \Omega_{ij}$ se $i \leq k$ e $j > k$;
- $J^{(e)}_{(i,j)} = \Omega_{ij}$ se $i > k$ e $j > k$;

onde $(i,j) \in I$. Que estas são as únicas possibilidades fica claro ao se levar em conta a antissimetria de Ω_{ij}. Pelo comutador de $\mathfrak{so}(k,n)$ obtemos os seguintes comutadores

$$\begin{aligned}\left[J^{(t)}_{(i,j)}, J^{(t)}_{(a,b)}\right] &= i\left(-\delta_{ja}J^{(t)}_{(i,b)} - \delta_{ib}J^{(t)}_{(j,a)} + \delta_{jb}J^{(t)}_{(i,a)} + \delta_{ia}J^{(t)}_{(j,b)}\right)\\ &= i\left(-\delta_{ja}\Omega_{ib} - \delta_{ib}\Omega_{ja} + \delta_{jb}\Omega_{ia} + \delta_{ia}\Omega_{jb}\right)\\ &= i\left(\left(\delta_{ia}\delta^t_j - \delta_{ja}\delta^t_i\right)\delta^d_b + \left(\delta_{jb}\delta^t_i - \delta_{ib}\delta^t_j\right)\delta^d_a\right)\Omega_{td}\end{aligned}$$

$$\left[J^{(t)}_{(i,j)}, J^{(e)}_{(a,b)}\right] = 0$$

$$\begin{aligned}\left[J^{(e)}_{(i,j)}, J^{(e)}_{(a,b)}\right] &= i\left(\delta_{ja}J^{(e)}_{(i,b)} + \delta_{ib}J^{(e)}_{(j,a)} - \delta_{jb}J^{(e)}_{(i,a)} - \delta_{ia}J^{(e)}_{(j,b)}\right)\\ &= i\left(\delta_{ja}\Omega_{ib} + \delta_{ib}\Omega_{ja} - \delta_{jb}\Omega_{ia} - \delta_{ia}\Omega_{jb}\right)\\ &= i\left(\left(\delta_{ja}\delta^t_i - \delta_{ia}\delta^t_j\right)\delta^d_b + \left(\delta_{ib}\delta^t_j - \delta_{jb}\delta^t_i\right)\delta^d_a\right)\Omega_{td}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[J^{(t)}_{(i,j)}, K_{(a,b)}\right] &= i\left(-\delta_{ja}\Omega_{ib} + \delta_{ia}\Omega_{jb}\right)\\ &= i\left(-\delta_{ja}\delta^t_i + \delta_{ia}\delta^t_j\right)\Omega_{tb}\end{aligned}$$

$$\left[J^{(e)}_{(i,j)}, K_{(a,b)}\right] = i\left(+\delta_{ib}\delta^t_j - \delta_{jb}\delta^t_i\right)\Omega_{ta}$$

$$\left[K_{(i,j)}, K_{(a,b)}\right] = i\left(-\delta_{jb}\delta_a^t\delta_i^d + \delta_{ia}\delta_b^t\delta_j^d\right)\Omega_{dt}.$$

Dessa última relação obtemos que

$$\left[K_{(i,j)}, K_{(a,b)}\right] = \begin{cases} iJ^{(e)}_{(j,b)} & \text{se } j \neq b \text{ e } i = a \\ -iJ^{(t)}_{(i,a)} & \text{se } j = b \text{ e } i \neq a \\ 0 & \text{se } j \neq b \text{ e } i \neq a, \text{ ou se } i = a \text{ e } j = b \end{cases}$$

Identificamos pelas constantes de estrutura que a álgebra dos $J^{(e)}_{(i,j)}$ e dos $J^{(t)}_{(i,j)}$ são as álgebras $\mathfrak{so}(n)$ e $\mathfrak{so}(k)$, respectivamente. Perceba que no caso de n ou k ser igual a zero, obtemos a álgebra do produto vetorial em $\mathbb{R}^k$ ou $\mathbb{R}^n$, respectivamente.

O difeomorfismo entre $B(k,n)$ e $\mathbb{R}^{kn}$ pode ser visto de maneira mais simples. Como dito antes, pode-se escrever um boost como composição das matrizes da forma

$$A = \begin{pmatrix} I_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh x & 0 & \sinh x & 0 \\ 0 & 0 & I_j & 0 & 0 \\ 0 & \sinh x & 0 & \cosh x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_t \end{pmatrix}.$$

Que estas matrizes preservam a forma bilinear é claro pelas identidades das funções trigonométicas hiperbólicas. Para ver que elas são únicas, basta ver a álgebra $\mathfrak{so}(k,n)$ em sua representação matricial, que é onde foi definida, mas com base dada primeiro pelas rotações em cada subespaço, e as representações matriciais de $K_{(i,j)}$ dadas por essas matrizes e pelas relações de comutação. Dessa forma encontramos as matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} I_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & I_j & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_t \end{pmatrix}$$

cuja exponencial nos da termos de $B(k,n)$, que são da forma da matriz A. Isto prova que elas são únicas. Além disso temos kn matrizes desse tipo, cada uma dependendo de um parâmentro real. Fica natural então o isomorfismo algébrico. O difeomorfismo de $B(k,n)$ com $\mathbb{R}^{kn}$ segue da exponencial ser uma aplicação de classe C^∞. Com essas relações, podemos escrever que $SO_0(k,n) \cong B(k,n) \times SO(k) \times SO(n)$.

Como $\mathbb{R}^{kn}$ é simplesmente conexo, obtemos então $\pi_i(SO_0(k,n)) \cong \pi_i(SO(k)) \times \pi_i(SO(n))$. □

Desse modo, sabendo que $\pi_1(SO(n)) = 1, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2$ respectivamente para $n = 1, 2, (\geq 3)$, fica trivial encontrar os grupos fundamentais de $SO_0(k,n)$.

2.1.4 Isomorfismos $SO_0(1,3) \cong SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ e $SO_0^{\mathbb{C}}(1,3) \cong SU(2) \times SU(2)$

Voltemos nossa atenção para o caso especial $O(1,3)$, o grupo homogêneo de Lorentz. Nos focaremos nos isomorfismos $SO_0(1,3) \cong SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ e $SO_0^{\mathbb{C}}(1,3) \cong SU(2) \times SU(2)$, onde $SO_0^{\mathbb{C}}(1,3)$ é a complexificação de $SO_0(1,3)$. O primeiro isomorfismo basicamente faz a ligação entre a componente conexa do grupo de Lorentz e seu grupo de recobrimento universal, o grupo linear especial. O segundo tem uma importante aplicação a partir da teoria de representações irredutíveis, na definição de partícula elementar em física.

Teorema 2.14 *A componente conexa do grupo de Lorentz $SO_0(1,3)$ é isomórfica ao grupo $SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$.*

A demonstração deste Teorema pode ser encontrada em [3].

Teorema 2.15 *A completificação da componente conexa do grupo de Lorentz $SO_0(1,3) \otimes \mathbb{C}$ é isomórfica ao grupo $SU(2) \times SU(2)$.*

Demonstração: Primeiro, perceba que ambos os grupos são conexos, e portanto são por construção gerados pelas suas respectivas álgebras. Basta então mostrar que as álgebras são isomorfas, que teremos por consequência o isomorfismo dos grupos. Faremos isso identificando $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ em $\mathfrak{so}(1,3)$. Utilizando as relações da Proposição 2.13, obtemos para o caso particular $k = 1$, $n = 3$,

$$J_1 = \Omega_{23}, \ J_2 = \Omega_{31}, \ J_3 = \Omega_{12}$$

que são chamados em física de geradores do momento angular, e os boosts

$$K_1 = \Omega_{10}, \ K_2 = \Omega_{20}, \ K_3 = \Omega_{30}$$

de onde temos os comutadores

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$$
$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k$$
$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k$$

onde ϵ_{ijk} é o tensor unidade totalmente antissimétrico. Dessa forma, fica mais claro que podemos redefinir a base da álgebra para desacoplar em duas cópias da álgebra $\mathfrak{su}(2)$, da seguinte forma: definindo

$$A_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i)$$

$$B_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i)$$

obtemos os comutadores

$$[A_i, A_j] = \frac{1}{2} i\epsilon_{ijk} A_k$$

$$[B_i, B_j] = \frac{1}{2} i\epsilon_{ijk} B_k$$

$$[A_i, B_j] = 0$$

que deixa explícito o desacoplamento das subálgebras, e ambas podem ser identificadas pelas constantes de estrutura como $\mathfrak{su}(2)$. Como o argumento feito até aqui pode ser revertido sem maiores problemas, obtendo assim a álgebra original, temos um isomorfismo de álgebras de Lie. Portanto temos o resultado. □

Outras demonstrações podem ser encontradas em [6, 19, 32].

Por fim, um comentário sobre a aplicação física do último isomorfismo. O grupo $SU(2)$ é bem conhecido em física, principalmente em mecânica quântica, onde descreve a álgebra de spin em três dimensões (ver [22] para um exemplo das aplicações), onde obtêm-se as representações irredutíveis indexadas por um valor $0 \leq j$ semi-inteiro, ou seja, $j = \frac{n}{2}$ com $0 \leq n \in \mathbb{Z}$. Desse modo, pelo isomorfismo acima temos que as representações irredutíveis de $SO_0(1,3) \otimes \mathbb{C}$ são indexadas por (a, b) com a e b semi-inteiros positivos. Como as representações irredutíveis de $SO_0(1,3)$ podem ser obtidas de forma biunívoca das de $SO_0(1,3) \otimes \mathbb{C}$, podemos indexar da mesma forma as representações irredutíveis de $SO_0(1,3)$. A aplicação vem de que as teorias físicas de campos quânticos relativísticos (ver [6, 12]) devem ter como simetria local (em outras palavras, devem ser invariantes) as transformações dadas pela álgebra $\mathfrak{so}(1,3)$, e suas representações irredutíveis são as permitidas nessas teorias. Dessa forma, cada representação irredutível é um campo quântico relativístico permitido, cuja excitação é uma partícula. Temos então a classificação das partículas permitidas pela simetria $\mathfrak{so}(1,3)$.

2.2 Extensão Central de Grupos e Álgebras

Aqui apresentaremos o importante conceito de extensão. Ao longo deste trabalho, tal conceito aparecerá constantemente, afinal a álgebra de Virasoro é uma extensão da álgebra de Witt. Além disso, é interessante discorrer sobre tal assunto pelo fato de que em quantização de simetrias, o papel do conceito de extensão é crucial para uma definição formal da matemática envolvida. Como principal referência foi utilizado [4].

2.2.1 Extensões de Grupos

Comecemos com grupos.

Definição 2.16 *Uma extensão E de um grupo G por um grupo A é dada por uma sequência exata de homomorfismos de grupos*

$$1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

A exatidão da sequência significa que o núcleo de cada aplicação na sequência é igual a imagem da aplicação anterior. A extensão é dita central se A é abeliano e sua imagem $Im\,(i)$ é o centro $Z\,(E)$ de E.

Exemplo 2.1 *Um exemplo de extensão central é o grupo de recobrimento universal do grupo de Lorentz $SO_0\,(1,3)$*

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to SL\,(2,\mathbb{C}) \xrightarrow{\pi} SO_0\,(1,3) \to 1$$

onde π é o recobrimento 2 para 1. Este é um caso especial do fato geral que dado um grupo de Lie conexo G, o grupo de recobrimento universal E de G é uma extensão de G pelo grupo das transformações de deck (transformações que preservam a projeção π), que é isomorfo ao grupo fundamental $\pi\,(G)$ de G.

Exemplo 2.2 *Outro exemplo é a extensão central trivial,*

$$1 \to A \xrightarrow{i} A \times G \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

onde $i : A \to A \times G$ é dada por $a \mapsto (a, 1)$, sendo A abeliano.

Vamos buscar meios para saber se duas extensões centrais são intrinsecamente distintas. Para isso, será importante as definições a seguir.

Definição 2.17 *Duas extensões centrais*

$$1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1,\ 1 \to A \xrightarrow{i'} E' \xrightarrow{\pi'} G \to 1$$

de um grupo G por A são equivalentes se existe um isomorfismo $\psi : E \to E'$ de grupos tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & A & \to & E & \to & G & \to & 1 \\ & & id \downarrow & & \psi \downarrow & & id \downarrow & & \\ 1 & \to & A & \to & E' & \to & G & \to & 1 \end{array}$$

comuta.

Definição 2.18 *Uma sequência exata de homomorfismos de grupos*

$$1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

cinde se existe $\sigma : G \to E$ tal que $\pi \circ \sigma = id_G$.

Lema 2.19 *Uma extensão central cinde se e somente se ela é equivalente a uma extensão central trivial.*

Demonstração: Se a sequência cinde pela aplicação $\sigma : G \to E$, então

$$\begin{aligned} \psi : A \times G &\to E \\ (a, g) &\mapsto i(a)\,\sigma(g) \end{aligned}$$

é um isomorfismo. De fato, como i e σ são homomorfismos, e $i(A) = Z(E)$, temos que

$$\begin{aligned} \psi(ab, gh) &= i(ab)\,\sigma(gh) \\ &= i(a)\,i(b)\,\sigma(g)\,\sigma(h) \\ &= i(a)\,\sigma(g)\,i(b)\,\sigma(h) \\ &= \psi(a, g)\,\psi(b, h) \end{aligned}$$

e portanto ψ também o é. A injetividade segue da injetividade de i, que segue da definição de sequência exata, e da injetividade de σ, pois da definição de $\pi \circ \sigma = id_G$, onde π é sobrejetora pela definição de sequência exata, implica σ ser injetora. A sobrejetividade segue de que i é sobrejetora no centro de E, novamente pela definição de sequência exata, onde $\mathrm{Im}(i) = Z(E)$, e σ é sobrejetora em $E \backslash Im(i)$, afinal

$$\begin{aligned} \pi(E \backslash Im(i)) &= (id_G \circ \pi)(E \backslash Im(i)) \\ &= (\pi \circ \sigma \circ \pi)(E \backslash Z(E)) \\ &= \pi \circ \sigma(G \backslash \{I_G\}) \end{aligned}$$

implicando que $\sigma(G \backslash \{I_G\}) = E \backslash Im(i) \subset \mathrm{Im}(\sigma)$, ou seja, σ é na verdade bijetora em quando restrita a $G \backslash \{I_G\}$, com imagem $E \backslash Im(i)$. Por construção então o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & A & \to & A \times G & \to & G & \to & 1 \\ & & id \downarrow & & \psi \downarrow & & id \downarrow & & \\ 1 & \to & A & \to & E & \to & G & \to & 1 \end{array}$$

comuta.

Por outro lado, se existe ψ tal que o diagrama acima comuta, e portanto é equivalente a uma extensão central trivial, então a sequência

$$1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

cinde pela aplicação $\sigma(g) := \psi(1_A, g)$, o que pode ser visto repetindo os mesmos argumentos da ida do lema. $\square$

Vamos agora construir uma maneira de verificar se uma extensão central é equivalente à extensão trivial.

Definição 2.20 *Seja*

$$1 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

uma extensão central e seja $\tau : G \to E$ uma aplicação que satisfaz $\pi \circ \tau = id_G$ e $\tau(1) = 1$. Definamos a aplicação

$$\begin{aligned} \omega : G \times G &\to A \cong i(A) \subset E \\ (x, y) &\mapsto \tau(x)\,\tau(y)\,(\tau(xy))^{-1}. \end{aligned}$$

Perceba que ω está bem definida, pois $\tau(x)\tau(y)(\tau(xy))^{-1} \in ker(\pi) = i(A)$. Além disso, ω satisfaz $\omega(1,1) = \tau(1)\tau(1)(\tau(1))^{-1} = 1$ e

$$\begin{aligned}
\omega(x,y)\,\omega(xy,z) &= \tau(x)\tau(y)(\tau(xy))^{-1}\tau(xy)\tau(z)(\tau(xyz))^{-1} \\
&= \tau(x)\tau(y)\tau(z)(\tau(xyz))^{-1} \\
&= \tau(x)\tau(y)\tau(z)\left[(\tau(yz))^{-1}\tau(yz)\right](\tau(xyz))^{-1} \\
&= \tau(x)\,\omega(y,z)\,\tau(yz)(\tau(xyz))^{-1} \\
&= \tau(x)\tau(yz)(\tau(xyz))^{-1}\omega(y,z) \\
&= \omega(x,yz)\,\omega(y,z)
\end{aligned}$$

onde usou-se que $\omega(y,x) \in A$, e portanto comuta.

Definição 2.21 *Qualquer aplicação $\omega : G \times G \to A$ satisfazendo*

$$\omega(x,y)\,\omega(xy,z) = \omega(x,yz)\,\omega(y,z)$$

*é chamada um **2-cociclo** de G com valores em A.*

Definição 2.22 *Definamos em $A \times G$ uma estrutura de grupo com produto*

$$(a,x)(b,y) := (\omega(x,y)\,ab, xy)$$

onde $(a,x),(b,y) \in A \times G$. Denotaremos $A \times G$ com este produto como $A \times_\omega G$.

Que de fato $A \times_\omega G$ é um grupo vem: da identificação de $(1,1)$ como a identidade, pois $\omega(1,1) = 1$; para $(a,x) \in A \times_\omega G$ temos $\left((\omega(x,y))^{-1}a^{-1}, x^{-1}\right)$ como inversa, onde se usa que $Im(\omega) \subset A$; sejam $(a,x),(b,y),(c,z) \in A \times_\omega G$, então a associatividade vem da identidade de 2-cociclo de ω

$$\begin{aligned}
((a,x)(b,y))(c,z) &= (\omega(x,y)\,ab, xy)(c,z) \\
&= (\omega(xy,z)\,\omega(x,y)\,abc, xyz) \\
&= (\omega(x,yz)\,\omega(y,z)\,abc, xyz) \\
&= (a,x)(\omega(x,y)\,bc, yz) \\
&= (a,x)((b,y)(c,z)).
\end{aligned}$$

Isso nos dá uma correspondência entre o conjunto dos 2-cociclos de G com valores em A e o conjunto das extensões centrais de G por A. De fato, a extensão central de G por A associada ao 2-cociclo ω dada pela sequência exata

$$1 \to A \xrightarrow{i} A \times_\omega G \xrightarrow{p} G \to 1$$

com $i : A \to G$ dada por $a \mapsto (a,1)$.

Lema 2.23 *Seja $\omega : G \times G \to A$ um 2-cociclo. Então a extensão central $A \times_\omega G$ cinde se e somente se existe uma aplicação $\lambda : G \to A$ tal que*

$$\lambda(xy) = \omega(x,y)\,\lambda(x)\,\lambda(y).$$

Demonstração: Basta encontrar um homomorfismo $\sigma : G \to A \times_\omega G$ tal que $p \circ \sigma = id_G$. Perceba que por definição σ tem a forma $\sigma(x) = (\lambda(x), x)$, $x \in G$, $\lambda : G \to A$. Para ser um homomorfismo, temos que

$$\begin{aligned}
\sigma(xy) = \sigma(x)\,\sigma(y) &\iff (\lambda(xy), xy) = (\lambda(x), x)(\lambda(y), y) \\
&\iff (\lambda(xy), xy) = (\omega(x,y)\,\lambda(x)\,\lambda(y), xy) \\
&\iff \lambda(xy) = \omega(x,y)\,\lambda(x)\,\lambda(y).
\end{aligned}$$

$\square$

Definição 2.24 *Definimos o segundo grupo de cohomologia de um grupo G com coeficientes em A como*

$$\mathrm{H}^2(G,A) := \{\omega : G \times G \to A; \omega \text{ é um 2-cociclo}\} / \sim$$

onde definimos a relação $\sim$ da seguinte maneira: sejam ω e ω' 2-cociclos de G com valores em A, então

$$\omega \sim \omega' \iff \exists \lambda : G \to A; \forall x, y \in G, \lambda(xy) = \omega(x,y)\,\omega'(x,y)^{-1}\lambda(x)\,\lambda(y).$$

O produto desse grupo é o induzido pela multiplicação pontual dos 2-cociclos. Perceba que se trata de um grupo abeliano, pois A é abeliano.

Pela definição de $\mathrm{H}^2(G,A)$, temos uma correspondência biunívoca com as classes de equivalência das extensões centrais de G por A. De fato, basta ver que existe um isomorfismo entre extensões centrais referentes a dois 2-cociclos relacionados. Se $\omega \sim \omega'$, temos que $\psi : A \times_\omega G \to A \times_{\omega'} G$ definida por $(a,x) \mapsto (\lambda(x)\,a, x)$, onde $\lambda(xy) = \omega'(x,y)\,\omega(x,y)^{-1}\lambda(x)\,\lambda(y)$, satisfaz

$$\begin{aligned}
\psi((a,x)(b,y)) &= \psi(\omega(x,y)\,ab, xy) \\
&= (\lambda(xy)\,\omega(x,y)\,ab, xy) \\
&= \left(\omega'(w,y)\,\lambda(x)\,\lambda(y)\,\omega(x,y)^{-1}\omega(x,y)\,ab, xy\right) \\
&= (\omega'(w,y)\,\lambda(x)\,a\lambda(y)\,b, xy) \\
&= (\lambda(x)\,a, x)\,(\lambda(y)\,b, y) \\
&= \psi(a,x)\,\psi(b,y)
\end{aligned}$$

e portanto é um homomorfismo. A injetividade segue de que se $\psi(a,x) = \psi(b,y)$, então $(\lambda(x)\,a, x) = (\lambda(y)\,b, y)$, implicando $x = y$ pela segunda coordenada, e isto implicando $a = b$. A sobrejetividade pode ser vista notando que se $(a,x) \in A \times_{\omega'} G$, então temos que $\left(\lambda^{-1}(x)\,a, x\right) \in A \times_\omega G$ satisfaz

$$\psi\left(\lambda^{-1}(x)\,a, x\right) = \left(\lambda(x)\left(\lambda^{-1}(x)\,a\right), x\right) = (a,x).$$

.

2.2.2 Extensões de Álgebras

Passemos agora para extensões centrais em álgebras.

Definição 2.25 *Seja $\mathfrak{a}$ uma álgebra de Lie abeliana sobre $\mathbb{K}$ e $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$. Uma sequência exata de homomorfismos de álgebras de Lie*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

é chamada uma extensão central $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{a}$, se $[\mathfrak{a},\mathfrak{h}] = 0$, onde identificamos $\mathfrak{a}$ como uma subálgebra de $\mathfrak{h}$.

Alguns exemplos.

Exemplo 2.3 *Primeiro, seja*

$$1 \to A \xrightarrow{I} E \xrightarrow{R} G \to 1$$

uma extensão central de grupos de Lie de dimensão finita com homomorfismos diferenciaveis. Então a sequência

$$0 \to Lie(A) \xrightarrow{Lie(I)} Lie(E) \xrightarrow{Lie(R)} Lie(G) \to 0,$$

onde $Lie(I)$ e $Lie(R)$ são respectivamente as derivadas das aplicações I e R, é uma extensão central de álgebras de Lie.

Exemplo 2.4 *Outro exemplo seria o da álgebra de Heisenberg generalizada* $H := \mathbb{C}\left[T, T^{-1}\right] \oplus \mathbb{C}Z$, *com elemento central* Z *e com a álgebra dos polinômios de Laurent* $\mathbb{C}\left[T, T^{-1}\right]$. *O colchete de Lie de* H *é definido como*

$$[f \oplus \lambda Z, g \oplus \mu Z] := \sum k f_k g_{-k} Z$$

com $f = \sum f_n T^n, g = \sum g_n T^n \in \mathbb{C}\left[T, T^{-1}\right]$, $\lambda, \mu, f_n, g_n \in \mathbb{C}$. *Que as aplicações*

$$\begin{aligned} i : \mathbb{C} &\to H \\ \lambda &\mapsto \lambda Z \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} p : H &\to \mathbb{C}\left[T, T^{-1}\right] \\ f \oplus \lambda Z &\mapsto f \end{aligned}$$

são homomorfismos é claro. Temos então a sequência

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{i} H \xrightarrow{p} \mathbb{C}\left[T, T^{-1}\right] \longrightarrow 0$$

com $[\lambda Z, g] = 0$. *Portanto a álgebra de Heisenberg generalizada* H *é a extensão central da álgebra de Lie abeliana dos polinômios de Laurent* $\mathbb{C}\left[T, T^{-1}\right]$ *por* $\mathbb{C}$.

Exemplo 2.5 *Um exemplo importante é a álgebra afim Kac-Moody, como uma generalização da álgebra de Heisenberg generalizada. Se trata da extensão não trivial de uma álgebra associativa* R, *nesse caso* $R = \mathfrak{g}\left[T, T^{-1}\right] = \mathbb{C}\left[T, T^{-1}\right] \otimes \mathfrak{g}$ *(chamada álgebra loop de* $\mathfrak{g}$*), com colchete de Lie*

$$[r \otimes a, s \otimes b] = rs \otimes [a, b]$$

A álgebra afim de $\mathfrak{g}$ *é espaço vetorial* $\hat{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g}\left[T, T^{-1}\right] \oplus \mathbb{C}Z$ *com colchete de Lie dado por*

$$[T^m \otimes a, T^n \otimes b] := T^{m+n} \otimes [a, b] + m\,(a, b)\,\delta_{m+n} Z$$

$$[T^m \otimes a, Z] := 0$$

com $a, b \in \mathfrak{g}$ *e* $m, n \in \mathbb{Z}$, *e onde define-se a forma bilinear simétrica invariante*

$$\begin{aligned} (,) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\to \mathbb{C} \\ a, b &\mapsto (a, b) \end{aligned}$$

que satisfaz

$$([a, b], c) = (a, [b, c]).$$

Sejam as aplicações

$$\begin{aligned} i : \mathbb{C} &\to \hat{\mathfrak{g}} \\ \lambda &\mapsto \lambda Z \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} p : \hat{\mathfrak{g}} &\to \mathfrak{g}\left[T, T^{-1}\right] \\ f \otimes a + \mu Z &\mapsto f \otimes a \end{aligned}$$

que são obviamente homomorfismos de álgebras de Lie. Então temos a sequência exata de álgebras de Lie

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{i} \hat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{p} \mathfrak{g}\left[T, T^{-1}\right] \longrightarrow 0$$

No caso de $\mathfrak{g} = \mathbb{C}$, *temos de novo o caso da álgebra de Heinsenberg generalizada. No caso de* $\mathfrak{g}$ *ser uma álgebra de Lie simples, a forma de Killing é a única forma bilinear simétrica invariante não degenerada (salvo multiplicação por escalar). A única extensão central da álgebra loop é chamada álgebra afim Kac-Moody.*

Definição 2.26 *Duas extensões centrais*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0,\ 0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{h}' \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

são equivalentes se existe um isomorfismo de álgebras de Lie $\psi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}'$ *tal que o diagrama*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathfrak{a} & \to & \mathfrak{h} & \to & \mathfrak{g} & \to & 0 \\ & & id \downarrow & & \psi \downarrow & & id \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathfrak{a} & \to & \mathfrak{h}' & \to & \mathfrak{g} & \to & 0 \end{array}$$

comuta.

Definição 2.27 *Uma sequência exata de homomorfismos de álgebras de Lie*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

cinde se existe um homomorfismo de álgebras de Lie $\beta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *com* $\pi \circ \beta = id_{\mathfrak{g}}$. *Chamamos* β *de aplicação de cisão. Uma extensão central é dita trivial se ela é equivalente a uma sequência exata de homomorfismos de álgebras de Lie*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

A prova do lema a seguir é idêntica ao caso para grupos, e será omitida.

Lema 2.28 *Uma extensão central cinde se e somente se ela é equivalente a uma extensão central trivial.*

Definição 2.29 *Uma aplicação* $\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ *com as propriedades*

1. $\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ *é bilinear e alternada*
2. $\Theta(X, [Y, Z]) + \Theta(Y, [Z, X]) + \Theta(Z, [X, Y]) = 0$

*é chamada um **2-cociclo** em* $\mathfrak{g}$ *com valores em* $\mathfrak{a}$.

Lema 2.30 *Valem as seguintes afirmações:*

1. *Toda extensão central* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$ *por* $\mathfrak{a}$ *vem de um 2-cociclo* $\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$.
2. *Todo 2-cociclo* $\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ *gera uma extensão central* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$ *por* $\mathfrak{a}$.
3. *Uma extensão central cinde, e portanto é trivial, se e somente se existe um* $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ *com* $\Theta(X, Y) = \mu([X, Y])$, *para todos* $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Demonstração:

1. Trataremos $\mathfrak{a}$ como subálgebra de $\mathfrak{h}$. Seja uma extensão central

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

como π é sobrejetiva, existe uma aplicação linear $\beta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ com $\pi \circ \beta = id_{\mathfrak{g}}$. Definamos $\Theta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ como

$$\Theta(X, Y) := [\beta(X), \beta(Y)] - \beta([X, Y])$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Pode-se verificar diretamente que $\Theta(X, Y)$ é um 2-cociclo. De fato, ser bilinear vem de β ser linear e da bilinearidade do colchete. Ser alternada resulta também da linearidade de β e do colchete ser alternado

$$\Theta(X, X) := [\beta(X), \beta(X)] - \beta([X, X]) = 0 - \beta(0) = 0.$$

A propriedade 2 de 2-cociclo resulta tanto de Θ ser bilinear quanto da identidade de Jacobi do colchete

$$\begin{aligned}\Theta(X,[Y,Z])+\Theta(Y,[Z,X])+\Theta(Z,[X,Y]) &= \Theta(X,[Y,Z]+Y,[Z,X]+Z,[X,Y]) \\ &= \Theta(0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Seja o isomorfismo linear

$$\begin{aligned}\psi : \mathfrak{g}\times\mathfrak{a} &\to \mathfrak{h} \\ X\oplus Y=(X,Y) &\to \beta(X)+Y\end{aligned}$$

que é um isomorfismo, pois se $(X,Y),(Z,K)\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{a}$, então

$$\begin{aligned}\psi((X,Y)+(Z,K)) &= \psi((X+Z,Y+K)) \\ &= \beta(X+Z)+Y+K \\ &= \beta(X)+Y+\beta(Z)+K \\ &= \psi(X,Y)+\psi(Z,K)\end{aligned}$$

e $\psi^{-1}(Z)=(\pi(Z),Z-\beta\circ\pi(Z))$. Definindo o colchete de Lie de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{a}$ como sendo

$$[X\oplus Z, Y\oplus Z']_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{a}} := [X,Y]_{\mathfrak{g}}\oplus\Theta(X,Y)$$

temos que

$$\begin{aligned}[\psi(X,Z),\psi(Y,Z')]_{\mathfrak{h}} &= [\beta(X)+Z,\beta(Y)+Z']_{\mathfrak{h}} \\ &= [\beta(X),\beta(Y)]_{\mathfrak{h}} \\ &= \beta\left([X,Y]_{\mathfrak{g}}\right)+\Theta(X,Y) \\ &= \psi\left([X,Y]_{\mathfrak{g}},\Theta(X,Y)\right) \\ &= \psi\left([X,Y]_{\mathfrak{g}}\oplus\Theta(X,Y)\right) \\ &= \psi\left([X\oplus Z,Y\oplus Z']_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{a}}\right)\end{aligned}$$

e portanto ψ é um isomorfismo de álgebras de Lie. Desse modo, o 2-cociclo Θ gera a extensão central.

2. Segue de que $\mathfrak{h}:=\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{a}$ tem colchete

$$[X\oplus Z,Y\oplus Z']_{\mathfrak{h}} := [X,Y]_{\mathfrak{g}}\oplus\Theta(X,Y)$$

se e somente se Θ é um 2-cociclo. Pelo item anterior tal colchete define uma extensão central.

3. Suponha que $\sigma:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}\cong\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{a}$ é uma aplicação de cisão. Então σ é um homomorfismo, e pode ser escrito como $\sigma(X)=X+\mu(X)$, com $\mu\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$. Temos que

$$[\sigma(X),\sigma(Y)]=\sigma([X,Y])=[X,Y]+\mu([X,Y])$$

e

$$[\sigma(X),\sigma(Y)]=[X,Y]+\Theta([X,Y])$$

e portanto $\Theta([X,Y]) = \mu([X,Y])$. Agora se

$$\Theta([X,Y]) = \mu([X,Y])$$

e $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$, então como μ é linear, Θ é um 2-cociclo. A aplicação linear $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h} \cong \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$ definida por $\sigma(X) := X + \mu(X)$ é um homomorfismo,

$$\begin{aligned}\sigma([X,Y]) &= [X,Y] + \mu([X,Y]) \\ &= [X,Y] + \Theta(X,Y) \\ &= [X + \mu(X), Y + \mu(Y)] \\ &= [\sigma(X), \sigma(Y)]\end{aligned}$$

e portanto σ é uma aplicação de cisão.

□

Definição 2.31 *Dados espaços vetoriais* $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{a}$ *sobre um corpo* $\mathbb{K}$*, definimos os conjuntos*

$$\mathrm{Alt}^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) := \{\Theta : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{a};\ \Theta{:}\mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{a} \text{ é bilinear e alternada}\}$$

$$\mathrm{Z}^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) := \left\{\Theta \in \mathrm{Alt}^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a}); \Theta(X,[Y,Z]) + \Theta(Y,[Z,X]) + \Theta(Z,[X,Y]) = 0\right\}$$

$$\mathrm{B}^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) := \{\Theta : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{a}; \exists\mu \in Hom_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\mathfrak{a}), \Theta = \tilde{\mu}\}$$

$$\mathrm{H}^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) := \mathrm{Z}^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a})/\mathrm{B}^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$$

onde definimos $\tilde{\mu}(X,Y) := \mu([X,Y])$ *para* $X, Y \in \mathfrak{g}$*, e* $Hom_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ *é o conjunto de morfismos* $\mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$*. Chamamos* $\mathrm{H}^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ *de segundo grupo de cohomologia de* $\mathfrak{g}$ *com valores em* $\mathfrak{a}$*.*

Por definição $\mathrm{Z}^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) \subset \mathrm{Alt}^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$. Como μ é linear, pela definição de $\mathrm{B}^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ temos que $\mathrm{B}^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) \subset \mathrm{Z}^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$. Pelo terceiro item do lema anterior, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.32 *O segundo grupo de cohomologia* $\mathrm{H}^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ *está em uma correspondência biunívoca com as classes de equivalência das extensões centrais de* $\mathfrak{g}$ *por* $\mathfrak{a}$*.*

Demonstração: Por definição, $\mathrm{H}^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ é o conjunto de 2-cociclos que, pelo terceiro item do lema anterior, não é trivial. Como pelos outros dois items do mesmo lema existe uma relação biunívoca entre o conjunto de 2-cociclos e as extensões centrais, então conclui-se que $\mathrm{H}^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ possui uma relação biunívoca com o conjunto das extensões centrais não triviais. □

2.3 Quantização de Simetrias

Neste capítulo será apresentado de maneira mais formal a quantização de simetrias na mecânica quântica. Para isso, será desenvolvido as estruturas da teoria quântica, e disto teremos a razão das representações da álgebra de Virasoro estudadas no próximo capítulo. Também será útil apresentar tais estruturas de maneira mais formal para o melhor entendimento das aplicações. Como referência da construção algébrica envolvida, ver [22]. Para uma apresentação introdutória, ver [23].

A mecânica quântica é o estudo de subespaços unidimensionais de espaços de Hilbert, denominados raios. Comecemos então por um estudo de tal espaço e das exigências para a aplicação. Para uma apresentação de espaços de Hilbert no contexto dos espaços de Banach, ver [24, 25, 31]. No contexto de espaços métricos, ver [13].

2.3.1 Espaço de Hilbert

Definição 2.33 *Uma forma hermitiana em um espaço vetorial $\mathbb{H}$ sobre o corpo $\mathbb{C}$ é uma aplicação $\mathbb{R}$-bilinear*

$$\langle , \rangle : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{C}$$

que satisfaz $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ e $\langle u, av + bw\rangle = a\langle u, v\rangle + b\langle u, w\rangle$, para todos $u, v, w \in \mathbb{H}$ e $a, b \in \mathbb{C}$.

Perceba que se $a, b \in \mathbb{C}$, $u, v, w \in \mathbb{H}$, então

$$\begin{aligned}\langle au + bv, w\rangle &= \overline{\langle w, au + bv\rangle} \\ &= \overline{a\langle w, u\rangle} + \overline{b\langle w, v\rangle} \\ &= \overline{a}\langle u, w\rangle + \overline{b}\langle v, w\rangle\end{aligned}$$

e portanto $\langle , \rangle$ é antilinear na primeira entrada. Além disso, para que seja um produto interno, basta que a forma seja positiva definida, ou seja, $\langle u, u\rangle > 0$, para todo $u \in \mathbb{H}\setminus\{0\}$.

Definição 2.34 *Um espaço pré-Hilbert $\mathbb{H}$ é um espaço vetorial complexo com uma forma hermitiana positiva definida, chamada produto interno ou produto escalar.*

Definição 2.35 *Um espaço vetorial complexo $\mathbb{H}$ munido de um produto interno como definido acima é chamado espaço de Hilbert se $\mathbb{H}$ for completo como um espaço normado com a norma dada pelo produto interno.*

Relembrando que um espaço métrico é completo se toda sequência de Cauchy convergir neste espaço.

Usualmente queremos que o espaço de Hilbert $\mathbb{H}$ seja separável, ou seja, que tenha um subconjunto enumerável denso, pela seguinte razão.

Definição 2.36 *Seja $\mathbb{H}$ um espaço de Hilbert. Um subconjunto $S \subset \mathbb{H}$ é dito um conjunto ortonormal se $\langle s_1, s_2\rangle = 0$ se $s_1 \neq s_2$, $s_1, s_2 \in S$, e $\langle s, s\rangle = 1$ para todo $s \in S$. Um conjunto ortonormal maximal em $\mathbb{H}$ é chamado uma base ortonormal de $\mathbb{H}$.*

Teorema 2.37 *Todo espaço de Hilbert tem uma base ortonormal.*

Demonstração: Seja $\{M_a\}$ uma cadeia de conjuntos ortonormais de um espaço de Hilbert, ou seja, uma coleção de conjuntos ortonormais de um espaço de Hilbert tal que $M_a \subsetneq M_b$ ou $M_b \subsetneq M_a$, para todos os índices a, b. Perceba que $\bigcup M_a$ é um conjunto ortonormal, e para todo $x, y \in \bigcup M_a$, $x \neq y$, existe M_b tal que $x, y \in M_b$. Como $\subsetneq$ é uma relação de ordem parcial, e como para toda cadeia $\{M_a\}$ existe um maximal M_b como descrito, então pelo lema de Zorn o espaço de Hilbert possui uma base ortonormal. □

Lema 2.38 *Um espaço de Hilbert $\mathbb{H}$ separável possui uma base ortonormal enumerável, a sequência de vetores (e_n), $e_n \in \mathbb{H}$, tal que para todo $f \in \mathbb{H}$ existe uma única representação como uma série convergente*

$$f = \sum_n \alpha_n e_n$$

com $\alpha_n = \langle e_n, f\rangle \in \mathbb{C}$ (estes números são conhecidos como coeficientes de Fourier da expansão de Fourier $\sum_n \alpha_n e_n$ de f).

Demonstração: Seja $\{e_\mu\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{H}$, com $\mathbb{H}$ separável. Suponha que $\{e_\mu\}$ é não-enumerável. Temos que

$$\|e_\mu - e_\nu\| = (\langle e_\mu - e_\nu, e_\mu - e_\nu\rangle)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2},\ \mu \neq \nu$$

e portanto se considerarmos as bolas $B\left(e_i, \frac{1}{2}\right)$ com centro em elementos da base (tal que $x \in B\left(e_i, \frac{1}{2}\right)$ se e só se $\|x - e_i\| < \frac{1}{2}$), temos que por $\mathbb{H}$ ser separável existe um conjunto denso enumerável $\{v_\mu\}$, e por ser denso ao menos um de seus elementos pertence a cada bola. Como as bolas são disjuntas, temos que o conjunto delas é não-enumerável. Porém isso implica $\{v_\mu\}$ não-enumerável, contrariando o fato de $\mathbb{H}$ ser separável. Portanto $\{e_\mu\}$ é enumerável.

Agora, escolhamos uma ordem em $\{e_\mu\}$ em uma sequência $\{e_1, e_2, ...\}$.

Afirmação: Para $x \in \mathbb{H}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$dist\left(x, span\left\{e_1, ..., e_n\right\}\right) = \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|$$

De fato, para $c_i \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\|^2 &= \|x\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\|^2 - 2\left\langle x, \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \overline{\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j\right) \delta_{ij} - 2\sum_{i=1}^{n} c_i \langle x, e_i\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} c_i \langle x, e_i\rangle + \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2\right) \\
&= \langle x, x\rangle + \left(\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} c_i \langle x, e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2\right) - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 \\
&= \langle x, x\rangle + \sum_{i=1}^{n} |c_i - \langle x, e_i\rangle|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2
\end{aligned}$$

de onde temos que o $dist\left(x, span\left\{e_1, ..., e_n\right\}\right) = inf_{c_i \in \mathbb{C}} \|x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\| = \langle x, x\rangle - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2$ ocorre em $c_i = \langle x, e_i\rangle$.

Mostremos que $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i$. Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $dist\left(x, span\left\{e_1, ..., e_{n_0}\right\}\right) < \varepsilon$. Então para $n \leq n_0$ temos

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i \right\| = dist\left(x, span\left\{e_1, ..., e_n\right\}\right) \leq dist\left(x, span\left\{e_1, ..., e_{n_0}\right\}\right) < \varepsilon$$

□

De agora em diante $\mathbb{H}$ será um espaço de Hilbert separável.

2.3.2 Projetivo e Operadores

Definamos $\gamma : \mathbb{H}\backslash\{0\} \to \mathbb{P}$, a aplicação canônica do espaço de Hilbert $\mathbb{H}$ no seu projetivo $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathbb{H})$, ou seja, $\mathbb{P}$ é o espaço dos subespaços unidimensionais de $\mathbb{H}$. Este espaço projetivo é o análogo quântico ao espaço de fase clássico. Boas referências sobre isto podem ser encontradas em [6, 26].

Definição 2.39 *Sejam $\phi = \gamma(g)$ e $\eta = \gamma(h)$ com $g, h \in \mathbb{H}$. Definimos a transição de probabilidade como a aplicação $\delta : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\delta(\phi, \eta) := \frac{|\langle g, h\rangle|^2}{\|g\|^2 \|h\|^2}.$$

Definição 2.40 *Uma aplicação bijetiva $T : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ com a propriedade*

$$\delta (T\phi, T\eta) = \delta (\phi, \eta)$$

com $\phi, \eta \in \mathbb{P}$, é chamada transformação projetiva ou automorfismo projetivo.

Ou seja, o conjunto das transformações projetivas, denotado por $Aut(\mathbb{P})$, forma o grupo de bijeções de $\mathbb{P}$ que preserva a transição de probabilidade. Em linguagem física, $Aut(\mathbb{P})$ é todo o grupo de simetria do espaço de estados da mecânica quântica.

Existe um porém: trabalhar no espaço projetivo não é muito fácil. Então normalmente trabalha-se no próprio espaço de Hilbert. Isso gera alguns problemas técnicos. Para começar a analisá-los, definamos operadores unitários e anti-unitários.

Definição 2.41 *Um operador unitário U em $\mathbb{H}$ é uma aplicação $U : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ que deixa o produto interno de $\mathbb{H}$ invariante, ou seja,*

$$\langle Uu, Uv \rangle = \langle u, v \rangle, \ \forall u, v \in \mathbb{H}.$$

Definição 2.42 *Um operador anti-unitário U em $\mathbb{H}$ é uma aplicação $U : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ que deixa o produto interno de $\mathbb{H}$ invariante a menos de um sinal negativo, ou seja,*

$$\langle Uu, Uv \rangle = - \langle u, v \rangle, \ \forall u, v \in \mathbb{H}.$$

Linearidade e antilinearidade são definidos como usual. Um operador $U : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ é dito linear se $U(\alpha u) = \alpha U(u)$, e é dito antilinear se $U(\alpha u) = \alpha^* U(u)$, com $\alpha \in \mathbb{C}$, $u \in \mathbb{H}$, e α^* sendo o complexo conjugado de α.

Perceba que ambos os tipos de operadores preservam a transição de probabilidade, ou seja, $\gamma \circ U$ preserva a transição de probabilidade. De fato, se $g, h \in \mathbb{H}$, então se U for unitário e linear ou anti-unitário e antilinear, com $\phi = \gamma(g)$ e $\eta = \gamma(h)$

$$\begin{aligned}
\delta(\phi, \eta) &= \delta(\gamma(g), \gamma(h)) \\
&= \frac{|\langle g, h \rangle|^2}{\|g\|^2 \|h\|^2} \\
&= \frac{|\langle Ug, Uh \rangle|^2}{\|Ug\|^2 \|Uh\|^2} \\
&= \delta(\gamma(Ug), \gamma(Uh)).
\end{aligned}$$

Seja $\mathrm{U}(\mathbb{H})$ o conjunto de todos os operadores unitários em $\mathbb{H}$. Para todo $U \in \mathrm{U}(\mathbb{H})$, definamos a aplicação $\widehat{\gamma}(U) : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ por

$$\widehat{\gamma}(U)\phi = (\gamma(Ug))$$

para todo $\phi = \gamma(g) \in \mathbb{P}$.

Assim definido, o conjunto $\mathrm{U}(\mathbb{H})$ dos operadores unitários em $\mathbb{H}$ formam um grupo por composição, chamado grupo unitário de $\mathbb{H}$. De fato, formam um grupo topológico com a topologia dada pela subbase com abertos típicos

$$B_u(U_0, r) := \{U \in U(\mathbb{H}); \|U_0(u) - U(u)\| < r\}, \ u \in \mathbb{H}, \ r > 0$$

onde a norma dos operadores é definida pelo produto interno de $\mathbb{H}$. Tal topologia é chamada topologia forte.

Proposição 2.43 $\mathrm{U}(\mathbb{H})$ *é um grupo topológico com respeito a topologia forte.*

Demonstração: Basta mostrar que a operação do grupo $(U, U') \mapsto UU' = U \circ U'$ e $U \mapsto U^{-1}$ são contínuas nesta topologia. Para isso, seja $(U, U') \in \mathrm{U}(\mathbb{H}) \times \mathrm{U}(\mathbb{H})$ e $f \in \mathbb{H}$, $r > 0$. Mostremos que existem subconjuntos abertos $J, J' \subset \mathrm{U}(\mathbb{H})$ tais que

$$\{VV';\, V \in J,\, V' \in J'\} \subset B_f(UU', r)$$

e portanto é contínua. Pelas propriedades da norma e como $V \in \mathrm{U}(\mathbb{H})$,

$$\begin{aligned}\|UU'(f) - VV'(f)\| &= \|UU'(f) - VU'(f) + VU'(f) - VV'(f)\| \\ &\leq \|UU'(f) - VU'(f)\| + \|VU'(f) - VV'(f)\| \\ &= \|U(U'(f)) - V(U'(f))\| + \|U'(f) - V'(f)\|\end{aligned}$$

temos que $J = B_{U'(f)}\left(U, \frac{r}{2}\right)$ e $J' = B_f\left(U', \frac{r}{2}\right)$ satisfaz a afirmação, provando a continuidade do produto. Para provar a continuidade da inversão, perceba que $\left\|V\left(U^{-1}(f)\right) - U\left(U^{-1}(f)\right)\right\| = \left\|U^{-1}(f) - V^{-1}(f)\right\|$, e se $\|V(f) - U(f)\| < r$, então $\left\|U^{-1}(f) - V^{-1}(f)\right\| < r$, pois f é arbitrário. □

Definição 2.44 *Para um grupo topológico G uma representação unitária R de G em um espaço de Hilbert $\mathbb{H}$ é um homomorfismo contínuo $R : G \to \mathrm{U}(\mathbb{H})$ com respeito a topologia forte. Uma representação projetiva R de G é, em geral, um homomorfismo contínuo $R : G \to \mathrm{U}(\mathbb{P})$ com respeito a topologia forte em $\mathrm{U}(\mathbb{P})$.*

A seguir temos um importante teorema conhecido como Teorema de Wigner. Sua prova, por ser longa, será omitida, porém pode ser encontrada em [6, 34].

Teorema 2.45 *Para toda transformação projetiva $T \in Aut(\mathbb{P})$ existe um operador unitário e linear ou anti-unitário e antilinear U que satisfaz $T = \widehat{\gamma}(U)$.*

Lema 2.46 *A sequência*

$$1 \longrightarrow U(1) \xrightarrow{i} \mathrm{U}(\mathbb{H}) \xrightarrow{\widehat{\gamma}} \mathrm{U}(\mathbb{P}) \longrightarrow 1$$

com $i(\lambda) := \lambda id_{\mathbb{H}}$, $\lambda \in U(1)$, é uma sequência exata de homomorfismos e portanto define uma extensão central de $\mathrm{U}(\mathbb{P})$ por $U(1)$.

Demonstração: Primeiro, mostremos que $\widehat{\gamma}$ é um homomorfismo. Sejam $U, V \in \mathrm{U}(\mathbb{H})$ e $\phi \in \mathbb{H}$, então,

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma}(UV)(\gamma(\phi)) &= \gamma \circ U \circ V(\phi) \\ &= \widehat{\gamma}(U)(\gamma \circ V(\phi)) \\ &= \widehat{\gamma}(U) \circ \widehat{\gamma}(V)(\gamma(\phi))\end{aligned}$$

e portanto é um homomorfismo. Por construção, temos que só falta provar a exatidão da sequência, ou seja, que $ker(\widehat{\gamma}) = i(U(1))$. Se $U \in ker(\widehat{\gamma})$, então pela definição de $\widehat{\gamma}$ temos $\widehat{\gamma}(U)(\gamma(f)) = \gamma(Uf) = \gamma(f)$, para todo $f \in \mathbb{H}$. Assim temos que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda f = Uf$, implicando $U = \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{H}} \in i(U(1))$. Por outro lado, se $\lambda \in U(1)$, então para todo $f \in \mathbb{H}$, temos

$$\widehat{\gamma}(\lambda \mathrm{id}_{\mathbb{H}})(\gamma(f)) = \gamma(\lambda f) = \gamma(f)$$

e portanto $\lambda \mathrm{id}_{\mathbb{H}} \in ker(\widehat{\gamma})$. □

2.3.3 Simetria em Física e Quantização

Uma simetria é manifestada por um homomorfismo de grupos $\tau : G \to Aut\,(Y)$, onde G é o grupo de simetria e Y é o espaço de fase clássico, geralmente representado por uma variedade com uma forma simplética, e um grupo $Aut\,(Y)$ que deixa a física do sistema clássico invariante. Referências da teoria clássica podem ser encontradas em [10, 11].

A quantização de um sistema clássico Y é encontrar um espaço de Hilbert $\mathbb{H}$ onde os observáveis clássico se tornem operadores em $\mathbb{H}$ (geralmente hermitianos), tais que seus comutadores correspondam aos colchetes de Poisson das variáveis clássicas. Após quantização, é assumido que um homomorfismo, geralmente contínuo, $T : G \to \mathrm{U}\,(\mathbb{P})$ é induzido. Tal homomorfismo é justificado por argumentos físicos. Este homomorfismo é algumas vezes chamado de quantização da simetria τ. Para uma visão geral do processo de quantização, do seus primórdios até a teoria de deformação da álgebra clássica, que descreve a quantização como uma deformação da álgebra de Poisson com parâmetro $\hbar$, veja [26].

Portanto por suposição temos que existe tal aplicação $T : G \to \mathrm{U}\,(\mathbb{P})$. Porém trabalhamos com o espaço de Hilbert associado ao projetivo, e uma pergunta natural seria se existe uma aplicação $S : G \to \mathrm{U}\,(\mathbb{H})$ tal que $S \circ \widehat{\gamma} = T$. Geralmente tal função não existe. Isso se deve ao fato de que a existência de T implica uma representação projetiva: seja $U\,(R)$ o operador unitário ou anti-unitário relacionado a $R \in T\,(G)$, temos para $R_i \in T\,(G)$ que $U\,(R_1 R_2)$ e $U\,(R_1)\,U\,(R_2)$ levam ao mesmo subespaço unidimensional (complexo), e portanto podem diferir por somente uma fase (termo utilizado para descrever um elemento de $U\,(1)$, usualmente escrito em sua forma exponencial)

$$U\,(R_1)\,U\,(R_2) = e^{\phi(R_1,R_2)}U\,(R_1 R_2)$$

Exigindo associatividade para a imagem de S, obtemos

$$\phi\,(R_1, R_2) + \phi\,(R_1 R_2, R_3) = \phi\,(R_1, R_2 R_3) + \phi\,(R_2, R_3)$$

implicando em ϕ ser um 2-cociclo. Isso acarreta que a aplicação S gera uma representação não de G, mas de uma extensão central de G, que pelo resultado do Lema 2.45 seria por $U\,(1)$. Caso seja trivial, tal extensão pode ser eliminada dos elementos da álgebra. Caso seja uma extensão não-trivial, tal representação projetiva é denominada intríseca, e pode ser tratada de acordo com o seguinte teorema, cuja prova pode ser encontrada em [6].

Teorema 2.47 *A fase ϕ de qualquer representação $S : G \to \mathrm{U}\,(\mathbb{H})$ de um dado grupo G pode ser feita $\phi = 0$ se*

1. *Os elementos da base da representação extensão central da álgebra de G podem ser redefinidos tal que se obtenha uma representação da álgebra de G.*

2. *G é simplesmente conexo.*

O primeiro item pode sempre ser satisfeito. De fato, sejam $t_a \in \mathfrak{su}\,(1) \times \mathfrak{g}$, onde $\mathfrak{g}$ é a álgebra de G. Temos que por definição

$$[t_a, t_b] = f^c_{ab} t_c + p_{ab} Z$$

e pela identidade de Jacobi obtemos que

$$f^a_{bc} f^e_{ad} + f^a_{cd} f^e_{ab} + f^a_{db} f^e_{ac} = 0$$

$$f^a_{bc} p_{ad} + f^a_{cd} p_{ab} + f^a_{db} p_{ac} = 0$$

que são satisfeitas por um conjunto de soluções não nulas $p_{ab} = f^e_{ab}\eta_e$, com η_e constantes reais. Definindo $\widetilde{t}_a = t_a + \eta_a$, obtemos $\left[\widetilde{t}_a, \widetilde{t}_b\right] = f^c_{ab}\widetilde{t}_c$.

Para o caso de G não ser simplesmente conexo, pode-se expandir G para um grupo simplesmente conexo C, seu recobrimento universal, pelo fato de que $G \cong C/H$, onde H é um subgrupo invariante de

C. Tal procedimento não modifica a física envolvida. Além disso, C é único a menos de isomorfismos (ver [21]).

Teremos então que buscar uma representação unitária da extensão central do grupo de recobrimento universal de G por $U(1)$.

Temos assim o seguinte teorema.

Teorema 2.48 *Seja G um grupo e $T : G \to \mathrm{U}(\mathbb{P})$ um homomorfismo. Então existe uma extensão central E de G por $U(1)$ e um homomorfismo $S : E \to \mathrm{U}(\mathbb{H})$ tais que $T \circ \pi = \widehat{\gamma} \circ S$, onde $\pi : E \to G$ é a projeção canônica.*

Demonstração: Que $\widehat{\gamma}$ é um homomorfismo foi provado no Lema 2.46.

Definamos
$$E := \{(U, g) \in \mathrm{U}(\mathbb{H}) \times G; \widehat{\gamma}(U) = T(g)\}.$$
Como tanto $\widehat{\gamma}$ quanto T são homomorfismos, então E é um subgrupo de $\mathrm{U}(\mathbb{H}) \times G$. Definamos também a inclusão
$$\begin{aligned} i : U(1) &\to E \\ \lambda &\mapsto (\lambda id_{\mathbb{H}}, id_G). \end{aligned}$$
Como a inclusão i e a projeção canônica π são homomorfismos, então
$$1 \longrightarrow U(1) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$
é uma extensão central. Portanto a projeção $S : E \to \mathrm{U}(\mathbb{H})$ na primeira entrada de E é um homomorfismo que satisfaz $T \circ \pi = \widehat{\gamma} \circ S$. □

A quantização canônica é um procedimento (não formal) de encontrar um espaço de Hilbert $\mathbb{H}$ que espelhe as propriedades básicas de um dado sistema clássico.

Para um sistema clássico Y representado por uma forma simplética em $\mathbb{R}^{2n}$, com observáveis relevantes $f, g,$, são definidos operadores hermitianos (condição necessária para se obter autovalores reais, que seriam as medidas) $\widehat{f}, \widehat{g}$, tais que preservem o parênteses de Poisson
$$\{f, g\} = \sum_{1 \leq r \leq k} \left(\frac{\partial f}{\partial q_r} \frac{\partial g}{\partial p_r} - \frac{\partial f}{\partial p_r} \frac{\partial g}{\partial q_r} \right)$$
onde q_r, p_r são as variáveis de Y. Ou seja, $\{.,.\} \to i\,[.,.]$ de tal modo que
$$\left[\widehat{f}, \widehat{g}\right] = -i\hbar\widehat{\{f, g\}}$$
onde $\hbar$ é o parâmetro de não comutatividade do sistema quântico. Além disso, se exige que

- $\widehat{1} = id_{\mathbb{H}}$
- $[\widehat{p}_r, \widehat{q}_s] = -i\hbar\delta_{rs}$, $[\widehat{p}_r, \widehat{p}_s] = [\widehat{q}_r, \widehat{q}_s] = 0$

que são conhecidas como **condições de Dirac**. Como nem todos os observáveis clássicos podem ser quantizados dessa forma, se busca um subconjunto $\mathcal{A}$ do conjunto de observáveis clássicos que forme uma álgebra de Lie em relação ao parênteses de Poisson. Desse modo, a quantização canônica tem por objetivo encontrar uma representação de $\mathcal{A}$ no espaço de Hilbert $\mathbb{H}$ satisfazendo as condições de Dirac.

Exemplo 2.6 *Como exemplo, apresentemos a quantização do oscilador harmônico unidimensional. Classicamente, o oscilador harmônico unidimensional é dado pela equação hamiltoniana*

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\left(q^2 + p^2\right).$$

O parênteses de Poisson para os observáveis $1, q, p, H$ *são*

$$\begin{aligned} \{1,q\} = \{1,p\} = \{1,H\} &= 0 \\ \{q,p\} &= 1 \\ \{H,q\} &= -p \\ \{H,p\} &= q. \end{aligned}$$

Buscamos então uma representação de $\mathcal{A} = \{1, q, p, H\}$ *em um espaço de Hilbert* $\mathbb{H}$ *satisfazendo as condições de Dirac. Como espaço de Hilbert, escolhamos o espaço das sequências complexas de quadrado somável* l^2 *(ver [13]). Denotando por* e_n *os elementos da base usual de* l^2*, podemos definir*

$$\begin{aligned} \hat{H}(e_n) &:= \hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)e_n \\ A^*(e_n) &:= \sqrt{n+1}e_{n+1} \\ A(e_0) &:= 0 \\ A(e_{n+1}) &:= \sqrt{n+1}e_n \end{aligned}$$

que são bem definidas no subespaço $D \subset \mathbb{H}$ *das sequências finitas, que são combinações lineares finitas dos elementos da base. Chamamos* A *de operador aniquilação e seu adjunto* A^* *de operador criação. Definindo os operadores* $\hat{Q} = \frac{\sqrt{\hbar}}{2}(A + A^*)$ *e* $\hat{P} = -\frac{i\sqrt{\hbar}}{2}(A - A^*)$*, temos que os operadores até aqui definidos satisfazem os seguintes comutadores em* D

$$\begin{aligned} \left[\hat{Q}, \hat{H}\right] &= i\hbar\hat{P} \\ \left[\hat{P}, \hat{H}\right] &= -i\hbar\hat{Q} \\ \left[\hat{Q}, \hat{P}\right] &= i\hbar \\ \left[\hat{Q}, \hat{Q}\right] = \left[\hat{P}, \hat{P}\right] &= 0. \end{aligned}$$

Identificando $\hat{1} = id_{\mathbb{H}}$*, temos satisfeitas as condições de Dirac. Esta é a quantização usual em física para o oscilador harmônico unidimensional.*

Perceba que a álgebra de Lie definida pelos colchetes é isomorfa a extensão central unidimensional da álgebra de Heinsenberg. De fato, a álgebra de Heinsenberg usual pode ser obtida de sua versão generalizada impondo que a dimensão da álgebra seja igual a dois (ver Exemplo 2.4). Sejam A *e* A^* *os elementos da base da álgebra, e* Z *a extensão central. Então o colchete será*

$$[A \oplus \lambda Z, A^* \oplus \lambda Z] = Z.$$

Omitindo o Z *do colchete e denotando-o por* 1*, temos*

$$[A, A^*] = 1$$

que é satisfeito pelos A *e* A^* *definidos para o oscilador harmônico unidimensional.*

Para casos mais complexos, geralmente utiliza-se a ideia deste caso, como veremos na aplicação da teoria de cordas.

Para exemplo da importância do oscilador harmônico em construções mais complexas, ver [12].

Capítulo 3

Transformação Conforme

Neste capítulo iremos definir e explorar as transformações conformes em variedades semi-Riemannianas planas, basicamente $\mathbb{R}^n$ munido de uma forma bilinear simétrica não degenerada. O objetivo será não só encontrar as transformações para cada caso de n e de forma bilinear, mas também suas relações com o grupo ortogonal generalizado quando definimos o grupo de transformações conformes a partir de uma extensão de $\mathbb{R}^n$ a ser definida, e assim a álgebra de Lie associada. A importância principal é a conexão da álgebra conforme com a álgebra de Witt, e portanto com a álgebra de Virasoro, que será explicitamente desenvolvida no próximo capítulo. Como referência geral, ver [2, 4]. Para aplicações, ver [1, 9].

3.1 Aplicações Conformes

Primeiro definamos aplicação conforme em uma variedade semi-Riemanniana. Ver [8] sobre variedades.

Definição 3.1 *Uma variedade semi-Riemanniana é um par (M, g) consistindo de uma variedade diferenciável de classe C^∞, M, de dimensão n e um campo tensorial de classe C^∞, g, que atribui para cada ponto $a \in M$ uma forma bilinear simétrica e não degenerada no espaço tangente T_aM*

$$g_a : T_aM \times T_aM \to \mathbb{R}.$$

Em coordenadas locais $x^1, \ldots, x^n$ de M (dada por uma carta $\phi : U \to V$ em um aberto $U \subset M$ com valores no aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, $\phi(a) = \left(x^1(a), \ldots, x^n(a)\right)$, $a \in U$) a forma bilinear g_a em T_aM pode ser escrita como

$$g_a(X, Y) = g_{\mu\nu}(a) X^\mu Y^\nu$$

onde os vetores tangentes $X = X^\mu \partial_\mu$, $Y = Y^\nu \partial_\nu \in T_aM$ estão escritos em respeito a base

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \mu = 1, ..., n,$$

do espaço tangente T_aM que é induzida pela carta ϕ.

Por definição, a matriz $[g_{\mu\nu}(a)]$ é não degenerada e simétrica para todo $a \in U$, ou seja

$$\det([g_{\mu\nu}(a)]) \neq 0 \text{ e } [g_{\mu\nu}(a)]^t = [g_{\mu\nu}(a)], \forall a \in U.$$

Além disso, a diferenciabilidade de g implica que os coeficientes $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$ de $[g_{\mu\nu}(a)]$, que dependem das coordenadas x^j de a, são classe C^∞para estas coordenadas.

Exemplo 3.1 *O par* $\mathbb{R}^{k,n} = \left(\mathbb{R}^{k+n}, g^{k,n}\right)$ *para* $k, n \in \mathbb{N}$, *onde* $g^{k,n}(X,Y) := \langle X, Y\rangle_{k,n}$, *é uma variedade semi-Riemanniana. Perceba que* $[g_{\mu\nu}] = [T]_c = \begin{pmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

Exemplo 3.2 *O produto* $S^p \times S^q \subset \mathbb{R}^{p+1,0} \times \mathbb{R}^{0,q+1} \cong \mathbb{R}^{p+1,q+1}$, *com a p-esfera*

$$S^p = \left\{X \in \mathbb{R}^{p+1};\, g^{p+1,0}(X,X) = 1\right\} \subset \mathbb{R}^{p+1,0}$$

e a q-esfera $S^q \subset \mathbb{R}^{0,q+1}$, *resulta em uma compactificação de* $\mathbb{R}^{p,q}$ *para* $p, q \geq 1$. *Podemos definir a forma bilinear nesta variedade como herdada de* $\left(\mathbb{R}^{p+1,q+1}, g'\right)$, *e portanto é uma subvariedade semi-Riemanniana com a forma* $g = g'|_{S^p \times S^q}$. *Essa variedade semi-Riemanniana compacta será denotada por* $S^{p,q}$ *ao invés de* $(S^p \times S^q, g)$, *para todo* $p, q \geq 0$.

Definição 3.2 *Sejam* (M,g) *e* (M', g') *duas variedades semi-Riemannianas com a mesma dimensão e sejam* $U \subset M, V \subset M'$ *abertos. Uma aplicação* $\varphi : U \to V$ *de posto máximo classe* C^∞ *é chamada uma transformação conforme, ou uma aplicação conforme, se existe uma função classe* C^∞, $\lambda : U \to \mathbb{R}^+$ *tal que*

$$\varphi^* g' = \lambda^2 g$$

onde $\varphi^* g'(x,y) := g'(T\varphi(x), T\varphi(y))$ *e* $T\varphi : TU \to TV$ *denota a aplicação tangente (derivada) de* φ. λ^2 *é chamada fator conforme de* φ. *Algumas vezes é também requerido que* φ *seja bijetiva e/ou preserve a orientação.*

Nas coordenadas locais de M e M',

$$(\varphi^* g')_{\mu\nu}(a) = g'_{ij}(\varphi(a))\, \partial_\mu \varphi^i \partial_\nu \varphi^j$$

e portanto φ é conforme se e somente se

$$\lambda^2 g_{\mu\nu} = \left(g'_{ij} \circ \varphi\right) \partial_\mu \varphi^i \partial_\nu \varphi^j$$

na vizinhança coordenada de cada ponto.

Note que para uma transformação conforme φ as aplicações tangentes $T_a\varphi : T_a M \to T_{\varphi(a)} M'$ são bijetivas para cada ponto $a \in U$. Portanto, pelo teorema da função inversa, uma transformação conforme é sempre localmente invertível como uma aplicação C^∞.

Exemplo 3.3 *As transformações conformes em uma variedade semi-Riemanniana unidimensional são todas as aplicações* C^∞ *com vetores tangentes não nulos em todos os pontos de seu domínio. De fato, se* φ *for esta aplicação, em coordenadas locais*

$$\left(g'_{ij} \circ \varphi\right) \partial_\mu \varphi^i \partial_\nu \varphi^j = \left(g'_{ij} \circ \varphi\right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 = g \frac{(g' \circ \varphi)}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2$$

onde identificamos $\frac{(g' \circ \varphi)}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 = \lambda^2$.

Exemplo 3.4 *Identifiquemos* $\mathbb{R}^{0,2} \cong \mathbb{C}$. *Então escrevemos* $z = x + iy$ *com* $z \in \mathbb{C}$ *com "coordenadas reais"* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *Então uma aplicação* C^∞ $\varphi : M \to \mathbb{C}$ *em um aberto conexo* $M \subset \mathbb{C}$ *é conforme com fator conforme* $\lambda : M \to \mathbb{R}^+$ *se e somente se, para* $u = Re\varphi$ *e* $v = Im\varphi$,

$$\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou ainda

$$u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2 = \lambda^2,\ u_x u_y + v_x v_y = 0$$

onde o subescrito significa derivação parcial na variável considerada. Estas equações são satisfeitas por funções holomórficas ($u_x = v_y$, $u_y = -v_x$) e anti-holomórficas ($u_x = -v_y$, $u_y = v_x$). Perceba que $u_x^2 + v_x^2 \neq 0$ é equivalente a $|J\varphi| \neq 0$, onde $J\varphi$ é a matriz jacobiana representando a aplicação tangente $T\varphi$ de φ. De fato, utilizando as relações satisfeitas pelas funções holomórficas

$$\begin{aligned} |J\varphi| &= u_x v_y - u_y v_x \\ &= u_x^2 - v_x(-v_x) \\ &= u_x^2 + v_x^2. \end{aligned}$$

Para o caso anti-holomórfico, teríamos $|J\varphi| = -\left(u_x^2 + v_x^2\right)$, não modificando a afirmação.

Por outro lado, para uma transformação conforme $\varphi = (u, v)$ temos que (u_x, v_x) e (u_y, v_y) são vetores perpendiculares em $\mathbb{R}^{0,2}$ de mesmo tamanho $\lambda \neq 0$. Então $(u_x, v_x) = (-v_y, u_y)$ ou $(u_x, v_x) = (v_y, -u_y)$, ou seja, φ é holomórfica ou anti-holomórfica com $|J\varphi| \neq 0$.

Iremos estudar aplicações conformes $\varphi : M \to M'$ entre abertos $M, M' \subset \mathbb{R}^{p,q}$, $p + q = n > 1$. Nosso intuito é descrever as aplicações conformes em termos de outras aplicações nesses espaços pseudo-euclidianos. Existe mais de uma maneira de fazer isso, como por exemplo utilizando espaços de Lobachevsky (ver [2]). Aqui será utilizado a análise local das aplicações conformes, já visando sua álgebra de Lie e sua relação com a álgebra de Lie do grupo ortogonal generalizado.

Seja $X : M \subset \mathbb{R}^{p,q} \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial C^∞. Então

$$\dot{\gamma} = X(\gamma)$$

para curvas C^∞ $\gamma = \gamma(t)$ em M é uma equação diferencial autônoma. O grupo de um parâmetro local $\left(\varphi_t^X\right)_{t\in\mathbb{R}}$ corresponde a X satisfazer

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi^X(t,a)\right) = X\left(\varphi^X(t,a)\right)$$

com condição inicial $\varphi^X(0,a) = a$. Além disso, para todo $a \in U$, $\varphi^X(\cdot, a)$ é a única solução maximal de $\dot{\gamma} = X(\gamma)$ definida no intervalo maximal (t_a^-, t_a^+). Seja $M_t := \{a \in M;\, t_a^- < t < t_a^+\}$ e $\varphi_t^X(a) = \varphi^X(t,a)$ para $a \in M_t$. Então $M_t \subset M$ é um aberto de M e $\varphi_t^X : M_t \to M_{-t}$ é um difeomorfismo. Temos que $\varphi_t^X \circ \varphi_s^X(a) = \varphi_{t+s}^X(a)$ se $a \in M_{t+s} \cap M_s$ e $\varphi_s^X(a) \in M_t$, e $\varphi_0^X = \mathrm{Id}_M$, $M_0 = M$. Em particular, o grupo de um parâmetro local $\left(\varphi_t^X\right)_{t\in\mathbb{R}}$ satisfaz a equação de fluxo

$$\left.\frac{d}{dt}\left(\varphi_t^X\right)\right|_{t=0} = X.$$

Definição 3.3 *Um campo de vetores X em $M \subset \mathbb{R}^{p,q}$ é chamado campo conforme de Killing se φ_t^X é conforme para todo t em uma vizinhança de 0.*

Teorema 3.4 *Seja $M \subset \mathbb{R}^{p,q}$ aberto, $g = g^{p,q}$ e X um campo conforme de Killing com coordenadas*

$$X = \left(X^1, ..., X^n\right) = X^\nu \partial_\nu$$

com respeito as coordenadas cartesianas canônicas em $\mathbb{R}^n$. Então existe uma função C^∞, $k : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} = k g_{\mu\nu}$$

onde $f_{\mu,\nu} := \partial_\nu f_\mu$, $X_\mu := g_{\mu\nu} X^\nu$.

Demonstração: Seja X um campo conforme de Killing, (φ_t) um grupo de um parâmetro local, e $\lambda_t : M_t \to \mathbb{R}^+$, tal que

$$\left(\varphi_t^* g\right)_{\mu\nu}(a) = g_{ij}\left(\varphi_t(a)\right) \partial_\mu \varphi_t^i \partial_\nu \varphi_t^j = \left(\lambda_t(a)\right)^2 g_{\mu\nu}(a).$$

Supondo g_{ij} constante, diferenciando com respeito a t em $t=0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\left(\lambda_t(a)\right)^2 g_{\mu\nu}(a)\right)\bigg|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\left(g_{ij}\left(\varphi_t(a)\right)\partial_\mu\varphi_t^i\partial_\nu\varphi_t^j\right)\bigg|_{t=0}\\
&= g_{ij}\left(\varphi_t(a)\right)\left\{\partial_\mu\left[\left(\frac{d}{dt}\varphi_t^i\right)\bigg|_{t=0}\right]\partial_\nu\varphi_t^j+\partial_\mu\varphi_t^i\partial_\nu\left[\left(\frac{d}{dt}\varphi_t^j\right)\bigg|_{t=0}\right]\right\}\\
&= g_{ij}\partial_\mu X^i\delta_\nu^j+g_{ij}\delta_\mu^i\partial_\nu X^j\\
&= \partial_\mu X_\nu(a)+\partial_\nu X_\mu(a).
\end{aligned}$$

Assim, segue que $k(a)=\frac{d}{dt}\left(\lambda(a)\right)^2\Big|_{t=0}$. ☐

Definição 3.5 *Uma função C^∞ $k: M\subset\mathbb{R}^{p,q}\to\mathbb{R}$ é chamada fator conforme de Killing se existe um campo conforme de Killing X tal que*

$$X_{\mu,\nu}+X_{\nu,\mu}=kg_{\mu\nu}.$$

Teorema 3.6 *Se uma função C^∞, $k: M\subset\mathbb{R}^{p,q}\to\mathbb{R}$, é um fator conforme de Killing, então*

$$(n-2)\,k_{,\mu\nu}+g_{\mu\nu}\Delta_g k=0$$

onde $\Delta_g=g^{kl}\partial_k\partial_l$ é o operador de Laplace-Beltrami para $g=g^{p,q}$.

Demonstração: Seja então k um fator conforme de Killing. Temos que

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\partial_k\partial_l X_{\mu,\nu}-\partial_\nu\partial_k X_{\mu,l}\right)+\left(\partial_\mu\partial_\nu X_{k,l}-\partial_l\partial_\mu X_{k,\nu}\right)+\\
&\quad+\left(\partial_\mu\partial_\nu X_{l,k}-\partial_\nu\partial_k X_{l,\mu}\right)+\left(\partial_k\partial_l X_{\nu,\mu}-\partial_l\partial_\mu X_{\nu,k}\right)\\
&= \partial_k\partial_l\left(X_{\mu,\nu}+X_{\nu,\mu}\right)-\partial_l\partial_\mu\left(X_{k,\nu}+X_{\nu,k}\right)+\\
&\quad+\partial_\mu\partial_\nu\left(X_{k,l}+X_{l,k}\right)-\partial_\nu\partial_k\left(X_{\mu,l}+X_{l,\mu}\right)
\end{aligned}$$

mas como $\partial_k\partial_l\left(X_{\mu,\nu}+X_{\nu,\mu}\right)=k_{,kl}g_{\mu\nu}$, temos

$$0=g_{\mu\nu}k_{,kl}-g_{k\nu}k_{,l\mu}+g_{kl}k_{,\mu\nu}-g_{\mu l}k_{,\nu k}$$

ou multiplicando por g^{kl},

$$\begin{aligned}
0 &= g^{kl}g_{\mu\nu}k_{,kl}-g^{kl}g_{k\nu}k_{,l\mu}+g^{kl}g_{kl}k_{,\mu\nu}-g^{kl}g_{\mu l}k_{,\nu k}\\
&= g_{\mu\nu}\Delta_g k-\delta_\nu^l k_{,l\mu}+nk_{,\mu\nu}-\delta_\mu^k k_{,\nu k}\\
&= g_{\mu\nu}\Delta_g k+(n-2)\,k_{,\mu\nu}.
\end{aligned}$$

☐

Este teorema aceita recíproca. Esta será mostrada ao analisar os casos $p+q\geq 3$, $p,q=1$ e $p=2,q=0$ à seguir.

Teorema 3.7 *Todo campo conforme de Killing X em um aberto conexo $M\subset\mathbb{R}^{p,q}$, $p+q=n>2$, é da forma*

$$X^\mu(q)=2\left(g_{ij}q^ib^j\right)q^\mu-\left(g_{ij}q^iq^j\right)b^\mu+\lambda'^\mu+c^\mu+\omega_\nu^\mu q^\nu$$

com $b,c\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in\mathbb{R}$ e $\omega\in\mathfrak{so}(p,q)$.

Demonstração: Da equação $(n-2)\,k_{,\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Delta_g k = 0$, multiplicando por $g^{\mu\nu}$,

$$(n-2)\,g^{\mu\nu}k_{,\mu\nu} + n\Delta_g k = (2n-2)\,\Delta_g k = 0$$

ou seja, $\triangle_g k = 0$, implicando $k_{,\mu\nu} = 0$, $\forall \mu,\nu$. Segue que as soluções para a equação são aplicações afins-lineares

$$k(q) = \lambda + \alpha_\nu q^\nu,\ q = (q^\nu) \in M \subset \mathbb{R}^{p,q},\ \lambda, \alpha_\nu \in \mathbb{R}.$$

Temos então as possíveis formas de k,

1. $k = 0$;
2. $k = \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$;
3. $k = \alpha_\nu q^\nu$.

Pela equação $X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} = kg_{\mu\nu}$ temos que a solução será a soma dessas possibilidades.

No primeiro caso,

$$X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} = 0$$

que define os campos próprios de killing. $X_{\mu,\mu} + X_{\mu,\mu} = 2X_{\mu,\mu} = 0$ implica que $X_\mu(q)$ independe de q^μ. Se $\mu \neq \nu$, então $X_{\mu,\nu} = -X_{\nu,\mu}$, antissimétrico. Assim podemos escrever

$$X^\mu(q) = c^\mu + \omega^\mu_\nu q^\nu,\ c^\nu, \omega^\mu_\nu \in \mathbb{R}.$$

Se $\omega^\mu_\nu = 0$, então $\left(\frac{d}{dt}\varphi^X\big|_{t=0}\right)^\mu = X^\mu = c^\mu$, ou seja, $\varphi^X_t(t,q) = q + tc$ seria o grupo a um parâmetro (global). A transformação associada será $\varphi_c(q) = \varphi^X_t(t,q)\big|_{t=1} = q = c$, que é uma translação. Para $c^\mu = 0$, $X_{\mu,\nu} = g_{\mu\rho}X^\rho_{,\nu} = g_{\mu\rho}\omega^\rho_\nu$, temos

$$X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} = g_{\mu\rho}\omega^\rho_\nu + g_{\nu\rho}\omega^\rho_\mu = 0$$

ou seja, $\omega \in \mathfrak{so}(p,q)$. A transformação associada será

$$\varphi_c(q) = \varphi^X_t(t,q)\big|_{t=1} = e^{t\omega}q\big|_{t=1} = \Lambda q$$

onde $e^\omega = \Lambda \in O(p,q)$. Estas são as transformações ortogonais.

Para o segundo caso, temos $X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} = \lambda g_{\mu\nu}$, implicando $X_{\mu,\nu} = 0$ se $\mu \neq \nu$. Se $\mu = \nu$, como $g_{\mu\rho}X^\rho_{,\nu} = X_{\mu,\nu}$, temos

$$g_{\mu\rho}X^\rho_{,\nu} + g_{\nu\rho}X^\rho_{,\mu} = \lambda g_{\mu\nu}$$

ou multiplicando por $g^{\mu\nu}$

$$\delta^\nu_\rho X^\rho_{,\nu} + \delta^\mu_\rho X^\rho_{,\mu} = 2nX^\mu_{,\mu} = n\lambda$$

e portanto $X^\mu_{,\mu} = \frac{1}{2}\lambda$. Assim $X^\mu = \frac{1}{2}\lambda q^\mu = \lambda'^\mu$, e a transformação associada será $\varphi_c(q) = e^{\lambda'}q$, as dilatações.

No terceiro caso, podemos escrever $k = 4g_{\mu\nu}b^\mu q^\nu$, $b \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Afirmamos que $X^\mu(q) = 2\left(g_{ij}q^i b^j\right)q^\mu - \left(g_{ij}q^i q^j\right)b^\mu$ é uma solução de $X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} = 4g_{ij}b^i q^j g_{\mu\nu}$. De fato, basta substituir diretamente, então

$$\begin{aligned}
X_{\mu,\nu} &= g_{\mu\rho}\left(2g_{ij}b^i\delta^j_\nu q^\rho + 2g_{ij}b^i q^j\delta^\rho_\nu - g_{ij}\delta^i_\nu q^j b^\rho - g_{ij}q^i\delta^j_\nu b^\rho\right)\\
&= 2g_{\mu\rho}g_{i\nu}b^i q^\rho + 2g_{\mu\nu}g_{ij}b^i q^j - g_{\mu\rho}g_{\nu j}q^j b^\rho - g_{\mu\rho}g_{i\nu}q^i b^\rho\\
&= 2g_{\mu\rho}g_{i\nu}b^i q^\rho - 2g_{\mu\rho}g_{\nu j}q^j b^\rho + 2g_{\mu\nu}g_{ij}b^i q^j\\
&= 2q_\mu b_\nu - 2b_\mu q_\nu + 2g_{\mu\nu}\langle b, q\rangle_{p,q}.
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}X_{\mu,\nu}+X_{\nu,\mu}&=2q_\mu b_\nu-2b_\mu q_\nu+4g_{\mu\nu}\left\langle b,q\right\rangle_{p,q}-2q_\mu b_\nu+2b_\mu q_\nu\\&=4g_{ij}b^iq^jg_{\mu\nu}\end{aligned}$$

provando a afirmação. Para $X\left(q\right)=2\left\langle q,b\right\rangle_{p,q}q-\left\langle q,q\right\rangle_{p,q}b,\ b\neq 0$, não há grupo de um parâmetro global de soluções de $\frac{dq}{dt}=X\left(q\right)$. Para soluções locais, temos o grupo de um parâmetro local (pode ser verificado diretamente por derivação)

$$\varphi_t^X\left(t,q\right)=\frac{q-\left\langle q,q\right\rangle_{p,q}tb}{1-2\left\langle q,tb\right\rangle_{p,q}+\left\langle q,q\right\rangle_{p,q}\left\langle tb,tb\right\rangle_{p,q}},\ t\in\left(t_q^-,t_q^+\right)$$

onde $\left(t_q^-,t_q^+\right)$ é o intervalo maximal em torno de 0 contido em $\left\{t\in\mathbb{R};\ 1-2\left\langle q,tb\right\rangle_{p,q}+\left\langle q,q\right\rangle_{p,q}\left\langle tb,tb\right\rangle_{p,q}\neq 0\right\}$. A transformação associada será

$$\varphi_c\left(q\right)=\frac{q-\left\langle q,q\right\rangle_{p,q}b}{1-2\left\langle q,b\right\rangle_{p,q}+\left\langle q,q\right\rangle_{p,q}\left\langle b,b\right\rangle_{p,q}}$$

e é chamada transformação conforme especial. Ela pode ser vista como a composição entre uma inversão e uma translação

$$\varphi_c'\left(x\right)=\frac{x'}{\left\langle x',x'\right\rangle_{p,q}}=\frac{x}{\left\langle x,x\right\rangle_{p,q}}+b.$$

Por fim, basta provar que as transformações associadas $\varphi_c\left(x\right)=x'$ são conformes. Translações e rotações são isometrias, e portanto são conformes. Para dilatações, temos que $\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}=\delta_j^i\lambda$, e portanto

$$g_{ij}\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}=g_{ij}\lambda^2$$

implicando ser conforme. Para inversões,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}&=\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{x^i}{\left\langle x,x\right\rangle_{p,q}}\right]\\&=\frac{\delta_j^i}{\left\langle x,x\right\rangle_{p,q}}-\frac{x^i}{\left(\left\langle x,x\right\rangle_{p,q}\right)^2}\frac{\left\langle x,x\right\rangle_{p,q}}{\left\langle x,x\right\rangle_{p,q}}\left(\delta_j^kx^lg_{kl}+x^k\delta_j^lg_{kl}\right)\\&=\frac{\delta_j^i}{\left\langle x,x\right\rangle_{p,q}}-\frac{2x^ix^lg_{jl}\left\langle x,x\right\rangle_{p,q}}{\left(\left\langle x,x\right\rangle_{p,q}\right)^3}\\&=\frac{\delta_j^i}{\left\langle x,x\right\rangle_{p,q}}-\frac{2\delta_j^i\left(\left\langle x,x\right\rangle_{p,q}\right)^2}{\left(\left\langle x,x\right\rangle_{p,q}\right)^3}\\&=-\frac{\delta_j^i}{\left\langle x,x\right\rangle_{p,q}}.\end{aligned}$$

Assim temos que

$$g_{ij}\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}=g_{ij}\frac{\delta_k^i}{\left\langle x,x\right\rangle_{p,q}}\frac{\delta_l^j}{\left\langle x,x\right\rangle_{p,q}}=\left(\frac{1}{\left\langle x,x\right\rangle_{p,q}}\right)^2g_{kl}$$

e portanto inversões em $\mathbb{R}^{k,n}$ são conformes.

Isso finaliza a demonstração. □

O próximo resultado, conhecido como Teorema de Liouville, finalmente descreve as transformações conformes em termos de transformações conhecidas.

Teorema 3.8 *Toda transformação conforme $\varphi : M \to \mathbb{R}^{p,q}$, $n = p + q \geq 3$, em um aberto conexo $M \subset \mathbb{R}^{p,q}$, é a composição de*

1. *uma translação $q \mapsto q + c$, $c \in \mathbb{R}^n$;*
2. *uma transformação ortogonal $q \mapsto \Lambda q$, $\Lambda \in O(p, q)$;*
3. *uma dilatação $q \mapsto e^{\lambda} q$, $\lambda \in \mathbb{R}$;*
4. *uma transformação conforme especial $q \mapsto \frac{q - \langle q,q \rangle_{p,q} b}{1 - 2\langle q,b \rangle_{p,q} + \langle q,q \rangle_{p,q} \langle b,b \rangle_{p,q}}$, $b \in \mathbb{R}^n$.*

Para provar este teorema, precisaremos do seguinte lema.

Lema 3.9 *O colchete de Lie de dois campos conformes de Killing é um campo conforme de Killing. Além disso, a álgebra de Lie de todos os campos conformes de Killing é isomorfa à $\mathfrak{so}(p + 1, q + 1)$.*

Demonstração: Seja X um campo conforme de Killing. Podemos escrever

$$X = X^{\mu} \partial_{\mu} = 2 g_{ij} q^i b^j q^{\mu} \partial_{\mu} - g_{ij} q^i q^j b^{\mu} \partial_{\mu} + \lambda q^{\mu} \partial_{\mu} + c^{\mu} \partial_{\mu} + \omega^{\mu}_{\nu} q^{\nu} \partial_{\mu}$$

onde explicitamos os vetores da base. Fazendo

$$\begin{aligned} D &= q^{\mu} \partial_{\mu} \\ P_{\mu} &= \partial_{\mu} \\ K_j &= 2 g_{ij} q^i q^{\mu} \partial_{\mu} - g_{i\mu} q^i q^{\mu} \partial_j \\ \Omega_{i\mu} &= g_{i\nu} q^{\nu} \partial_{\mu} - g_{\mu\nu} q^{\nu} \partial_i \end{aligned}$$

podemos escrever

$$X = b^j K_j + \lambda D + c^{\mu} P_{\mu} + \frac{1}{2} \alpha^{i\mu} \Omega_{i\mu}$$

com $\alpha \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que $\alpha^{i\mu} = \beta^{i\mu} + \omega^{i\mu}$, onde β satisfaz $g \beta^t g = \beta$. Temos então que o colchete de Lie de dois campos conformes de Killing é dado pela combinação linear entre colchetes de Lie de D, P_{μ}, K_j, $\Omega_{i\mu}$. Calculemos tais colchetes. Pelo Teorema de Clairaut

$$[P_{\mu}, P_{\nu}] = \partial_{\mu} \partial_{\nu} - \partial_{\nu} \partial_{\mu} = 0.$$

Pela mudança de índice mudo

$$[D, D] = q^{\mu} \partial_{\mu} (q^{\nu} \partial_{\nu}) - q^{\nu} \partial_{\nu} (q^{\mu} \partial_{\mu}) = 0.$$

Mais diretamente

$$[P_{\mu}, D] = \partial_{\mu} (q^{\nu} \partial_{\nu}) - q^{\nu} \partial_{\nu} \partial_{\mu} = \partial_{\mu} = P_{\mu}.$$

Os próximos colchetes exigem mais álgebra. Obtemos então

$$\begin{aligned} [\Omega_{i\mu}, D] &= (g_{i\nu} q^{\nu} \partial_{\mu} - g_{\mu\nu} q^{\nu} \partial_i)(q^{\tau} \partial_{\tau}) - (q^{\tau} \partial_{\tau})(g_{i\nu} q^{\nu} \partial_{\mu} - g_{\mu\nu} q^{\nu} \partial_i) \\ &= g_{i\nu} q^{\nu} q^{\tau} \partial_{\mu} \partial_{\tau} + g_{i\nu} q^{\nu} \delta^{\tau}_{\mu} \partial_{\tau} - g_{\mu\nu} q^{\nu} q^{\tau} \partial_i \partial_{\tau} - g_{\mu\nu} q^{\nu} \delta^{\tau}_i \partial_{\tau} - q^{\tau} g_{i\nu} q^{\nu} \partial_{\tau} \partial_{\mu} \\ &- q^{\tau} g_{i\nu} \delta^{\nu}_{\tau} \partial_{\mu} + q^{\tau} g_{\mu\nu} q^{\nu} \partial_{\tau} \partial_i + q^{\tau} g_{\mu\nu} \delta^{\nu}_{\tau} \partial_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[K_j, K_i] &= \left(2g_{tj}q^t q^\mu \partial_\mu - g_{t\mu}q^t q^\mu \partial_j\right)\left(2g_{si}q^s q^\nu \partial_\nu - g_{s\nu}q^s q^\nu \partial_i\right) \\
&- \left(2g_{si}q^s q^\nu \partial_\nu - g_{s\nu}q^s q^\nu \partial_i\right)\left(2g_{tj}q^t q^\mu \partial_\mu - g_{t\mu}q^t q^\mu \partial_j\right) \\
&= -4g_{tj}g_{\mu\nu}q^t q^\mu \partial_i + 4g_{ti}g_{\mu\nu}q^t q^\mu q^\nu \partial_j + 2g_{t\mu}g_{j\nu}q^t q^\mu q^\nu \partial_i \\
&+ 2g_{t\mu}g_{sj}q^t q^\mu q^s \partial_i - 2g_{t\mu}g_{i\nu}q^t q^\mu q^\nu \partial_j - 2g_{t\mu}g_{si}q^t q^\mu q^s \partial_j \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\Omega_{j\mu}, P_\nu] &= \left(g_{jt}q^t \partial_\mu - g_{\mu t}q^t \partial_j\right)\partial_\nu - \partial_\nu\left(g_{jt}q^t \partial_\mu - g_{\mu t}q^t \partial_j\right) \\
&= g_{jt}q^t \partial_\mu \partial_\nu - g_{\mu t}q^t \partial_j \partial_\nu - g_{jt}\left(\delta^t_\nu \partial_\mu + q^t \partial_\nu \partial_\mu\right) + g_{\mu t}\left(\delta^t_\nu \partial_j + q^t \partial_\nu \partial_j\right) \\
&= g_{\mu\nu}\partial_j - g_{j\nu}\partial_\mu \\
&= g_{\mu\nu}P_j - g_{j\nu}P_\mu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[K_j, D] &= \left(2g_{ij}q^i q^\mu \partial_\mu - g_{i\mu}q^i q^\mu \partial_j\right)\left(q^t \partial_t\right) - \left(q^t \partial_t\right)\left(2g_{ij}q^i q^\mu \partial_\mu - g_{i\mu}q^i q^\mu \partial_j\right) \\
&= 2g_{ij}q^i q^\mu \delta^t_\mu \partial_t + 2g_{ij}q^i q^\mu q^t \partial_\mu \partial_t - g_{i\mu}q^i q^\mu \delta^t_j \partial_t - g_{i\mu}q^i q^\mu q^t \partial_j \partial_t - 2g_{tj}q^t q^\mu \partial_\mu \\
&- 2g_{ij}q^t q^i \partial_t - 2g_{ij}q^t q^i q^\mu \partial_t \partial_\mu + g_{t\mu}q^t q^\mu \partial_j + g_{it}q^t q^i \partial_j + g_{i\mu}q^t q^i q^\mu \partial_t \partial_j \\
&= -2g_{ij}q^t q^i \partial_t + g_{it}q^t q^i \partial_j \\
&= -K_j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[P_\mu, K_i] &= \partial_\mu\left(2g_{si}q^s q^\nu \partial_\nu - g_{s\nu}q^s q^\nu \partial_i\right) - \left(2g_{si}q^s q^\nu \partial_\nu - g_{s\nu}q^s q^\nu \partial_i\right)\partial_\mu \\
&= 2g_{\mu i}q^\nu \partial_\nu + 2g_{si}q^s \partial_\mu - g_{\mu\nu}q^\nu \partial_i - g_{s\mu}q^s \partial_i \\
&= 2\left(g_{\mu i}D + \Omega_{i\mu}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\Omega_{ij}, K_\nu] &= \left(g_{it}q^t \partial_j - g_{jt}q^t \partial_i\right)\left(2g_{s\nu}q^s q^\mu \partial_\mu - g_{s\mu}q^s q^\mu \partial_\nu\right) \\
&- \left(2g_{s\nu}q^s q^\mu \partial_\mu - g_{s\mu}q^s q^\mu \partial_\nu\right)\left(g_{it}q^t \partial_j - g_{jt}q^t \partial_i\right) \\
&= 2g_{j\nu}g_{it}q^t q^\mu \partial_\mu - g_{j\nu}g_{s\mu}q^s q^\mu \partial_i - 2g_{i\nu}g_{jt}q^t q^\mu \partial_\mu + g_{i\nu}g_{s\mu}q^s q^\mu \partial_j \\
&= g_{j\nu}K_i - g_{i\nu}K_j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\Omega_{j\mu}, \Omega_{i\nu}] &= \left(g_{jt}q^t \partial_\mu - g_{\mu t}q^t \partial_j\right)\left(g_{is}q^s \partial_\nu - g_{\nu s}q^s \partial_i\right) \\
&- \left(g_{is}q^s \partial_\nu - g_{\nu s}q^s \partial_i\right)\left(g_{jt}q^t \partial_\mu - g_{\mu t}q^t \partial_j\right) \\
&= \left(g_{jt}g_{i\mu}q^t \partial_\nu + g_{\mu t}g_{\nu j}q^t \partial_i - g_{jt}g_{\nu\mu}q^t \partial_i - g_{ij}g_{\mu t}q^t \partial_\nu\right) \\
&- \left(g_{it}g_{j\nu}q^t \partial_\mu + g_{\nu t}g_{\mu i}q^t \partial_j - g_{it}g_{\mu\nu}q^t \partial_j - g_{ji}g_{\nu t}q^t \partial_\mu\right) \\
&= g_{i\mu}\left(g_{jt}q^t \partial_\nu - g_{\nu t}q^t \partial_j\right) + g_{\nu j}\left(g_{\mu t}q^t \partial_i - g_{it}q^t \partial_\mu\right) \\
&+ g_{\mu\nu}\left(g_{it}q^t \partial_j - g_{jt}q^t \partial_i\right) + g_{ij}\left(g_{\nu t}q^t \partial_\mu - g_{\mu t}q^t \partial_\nu\right) \\
&= g_{\mu i}\Omega_{j\nu} + g_{j\nu}\Omega_{\mu i} - g_{\mu\nu}\Omega_{ji} - g_{ji}\Omega_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

Provando a primeira parte do lema.

Para a segunda parte, basta mostrar o isomorfismo que já prova-se que D, P_μ, K_j, $\Omega_{i\mu}$ formam uma álgebra de Lie. Sejam $\Omega'_{\mu\nu}$, $\mu, \nu \in \{1, ..., (p+1) + (q+1)\}$ os elementos da base de $\mathfrak{so}\,(p+1, q+1)$. Podemos identificar, pelas constantes de estrutura dadas pelos comutadores entre D, P_μ, K_j, $\Omega_{i\mu}$ e pela álgebra de $\Omega'_{\mu\nu}$, as seguintes relações:

$$
\Omega_{ij} := \Omega'_{\mu\nu},\ \mu = i \in \{1, ..., p+q\},\ \nu = j \in \{1, ..., p+q\}
$$

$$
\begin{aligned}
P_i &:= \Omega'_{i,p+q+1} - \Omega'_{i,p+q+2} \\
K_i &:= \Omega'_{i,p+q+1} + \Omega'_{i,p+q+2} \\
D &:= -\Omega'_{p+q+1,p+q+2}.
\end{aligned}
$$

Mostremos que pelas relações acima, e do comutador de $\Omega'_{\mu\nu}$ obtemos os comutadores entre D, P_μ, K_j, $\Omega_{i\mu}$. O contrário é obtido pelas mesmas relações, bastando somar ou subtrair P_i e K_i, o que resulta nos mesmos comutadores. Para o caso da primeira relação, é óbvio. Calculando para as outras, temos

$$[D, D] = [-\Omega'_{ab}, -\Omega'_{ab}] = 0$$

$$
\begin{aligned}
[P_i, P_j] &= \left[\Omega'_{ia} - \Omega'_{ib}, \Omega'_{ja} - \Omega'_{jb}\right] \\
&= \left[\Omega'_{ia}, \Omega'_{ja}\right] + \left[-\Omega'_{ib}, \Omega'_{ja}\right] + \left[\Omega'_{ia}, -\Omega'_{jb}\right] + \left[-\Omega'_{ib}, -\Omega'_{jb}\right] \\
&= (g_{aj} - g_{bj}) (\Omega'_{ia} - \Omega'_{ib}) + (g_{ia} - g_{ib}) \left(\Omega'_{aj} - \Omega'_{bj}\right) - (g_{aa} + g_{bb} - g_{ba} - g_{ab}) \Omega'_{ij} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[P_i, D] &= [\Omega'_{ia} - \Omega'_{ib}, -\Omega_{ab}] \\
&= -g_{aa}\Omega'_{ib} + g_{ia}\Omega'_{ab} \\
&= -\Omega'_{ib} + \Omega'_{ib} \\
&= P_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\Omega_{j\mu}, D] &= \left[\Omega'_{j\mu}, -\Omega'_{ab}\right] \\
&= -\left(g_{\mu a}\Omega'_{jb} + g_{jb}\Omega'_{\mu a} - g_{\mu b}\Omega'_{ja} - g_{ja}\Omega'_{\mu b}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[K_i, K_j] &= \left[\Omega'_{ia} + \Omega'_{ib}, \Omega'_{ja} + \Omega'_{jb}\right] \\
&= \left[\Omega'_{ia}, \Omega'_{ja}\right] + \left[\Omega'_{ib}, \Omega'_{ja}\right] + \left[\Omega'_{ia}, \Omega'_{jb}\right] + \left[\Omega'_{ib}, \Omega'_{jb}\right] \\
&= (g_{aj} + g_{bj}) (\Omega'_{ia} + \Omega'_{ib}) + (g_{ia} + g_{ib}) \left(\Omega'_{aj} + \Omega'_{bj}\right) - (g_{aa} + g_{bb} + g_{ba} + g_{ab}) \Omega'_{ij} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\Omega_{j\mu}, P_i] &= \left[\Omega'_{j\mu}, \Omega'_{ia}\right] - \left[\Omega'_{j\mu}, \Omega'_{ib}\right] \\
&= g_{\mu i}\left(\Omega'_{ja} - \Omega'_{jb}\right) - g_{ji}\left(\Omega'_{\mu a} - \Omega'_{\mu b}\right) \\
&= g_{\mu i}P_j - g_{ji}P_\mu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[K_i, D] &= [\Omega'_{ia}, -\Omega'_{ab}] + [\Omega'_{ib}, -\Omega'_{ab}] \\
&= -\left(g_{aa}\Omega'_{ib} - g_{bb}\Omega'_{ia}\right) \\
&= -\Omega'_{ib} - \Omega'_{ia} \\
&= -K_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[P_\mu, K_i] &= \left[\Omega'_{\mu a}, \Omega'_{ia}\right] + 2\left[\Omega'_{\mu a}, \Omega'_{ib}\right] - \left[\Omega'_{\mu b}, \Omega'_{ib}\right] \\
&= 2\left(\Omega_{i\mu} + gD\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
[\Omega_{ij}, K_\nu] &= \left[\Omega'_{ij}, \Omega'_{\nu a}\right] + \left[\Omega'_{ij}, \Omega'_{\nu b}\right] \\
&= g_{j\nu}\left(\Omega'_{ia} + \Omega'_{ib}\right) - g_{i\nu}\left(\Omega'_{ja} + \Omega'_{jb}\right) \\
&= g_{j\nu} K_i - g_{i\nu} K_j
\end{aligned}$$

Portanto, como as constantes de estrutura são as mesmas, as álgebras são isomorfas, e D, P_μ, K_j, $\Omega_{i\mu}$ geram uma álgebra de Lie. $\square$

Para finalmente provar o Teorema 3.8, utilizaremos a série de Baker-Campbell-Hausdorff (ver [21]), dada pelo seguinte Lema.

Lema 3.10 *Existe $\rho > 0$ tal que se $|X|, |Y| < \rho$, com X, Y elementos da álgebra de Lie, então $c(X, Y)$ é dado pela série convergente*

$$c(X, Y) = \sum_{n \geq 1} c_n(X, Y)$$

em que o termo $c_n(X, Y)$ é um polinômio homogêneo em X, Y da forma

$$c_n(X, Y) = \sum a_{I,J} X^{i_1} Y^{j_1} \ldots X^{i_s} Y^{j_s}$$

com $n = i_1 + j_1 + \ldots + i_s + j_s$ e $I = (i_1, \ldots, i_s)$, $J = (j_1, \ldots, j_s)$. Mais explicitamente, temos

$$c(X, Y) = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \frac{1}{(n-j)!} X^j Y^{n-j} \right)^k.$$

Da convergência da série na álgebra, temos que a composição das transformações associadas as soluções do Teorema 3.7 é uma transformação conforme. Explicitamente,

$$exp\left(b^j K_j\right) exp\left(c^\nu P_\nu\right) exp\left(\lambda D\right) exp\left(\frac{1}{2}\alpha^{i\mu}\Omega_{i\mu}\right) = exp\left[c\left(b^j K_j, c\left(c^\nu P_\nu, c\left(\lambda D, \frac{1}{2}\alpha^{i\mu}\Omega_{i\mu}\right)\right)\right)\right]$$

onde $c(A, B)$ é a série de Baker-Campbell-Hausdorff. O inverso também é válido, pois todos as tranformações conformes são a convergência da exponencial de uma série de Baker-Campbell-Hausdorff para certas transformações associadas. Isso prova o Teorema 3.8. Além disso, isso prova a recíproca do Teorema 3.6 para $n = p + q \geq 3$.

O caso $p = 2$, $q = 0$ já foi visto nos exemplos.

Teorema 3.11 *Toda função holomórfica $\varphi = u + iv : M \to \mathbb{R}^{2,0} \cong \mathbb{C}$ de um aberto $M \subset \mathbb{R}^{2,0}$ com derivada não nula é uma aplicação conforme com fator conforme de Killing $\lambda^2 = u_x^2 + u_y^2 = |J\varphi| = |\varphi'|^2$. Por outro lado, toda transformação conforme e que preserva orientação $\varphi : M \to \mathbb{R}^{2,0} \cong \mathbb{C}$ é uma função holomórfica.*

Para $n = 2$, $\triangle_g k = 0$, implicando $k = 0$, $k = \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou $k = 4\mathrm{Re}\left(z\bar{b}\right) - z^2 b$, de onde temos as inversões

$$\varphi(z) = \frac{z - z^2 b}{1 - 2\mathrm{Re}\left(z\bar{b}\right) + z^2 b^2}$$

Restringindo-nos às aplicações que preservam a orientação, perceba que para um fator conforme de Killing k em um aberto conexo $M \subset \mathbb{C}$, $\Delta_g k = 0$ implica que localmente existe $X(u, v)$ holomórfico com $u_y = v_x = 0$ e $u_x = \frac{1}{2}k = v_y$, as condições de Cauchy-Riemann.

Claro que existe o resultado correspondente para funções anti-holomórficas.

Perceba que isto prova a volta do Teorema 3.6 para $p = 2, q = 0$.

Agora, analisemos o plano de Minkowski $p = q = 1$.

Teorema 3.12 *Uma aplicação C^∞ $\varphi = (u,v) : M \to \mathbb{R}^{1,1}$ em um aberto conexo $M \subset \mathbb{R}^{1,1}$, é conforme se, e somente se*

$$u_x^2 > v^2 \text{ e } u_x = v_y, u_y = v_x \text{ ou } u_x = -v_y, u_y = -v_x.$$

Demonstração: Primeiramente, a condição $\varphi^* g = \lambda^2 g$ para $g^{1,1}$ é equivalente a

$$u_x^2 - v_x^2 = \lambda^2,\ u_x u_y - v_x v_y = 0,\ u_y^2 - v_y^2 = -\lambda^2,\ \lambda^2 > 0.$$

Agora, estas equações implicam $u_x^2 > v_x^2$ e

$$0 = \lambda^2 + 2\left(u_x u_y - v_x v_y\right) - \lambda^2 = \left(u_x + u_y\right)^2 - \left(v_x + v_y\right)^2$$

implicando

$$u_x + u_y = v_x + v_y$$

ou

$$u_x + u_y = -\left(v_x + v_y\right).$$

Para o primeiro caso,

$$0 = u_x^2 - u_x^2 - u_x u_y + v_x v_y = \left(u_x - v_x\right)\left(u_x - v_y\right),$$

e como $u_x^2 > v_x^2$,

$$u_x = v_y \text{ e } u_y = v_x.$$

Para o segundo caso,

$$0 = \left(u_x + v_x\right)\left(u_x + v_y\right),$$

e como $u_x^2 > v_x^2$, então

$$u_x = -v_y \text{ e } u_y = -v_x.$$

Por fim, se $\lambda^2 := u_x^2 - v_x^2 > 0$, então temos das equações dadas que

$$u_y^2 - v_y^2 = -\lambda^2 \text{ e } u_x u_y - v_x v_y = 0$$

e portanto φ é conforme. □

Temos que $|J\varphi| = u_x v_y - u_y v_x$, que é positivo (preserva a orientação) para o primeiro par de equações, e negativo (reverte a orientação) para o segundo par.

De modo geral, a equação de onda $\Delta_g k = k_{,xx} - k_{,yy} = 0$ pode ser escrita como

$$k\left(x.y\right) = f\left(x+y\right) + g\left(x-y\right)$$

com f, g são de classe C^∞. Sejam F e G as integrais de $\frac{1}{2}f$ e $\frac{1}{2}g$, respectivamente. Então

$$X\left(x,y\right) = \left(F\left(x+y\right) + G\left(x-y\right), -F\left(x+y\right) + G\left(x-y\right)\right)$$

satisfaz $X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} = g_{\mu\nu k} k$. De fato, se $F' = \frac{dF}{d(x+y)}$ e $G' = \frac{dG}{d(x-y)}$, então

$$\begin{pmatrix} -2\left(F' + G'\right) & 0 \\ 0 & 2\left(F' + G'\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(f+g\right) & 0 \\ 0 & f+g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = kg^{1,1}$$

Por fim, basta provar que $X\left(x,y\right)$ é um campo conforme de Killing (com isso temos a volta do Teorema 3.4 para $p = q = 1$). $X\left(x,y\right)$ ser um campo conforme de Killing vem do fato de que dado

$$X\left(x,y\right) = \left(F\left(x+y\right) + G\left(x-y\right), -F\left(x+y\right) + G\left(x-y\right)\right),$$

onde $X = \frac{d\varphi}{dt}$, com $\varphi\left(x,y\right) = (u,v)$, então

$$X = \left(X_1, X_2\right) = \left(u_x \frac{dx}{dt} + u_y \frac{dy}{dt}, v_x \frac{dx}{dt} + v_y \frac{dy}{dt}\right) \text{ e } 2F = X_1 - X_2,\ 2G = X_1 + X_2$$

implica $u_x = -v_y$ e $u_y = -v_x$.

3.2 Grupos Conformes

O objetivo deste capítulo é discutir sobre grupos conformes. Pelos resultados obtidos, é plausível que haverá relação com o grupo ortogonal generalizado. Iremos explicitar esta relação.

Definição 3.13 *Uma compactificação conforme de uma variedade conexa semi-Riemanniana X é uma variedade semi-Riemanniana N e um mergulho conforme $i : X \to N$ tal que*

1. *$i(X)$ é denso em N;*

2. *Toda transformação conforme $\varphi : M \to X$ injetora definida em um aberto $M \subset X$, $M \neq \emptyset$, tem um difeomorfismo conforme (ou seja, com inversa conforme) $\hat{\varphi} : N \to N$ tal que $i(\varphi(p)) = \hat{\varphi}(i(p))$, para todo $p \in M$.*

Chamaremos $\hat{\varphi}$ de extensão conforme de φ.

Definição 3.14 *O grupo conforme $Conf(\mathbb{R}^{p,q})$ é a componente conexa contendo a identidade do grupo dos difeomorfismos conformes da compactificação conforme de $\mathbb{R}^{p,q}$.*

Definição 3.15 *Seja $p + q = n \geq 2$. Definamos a aplicação*

$$
\begin{aligned}
i : \mathbb{R}^{p,q} &\to \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R}) \\
x = \left(x^1, ..., x^n\right) &\mapsto \left(\frac{1 + g^{p,q}(x,x)}{2} : x^1 : ... : x^n : \frac{1 - g^{p,q}(x,x)}{2}\right)
\end{aligned}
$$

onde denotamos um ponto de $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ por $\left(\xi^0 : ... : \xi^{n+1}\right) = \gamma\left(\xi^0, ..., \xi^{n+1}\right)$, com $\xi = \left(\xi^0, ..., \xi^{n+1}\right) \in \mathbb{R}^{n+2}$, $\gamma : \mathbb{R}^{n+2} \backslash \{0\} \to \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ a aplicação quociente. Claro que $\left(\xi^0 : ... : \xi^{n+1}\right) = \left(\lambda\xi^0 : ... : \lambda\xi^{n+1}\right)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Proposição 3.16 *O fecho $\overline{i(\mathbb{R}^{p,q})}$ em $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ é descrito por*

$$\overline{i(\mathbb{R}^{p,q})} = N^{p,q} := \left\{\left(\xi^0 : ... : \xi^{n+1}\right) \in \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R}) ; g^{p+1,q+1}(\xi, \xi) = 0, \gamma(\xi) = \left(\xi^0 : ... : \xi^{n+1}\right)\right\}.$$

Demonstração: Primeiro, suponha que $\xi \in \overline{i(\mathbb{R}^{p,q})}$, então $\xi = \lim_{j\to\infty} \xi_j$, $\xi_j \in i(\mathbb{R}^{p,q})$. Pela continuidade de $g^{p+1,q+1}$, e como

$$g^{p+1,q+1}\left(\xi_j, \xi_j\right) = \left\langle \xi_j, \xi_j \right\rangle_{p+1,q+1} = 0$$

então $g^{p+1,q+1}(\xi, \xi) = 0$, e $\overline{i(\mathbb{R}^{p,q})} \subset N^{p,q}$.

Por outro lado, se $\left(\xi^0 : ... : \xi^{n+1}\right) \in N^{p,q}$ e $\xi^0 + \xi^{n+1} = \lambda \neq 0$, então

$$
\begin{aligned}
\left(\xi^0 : ... : \xi^{n+1}\right) &= \left(\frac{2\xi^0\lambda + g^{p+1,q+1}(\xi,\xi)}{2\lambda} : \xi^1 : ... : \xi^n : \frac{2\xi^0\lambda + g^{p+1,q+1}(\xi,\xi)}{2\lambda}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{g^{p,q}(\xi,\xi)}{\lambda}\right) : \xi^1 : ... : \xi^n : \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{g^{p,q}(\xi,\xi)}{\lambda}\right)\right) \\
&= i\left(\lambda^{-1}(\xi)\right)
\end{aligned}
$$

onde utilizou-se na segunda igualdade $g^{p+1,q+1}(\xi, \xi) = g^{p,q}(\xi, \xi) - \left(\xi^0\right)^2 + \left(\xi^{n+1}\right)^2$, e na terceira igualdade $\left(\xi^0 : ... : \xi^{n+1}\right) = \left(\lambda^{-1}\xi^0 : ... : \lambda^{-1}\xi^{n+1}\right)$. Logo se $\left(\xi^0 : ... : \xi^{n+1}\right) \in N^{p,q} \backslash i(\mathbb{R}^{p,q})$ então $\xi^0 + \xi^{n+1} = 0$. Suponha então que as sequências $\epsilon_k \to 0$ e $\delta_k \to 0$ com $\epsilon_k \neq 0$, $\delta_k \neq 0$, $\delta_k \neq \epsilon_k$, $2\xi^0\epsilon_k + \epsilon_k^2 = 2\xi^{n+1}\delta_k + \delta_k^2$. Temos pela última condição que se $\left(\xi^0 : ... : \xi^{n+1}\right) \in N^{p,q}$, então $P_k := \left(\xi^0 + \epsilon_k : ... : \xi^{n+1} + \delta_k\right) \in N^{p,q}$. Mas $\xi^0 + \epsilon_k + \xi^{n+1} + \delta_k \neq 0$, e portanto $P_k \in i(\mathbb{R}^{p,q})$. Assim $\lim_{k\to\infty} P_k = \left(\xi^0 : ... : \xi^{n+1}\right) \in \overline{i(\mathbb{R}^{p,q})}$, ou seja, $N^{p,q} \subset \overline{i(\mathbb{R}^{p,q})}$. □

Lema 3.17 *A restrição* $\pi := \gamma|_{S^{p,q} \subset \mathbb{R}^{n+2}}$ *é um recobrimento duplo de classe* C^∞.

Demonstração: Como por definição

$$S^{p,q} = S^p \times S^q := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{n+2}; \sum_{j=0}^{p} \left(\xi^j\right)^2 = 1 = \sum_{j=p+1}^{n+1} \left(\xi^j\right)^2 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+2}$$

temos que $\gamma\left(S^{p,q}\right) \subset N^{p,q}$.

Se $\xi, \xi' \in S^{p,q}$, e como $\gamma(\xi) = \gamma(\xi')$ implica $\xi = \lambda\xi'$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, então $\xi = \xi'$ ou $\xi = -\xi'$. Agora, se $P = \left(\xi^0 : ... : \xi^{n+1}\right) \in N^{p,q}$, então de $g^{p+1,q+1}(\xi, \xi)$ temos

$$\sum_{j=0}^{p} \left(\xi^j\right)^2 = \sum_{j=p+1}^{n+1} \left(\xi^j\right)^2.$$

Para normalizar, definamos $r := \left(\sum_{j=0}^{p} \left(\xi^j\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, de onde temos

$$\eta := \frac{1}{r}\left(\xi^0, ..., \xi^{n+1}\right) \in S^{p,q}$$

e $\pi^{-1}\left(\xi^0 : ... : \xi^{n+1}\right) = \{\eta, -\eta\}$. Portanto, como π é sobrejetora, conclui-se que π é um difeomorfismo local. $\square$

Proposição 3.18 *A aplicação* $\tau : \mathbb{R}^{p,q} \to S^{p,q}$ *definida por*

$$\tau(x) = \frac{1}{r(x)}\left(\frac{1 + g^{p,q}(x,x)}{2}, x^1, ..., x^n, \frac{1 - g^{p,q}(x,x)}{2}\right)$$

onde

$$r(x) = \frac{1}{2}\left(1 + 2\sum_{j=1}^{n} \left(x^j\right)^2 + \left(g^{p,q}(x,x)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}$$

entá bem definida e é um mergulho conforme com $i = \pi \circ \tau$.

Demonstração: A aplicação τ estar bem definida resulta de

$$\begin{aligned}
r(x)^2 &= \frac{1}{2}\left(1 + 2\sum_{j=1}^{n} \left(x^j\right)^2 + \left(g^{p,q}(x,x)\right)^2\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}g^{p,q}(x,x)\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \left(x^j\right)^2 + \frac{1}{2}g^{p,q}(x,x) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}g^{p,q}(x,x)\right)^2 + \sum_{j=p+1}^{n} \left(x^j\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}g^{p,q}(x,x)\right)^2 + \sum_{j=1}^{p} \left(x^j\right)^2.
\end{aligned}$$

Que $i = \pi \circ \tau$, é evidente das definições dessas aplicações. Se $x \in \mathbb{R}^{p,q}$, então

$$\begin{aligned}\pi \circ \tau &= \pi \left(\frac{1 + g^{p,q}(x,x)}{2r(x)}, \frac{x^1}{r(x)}, ..., \frac{x^n}{r(x)}, \frac{1 - g^{p,q}(x,x)}{2r(x)} \right) \\ &= \left(\frac{1 + g^{p,q}(x,x)}{2r(x)} : \frac{x^1}{r(x)} : ... : \frac{x^n}{r(x)} : \frac{1 - g^{p,q}(x,x)}{2r(x)} \right) \\ &= i(x).\end{aligned}$$

É evidente que τ é um mergulho. Basta então mostrar que τ é conforme. Temos que, denotando $\rho = \frac{1}{r}$, $\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = f_{,\mu}$, para $\mu \leq p$ (não utilizando a convenção de Einstein)

$$\tau_\mu = \left(\rho_{,\mu} \frac{1 + g^{p,q}(x,x)}{2} - \rho x^\mu, \rho_{,\mu} x^1, ..., \rho_{,\mu} x^\mu + \rho, ..., \rho_{,\mu} x^n, \rho_{,\mu} \frac{1 - g^{p,q}(x,x)}{2} + \rho x^\mu \right)$$

e para $\mu > p$ temos os sinais dos termos ρx^μ na primeira e na última coordenadas trocados. Agora, para $\mu \leq p$,

$$\begin{aligned} g^{p+1,q+1}(\tau_\mu, \tau_\mu) = &- \left(\rho_{,\mu} \frac{1 + g^{p,q}(x,x)}{2} - \rho x^\mu \right)^2 - \left(\rho_{,\mu} x^1 \right)^2 - ... - \\ &- \left(\rho_{,\mu} x^\mu + \rho \right)^2 - ... + \left(\rho_{,\mu} x^n \right)^2 + \left(\rho_{,\mu} \frac{1 - g^{p,q}(x,x)}{2} + \rho x^\mu \right)^2 \\ = &- \left(\frac{\rho_{,\mu}}{2} \right)^2 - \rho_{,\mu}^2 g^{p,q}(x,x) - \frac{\rho_{,\mu} \left(g^{p,q}(x,x) \right)^2}{4} + \rho_{,\mu} \rho x^\mu \left(1 + g^{p,q}(x,x) \right) + \\ &+ \rho_{,\mu}^2 g^{p,q}(x,x) - \rho^2 - 2\rho_{,\mu} \rho x^\mu + \left(\frac{\rho_{,\mu}}{2} \right)^2 - \rho_{,\mu}^2 g^{p,q}(x,x) + \\ &+ \frac{\rho_{,\mu}^2 g^{p,q}(x,x)}{4} + \rho_{,\mu} \rho x^\mu \left(1 - g^{p,q}(x,x) \right) \\ = &-\rho^2 \end{aligned}$$

e $g^{p+1,q+1}(\tau_\mu, \tau_\mu) = \rho^2$ se $\mu > p$. Da mesma forma, $g^{p+1,q+1}(\tau_\mu, \tau_\nu) = 0$. Assim $g^{p+1,q+1}(\tau_i, \tau_j) = \rho^2 g_{ij}$, implicando τ conforme. □

Corolário 3.19 *A aplicação* $i : \mathbb{R}^{p,q} \to \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ *é um mergulho conforme de classe* C^∞.

Demonstração: Resulta de $i = \pi \circ \tau$, sendo π e τ mergulhos conformes classe C^∞. □

Teorema 3.20 *Para toda matriz* $\Lambda \in O(p+1, q+1)$, *a aplicação* $\phi = \phi_\Lambda : N^{p,q} \to N^{p,q}$ *definida por*

$$\phi_\Lambda \left(\xi^0 : ... : \xi^{n+1} \right) := \gamma(\Lambda \xi)$$

é um difeomorfismo conforme, com $(\phi_\Lambda)^{-1} = \phi_{\Lambda^{-1}}$. *A aplicação* $\Lambda \mapsto \phi_\Lambda$ *não é injetiva, mas* $\phi_\Lambda = \phi_{\Lambda'}$ *implica* $\Lambda = \Lambda'$ *ou* $\Lambda = -\Lambda'$.

Demonstração: Mostremos primeiro que ϕ está bem definida. Seja $\xi \in \mathbb{R}^{n+2} \backslash \{0\}$, $g^{p+1,q+1}(\xi, \xi) = 0$ e $\Lambda \in O(p+1, q+1)$. Então $g^{p+1,q+1}(\Lambda\xi, \Lambda\xi) = 0$, implicando $\gamma(\Lambda\xi) \in N^{p,q}$. Como $\xi = r\xi'$ implica $\Lambda\xi = r\Lambda\xi$, $\phi_\Lambda(\gamma(\xi)) = \phi_\Lambda(\gamma(r\xi))$, para todo $r \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Portanto ϕ está bem definida.

Como $g^{p+1,q+1}$ é invarinte com respeito a Λ, ϕ_Λ é conforme. De fato, o raciocínio é equivalnte ao do último Lema: como Λ é uma isometria, ao ela agir em um ponto $\xi \in \mathbb{R}^{n+2}$ com $\gamma(\xi) \in N^{p,q}$, temos

$$\sum_{j=0}^{p} \left(\xi^j \right)^2 = \sum_{j=p+1}^{n+1} \left(\xi^j \right)^2 = 1$$

e

$$\sum_{j=0}^{p}\left(\Lambda_{k}^{j}\xi^{k}\right)^{2}=\sum_{j=p+1}^{n+1}\left(\Lambda_{k}^{j}\xi^{k}\right)^{2}$$

este último podendo ser diferente de 1. Então o fator conforme será

$$\lambda\left(\gamma\left(\xi\right)\right)^{2}=\sum_{j=0}^{p}\left(\Lambda_{k}^{j}\xi^{k}\right)^{2}$$

para normalizar.

Por fim, é claro que $\left(\phi_{\Lambda}\right)^{-1}=\phi_{\Lambda^{-1}}$ e $\phi_{\Lambda}=\phi_{-\Lambda}$. Este último, seja $\phi_{\Lambda}=\phi_{\Lambda'}$. Então $\gamma\left(\Lambda\xi\right)=\gamma\left(\Lambda'\xi\right)$, para todo $\xi\in\mathbb{R}^{n+2}$, $g^{p+1,q+1}\left(\xi,\xi\right)=0$, implicando $\Lambda=r\Lambda'$ com $r\in\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}$, e como $\Lambda,\Lambda'\in O\left(p+1,q+1\right)$, então $r=\pm1$. $\square$

Teorema 3.21 *Seja $p+q=n>2$. Toda transformação conforme de um aberto conexo $M\subset\mathbb{R}^{p,q}$ tem uma extensão conforme única para $N^{p,q}$. O grupo de todas as transformações conformes $N^{p,q}\to N^{p,q}$ é isomorfo a $O\left(p+1,q+1\right)$. A componente conexa que contém a identidade desse grupo, denotada por $Conf\left(\mathbb{R}^{p,q}\right)$, é isomorfa a $SO_{0}\left(p+1,q+1\right)$, ou $SO_{0}\left(p+1,q+1\right)/\left\{\pm1\right\}$ se $-I$ está na componente conexa da identidade de $O\left(p+1,q+1\right)$.*

Demonstração: A unicidade segue do Teorema 3.20 e da Proposição 3.16. Como existe uma aplicação 2 para 1 entre as transformações do grupo ortogonal generalizado em $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$ e os difeomorfismos conformes em $N^{p,q}$, temos que por construção que se $N^{p,q}$ é uma continuação conforme, então ela é única, e para que $N^{p,q}$ seja uma compactificação conforme, basta mostrar as extensões conformes das transformações ortogonais, translações, dilatações e transformações conformes especiais. Ou seja, a existência da primeira parte do teorema.

1. Transformações ortogonais: Seja $\Lambda_{o}\in O\left(p,q\right)$, então definimos $\Lambda\in O\left(p+1,q+1\right)$ como

$$\Lambda:=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\Lambda_{o}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Claramente $\Lambda\in SO_{0}\left(p+1,q+1\right)\Leftrightarrow\Lambda_{o}\in SO_{0}\left(p,q\right)$. Definimos a aplicação conforme $\hat{\varphi}:N^{p,q}\to N^{p,q}$ dada por $\hat{\varphi}:=\phi_{\Lambda}$. Então se $x\in\mathbb{R}^{p,q}$, temos

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}\left(i\left(x\right)\right)&=\left(\frac{1+g^{p,q}\left(x,x\right)}{2},\left(\Lambda_{o}\right)_{k}^{1}x^{k},...,\left(\Lambda_{o}\right)_{k}^{n}x^{k},\frac{1-g^{p,q}\left(x,x\right)}{2}\right)\\&=\left(\frac{1+g^{p,q}\left(\Lambda_{o}x,\Lambda_{o}x\right)}{2},\left(\Lambda_{o}\right)_{k}^{1}x^{k},...,\left(\Lambda_{o}\right)_{k}^{n}x^{k},\frac{1-g^{p,q}\left(\Lambda_{o}x,\Lambda_{o}x\right)}{2}\right)\end{aligned}$$

pois $g^{p,q}\left(x,x\right)=g^{p,q}\left(\Lambda_{o}x,\Lambda_{o}x\right)$. Portanto, se $\varphi\left(x\right)=\Lambda_{o}x$, então $\hat{\varphi}\left(i\left(x\right)\right)=i\left(\varphi\left(x\right)\right)$, para todo $x\in\mathbb{R}^{p,q}$.

2. Translações: Seja Λ_{c} definida por

$$\Lambda_{c}=\begin{pmatrix}1+\frac{1}{2}g^{p,q}\left(c,c\right)&\left(gc\right)^{t}&\frac{1}{2}g^{p,q}\left(c,c\right)\\c&I_{n}&c\\-\frac{1}{2}g^{p,q}\left(c,c\right)&-\left(gc\right)^{t}&1-\frac{1}{2}g^{p,q}\left(c,c\right)\end{pmatrix}$$

onde $c \in \mathbb{R}^n$, $I_n = diag\,(1, ..., 1)$ e $g = [T]_c^{p,q}$. Que $\Lambda_c \in O\,(p+1, q+1)$vem de $(\Lambda_c)^t\, g' \Lambda_c = g'$. Que $\Lambda_c \in SO_0\,(p+1, q+1)$, basta ver que $\Lambda_{tc} \to I_{n+2}$ quando $t \to 0$. Definamos então a aplicação conforme $\hat{\varphi} : N^{p,q} \to N^{p,q}$ dada por $\hat{\varphi} := \phi_{\Lambda_c}$. Podemos escrever

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}\left(\xi^0 : ... : \xi^{n+1}\right) &= \gamma\left(\Lambda_c \xi\right) \\
&= \Big(\xi^0 + \frac{1}{2} g^{p,q}\,(c,c)\left(\xi^0 + \xi^{n+1}\right) + g^{p,q}\,(c,\xi) : ... : c^\mu \left(\xi^0 + \xi^{n+1}\right) + \xi^\mu : ... : \\
&\quad : \xi^{n+1} - \frac{1}{2} g^{p,q}\,(c,c)\left(\xi^0 + \xi^{n+1}\right) - g^{p,q}\,(c,\xi)\Big)
\end{aligned}$$

Como $\xi^0 + \xi^{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + g^{p,q}\,(\xi,\xi) + 1 - g^{p,q}\,(\xi,\xi)\right) = 1$, temos

$$\hat{\varphi}\,(i\,(\xi)) = \left(\frac{1 + g^{p,q}\,(\xi + c, \xi + c)}{2} : ... : \xi^\mu + c^\mu : ... : \frac{1 - g^{p,q}\,(\xi + c, \xi + c)}{2}\right) = i\,(\varphi\,(\xi))$$

com $\varphi\,(\xi) = \xi + c$. Portanto $\hat{\varphi}$ é a extensão conforme de φ.

3. Dilatação: Seja Λ_r definida por

$$\Lambda_r = \begin{pmatrix} \frac{1+r^2}{2r} & 0 & \frac{1-r^2}{2r} \\ 0 & I_n & 0 \\ \frac{1-r^2}{2r} & 0 & \frac{1+r^2}{2r} \end{pmatrix}$$

Que $\Lambda_r \in SO_0\,(p+1, q+1) \subset O\,(p+1, q+1)$ segue análogo do procedimento para Λ_c. Definamos a aplicação conforme $\hat{\varphi} : N^{p,q} \to N^{p,q}$ dada por $\hat{\varphi} := \phi_{\Lambda_r}$,

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}\left(\xi^0 : ... : \xi^{n+1}\right) &= \gamma\left(\Lambda_r \xi\right) \\
&= \left(\frac{1+r^2}{2r}\xi^0 + \frac{1-r^2}{2r}\xi^{n+1} : ... : \xi^\mu : ... : \frac{1-r^2}{2r}\xi^0 + \frac{1+r^2}{2r}\xi^{n+1}\right) \\
&= \left(\frac{\xi^0 + \xi^{n+1}}{2} + \frac{r^2}{2}\left(\xi^0 - \xi^{n+1}\right) : ... : r\xi^\mu : ... : \frac{\xi^0 + \xi^{n+1}}{2} - \frac{r^2}{2}\left(\xi^0 - \xi^{n+1}\right)\right)
\end{aligned}$$

Como $\xi^0 + \xi^{n+1} = 1$ e $\xi^0 - \xi^{n+1} = g^{p,q}\,(\xi,\xi)$,

$$\hat{\varphi}\,(i\,(\xi)) = \left(\frac{1}{2} + \frac{r^2}{2} g^{p,q}\,(\xi,\xi) : ... : r\xi^\mu : ... : \frac{1}{2} - \frac{r^2}{2} g^{p,q}\,(\xi,\xi)\right) = i\,(\varphi\,(\xi))$$

com $\varphi\,(\xi) = r\xi$. Portanto $\hat{\varphi}$ é a extensão conforme de φ.

4. Transformação conforme especial: Seja Λ_e definida por

$$\Lambda_e = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2} g^{p,q}\,(b,b) & -(gb)^t & -\frac{1}{2} g^{p,q}\,(b,b) \\ -b & I_n & b \\ \frac{1}{2} g^{p,q}\,(b,b) & -(gb)^t & 1 - \frac{1}{2} g^{p,q}\,(b,b) \end{pmatrix}$$

com $b \in \mathbb{R}^n$. A verificação de que $\Lambda_e \in SO_0\,(p+1, q+1) \subset O\,(p+1, q+1)$ é equivalente a utilizada para Λ_c. Temos então que $\hat{\varphi} : N^{p,q} \to N^{p,q}$ dada por $\hat{\varphi} := \phi_{\Lambda_e}$, pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}\left(\xi^0 : ... : \xi^{n+1}\right) &= \gamma\left(\Lambda_e \xi\right) \\
&= \Big(\xi^0 + \frac{1}{2} g^{p,q}\,(b,b)\left(\xi^0 + \xi^{n+1}\right) - g^{p,q}\,(c,\xi) : ... : -b^\mu \left(\xi^0 - \xi^{n+1}\right) + \xi^\mu : ... : \\
&\quad : \xi^{n+1} + \frac{1}{2} g^{p,q}\,(b,b)\left(\xi^0 + \xi^{n+1}\right) - g^{p,q}\,(c,\xi)\Big)
\end{aligned}$$

e como $\xi^0 + \xi^{n+1} = 1$ e $\xi^0 - \xi^{n+1} = g^{p,q}(\xi,\xi)$, temos

$$\hat{\varphi}(i(\xi)) = \left(\frac{1 + g^{p,q}(\xi,\xi) + g^{p,q}(\xi,\xi)\, g^{p,q}(b,b)}{2} - g^{p,q}(b,\xi) : \ldots : \xi^\mu + b^\mu g^{p,q}(\xi,\xi) : \ldots : \right.$$
$$\left. : \frac{1 - g^{p,q}(\xi,\xi) + g^{p,q}(\xi,\xi)\, g^{p,q}(b,b)}{2} - g^{p,q}(b,\xi)\right).$$

Mas para a transformação conforme especial

$$\varphi(\xi) = \frac{\xi - b g^{p,q}(\xi,\xi)}{1 - 2g^{p,q}(\xi,b) + g^{p,q}(\xi,\xi)\, g^{p,q}(b,b)},\ b \in \mathbb{R}^n,\ \xi \in M_1 \subsetneq \mathbb{R}^{p,q}$$

temos

$$i(\varphi(\xi)) = \left(\frac{1 + g^{p,q}(\varphi(\xi),\varphi(\xi))}{2} : \ldots : \frac{\xi^\mu - b^\mu g^{p,q}(\xi,\xi)}{1 - 2g^{p,q}(\xi,b) + g^{p,q}(\xi,\xi)\, g^{p,q}(b,b)} : \ldots : \frac{1 - g^{p,q}(\varphi(\xi),\varphi(\xi))}{2}\right)$$

mas

$$\begin{aligned} g^{p,q}(\varphi(\xi),\varphi(\xi)) &= \frac{g^{p,q}(\xi - b g^{p,q}(\xi,\xi), \xi - b g^{p,q}(\xi,\xi))}{(1 - 2g^{p,q}(\xi,b) + g^{p,q}(\xi,\xi)\, g^{p,q}(b,b))^2} \\ &= (1 - 2g^{p,q}(\xi,b) + g^{p,q}(\xi,\xi)\, g^{p,q}(b,b))^{-1} g^{p,q}(\xi,\xi) \end{aligned}$$

e portanto $i(\varphi(\xi)) = \hat{\varphi}(i(\xi))$, implicando que $\hat{\varphi}$ é a extensão conforme de φ.

Pelo teorema anterior, concluímos que o grupo das transformações conformes $N^{p,q} \to N^{p,q}$ é o grupo dos difeomorfismos conformes, que são dados univocamente por $\{\Lambda, -\Lambda\}$. Que este grupo é homomórfico a $O(p+1, q+1)$ basta ver que se $\Lambda, \Lambda' \in O(p+1, q+1)$, então uma aplicação α que leva elementos de $O(p+1, q+1)$ a elementos do grupo de difeomorfismos conformes de $N^{p,q}$ definida por $\alpha(\Lambda) = \phi_\Lambda$ satisfaz (lembrando que $i = \pi \circ \tau$)

$$\begin{aligned} \alpha(\Lambda\Lambda')(i(\xi)) &= \phi_{\Lambda\Lambda'}(i(\xi)) \\ &= \gamma(\Lambda\Lambda'(\tau(\xi))) \\ &= \phi_\Lambda(\pi(\Lambda'(\tau(\xi)))) \\ &= \phi_\Lambda(\phi_{\Lambda'}(i(\xi))) \\ &= \alpha(\Lambda)\,\alpha(\Lambda')(i(\xi)) \end{aligned}$$

$\forall \xi \in \mathbb{R}^{p,q}$. Pelo teorema do isomorfismo temos a segunda parte do teorema.

Como $Conf(\mathbb{R}^{p,q})$ não possui topologia ainda definida, utilizaremos a topologia de $SO_0(p+1, q+1)$ para induzir a topologia de $Conf(\mathbb{R}^{p,q})$, de tal maneira que α seja de classe C^∞, e portanto seja um isomorfismo de grupos de Lie. Isso prova a terceira parte. □

Pela análise feita para $n = p + q \geq 3$, vemos que as transformações conformes em abertos conexos de $\mathbb{R}^{p,q}$ são injetoras, e portanto todos possuem uma extensão conforme em $N^{p,q}$. Isso não ocorre em $\mathbb{R}^{2,0}$, pois existem aplicações holomórficas não injetoras. Um exemplo seria $z \mapsto z^k$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{-1,0,1\}$. Existem ainda aplicações que mesmo injetoras, não possuem extensões conformes holomórficas, como $z \mapsto \sqrt{z}$, $z \in \{w \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(w) > 0\}$.

Definição 3.22 *Uma transformação conforme global em $\mathbb{R}^{2,0}$ é uma função holomórfica injetiva, definida em todo plano $\mathbb{C}$ com exceção de no máximo um ponto.*

Pela análise feita com o fator conforme de Killing para $p = 2$, $q = 0$, as transformações conformes globais em $\mathbb{R}^{2,0}$ possuem fator conforme de Killing linear. Disso podemos provar, da mesma maneira que o caso $n = p + q \geq 3$, o seguinte teorema:

Teorema 3.23 *Toda transformação conforme global* φ *em* $M \subset \mathbb{C}$ *tem uma única continuação conforme* $\hat{\varphi} : N^{2,0} \to N^{2,0}$ *onde* $\hat{\varphi} = \phi_\Lambda$ *com* $\Lambda \in O(3,1)$*. O grupo dos difeomorfismos conformes* $N^{2,0} \to N^{2,0}$ *é isomórfico a* $O(3,1) / \{\pm 1\}$ *e a componente conexa contendo a identidade desse grupo é isomorfo a* $SO_0(3,1)$*.*

Definição 3.24 *Uma transformação de Möbius é uma função holomórfica* φ*, tal que existe uma matriz*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}) \text{ onde } \varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ cz+d \neq 0.$$

Pelo último teorema, temos $Conf\left(\mathbb{R}^{2,0}\right) \cong SO_0(3,1)$. Sabemos que $SO_0(3,1) \cong PSL(2,\mathbb{C}) := SL(2,\mathbb{C}) / \{\pm 1\}$. O conjunto Mb das transformações de Möbius formam um grupo por composição isomorfo a $PSL(2,\mathbb{C})$. Portanto Mb é o conjunto de todos os difeomorfismos conformes de $N^{2,0} \cong \mathbb{P}$, ou seja, Mb é isomorfo ao grupo $\mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ de todas as aplicações biholomórficas $\mathbb{P} \to \mathbb{P}$ da esfera de Riemann $\mathbb{P}$. Em resumo, Mb é o conjunto de todas as transformações conformes globais, e

$$\mathrm{Mb} \cong PSL(2,\mathbb{C}) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{P}) \cong SO_0(3,1) \cong Conf\left(\mathbb{R}^{2,0}\right).$$

Agora, façamos o mesmo estudo para o $\mathbb{R}^{1,1}$. Para isso, precisamos do seguinte teorema.

Teorema 3.25 *Para* $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ *seja* $f_\pm \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ *definida por* $f_\pm(x,y) := f(x \pm y)$*. A aplicação*

$$\begin{aligned} \Phi : C^\infty(\mathbb{R}) \times C^\infty(\mathbb{R}) &\to C^\infty\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\right) \\ (f,g) &\mapsto \frac{1}{2}(f_+ + g_-, f_+ - g_-) \end{aligned}$$

tem as seguintes propriedades

1. $Im\Phi = \left\{(u,v) \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\right); u_x = v_y, u_y = v_x\right\}$;
2. $\Phi(f,g)$ *conforme* $\Leftrightarrow f' > 0,\ g' > 0$ *ou* $f' < 0,\ g' < 0$;
3. $\Phi(f,g)$ *bijetora* $\Leftrightarrow f$ *e* g *são bijetoras;*
4. $\Phi(f \circ h, g \circ k) = \Phi(f,g) \circ \Phi(h,k)$ *para* $f,g,h,k \in C^\infty(\mathbb{R})$*.*

Demonstração:

1. Primeiro, seja $(u,v) \in \Phi(f,g)$. Como

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{2}\left((f_+)' + (g_-)'\right) \\ u_y &= \frac{1}{2}\left((f_+)' - (g_-)'\right) \\ v_x &= \frac{1}{2}\left((f_+)' - (g_-)'\right) \\ v_y &= \frac{1}{2}\left((f_+)' + (g_-)'\right) \end{aligned}$$

então $u_x = v_y$ e $u_y = v_x$. Por outro lado, seja $(u,v) \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\right)$ com $u_x = v_y$ e $u_y = v_x$. Então $u_{xx} = v_{xy} = u_{yy}$, e portanto $g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu u = 0$, cuja uma solução é $u(x,y) = \frac{1}{2}(f_+(x,y) + g_-(x,y))$ para certos $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Disso temos $v_x = u_y = \frac{1}{2}\left((f_+)' - (g_-)'\right)$ e $v_y = u_x = \frac{1}{2}\left((f_+)' + (g_-)'\right)$, implicando $v(x,y) = \frac{1}{2}(f_+(x,y) - g_-(x,y))$.

2. Para $(u,v) \in \Phi(f,g)$ temos $u_x^2 - v_x^2 = (f_+)' + (g_-)'$. Então

$$u_x^2 - v_x^2 > 0 \Leftrightarrow (f_+)'(g_-)' > 0 \Leftrightarrow f'g' > 0.$$

3. Primeiro a injetividade. Para $\varphi(x,y) = \Phi(f,g)$, $\varphi(x,y) = \varphi(x',y')$ é equivalente a

$$f(x+y) + g(x-y) = f(x'+y') + g(x'-y')$$

$$f(x+y) - g(x-y) = f(x'+y') - g(x'-y')$$

ou seja, $f(x+y) = f(x'+y')$ e $g(x-y) = g(x'-y')$. Portanto φ é injetora se e só se f e g o são. Agora a sobrejetividade. Se f e g são sobrejetoras, e $\varphi = \Phi(f,g)$, então para $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$, existem $s,t \in \mathbb{R}$ tais que $f(s) = \xi + \eta$ e $g(t) = \xi - \eta$. Então $\varphi(x,y) = (\xi,\eta)$ com $x\frac{1}{2}(s+t)$ e $y = \frac{1}{2}(s-t)$. Por outro lado, se $\varphi(x,y)$ é sobrejetora, e $\rho \in \mathbb{R}$, então $x = y = \frac{1}{2}\rho$ implica f sobrejetora, e $x = -y = \frac{1}{2}\rho$ implica g sobrejetora.

4. Temos que

$$\Phi(f,g) \circ \Phi(h,k) = \frac{1}{2}\left(f_+ \circ \Phi(h,k) + g_- \circ \Phi(h,k), f_+ \circ \Phi(h,k) - g_- \circ \Phi(h,k)\right)$$

com

$$f_+ \circ \Phi(h,k) = f\left(\frac{1}{2}(h_+ + k_- + h_+ - k_-)\right) = f_+ \circ h_+ = (f \circ h)_+$$

$$g_- \circ \Phi(h,k) = g\left(\frac{1}{2}(h_+ + k_- - h_+ + k_-)\right) = g_- \circ k_- = (g \circ k)_-$$

e portanto $\Phi(f,g) \circ \Phi(h,k) = \Phi(f \circ h, g \circ k)$.

$\square$

Temos então que o grupo de difeomorfismos conformes que preservam a orientação em $\mathbb{R}^{1,1}$ é isomorfo a

$$(Diff_+(\mathbb{R}) \times Diff_+(\mathbb{R})) \cup (Diff_-(\mathbb{R}) \times Diff_-(\mathbb{R}))$$

onde $Diff_+(\mathbb{R})$ $(Diff_-(\mathbb{R}))$ é o grupo dos difeomorfismos de $\mathbb{R}$ com derivada positiva (negativa).

Geralmente se quer trabalhar em uma variedade compacta, então podemos utilizar $S^{1,1}$ como a compactificação conforme do plano de Minkowski. Dessa maneira, $Conf\left(\mathbb{R}^{1,1}\right)$ é a componente conexa que contém a identidade do grupo dos difeomorfismos conformes $S^{1,1} \to S^{1,1}$, que pode ser denotado por $Conf\left(S^{1,1}\right)$. Pelo mesmo raciocínio do teorema anterior (basta trocar $\mathbb{R}^{1,1}$ por $S^{1,1}$, e as funções serem 2π-periódicas) temos o seguinte Corolário.

Corolário 3.26 $Conf\left(\mathbb{R}^{1,1}\right) \cong Diff_+(S) \times Diff_+(S)$.

Capítulo 4

Álgebra de Virasoro

A partir deste capítulo iremos nos concentrar no caso bidimensional, tanto euclidiano quanto lorentziano. Como veremos, nestes casos podemos escrever as álgebras conformes como uma álgebra de Lie de dimensão infinita chamada álgebra de Witt. Buscaremos então a versão quântica desta álgebra, conhecida como álgebra de Virasoro, e mostraremos sua existência e unicidade a menos de isomorfismo entre álgebras de Lie.

Por fim, analizaremos a teoria de representações da álgebra de Virasoro, de maneira análoga a feita com a álgebra $\mathfrak{so}(1,3)$. Tais representações serão o final da teoria abordada neste trabalho sobre as transformações conformes. Munidos de todo o formalismo construído até então, iremos dar um exemplo de aplicação no próximo capítulo.

4.1 Álgebra de Witt

4.1.1 Caso $\mathbb{R}^{2,0}$

Para encontrar a álgebra de Witt a partir das transformações conformes, é bem mais simples nos restringirmos aos casos bidimensionais, comoas transformações conformes em $\mathbb{R}^{2,0}$. Focaremos nas aplicações holomórficas, já que para as anti-holomórficas o desenvolvimento é análogo.

Como vimos, as transformações conformes em $\mathbb{R}^{2,0} \cong \mathbb{C}$ se resumem as transformações holomórficas e anti-holomórficas. Apoiados no formalismo da Análise Complexa, sabemos que podemos escrever toda função analítica (que satisfazem as condições de Cauchy-Riemann, e portanto são holomórficas) em séries de Taylor. Outro fato é que toda aplicação anti-holomórfica pode ser escrita como o complexo conjugado de uma função holomórfica, e portanto também é igual a sua série de Taylor. Isso justifica a analogia na obtenção da álgebra de Witt. Ver [7] para análise complexa.

Podemos então escrever uma transformação holomórfica $f(z)$ como

$$f(z) = z + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n,$$

onde $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ é a série de Laurent. Podemos escrever a transformação infinitesimal como

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^{n+1} \frac{d}{dz}.$$

Definindo

$$L_n = -z^{n+1} \frac{d}{dz},\ n \in \mathbb{Z}$$

como geradores da trasformação, vemos que satisfazem a álgebra de Witt $\mathrm{W} = \mathbb{C}\{L_n; n \in \mathbb{Z}\}$, que é definida pelo colchete de Lie

$$[L_m, L_n] = (m-n)\, L_{m+n}$$

com $n, m \in \mathbb{Z}$. De fato,

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= L_m L_n - L_n L_m \\
&= z^{m+1}\frac{d}{dz}\left(z^{n+1}\frac{d}{dz}\right) - z^{n+1}\frac{d}{dz}\left(z^{m+1}\frac{d}{dz}\right) \\
&= z^{m+n+1}(n+1)\frac{d}{dz} - z^{m+n+1}(m+1)\frac{d}{dz} \\
&= (m-n)\, L_{m+n}.
\end{aligned}$$

O equivalente vale para as transformações anti-holomórficas, onde os geradores $\overline{L}_n = -\overline{z}^{n+1}\frac{d}{d\overline{z}}$ satisfazem

$$\left[\overline{L}_m, \overline{L}_n\right] = (m-n)\, \overline{L}_{m+n}.$$

Ou seja, as transformações infintesimais são geradas por duas cópias da álgebra de Witt, uma para o caso holomórfico e outra para o caso anti-holomórfico.

Perceba que a trasformação holomórfica é definida em qualquer aberto, implicando que nem todos os L_n são bem definidos globalmente em $\mathbb{P}$. Segue então o seguinte lema:

Lema 4.1 *Os geradores L_m são definidos globalmente se e somente se $|m| \leq 1$.*

Demonstração: Para ver isso, seja um campo $v(z)$ gerado pelos L_n. Podemos escrever

$$v(z) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n L_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{n+1}\frac{d}{dz}$$

que é não-singular (e portanto é bem definida globalmente) para $n \geq -1$ quando $z \to 0$. Para ver a restrição para n positivo, façamos $w = \frac{1}{z} \to 0$, implicando $n \leq 1$. Concluí-se que somente $\{L_{-1}, L_0, L_1\}$ são definidos globalmente.

A recíproca é clara, já que $\{L_{-1}, L_0, L_1\}$ são lineares, e portanto definidos globalmente. □

Existe a versão para os geradores $\overline{L}_n$, que é análogo.

Obtemos então que o conjunto $\{L_{-1}, L_0, L_1\} \cup \left\{\overline{L}_{-1}, \overline{L}_0, \overline{L}_1\right\}$ é o conjunto dos geradores infinitesimais de $Aut(\mathbb{P}) \cong Conf\left(\mathbb{R}^{2,0}\right)$.

4.1.2 Caso $\mathbb{R}^{1,1}$

Como vimos, o grupo $Conf\left(\mathbb{R}^{1,1}\right)$ é isomorfo ao produto $Diff_+\left(S^1\right) \times Diff_+\left(S^1\right)$. A álgebra de $Diff_+\left(S^1\right)$ possui relação com a álgebra de Witt. Para isso, segue o seguinte lema:

Lema 4.2 *O grupo álgébrico $Diff_+\left(S^1\right)$, com sua topologia induzida de $C^\infty\left(S^1, S^1\right)$ (espaço das aplicações $S^1 \to S^1$ de classe C^∞) munido da topologia de Whitney, é um grupo de Lie com álgebra igual ao espaço vetorial real dos campos de vetores classe C^∞ denotado por $Vect\left(S^1\right)$.*

Sua demonstração, assim como a demostração de que $Diff_+\left(S^1\right)$ é um grupo de Lie, será omitida por estar fora do escopo deste trabalho, e pode ser encontrada em [14].

Um elemento genérico de $Vect\left(S^1\right)$ é $f\frac{d}{d\theta}$, com $f \in C^{\infty}\left(S^1, S^1\right)$. O colchete de Lie entre dois elementos $f\frac{d}{d\theta}, g\frac{d}{d\theta} \in Vect\left(S^1\right)$ é

$$\begin{aligned}\left[f\frac{d}{d\theta}, g\frac{d}{d\theta}\right] &= f\frac{d}{d\theta} \circ \left(g\frac{d}{d\theta}\right) - g\frac{d}{d\theta} \circ \left(f\frac{d}{d\theta}\right) \\ &= \left(f \circ g' - g \circ f'\right)\frac{d}{d\theta}\end{aligned}$$

onde $g' = \frac{dg}{d\theta}$ e $f' = \frac{df}{d\theta}$. Representando os elementos de $C^{\infty}\left(S^1, S^1\right)$ por séries convergentes de Fourier, temos

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

onde

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, e^{-in\theta} d\theta.$$

A convergência da série de Fourier é válida neste caso, pois como os elementos de $Vect\left(S^1\right)$ são difeomorfismos de S^1, que é compacto, a aplicação

$$\begin{aligned} p : S^1 &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto \theta \end{aligned}$$

onde $z = e^{i\theta}$ (e implicitamente estamos tomando $S^1 \subset \mathbb{C}$), define um isomorfismo entre $C^{\infty}\left(S^1, S^1\right)$ e $C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, e a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx < \infty$$

para toda $f \in C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Em outras palavras, as funções de $C^{\infty}\left(S^1, S^1\right)$ são quadrado integráveis, e como p torna a função periódica com intervalo 2π, temos que toda função de $C^{\infty}\left(S^1, S^1\right)$ possui uma série de Fourier associada que converge uniformemente para ela. Escrevendo

$$\begin{aligned} L_n &= ie^{in\theta}\frac{d}{d\theta} \\ &= ie^{in\theta}\left(ie^{i\theta}\frac{d}{dz}\right) \\ &= -z^{n+1}\frac{d}{dz} \end{aligned}$$

como a base de $Vect\left(S^1\right)$, temos que o colchete se torna

$$[L_n, L_m] = (n - m)\, L_{n+m}.$$

A complexificação de $Vect\left(S^1\right)$,

$$Vect^{\mathbb{C}}\left(S^1\right) := Vect\left(S^1\right) \otimes \mathbb{C}$$

tem, como subálgebra, a álgebra de Witt $\mathrm{W} = \mathbb{C}\{L_n; n \in \mathbb{Z}\}$, gerada por $L_n = -z^{n+1}\frac{d}{dz}$, $n \in \mathbb{Z}$, com colchete de de Lie $[L_m, L_n] = (m - n)\, L_{m+n}$.

Para um estudo introdutório de séries de Fourier, ver [23].

4.2 Álgebra de Virasoro

Construiremos agora a álgebra de Virasoro a partir da extensão unidimensional não trivial da álgebra de Witt. Sua importância fica clara ao perceber que uma extensão não-trivial por $\mathfrak{su}(1)$ é o que precisamos para representar a álgebra conforme no formalismo de quantização.

Teorema 4.3 *O segundo grupo de cohomologia* $\mathrm{H}^2(W,\mathbb{C})$ *é isomorfo a* $\mathbb{C}$.

Demonstração: Queremos mostrar que uma dada aplicação linear $\omega : \mathrm{W}\times\mathrm{W}\to\mathbb{C}$ (um 2-cociclo) define uma extensão não trivial de W por $\mathbb{C}$ (ou seja, $\omega\in\mathrm{Z}^2(\mathrm{W},\mathbb{C})$ e $\omega\notin\mathrm{B}^2(\mathrm{W},\mathbb{C})$), e que se Θ é um 2-cociclo ($\Theta\in\mathrm{Z}^2(\mathrm{W},\mathbb{C})$) que gera uma extensão não trivial, então existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tal que $\Theta\sim\lambda\omega$, mostrando que $\mathrm{H}^2(\mathrm{W},\mathbb{C})\cong\mathbb{C}$.

Primeiro, definamos a aplicação linear $\omega : \mathrm{W}\times\mathrm{W}\to\mathbb{C}$ como

$$\omega(L_n,L_m) := \delta_{n+m}\frac{n}{12}\left(n^2-1\right)$$

com $\delta_k=0$ se $k\neq 0$ e $\delta_k=1$ se $k=1$. Por definição, ω é bilinear e alternada, e além disso

$$\begin{aligned}
\omega(L_k,[L_m,L_n])+\omega(L_m,[L_n,L_k])+&\\
+\omega(L_n,[L_k,L_m]) &= (m-n)\,\omega(L_k,L_{m+n})+(m-k)\,\omega(L_m,L_{n+k})+\\
&+(k-m)\,\omega(L_n,L_{k+m})\\
&=(m-n)\,\delta_{k+m+n}\frac{k}{12}\left(k^2-1\right)+(n-k)\,\delta_{m+n+k}\frac{m}{12}\left(m^2-1\right)+\\
&+(k-m)\,\delta_{n+k+m}\frac{n}{12}\left(n^2-1\right)\\
&=\frac{1}{12}\left((m+k+m)\,k\left(k^2-1\right)-(m+2k)\,m\left(m^2-1\right)+\right.\\
&\left.+(k-m)(k+m)\left((k+m)^2-1\right)\right)\\
&=0
\end{aligned}$$

e portanto $\omega\in\mathrm{Z}^2(\mathrm{W},\mathbb{C})$.

Agora, suponha que $\omega\in\mathrm{B}^2(\mathrm{W},\mathbb{C})$. Então existe $\mu\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{W},\mathbb{C})$ com $\omega(X,Y)=\mu([X,Y])$ para todo $X,Y\in\mathrm{W}$. Então temos que para todo $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\omega(L_n,L_{-n}) &= \mu([L_n,L_{-n}])\\
&=\mu(2nL_0)
\end{aligned}$$

e pela linearidade de μ temos $\mu(L_0)=\frac{1}{24}\left(n^2-1\right)$, que não vale para todo n, implicando $\omega\notin\mathrm{B}^2(\mathrm{W},\mathbb{C})$. Isso mostra que ω gera uma extensão central não trivial.

Por fim, a unicidade. Suponha $\Theta\in\mathrm{Z}^2(\mathrm{W},\mathbb{C})$, então temos que da definição do colchete na álgebra de Witt

$$\Theta(L_k,[L_m,L_n])=(m-n)\,\Theta(L_k,L_{m+n})$$

e como $\Theta(L_k,[L_m,L_n])+\Theta(L_m,[L_n,L_k])+\Theta(L_n,[L_k,L_m])=0$, temos para $k=0$

$$\Theta(L_n,L_m)=\frac{m-n}{m+n}\Theta(L_0,L_{m+n})$$

onde $m+n\neq 0$. Sabemos que Θ gera uma extensão central. Definamos uma extensão central equivalente pelo isomorfismo $\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}'$ dado pela identidade, mas com o colchete

$$[X+Z,Y+K]_{\mathfrak{h}}\mapsto[X+Z,Y+K]_{\mathfrak{h}'}=[X+Z,Y+K]_{\mathfrak{h}}+\tilde{\mu}(X,Y)$$

onde $\tilde{\mu}(X,Y) = \mu([X,Y])$, com $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{W},\mathbb{C})$ dado por

$$\begin{aligned}\mu(L_n) &:= \frac{1}{n}\Theta(L_0,L_n), \text{ para } n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\\ \mu(L_0) &:= -\frac{1}{2}\Theta(L_1,L_{-1})\end{aligned}$$

Isso é equivalente a trocar o 2-cociclo Θ por $\Theta' := \Theta + \tilde{\mu}$. Que de fato Θ' é um 2-cociclo vem de que:

- a aplicação $\tilde{\mu}$ é bilinear e alternada, que por sua vez segue do colchete de Lie e Θ serem bilineares e alternados. A parte alternada pode ser vista explicitamente

  $$\begin{aligned}\Theta'(X,X) &= \Theta(X,X) + \tilde{\mu}(X,X)\\ &= \mu([X,X])\\ &= 0.\end{aligned}$$

  Isso implica que $\Theta' \in \mathrm{Alt}^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$.

- da linearidade de μ e do colchete de Lie, $\tilde{\mu}$ é linear, e da identidade de Jacobi satisfeita por Θ e por $\mathfrak{g}$, obtemos que $\Theta' \in \mathrm{Z}^2(\mathrm{W},\mathbb{C})$.

A razão para a troca de 2-cociclo é que $\Theta' = \lambda\omega$, como veremos. Primeiro, perceba que para $m+n \neq 0$

$$\begin{aligned}\Theta'(L_n,L_m) &= \Theta(L_n,L_m) + \mu([L_n,L_m])\\ &= \frac{m-n}{m+n}\Theta(L_0,L_{m+n}) + (n-m)\,\mu(L_{m+n})\\ &= \frac{m-n}{m+n}\Theta(L_0,L_{m+n}) + (n-m)\,\frac{1}{m+n}\Theta(L_0,L_{m+n})\\ &= 0\end{aligned}$$

e então podemos escrever $\Theta'(L_n,L_m) = \delta_{n+m}h(n)$, com $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Mostremos que

$$\Theta'(L_n,L_m) = \delta_{n+m}h(n) = \delta_{n+m}\lambda\frac{n}{12}\left(n^2-1\right).$$

De fato, como Θ' é 2-cociclo, satisfaz

$$\Theta(L_k,[L_m,L_n]) + \Theta(L_m,[L_n,L_k]) + \Theta(L_n,[L_k,L_m]) = 0$$

ou para $m+n+k=0$, depois $n=1$, e levando em consideração $h(1)=0$, obtem-se para $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$

$$h(m+1) = \frac{m-2}{m-1}h(m)$$

Agora, se definirmos $\lambda := 2h(2)$, temos que a equação

$$h(n) = \lambda\frac{n}{12}\left(n^2-1\right)$$

é satisfeita para $n = 1,2$. Por indução, suponha que vale $h(m) = \lambda\frac{m}{12}\left(m^2-1\right)$ para $1 < m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}h(m+1) &= \frac{m+2}{m-1}h(m)\\ &= \frac{m+2}{m-1}\frac{\lambda}{12}m\left(m^2-1\right)\\ &= \frac{\lambda}{12}m(m-1)(m+2)\\ &= \frac{\lambda}{12}(m-1)\left((m+1)^2-1\right)\end{aligned}$$

e portanto temos a última parte do teorema. □

Definição 4.4 *A álgebra de Virasoro* Vir *é a extensão central da álgebra de Witt* W *por* $\mathbb{C}$ *definida por* ω*, ou seja*

$$Vir = \mathrm{W} \oplus \mathbb{C}Z \text{ como um espaço vetorial complexo,}$$

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} + \delta_{m+n} \lambda \frac{n}{12} \left(n^2 - 1\right) Z,$$

$$[L_m, Z] = 0 \text{ para } n, m \in \mathbb{Z}.$$

Perceba que Vir pode ser vista como uma álgebra afim Kac-Moody, ver Exemplo 2.5.

4.3 Teoria de Representação da Álgebra de Virasoro

A teoria de representação de uma álgebra, além de ser importante por si só, nos dando visualizações das estruturas matemáticas, podem ser utilizadas para aplicações importantes. Um exemplo é a classificação de Wigner das partículas elementares a partir das representações irredutíveis unitárias com energia não negativa da álgebra de Poincaré, ver [6]. Com base no capítulo anterior, buscamos encontrar uma representação da álgebra de Virasoro que seja unitária e que tenha certas propriedades que se assemelhem a energia não negativa.

Primeiro, como não definimos uma topologia em Vir, então não definimos da maneira usual como uma aplicação em um subconjunto de $U(\mathbb{H})$. Ao invés disso, definamos a unitariedade de maneira mais direta.

Para referência sobre a teoria de representações da álgebra de Virasoro, ver [4, 15].

Definição 4.5 *Uma representação* $\rho : \mathrm{Vir} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$ *é chamada unitária se existe uma forma hermitiana positiva semi-definida* $H : V \times V \to \mathbb{C}$ *tal que* $\forall v, w \in V$ *e* $n \in \mathbb{Z}$ *temos*

$$H(\rho(L_n) v, w) = H(v, \rho(L_{-n}) w)$$
$$H(\rho(Z) v, w) = H(v, \rho(Z) w)$$

Queremos também que a representação seja de energia positiva, de tal maneira que o operador definido como o que mede a energia tenha autovalores positivos. Claro que para que seja medido em todo o espaço vetorial V, precisamos que os elementos de V possam ser escritos como combinação linear dos autovetores deste operador. Como geralmente L_0 toma o papel de operador energia, já que pelo colchete de Lie ele deixa os outros elementos da álgebra invariantes

$$[L_n, L_0] = nL_n$$

para $n \neq 0$, segue a seguinte definição.

Definição 4.6 *Uma representação* $\rho : \mathrm{Vir} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$ *é chamada representação de energia positiva se satisfaz*

1. *V admite uma base consistindo de autovetores de $\rho(L_0)$;*

2. *Todos os autovalores da base são não-negativos;*

3. *Os autoespaços de $\rho(L_0)$ são finito-dimensionais.*

Os autoespaços de um operador A são definidos como subconjuntos de V

$$S_\mu = \{v \in V; Av = \mu v\}$$

onde μ é autovalor de A.

Investigaremos essas representações a partir das representações de peso maximal.

Definição 4.7 *Um vetor $v \in V$ é chamado um vetor cíclico para a representação $\rho : \mathrm{Vir} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$ se*

$$span\{\rho(X_1)...\rho(X_m)v : X_j \in \mathrm{Vir}\, para\, j = 1, ..., m,\, m \in \mathbb{N}\} = V$$

ou seja, o subespaço vetorial gerado pelos vetores $\rho(X_1)...\rho(X_m)v$ geram todo V.

Definição 4.8 *Uma representação $\rho : \mathrm{Vir} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$ é chamada uma representação de peso maximal se existem $h, c \in \mathbb{C}$ e um vetor cíclico $v_0 \in V$ tais que*

$$\begin{aligned} \rho(Z)v_0 &= cv_0 \\ \rho(L_0)v_0 &= hv_0 \\ \rho(L_n)v_0 &= 0\, para\, n \in \mathbb{Z},\, n \geq 1 \end{aligned}$$

Chamamos v_0 o vetor de vácuo e chamamos V de módulo Virasoro por ρ com peso maximal (c, h).

Um resultado que será utilizado em algumas demonstrações é descrito de forma geral a seguir.

Lema 4.9 *Seja V uma representação de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ que decompõe como uma soma direta de autoespaços de uma subálgebra de dimensão finita comutativa $\mathfrak{h}$:*

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}*} V_\lambda$$

onde $V_\lambda = \{v \in V;\, hv = \lambda(h)v,\, \forall h \in \mathfrak{h}\}$, e $\mathfrak{h}*$ é o espaço vetorial dual de $\mathfrak{h}$. Então toda subrepresentação U de V respeita essa decomposição no sentido de que

$$U = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}*} (U \cap V_\lambda).$$

Demonstração: Por definição, todo $v \in V$ pode ser escrito como $v = \sum_{j=1}^{m} w_j$, onde $w_j \in V_{\lambda_j}$, e como $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $j \neq i$, existe $h \in \mathfrak{h}$ tal que $\lambda_i(h) \neq \lambda_j(h)$. Se $v \in U$, então

$$\begin{aligned} v &= \sum_{j=1}^{m} w_j \\ h(v) &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j \\ &\vdots \\ h^{m-1}(v) &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{m-1} w_j \end{aligned}$$

Identificando a matriz de coeficientes como uma matriz (transposta) de Vandermonde, o determinante será $\det(V) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq m} (\lambda_j - \lambda_i)$, temos que ela é invertível. Portanto podemos escrever w_j como combinação linear dos vetores $h^i(v) \in U$, pois U é uma representação de $\mathfrak{g}$. Logo $w_j \in U \cap V_{\lambda_j}$. $\square$

Também utilizaremos os módulos de Verma para estudar as representações. Sua importância é simplesmente ordenar a sequência de ações à esquerda na definição de vetor cíclico. Isso gera a diferença entre L_n com $n > 0$ e $n < 0$ como operador de destruição e de criação, respectivamente, a partir do vetor de vácuo v_0.

Definição 4.10 *Um módulo de Verma é um espaço vetorial* $M(c,h)$*,* $c, h \in \mathbb{C}$*, com uma representação de peso maximal* $\rho : \mathrm{Vir} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M(c,h))$ *e um vetor de vácuo* $v_0 \in M(c,h)$ *tais que*

$$\{\rho(L_{-n_1})...\rho(L_{-n_k})v_0; n_1 \geq ... \geq n_k > 0, k \in \mathbb{N}\} \cup \{v_0\}$$

é uma base de $M(c,h)$*.*

Lema 4.11 *Para todo* $c, h \in \mathbb{C}$ *existe um único módulo de Verma* $M(c,h)$ *com peso maximal* (c,h)*.*

Demonstração: Definamos o espaço vetorial complexo gerado pela base

$$\{v_{n_1...n_k}; n_1 \geq ... \geq n_k > 0, k \in \mathbb{N}\} \cup \{v_0\}$$

ou seja

$$M(c,h) = \mathbb{C}v_0 \oplus \bigoplus \mathbb{C}\{v_{n_1...n_k}; n_1 \geq ... \geq n_k > 0, k \in \mathbb{N}\}$$

onde $\rho(L_{-n_1})...\rho(L_{-n_k})v_0 = v_{n_1...n_k}, n_1 \geq ... \geq n_k > 0, k \in \mathbb{N}$, implicando que v_0 seja um vetor cíclico. Definamos primeiro que a aplicação $\rho : \mathrm{Vir} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M(c,h))$ tenha as condições para que seja uma representação de peso maximal

$$\begin{aligned}
\rho(Z)v_0 &= cv_0 \\
\rho(L_0)v_0 &= hv_0 \\
\rho(L_n)v_0 &= 0 \, para \, n \in \mathbb{Z}, \, n \geq 1.
\end{aligned}$$

Agora, definamos as outras ações de tal maneira que ρ seja $\mathbb{C}$-linear e que seja uma representação. Assim temos

$$\begin{aligned}
\rho(L_{-n})v_0 &= v_n \\
\rho(L_{-n})v_{n_1...n_k} &= v_{nn_1...n_k}, \, n \geq n_1.
\end{aligned}$$

As outras relações podem ser obtidas por meio da relação $[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m}$, $n \neq m$, e supondo ρ linear e satisfazendo a definição de representação, $[\rho(L_n), \rho(L_m)] = \rho([L_n, L_m])$. Supondo $n_1 \geq ... \geq n_i > n \geq n_{i+1} \geq ... \geq n_k > 0$, encontramos a relação

$$\begin{aligned}
\rho(L_{-n})v_{n_1...n_k} = \Big(&(-n+n_1)\rho\left(L_{-(n+n_1)}\right) \text{ -} \\
&+ \sum_{j=1}^{i}\left(\prod_{r=1}^{i-1}\rho(L_{-n_r})\right)(-n+n_j)\rho\left(L_{-(n+n_j)}\right) \\
&+ \left(\prod_{j=1}^{i}\rho\left(L_{-n_j}\right)\right)\rho(L_{-n})\Bigg) v_{n_{i+1}...n_k}.
\end{aligned}$$

Novamente da relação de comutação,

$$\rho(L_0)v_{n_1...n_k} = \left(\sum_{j=1}^{k} n_j + h\right) v_{n_1...n_k}$$

e

$$\begin{aligned}
\rho(L_n)v_{n_1} &= \left(2nh + \frac{n}{12}\left(n^2-1\right)c\right)v_0, \, n = n_1 \\
\rho(L_n)v_{n_1} &= (n+n_1)v_{n_1-n}, \, 0 < n < n_1 \\
\rho(L_n)v_{n_1} &= 0, \, n > n_1 \\
\rho(Z)v_{n_1} &= cv_{n_1}
\end{aligned}$$

de onde se pode obter as relações para $v_{n_1 \ldots n_k}$ qualquer. Essas relações definem ρ como uma representação de Verma.

A unicidade segue da construção feita. Suponha outra representação de Verma $M'(c,h)$ com peso maximal (c,h), com vetor de vácuo u_0. Então pela definição de representação de peso maximal ser $\mathbb{C}$-linear, e por ser uma representação da álgebra de Virasoro, valem as relações anteriormente obtidas, implicando em um isomorfismo entre $M(c,h)$ e $M'(c,h)$. $\square$

Corolário 4.12 *Seja $M(c,h)$ um módulo de Verma com vetor de vácuo v_0. Para toda representação de peso maximal V de* Vir *com vetor de vácuo u_0, existe um único epimorfismo $\phi : M(c,h) \to V$ que leva v_0 em u_0.*

Demonstração: Pela demonstração do Lema anterior temos que a única exigência utilizada para restringir a representação de peso maximal em um módulo de Verma é escrever o espaço vetorial como o espaço vetorial gerado pelos autovetores de $\rho(L_0)$. Portanto, se não houver mais esta restrição, obtemos representações de peso maximal com peso maximal (c,h) que contém um módulo de Verma $M(c,h)$ com o mesmo peso maximal. Pela unicidade do módulo de Verma $M(c,h)$, temos que existe uma epimorfismo $\phi : M(c,h) \to V$. $\square$

Definição 4.13 *Uma representação M é indecomposível se não existem subespaços invariantes próprios $V, W \subset M$ tais que $M = V \oplus W$. De outro modo, M é decomposível.*

Definição 4.14 *Uma representação M é chamada irredutível se não existe subespaço invariante próprio $V \subset M$. De outro modo, M é chamado redutível.*

Quando exigimos uma simetria em uma teoria física dada por uma álgebra de Lie, buscamos suas representações irredutíveis para classificar as possíveis teorias. Um exemplo é a classificação dos possíveis spins (campo magnético intríseco das partículas) por meio das representações irredutíveis da álgebra de Lorentz.

Vejamos algumas propriedades das representações estudadas.

Teorema 4.15 *Para cada peso (c,h) temos*

1. *O módulo de Verma $M(c,h)$ é indecomposível;*
2. *Se $M(c,h)$ é redutível, então existe um único subespaço invariante maximal $J(c,h)$ tal que $V(c,h) = M(c,h)/J(c,h)$ é a única representação de peso maximal irredutível com peso maximal (c,h);*
3. *Uma representação de energia positiva irredutível é uma representação de peso maximal;*
4. *Uma representação de peso maximal unitária é irredutível.*

Demonstração:

1. Suponha $M(c,h)$ decomposível, ou seja, existem subespaços invariantes próprios $V, W \subset M(c,h)$ tais que $M(c,h) = V \oplus W$. Por definição de módulo de Verma, temos que $M(c,h)$ pode ser decomposto por M_j com $\dim M_j = 1$, onde M_j são os subespaços gerados por $v_{n_1 \ldots n_k}$ para toda combinação $j = n_1 \ldots n_k$, com $n_1 \geq \ldots \geq n_k > 0$. Então podemos escrever

$$V = \bigoplus (M_j \cap V)$$
$$W = \bigoplus (M_j \cap W).$$

Porém se chamarmos de M_0 o subespaço gerado por v_0, temos que, ou $(M_0 \cap V) = 0$ ou $(M_0 \cap W) = 0$, já que $W \cap V = \emptyset$. Pela invariância de V e W, concluímos que $V = M(c,h)$ ou $W = M(c,h)$.

2. Seja $J(c,h)$ a soma de todos os espaços invariantes próprios de $M(c,h)$. Então $J(c,h)$ é o único subespaço invariante maximal e $V(c,h) = M(c,h)/J(c,h)$ é uma representação de peso maximal irredutível. A unicidade de $V(c,h)$ segue da unicidade de $J(c,h)$.

3. Seja $\rho : \mathrm{Vir} \to \mathfrak{gl}(V)$ uma representação de energia positiva irredutível. Por definição existe um vetor $0 \neq w \in V$ que seja autovetor de $\rho(L_0)$, ou seja, existe $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\rho(L_0)w = \lambda w$. Temos pela relação de comutação de Vir que

$$\begin{aligned}
\rho(L_0)\left(\prod_{i=1}^{t}\rho(L_{j_i})\right)w &= \left(\left[\rho(L_0),\rho(L_{j_1})\right] + \rho(L_{j_1})\rho(L_0)\right)\left(\prod_{i=2}^{t}\rho(L_{j_i})\right)w \\
&= \left(\rho(L_{j_1})\rho(L_0) - j_1\rho(L_{j_1})\right)\left(\prod_{i=2}^{t}\rho(L_{j_i})\right)w \\
&\vdots \\
&= \left(\lambda - \left(\sum_{i=1}^{t} j_i\right)\right)\left(\prod_{i=1}^{t}\rho(L_{j_i})\right)w \\
&= h\left(\prod_{i=1}^{t}\rho(L_{j_i})\right)w
\end{aligned}$$

implicando λ como limite superior dos autovalores, pois $j_i > 0$ pela definição de representação de energia positiva, já que são autovalores de $\rho(L_0)$. Se $\sum_{i=1}^{t} j_i$ é o maior valor para que $\left(\prod_{i=1}^{t}\rho(L_{j_i})\right)w \neq 0$, então para $j > 0$

$$\rho(L_j)\left(\prod_{i=1}^{t}\rho(L_{j_i})\right)w = 0$$

Além disso, de $[L_n, Z] = 0$, temos que

$$\rho(Z)\left(\prod_{i=1}^{t}\rho(L_{j_i})\right)w = c\left(\prod_{i=1}^{t}\rho(L_{j_i})\right)w$$

para algum $c \in \mathbb{C}$. Escrevendo $\left(\prod_{i=1}^{t}\rho(L_{j_i})\right)w = v_0$, obtemos as relações necessárias. Falta mostrar que v_0 assim definido é um vetor cíclico. Seja

$$\mathit{span}\left\{\rho(X_1)\ldots\rho(X_m)v_0 : X_j \in \mathrm{Vir}\,\mathit{para}\, j = 1,\ldots,m,\ m \in \mathbb{N}\right\} = V' \subset V$$

como V é irredutível, $V = V'$, e portanto v_0 é cíclico.

4. Suponha que exista uma representação de peso maximal unitária $M(c,h)$. Se existe um subespaço invariante $V \subset M(c,h)$, então V é uma representação de peso maximal unitária com peso maximal (c,h). Pelo item 2 ele é único a menos de isomorfismo, e portanto V é isomorfíco a $M(c,h)$, e portanto $V = M(c,h)$.

$\square$

Proposição 4.16 *Sejam $h, c \in \mathbb{R}$. Temos*

1. *Existe uma única forma hermitiana $H : M(c,h) \times M(c,h) \to \mathbb{C}$, chamada forma de Shapolvalov, satisfazendo $H(v_0,v_0) = 1$, $H(\rho(L_n)v,w) = H(v,\rho(L_{-n})w)$ e $H(Zv,w) = H(v,Zw)$, para todo $v,w \in M(c,h)$ e para todo $n \in \mathbb{Z}$;*

2. *Os autoespaços de L_0 são par a par ortogonais, ou seja, para $M \neq N$, $v \in V_N$, $w \in V_M$, temos $H(v,w) = 0$;*

3. *O $ker(H)$ é um submódulo maximal próprio de $M(c,h)$, ou seja, é o subespaço invariante próprio maximal de $M(c,h)$,*

$$J(c,h) = ker(H) = \{u \in M(c,h)\,;\, H(u,w) = 0,\, \forall w \in M(c,h)\}.$$

Demonstração:

1. Primeiro a existência. Definamos $H : M(c,h) \times M(c,h) \to \mathbb{C}$ como

$$H\left(v_{n_1...n_k}, v_{m_1...m_j}\right) = \left\langle \rho(L_{n_k})...\rho(L_{n_1})\, v_{m_1...m_j}, v_0 \right\rangle$$

onde $\langle .,. \rangle$ é o produto usual no espaço vetorial $M(c,h)$. Mostremos que isso implica as relações dadas. Que $H(Zv,w) = H(v,Zw)$ é claro, já que ele só gera uma constante, e a forma de Shapovalov é bilinear. Definindo que v_0 for normalizado,

$$\begin{aligned} H(v_0,v_0) &= \langle v_0, v_0\rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

e escrevendo $w = \sum_i \alpha_i v_i$, onde $i = m_1...m_j$, e a soma em i é para todas as combinações respeitanto $m_1 \geq ... \geq m_j > 0$, temos

$$\begin{aligned} H(\rho(L_n)\, v, w) &= H\left(\rho(L_n)\, v, \sum_i \alpha_i v_i\right) \\ &= \sum_i \alpha_i H\left(\rho(L_n)\, v, \prod_{t=1}^{j} \rho(L_{-m_t})\, v_0\right) \\ &= \sum_i \alpha_i \left\langle \rho(L_{m_j})...\rho(L_{m_1})\, \rho(L_n)\, v, v_0\right\rangle \\ &= \sum_i \alpha_i H\left(v, \rho(L_n) \prod_{t=1}^{j} \rho(L_{-m_t})\, v_0\right) \\ &= H\left(v, \rho(L_n) \sum_i \alpha_i v_i\right) \\ &= H(v, \rho(L_n)\, w). \end{aligned}$$

A unicidade segue da construção de $M(c,h)$ e da forma ter que satisfazer as relações dadas. Suponha uma forma $P : M(c,h) \times M(c,h) \to \mathbb{C}$ que satisfaça as relações. Então $P(v_0,v_0) = 1$. Sejam $v, w \in M(c,h)$ quaisquer, então podemos escrever

$$w = \sum_i \alpha_i v_i = \sum_i \alpha_i \left(\prod_{t=1}^{j} \rho(L_{-m_t})\, v_0\right)$$

e de forma análoga

$$v = \sum_l \alpha_l v_l = \sum_l \alpha_l \left(\prod_{t=1}^{k} \rho(L_{-n_t})\, v_0\right)$$

de onde temos

$$\begin{aligned}
P(v,w) &= P\left(\sum_l \alpha_l \left(\prod_{t=1}^{k} \rho(L_{-n_t}) v_0\right), \sum_i \alpha_i \left(\prod_{t=1}^{j} \rho(L_{-m_t}) v_0\right)\right) \\
&= \sum_l \alpha_l \sum_i \alpha_i P\left(\prod_{t=1}^{k} \rho(L_{-n_t}) v_0, \prod_{t=1}^{j} \rho(L_{-m_t}) v_0\right) \\
&= \sum_l \alpha_l \sum_i \alpha_i P\left(\rho(L_{m_j}) ... \rho(L_{m_1}) \prod_{t=1}^{k} \rho(L_{-n_t}) v_0, v_0\right).
\end{aligned}$$

Disso temos três opções: $\sum_t n_t = \sum_t m_t$, $\sum_t n_t > \sum_t m_t$ ou $\sum_t n_t > \sum_t m_t$. Pela unicidade de $M(c,h)$, sabemos que as relações do Lema 7.7 descrevem unicamente a ação dos $\rho(L_n)$ em v_0 dependendo somente do índice n e do peso maximal (c,h). Logo, se definirmos ϕ como essa função escalar que independe da forma P, podemos escrever

$$\begin{aligned}
P(v,w) &= \sum_l \alpha_l \sum_i \alpha_i P(\phi(c,h,n_1,...,n_k,m_1,...,m_j) v_0, v_0) \\
&= \sum_l \alpha_l \sum_i \alpha_i \phi(c,h,n_1,...,n_k,m_1,...,m_j) P(v_0,v_0) \\
&= \sum_l \alpha_l \sum_i \alpha_i \phi(c,h,n_1,...,n_k,m_1,...,m_j)
\end{aligned}$$

e portanto a forma é unicamente definida pelas propriedades de $M(c,h)$, implicando que a forma P é a mesma forma de Shapovalov.

2. Sejam M e N dois autoespaços de L_0, $M \neq N$, e $v \in V_N$, $w \in V_M$. Podemos escrever $v = v_{n_1...n_k}$ e $w = v_{m_1...m_j}$, e como $M \neq N$, temos sem perda de generalidade que $\sum_{i=1}^{k} n_i > \sum_{i=1}^{j} m_j$. Como

$$\begin{aligned}
H(v,w) &= \left\langle v_{n_1...n_k}, v_{m_1...m_j} \right\rangle \\
&= \left\langle \prod_{t=1}^{k} \rho(L_{-n_t}) v_0, \prod_{t=1}^{j} \rho(L_{-m_t}) v_0 \right\rangle \\
&= \left\langle v_0, \rho(L_{n_k}) ... \rho(L_{n_1}) \prod_{t=1}^{j} \rho(L_{-m_t}) v_0 \right\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

e portanto os autoespaços são ortogonais.

3. Primeiro, perceba que se $v \in ker(H)$, então $H(w, L_n v) = H(L_{-n} w, v) = 0$, implicando $L_n v \in ker(H)$. Além disso, como $H(v_0,v_0) \neq 0$, temos $v_0 \notin ker(H)$, e logo $ker(H) \neq M(c,h)$ e $ker(H) \neq \emptyset$ (pois possui o elemento nulo), concluindo que $ker(H)$ é um submódulo próprio de $M(c,h)$. Mostremos que é maximal. Seja $U \subset M$ um submódulo próprio, e $w \in U$ tal que $H(v_{n_1...n_k}, w) \neq 0$ para ao menos um conjunto $\{n_1,...,n_k\}$. Isso implica

$$\begin{aligned}
0 &\neq H(v_{n_1...n_k}, w) \\
&= H\left(\prod_{t=1}^{k} \rho(L_{-n_t}) v_0, w\right) \\
&= H\left(v_0, \prod_{i=1}^{k} \rho(L_{n_i}) w\right)
\end{aligned}$$

e portanto $v_0 \in U$, contradizendo o fato de U ser próprio, pois nesse caso $U = M(c,h)$. Então para todo conjunto $\{n_1, ..., n_k\}$ temos $H(v_{n_1 \dots n_k}, w) = 0$. Como w é qualquer, concluímos então que $U \subset J(c,h)$.

□

Corolário 4.17 *Se a forma de Shapolvalov H é positiva semi-definida, então $c \geq 0$ e $h \geq 0$.*

Demonstração: Para $0 < n \in \mathbb{Z}$, pela definição da forma de Shapolvalov

$$\begin{aligned} H(v_n, v_n) &= H(\rho(L_{-n}) v_0, \rho(L_{-n}) v_0) \\ &= H(v_0, \rho(L_n) \rho(L_{-n}) v_0) \\ &= H(v_0, \rho[L_n, L_{-n}] v_0) \\ &= 2nh + \frac{n}{12}(n^2 - 1) c \end{aligned}$$

Como $H(v_n, v_n) \geq 0$ para todo n, para $n = 1$ temos $h \geq 0$, implicando $c \geq 0$. □

Proposição 4.18 *Existe no máximo uma representação de peso maximal unitária para um dado peso maximal (c,h), denotado por $V(c,h)$.*

Demonstração: Como toda representação unitária de peso maximal é irredutível, e como $V(c,h) = M(c,h)/J(c,h)$ é a única representação de peso maximal irredutível com peso maximal (c,h), temos o solicitado. □

Proposição 4.19 *Se $V(c,h)$ é unitária, então $c \geq 0$ e $h \geq 0$.*

Demonstração: Como a forma de Shapolvalov é única, então ela é a forma hermitiana que define $V(c,h)$ como unitária. Com o resultado do Corolário anterior, temos o solicitado. □

Perceba que dessa maneira já temos certas condições para que a representação seja unitário, irredutível, entre outras propriedades interessantes. Agora, a questão é para qual peso maximal existe a forma de Shapovalov de tal maneira que valem todas as propriedades solicitadas. Para tal estudo, utiliza-se o determinante de Kac.

Definição 4.20 *Sejam $P(n) = dim_{\mathbb{C}} V_n$ e $\left\{b_1, ..., b_{P(n)}\right\}$ uma base de V_n. Definamos matrizes A^n por $A^n_{ij} = H(b_i, b_j)$ para $i, j \in \{1, ..., P(n)\}$.*

Desse modo a forma de Shapovalov será positiva semi-definida se e somente se todas as matrizes A^n são positiva semi-definidas. Para calcular o determinante de tal matriz, temos o seguinte Teorema, cuja demonstração será omitida pela sua extensão, mas pode ser encontrada detalhadamente em [15].

Teorema 4.21 *O determinante de Kac é dado por*

$$det(A^n(c,h)) = K_n \prod_{0<r,s\in\mathbb{N}, 1\leq rs\leq n} (h - h_{r,s}(c))^{p(n-rs)}$$

onde

$$K_n = \prod_{0<r,s\in\mathbb{N}, 1\leq rs\leq n} ((2r)^s s!)^{m(r,s)},$$

$$m(r,s) = p(n - rs) - p(n - r(s+1)),$$

e

$$h_{r,s}(c) = \frac{1}{48}\left((13 - c)(r^2 + s^2) + \sqrt{(c-1)(c-25)}(r^2 - s^2) - 24rs - 2 + 2c\right).$$

Com a fórmula do determinante de Kac podemos provar o seguinte Teorema sobre os valores do peso maximal (c, h) para que o módulo de Verma $M(c, h)$ seja unitário. Novamente, a demonstração será omitida por sua extensão, e pode ser encontrada detalhadamente em [15].

Teorema 4.22 *Sejam $c, h \in \mathbb{R}$. Temos*

1. *$M(c, h)$ é unitário (positivo definido) para $c > 1$, $h > 0$;*

2. *$M(c, h)$ é unitário (positivo semi-definido) para $c \geq 1$, $h \geq 0$;*

3. *$M(c, h)$ é unitário para $0 \leq c < 1$, $h > 0$ se e somente se existe $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$, tal que $c = c(m)$ e $h = h_{p,q}(m)$ para $1 \leq p \leq q < m$ com*

$$h_{p,q}(m) = \frac{((m+1)p - mq)^2 - 1}{4m(m+1)}, \; m \in \mathbb{N},$$

$$c(m) = 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \; m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Capítulo 5

Teoria de Cordas Bosônicas

A teoria de cordas clássica pode ser vista como uma generalização da geometria riemanniana clássica, no sentido que não se analisa o movimento de entidades pontuais na variedade riemanniana, mas sim entidades unidimensionais, denominadas cordas. É vista como uma generalização pois as cordas possuem um parâmetro l, denominado comprimento da corda, que obviamente no limite $l \to 0$ resulta na geometria riemanniana usual (ver [30]).

Será apresentado a teoria de cordas bosônicas, onde a corda está em uma variedade semi-Riemanniana plana $\left(\mathbb{R}^D, \eta\right)$ com $\eta = \operatorname{diag}(-1, 1, ..., 1)$. O movimento da corda na direção do tempo próprio (ver [5]) gera uma variedade bidimensional, conhecida como folha mundo.

Para uma descrição mais detalhada, ver [17, 18, 29].

Definição 5.1 *Uma folha mundo em $\left(\mathbb{R}^D, \eta\right)$ é uma parametrização C^∞*

$$x : Q \to \mathbb{R}^D$$

de uma superfície $W = x(Q) \subset \mathbb{R}^D$, onde $Q \subset \mathbb{R}^2$ é um retângulo aberto ou fechado.

Implicitamente supomos que a parametrização tem vetores tangentes com componente não nula na direção do tempo próprio, ou seja, a corda se propaga no tempo. Assim temos que os campos clássicos são as componentes x^μ da parametrização.

5.1 Mecânica pontual

Na mecânica clássica em uma variedade semi-riemanniana plana $\left(\mathbb{R}^D, \eta\right)$ com $\eta = \operatorname{diag}(-1, 1, ..., 1)$, o movimento de entidades pontuais é dado pela equação obtida da ação funcional

$$S_1(x) = -m \int_J ds,$$

onde $ds = \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$ e J é uma curva em $\mathbb{R}^D$. A esta equação se dá o nome de equação de movimento, e ela é obtida exigindo que S_1 seja estacionária em relação as variáveis do movimento, ou seja,

$$\delta_x S_1(x) = \frac{d}{d\varepsilon} S_1(x + \varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Existe também a versão generalizada da ação S_1 no formalismo tetrad, onde se introduz uma forma independente da linha mundo $\gamma = \gamma(\tau)$, com assinatura $(-, +)$ e temos o tetrad $\rho = \rho(\tau) = (-\det\gamma)^{\frac{1}{2}}$, e a ação

$$S_2(x) = \frac{1}{2} \int_I d\tau \left(\rho^{-1} \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} + \rho m^2\right)$$

onde I é uma curva em $\mathbb{R}^D$. Novamente, a equação de movimento é obtida exigindo que S_2 seja estacionária em relação as variáveis do movimento,

$$\delta_\rho S_2 := \left.\frac{d}{d\varepsilon} S_2 (x, \rho + \varepsilon f)\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

$$\delta_x S_2 := \left.\frac{d}{d\varepsilon} S_2 (x + \varepsilon, \rho)\right|_{\varepsilon=0}.$$

Lema 5.2 *As ações S_1 e S_2 são equivalentes na variação das variáveis de movimento, ou seja, elas produzem a mesma equação de movimento.*

Demonstração: Perceba que a equação de movimento desta última ação quando fazemos o tetrad de variável do movimento

$$\begin{aligned}
0 = \delta_\rho S_2 &:= \left.\frac{d}{d\varepsilon} S_2 (x, \rho + \varepsilon f)\right|_{\varepsilon=0} \\
&= -\frac{1}{2}\int_I d\tau \delta_\rho \left(\rho^{-1}\eta_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} + \rho m^2\right) \\
&= -\frac{1}{2}\int_I d\tau \left(-\rho^{-2}\eta_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} + m^2\right)\delta\rho
\end{aligned}$$

tem a forma

$$\rho^2 = \frac{\eta_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}}{m^2}$$

para $m \neq 0$. Com esta equação podemos obter a primeira ação da segunda

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\int_I d\tau \left(\rho^{-1}\eta_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau} + \rho m^2\right) &= -\frac{1}{2}\int_I d\tau \left[m\left(\eta_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\right)^{\frac{1}{2}} + m\left(\eta_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= -m\int_I d\tau \left(\eta_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= -m\int_J ds.
\end{aligned}$$

□

5.2 Mecânica de cordas

No caso das cordas clássicas, a ação funcional é dada por

$$S_{NG} = -T\int_Q d\tau d\sigma \left(-\det h\right)^{\frac{1}{2}}$$

que nada mais é que a área da folha mundo. De fato, se denotarmos por $h = x * \eta$, onde $(x * \eta)_{ij} = \eta_{\mu\nu}\partial_i x^\mu \partial_j x^\nu$, com $\partial_1 := \frac{\partial}{\partial\sigma}$ e $\partial_0 := \frac{\partial}{\partial\tau}$ (veja Definição 3.2 que apresentou essa notação),

$$\begin{aligned}
S_{NG} &= -T\int_Q d\sigma d\tau \left[(x*\eta)_{00}(x*\eta)_{11}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= -T\int_Q d\sigma \left(\eta_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma}\frac{\partial x^\nu}{\partial\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} d\tau \left(\eta_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

onde T é uma constante, conhecida como tensão da corda, e Q é uma superfície em $\mathbb{R}^D$ parametrizada por σ e τ. Assim temos a ação de Nambu-Goto

$$S_{NG} = -T \int_Q d\tau d\sigma \left(-\det h\right)^{\frac{1}{2}}.$$

O sinal negativo no determinante vem de que supomos que a corda propaga no sentido do tempo, ou seja, $\det(h) < 0$.

Porém, a ação de Nambu-Goto é de difícil manuseio, como por exemplo na quantização. Isso se deve a sua forma não linear, sendo que a quantização transforma variáveis em operadores lineares, criando assim problemas com os autovalores obtidos e uma má definição desses operadores. Então, de maneira análoga ao feito com a ação de um ponto, podemos utilizar uma ação equivalente em relação às variáveis de movimento.

Lema 5.3 *A ação de Polyakov*

$$S_P(x,\rho) = -\frac{T}{2} \int_Q d\tau d\sigma \left(-det\rho\right)^{\frac{1}{2}} \rho^{ij} h_{ij}$$

é equivalente à S_{NG}.

A forma ρ é chamada métrica auxiliar, e tem objetivo similar ao tetrad no caso da ação pontual.
Demonstração: Variando S_P com relação a forma ρ,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_Q d\tau d\sigma \delta_\rho \left[\left(-\det\rho\right)^{\frac{1}{2}} \rho^{ij} h_{ij}\right] \\
&= \int_Q d\tau d\sigma \left[\delta_\rho \left(-\det\rho\right)^{\frac{1}{2}} \rho^{ij} h_{ij} + \left(-\det\rho\right)^{\frac{1}{2}} \delta_\rho \rho^{ij} h_{ij}\right] \\
&= \int_Q d\tau d\sigma \left[-\frac{1}{2}\rho^{ij} h_{ij} \left(-\det\rho\right)^{\frac{1}{2}} \rho_{ab} + \left(-\det\rho\right)^{\frac{1}{2}} h_{ab}\right] \delta_\rho \rho^{ij}
\end{aligned}$$

onde usou-se a relação de variação do determinante

$$\delta\det(h) = \det(h)\, h^{ij} \delta h_{ij} = -\det(h)\, h_{ij} \delta h^{ij}.$$

Isso implica

$$h_{ab} = \frac{1}{2}\rho^{ij} h_{ij} \rho_{ab}$$

ou ainda $h = \lambda\rho$, com $\lambda = \frac{1}{2}\rho^{ij} h_{ij} > 0$. O tensor momento-energia é geralmente definido como sendo a variação da ação em relação à métrica,

$$T_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2}\rho^{ij} h_{ij} \rho_{ab}.$$

Substituindo em S_P

$$\begin{aligned}
S_P(x) &= -\frac{T}{2} \int_Q d\tau d\sigma \left(-\det\frac{h}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \rho^{ij} h_{ij} \\
&= -T \int_Q d\tau d\sigma \left(-\frac{1}{\lambda^2}\det h\right)^{\frac{1}{2}} \lambda \\
&= -T \int_Q d\tau d\sigma \left(-\det h\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= S_{NG}(x).
\end{aligned}$$

$\square$

É interessante buscar as transformações que são simetrias da ação, ou seja, a deixam invariante, não modificando a equação de movimento resultante. A ação S_P é invariante sob:

- transformações de Poincaré no espaço-tempo, pois são isometrias e portanto preservam a área;

De fato, essas transformações podem ser escritas como a composição de translação $x'^{\mu} = x^{\mu} + b^{\mu}$ e transformação infinitesimal de Lorentz $x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$, com $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. A invariância quanto a primeira vem de que S_P depende somente das derivadas primeiras de x^{μ}. A segunda vem da antissimetria de ω. Fazendo $h'_{ij} = \eta_{ab}\partial_i \left(x^a + \omega^a_{\nu} x^{\nu}\right) \partial_j \left(x^b + \omega^b_{\nu} x^{\nu}\right)$, com $\partial_1 := \frac{\partial}{\partial\sigma}$ e $\partial_0 := \frac{\partial}{\partial\tau}$,

$$
\begin{aligned}
S'_P &= -\frac{T}{2}\int_Q d\tau d\sigma \left(-\det\rho\right)^{\frac{1}{2}} \rho^{ij}\eta_{ab}\partial_i \left(x^a + \omega^a_{\nu}x^{\nu}\right)\partial_j\left(x^b + \omega^b_{\nu}x^{\nu}\right) \\
&= -\frac{T}{2}\int_Q d\tau d\sigma \left(-\det\rho\right)^{\frac{1}{2}} \rho^{ij}\eta_{ab}\left(\partial_i x^a + \omega^a_{\nu}\partial_i x^{\nu}\right)\left(\partial_j x^b + \omega^b_{\nu}\partial_j x^{\nu}\right) \\
&= S_P - \frac{T}{2}\int_Q d\tau d\sigma \left(-\det\rho\right)^{\frac{1}{2}} \rho^{ij}\eta_{ab}\left(\omega^b_{\nu}\partial_i x^a\partial_j x^{\nu} + \omega^a_{\nu}\partial_i x^{\nu}\partial_j x^b\right) + O\left(\omega^2\right) \\
&= S_P - \frac{T}{2}\int_Q d\tau d\sigma \left(-\det\rho\right)^{\frac{1}{2}} \rho^{ij}\left(\omega_{a\nu}\partial_i x^a\partial_j x^{\nu} + \omega_{b\nu}\partial_i x^{\nu}\partial_j x^b\right) + O\left(\omega^2\right) \\
&= S_P - \frac{T}{2}\int_Q d\tau d\sigma \left(-\det\rho\right)^{\frac{1}{2}} \rho^{ij}\eta_{ab}\left(\omega_{a\nu}\partial_i x^a\partial_j x^{\nu} + \omega_{\nu a}\partial_i x^a\partial_j x^{\nu}\right) + O\left(\omega^2\right) \\
&= S_P + O\left(\omega^2\right).
\end{aligned}
$$

Isso pode ser visto também da construção de S_{NG} como invariante quanto a essas transformações, afinal, nada mais é que o produto local de invariantes.

- reparametrização da folha mundo, pois a área é invarinte à reparametrizações da superfície;

Façamos essa transformação, que seria $(\sigma,\tau) \to \left(\sigma'(\sigma,\tau), \tau'(\sigma,\tau)\right)$. Pela regra da cadeia, o tensor métrico na folha de mundo ρ e do tensor h ficam

$$\rho^{ab} \to \rho'^{ab} = \rho^{cd}\frac{\partial\sigma'^a}{\partial\sigma^c}\frac{\partial\sigma'^b}{\partial\sigma^d}$$

$$h_{ab} \to h'_{ab} = h_{cd}\frac{\partial\sigma^c}{\partial\sigma'^a}\frac{\partial\sigma^d}{\partial\sigma'^b}$$

e portanto $\rho'^{ab}h'_{ab} = \rho^{ab}h_{ab}$. Além disso, definido o jacobiano $J = det\left(\frac{\partial\sigma'^a}{\partial\sigma^c}\right)$, temos que

$$
\begin{aligned}
\det\left(\rho'\right) &= \det\left(\rho'_{ab}\right) \\
&= \det\left(\rho_{cd}\frac{\partial\sigma^c}{\partial\sigma'^a}\frac{\partial\sigma^d}{\partial\sigma'^b}\right) \\
&= J^{-2}\det\left(\rho\right)
\end{aligned}
$$

e $d\sigma' d\tau'^2 d\sigma d\tau$, implicando a invariância.

- transformações de Weyl;

Esta última é definida como $\rho(\sigma,\tau) \to \rho'(\sigma,\tau) = exp(2\omega(\sigma,\tau))\,\rho(\sigma,\tau)$, com $x^\mu(\sigma,\tau) \to x'^\mu(\sigma,\tau) = x^\mu(\sigma,\tau)$, para toda aplicação $\omega : (\sigma,\tau) \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Mostremos essa invariância. A ação transformada será

$$\begin{aligned}
S_P(x',\rho') &= -\frac{T}{2}\int_Q d\tau d\sigma\,(-\det\rho')^{\frac{1}{2}}(\rho')^{ij}h_{ij} \\
&= -\frac{T}{2}\int_Q d\tau d\sigma\,(-\det(exp(2\omega)\,\rho))^{\frac{1}{2}}\,exp(-2\omega)\,\rho^{ij}h_{ij} \\
&= -\frac{T}{2}\int_Q d\tau d\sigma\,(-\det\rho)^{\frac{1}{2}}\,exp(2\omega)\,exp(-2\omega)\,\rho^{ij}h_{ij} \\
&= S_P(x,\rho)
\end{aligned}$$

pois como $\rho'^{ab}\rho'_{ab} = \delta_{ab}$, então $\rho'^{ab} = exp(-2\omega)\,\rho^{ab}$.

Perceba que isto encerra as simetrias de S_P. Podemos então buscar uma forma apropriada da ação dentro destas simetrias para facilitar a obtenção da equação de movimento. De fato, façamos a transformação $\rho^{ij} \to \Omega g^{ij}$, com $\Omega = (-\det\rho)^{-\frac{1}{2}}$ e $g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que nada mais é que a composição da transformação de Weyl $\rho^{ij} \to exp(2\omega(\sigma,\tau))\,\rho^{ij} = (-\det\rho)^{-\frac{1}{2}}\rho^{ij}$, onde identificamos $\omega = -\frac{1}{4}ln(-\det\rho)$ (lembrando que $\det\rho < 0$), com o difeomorfismo $\rho \to g$. Assim temos

$$\begin{aligned}
S_P &= -\frac{T}{2}\int_Q d\tau d\sigma\,(-\det\rho')^{\frac{1}{2}}(\rho')^{ij}h_{ij} \\
&= -\frac{T}{2}\int_Q d\tau d\sigma\,\left(-\Omega^{-2}\det g\right)^{\frac{1}{2}}\Omega g^{ij}h_{ij} \\
&= -\frac{T}{2}\int_Q d\tau d\sigma g^{ij}h_{ij} \\
&= -\frac{T}{2}\int_Q d\tau d\sigma\left(\eta_{\mu\nu}\partial_1 x^\mu\partial_1 x^\nu - \eta_{\mu\nu}\partial_0 x^\mu\partial_0 x^\nu\right).
\end{aligned}$$

A transformação de ρ dessa forma é denomidado **calibre conforme**. A variação dessa ação em relação a coordenada x fica

$$\begin{aligned}
\delta S_P &= -\frac{T}{2}\int_Q d\tau d\sigma\eta_{\mu\nu}\delta\left(\partial_1 x^\mu\partial_1 x^\nu - \partial_0 x^\mu\partial_0 x^\nu\right) \\
&= -\frac{T}{2}\int_Q d\tau d\sigma\eta_{\mu\nu}\left(\partial_1\delta x^\mu\partial_1 x^\nu + \partial_1 x^\mu\partial_1\delta x^\nu - \partial_0\delta x^\mu\partial_0 x^\nu - \partial_0 x^\mu\partial_0\delta x^\nu\right) \\
&= -\frac{T}{2}\int_Q d\tau d\sigma\eta_{\mu\nu}\left[\left(-\delta x^\mu\partial_1\partial_1 x^\nu - \partial_1\partial_1 x^\mu\delta x^\nu + \delta x^\mu\partial_0\partial_0 x^\nu + \partial_0\partial_0 x^\mu\delta x^\nu\right)\right. \\
&\left.+\partial_1\left(\delta x^\mu\partial_1 x^\nu\right) + \partial_1\left(\partial_1 x^\mu\delta x^\nu\right) - \partial_0\left(\delta x^\mu\partial_0 x^\nu\right) - \partial_0\left(\partial_0 x^\mu\delta x^\nu\right)\right] \\
&= -T\int_Q d\tau d\sigma\eta_{\mu\nu}\delta x^\mu\left(\partial_0\partial_0 x^\nu - \partial_1\partial_1 x^\nu\right) \\
&- T\eta_{\mu\nu}\left[\left(\int_{\tau(-\infty)}^{\tau(+\infty)} d\tau\delta x^\mu\partial_1 x^\nu\right)\Bigg|_{\sigma(0)}^{\sigma(l)} - \left(\int_{\sigma(0)}^{\sigma(l)} d\sigma\delta x^\mu\partial_0 x^\nu\right)\Bigg|_{\tau(-\infty)}^{\tau(+\infty)}\right].
\end{aligned}$$

A última integral se anula pois temos um termo de borda no infinito, que usualmente é tomado como nulo. A segunda integral porém não precisa necessariamente ser calculada no infinito. Pelo contrário, queremos que a corda possua um comprimento finito l. Para que a invariância de Poincaré continue válida, torna-se necessário que este termo se anule por uma das duas opções a seguir:

- $\partial_1 x^\nu (\sigma(0)) = \partial_1 x^\nu (\sigma(l))$, a condição de borda de Neumann, onde as cordas são abertas;
- $\partial_1 x^\nu (\sigma(0)) - \partial_1 x^\nu (\sigma(l)) = 0$ e $x^\mu (\sigma(0)) - x^\mu (\sigma(l)) = 0$, que são condições periódicas, ou seja, as cordas são fechadas.

Disso obtemos a equação de movimento

$$\partial_0\partial_0 x^\nu - \partial_1\partial_1 x^\nu = g^{ij}\partial_i\partial_j x^\mu = 0$$

que nada mais é que a equação de onda.

A partir daqui trataremos o caso das cordas fechadas.

Para solução da equação de onda, primeiro podemos escrever $x(\tau,\sigma) = x_L(\tau+\sigma) + x_R(\tau-\sigma)$. Segundo, podemos procurar a solução pelo método de série de Fourier, de onde temos

$$x_R = \frac{1}{2}x_0^\mu + \frac{1}{4\pi T}p_0^\mu(\tau-\sigma) + \frac{i}{\sqrt{4\pi T}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^\mu exp(-in(\tau-\sigma))$$

$$x_L = \frac{1}{2}x_0^\mu + \frac{1}{4\pi T}p_0^\mu(\tau+\sigma) + \frac{i}{\sqrt{4\pi T}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\overline{\alpha}_n^\mu exp(-in(\tau+\sigma))$$

e portanto obtemos

$$x = x_0^\mu + \frac{2\tau}{\sqrt{4\pi T}}\alpha_0^\mu + \frac{i}{\sqrt{4\pi T}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\left(\alpha_n^\mu exp(-in(\tau-\sigma)) + \overline{\alpha}_n^\mu exp(-in(\tau+\sigma))\right)$$

onde $\alpha_0^\mu = \overline{\alpha}_0^\mu = \frac{1}{\sqrt{4\pi T}}p_0^\mu$.

Porém, mesmo fixado o calibre conforme ainda existe simetria na ação, que como o nome sugere, é a simetria conforme. Para ver isso, escrevamos a ação após uma transformação conforme local ϕ da folha de mundo já no calibre conforme

$$\begin{aligned} S'_P &= -\frac{T}{2}\int_{Q'} d\tau' d\sigma' g'^{ij} h'_{ij} \\ &= -\frac{T}{2}\int_{Q} d\tau d\sigma \left|J\phi\right|^{-1}\lambda^2 g^{ij} h_{ij} \\ &= -\frac{T}{2}\int_{Q} d\tau d\sigma g^{ij} h_{ij} \\ &= S_P \end{aligned}$$

pois $|J\phi| = \lambda^2$. Isso implica em restrições à solução da equação de onda para encontrarmos uma solução mais simples.

Vamos então as restrições necessárias. Primeiro, para que x seja real, temos que $\alpha_n^\mu = \left(\alpha_{-n}^\mu\right)^*$ e $\overline{\alpha}_n^\mu = \left(\overline{\alpha}_{-n}^\mu\right)^*$. Para que a solução da equação de onda seja uma solução da equação de movimento obtida da ação S_P com o calibre conforme, é necessário que esta solução respeite o calibre conforme. Para isso, definamos

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\eta_{\mu\nu}\alpha_k^\mu\alpha_{n-k}^\nu$$

$$\overline{L}_n = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\eta_{\mu\nu}\overline{\alpha}_k^\mu\overline{\alpha}_{n-k}^\nu.$$

Se respeita o calibre conforme $\rho = \Omega g$, então da relação $h = \lambda\rho$ temos

$$\begin{aligned}
T_{ij} &= h_{ij} - \frac{1}{2}\rho_{ij}\rho^{ab}h_{ab} \\
&= \lambda\rho_{ij} - \frac{1}{2}\lambda\rho_{ij}\left(\rho^{ab}\rho_{ab}\right) \\
&= \lambda\Omega^{-1}g_{ij} - \frac{1}{2}\lambda\Omega^{-1}g_{ij}\left(\Omega g^{ab}\Omega^{-1}g_{ab}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $T_{ij} = 0$, então

$$\rho^{ab}\rho_{ab} = 2$$

e como $g^{ab}g_{ab} = 2$, temos a recíproca. Ou seja, o calibre conforme é equivalente ao tensor momento-energia ser nulo. Isso também implica em $h_{ij} = \lambda\Omega^{-1}g_{ij}$, ou seja,

$$0 = \eta_{\mu\nu}\partial_\sigma x^\mu \partial_\sigma x^\nu - \eta_{\mu\nu}\partial_\tau x^\mu \partial_\tau x^\nu$$

e

$$\eta_{\mu\nu}\partial_\sigma x^\mu \partial_\tau x^\nu = \eta_{\mu\nu}\partial_\tau x^\mu \partial_\sigma x^\nu = 0$$

ou ainda

$$\eta_{\mu\nu}\left(\partial_\sigma x^\mu + \partial_\tau x^\mu\right)\left(\partial_\sigma x^\mu + \partial_\tau x^\mu\right) = 0$$

e

$$\eta_{\mu\nu}\left(-\partial_\sigma x^\mu + \partial_\tau x^\mu\right)\left(-\partial_\sigma x^\mu + \partial_\tau x^\mu\right) = 0.$$

Claro que isso é equivalente, pela definição de h, ao tensor momento-energia nulo, e portanto ao calibre conforme. Como

$$\partial_\sigma x^\mu + \partial_\tau x^\mu = \frac{2}{\sqrt{4\pi T}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}$$

e

$$\partial_\tau x^\mu - \partial_\sigma x^\mu = \frac{2}{\sqrt{4\pi T}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}$$

temos

$$\begin{aligned}
\pi T\eta_{\mu\nu}\left(\partial_\sigma x^\mu + \partial_\tau x^\mu\right)\left(\partial_\sigma x^\mu + \partial_\tau x^\mu\right) &= \eta_{\mu\nu}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \overline{\alpha}_m^\nu e^{-im(\tau+\sigma)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-i(n+m)(\tau+\sigma)}\left(\eta_{\mu\nu}\overline{\alpha}_n^\mu\overline{\alpha}_m^\nu\right)
\end{aligned}$$

implicando em $\eta_{\mu\nu}\overline{\alpha}_n^\mu\overline{\alpha}_m^\nu = 0$ e de maneira análoga $\eta_{\mu\nu}\alpha_n^\mu\alpha_m^\nu = 0$. Isso é equivalente a $L_n = 0$ e $\overline{L}_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Provamos o seguinte teorema.

Teorema 5.4 *A solução para a equação de movimento de cordas clássicas é dada por*

$$x^\mu = x_0^\mu + \frac{2\tau}{\sqrt{4\pi T}}\alpha_0^\mu + \frac{i}{\sqrt{4\pi T}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\left(\alpha_n^\mu exp\left(-in\left(\tau-\sigma\right)\right) + \overline{\alpha}_n^\mu exp\left(-in\left(\tau+\sigma\right)\right)\right)$$

com as condições $L_n = 0$ e $\overline{L}_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, e $\alpha_n^\mu = \left(\alpha_{-n}^\mu\right)^*$ e $\overline{\alpha}_n^\mu = \left(\overline{\alpha}_{-n}^\mu\right)^*$.

5.3 Quantização

Iremos agora usar as ferramentas de quantização para cordas fechadas. Primeiro, temos que identificar o conjunto $\mathcal{A}$ de observáveis clássicos para serem representados em um espaço de Hilbert a ser escolhido. Pela equação de movimento, escolhamos $\mathcal{A} = \{x_0, p_0, \alpha_n, \overline{\alpha}_m\}$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$. Porém o parêntese de Poisson é definido em relação às variáveis canônicas do espaço tempo, que seriam a posição x^μ e o momento conjugado, dado por

$$\begin{aligned}\pi^\mu := & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_0 x_\mu\right)} \\ = & T\partial_0 x^\mu\end{aligned}$$

onde $\mathcal{L}$ é a densidade de lagrangiana, e $S_P = \int_Q d\tau d\sigma \mathcal{L}$. Escrevendo explicitamente,

$$\pi^\mu = T\partial_0 x_0^\mu + \sqrt{\frac{T}{\pi}}\alpha_0^\mu + \sqrt{\frac{T}{\pi}}\sum_{n\neq 0}\left(\alpha_n^\mu exp\left(-in\left(\tau-\sigma\right)\right) + \overline{\alpha}_n^\mu exp\left(-in\left(\tau+\sigma\right)\right)\right).$$

O parênteses de Poisson fica

$$\{f, g\} = \sum_{s=0}^{D-1}\left\{\frac{\partial f}{\partial x^s}\frac{\partial g}{\partial \pi^s} - \frac{\partial g}{\partial x^s}\frac{\partial f}{\partial \pi^s}\right\}.$$

Para x e π temos

$$\{x^\mu(\sigma,\tau), x^\nu(\sigma',\tau')\} = \{\pi^\mu(\sigma,\tau), \pi^\nu(\sigma',\tau')\} = 0$$

$$\{x^\mu(\sigma,\tau), \pi^\nu(\sigma',\tau')\} = \eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma')\,\delta(\tau-\tau').$$

Para as componentes da série de Fourier,

$$\begin{gathered}\{p_0^\mu, x_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \\ \{\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu\} = \{\overline{\alpha}_n^\mu, \overline{\alpha}_m^\nu\} = in\eta^{\mu\nu}\delta_{n,-m} \\ \{x_0^\mu, x_0^\nu\} = \{p_0^\mu, p_0^\nu\} = \{\alpha_n^\mu, \overline{\alpha}_m^\nu\} = \{x_0^\mu, \overline{\alpha}_m^\nu\} = \{p_0^\mu, \overline{\alpha}_m^\nu\} = \{x_0^\mu, \alpha_m^\nu\} = \{p_0^\mu, \alpha_m^\nu\} = 0.\end{gathered}$$

Além disso, temos que os L_n satisfazem a álgebra de Witt pelo parênteses de Poisson. De fato,

$$\begin{aligned}\{L_m, L_n\} = & \left\{\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\eta_{\mu\nu}\alpha_k^\mu\alpha_{m-k}^\nu, \frac{1}{2}\sum_{t\in\mathbb{Z}}\eta_{\kappa\epsilon}\alpha_t^\kappa\alpha_{n-t}^\epsilon\right\} \\ = & \frac{1}{4}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{t\in\mathbb{Z}}\eta_{\kappa\epsilon}\eta_{\mu\nu}\left\{\alpha_k^\mu\alpha_{m-k}^\nu, \alpha_t^\kappa\alpha_{t-k}^\epsilon\right\} \\ = & \frac{1}{4}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{t\in\mathbb{Z}}\eta_{\kappa\epsilon}\eta_{\mu\nu}\left(\alpha_k^\mu\alpha_t^\kappa\left\{\alpha_{m-k}^\nu, \alpha_{n-t}^\epsilon\right\} + \alpha_k^\mu\alpha_{n-t}^\epsilon\left\{\alpha_{m-k}^\nu, \alpha_t^\kappa\right\}\right. \\ & \left. + \left\{\alpha_k^\mu, \alpha_{n-t}^\epsilon\right\}\alpha_t^\kappa\alpha_{m-k}^\nu + \left\{\alpha_k^\mu, \alpha_t^\kappa\right\}\alpha_{n-t}^\epsilon\alpha_{m-k}^\nu\right) \\ = & \frac{i}{4}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(2\eta_{\kappa\mu}\left(m-n\right)\left(\alpha_k^\mu\alpha_{m+n-k}^\kappa\right)\right) \\ = & i\left(m-n\right)L_{m+n}.\end{aligned}$$

Para quantizar precisamos encontrar o espaço de representação adequado, onde os operadores referentes aos elementos de $\mathcal{A}$ relacionados com tal espaço satisfaçam as condições de Dirac

$$[p_0^\mu, x_0^\nu] = -i\hbar\eta^{\mu\nu}$$

$$[\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = [\overline{\alpha}_n^\mu, \overline{\alpha}_m^\nu] = n\hbar\eta^{\mu\nu}\delta_{n,-m}$$

e nulo para os outros colchetes. Perceba que sem perda de generalidade, escolhendo $n > 0$, podemos escrever

$$a_n = \frac{\alpha_n}{\sqrt{n\hbar}}$$
$$a_n^\dagger = \frac{\alpha_{-n}}{\sqrt{n\hbar}}$$

e de maneira equivalente para $\overline{\alpha}_n$. Disso o colchete se torna

$$\left[a_n^\mu, (a_m^\nu)^\dagger\right] = \eta^{\mu\nu}\delta_{n,-m},$$

generalização do colchete do oscilador harmônico para mais dimensões. A interpretação clara é que para cada dimensão e para cada estado excitado (dado pelo índice n), obtemos a quantização equivalente a do oscilador harmônico. Isso sugere que o espaço de representações possa ser a soma direta dos espaços de Hilbert para cada dimensão. Tal espaço de representações é chamado espaço de Fock. Como candidato escolhamos

$$\mathrm{S} := \mathbb{C}\left[T_n^\mu; n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \mu = 0, ..., D-1\right]$$

o espaço dos polinômios em T_n^μ no corpo dos complexos, que pode ser vista como a soma direta das álgebras das séries de Laurent convergentes $\mathbb{C}\left(T_n^\mu\right)$ para cada valor de μ e n, que por sua vez é equivalente a álgebra dos polinômios de Laurent $\mathbb{C}\left[T, T^{-1}\right]$, onde construímos o espaço de Hilbert do oscilador harmônico. Perceba então que este espaço é isomorfo a soma direta dos espaços de representação dos osciladores harmônicos em questão. Definindo os operadores

$$\rho\left(\sqrt{n\hbar}\alpha_n^\mu\right) = \rho\left(a_n^\mu\right) = \eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial T_{-n}^\nu}$$
$$\rho\left(\sqrt{m\hbar}\alpha_{-m}^\mu\right) = \rho\left(\left(a_m^\mu\right)^\dagger\right) = T_m^\mu$$
$$\rho\left(x_0^\mu\right) = T_0^\mu$$
$$\rho\left(\sqrt{4\pi T}\alpha_0^\mu\right) = \rho\left(p_0^\mu\right) = -i\eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial T_0^\nu}$$

com $n, m > 0$, obtemos as relações de comutação, e portanto a quantização.

A condição de calibre conforme para o caso quântico precisa ser redefinido, pois

$$\rho\left(\alpha_n^\mu\right)\rho\left(\alpha_{n-k}^\nu\right) \neq \rho\left(\alpha_{n-k}^\nu\right)\rho\left(\alpha_n^\mu\right)$$

e portanto é necessário uma ordem dos operadores, já que não mais vale a comutatividade. Uma definição natural é a **ordem normal**, dada por

$$:\rho\left(\alpha_i\right)\rho\left(\alpha_j\right) := \begin{cases} \eta_{\mu\nu}\rho\left(\alpha_i^\mu\right)\rho\left(\alpha_j^\nu\right) & \text{para } i \geq j \\ \eta_{\mu\nu}\rho\left(\alpha_j^\nu\right)\rho\left(\alpha_i^\mu\right) & \text{para } i < j \end{cases}$$

que intuitivamente ordena os operadores para primeiro criar os modos e depois os destruir. Assim definimos

$$\rho\left(L_n\right) : \mathrm{S} \to \mathrm{S}$$

dada por

$$\rho\left(L_n\right) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} :\rho\left(\alpha_k\right)\rho\left(\alpha_{n-k}\right): .$$

Que $\rho\left(L_n\right)$ satisfaz a álgebra de Virasoro pode ser mostrada pelas identidades anteriores. Na verdade pode-se mostrar mais.

Teorema 5.5 *Os operadores* $\rho(L_n)$ *geram um módulo de Verma da álgebra de Virasoro em* S.

Demonstração: As relações para satisfazer a definição de módulo de Verma são obtidas da mesma maneira que feito na seção de representações de Vir, porém levando em consideração a ordem normal. O mais importante seria que essa representação já impõe o valor de h=1. De fato, se v_0 é o vetor de vácuo,

$$\begin{aligned}\rho(L_0)v_0 &= \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} :\alpha_k\alpha_{-k}: \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k\leq 0}\alpha_{-k}\alpha_k + \sum_{k>0}\alpha_k\alpha_{-k}\right)v_0 \\ &= \sum_{k>0}\alpha_k\alpha_{-k}v_0 \\ &= v_0\end{aligned}$$

de onde identifica-se $h = 1$. $\square$

Uma forma bilinear H em S que satisfaça as condições necessárias para a unitariedade geralmente não é positiva definida, como pode ser visto pelo cálculo simples

$$\begin{aligned}H\left(T_1^0, T_1^0\right) &= H\left(\rho\left(\alpha_{-1}^0\right)1, \rho\left(\alpha_{-1}^0\right)1\right) \\ &= H\left(1, \rho\left(\alpha_1^0\alpha_{-1}^0\right)1\right) \\ &= H\left(1, \rho\left(\left[\alpha_1^0, \alpha_{-1}^0\right]\right)1\right) \\ &= H(1, -1) \\ &= -1.\end{aligned}$$

Estados em que a forma tem valor negativo são chamados de **ghosts**. Como consequência, esta representação geralmente não respeita $\rho(L_n) = 0$. Isto implica na quebra da simetria conforme, fenômeno chamado **anomalia conforme**.

O teorema de Goddard-Thorn, também conhecido como teorema no-ghost, mostra em quais condições esses dois problemas são resolvidos para a teoria de cordas bosônicas. Provas podem ser encontradas em [16, 17].

Teorema 5.6 *Para a teoria de cordas bosônicas construída até aqui, o valor do peso maximal* (c, h) *do módulo de Verma em que temos uma representação unitária, com* $c, h \in \mathbb{R}$, *é* $(26, 1)$.

O valor $c = 26$ é dito dimensionalidade crítica da teoria. O mais marcante deste fato é que a própria teoria define a dimensão em que faz sentido físico.

Capítulo 6

Considerações Finais

Para finalizar este trabalho, alguns comentários sobre até onde a influência da teoria de transformações conformes introduzidas neste trabalho vai.

Primeiro, o grupo ortogonal generalizado é muito utilizado na física por descrever as mudanças de referenciais inerciais, descrevendo a diferença entre tempo e o espaço, mas unificando sua descrição no conceito de espaço-tempo. Sua generalização para variedades semi-riemannianas não planas foi primeiramente feita no intuito de resolver o problema da inconsistência entre a gravidade newtoniana e a simetria local (ou invariância pela álgebra) das transformações de Lorentz, culminando na teoria da relatividade geral, cuja aplicação desde sua criação são longas demais para incluir aqui. Porém ainda não está claro o que a simetria por transformações conformes locais ocasionaria em um espaço-tempo quadridimensional como o nosso.

O problema da quantização, que foi formalmente descrita no Capítulo 2 e sua forma mais usual, a canônica, é ainda um problema em aberto, no sentido de que existem muitas maneiras de quantizar um sistema clássico, porém não existe um método formal, matematicamente falando, de encontrar um sistema puramente quântico. Fisicamente porém isso não é um problema, já que os métodos informais funcionam. Isso ergue a questão do que é quantização e o que tal processo realmente faz. A descrição de tal processo atualmente é entendido como uma deformação da álgebra das funções clássicas, de onde obtém-se o chamado colchete de Moyal, cujo colchete encontrado nas condições de Dirac seria uma aproximação em primeira ordem. Um fato interessante é que no caso de $\Bbbk R^{2k}$ como espaço de fase, é demonstrado que a deformação descrita pelo colchete de Moyal é a única deformação possível da álgebra de Poisson. Para mais detalhes, veja [26].

As transformações conformes são geralmente tratadas pelas álgebras de Witt e de Virasoro. Um exemplo ocorre na teoria de campos conformes, que basicamente é uma teoria física-matemática de distribuições temperadas sob certas condições, uma delas pode ser que o sistema seja restrito a duas dimensões. Como o próprio nome já diz, ocorre a simetria conforme, e a álgebra de Witt aparece explicitamente nos coeficientes da expansão de Fourier do tendor momento-energia, de forma bem parecida com a teoria de cordas apresentada no capítulo anterior. E da mesma forma que no capítulo anterior, temos a quantização onde a forma explícita da álgebra de Virasoro aparece, naturalmente nos comutadores dos operadores que nada mais são que as componentes do operador relacionado ao tensor momento-energia. O fato importante é que a partir das representações unitárias irredutíveis desta álgebra, temos as possíveis teorias quânticas de campos conformes.

Das teorias de campos conformes, temos a construção de generalizações da álgebra de Virasoro por meio de álgebras de Kac-Moody, álgebras de Lie Afim, álgebra de Vertex e Cosets. Mais sobre tais assuntos e como construir os modelos físicos a partir das representações, veja [1]. O interessante é que das álgebras de Vertex podemos construir as teorias de campos conformes.

A própria teoria de cordas foi desenvolvida enormemente nas últimas décadas, mas a simetria conforme continua incrustada na sua construção. Atualmente, a teoria de cordas é chamada de teoria de supercodas, por incluir além da simetria conforme, uma simetria chamada de supersimetria, que se trata de uma resposta da questão da existência de álgebras de Lie englobando as tranformações de Lorentz e uma outra álgebra de Lie simples que descrevesse alguma simetria do sistema. Como a resposta foi negativa, criou-se as álgebras de Lie graduadas, uma delas sendo a álgebra supersimétrica. Neste cenário, o teorema de no-ghost diz que a dimensionalidade crítica é 10, e não mais 26. Menos que anteriormente, mas ainda muito alta para os propósitos de aplicação no mundo real. De qualquer modo, para preservar a estrura construída até então, a simetria conforme junto, diversas áreas matemáticas foram construídas, como as simetrias de espelho e o estudo das formas de Calabi-Yau, e a criação e o estudo das álgebras de Vertex.

Porém talvez a mais impresionante aplicação de todo este formalismo se dá no problema conhecido como Monster Moonshine. Basicamente se dá ao perceber o que parecia somente uma coincidência entre a dimensão das representações irredutíveis do grupo monster, o maior dos 26 grupos finitos simples esporádicos, e a expansão de Fourier dos J-invariantes normalizados de certas funções modulares, e em particular, a j-função. A partir da construção da álgebra de Lie monster no contexto das álgebras de Vertex, e do uso do Teorema 5.3, além de outras ferramentas cujo escopo foge deste trabalho, foi possível verificar que a coincidência numérica não era uma coincidência afinal.

Além disso, o grupo monster tem relação com a classificação das teorias de campos conformes a partir da álgebra de Lie monster.

Bibliografia

[1] DI FRANCESCO, P.; MATHIEU, P.; SÉNÉCHAL, D.. *Conformal Field Theory.* Springer Verlag, New York, 1996.

[2] NOVIKOV, S. P.; TAIMANOV, I. A. *Modern Geometric Structures and Fields.* AMS, Rhode Island, 2006.

[3] SOUZA, JOSINEY A. ; MARQUES, CARLOS H. ; MENDES, LEONARDO O. ; BORTOTTI, MARCIO F. A. ; MONTANHANO, SIDINEY B. . *Isometrias no espaço de Minkowski: grupo ortogonal generalizado e grupo de Poincaré.* Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática , v. 34, p. 99-128, Maringá, 2016.

[4] SCHOTTENLOHER, M. *A Mathematical Introduction to Conformal Field Theory*, Lect. Notes Phys. 759, Springer, Berlin Heidelberg, 2008. DOI 10.1007/978-3-540-68628-6

[5] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology.* John Wiley & Sons Ltd., New Delhi, 1972.

[6] WEINBERG, S. *Quantum Field Theory I.* Cambridge University Press, New York, 1995.

[7] ARFKEN, G. *Mathematical Methods for Physicists*, Terceira Edição. Academic Press, Inc., London, 1985.

[8] LIMA, E. L. *Variedades Diferenciáveis.* IMPA, Rio de Janeiro, 2011.

[9] GINSPARG, P. *Aplied Conformal Field Theory.* Les Houches School, Cambridge, 1989. hep-th/9108028.

[10] LANDAU, L. D. ; LIFSHITZ, E. M. *Mechanics*, Terceira Edição. Reed Educational and Professional Publishing Ltd, London, 1981.

[11] ARNOLD, V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* Spring-Verlag, New York, 1989.

[12] SCHWARTZ, M. D. *Quantum Field Theory and the Standard Model.* Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[13] LIMA, E. L. *Espaços Métricos.* IMPA, Rio de Janeiro, 2013.

[14] DEWITT, B. S. ; STORA, R. *Relativity, Groups And Topology II.* Les Houches School, Amsterdam, 1984.

[15] HARTWIG, J. T. *Highest weight representations of the Virasoro algebra.* Dissertação de Mestrado, https://www.itp.uni-hannover.de/ flohr/lectures/seminar/virkac.pdf , 2003.

[16] THORN, C. B. *A proof of the no-ghost theorem using the Kac determinant.* In: Vertex Operators in Mathematics and Physics, Lepowsky et al. (Eds.), 411–417. Springer Verlag, Berlin, 1984.

[17] POLCHINSKI, J. *String Theory, An Introduction to the Bosonic String.* Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[18] TONG, D. *String Theory.* arXiv:0908.0333v3, 2009.

[19] MEEHAN, S. *Group Theory and the SO(3,1) Lorentz Group.* lkcl.net/reports/rishon_group_analysis/330project.pdf, 2009.

[20] MARTIN, L. A. B. S. *Álgebras de Lie.* Editora Unicamp, Campinas, 2010.

[21] MARTIN, L. A. B. S. *Grupos de Lie.* Editora Unicamp, Campinas, 2017.

[22] SAKURAI, J. J. ; NAPOLITANO, J. *Mecânica Quântica Moderna.* Bookman Editora Ltda, Porto Alegre, 2013.

[23] GONDAR, J. L. ; CIPOLATTI, R. *Iniciação à Física Matemática.* IMPA, Rio de Janeiro, 2011.

[24] MEGGINSON, R. E. *An Introduction to Banach Space Theory.* Springer, New York, 1991.

[25] FABIAN, M. ; HABALA, P. ; HÁJEK, P. ; MONTESINOS, V. ; ZIZLER, V. *Banach Space Theory, The Basis for Linear and Nonlinear Analysis.* Springer, New York, 2010.

[26] VARADARAJAN, V. S. *Reflections on Quanta, Symmetries, and Supersymmetries.* Springer, New York, 2010.

[27] KNAPP, A. W. *Lie Groups Beyond an Introduction.* Springer, New York, 1996.

[28] VARADARAJAN, V. S. *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations.* Springer, New York, 1984.

[29] TORRES, M. A. C. *Teoria de Cordas Bosônicas.* Dissertação de Mestrado, CBPF, Rio de Janeiro, 2002.

[30] DIJKGRAAF, R. H. *The Mathematics of String Theory.* Séminaire Poincaré, Amsterdam, 2004.

[31] ALBIAC, F. ; KALTON, N. J. *Topics in Banach Space Theory.* Springer, New York, 2006.

[32] MÜLLER-KIRSTEN, H. J. W. ; WIEDEMANN, A. *Supersymmetry, An Introduction with Conceptual and Calculational Details.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1987.

[33] OLIVEIRA, J. P. L. DE. *Sobre a Topologia do Grupo Ortogonal Generalizado.* Dissertação de Mestrado, UEM, Maringá, 2016.

[34] BARGMANN, V. *Note on Wigner's Theorem on Symmetry Operations.* Joirnal of Mathematical Physics, New Jersey, 1964.