UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

(Mestrado)

STEPHANIE AKEMI RAMINELLI[1]

Atratores Globais para Ações de Semigrupos

Maringá-PR

2013

[1]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES e Fundação Araucária, convênio 935/2012.

STEPHANIE AKEMI RAMINELLI

Atratores Globais para Ações de Semigrupos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas, da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Geometria e Topologia

Orientador: Prof. Dr. Josiney Alves de Souza

Maringá-PR
2013

Stephanie Akemi Raminelli

Atratores Globais para Ações de Semigrupos

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Prof. Dr. Josiney Alves de Souza - UEM ______________________
(Orientador)

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva - UNESP ______________________

Prof. Dr. Carlos José Braga Barros - UEM ______________________

Maringá-PR
27 de fevereiro de 2013

33 *Ó profundidade das riquezas, tanto da sabedoria, como da ciência de Deus! Quão insondáveis são os seus juízos, e quão inescrutáveis, os seus caminhos!*
34 *Porque quem compreendeu o intento do Senhor? Ou quem foi seu conselheiro?*
35 *Ou quem lhe deu primeiro a ele, para que lhe seja recompensado?*
36 *Porque dele, e por ele, e para ele são todas as coisas: glória, pois, a ele eternamente. Amém!*

Romanos 14:33-36, Bíblia Sagrada

Aos meus pais,

Ademir e Marina

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela força que tens me dado, sempre me ajudando e enviando palavras de coragem para prosseguir em frente nos momentos mais difíceis da minha vida.

Agradeço aos meus pais, Ademir e Marina, pelo amor que me deram, pelas orações e pelas condições que me proporcionaram para estudar. Agradeço aos meus irmãos, Efraim, Talita e Priscila, pelo carinho. Agradeço a minha família que sempre esteve torcendo por mim.

Agradeço ao professor Josiney Alves de Souza pela atenção, dedicação e excelente orientação durante o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço ao professor Carlos José Braga Barros pelas sugestões dadas para o melhoramento do trabalho. Agradeço ao professor Ronan Antonio dos Reis que me orientou durante a graduação. Agradeço a todos os professores pela transmissão de conhecimentos.

Agradeço a todos os meus amigos do mestrado Camila, Cleilton, Ginnara, João, Juliana, Patrícia, Rafael, Simone, Tatiana, Thales, e a todos os amigos do doutorado, Alex, André, Djeison e Victor que proporcionaram momentos inesquecíveis durante o mestrado. Agradeço as minhas amigas Larissa e Vanessa pela sua amizade. Agradeço a minha amiga Doraci pelos conselhos.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, introduzimos o conceito de atratores globais para ações de semigrupos sobre espaços métricos. Primeiramente, estudamos a teoria de atratores globais para sistemas semidinâmicos e, posteriormente, estendemos todos os resultados para ações de semigrupos. Trabalhamos, em especial, com ações assintoticamente compactas que possuem conjuntos ω-limites compactos e invariantes, contribuindo para o estudo do atrator global. Apresentamos condições necessárias e suficientes para a existência do atrator global para ações de semigrupos e sua caracterização pelos conjuntos ω-limites. Para finalizar, definimos os conceitos de prolongamento e conjunto limite prolongacional em ações de semigrupos para introduzimos o conceito de atrator uniforme global para ações de semigrupos. Concluímos o trabalho apresentando uma relação entre as noções de atrator global e atrator uniforme global.

Palavras-chave: Ação de semigrupo, Atrator global, Atrator uniforme global, Assintoticamente compacto, sistema semidinâmico.

Abstract

In this work, we introduce the concept of global attractor for semigroup actions on metric spaces. Initially, we study the theory of global attractor for semidynamical systems and then we extend all results for semigroup actions. We consider asymptotically compact semigroup actions, which have compact and invariant ω-limit sets, contributing to the study of the global attractor. We present necessary and sufficient conditions for the existence of the global attractor for semigroup actions and its characterization by ω-limit sets. To complete this work, we define the concepts of prolongation and prolongational limit set for semigroup action to introduce the concept of global uniform attracting set for semigroup actions and we present a relation between the notions of global attractor and global uniform attracting set.

Key-words: Semigroup action, Global attractor, Global uniform attracting set, Asymptotically compact, Semidynamical system.

Sumário

Introdução

O termo "atrator"destinado a um ponto singular e invariante em um fluxo foi utilizado por E. A. Coddington e N. Levinson em *Theory of ordinary differential equations* (1955). Porém, o conceito de atrator consistindo em mais que um ponto foi estudado pela primeira vez em *Attractor in dynamical systems* por J. Auslander, N. Bhatia e P. Siebert (1964). Desde então, o conceito de atrator tem sido definido de muitas maneiras e em vários contextos distintos na literatura.

A teoria qualitativa de sistema dinâmico originou das análises dos comportamentos das equações diferenciais, e mais tarde esses conceitos foram estudados em um espaço métrico geral. Essa teoria ganhou muitos resultados em espaços métricos compactos e localmente compactos. Nessa dissertação, no entanto, trabalhamos em especial com sistemas semidinâmicos assintoticamente compactos, sem que o espaço de fase seja compacto ou localmente compacto.

A noção de atratror começou a ganhar grande importância há 50 anos e existem várias definições. Recentemente, a existência do atrator global foi estudada em vários contextos (por exemplo, [17] e [21]) e também existem trabalhos que relacionam os conceitos de atratores (por exemplo, [11] e [24]). A definição de atração que vamos considerar nessa dissertação é a seguinte: Um conjunto A atrai um conjunto B pela ação do sistema $T(\cdot)$ se

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(T(t)B, A) = 0,$$

onde dist é a semidistância de Hausdorff definida no espaço métrico X. Assim, o conjunto não vazio, invariante, compacto e que atrai todo subconjunto limitado do espaço X é chamado atrator global. Se um sistema semidinâmico admite um atrator global, então ele é único e o comportamento assintótico do sistema pode ser descrito se analisarmos o interior do atrator. O assunto principal desse trabalho é a noção de atrator global para ações de semigrupos, que é uma extensão do conceito de atrator global para sistemas semidinâmicos. Apresentamos condições necessárias e suficientes para existência do atrator global para ações de semigrupos e mostramos uma relação entre atrator global e atrator uniforme global. Os conceitos estudados no contexto de ações de semigrupos resultaram um trabalho ([28]).

No primeiro capítulo apresentamos a noção de redes, que são generalizações de sequências. Esse conceito foi primeiramente introduzido em topologia por E. H. Moore e H. L. Smith em *A general theory of limits* (1922). Por esse motivo, alguns chamam as redes como sequências de Moore-Smith. O conceito de sequência é uma ferramenta muito utilizada nos espaços métricos e o conceito de convergência é fundamental para desenvolvimento do estudo nesse espaço. Porém nos espaços topológicos mais gerais não é possível utilizar sequências, donde surge a necessidade de introduzir a noção de redes. Então, começamos definindo o conjunto dirigido, que desempenha o papel semelhante ao conjunto dos números naturais, ou seja, tem a função de direcionar as redes dentro do espaço topológico. Muitos resultados para sequências já conhecidos são abordados em termos de redes. Apresentamos também a definição de base de filtro, conceito muito utilizado ao trabalharmos com ações de semigrupos. Os assuntos abordados neste capítudo podem ser encontrados em [15], [18] e [19].

O segundo capítulo trata da teoria de atrator global para sistemas semidinâmicos em espaços métricos. Este capítulo foi baseado na tese de doutorado de Aragão-Costa ([1]), e no trabalho de Aragão-Costa, Carvalho, Caraballo e Langa ([2]), que contribuiu para a concepção do conceito de atrator global para ações de semigrupos, discutido no terceiro capítulo. Começamos definindo o conceito de sistema semidinâmico e conjuntos invariantes, exibindo alguns exemplos. Na segunda seção, apresentamos a semidistância de Hausdorff, uma ferramenta de "medida"para definirmos o atrator global. Logo após, mostremos uma definição equivalente de atrator global usando o conjunto ϵ-vizinhança. Mostramos que o atrator global da forma como foi definido é único em um sistema semidinâmico e apresentamos uma caracterização por meio de conjuntos invariantes. Os conceitos como semiórbita positiva, sistema semidinâmico limitado, eventualmente limitado e dissipatividade do semifluxo são fundamentais para o desenvolvimento da teoria de atrator global. Na próxima seção, trabalhamos com o conjunto de suma importância: conjunto ω-limite. Esse conjunto descreve o comportamento assintótico do sistema e pode ser caracterizado em termos de sequências. Um dos conceitos relevantes é o de sistema assintoticamente compacto, pois nesse sistema, os conjuntos ω-limite adquirem propriedades como compacidade, invariância e atração. Na última seção apresentamos o teorema que garante a existência de atrator global.

No Capítulo 3, desenvolvemos o tema principal do trabalho, onde generalizamos os resultados obtidos no capítulo anterior, trabalhando com ações de semigrupos, a extensão dos sistemas semidinâmicos. A seção inicial contém conceitos como conjuntos invariantes, noções de atração e atrator global. Em se tratando de comportamento assintótico para a ação de um semigrupo, usamos uma família de subconjuntos não vazios do semigrupo que tem a propriedade de base de filtro. Assim, o conceito de atração neste contexto depende da família de subconjuntos não vazios do semigrupo em questão. Em seguida, definimos os conceitos de semiórbita, ação eventualmente limitada e limitada dissipativa, estendendo de maneira natural as definições já apresentadas no capítulo anterior. Na segunda seção, definimos o conjunto ω-limite. Essa definição foi introduzida por Braga Barros e Souza em [6]. Caracterizamos o conjunto ω-limite em termos de redes e definimos os conceitos de ação assintoticamente compacta e eventualmente compacta. Em [7], a invariância do conjunto ω-limite é garantida para espaços compactos. Fizemos uma demonstração análoga, porém para as ações assintoticamente compactas, não necessitando que o espaço de fase seja compacto. Na seção que segue, temos os resultados que garantem a existência do atrator global, um dos resultados mais importantes desse trabalho. Na última seção, abordamos os conceitos desenvolvidos neste capítulo para sistema de controle e apresentamos alguns exemplos de atratores globais para sistemas de controle.

O último capítulo consiste em apresentar a equivalência das definições de atrator global como foi definido e atrator uniforme global, que eram estudados separadamente nos tratados de sistemas dinâmicos. Para isso, precisamos definir os conceitos de prolongamento e conjunto limite prolongacional para ações de semigrupos. Esses conceitos foram introduzidos em [10]. Definimos o domínio de atração uniforme, atrator uniforme e atrator uniforme global. Em seguida mostramos resultados referentes às equivalências das definições de atratores. Para finalizar o capítulo, apresentamos alguns exemplos para uma melhor ilustração.

Capítulo 1

Redes

Nos espaços métricos geralmente trabalhamos com convergência de sequências, mas em espaços topológicos mais gerais, isso nem sempre é possível. A rede então cumpre um papel fundamental neste contexto, já que ela é uma generalização do conceito de sequências. Primeiramente, precisamos definir o conjunto que nos dá uma orientação, como o conjunto dos naturais. Definimos, então, o conjunto chamado dirigido. Apresentamos vários resultados básicos de redes, que são análogos aos de sequências. No decorrer do capítulo, definimos o conceito de filtro, que usamos frequentemente quando trabalhamos com ações de semigrupos.

Essa noção de redes em topologia foi introduzida primeiramente por E. H. Moore e H. L. Smith (1922) e alguns referem-se à elas como sequências generalizadas ou sequências de Moore-Smith.

Começamos com a definição de conjunto dirigido.

Definição 1.1 *Um conjunto Λ, com uma relação $\preceq$, é denominado* ***conjunto dirigido*** *se satisfaz as seguintes condições:*

i) $\lambda \preceq \lambda$, *para todo* $\lambda \in \Lambda$; *(reflexividade)*

ii) Se $\lambda \preceq \mu$ *e* $\mu \preceq \nu$, *então* $\lambda \preceq \nu$; *(transitividade)*

iii) Dados $\lambda, \mu \in \Lambda$, *existe* $\nu \in \Lambda$ *tal que* $\lambda \preceq \nu$ *e* $\mu \preceq \nu$.

*Dizemos que a relação $\preceq$ é uma **direção** para o conjunto Λ, ou que a relação $\preceq$ **dirige** o conjunto Λ.*

Daqui em diante, a menos de mensão explícita em contrário, Λ denota um conjunto dirigido.

Vejamos alguns exemplos de conjunto dirigido.

Exemplo 1.1 *O conjunto dos naturais $\mathbb{N}$ com a relação de ordem usual $\leq$ é um conjunto dirigido.*

Exemplo 1.2 *Sejam X um espaço topológico e $x \in X$. Se considerarmos a relação*

$$U \preceq V \iff V \subset U,$$

a coleção $\mathcal{U}_x$ de vizinhanças de $x \in X$ é um conjunto dirigido. Analogamente, com a mesma relação acima, a coleção $\mathcal{B}_x$ de bases contendo $x \in X$ é um conjunto dirigido.

Quando estudamos ações de semigrupos, consideramos uma família de subconjuntos não vazios do semigrupo S. As vezes, não basta ser apenas uma família, mas que seja um filtro, ou base de filtro.

Definição 1.2 *Seja X um conjunto. Um **filtro** $\mathcal{F}$ sobre o conjunto X é uma coleção não vazia de subconjuntos de X satisfazendo:*

1. *$\emptyset \notin \mathcal{F}$;*

2. *Se $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, então $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$;*

3. *Se $F \in \mathcal{F}$ e $F \subset F'$, então $F' \in \mathcal{F}$.*

*Uma subcoleção $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ é **base** para o filtro $\mathcal{F}$, se para cada elemento $F \in \mathcal{F}$, existe um elemento básico $F' \in \mathcal{F}'$ tal que $F' \subset F$.*

Proposição 1.3 *Seja X um conjunto. Uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos não vazios de X é base para algum filtro de X, se dados $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, existe $F_3 \in \mathcal{F}$ tal que $F_3 \subset F_1 \cap F_2$.*

Demonstração: Considere a coleção $\mathcal{G} = \{G \subset X;\ F \subset G$, para algum $F \in \mathcal{F}\}$. Como $\emptyset \notin \mathcal{F}$, temos que $\emptyset \notin \mathcal{G}$. Se $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, existem $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tais que $F_1 \subset G_1$ e $F_2 \subset G_2$. Por hipótese, existe $F_3 \in \mathcal{F}$ tal que $F_3 \subset F_1 \cap F_2 \subset G_1 \cap G_2$, ou seja, $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$. Por fim, se $G \in \mathcal{G}$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset G$, então, se $G \subset G'$ temos imediatamente que $G' \in \mathcal{G}$. Portanto, $\mathcal{G}$ é um filtro que tem como base o filtro $\mathcal{F}$. $\square$

Usando a Proposição 1.3, podemos definir a base de filtro da seguinte forma: uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos não vazios de X é **base de filtro** sobre X se satisfazem as seguites propriedades:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

2. Dados $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, existe $F_3 \in \mathcal{F}$ tal que $F_3 \subset F_1 \cap F_2$.

Exemplo 1.3 *Seja $\mathcal{F}$ uma base de filtro sobre um conjunto X. Com a relação definida no Exemplo 1.2, $\mathcal{F}$ é um conjunto dirigido.*

A Proposição a seguir, é usada durante algumas demonstrações dos resultados, apresentados nos próximos capítulos.

Proposição 1.4 *Sejam Λ_1 e Λ_2 conjuntos dirigidos. Então, $\Lambda_1 \times \Lambda_2$, com a relação*

$$(\lambda_1, \lambda_2) \preceq (\lambda_1', \lambda_2') \iff \lambda_1 \preceq \lambda_1' \text{ e } \lambda_2 \preceq \lambda_2'$$

é um conjunto dirigido.

Demonstração: De fato,

i) Seja $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$. Como Λ_1 e Λ_2 são conjuntos dirigidos, temos que $\lambda_1 \preceq \lambda_1$ e $\lambda_2 \preceq \lambda_2$, donde $(\lambda_1, \lambda_2) \preceq (\lambda_1, \lambda_2)$.

ii) Sejam (λ_1, λ_2), (λ_1', λ_2'), $(\lambda_1'', \lambda_2'') \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$ satisfazendo $(\lambda_1, \lambda_2) \preceq (\lambda_1', \lambda_2')$ e $(\lambda_1', \lambda_2') \preceq (\lambda_1'', \lambda_2'')$. Então, $\lambda_1 \preceq \lambda_1'$, $\lambda_2 \preceq \lambda_2'$, $\lambda_1' \preceq \lambda_1''$ e $\lambda_2' \preceq \lambda_2''$. Como Λ_1 e Λ_2 são conjuntos dirigidos temos que $\lambda_1 \preceq \lambda_1''$ e $\lambda_2 \preceq \lambda_2''$, donde $(\lambda_1, \lambda_2) \preceq (\lambda_1'', \lambda_2'')$.

iii) Sejam $(\lambda_1, \lambda_2), (\mu_1, \mu_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$. Pelo fato de Λ_1 e Λ_2 serem conjuntos dirigidos, existem $\nu_1 \in \Lambda_1$ e $\nu_2 \in \Lambda_2$ tais que $\lambda_1 \preceq \nu_1$, $\mu_1 \preceq \nu_1$, $\lambda_2 \preceq \nu_2$ e $\mu_2 \preceq \nu_2$. Logo, existe $(\nu_1, \nu_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$ tal que $(\lambda_1, \lambda_2) \preceq (\nu_1, \nu_2)$ e $(\mu_1, \mu_2) \preceq (\nu_1, \nu_2)$.

$\square$

Vamos definir o conceito de redes.

Definição 1.5 *Seja X um espaço topológico e Λ um conjunto dirigido. A aplicação*

$$\begin{array}{rccc} x: & \Lambda & \longrightarrow & X \\ & \lambda & \longmapsto & x_\lambda \end{array}$$

*é denominada de **rede** e denotemos por $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.*

Note que a Definição 1.5 é uma generalização da definição de sequência, onde considera $\Lambda = \mathbb{N}$. A seguir, definimos a convergência de rede, de modo análogo, feito para sequência.

Definição 1.6 *Dizemos que uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ **converge** para o ponto $x \in X$, se dado uma vizinhança U de x, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in U$, para todo $\lambda \succeq \lambda_0$.*

Notação: $x_\lambda \longrightarrow x$.

Exemplo 1.4 *Como toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma rede, a convergência de redes generaliza a convergência de sequências.*

Exemplo 1.5 *Sejam $x \in X$ e $\mathcal{U}_x$ uma coleção de vizinhanças de x. Se para cada $U \in \mathcal{U}_x$ escolhermos $x_U \in U$, então $(x_U)_{U \in \mathcal{U}_x}$ é uma rede em X que converge para o ponto $x \in X$. De fato, seja V uma vizinhança de x. Assim, para todo $U \succeq V$, temos que $U \subset V$ e, portanto, $x_U \in V$, isto é, $x_U \longrightarrow x$. Analogamente, se considerarmos $\mathcal{B}_x$ a coleção de bases contendo o ponto $x \in X$, $(x_U)_{U \in \mathcal{B}_x}$ é uma rede em X que converge para x.*

Exemplo 1.6 *Sejam X um conjunto e $\mathcal{F}$ uma base de filtro. Se para cada $F \in \mathcal{F}$ tomarmos $x_F \in F$, então, $(x_F)_{F \in \mathcal{F}}$ é uma rede em X.*

Temos a seguir, algumas proposições similares aos resultados de sequência.

Proposição 1.7 *Sejam X um espaço topológico, A um subconjunto de X e $x \in A$. Então, $x \in \overline{A}$ se, e somente se, existe uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ em A tal que $x_\lambda \longrightarrow x$.*

Demonstração: Seja $x \in \overline{A}$. Então, dado $U \subset X$ vizinhança de x, $U \cap A \neq \emptyset$. Logo, para cada $U \in \mathcal{U}_x$, podemos tomar $x_U \in U \cap A$. Assim, a rede $(x_U)_{U \in \mathcal{U}_x} \subset A$ e $x_U \longrightarrow x$.

Por outro lado, suponha que existe uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ em A tal que x_λ converge para x. Então, por definição de convergência de rede, dado $U \in U_x$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in U$, para todo $\lambda \succeq \lambda_0$. Em particular, $x_\lambda \in U \cap A$. Portanto, $x \in \overline{A}$. $\square$

Proposição 1.8 *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação. Então, f é contínua em $x \in X$ se, e somente se, para cada rede $(x_\lambda) \subset X$ com $x_\lambda \longrightarrow x$, tem-se que a rede $(f(x_\lambda)) \subset Y$ converge pare $f(x) \in Y$.*

Demonstração: Iremos usar o seguinte resultado: uma aplicação f é contínua em $x \in X$ se, e somente se, dado V uma vizinhança de $f(x)$, existe U uma vizinhança de x tal que $f(U) \subset V$.

Suponha que f é contínua em $x \in X$. Então, dada V uma vizinhança de $f(x)$, existe U uma vizinhança de x tal que $f(U) \subset V$. Seja $(x_\lambda) \subset X$ uma rede que converge para x. Assim, para esta vizinhança U, existe λ_0 tal que $x_\lambda \in U$, para todo $\lambda \succeq \lambda_0$. Logo, $f(x_\lambda) \subset V$, para todo $\lambda \succeq \lambda_0$. Portanto, a rede $(f(x_\lambda)) \subset Y$ converge para $f(x)$.

Agora, suponha por contradição que f seja descontínua em $x \in X$. Então, existe V vizinhança de $f(x)$ tal que $f(U) \not\subset V$, para todo U vizinhança de x. Assim, para cada $U \in \mathcal{U}_x$ podemos tomar $x_U \in U$ tal que $f(x_U) \notin V$. Logo, a rede $(x_U)_{U \in \mathcal{U}_x}$ converge para x, mas a rede $(f(x_U))$ não converge para $f(x)$. $\square$

Proposição 1.9 *Seja $\{X_i;\ i \in I\}$ uma família de espaços topológicos não vazios. Considere o espaço produto $X = \prod_{i \in I} X_i$. Então, uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ em X converge para $x \in X$ se, e somente se, para cada $i \in I$, a rede $(\pi_i(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ converge para $\pi_i(x)$.*

Demonstração: Suponha que $x_\lambda \longrightarrow x$. Como π_i é contínua, para todo $i \in I$, pela Proposição 1.8 segue que $\pi_i(x_\lambda) \longrightarrow \pi_i(x)$, para cada $i \in I$.

Reciprocamente, suponha que $\pi_i(x_\lambda) \longrightarrow \pi_i(x)$, para cada $i \in I$. Seja a vizinhança U de x definida como

$$U = \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j),$$

onde J é um subconjunto finito de I, e para cada $j \in J$, U_j é um subconjunto aberto de X_j, com $\pi_j(x) \in U_j$. Como $\pi_j(x_\lambda) \longrightarrow \pi_j(x)$, para cada $j \in J$, então existe $\lambda_j \in \Lambda$ tal que $\pi_j(x_\lambda) \in U_j$, $\forall \lambda \succeq \lambda_j$. Por Λ ser um conjunto dirigido, existe $\lambda_0 \in \Lambda$, tal que $\lambda_0 \succeq \lambda_j$, para todo $j \in J$. Assim,

$$x_\lambda \in \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j),$$

donde, $x_\lambda \longrightarrow x$. $\square$

Teorema 1.10 *Um espaço topológico X é espaço de Hausdorff se, e somente se, toda rede em X converge para, no máximo, um ponto.*

Demonstração: Suponha que X é Hausdorff. Então, para $x, y \in X$ com $x \neq y$, existem U e V vizinhanças disjuntas de x e y, respectivamente. Se $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma rede em X tal que $x_\lambda \longrightarrow x$ e $x_\lambda \longrightarrow y$, então existem $\lambda_0', \lambda_0'' \in \Lambda$ tais que $x_\lambda \in U$, para todo $\lambda \succeq \lambda_0'$ e $x_\lambda \in V$, para todo $\lambda \succeq \lambda_0''$. Como Λ é um conjunto dirigido, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\lambda_0 \succeq \lambda_0'$ e $\lambda_0 \succeq \lambda_0''$. Assim, para todo $\lambda \succeq \lambda_0$, $x_\lambda \in U \cap V$, o que é um absurdo. Logo, toda rede converge para, no máximo, um ponto.

Reciprocamente, suponha que X não é espaço de Hausdorff. Então, existem $x, y \in X$ com $x \neq y$ tais que $U \cap V \neq \emptyset$, para toda vizinhança U e V de x e y, respectivamente. Considere as coleções $\mathcal{U}_x$ e $\mathcal{V}_y$ das vizinhanças de x e y, respectivamente. Seja $\mathcal{U}_x \times \mathcal{V}_y$ com a seguinte relação

$$(U, V) \preceq (U', V') \iff U' \subset U \text{ e } V' \subset V.$$

Pela Proposição 1.4, temos que $\mathcal{U}_x \times \mathcal{V}_y$ é um conjunto dirigido. Definimos a rede

$$\begin{array}{rccc} x: & \mathcal{U}_x \times \mathcal{V}_y & \longrightarrow & X \\ & (U,V) & \longmapsto & x_{(U,V)} \end{array}$$

onde $x_{(U,V)} \in U \cap V$. Temos que a rede $\big(x_{(U,V)}\big)$ converge para x e y simultaneamente. De fato, sejam as vizinhanças $U_0 \in \mathcal{U}_x$ e $V_0 \in \mathcal{V}_y$ arbitrárias. Então, para todo $(U, V) \succeq (U_0, V_0)$, temos que $x_{(U,V)} \in U \cap V \subset U_0 \cap V_0$, ou seja, $x_{(U,V)} \longrightarrow x$ e $x_{(U,V)} \longrightarrow y$. $\square$

Uma consequência imediata do Teorema 1.10 é que em espaço de Hausdorff toda sequência converge para, no máximo, um ponto. Porém, a recíproca dessa afirmação não se verifica, isto é, se a sequência converge somente para um ponto, o espaço é Hausdorff. Com efeito, considere o espaço $X = \mathbb{R}$ com a topologia

$$\tau = \{U \subset X;\ X \backslash U \text{ é enumerável ou } X \backslash U = X\}.$$

Temos que dados $x, y \in X$ com $x \neq y$, toda vizinhança U de x e V de y não são disjuntos, pois se $U \cap V = \emptyset$, temos que $U \subset X \backslash V$ que é enumerável e, portanto, $X \backslash U$ não é enumerável, o que é um absurdo. Logo, o espaço X com a topologia τ não é Hausdorff. Seja $(x_n) \subset X$ uma sequência que converge para $x \in X$. Afirmamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x$, para todo $n \geq n_0$. Caso contrário, existem índices

$$n_1 < \cdots < n_k < \cdots$$

tais que $x_{n_k} \neq x$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Considere $U = X \backslash \{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Temos que U é vizinhança de x, mas não existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$, para todo $n \geq n_0$, o que contradiz o fato de $x_n \longrightarrow x$. Logo, a sequência (x_n) converge apenas para um ponto x, mas o espaço não é Hausdorff.

Definição 1.11 *Sejam X um espaço topológico e $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma rede em X. Dizemos que $x \in X$ é **ponto de acumulação** de (x_λ) se, dados U vizinhança de x e $\lambda_0 \in \Lambda$, existe $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \succeq \lambda_0$ tal que $x_\lambda \in U$.*

Temos imediatamente pela Definição 1.11 que se a rede (x_λ) converge a x, então x é ponto de acumulação de (x_λ). Observe também que a Definição 1.11 generaliza o conceito de valor de aderência de uma sequência.

Definição 1.12 *Sejam X um espaço topológico e $x : \Lambda \longrightarrow X$ uma rede em X. Dizemos que $y : \Lambda' \longrightarrow X$ é **subrede** de $x : \Lambda \longrightarrow X$ se $y \equiv x \circ \phi : \Lambda' \longrightarrow X$, onde Λ' é um conjunto dirigido e a aplicação $\phi : \Lambda' \longrightarrow \Lambda$ satisfaz:*

i) Se $\mu_1 \preceq \mu_2$ então $\phi(\mu_1) \preceq \phi(\mu_2)$; ($\phi$ é crescente)

*ii) Dado $\lambda \in \Lambda$, existe $\mu \in \Lambda'$ tal que $\phi(\mu) \succeq \lambda$. ($\phi$ é **cofinal**)*

Denotemos a subrede de $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ por $\left(x_{\phi(\mu)}\right)_{\mu \in \Lambda'}$.

Seja (x_n) uma sequência em X. Note que toda subsequência de (x_n) é uma subrede, mas note que nem toda subrede de (x_n) é uma subsequência de (x_n), pois a subrede pode possui mais índices que a própria sequência.

Proposição 1.13 *Se uma rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge para um ponto $x \in X$, então cada subrede também converge para x.*

Demonstração: Suponha que (x_λ) é uma rede que converge para $x \in X$. Sejam $\left(x_{\phi(\mu)}\right)_{\mu\in\Lambda'}$ uma subrede e U uma vizinhança do ponto x. Como $x_\lambda \longrightarrow x$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in U$, para todo $\lambda \succeq \lambda_0$. Agora, pelo fato de ϕ ser cofinal, para este $\lambda_0 \in \Lambda$, existe $\mu_0 \in \Lambda'$ tal que $\phi(\mu_0) \succeq \lambda_0$. Assim, para todo $\mu \succeq \mu_0$, temos que $\phi(\mu) \succeq \phi(\mu_0) \succeq \lambda_0$ e, portanto, $x_{\phi(\mu)} \in U$, para todo $\mu \succeq \mu_0$, isto é, $x_{\phi(\mu)} \longrightarrow x$. $\square$

Proposição 1.14 *Sejam X um espaço topológico e $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em X. Então, X é um ponto de acumulação de (x_λ) se, e somente se, a rede (x_λ) possui uma subrede que converge a x.*

Demonstração: Seja x um ponto de acumulação de (x_λ). Considere o conjunto de índices $I = \{(\lambda, U) \in \Lambda \times \mathcal{U}_x;\ x_\lambda \in U\}$, com a relação

$$(\lambda_1, U_1) \preceq (\lambda_2, U_2) \iff \lambda_1 \preceq \lambda_2 \text{ e } U_1 \preceq U_2.$$

Assim, I é um conjunto dirigido, pela Proposição 1.4. Agora, definimos a função

$$\phi : I \longrightarrow \Lambda$$

dada por $\phi(\lambda, U) = \lambda$. Como a aplicação ϕ satisfaz os itens (i) e (ii) da Definição 1.12, segue que $\left(x_{\phi(\mu)}\right)_{\mu\in I} = \left(x_{\phi(\lambda,U)}\right)_{(\lambda,U)\in I}$ é uma subrede de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Seja $U_0 \in \mathcal{U}_x$. Como x é ponto de acumulação de (x_λ), existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_{\lambda_0} \in U_0$. Assim, para todo $(\lambda, U) \succeq (\lambda_0, U_0)$ temos que $x_\lambda \in U \subset U_0$. Portanto, $x_{\phi(\mu)} \longrightarrow x$.

Reciprocamente, suponha que a rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ possui uma subrede $\left(x_{\phi(\mu)}\right)_{\mu\in\Lambda'}$ que converge para x. Sejam U uma vizinhança de x e $\lambda_0 \in \Lambda$. Como ϕ é cofinal, existe $\mu_1 \in \Lambda'$ tal que $\phi(\mu_1) \succeq \lambda_0$. Agora, pela convergência de $\left(x_{\phi(\mu)}\right)$, existe $\mu_2 \in \Lambda'$ tal que $x_{\phi(\mu)} \in U$, para todo $\mu \succeq \mu_2$. Como Λ' é um conjunto dirigido, tome $\mu \in \Lambda'$ tal que $\mu \succeq \mu_1$ e $\mu \succeq \mu_2$. Assim, $\phi(\mu) \succeq \phi(\mu_1) \succeq \lambda_0$ e $x_{\phi(\mu)} \in U$. Portanto, x é um ponto de acumulação da rede (x_λ). $\square$

Capítulo 2

Atratores Globais para Sistemas Semidinâmicos

Neste capítulo estudamos a teoria de atrator global para sistemas semidinâmicos em espaços métricos. O trabalho foi baseada no trabalho de Aragão-Costa ([1]), Aragão-Costa, Carvalho, Caraballo, Langa ([2]) e Hale J. K. ([16]). Primeiramente definimos a noção de sistemas semidinâmicos e conjuntos invariantes, apresentando alguns exemplos. Em seguida, apresentamos o conceito de atração, atrator global e suas propriedades como, unicidade e caracterização pelos conjuntos limitados invariantes. Definimos também a semiórbita positiva e, juntamente com esse conceito definimos os sistemas semidinâmicos limitados, eventualmente limitados e limitados dissipativos. Após esses conceitos desenvolvidos, trabalhamos com os conjuntos ω-limite, que descrevem o comportamento assintótico do sistema. Apresentamos uma caracterização dos conjuntos ω-limite via sequências. Um dos conceitos importantes nesse trabalho é o de sistema assintoticamente compacto, pois nesse sistema os conjuntos ω-limite adquirem propriedades como compacidade, invariância e atração. No final do capítulo, apresentamos o teorema que garante a existência de atrator global.

2.1 Sistemas Semidinâmicos

Assumimos neste capítulo que X é um espaço métrico com a métrica $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definição 2.1 *Uma família de aplicações contínuas*

$$T(\cdot) = \{T(t) : X \to X \ ; t \geq 0\}$$

chama-se ***sistema semidinâmico*** *ou* ***semifluxo*** *em X se satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $T(0) = I$, *onde I é aplicação identidade em X.*

ii) $T(t+s) = T(t) \circ T(s)$, $\forall t, s \geq 0$ *(Propriedade do semigrupo)*

iii) A aplicação

$$\begin{aligned} [0, +\infty) \times X &\longrightarrow X \\ (t, x) &\longmapsto T(t)(x) \end{aligned}$$

é uma aplicação contínua, onde $[0, +\infty) \times X$ é dotado da topologia produto.

Pela Propriedade (ii) da Definição 2.1, temos que a família das aplicações contínuas

$$\{T(t) : X \longrightarrow X \ ; \ t \geq 0\}$$

é comutativa com respeito à composição, pois

$$T(t) \circ T(s) = T(t+s) = T(s+t) = T(s) \circ T(t), \ \forall t, s \geq 0.$$

Se adicionarmos na Definição 2.1 a condição que $T(t) : X \longrightarrow X$ é um homeomorfismo definimos, para cada $t > 0$,

$$T(t) = T(-t)^{-1}, \text{ se } t < 0.$$

Assim, a família das aplicações contínuas $\{T(t) : X \to X \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$ é denominada **sistema dinâmico** em X.

Vejamos alguns exemplos de sistema semidinâmico.

Exemplo 2.1 *Seja $X = \mathbb{R}^n$ espaço euclidiano com a métrica usual. Definimos a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (t,x) & \longmapsto & (t+x_1,...,t+x_n) \end{array}$$

onde $x = (x_1,...,x_n)$ é dada em coordenadas da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Vemos facilmente que T é contínua e $T(0)x = (0+x_1,...,0+x_n) = x$. Logo, $T(0) = I$. Além disso, para todo $t,s \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} T(t+s)(x) &= ((t+s)+x_1,...,(t+s)+x_n) \\ &= (t+(s+x_1),...,t+(s+x_n)) \\ &= T(t)(s+x_1,...,s+x_n) \\ &= T(t)[T(s)(x)]. \end{aligned}$$

Logo, $T(t+s) = T(t) \circ T(s)$. Portanto, a aplicação T define um sistema semidinâmico em $\mathbb{R}^n$. Note que se considerarmos $\mathbb{R}$ ao invés de $\mathbb{R}_+$, temos que a aplicação T define um sistema dinâmico em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.2 *Seja $GL(n,\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes reais invertíveis de ordem n. Definimos a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}_+ \times GL(n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL(n,\mathbb{R}) \\ & (t,x) & \longmapsto & \mathrm{e}^t x \end{array}$$

Temos que T é contínua e $T(0)(x) = \mathrm{e}^0 x = x$ e

$$\begin{aligned} T(t+s)(x) &= \mathrm{e}^{t+s}x = \mathrm{e}^t\mathrm{e}^s x \\ &= T(t)(\mathrm{e}^s x) \\ &= T(t)[T(s)(x)], \end{aligned}$$

para todo $t,s \geq 0$ e $x \in GL(n,\mathbb{R})$. Portanto, a aplicação T define um sistema semidinâmico em $GL(n,\mathbb{R})$.

Exemplo 2.3 *A solução* $\varphi_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *da equação diferencial* $x' = X(x)$, *onde* X *é um campo de vetores completo definido no aberto* $E \subset \mathbb{R}^n$, *determina o fluxo (ou sistema dinâmico)* $\phi : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ *definido por* $\phi(t, x) = \varphi_x(t)$. *Se tomarmos apenas* $\mathbb{R}_+$ *temos que a solução* φ_x *define um sistema semidinâmico.*

Definimos agora o conceito de conjuntos invariantes pelo sistema semidinâmico, que é um dos requisitos para definir o atrator global.

Definição 2.2 *Um subconjunto* A *de* X *é chamado* ***invariante*** *pelo sistema semidinâmico* $T(\cdot)$ *quando* $T(t)A = A$, *para todo* $t \geq 0$, *onde* $T(t)A = \{T(t)(x);\ x \in A\}$.

Para simplificação da escrita, denotemos $T(t)\, x$ ao invés de $T(t)\,(x)$.

Proposição 2.3 *Seja* $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *uma família de subconjuntos invariantes pelo sistema semidinâmico* $T(\cdot)$. *Então,* $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ *é invariante.*

Demonstração: Temos que para cada $t \geq 0$,

$$T(t)A = T(t)\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (T(t)A_\lambda).$$

Como A_λ é invariante, $\forall \lambda \in \Lambda$, temos $T(t)A_\lambda = A_\lambda$. Assim, para cada $t \geq 0$,

$$T(t)A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (T(t)A_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = A.$$

Portanto, A é invariante. $\square$

2.2 Atratores Globais para Sistemas Semidinâmicos

Para estudar o comportamento assintótico de um sistema semidinâmico, precisamos de uma ferramenta para medirmos a distância entre os conjuntos relacionados com a dinâmica do sistema. Assim, definimos a noção de semidistância de Hausdorff, como segue:

Definição 2.4 *Dados A e B subconjuntos não vazios de X, definimos a* ***semidistância de Hausdorff*** *de A até B como*

$$\operatorname{dist}(A,B) = \sup_{a\in A}(\mathrm{d}(a,B)) = \sup_{a\in A}\left(\inf_{b\in B}\mathrm{d}(a,b)\right).$$

A semidistância de Hausdorff satisfaz a desigualdade triangular, ou seja,

Lema 2.5 *Para todos os subconjuntos não vazios $A, B, C \subset X$, vale a desigualdade*

$$\operatorname{dist}(A,C) \leq \operatorname{dist}(A,B) + \operatorname{dist}(B,C).$$

Demonstração: Sejam $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, temos

$$\mathrm{d}(a,c) \leq \mathrm{d}(a,b) + \mathrm{d}(b,c).$$

Aplicando o ínfimo em C, temos

$$\mathrm{d}(a,C) \leq \mathrm{d}(a,b) + \mathrm{d}(b,C).$$

Agora, aplicando o ínfimo em B, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(a,C) &\leq \mathrm{d}(a,B) + \inf_{b\in B}(\mathrm{d}(b,C)) \\ &\leq \mathrm{d}(a,B) + \sup_{b\in B}(\mathrm{d}(b,C)) \\ &= \mathrm{d}(a,B) + \operatorname{dist}(B,C). \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando o supremo em A, temos

$$\operatorname{dist}(A,C) \leq \operatorname{dist}(A,B) + \operatorname{dist}(B,C).$$

□

Proposição 2.6 *Sejam os subconjuntos A e B de X não vazios. Então,* $\operatorname{dist}(A,B)=0$ *se, e somente se, $A \subset \overline{B}$.*

Demonstração: Suponha que $\operatorname{dist}(A,B)=0$. Fixando $a \in A$, temos

$$0 \leq \mathrm{d}(a,B) \leq \sup_{a\in A}(\mathrm{d}(a,B)) = \operatorname{dist}(A,B)=0,$$

donde $\mathrm{d}(a,B)=0$. Como $\mathrm{d}(a,B)=\inf\limits_{b\in B}\mathrm{d}(a,b)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $b_n \in B$ tal que

$$0=\mathrm{d}(a,B)<\mathrm{d}(a,b_n)<\frac{1}{n},$$

ou seja, existe uma sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tal que $b_n \longrightarrow a$, se $n \longrightarrow +\infty$. Logo, $a \in \overline{B}$.

Reciprocamente, suponha que $A \subset \overline{B}$. Logo, dado $a \in A$, existe uma sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tal que $b_n \longrightarrow a$, se $n \longrightarrow +\infty$. Como a distância usual d é contínua, temos para todo $b \in B$,

$$0=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{d}(b_n,b)=\mathrm{d}(a,b),$$

donde $\mathrm{d}(a,B)=0$, e portanto, $\operatorname{dist}(A,B)=0$. $\square$

Antes de definir o conceito de atratores globais, apresentamos a noção de atração.

Definição 2.7 *Dizemos que um subconjunto A de X **atrai** um subconjunto B de X, ou que o subconjunto $B \subset X$ é **atraído** por $A \subset X$, pelo sistema semidinâmico $T(\cdot)$ se*

$$\lim_{t\to+\infty}\operatorname{dist}(T(t)B,A)=0.$$

Dados $A \subset X$ e $\epsilon > 0$, definimos a **ϵ-vizinhança** de A como

$$\mathrm{B}(A,\epsilon)=\{x\in X; d(x,A)<\epsilon\}=\bigcup_{a\in A}\mathrm{B}(a,\epsilon).$$

Temos uma forma equivalente de definir o conceito de atração, onde apresentamos o seguinte resultado:

Proposição 2.8 *Sejam os subconjuntos A e B de X. Então, A atrai B pelo sistema semidinâmico $T(\cdot)$ se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe $\tau = \tau(\epsilon, B) \geq 0$ tal que*

$$T(t)\,B \subset \mathrm{B}(A, \epsilon)\,, \text{ para todo } t \geq \tau.$$

Demonstração: Com efeito, suponha que A atrai B, como foi definida na Definição 2.7 e tomemos $x \in T(t)\,B$. Então,

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(T(t)\,B, A) = 0.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $\tau \in \mathbb{N}$ tal que para todo $t \geq \tau$, tem-se $|\operatorname{dist}(T(t)\,B, A)| < \epsilon$. Assim,

$$\left| \sup_{x \in T(t)B} \left(\inf_{a \in A} \mathrm{d}(x, a) \right) \right| < \epsilon, \ \forall t \geq \tau.$$

Implicando que

$$\inf_{a \in A} \mathrm{d}(x, a) = \mathrm{d}(x, A) < \epsilon, \ \forall t \geq \tau,$$

onde concluimos que $x \in \mathrm{B}(A, \epsilon)$.

Reciprocamente, suponha que dado $\epsilon > 0$, existe um número real $\tau = \tau(\epsilon, B) \geq 0$ tal que $T(t)\,B \subset \mathrm{B}(A, \epsilon)$, para todo $t \geq \tau$. Seja $x \in T(t)\,B$, $t \geq \tau$. Então, $x \in \mathrm{B}(A, \epsilon)$, isto é, $\mathrm{d}(x, A) < \epsilon$. Como $x \in T(t)\,B$ é arbitrário, temos que

$$\left| \sup_{x \in T(t)B} \mathrm{d}(x, A) \right| \leq \epsilon, \ \forall t \geq \tau.$$

Logo, pela arbitrariedade de $\epsilon > 0$, segue que

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(T(t)B, A) = 0.$$

Portanto, A atrai B. $\square$

Agora, dado $\epsilon > 0$, se um subconjunto A de X é limitado, então $\mathrm{B}(A, \epsilon)$ é limitado.

De fato, seja $x \in A$. Como A é limitado, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $A \subset \mathrm{B}(x, \epsilon_0)$. Agora seja $y \in \mathrm{B}(A, \epsilon)$. Então, $\mathrm{d}(y, A) < \epsilon$. Assim, $\mathrm{d}(y, a_y) = \delta < \epsilon$, para algum $a_y \in A$ e $\delta > 0$. Logo,

$$\mathrm{d}(y, x) \leq \mathrm{d}(y, a_y) + \mathrm{d}(a_y, x) < \epsilon + \epsilon_0.$$

Portanto, $\mathrm{B}(A, \epsilon) \subset \mathrm{B}(x, \epsilon + \epsilon_0)$, isto é, $\mathrm{B}(A, \epsilon)$ é limitado.

Vamos definir agora a noção de atratores globais.

Definição 2.9 *Um subconjunto $\mathcal{A}$ de X é um **atrator global** para o sistema semidinâmico $T(\cdot)$ se $\mathcal{A}$ é não vazio, compacto, invariante e atrai todo subconjunto limitado de X.*

O primeiro resultado sobre atratores globais é a sua unicidade. Apenas pela Definição 2.9, não temos a clareza se um sistema semidinâmico pode possuir mais de um atrator global. Porém, a proposição a seguir nos mostra que cada sistema semidinâmico pode possuir, no máximo, um atrator global no sentido da Definição 2.9.

Proposição 2.10 *Se existe um atrator global para um sistema semidinâmico $T(\cdot)$, então ele é único.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ atratores globais para o sistema semidâmico $T(\cdot)$. Como $\mathcal{A}_2$ é compacto e como $\mathcal{A}_1$ é atrator global, temos que $\mathcal{A}_1$ atrai $\mathcal{A}_2$. Assim,

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(T(t)\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = 0.$$

Agora, por $\mathcal{A}_2$ ser invariante, temos que

$$0 = \lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(T(t)\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = \lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = \operatorname{dist}(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1).$$

Pela Proposição 2.6, segue que $\mathcal{A}_2 \subset \overline{\mathcal{A}_1} = \mathcal{A}_1$. A outra inclusão é obtida de forma análoga, invertendo $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, obtendo o resultado desejado. $\square$

Vamos dar a primeira caracterização do atrator global em termos de conjuntos limitados invariantes pelo sistema semidinâmico.

Teorema 2.11 *Se um sistema semidinâmico $T(\cdot)$ possui atrator global $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A}$ é dada pela união de todos os subconjuntos invariantes limitados de X.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{A}$ um atrator global para o sistema semidinâmico $T(\cdot)$ e $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ conjunto de todos os subconjuntos invariantes limitados de X. Por definição de atrator global, $\mathcal{A}$ é invariante e limitado, logo $\mathcal{A} \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.

Por outro lado, como A_λ é limitado, $\forall\lambda \in \Lambda$, temos que $\mathcal{A}$ atrai cada A_λ, isto é, para cada $\lambda \in \Lambda$,

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(T(t)A_\lambda, \mathcal{A}) = 0.$$

Pelo fato de A_λ ser invariante, $\forall\lambda \in \Lambda$, temos que

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(A_\lambda, \mathcal{A}) = 0.$$

Logo, pela Proposição 2.6, segue que $A_\lambda \subset \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$, $\forall\lambda \in \Lambda$. Portanto, $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. □

Vamos definir as semiórbitas positivas e a partir daí, podemos introduzir o conceito de sistemas limitados e eventualmente limitados.

Definição 2.12 *Dado um subconjunto B de X, sua **semiórbita positiva** relativa ao sistema semidinâmico $T(\cdot)$ é o conjunto*

$$\gamma^+(B) = \{T(t)x;\ t \geq 0, x \in B\} = \bigcup_{x\in B} \gamma^+(x).$$

*Agora, dado $\tau \geq 0$, a **semiórbita positiva de** B **à direita de** τ é o conjunto*

$$\gamma_\tau^+(B) = \{T(t)x;\ t \geq \tau, x \in B\} = \gamma^+(T(\tau)B).$$

Definição 2.13 *Dizemos que um sistema semidinâmico $T(\cdot)$ é **limitado,** se a semiórbita positiva de qualquer subconjunto limitado de X é limitada em X. Um sistema semidinâmico $T(\cdot)$ é chamado **eventualmente limitado,** se para cada subconjunto limitado, existe $\tau \geq 0$ tal que sua semiórbita positiva à direita de τ é limitada em X.*

Os sistemas semidinâmicos que possuem atratores globais são eventualmente limitados, ou seja,

Proposição 2.14 *Se o sistema semidinâmico $T(\cdot)$ possui um atrator global $\mathcal{A}$, então ele é eventualmente limitado.*

Demonstração: Seja B um subconjunto limitado de X. Então, $\mathcal{A}$ atrai B, ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $\tau \geq 0$ tal que

$$T(t)\,B \subset \mathrm{B}(\mathcal{A}, \epsilon)\,,\ \forall t \geq \tau.$$

Logo,

$$\gamma_\tau^+(B) \subset \mathrm{B}(\mathcal{A}, \epsilon)\,.$$

Como $\mathcal{A}$ é limitado segue que $\mathrm{B}(\mathcal{A}, \epsilon)$ é limitado e, portanto, $\gamma_\tau^+(B)$ é limitado em X, isto é, o sistema semidinâmico é eventualmente limitado. $\square$

A seguir, definimos a noção de absorção de um conjunto pela ação do sistema. Com esta definição, podemos introduzir o conceito de dissipatividade do sistema semidinâmico.

Definição 2.15 *Dados B e D subconjuntos de X, dizemos que D **absorve** B pela ação do sistema semidinâmico $T(\cdot)$, se existe $\tau \geq 0$ tal que $T(t)\,B \subset D$, para todo $t \geq \tau$. Um sistema semidinâmico $T(\cdot)$ é dito **limitado dissipativo,** se existe um subconjunto limitado D de X tal que D absorve todo subconjunto limitado de X pela ação de $T(\cdot)$. Dizemos que um sistema semidinâmico $T(\cdot)$ é **ponto dissipativo,** se existe um subconjunto limitado D de X tal que absorve cada ponto $x \in X$, isto é, para cada ponto $x \in X$, existe $\tau_x \geq 0$ tal que $T(t)\,x \in D$, $\forall t \geq \tau_x$.*

Os conceitos de atração e absorção são equivalentes no seguinte sentido:

Proposição 2.16 *Um sistema semidinâmico $T(\cdot)$ é limitado dissipativo se, e somente se, existe um subconjunto limitado D de X que atrai todo subconjunto limitado de X.*

Demonstração: Suponha que o sistema semidinâmico $T(\cdot)$ é limitado dissipativo. Então, existe um subconjunto limitado D de X que absorve cada subconjunto limitado B_λ de X, $\lambda \in \Lambda$. Assim, para cada $\lambda \in \Lambda$, existe $\tau_\lambda \geq 0$ tal que

$$T(t)\, B_\lambda \subset D,\ \forall t \geq \tau_\lambda.$$

Mas, dado $\epsilon > 0$, temos que $D \subset \mathrm{B}(D, \epsilon)$, logo,

$$T(t)\, B_\lambda \subset \mathrm{B}(D, \epsilon),\ \forall t \geq \tau_\lambda.$$

Portanto, D atrai B_λ, para todo $\lambda \in \Lambda$.

Reciprocamente, suponha que existe um subconjunto limitado B de X que atrai todo subconjunto limitado B_λ de X, $\lambda \in \Lambda$. Então, dado $\epsilon > 0$, para cada $\lambda \in \Lambda$, existe $\tau_\lambda \geq 0$ tal que

$$T(t)\, B_\lambda \subset \mathrm{B}(B, \epsilon),\ \forall t \geq \tau_\lambda.$$

Como B é limitado em X, temos que $\mathrm{B}(B, \epsilon)$ é limitado em X. Tome o subconjunto limitado $D = \mathrm{B}(B, \epsilon)$ de X. Logo, para cada $\lambda \in \Lambda$, existe $\tau_\lambda \geq 0$ tal que

$$T(t)\, B_\lambda \subset D,\ \forall t \geq \tau_\lambda.$$

Portanto, o sistema semidinâmico $T(\cdot)$ é limitado dissipativo. $\square$

Em particular, a Proposição 2.16 diz que, se o sistema semidinâmico possui um atrator global, então ele é limitado dissipativo.

Exemplo 2.4 *Seja o sistema semidinâmico sobre* $\mathbb{R}^2$ *dado por*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (t,(x,y)) & \longmapsto & (\mathrm{e}^{-t}x, \mathrm{e}^{-t}y) \end{array}$$

Temos que $\mathcal{A} = \{(0,0)\}$ *é atrator global para este sistema. Com efeito, claramente* $\mathcal{A}$ *é não vazio, compacto e invariante. Basta mostrar que* $\mathcal{A}$ *atrai todo subconjunto limitado de* $\mathbb{R}^2$*. Seja* $B \subset \mathbb{R}^2$ *limitado. Então, existe* $M > 0$ *tal que* $\|(x,y)\| \leq M$*, para todo* $(x,y) \in B$*. Dado* $\epsilon > 0$*, tome* $\tau > 0$ *tal que* $\mathrm{e}^{-\tau} < \frac{\epsilon}{M}$*, logo para todo* $t \geq \tau$*,*

$$\|T(t)(x,y)\| = \left\|\left(\mathrm{e}^{-t}x, \mathrm{e}^{-t}y\right)\right\| \leq \mathrm{e}^{-\tau}\|(x,y)\| \leq \mathrm{e}^{-\tau}M < \epsilon.$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$*, existe* $\tau > 0$ *tal que* $T(t)B \subset \mathrm{B}(\mathcal{A},\epsilon)$*, para todo* $t \geq \tau$*, isto é,* $\mathcal{A}$ *atrai* B*. E pela Proposição 2.16, o sistema é limitado dissiapativo. Observe abaixo a trajetória do sitema.*

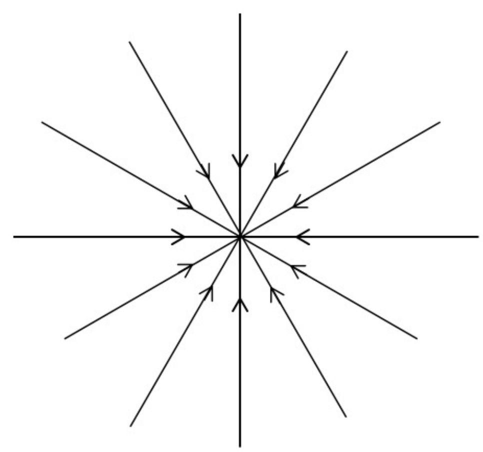


Figura 2.1: Exemplos de trajetórias do sistema

2.3 Conjuntos ω-limite

Nesta seção vamos introduzir o conceito de conjuntos ω-limite, fundamental para desenvolver os resultados da teoria dos atratores globais. Apresentamos os principais resultados envolvendo conjuntos ω-limite e mais adiante, definimos os sistemas assintoticamente compactos. Esses sistemas são interessantes quando queremos estudar o atrator global.

Definição 2.17 *Dado um subconjunto B de X, seu conjunto ω-**limite** em relação a sistema semidinâmico $T(\cdot)$ é o conjunto*

$$\omega(B) = \bigcap_{t \geq 0} \left(\overline{\bigcup_{s \geq t} T(s) B} \right) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)}.$$

Note que, por definição o conjunto ω-limite é fechado, pois é interseção de conjuntos fechados.

A Proposição a seguir é muito útil ao trabalharmos com os conjuntos ω-limite, pois caracteriza-os em forma de sequências, já que o espaço X é um espaço métrico.

Proposição 2.18 *O conjunto ω-limite de um subconjunto B de X é caracterizado por*

$$\omega(B) = \left\{ \begin{array}{c} x \in X; \ \textit{existem sequências } (t_n) \subset \mathbb{R}_+ \ \textit{e} \ (x_n) \subset B, \\ \textit{com } t_n \longrightarrow +\infty, \ \textit{tais que } T(t_n) x_n \longrightarrow x \end{array} \right\}.$$

Demonstração: Seja o conjunto

$$\omega'(B) = \left\{ \begin{array}{c} x \in X; \ \text{existem sequências } (t_n) \subset \mathbb{R}_+ \ \text{e} \ (x_n) \subset B, \\ \text{com } t_n \longrightarrow +\infty, \ \text{tais que } T(t_n) x_n \longrightarrow x \end{array} \right\}.$$

Mostremos que $\omega'(B) = \omega(B)$. Seja $x \in \omega(B) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in \gamma_n^+(B)$ tal que

$$\mathrm{d}(x, z_n) < \frac{1}{n}.$$

Como $\gamma_n^+(B) = \{T(t)x; \ t \geq n, x \in B\}$, podemos escrever $z_n = T(t_n) x_n$, onde $t_n \geq n$ e $x_n \in B$. Assim, existem sequências $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ e $(x_n) \subset B$, com $t_n \longrightarrow +\infty$, tais que $T(t_n) x_n = z_n \longrightarrow x$. Portanto, $x \in \omega'(B)$.

Por outro lado, seja $x \in \omega'(B)$. Então existem sequências $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ e $(x_n) \subset B$, com $t_n \longrightarrow +\infty$, tais que $T(t_n)x_n \longrightarrow x$. Agora, para um $t \geq 0$ fixado, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t$, para todo $n \geq n_0$. Assim, $T(t_n)x_n \in \gamma_t^+(B)$. Como $T(t_n)x_n \longrightarrow x$, segue que $x \in \overline{\gamma_t^+(B)}$. Pela arbitrariedade de $t \geq 0$, segue que $x \in \bigcap\limits_{t\geq 0}\overline{\gamma_t^+(B)} = \omega(B)$. $\square$

Usando a Proposição 2.18, podemos mostrar os resultados que segue:

Sejam $B, C \subset X$, então $\omega(B \cap C) \subset \omega(B) \cap \omega(C)$. E se $B \subset C$, então $\omega(B) \subset \omega(C)$. De fato, seja $x \in \omega(B \cap C)$. Então, pela Prposição 2.18, existem sequências (t_n) em $\mathbb{R}_+$, com $t_n \longrightarrow +\infty$ e (x_n) em $B \cap C$ tais que $T(t_n)x_n \longrightarrow x$. Mas, $(x_n) \subset B$ e $(x_n) \subset C$. Logo, novamente pela Proposição 2.18, segue que $x \in \omega(B) \cap \omega(C)$. Agora, seja $x \in \omega(B)$. Pela Proposição 2.18, existem sequências (t_n) em $\mathbb{R}_+$, com $t_n \longrightarrow +\infty$ e (x_n) em B tais que $T(t_n)x_n \longrightarrow x$. Por hipótese, $B \subset C$, então, $(x_n) \subset C$. Logo, pela Proposição 2.18, $x \in \omega(C)$.

Exemplo 2.5 *Seja o sistema semidinâmico $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por*

$$\varphi(t, x) = \left(x_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, x_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\right),$$

com $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ constantes reais. Temos que φ é solução da equação diferencial

$$x' = Ax,$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

é uma matriz em relação a uma base $\{v_1, v_2\}$ de autovetores associados a autovalores λ_1 e λ_2. Seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ fixo. Se $x_2 \neq 0$, a trajetória $\varphi_x(t) = \varphi(t, x)$ tende a ∞ se aproximando da reta E_2 gerada pelo vetor v_2, quando $t \longrightarrow +\infty$. Agora, se $x_2 = 0$, temos que $\varphi_x(t)$ tende a origem $(0, 0)$. Assim, temos os respectivos conjuntos ω-limite

$$\begin{cases} \omega(x) = \emptyset, \text{ se } x_2 \neq 0 \\ \omega(x) = \{(0,0)\}, \text{ se } x_2 = 0 \end{cases}$$

Além disso, esse sistema não possui atrator global. De fato, seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $x_1, x_2 > 0$. *Se existe* $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ *atrator global, dado* $\epsilon > 0$, *existe* $\tau > 0$ *tal que* $\varphi(t, x) \in \mathrm{B}(\mathcal{A}, \epsilon)$, *para todo* $t \geq \tau$. *Mas, se* $t \longrightarrow +\infty$, *temos que* $x_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \longrightarrow +\infty$, *onde não existe* $\tau > 0$ *tal que* $\varphi(t, x) \in \mathrm{B}(\mathcal{A}, \epsilon)$, *já que* $\mathrm{B}(\mathcal{A}, \epsilon)$ *é limitado. Logo, esse sistema não possui atrator global. Veja abaixo um exemplo da trajetória do sistema.*

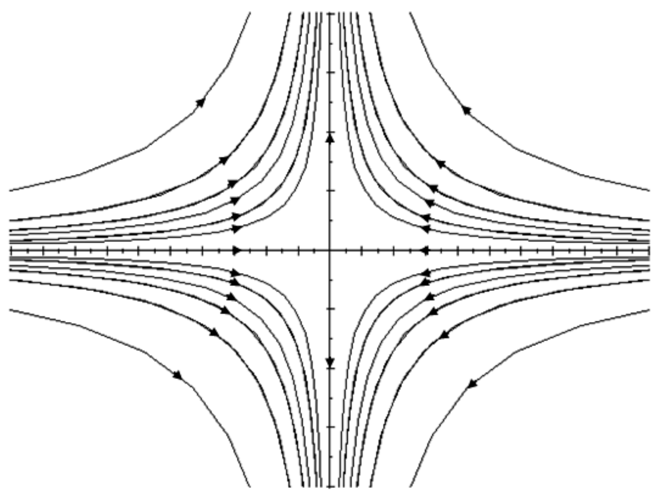


Figura 2.2: Exemplo de sistema que não possui atrator global

Exemplo 2.6 *Seja o campo de vetores sobre* $\mathbb{R}^2$ *dado por*

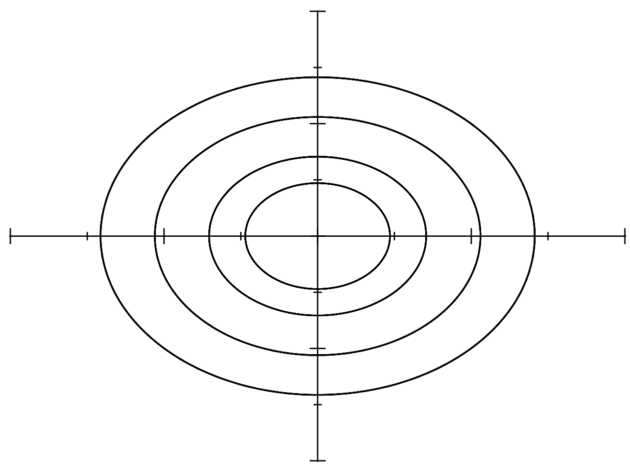
$$X(x, y) = (y, -x).$$

A trajetória desse campo pode ser escrita como

$$\varphi(t, (x, y)) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

que são circunferências centradas em $(0, 0)$. *Assim, o conjunto* ω*-limite do ponto* (x, y) *coincide com a órbita desse ponto. Note que esse sistema não possui atrator global, caso contrário, se* $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ *é atrator global, então* $\mathcal{A}$ *atrai todo ponto* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *Assim, dados*

$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $\epsilon > 0$, existe $\tau \geq 0$ tal que $\varphi(t, (x_0, y_0)) \subset \mathrm{B}(\mathcal{A}, \epsilon)$, para todo $t \geq \tau$. Como $\mathrm{B}(\mathcal{A}, \epsilon)$ é limitado, existe $M > 0$ tal que $\|(x, y)\| \leq M$, para todo $(x, y) \in \mathrm{B}(\mathcal{A}, \epsilon)$. Logo, se tomarmos $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ com $x_0 > M$, temos que $\|\varphi(t, (x_0, y_0))\| > M$, para todo $t \geq 0$. Portanto, $\varphi(t, (x_0, y_0)) \notin \mathrm{B}(\mathcal{A}, \epsilon)$, para todo $t \geq 0$, o que contradiz o fato de $\mathcal{A}$ ser atrator global



A órbita e o conjunto ω-limite coincidem

Em seguida, definimos o chamado sistema semidinâmico assintoticamente compacto, que é uma propriedade fundamental para estudarmos os principais resultados referentes aos conjuntos ω-limite e atratores globais.

Definição 2.19 *Um sistema semidinâmico $T(\cdot)$ é chamado* ***assintoticamente compacto,*** *se para toda sequência limitada (x_n) em X e toda sequência (t_n) em $\mathbb{R}_+$, com $t_n \longrightarrow +\infty$, a sequência $(T(t_n)x_n)$ em X possui subsequência convergente.*

Como o espaço X é métrico, temos imediatamente que se X é compacto então o sistema $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto. Porém, a recíproca nem sempre é verdadeira. Sejam $X = \mathbb{R}$ e $0 < a < 1$. Considere o sistema

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x) & \longmapsto & a^t x \end{array}$$

Sejam $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n \longrightarrow +\infty$ e $(x_n) \subset \mathbb{R}$ limitada. Então, temos que existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge para um certo ponto $x \in \mathbb{R}$. Como $a^{t_{n_k}} \longrightarrow 0$ segue que $a^{t_{n_k}} x_{n_k} \longrightarrow 0$. Logo, o sistema $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto mas o espaço $X = \mathbb{R}$ não é compacto.

Definição 2.20 *Dizemos que um sistema semidinâmico $T(\cdot)$ em X é **eventualmente compacto,** se existe $t_0 > 0$ tal que a aplicação $T(t_0) : X \longrightarrow X$ é uma aplicação compacta, isto é, para todo subconjunto limitado B de X, o conjunto $T(t_0) B$ é relativamente compacto.*

Se o sistema semidinâmico $T(\cdot)$ é eventualmente compacto, então existe $t_0 > 0$ tal que $T(t_0) : X \longrightarrow X$, é uma aplicação compacta. Assim, fixando $t_0 > 0$, temos que para todo $t \geq t_0$, a aplicação $T(t) : X \longrightarrow X$, é compacta. Com efeito, para $t \geq t_0$, temos a seguinte igualdade, $T(t) = T(t - t_0) \circ T(t_0)$. Como $T(t - t_0)$ é contínua, para $B \subset X$ limitado,

$$T(t) B = [T(t - t_0) \circ T(t_0)](B) \subset T(t - t_0)\left[\overline{T(t_0) B}\right].$$

Por $T(t_0)$ ser aplicação compacta e $T(t - t_0)$ ser contínua, temos que $T(t - t_0)\left[\overline{T(t_0) B}\right]$ é compacto. Portanto, $\overline{T(t) B}$ é compacto.

A seguir temos uma relação entre os sistemas eventualmente limitados, eventualmente compactos e assintoticamente compactos.

Proposição 2.21 *Se um sistema semidinâmico $T(\cdot)$ é eventualmente limitado e eventualmente compacto, então $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto.*

Demonstração: Sejam as sequências $(x_n) \subset X$ limitada e $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n \longrightarrow +\infty$. Pelo fato de $T(\cdot)$ ser eventualmente limitado, dado $B_0 = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto limitado de X, existe uma constante real $\tau \geq 0$ tal que $\gamma_\tau^+(B_0) = \{T(t) x_n;\ t \geq \tau, x_n \in B_0\}$ é limitado. Como $T(\cdot)$ é eventualmente compacto, existe $t_0 > 0$ tal que a aplicação $T(t_0)$

é compacta. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t_0 + \tau$, para todo $n \geq n_0$. Assim, $t_n - t_0 \geq \tau$, para todo $n \geq n_0$ e podemos definir o conjunto

$$B = \{T(t_n - t_0)\, x_n;\ x_n \in B_0, n \geq n_0\}.$$

Temos que $B \subset \gamma_\tau^+(B_0)$, donde B é um subconjunto limitado de X. Logo,

$$\begin{aligned} T(t_0)\, B &= \{T(t_0)\, x;\ x \in B\} \\ &= \{T(t_0)\,[T(t_n - t_0)\, x_n];\ n \geq n_0\} \\ &= \{T(t_n)\, x_n;\ n \geq n_0\} \end{aligned}$$

é relativamente compacto. Portanto, a sequência $(T(t_n)\, x_n)$ possui subsequência convergente, mostrando que o sistema semidinâmico $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto. $\square$

Apresentamos agora as propriedades envolvendo os conjuntos ω-limite, quando o sistema semidinâmico é assintoticamente compacto. Esses resultados serão utilizados mais adiante e assim mostremos como é interessante a compacidade assintótica do sistema.

Proposição 2.22 *Seja $T(\cdot)$ um sistema semidinâmico assintoticamente compacto em X. Para todo subconjunto limitado B de X, seu conjunto ω-limite é não vazio, compacto, invariante e atrai o subconjunto B pela ação de $T(\cdot)$.*

Demonstração: Mostremos que

- $\omega(B) \neq \emptyset$;

  Sejam as sequências $(x_n) \subset B$ limitada e $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n \longrightarrow +\infty$. Pela compacidade assintótica de $T(\cdot)$, a sequência $(T(t_n)\, x_n)$ em X possui subsequência $(T(t_{n_k})\, x_{n_k})$ que converge para um ponto $x \in X$. Como $(x_{n_k}) \subset B$, $(t_{n_k}) \subset \mathbb{R}_+$ com $t_{n_k} \longrightarrow +\infty$ e $(T(t_{n_k})\, x_{n_k}) \longrightarrow x$, pela Proposição 2.18, segue que $x \in \omega(B)$.

- $\omega(B)$ é compacto;

Seja (x_n) uma sequência em $\omega(B) = \bigcap\limits_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada $t \geq 0$, tome $y_{n,t} \in \gamma_t^+(B) \cap B\left(x_n, \frac{1}{n}\right)$. Como

$$\gamma_t^+(B) = \{T(s)\, b;\ s \geq t, b \in B\},$$

podemos escrever $y_{n,t} = T(s_{n,t})\, b_{n,t}$, onde $s_{n,t} \geq t$ e $b_{n,t} \in B$. Definimos um conjunto de índices $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ com a relação

$$(n, f) \succeq (m, g) \iff n \geq m \text{ e } f(k) \geq g(k), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pela Proposição 1.4, temos que o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é um conjunto dirigido. Para $(n, f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, demotemos $y_{(n,f)} = T\left(s_{(n,f)}\right) b_{(n,f)}$, onde

$$s_{(n,f)} = s_{n,f(n)} \geq f(n) \text{ e } b_{(n,f)} = b_{n,f(n)} \in B.$$

Dado $t \geq 0$, seja $f_t \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definida por $f_t(n) = t + n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim, para todo $(n, f) \succeq (1, f_t)$, temos que

$$s_{(n,f)} = s_{n,f(n)} \geq f(n) \geq f_t(n) = t + n.$$

Logo, $s_{(n,f)} \longrightarrow +\infty$. Temos que podemos considerar a rede $\left(s_{(n,f)}\right)$ como sequência, pois dado $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, onde $t + n_0 \geq M$, assim,

$$s_{(n,f)} \geq t + n \geq t + n_0 \geq M,$$

para todo $n \geq n_0$. Logo, considere as sequências $\left(s_{(n,f)}\right) \subset \mathbb{R}_+$ e $\left(b_{(n,f)}\right) \subset B$. Como $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto, a sequência $\left(T\left(s_{(n,f)}\right) b_{(n,f)}\right)$ possui uma subsequência

$$\left(T\left(s_{(n_k,f_k)}\right) b_{(n_k,f_k)}\right) = \left(y_{(n_k,f_k)}\right)$$

que converge para $x \in X$. Como $s_{(n_k,f_k)} \longrightarrow +\infty$ e $\left(b_{(n_k,f_k)}\right) \subset B$, temos que $x \in \omega(B)$. Agora, para cada $n_k \in \mathbb{N}$, como $y_{(n_k,f_k)} \in \gamma^+_{f_k(n_k)}(B) \cap B\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right)$, temos

$$\mathrm{d}\left(x_{n_k}, x\right) \leq \mathrm{d}\left(x_{n_k}, y_{(n_k, f_k)}\right) + \mathrm{d}\left(y_{(n_k, f_k)}, x\right) < \frac{1}{n_k} + \mathrm{d}\left(y_{(n_k, f_k)}, x\right).$$

Assim, temos que $x_{n_k} \longrightarrow x$. Logo, $(x_n) \subset \omega(B)$ possui subsequência (x_{n_λ}) que converge para $x \in \omega(B)$. Portanto, $\omega(B)$ é compacto.

- $\omega(B)$ é invariante;

Seja $x \in \omega(B)$. Então, existem sequências $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$, com $t_n \longrightarrow +\infty$ e $(x_n) \subset B$ tais que $T(t_n)x_n \longrightarrow x$. Dado $t \geq 0$ fixado, como a aplicação $T(t) : X \longrightarrow X$ é contínua, temos que

$$T(t)x = T(t)\left[\lim_{n\to+\infty} T(t_n)x_n\right] = \lim_{n\to+\infty} T(t+t_n)x_n,$$

onde $t + t_n \longrightarrow +\infty$ e $(x_n) \subset B$. Logo, $T(t)x \in \omega(B)$. Portanto, $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$.

Reciprocamente, seja $x \in \omega(B)$. Assim, existem sequências $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ e $(x_n) \subset B$, com $t_n \longrightarrow +\infty$, tais que $T(t_n)x_n \longrightarrow x$. Fixando $t \geq 0$, temos

$$x = \lim_{n\to+\infty} T(t_n)x_n = \lim_{n\to+\infty} T(t+t_n-t)x_n = \lim_{n\to+\infty} [T(t)\circ T(t_n-t)](x_n).$$

Por outro lado, pelo fato de $T(\cdot)$ ser assintoticamente compacto e satisfazendo as condições $t_n - t \longrightarrow +\infty$ e $(x_n) \subset B$ limitada, a sequência $(T(t_n-t)x_n)$ em X possui subsequência $(T(t_{n_k}-t)x_{n_k})$ que converge para $z \in X$. Então, $z \in \omega(B)$. Como $T(t)$ é contínua, temos que

$$x = \lim_{n\to+\infty} T(t)[T(t_n-t)(x_n)] = T(t)\lim_{n\to+\infty} T(t_n-t)x_n = T(t)z.$$

Pela unicidade do limite, temos que $x = T(t)z \in T(t)\omega(B)$. Logo,

$$\omega(B) \subset T(t)\omega(B),$$

donde segue que $\omega(B)$ é invariante.

- $\omega(B)$ atrai B;

  Queremos mostrar que dado $\epsilon > 0$, existe $\tau \geq 0$ tal que

  $$T(t)B \subset B(\omega(B), \epsilon),$$

  para todo $t \geq \tau$. Suponha por contradição que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $t \geq 0$,

  $$T(t)B \not\subset B(\omega(B), \epsilon). \tag{2.1}$$

  Assim, podemos obter $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$, com $t_n \longrightarrow +\infty$, satisfazendo a condição 2.1, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar $x_n \in B$ tal que

  $$T(t_n)x_n \notin B(\omega(B), \epsilon),$$

  ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, $d(T(t_n)x_n, \omega(B)) \geq \epsilon$. Como $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto, (x_n) em B é limitada e (t_n) em $\mathbb{R}_+$ com $t_n \longrightarrow +\infty$, a sequência $(T(t_n)x_n)$ possui uma subsequência $(T(t_{n_k})x_{n_k})$ que converge para um ponto $x \in X$. Então, $x \in \omega(B)$ e pela continuidade de d, temos $\mathrm{d}(x, \omega(B)) \geq \epsilon$. Logo, $x \notin \omega(B)$, o que é uma contradição. Portanto, $\omega(B)$ atrai B.

$\square$

Proposição 2.23 *Seja $T(\cdot)$ um sistema semidinâmico assintoticamente compacto. Se B é um subconjunto limitado de X, então $\omega(B)$ é menor subconjunto fechado de X que atrai B.*

Demonstração: Pela Proposição 2.22, sabemos que $\omega(B)$ é um subconjunto fechado que atrai B. Basta mostrar que é o menor subconjunto fechado com essa propriedade. Seja F um subconjunto fechado de X que atrai B. Suponha por contradição que $\omega(B) \not\subset F$. Então, existe $x \in \omega(B)$ tal que $x \notin F$. Assim, seja $\delta > 0$ tal que $\mathrm{d}(x, F) = \delta$. Como

$x \in \omega(B)$, existem sequências $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ e $(x_n) \subset B$, com $t_n \longrightarrow +\infty$, tais que $T(t_n)x_n \longrightarrow x$. Por outro lado, como F atrai B, dado $\epsilon = \frac{\delta}{2} > 0$, existe $t_0 \geq 0$ tal que

$$\operatorname{dist}(T(t)B, F) < \frac{\delta}{2},\ \forall t \geq t_0.$$

Como $\operatorname{dist}(T(t)B, F) = \sup_{x \in B}(\mathrm{d}(T(t)x, F))$, temos que

$$\mathrm{d}(T(t)z, F) < \frac{\delta}{2}, \forall z \in B, \forall t \geq t_0. \tag{2.2}$$

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t_0$, para todo $n \geq n_0$. Logo, pela desigualdade 2.2, temos

$$\mathrm{d}(T(t_n)x_n, F) < \frac{\delta}{2},\ \forall n \geq n_0.$$

Pela continuidade da distância d, temos $\mathrm{d}(x, F) \leq \frac{\delta}{2}$, contradizendo o fato de $\mathrm{d}(x, F) = \delta$. Portanto, $\omega(B) \subset F$. $\square$

Proposição 2.24 *Seja $T(\cdot)$ um sistema semidinâmico assintoticamente compacto. Seja B um subconjunto limitado em X. Se existe um subconjunto conexo C contendo B que é atraído pelo conjunto ω-limite $\omega(B)$, então $\omega(B)$ é um subconjunto conexo em X.*

Demonstração: Suponha que existe um conjunto conexo $C \supset B$ que é atraído por $\omega(B)$, mas que $\omega(B)$ seja desconexo. Então, podemos escrever $\omega(B) = F_1 \cup F_2$, onde F_1 e F_2 são subconjuntos não vazios, disjuntos e fechados em $\omega(B)$. Pela Proposição 2.22, temos que $\omega(B)$ é compacto. Logo, temos que F_1 e F_2 são compactos e assim existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathrm{d}(F_1, F_2) = \inf\{d(x_1, x_2);\ x_1 \in F_1, x_2 \in F_2\} = \delta.$$

Como $\omega(B)$ atrai C, dado $\epsilon = \frac{\delta}{2} > 0$, existe $t_0 > 0$ tal que

$$T(t)C \subset \mathrm{B}\left(\omega(B), \frac{\delta}{2}\right),\ \forall t \geq t_0.$$

Logo,

$$\gamma_{t_0}^{+}(C) \subset \mathrm{B}\left(\omega(B), \frac{\delta}{2}\right) = \mathrm{B}\left(F_1, \frac{\delta}{2}\right) \cup \mathrm{B}\left(F_2, \frac{\delta}{2}\right).$$

Considere a aplicação contínua

$$\begin{array}{rccc} T: & [t_0, +\infty) \times C & \longrightarrow & X \\ & (t, x) & \longmapsto & T(t)\, x \end{array}$$

Então, a órbita positiva à direita de t_0, $\gamma_{t_0}^{+}(C) = \{T(t)\,x;\ t \geq t_0, x \in C\}$, é imagem da aplicação contínua T definida acima. Como $[t_0, +\infty) \times C$ é conexo, segue que $\gamma_{t_0}^{+}(C)$ é conexo, e como $\mathrm{d}(F_1, F_2) = \delta$, segue que $\mathrm{B}\left(F_1, \frac{\delta}{2}\right)$ e $\mathrm{B}\left(F_2, \frac{\delta}{2}\right)$ são conjuntos abertos e disjuntos. Logo, devemos ter $\gamma_{t_0}^{+}(C) \subset \mathrm{B}\left(F_1, \frac{\delta}{2}\right)$ ou $\gamma_{t_0}^{+}(C) \subset \mathrm{B}\left(F_2, \frac{\delta}{2}\right)$. Sem perda de generalidade, suponha que $\gamma_{t_0}^{+}(C) \subset \mathrm{B}\left(F_1, \frac{\delta}{2}\right)$. Então,

$$F_2 \subset \omega(B) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^{+}(B)} \subset \overline{\gamma_{t_0}^{+}(C)} \subset \overline{\mathrm{B}\left(F_1, \frac{\delta}{2}\right)},$$

concluindo que $\mathrm{d}(F_1, F_2) \leq \frac{\delta}{2}$, o que é um absurdo. Portanto, $\omega(B)$ é um conjunto conexo. $\square$

Proposição 2.25 *Seja $T(\cdot)$ um sistema semidinâmico e A um subconjunto fechado e invariante em X. Então, $\omega(A) = A$.*

Demonstração: Como A é fechado e invariante, temos

$$\omega(A) = \bigcap_{t \geq 0} \left(\overline{\bigcup_{s \geq t} T(s)\, A} \right) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{A} = A.$$

$\square$

Note que na Proposição 2.25, se retirarmos a hipótese de que A é fechado, temos somente a inclusão

$$A \subset \omega(A).$$

2.4 Existência do Atrator Global para Sistemas Semidinâmicos

O Teorema que apresentamos nesta seção, garante a existência de atrator global para sistemas semidinâmicos que são assintoticamente compactos e limitados dissipativos. Além disso, caracteriza o atrator global em termos de conjuntos ω-limite.

Teorema 2.26 *Seja $T(\cdot)$ um sistema semidinâmico em um espaço métrico X. Então, $T(\cdot)$ possui atrator global se, e somente se, $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto e limitado dissipativo. Em caso afirmativo, se $\mathcal{B}$ é uma coleção de todos os subconjuntos limitados, não vazios de X, então*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B).$$

Demonstração: Suponha que $T(\cdot)$ possui um atrator global $\mathcal{A}$. Então, pela Proposição 2.16, temos que $T(\cdot)$ é limitado dissipativo. Agora, tomemos uma sequência limitada $(x_n) \subset X$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n \longrightarrow +\infty$. Considere $B = \{x_n \in X;\ n \in \mathbb{N}\}$ um conjunto limitado. Como $\mathcal{A}$ é atrator global, temos que $\mathcal{A}$ atrai B, ou seja, $\lim\limits_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(T(t)B, \mathcal{A}) = 0$. Em particular, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\sup\limits_{b \in B} (\mathrm{d}(T(t_n)b, \mathcal{A}))\right] = 0$. Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $z_j \in \mathcal{A}$ tal que

$$\mathrm{d}\left(T\left(t_{n_j}\right)x_{n_j}, z_j\right) < \frac{1}{j}.$$

Pela compacidade de $\mathcal{A}$, tomando uma subsequência da sequência $(z_j) \subset \mathcal{A}$, se necessário, temos que $z_j \longrightarrow x \in \mathcal{A}$. Assim,

$$\mathrm{d}\left(T\left(t_{n_j}\right)x_{n_j}, x\right) \leq \mathrm{d}\left(T\left(t_{n_j}\right)x_{n_j}, z_j\right) + \mathrm{d}(z_j, x) < \frac{1}{j} + \mathrm{d}(z_j, x).$$

Logo, $T\left(t_{n_j}\right)x_{n_j} \longrightarrow x$, provando que $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto.

Reciprocamente, suponha que $T(\cdot)$ é um sistema semidinâmico asssintoticamente compacto e limitado dissipativo. Seja $\mathcal{B}$ a coleção de todos os subconjuntos limitados de

X. Definimos

$$\mathcal{A} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B).$$

Como $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto, pela Proposição 2.22, para cada B em $\mathcal{B}$, $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B, . Então, $\mathcal{A}$ é não vazio, é invariante pela Proposição 2.3 e atrai B para cada $B \in \mathcal{B}$, pois temos que $\mathrm{B}(\omega(B), \epsilon) \subset \mathrm{B}(\mathcal{A}, \epsilon)$, para todo $\epsilon > 0$ dado. Basta provar que $\mathcal{A}$ é compacto. Com efeito, como $T(\cdot)$ é limitado dissipativo, existe $D' \subset X$ limitado tal que D' absorve cada $B \in \mathcal{B}$. Tome, se necessário, $D = \overline{D'}$ subconjunto fechado de X. Pela Proposição 2.23, temos que $\omega(B)$ é menor subconjunto fechado de X que atrai B, para todo B em $\mathcal{B}$, e como D absorve B, e portanto atrai B, temos que $\omega(B) \subset D$, para todo B em $\mathcal{B}$. Logo, $\mathcal{A} \subset D$, donde $\omega(\mathcal{A}) \subset \omega(D)$. Como $\mathcal{A}$ é invariante, pela Proposição 2.25, temos que $\mathcal{A} \subset \omega(\mathcal{A})$, donde temos as inclusões

$$\mathcal{A} \subset \omega(\mathcal{A}) \subset \omega(D).$$

Mas, D é um subconjunto limitado, então $D \in \mathcal{B}$ e $\omega(D) \subset \mathcal{A}$. Assim, $\mathcal{A} = \omega(D)$ e pela Proposição 2.22, $\omega(D)$ é compacto, concluindo que $\mathcal{A}$ é compacto. Portanto, $\mathcal{A}$ é um atrator global. □

Temos uma consequência do teorema anterior que garante a existência do atrator global para semifluxos eventualmente compactos, eventualmente limitados e ponto dissipativos.

Corolário 2.27 *Se um sistema semidinâmico $T(\cdot)$ é eventualmente compacto, eventualmente limitado e ponto dissipativo, então $T(\cdot)$ possui um atrator global.*

Demonstração: Note que pela Proposição 2.21, temos que o sistema semidinâmico $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto. Mostremos que $T(\cdot)$ é limitado dissipativo. De fato, como o sistema semidinâmico $T(\cdot)$ é ponto dissipativo, existe um subconjunto limitado D_0 de

X que absorve cada ponto $x \in X$. Dado $\epsilon > 0$, considere o subconjunto limitado

$$D_1 = \mathrm{B}\left(D_0, \epsilon\right).$$

Por $T\left(\cdot\right)$ ser eventualmente limitado, para este subconjunto limitado D_1, existe $\tau_* \geq 0$ tal que o subconjunto

$$D = \gamma^+_{\tau_*}\left(D_1\right)$$

é limitado. Afirmamos que o subconjunto D de X absorve todo subconjunto limitado de X. Com efeito, primeiramente seja K um subconjunto compacto de X. Então, para cada $x \in K$, existe um número real $\tau_x \geq 0$ tal que

$$T\left(t\right) x \in D_0 \subset D_1, \ \forall t \geq \tau_x.$$

Como D_1 é um subconjunto aberto de X e $T\left(\tau_x\right)$ é contínua, existe $\delta_x > 0$ tal que

$$T\left(\tau_x\right) \mathrm{B}\left(x, \delta_x\right) \subset D_1.$$

Agora, pela definição de semiórbita positiva à direita de τ_*, $D = \gamma^+_{\tau_*}\left(D_1\right)$, temos que

$$T\left(t - \tau_x\right)\left[T\left(\tau_x\right) \mathrm{B}\left(x, \delta_x\right)\right] \subset D, \ \forall t - \tau_x \geq \tau_*,$$

ou seja,

$$T\left(t\right) \mathrm{B}\left(x, \delta_x\right) \subset D, \ \forall t \geq \tau_x + \tau_*. \tag{2.3}$$

Por outro lado, $\left\{\mathrm{B}\left(x, \delta_x\right)\right\}_{x \in K}$ é uma cobertura aberta para o subconjunto K. Como K é compacto, existem $x_1, ..., x_n \in K$ tais que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{B}\left(x, \delta_{x_j}\right).$$

Tome $\tau_K = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \tau_{x_j}$. Então, por 2.3, temos

$$T\left(t\right) K \subset D, \ \forall t \geq \tau_K + \tau_*. \tag{2.4}$$

Como o sistema semidinâmico $T(\cdot)$ é eventualmente compacto, existe uma constante real $t_0 \geq 0$ tal que $T(t_0)$ é uma aplicação compacta. Agora, dado um subconjunto limitado B de X, temos que $K = \overline{T(t_0)B}$ é compacto. Logo, por 2.4,

$$T(t)[T(t_0)B] \subset T(t)\overline{T(t_0)B} = T(t)K \subset D, \ \forall t \geq \tau_K + \tau_*$$

Seja $\tau = t_0 + \tau_K + \tau_*$. Então, para todo $t \geq \tau$, temos que $t - t_0 \geq \tau_K + \tau_*$, donde

$$T(t - t_0)[T(t_0)B] \subset D, \ \forall t - t_0 \geq \tau_K + \tau_*,$$

isto é,

$$T(t)B \subset D, \ \forall t \geq \tau.$$

Logo, o subconjunto D absorve todo subconjunto limitado B de X, mostrando que $T(\cdot)$ é limitado dissipativo. Pelo Teorema 2.26, segue que o sistema semidinâmico $T(\cdot)$ possui um atrator global. $\square$

Exemplo 2.7 *Vimos no Exemplo 2.5 que o sistema não possui atrator global. Isto deve ao fato de falhar a condição de compacidade assintótica do sistema. De fato, sejam as sequências* $(x_n, y_n) \subset \mathbb{R}^2$ *limitada e* $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ *com* $t_n \longrightarrow +\infty$. *Temos que existe uma subsequência* $(x_{n_k}, y_{n_k}) \longrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$. *Mas, se* $t_n \longrightarrow +\infty$, $\mathrm{e}^{\lambda_1 t_n} \longrightarrow 0$ *e* $\mathrm{e}^{\lambda_2 t_n} \longrightarrow +\infty$, *assim,* $y_{n_k}\mathrm{e}^{\lambda_2 t_{n_k}} \longrightarrow +\infty$. *Logo, a sequência* $\left(x_n \mathrm{e}^{\lambda_1 t_n}, y_n \mathrm{e}^{\lambda_2 t_n}\right)$ *não possui subsequência convergente.*

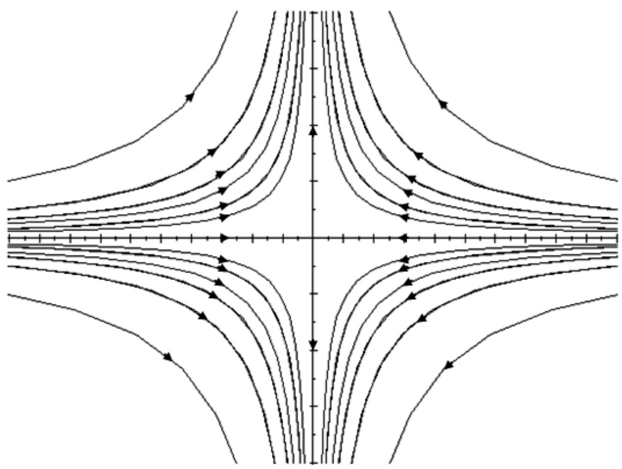


Figura 2.3: Exemplo de sistema que não é assintoticamente compacto.

Capítulo 3

Atratores Globais para Ações de Semigrupos

Aqui apresentamos todos os resultados do capítulo anterior, generalizados para ações de semigrupos, que são extensões de sistemas semidinâmicos. Considerando a base de filtro, chamado Filtro de Fréchet,

$$\mathcal{F} = \{[\tau, +\infty);\ \tau \geq 0\},$$

todos os conceitos envolvendo a família de subconjuntos do semigrupo pode ser considerado para sistemas semidinâmicos. Iniciamos o capítulo com a definição de ação e conjuntos invariantes. Apresentamos a noção de atração e atrator global. A diferença para o capítulo anterior é que para ações de semigrupos, o conceito de atração depende da família de subconjuntos do semigrupo em questão. Definimos, em seguida, os conceitos de semiórbitas, ações eventualmente limitadas e limitadas dissipativas. Braga Barros e Souza introduziram em [6], a definição de conjuntos ω-limite para ações de semigrupos e aqui utilizamos a mesma definição. Apresentamos uma caracterização dos conjuntos ω-limite em forma de redes e a definição de ações assintoticamente compactas e eventualmente compactas. Temos que se a ação é assintoticamente compacta, os conjuntos ω-limite adquirem algumas propriedades como a compacidade. Em [7], temos o resultado que garante a invariância dos conjuntos ω-limite para espaços compactos. Mostramos neste trabalho que se a ação é assintoticamente compacta, então os conjuntos ω-limite de conjuntos limitados são invariantes. No final do capítulo, temos o principal resultado que garante a existência de atrator global para ações de semigrupos.

3.1 Ações de Semigrupos

Seja X um espaço métrico com a métrica $\mathrm{d} : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\mathcal{S}$ um semigrupo.

Definição 3.1 *Uma **ação** (à esquerda) de $\mathcal{S}$ sobre X, denotada por $(\mathcal{S}, X, \mu)$, é uma aplicação μ dada por*

$$\begin{array}{rccc} \mu: & \mathcal{S} \times X & \longrightarrow & X \\ & (s, x) & \longmapsto & sx \end{array}$$

satisfazendo

$$\mu(st, x) = \mu(s, \mu(t, x)),$$

para todo $s, t \in \mathcal{S}$ e para todo $x \in X$, ou seja,

$$(st)x = s(tx),$$

para todo $s, t \in \mathcal{S}$ e para todo $x \in X$.

Para cada $s \in \mathcal{S}$, definimos a aplicação $\mu_s : X \longrightarrow X$, dada por $\mu_s(x) = sx$, $\forall x \in X$. Assumimos aqui que a aplicação μ_s é contínua. Assim, podemos definir uma família de aplicações contínuas $\{\mu_s;\ s \in \mathcal{S}\}$ como fizemos para sistemas semidinâmicos.

Vejamos alguns exemplos de ações de semigrupos.

Exemplo 3.1 *Seja X um espaço métrico. Temos que sistema semidinâmico*

$$T(\cdot) = \{T(t) : X \longrightarrow X;\, T(t) \text{ é contínua e } t \in \mathbb{R}_+\}$$

apresentado na Definição 2.1 é uma ação de semigrupo dos reais não negativos com a operação de adição, se considerarmos a ação $\mu(t, x) = T(t)x$.

Exemplo 3.2 *Seja*

$$G = \{g \in GL(n, \mathbb{R}) ; \det g > 0\}$$

munido com a operação de produto de matrizes. Temos que G é um grupo. Considere a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rccc} \mu : & G \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (g, x) & \longmapsto & gx \end{array} \tag{3.1}$$

Temos que μ é uma ação do grupo G sobre $\mathbb{R}^n$. De fato, sejam $g_1, g_2 \in G$ e $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mu(g_1 g_2, x) = (g_1 g_2) x = g_1 (g_2 x) = \mu(g_1, g_2 x) = \mu(g_1, \mu(g_2, x)).$$

Podemos também considerar o semigrupo $S = \{g \in GL(n, \mathbb{R}^n) ; \det g > 1\}$ munido com a operação de multiplicação de matrizes e a aplicação μ definida em 3.1.

Exemplo 3.3 *Seja $\mathcal{S} = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ o semigrupo com a operação de multipicação usual. Temos que a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathcal{S} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (s, (x, y)) & \longmapsto & (sx, sy) \end{array}$$

é uma ação de $\mathcal{S}$. Com efeito, sejam $s, t \in \mathcal{S}$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \mu(st, (x, y)) &= ((st) x, (st) y) = (s(tx), s(ty)) \\ &= \mu(s, (tx, ty)) = \mu(s, \mu(t, (x, y))). \end{aligned}$$

Exemplo 3.4 *Considere o semigrupo*

$$\mathcal{S} = \left\{(s, t) \in \mathbb{R}^2 ; s, t > 0\right\}$$

munido com a operação de soma usual em $\mathbb{R}^2$. Seja $0 < a < 1$ uma constante real. Definimos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathcal{S} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & ((s, t), (x, y)) & \longmapsto & (a^s x, a^t y) \end{array}$$

Temos que μ é uma ação de semigrupo, pois para todo $(s_1, t_1), (s_2, t_2) \in S$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\mu((s_1,t_1)+(s_2,t_2),(x,y)) &= \mu((s_1+s_2,t_1+t_2),(x,y)) \\
&= \left(a^{s_1+s_2}x, a^{t_1+t_2}y\right) \\
&= \left(a^{s_1}a^{s_2}x, a^{t_1}a^{t_2}y\right) \\
&= \mu\left((s_1,t_1),\left(a^{s_2}x, a^{t_2}y\right)\right) \\
&= \mu((s_1,t_1),\mu((s_2,t_2),(x,y))).
\end{aligned}$$

Vamos definir o conceito de invariância de um conjunto pela ação de um semigrupo.

Definição 3.2 *Um subconjunto A de X é **invariante** pela ação de um semigrupo $\mathcal{S}$ se $sA = A$, para todo $s \in \mathcal{S}$, onde $sA = \{sa;\ a \in A\}$.*

Proposição 3.3 *Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma coleção de subconjuntos invariantes de X. Então,*

$$A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda.$$

também é invariante.

Demonstração: Para todo $s \in \mathcal{S}$, temos que

$$s\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} sA_\lambda. \tag{3.2}$$

Como A_λ é invariante, para todo $\lambda \in \Lambda$, usando a igualdade 3.2, temos

$$sA = s\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} sA_\lambda = A.$$

Portanto, A é invariante. □

Seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos do semigrupo $\mathcal{S}$. Definimos a noção de atração para ação de semigrupo, como segue:

Definição 3.4 *Dizemos que um subconjunto A de X $\mathcal{F}$-**atrai** um subconjunto B de X pela ação de semigrupo $\mathcal{S}$ se, dado $\epsilon > 0$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que*

$$FB \subset \mathrm{B}\left(A, \epsilon\right).$$

Note que a Definição 3.4 depende da família $\mathcal{F}$. Assim, o conceito de atrator global para ações de semigrupos que definimos a seguir, também depende da família $\mathcal{F}$. Logo, pode ocorrer o caso onde existe o atrator global para uma ação de semigrupo considerando uma determinada família e não existir se considerar uma outra família (ver Exemplo 3.6 e Exemplo 3.14).

Definição 3.5 *Um subconjunto $\mathcal{A}$ de X é chamado $\mathcal{F}$**-atrator global** para a ação de semigrupo $\mathcal{S}$ se $\mathcal{A}$ é não vazio, compacto, invariante e $\mathcal{F}$-atrai todo subconjunto limitado de X pela ação de $\mathcal{S}$.*

Proposição 3.6 *Se uma ação de semigrupo $\mathcal{S}$ possui um $\mathcal{F}$-atrator global $\mathcal{A}$, então ele é único.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ $\mathcal{F}$-atratores globais para a ação de semigrupo $\mathcal{S}$. Como $\mathcal{A}_2$ é compacto, em particular, é limitado em X. Assim, $\mathcal{A}_1$ atrai $\mathcal{A}_2$, ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que

$$F\mathcal{A}_2 \subset \mathrm{B}\left(\mathcal{A}_1, \epsilon\right).$$

Pela invariância do conjunto $\mathcal{A}_2$, temos que $F\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2$, donde $\mathcal{A}_2 \subset B\left(\mathcal{A}_1, \epsilon\right)$. Logo,

$$\mathrm{dist}\left(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1\right) < \epsilon.$$

Pela arbitrariedade do $\epsilon > 0$, segue que

$$\mathrm{dist}\left(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1\right) = 0,$$

pela Proposição 2.6 segue que $\mathcal{A}_2 \subset \overline{\mathcal{A}_1} = \mathcal{A}_1$. Procedendo da mesma forma, trocando $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, temos que $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, obtendo a igualdade desejada. $\square$

Como fizemos no capítulo anterior, podemos caracterizar o atrator global para ação de semigrupo, como união de subconjuntos limitados e invariantes.

Teorema 3.7 *Se uma ação de semigrupo $\mathcal{S}$ possui $\mathcal{F}$-atrator global $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A}$ se exprime como união de todos os subconjuntos limitados invariantes de X.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{A}$ um $\mathcal{F}$-atrator global para a ação de um semigrupo $\mathcal{S}$ e $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ o conjunto de todos os subconjuntos limitados invariantes de X. Como $\mathcal{A}$ é limitado e invariante, temos que

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda.$$

Por outro lado, como $\mathcal{A}$ é $\mathcal{F}$-atrator global, temos que $\mathcal{A}$ $\mathcal{F}$-atrai A_λ, para todo $\lambda \in \Lambda$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $F_\lambda \subset \mathcal{F}$ tal que $F_\lambda A_\lambda \subset \mathrm{B}(\mathcal{A}, \epsilon)$. Como A_λ é invariante, $\forall \lambda \in \Lambda$, segue que $A_\lambda \subset \mathrm{B}(\mathcal{A}, \epsilon)$. Então, $\mathrm{dist}(A_\lambda, \mathcal{A}) < \epsilon$. Pela arbitrariedade de $\epsilon > 0$, segue que $\mathrm{dist}(A_\lambda, \mathcal{A}) = 0$. Logo, $A_\lambda \subset \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$, pata todo $\lambda \in \Lambda$ e, portanto,

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset \mathcal{A}.$$

$\square$

Definição 3.8 *Seja B um subconjunto de X e $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de $\mathcal{S}$. A* ***semiórbita*** *de B relativa à ação de semigrupo $\mathcal{S}$ é o conjunto*

$$\mathcal{S}B = \{sx;\ s \in \mathcal{S}, x \in B\}.$$

Agora, dados um subconjunto B de X e $F \in \mathcal{F}$, a ***$\mathcal{F}$-semiórbita de** B* **referente a*** *F é o conjunto*

$$FB = \{sx;\ s \in F, x \in B\}.$$

Definição 3.9 *Dizemos que a ação de semigrupo $\mathcal{S}$ é* ***limitada*** *se, a semiórbita de todo subconjunto limitado de X for limitado em X. Dizemos que a ação de semigrupo*

*$\mathcal{S}$ é $\mathcal{F}$-**eventualmente limitada** se, para cada subconjunto limitado $B \subset X$ a sua $\mathcal{F}$-semiórbita for limitada em X.*

Note que, se a ação do semigrupo é limitada e $\mathcal{F}$ é uma família de subconjuntos de $\mathcal{S}$, então a ação é $\mathcal{F}$-eventualmente limitada, pois $FB \subset \mathcal{S}B$, para todo subconjunto limitado B de X e F em $\mathcal{F}$.

Exemplo 3.5 *Retornando ao Exemplo 3.3, definimos a família de subconjuntos de $\mathcal{S}$ da seguinte forma:*

$$\mathcal{F} = \{F_a = (a,1)\,; 0 < a < 1\}.$$

Seja $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. A sua semiórbita é

$$\mathcal{S}\,(x,y) = \left\{(sx,sy) \in \mathbb{R}^2; s \in (0,1)\right\}.$$

Logo, a semiórbita $\mathcal{S}\,(x,y)$ é um segmento de reta ligando o ponto (x,y) a origem sem as extremidades. Agora, dado $F_a \in \mathcal{F}$, a $\mathcal{F}$-semiórbita de (x,y) referente a F_a é o conjunto

$$F_a\,(x,y) = \left\{(sx,sy) \in \mathbb{R}^2; s \in (a,1)\right\},$$

que é um segmento de reta sem as extremidades ligando os pontos (ax,ay) e (x,y) (Veja a Figura 3.1). Por fim, seja B um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$. Então, existe $M > 0$ tal que $\|(x,y)\| \leq M$. Assim, para todo $s \in \mathcal{S}$

$$\|(sx,sy)\| = s\,\|(x,y)\| \leq sM < M.$$

Portanto, a ação de $\mathcal{S}$ é limitada e $\mathcal{F}$-eventualmente limitada.

Proposição 3.10 *Se a ação de semigrupo $\mathcal{S}$ possui um $\mathcal{F}$-atrator global $\mathcal{A}$, então a ação é $\mathcal{F}$-eventualmente limitada.*

Demonstração: Seja B um subconjunto limitado de X. Como $\mathcal{A}$ é $\mathcal{F}$-atrator global, dado $\epsilon > 0$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que

$$FB \subset \mathrm{B}\,(\mathcal{A},\epsilon).$$

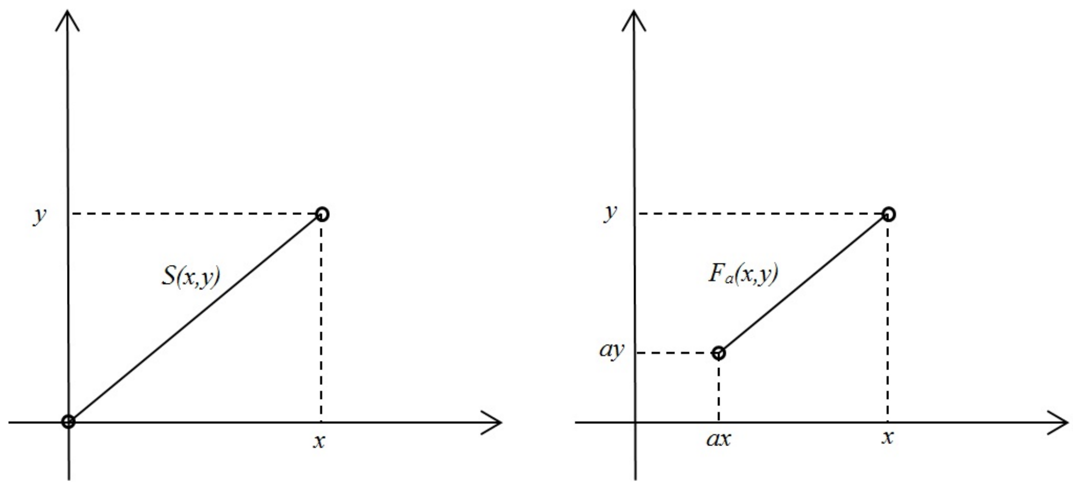


Figura 3.1: Semiórbitas de (x, y)

Como $\mathcal{A}$ é limitado, temos que $\mathrm{B}(\mathcal{A}, \epsilon)$ é limitado. Logo, FB é limitado e, portanto, a ação de $\mathcal{S}$ é $\mathcal{F}$-eventualmente limitada. $\square$

Definição 3.11 *Dados B e D subconjuntos de X, dizemos que D $\mathcal{F}$-**absorve** B pela ação de semigrupo relativo a família $\mathcal{F}$ se existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $FB \subset D$.*

Análogo à noção de atração, o conceito de absorção também depende da família $\mathcal{F}$.

Definição 3.12 *Dizemos que a ação de um semigrupo $\mathcal{S}$ é $\mathcal{F}$-**limitada dissipativa** se, existe um subconjunto limitado D de X que $\mathcal{F}$-absorve todo subconjunto limitado de X pela ação de $\mathcal{S}$. A ação de semigrupo $\mathcal{S}$ é dita $\mathcal{F}$-**ponto dissipativa** se, existe $D \subset X$ limitado que $\mathcal{F}$-absorve cada ponto $x \in X$ pela ação de $\mathcal{S}$.*

Proposição 3.13 *Seja $\mathcal{S}$ um semigrupo. Então, $(\mathcal{S}, X, \mu)$ é $\mathcal{F}$-limitada dissipativa se, e somente se, existe um subconjunto limitado D de X tal que D $\mathcal{F}$-atrai todo subconjunto limitado de X pela ação de $\mathcal{S}$.*

Demonstração: Suponha que $(\mathcal{S}, X, \mu)$ é $\mathcal{F}$-limitada dissipativa. Logo, existe um subconjunto limitado D de X que $\mathcal{F}$-absorve todo subconjunto limitado B de X. Então, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $FB \subset D$. Mas, dado $\epsilon > 0$, temos que $D \subset \mathrm{B}(D, \epsilon)$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $FB \subset \mathrm{B}(D, \epsilon)$. Portanto, D $\mathcal{F}$-atrai B.

Reciprocamente, suponha que existe um subconjunto limitado A de X que $\mathcal{F}$-atrai todo subconjunto limitado de X pela ação de $\mathcal{S}$. Seja B um subconjunto limitado de X. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $FB \subset \mathrm{B}(A, \epsilon)$. Tome $D = \mathrm{B}(A, \epsilon)$ que é limitado. Assim, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $FB \subset D$. Logo, D $\mathcal{F}$-absorve B. Portanto, a ação de $\mathcal{S}$ é $\mathcal{F}$-limitada dissipativa. □

Exemplo 3.6 *Voltando ao Exemplo 3.4, dado $r \geq 0$, definimos o conjunto*

$$A_r = \{(s,t) \in \mathcal{S}; s, t \geq r\}.$$

Assim, considere a base de filtro

$$\mathcal{F} = \{A_r; r \geq 0\}.$$

Seja B um subconjunto limitado em X. Sua $\mathcal{F}$-semiórbita positiva em relação a $A_r \in \mathcal{F}$ é

$$A_r B = \left\{\left(a^s x, a^t y\right); s, t \geq r \text{ e } (x,y) \in B\right\}.$$

Definamos $\mathcal{A} = \{(0,0)\}$. Temos que $\mathcal{A}$ é um $\mathcal{F}$-atrator global. Com efeito, note que $\mathcal{A}$ é invariante, pois

$$\mu((s,t), (0,0)) = \left(a^s 0, a^t 0\right) = (0,0),$$

para todo $(s,t) \in \mathcal{S}$. Além disso, $\mathcal{A}$ é compacto. Logo, basta provar que ele $\mathcal{F}$-atrai todo subconjunto limitado de X pela ação de $\mathcal{S}$. Seja $\epsilon > 0$. Então, dado (x_0, y_0) em B, como B é um subconjunto limitado, existe $M > 0$ tal que $\|(x_0, y_0)\| \leq M$. Dado $\epsilon > 0$, tome

$r > 0$ *tal que* $a^r < \frac{\epsilon}{M}$. *Assim, para todo* $(s,t) \in A_r$ *e* $(x,y) \in B$, *temos*

$$\begin{aligned} \|\mu((s,t),(x,y))\| &= \left\|\left(a^s x, a^t y\right)\right\| \\ &\leq \|(a^r x, a^r y)\| \\ &\leq a^r M \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, *existe* $r \geq 0$ *tal que*

$$A_r B \subset \mathrm{B}((0,0),\epsilon)$$

Portanto, $\mathcal{A} = \{(0,0)\}$ *é um* $\mathcal{F}$*-atrator global. Pela Proposição 3.6, segue que* $\mathcal{A}$ *é o único* $\mathcal{F}$*-atrator global. Agora, pela Proposição 3.10 e Proposição 3.13 temos que a ação de* $\mathcal{S}$ *é* $\mathcal{F}$*-eventualmente limitada e* $\mathcal{F}$*-limitada dissipativa.*

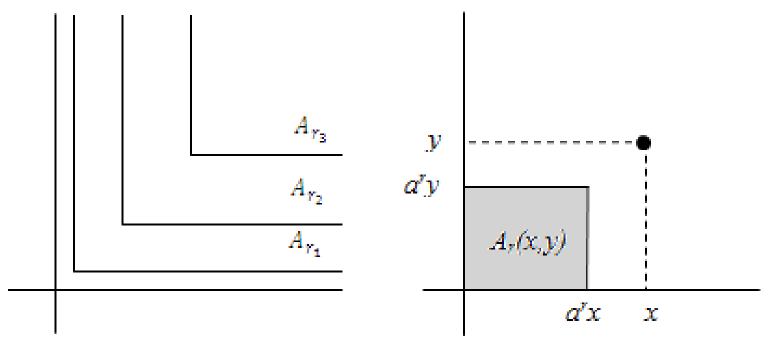


Figura 3.2: Base de filtro $\mathcal{F}$ e semiórbita $A_r(x,y)$

3.2 Conjuntos ω-limite para Ações de Semigrupos

Definição 3.14 *Dado um subconjunto* B *de* X, *o seu conjunto* ω***-limite*** *com respeito a família* $\mathcal{F}$ *é o conjunto*

$$\omega(B,\mathcal{F}) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{FB}.$$

Note que o conjunto ω-limite é fechado em X, pois é interseção de subconjuntos fechados em X.

Exemplo 3.7 *Temos que o conceito de conjunto ω-limite para ações de semigrupos definida acima generaliza o conceito de conjunto ω-limite para sistemas semidinâmicos , apresentada na Definição 2.1. De fato, considere a base de filtro, chamada Filtro de Fréchet,*

$$\mathcal{F} = \{A_\tau; \tau \geq 0\},$$

onde $A_\tau = [\tau, +\infty) \subset \mathbb{R}_+$, $\tau \geq 0$. Seja B um subconjunto de X. Então,

$$A_\tau B = \{T(t)x;\ t \geq \tau \text{ e } x \in B\} = \gamma_\tau^+(B).$$

Assim,

$$\omega(B, \mathcal{F}) = \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\gamma_\tau^+(B)} = \omega(B).$$

Note que, para o caso dos sistemas semidinâmicos estudamos o comportamento assintótico fazendo a sequência (t_n) em $\mathbb{R}_+$ tendendo a $+\infty$. Mas não podemos proceder da mesma maneira quando estamos estudando ações de semigrupos. Assim, foi necessário introduzir uma nova notação, que permite estudar a assintocidade para ações de semigrupos.

Definição 3.15 *Seja $\mathcal{S}$ um semigrupo e $\mathcal{F}$ uma base de filtro sobre $\mathcal{S}$. Dada uma rede $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ em $\mathcal{S}$, dizemos que t_λ F-**diverge** se para cada $F \in \mathcal{F}$, existe $\lambda_F \in \Lambda$ tal que $t_\lambda \in F$, para todo $\lambda \succeq \lambda_F$. **Notação:** $t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$.*

Vejamos alguns exemplos Definição 3.15 em vários contextos.

Exemplo 3.8 *A Definição 3.15 generaliza o fato de $t_n \longrightarrow +\infty$, pois tomando o Filtro de Fréchet, apresentado no Exemplo 3.7, temos que*

$$t_n \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty \iff t_n \longrightarrow +\infty.$$

Exemplo 3.9 *Seja $\mathcal{S} = \{g \in GL(n, \mathbb{R});\ \det g > 0\}$ o semigrupo apresentado no Exemplo 3.2. Dado um número real $r > 0$, considere o conjunto $A_r = \{g \in \mathcal{S};\ \det g \geq r\}$ e definimos a base de filtro $\mathcal{F} = \{A_r;\ r > 0\}$. Se (g_λ) é uma rede em $\mathcal{S}$, dizer que $g_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$ equivale a dizer que $\det g_\lambda \longrightarrow +\infty$.*

Exemplo 3.10 *No Exemplo 3.5, definimos a família $\mathcal{F} = \{F_a;\ 0 < a < 1\}$ de subconjuntos do semigrupo $\mathcal{S} = (0, 1)$, com $F_a = (a, 1)$. Nesse contexto, dizer que $t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$ significa $t_\lambda \longrightarrow 1$.*

Exemplo 3.11 *Seja $\mathcal{F} = \{A_r;\ r \geq 0\}$ a base de filtro, definida no Exemplo 3.6 sobre $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2$, onde $A_r = \{(s, t) \in S;\ s, t \geq r\}$, para $r \geq 0$ dado. Temos que a rede $(s_\lambda, t_\lambda) \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$ significa que as redes $s_\lambda \longrightarrow +\infty$ e $t_\lambda \longrightarrow +\infty$.*

Exemplo 3.12 *Suponha que $\mathcal{S}$ é um espaço topológico localmente compacto. Seja*

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{S} \diagdown K;\ K \text{ é compacto em } \mathcal{S}\}$$

a família das vizinhanças de ∞ em compactificação por um ponto de $\mathcal{S}$. Temos que $\mathcal{F}$ é base de filtro e se (t_λ) é uma rede em $\mathcal{S}$ com $t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$, então $t_\lambda \longrightarrow \infty$.

Para facilitar o desenvolvimento dos resultados sobre espaços métricos, vamos caracterizar o conjunto ω-limite em termos de redes, analogamente ao capítulo anterior, usando a nova notação introduzida na Definição 3.15.

Proposição 3.16 *Sejam B um subconjunto de X e $\mathcal{F}$ uma base de filtro. Então, seu conjunto ω-limite é caracterizado por*

$$\omega(B, \mathcal{F}) = \left\{ \begin{array}{c} x \in X;\ \text{existem as redes } (t_\lambda) \subset \mathcal{S},\ (x_\lambda) \subset B, \\ \text{com } t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty,\ \text{tais que } t_\lambda x_\lambda \longrightarrow x \end{array} \right\}.$$

Demonstração: Seja o conjunto

$$\omega'(B,\mathcal{F}) = \left\{ \begin{array}{c} x \in X;\ \text{existem as redes } (t_\lambda) \subset \mathcal{S},\ (x_\lambda) \subset B, \\ \text{com } t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty,\ \text{tais que } t_\lambda x_\lambda \longrightarrow x \end{array} \right\}.$$

Mostremos que $\omega(B,\mathcal{F}) = \omega'(B,\mathcal{F})$.

Seja $x \in \omega(B,\mathcal{F})$. Então, pela Definição 3.14, $x \in \overline{FB}$, para todo $F \in \mathcal{F}$. Logo, para cada $F \in \mathcal{F}$, existe a sequência $\left(y_n^F\right) \subset FB$ tal que

$$d\left(y_n^F, x\right) < \frac{1}{n}. \tag{3.3}$$

Mas, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escrever $y_n^F = t_{(F,n)}x_{(F,n)}$, onde $t_{(F,n)} \in F$ e $x_{(F,n)} \in B$. Considere o conjunto de índices $\mathcal{F} \times \mathbb{N}$ com a seguinte relação:

$$(F,n) \succeq (F',m) \iff F \subset F' \text{ e } n \geq m.$$

Com essa relação, $\mathcal{F} \times \mathbb{N}$ é um conjunto dirigido. Considere as redes $\left(t_{(F,n)}\right) \subset \mathcal{S}$ e $\left(x_{(F,n)}\right) \in B$. Temos que $t_{(F,n)} \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$, pois dado $F \in F$, existe $(F,1) \in \mathcal{F} \times \mathbb{N}$ tal que para todo $(F',n) \succeq (F,1)$, tem-se $t_{(F',n)} \in F$. Pela desigualdade 3.3, temos que

$$d\left(t_{(F,n)}x_{(F,n)}, x\right) < \frac{1}{n}$$

e, portanto existem as redes $\left(t_{(F,n)}\right) \subset \mathcal{S}, \left(x_{(F,n)}\right) \subset B$, com $t_{(F,n)} \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$, tais que $t_{(F,n)}x_{(F,n)} \longrightarrow x$. Logo, $x \in \omega'(B,\mathcal{F})$.

Por outro lado, seja $x \in \omega'(B,\mathcal{F})$. Então, existem as redes (t_λ) em $\mathcal{S}$, (x_λ) em B, com $t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$, tais que $t_\lambda x_\lambda \longrightarrow x$. Logo, para cada $F \in \mathcal{F}$, existe $\lambda_F \in \Lambda$ tal que $t_\lambda \in F$, $\forall \lambda \succeq \lambda_F$, ou seja, $x \in \overline{FB}$. Como F é arbitrário, segue que $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{FB} = \omega(B,\mathcal{F})$. □

Note que, como X é um espaço métrico, podemos caracterizar o conjunto ω-limite em termos de sequências, isto é,

$$\omega(B,\mathcal{F}) = \left\{ \begin{array}{c} x \in X;\ \text{existem sequências } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S},\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B, \\ \text{com } t_n \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty,\ \text{tais que } t_n x_n \longrightarrow x \end{array} \right\}.$$

Usando a Proposição 3.16, obtemos os seguintes resultados facilmente:

1. Para todos os subconjuntos B e C de X, temos $\omega(B \cap C) \subset \omega(B) \cap \omega(C)$.

2. Sejam os subconjuntos B e C de X. Se $B \subset C$, então, $\omega(B) \subset \omega(C)$.

Vejamos alguns exemplos de conjuntos ω-limite.

Exemplo 3.13 *Retomando o Exemplo 3.4, seja B um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$. Pela Proposição 3.16, temos*

$$\omega(B, \mathcal{F}) = \left\{ \begin{array}{c} (z, w) \in \mathbb{R}^2; \text{ existem sequências } (s_n, t_n) \subset \mathcal{S} \text{ com } (s_n, t_n) \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty \text{ e} \\ (x_n, y_n) \subset B \text{ tais que } (a^{s_n} x, a^{t_n} y) \longrightarrow (z, w) \end{array} \right\}.$$

Como $(s_n, t_n) \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$, então $s_n \longrightarrow +\infty$ e $t_n \longrightarrow +\infty$, donde $(a^{s_n}, a^{t_n}) \longrightarrow (0,0)$. E pelo fato de B ser limitado em $\mathbb{R}^2$, a sequência $(x_n, y_n) \subset B$ possui uma subsequência convergente, digamos $(x_{n_k}, y_{n_k}) \longrightarrow (x, y)$. Logo, $(a^{s_{n_k}} x_{n_k}, a^{t_{n_k}} y_{n_k}) \longrightarrow (0,0)$ e, portanto, $\omega(B, \mathcal{F}) = \{0, 0\}$. Em particular, dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $\omega((x, y), \mathcal{F}) = \{(0,0)\}$.

Exemplo 3.14 *Considere a ação do Exemplo 3.4. Definimos a família*

$$\mathcal{G} = \{A_\tau; \tau \geq 0\},$$

onde $A_\tau = \{(s,t) \in \mathcal{S}; s \geq \tau\}$, $\tau \geq 0$. Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $y \neq 0$. Então,

$$A_\tau(x, y) = \left\{ \left(a^s x, a^t y\right) \in \mathbb{R}^2; \ s \geq \tau \text{ e } t \geq 0 \right\}.$$

Note que se $\tau \longrightarrow +\infty$, temos que $s \longrightarrow +\infty$, donde $a^s \longrightarrow 0$. Logo,

$$\omega((x, y), \mathcal{G}) = \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{A_\tau(x, y)} = \begin{cases} \{0\} \times [0, y], & \text{se } y \geq 0 \\ \{0\} \times [y, 0], & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

Assim, comparando com o Exemplo 3.13, temos que $\omega((x, y), \mathcal{F}) \neq \omega((x, y), \mathcal{G})$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $y \neq 0$. Além disso, não existe $\mathcal{G}$-atrator global. De fato, seja $\mathcal{A}$ um subconjunto não vazio, compacto e invariante. Então, em particular, $\mathcal{A}$ é limitado, donde *existe* $M > 0$ *tal que* $\mathcal{A} \subset \mathrm{B}((0,0), M)$. *Agora, como* $\mathrm{B}((0,0), M)$ *é aberto, tome* $\epsilon > 0$ *tal que* $\mathrm{B}(\mathcal{A}, \epsilon) \subset \mathrm{B}((0,0), M)$. *Sejam* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *com* $y > M$ *e* $\tau > 0$. *Se* $(s, 0) \in A_\tau$, *temos*

$$\begin{aligned} \|\mu((s,0),(x,y))\| &= \|(a^s x, y)\| \\ &\geq \|(0, y)\| \\ &> M. \end{aligned}$$

Logo, $(s,0)(x,y) \notin \mathrm{B}(\mathcal{A}, \epsilon)$, *ou seja,* $A_\tau(x,y) \not\subset \mathrm{B}(\mathcal{A}, \epsilon)$. *Portanto, não existe* $\mathcal{G}$*-atrator global. Esse fato nos mostra que o conceito de atração depende da família de subconjuntos não vazios do semigrupo* $\mathcal{S}$ *que estamos considerando.*

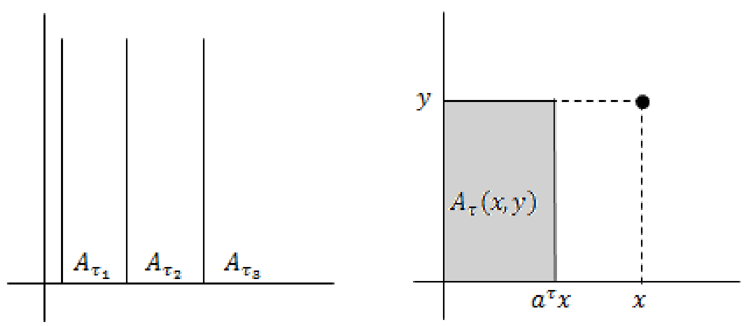


Figura 3.3: Base de filtro $\mathcal{G}$ e semiórbita $A_\tau(x, y)$

Vamos definir ação assintoticamente compacta e eventualmente compacta. Note que a compacidade assintótica de uma ação depende da família de subconjuntos de $\mathcal{S}$ que está sendo considerada.

Definição 3.17 *Sejam* $\mathcal{S}$ *um semigrupo e* $\mathcal{F}$ *uma base de filtro sobre* $\mathcal{S}$. *A ação do semigrupo* $\mathcal{S}$ *é chamado* $\mathcal{F}$*-* ***assintoticamente compacta*** *se para toda rede limitada* $(x_\lambda) \subset X$ *e para toda rede* $(t_\lambda) \subset \mathcal{S}$ *com* $t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$, *a rede* $(t_\lambda x_\lambda) \subset X$ *possui subrede convergente.*

Definição 3.18 *Dizemos que a ação de um semigrupo $\mathcal{S}$ é* ***eventualmente compacta*** *se existe $t_0 \in \mathcal{S}$ tal que a aplicação $\mu_{t_0} : X \longrightarrow X$ seja compacta.*

Em seguida, vamos apresentar algumas hipóteses de translação sobre famílias de subconjuntos de um semigrupo $\mathcal{S}$. As primeiras três hipóteses são introduzidas em [6] por Braga Barros e Souza.

Definição 3.19 *Seja $\mathcal{F}$ uma base de filtro sobre $\mathcal{S}$. Dizemos que a família $\mathcal{F}$ satisfaz:*

i) a ***hipótese*** *H_1 se, para todo $s \in S$ e todo $F \in \mathcal{F}$, existe $F^* \in \mathcal{F}$ tal que $sF^* \subset F$;*

ii) a ***hipótese*** *H_2 se, para todo $s \in S$ e todo $F \in \mathcal{F}$, existe $F^* \in \mathcal{F}$ tal que $F^*s \subset F$;*

iii) a ***hipótese*** *H_3 se, para todo $s \in S$ e todo $F \in \mathcal{F}$, existe $F^* \in \mathcal{F}$ tal que $F^* \subset Fs$;*

iv) a ***hipótese*** *H_4 se, para todo $s \in S$ e todo $F \in \mathcal{F}$, existe $F^* \in \mathcal{F}$ tal que $F^* \subset sF$.*

Exemplo 3.15 *O Filtro de Fréchet do Exemplo 3.7 satisfaz todas as hipóteses H_1, H_2, H_3 e H_4 (Veja [6]).*

Exemplo 3.16 *A base de filtro $\mathcal{F}$ dada no Exemplo 3.9 satisfaz as hipóteses H_1, H_2, H_3 e H_4. De fato, dados $g \in \mathcal{S} = GL(n, \mathbb{R})^+$, $A_r \in \mathcal{F}$, existe $A_{r'} \in \mathcal{F}$ com $r' \geq \frac{r}{\det g}$ tal que*

$$gA_{r'} \subset A_r,$$

pois se $g' \in A_{r'}$, $\det g' \geq r' \geq \frac{r}{\det g}$, ou seja, $\det g \det g' \geq r$, donde $gg' \in A_r$. Logo, $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_1 e de modo análogo podemos mostrar que $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_2. Agora, dados $g \in \mathcal{S}$ e $A_r \in \mathcal{F}$, existe $A_{r'} \in \mathcal{F}$ com $r' \geq r \det g$ tal que

$$A_{r'} \subset A_r g.$$

Com efeito, temos que $A_{r'} = A_{r'}g^{-1}g$ e se $g' \in A_{r'}$, então $\det g' \geq r \det g$, ou seja, $\det g' \frac{1}{\det g} = \det g' \det g^{-1} \geq r$, donde $g'g^{-1}g \in A_r g$. Logo, $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_3. Procedendo de modo análogo, temos que $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_4.

Proposição 3.20 *Seja $\mathcal{F}$ uma base de filtro sobre $\mathcal{S}$ satisfazendo a hipótese H_4. Se $(\mathcal{S}, X, \mu)$ é eventualmente compacta e $\mathcal{F}$-eventualmente limitada, então a ação $(\mathcal{S}, X, \mu)$ é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta.*

Demonstração: Sejam a rede limitada $(x_\lambda) \subset X$ e a rede $(t_\lambda) \subset S$ satisfazendo $t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$. Como $(\mathcal{S}, X, \mu)$ é $\mathcal{F}$-eventualmente limitada, dado um conjunto limitado $B_0 = \{x_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$, existe $F' \in \mathcal{F}$ tal que $F'B_0$ é limitado. Agora, pelo fato de a ação do semigrupo $\mathcal{S}$ ser eventualmente compacta, existe $t_0 \in \mathcal{S}$ tal que a aplicação $\mu_{t_0} : X \to X$ é compacta. Como a família $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_4, para $t_0 \in \mathcal{S}$ e $F' \in \mathcal{F}$, existe $\widetilde{F} \in \mathcal{F}$ tal que $\widetilde{F} \subset t_0F'$. Para este $\widetilde{F} \in \mathcal{F}$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $t_\lambda \in \widetilde{F}$, $\forall \lambda \succeq \lambda_0$. Assim, para todo $\lambda \succeq \lambda_0$, podemos escrever $t_\lambda = t_0 s_\lambda$, onde $s_\lambda \in F'$. Definamos o conjunto

$$B = \{s_\lambda x_\lambda;\ \lambda \succeq \lambda_0\}.$$

Como $B \subset F'B_0$, segue que B é limitado. Assim, o conjunto

$$t_0 B = \{t_0 s_\lambda x_\lambda;\ \lambda \succeq \lambda_0\} = \{t_\lambda x_\lambda;\ \lambda \succeq \lambda_0\}$$

é relativamente compacto. Logo, a rede $(t_\lambda x_\lambda)$ possui subrede convergente e, portanto, $(\mathcal{S}, X, \mu)$ é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta. $\square$

Proposição 3.21 *Sejam $\mathcal{F}$ uma base de filtro sobre o semigrupo $\mathcal{S}$ e B um subconjunto limitado de X. Se $(\mathcal{S}, X, \mu)$ é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta, o conjunto ω-limite $\omega(B, \mathcal{F})$ é não vazio, compacto e $\mathcal{F}$-atrai B pela ação de $\mathcal{S}$.*

Demonstração: Mostremos que

- $\omega(B, \mathcal{F}) \neq \emptyset$;

  Consideremos as redes (x_λ) em B e (t_λ) em $\mathcal{S}$, com $t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$. Como $(\mathcal{S}, X, \mu)$ é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta, a rede $(t_\lambda x_\lambda)$ possui subrede $(t_{\lambda_k} x_{\lambda_k})$ que converge para um certo ponto $x \in X$. Note que se $t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$, temos que $t_{\lambda_k} \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$. Assim, existem as redes $(x_{\lambda_k}) \subset B$, $(t_{\lambda_k}) \subset \mathcal{S}$ com $t_{\lambda_k} \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$, tais que $t_{\lambda_k} x_{\lambda_k} \longrightarrow x$. Pela Proposição 3.16 segue que $x \in \omega(B, \mathcal{F})$.

- $\omega(B, \mathcal{F})$ é compacto;

Tome a sequência (x_n) em $\omega(B, \mathcal{F}) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{FB}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $F \in \mathcal{F}$, tome $y_{n,F} \in FB \cap B\left(x_n, \frac{1}{n}\right)$. Então, podemos escrever $y_{n,F} = t_{n,F} x_{n,F}$, onde $t_{n,F} \in F$ e $x_{n,F} \in B$. Tome o conjunto de índices $\mathbb{N} \times \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, com a seguinte relação:

$$(n, f) \succeq (m, g) \iff n \geq m \text{ e } f(k) \subset g(k), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Para $(n, f) \in \mathbb{N} \times \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, denote por $y_{(n,f)} = t_{(n,f)} x_{(n,f)}$, onde $t_{(n,f)} = t_{n,f(n)}$ e $x_{(n,f)} = x_{n,f(n)}$. Agora, dado $F \in \mathcal{F}$, definamos a aplicação $f_F : \mathbb{N} \to \mathcal{F}$ por $f_F(n) = F$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim, para todo $(n, f) \succeq (1, f_F)$, temos que

$$t_{(n,f)} = t_{n,f(n)} \in f(n) \subset f_F(n) = F.$$

Logo, $t_{(n,f)} \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$. Considere as redes $\left(t_{(n,f)}\right) \subset \mathcal{S}$ e $\left(x_{(n,f)}\right) \subset B$. Como B é um conjunto limitado e $(\mathcal{S}, X, \mu)$ é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta, a rede $\left(t_{(n,f)} x_{(n,f)}\right)$ possui uma subrede $\left(t_{(n_\lambda, f_\lambda)} x_{(n_\lambda, f_\lambda)}\right)$ que converge para um ponto x em X. Pela Proposição 3.16 temos que $x \in \omega(B, \mathcal{F})$. Agora, para cada $n_\lambda \in \mathbb{N}$, e como $t_{(n_\lambda, f_\lambda)} x_{(n_\lambda, f_\lambda)} \in f_\lambda(n) B \cap \mathrm{B}\left(x_{n_\lambda}, \frac{1}{n_\lambda}\right)$, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x_{n_\lambda}, x) &\leq \mathrm{d}\left(x_{n_\lambda}, t_{(n_\lambda, f_\lambda)} x_{(n_\lambda, f_\lambda)}\right) + \mathrm{d}\left(t_{(n_\lambda, f_\lambda)} x_{(n_\lambda, f_\lambda)}, x\right) \\ &< \frac{1}{n_\lambda} + \mathrm{d}\left(t_{(n_\lambda, f_\lambda)} x_{(n_\lambda, f_\lambda)}, x\right). \end{aligned}$$

Logo, $x_{n_\lambda} \longrightarrow x$. Como X é um espaço métrico, podemos considerar a subrede (x_{n_λ}) como subsequência de (x_n) que converge para $x \in \omega(B, \mathcal{F})$. Portanto, $\omega(B, \mathcal{F})$ é compacto.

- $\omega(B, \mathcal{F})$ $\mathcal{F}$-atrai B;

Queremos mostrar que dado $\epsilon > 0$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $FB \subset \mathrm{B}\left(\omega\left(B, \mathcal{F}\right), \epsilon\right)$. Suponha por contradição que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $F \in \mathcal{F}$ tem-se $FB \not\subset \mathrm{B}\left(\omega\left(B, \mathcal{F}\right), \epsilon\right)$. Então, para cada $F \in \mathcal{F}$, existe $t_F \in F$ tal que $t_F B \not\subset \mathrm{B}\left(\omega\left(B, \mathcal{F}\right), \epsilon\right)$. Logo, existe $\left(x_F\right)_{F \in \mathcal{F}} \subset B$ tal que

$$\mathrm{d}\left(t_F x_F, \omega\left(B, \mathcal{F}\right)\right) \geq \epsilon.$$

Como $\mathcal{F}$ é base de filtro, temos que $t_F \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$ e $\left(x_F\right) \subset B$. Assim, a rede $\left(t_F x_F\right)$ possui subrede convergente, digamos, $t_{F_\lambda} x_{F_\lambda} \longrightarrow x$. Pela Proposição 3.16, temos que $x \in \omega\left(B, \mathcal{F}\right)$. Por outro lado,

$$\mathrm{d}\left(t_{F_\lambda} x_{F_\lambda}, \omega\left(B, \mathcal{F}\right)\right) \geq \epsilon$$

e, pela continuidade de d, segue que

$$\mathrm{d}\left(x, \omega\left(B, \mathcal{F}\right)\right) \geq \epsilon,$$

o que é um absurdo. Portanto, $\omega\left(B, \mathcal{F}\right)$ $\mathcal{F}$-atrai B.

□

Proposição 3.22 *Sejam $\mathcal{F}$ uma base de filtro sobre o semigrupo $\mathcal{S}$ e B um subconjunto limitado de X. Se $(\mathcal{S}, X, \mu)$ é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta, então $\omega\left(B, \mathcal{F}\right)$ é menor subconjunto fechado de X que $\mathcal{F}$-atrai B pela ação de $\mathcal{S}$.*

Demonstração: Pela Proposição 3.21, temos que $\omega\left(B, \mathcal{F}\right)$ é um subconjunto fechado que $\mathcal{F}$-4*atrai B. Assim, basta mostrar que ele é o menor subconjunto fechado com tal propriedade. Seja K um subconjunto fechado de X que atrai B. Suponha que $\omega\left(B, \mathcal{F}\right) \not\subset K$. Então, existe $x \in \omega\left(B, \mathcal{F}\right)$ tal que $x \notin K$. Como K é fechado, temos que existe $\delta > 0$ tal que $\mathrm{d}\left(x, K\right) = \delta$. Agora, como K atrai B, dado $\epsilon = \frac{\delta}{2} > 0$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que

$$FB \subset \mathrm{B}\left(K, \frac{\delta}{2}\right). \tag{3.4}$$

Assim, para todo $t \in F$ e para todo $z \in B$, temos $\mathrm{d}(tz, K) < \frac{\delta}{2}$. Por outro lado, como $x \in \omega(B, \mathcal{F})$, existem as sequências (x_n) em B e (t_n) em $\mathcal{S}$ satisfazendo $t_n \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$ tais que $t_n x_n \longrightarrow x$. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \in F$, para todo $n \geq n_0$. Assim, por 3.4, temos

$$\mathrm{d}(t_n x_n, K) < \frac{\delta}{2},$$

para todo $n \geq n_0$. Pela continuidade de d, temos

$$\mathrm{d}(x, K) \leq \frac{\delta}{2},$$

o que contradiz o fato de que $\mathrm{d}(x, K) = \delta$. Portanto, $\omega(B, \mathcal{F}) \subset K$. $\square$

A Proposição que segue nos mostra que o conjunto ω-limite de um subconjunto limitado é invariante. Já foi mostrado esse fato em [7] para espaços compactos. Aqui, consideramos apenas a ação assintoticamente compacta, sem que o espaço seja compacto.

Proposição 3.23 *Seja $\mathcal{F}$ uma base de filtro sobre o semigrupo $\mathcal{S}$ satisfazendo as hipóteses H_1 e H_4. Se a ação de $\mathcal{S}$ é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta, então $\omega(B, \mathcal{F})$ é invariante, para todo subconjunto limitado B de X.*

Demonstração: Sejam $x \in \omega(B, \mathcal{F}) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{FB}$, $s \in \mathcal{S}$ e $F \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_1, existe $F' \in \mathcal{F}$ tal que $sF' \subset F$. Agora, como $x \in \overline{F'B}$ e a aplicação $\mu_s : X \to X$ é contínua, temos que

$$sx \in s\overline{F'B} \subset \overline{sF'B} \subset \overline{FB}.$$

Pela arbitrariedade de $F \in \mathcal{F}$, segue que $sx \in \omega(B, \mathcal{F})$, isto é, $s\omega(B, \mathcal{F}) \subset \omega(B, \mathcal{F})$.

Por outro lado, sejam $x \in \omega(B, \mathcal{F})$ e $s \in \mathcal{S}$. Considere a coleção das bolas abertas

$$\mathcal{V} = \left\{ B\left(x, \frac{1}{n}\right);\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

e o espaço das aplicações de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}^{\mathcal{V}} = \{f : \mathcal{V} \to \mathcal{F}\}.$$

Seja

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ & n & \longmapsto & B\left(x, \frac{1}{n}\right) \end{array}$$

temos que ϕ é uma bijeção e conserva a ordem, pois

$$n \geq m \iff B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subset B\left(x, \frac{1}{m}\right),$$

de onde podemos identificar $\mathcal{F}^{\mathcal{V}}$ com $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. Seja o conjunto de índices $\mathbb{N} \times \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ com a seguinte relação:

$$(n, f) \succeq (m, g) \iff n \geq m \text{ e } f(k) \subset g(k), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pela Proposição 1.4 temos que o conjunto $\mathbb{N} \times \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ é um conjunto dirigido. Como a família $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_4, dados $F \in \mathcal{F}$ e $s \in \mathcal{S}$, existe $F' \in \mathcal{F}$ tal que $F' \subset sF$. Assim, pelo fato de $x \in \omega(B, \mathcal{F})$, temos que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\emptyset \neq F'B \cap \mathrm{B}\left(x, \frac{1}{n}\right) \subset sFB \cap \mathrm{B}\left(x, \frac{1}{n}\right).$$

Tome $sy_{n,F} \in sFB \cap \mathrm{B}\left(x, \frac{1}{n}\right)$, com $y_{n,F} \in FB$. Para cada $(n, f) \in \mathbb{N} \times \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, denotemos $y_{(n,f)} = y_{n,f(n)}$. Assim,

$$9 - sy_{(n,f)} \in sf(n)B \cap \mathrm{B}\left(x, \frac{1}{n}\right),$$

onde $y_{(n,f)} \in f(n)B$. Logo, podemos escrever

$$y_{(n,f)} = t_{(n,f)}x_{(n,f)},$$

onde $t_{(n,f)} \in f(n)$ e $x_{(n,f)} \in B$. Agora, dado $F \in \mathcal{F}$, definimos $f_F \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ por $f_F(n) = F$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para todo $(n, f) \succeq (1, f_F)$, temos que

$$f(n) \subset f_F(n) = F,$$

ou seja, $t_{(n,f)} \in F, \forall\,(n,f) \succeq (1, f_F)$. Considere a rede $\left(t_{(n,f)}x_{(n,f)}\right) \subset X$. Como $(\mathcal{S}, X, \mu)$ é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta, tome, se necessário, a subrede da rede $\left(t_{(n,f)}x_{(n,f)}\right)$ tal que $t_{(n,f)}x_{(n,f)} \longrightarrow y \in X$. Logo, dada uma vizinhança aberta U de y, existe $(n_0, f_0) \in \mathbb{N} \times \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ tal que $t_{(n,f)}x_{(n,f)} \in U$, para todo $(n,f) \succeq (n_0, f_0)$. Como $\mathcal{F}$ é base de filtro sobre $\mathcal{S}$, dado $F \in \mathcal{F}$ e $n \in \mathbb{N}$, existe $F_n \in \mathcal{F}$ tal que

$$F_n \subset F \cap f_0(n).$$

Definimos a aplicação $g_F \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ dada por

$$g_F(n) = F_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $g_F(n) \subset f_0(n)$, ou seja, $(n, g_F) \succeq (n, f_0)$. Assim, para todo $(n,f) \succeq (n_0, g_F) \succeq (n_0, f_0)$

$$t_{(n,f)}x_{(n,f)} \in U \cap f(n)\,B \subset U \cap g_F(n)\,B = U \cap F_nB \subset U \cap FB.$$

Portanto, $y \in \overline{FB}$. Como $F \in \mathcal{F}$ é arbitrário, segue que $y \in \omega(B, \mathcal{F})$. Finalmente, dado uma vizinhança aberta W de x, temos que

$$st_{(n,f)}x_{(n,f)} \in sf(n)\,B \cap \mathrm{B}\left(x, \frac{1}{n}\right) \subset W,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $\mathrm{B}\left(x, \frac{1}{n}\right) \subset W$, donde $st_{(n,f)}x_{(n,f)} \longrightarrow x$. Mas, pela continuidade da aplicação $\mu_s : X \to X$, segue que

$$st_{(n,f)}x_{(n,f)} \longrightarrow sy.$$

Pela unicidade de limite, segue que $x = sy \in s\omega(B, \mathcal{F})$. Portanto, $\omega(B, \mathcal{F}) \subset s\omega(B, \mathcal{F})$, de onde segue a invariância do conjunto $\omega(B, \mathcal{F})$. □

Proposição 3.24 *Seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de $\mathcal{S}$ tal que FC é conexo, para todo subconjunto conexo C de X e para todo $F \in \mathcal{F}$. Se $(\mathcal{S}, X, \mu)$ é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta e se existe $C \supset B$ conexo que é $\mathcal{F}$-atraído por $\omega(B, \mathcal{F})$, para $B \subset X$ limitado, então $\omega(B, \mathcal{F})$ é conexo.*

Demonstração: Suponha que existe um subconjunto $C \supset B$ conexo $\mathcal{F}$-atraído por $\omega(B,\mathcal{F})$ e $\omega(B,\mathcal{F})$ desconexo. Assim, podemos escrever

$$\omega(B,\mathcal{F}) = K_1 \cup K_2,$$

onde K_1 e K_2 são subcojuntos fechados, disjuntos e não vazios. Pela Proposição 3.21 $\omega(B,\mathcal{F})$ é compacto, então temos que K_1 e K_2 são compactos. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $\mathrm{d}(K_1, K_2) = \delta$. Como $\omega(B,\mathcal{F})$ $\mathcal{F}$-atrai C, dado $\epsilon = \frac{\delta}{2} > 0$, existe $F_0 \in \mathcal{F}$ tal que

$$F_0 C \subset \mathrm{B}\left(\omega(B,\mathcal{F}), \frac{\delta}{2}\right) = \mathrm{B}\left(K_1, \frac{\delta}{2}\right) \cup \mathrm{B}\left(K_2 \frac{\delta}{2}\right).$$

Por hipótese, $F_0 C$ é conexo e como $\mathrm{d}(K_1, K_2) = \delta$, temos que $\mathrm{B}\left(K_1, \frac{\delta}{2}\right)$ e $\mathrm{B}\left(K_2, \frac{\delta}{2}\right)$ são conjuntos abertos disjuntos. Logo, $F_0 C \subset \mathrm{B}\left(K_1, \frac{\delta}{2}\right)$ ou $F_0 C \subset \mathrm{B}\left(K_2, \frac{\delta}{2}\right)$. Suponha que $F_0 C \subset \mathrm{B}\left(K_1, \frac{\delta}{2}\right)$. Assim,

$$K_2 \subset \omega(B,\mathcal{F}) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{FB} \subset \overline{F_0 B} \subset \overline{F_0 C} \subset \mathrm{B}\left(K_1, \frac{\delta}{2}\right),$$

ou seja, $\mathrm{d}(K_1, K_2) \leq \frac{\delta}{2}$, o que é um absurdo. Portanto, $\omega(B,\mathcal{F})$ é conexo. $\square$

Proposição 3.25 *Seja A um subconjunto fechado e invariante de X. Então,*

$$\omega(A,\mathcal{F}) = A.$$

Demonstração: Como A é invariante e fechado, temos

$$\omega(A,\mathcal{F}) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{FA} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{A} = A.$$

$\square$

Note que na Proposição 3.25, se retirarmos a hipótese de A ser fechado, temos somente a inclusão $A \subset \omega(A,\mathcal{F})$.

Exemplo 3.17 *Voltando ao Exemplo 3.14, temos que dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\omega((x,y),\mathcal{G})$ é invariante pela ação de $\mathcal{S}$. De fato, se $y > 0$,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}\omega((x,y),\mathcal{G}) &= \left\{\left(a^s z, a^t w\right) \in \mathbb{R}^2; (s,t) \in \mathcal{S} \text{ e } (z,w) \in \omega((x,y),\mathcal{G})\right\} \\
&= \left\{\left(0, a^t w\right) \in \mathbb{R}^2; t \geq 0 \text{ e } w \in [0,y]\right\} \\
&= \{0\} \times [0,y] \\
&= \omega((x,y),\mathcal{G}).
\end{aligned}$$

Analogamente, se $y < 0$, temos que

$$\mathcal{S}\omega((x,y),\mathcal{G}) = \{0\} \times [y,0] = \omega((x,y),\mathcal{G}).$$

E para $(x,y) = (0,0)$, como $\omega((0,0),\mathcal{G}) = \{(0,0)\}$, temos que

$$\mathcal{S}\omega((0,0),\mathcal{G}) = \{(0,0)\} = \omega((0,0),\mathcal{G}).$$

Portanto, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, o seu conjunto ω-limite é invariante. Como $\omega((x,y),\mathcal{G})$ é compacto, em particular é limitado, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, se $\mathcal{A}$ é um $\mathcal{G}$-atrator global, pelo Teorema 3.7, temos que

$$\bigcup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \omega((x,y),\mathcal{G}) \subset \mathcal{A}.$$

Mas, $\displaystyle\bigcup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \omega((x,y),\mathcal{G}) = \{0\} \times \mathbb{R}$, então

$$\{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathcal{A},$$

o que contradiz o fato de $\mathcal{A}$ ser compacto. Portanto, a ação de $\mathcal{S}$ não possui $\mathcal{G}$-atrator global.

Exemplo 3.18 *Seja o semigrupo $\mathcal{S}$ e a ação dados no Exemplo 3.4. Considere a família*

$$\mathcal{F}_{trans} = \{\mathcal{S} + (s,t); (s,t) \in \mathcal{S}\}.$$

Temos que para todo $F \in \mathcal{F}_{trans}$, existe $A_r \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset A_r$, onde $\mathcal{F}$ é a família dada no Exemplo 3.4. De fato, seja $F \in \mathcal{F}_{trans}$, então podemos escrever $F = \mathcal{S} + (s,t)$, para algum $(s,t) \in \mathcal{S}$. Tome $r = \min\{s,t\}$. Logo, se $(s',t') \in F$, temos que $s' \geq s \geq r$ e $t' \geq t \geq r$, ou seja, $(s',t') \in A_r$. Assim,

$$\overline{F(x,y)} \subset \overline{A_r(x,y)},$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Portanto,

$$\omega((x,y), \mathcal{F}_{trans}) \subset \omega((x,y), \mathcal{F}) = \{(0,0)\}. \tag{3.5}$$

Agora, temos que a ação de $\mathcal{S}$ é $\mathcal{F}_{trans}$-assintoticamente compacta. Com efeito, consideremos as sequências $(s_n,t_n) \subset \mathcal{S}$ com $(s_n,t_n) \longrightarrow_{\mathcal{F}_{trans}} \infty$ e $(x_n,y_n) \subset \mathbb{R}^2$ limitada. Então, existe uma subsequência (x_{n_k}, y_{n_k}) que converge para um ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Como $(s_n,t_n) \longrightarrow_{\mathcal{F}_{trans}} \infty$, dado $F = \mathcal{S} + (s,t)$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(s_n,t_n) \in F$, para todo $n \geq n_0$. Assim, se $s \longrightarrow +\infty$ e $t \longrightarrow +\infty$, temos que $(a^{s_n}, a^{t_n}) \longrightarrow (0,0)$, donde $(a^{s_{n_k}} x_{n_k}, a^{t_{n_k}} x_{n_k}) \longrightarrow (0,0)$ concluindo a afirmação. Pela Proposição 3.21, temos que $\omega((x,y), \mathcal{F}_{trans}) \neq \emptyset$ e por 3.5 segue que $\omega((x,y), \mathcal{F}_{trans}) = \{(0,0)\}$.

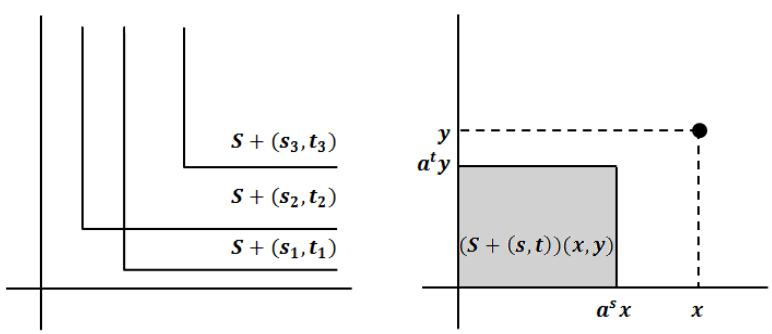


Figura 3.4: Base de filtro $\mathcal{F}_{trans}$ e semiórbita $(\mathcal{S} + (s,t))(x,y)$

3.3 Existência de Atrator Global para Ações de Semigrupos

De modo análogo ao Capítulo anterior, vamos estabelecer condições para que exista atrator global para ações de semigrupos. O teorema que segue é análogo ao Teorema 2.26, a menos da condição de invariância do conjunto ω-limite dos subconjuntos limitados.

Teorema 3.26 *Sejam $\mathcal{S}$ um semigrupo e $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de $\mathcal{S}$ tal que $\omega(B,\mathcal{F})$ seja invariante, para todo subconjunto limitado B de X. Então, a ação de $\mathcal{S}$ possui um $\mathcal{F}$-atrator global $\mathcal{A}$ se, e somente se, $(\mathcal{S},X,\mu)$ é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta e $\mathcal{F}$-limitada dissipativa. Em caso afirmativo, se $\mathcal{B}$ é coleção de todos subconjuntos limitados e não vazios de X, então*

$$\mathcal{A}=\bigcup_{B\in\mathcal{B}}\omega(B,\mathcal{F}).$$

Demonstração: Suponha que $\mathcal{S}$ possui um atrator global $\mathcal{A}$. Temos que $(\mathcal{S},X,\mu)$ é $\mathcal{F}$-limitada dissipativa, pela Proposição 3.13. Assim, basta provar que a ação de S é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta. Seja $(x_\lambda)\subset X$ uma rede limitada e $(t_\lambda)\subset\mathcal{S}$ satisfazendo $t_\lambda\longrightarrow_{\mathcal{F}}\infty$. Considere o conjunto limitado $B=\{x_\lambda\in X;\ \lambda\in\Lambda\}$. Como $\mathcal{A}$ é $\mathcal{F}$-atrator global, dado $\epsilon>0$ existe $F\in\mathcal{F}$ tal que $FB\subset \mathrm{B}(\mathcal{A},\epsilon)$. Assim, para todo $t\in F$ e para todo $x\in B$, temos $\mathrm{d}(tx,\mathcal{A})<\epsilon$. Como $t_\lambda\longrightarrow_{\mathcal{F}}\infty$, para este $F\in\mathcal{F}$, existe $\lambda_0\in\Lambda$ tal que $t_\lambda\in F$, para todo $\lambda\succeq\lambda_0$. Logo, $\mathrm{d}(t_{\lambda_0}x_{\lambda_0},\mathcal{A})<\epsilon$. Assim, para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $\lambda_n\in\Lambda$ tal que

$$\mathrm{d}(t_{\lambda_n}x_{\lambda_n},z_{\lambda_n})<\frac{1}{n}. \tag{3.6}$$

Pela compacidade de $\mathcal{A}$, tome, se necessário, a subsequência $(z_{\lambda_n})\subset\mathcal{A}$ tal que $z_{\lambda_n}\longrightarrow x\in\mathcal{A}$. Logo, pela desigualdade 3.6,

$$\mathrm{d}(t_{\lambda_n}x_{\lambda_n},x)\leq\mathrm{d}(t_{\lambda_n}x_{\lambda_n},z_{\lambda_n})+\mathrm{d}(z_{\lambda_n},x)<\frac{1}{n}+\mathrm{d}(z_{n_k},x).$$

Tomando $k \longrightarrow +\infty$ temos que $t_{\lambda_n}x_{\lambda_n} \longrightarrow x$, isto é, a rede $(t_\lambda x_\lambda)$ possui subsequência convergente. Portanto, a ação de $\mathcal{S}$ é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta.

Reciprocamente, suponha que a ação de $\mathcal{S}$ é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta e $\mathcal{F}$-limitada dissipativa. Seja $\mathcal{B}$ uma coleção de todos os subconjuntos limitados e não vazios de X. Definamos o conjunto

$$\mathcal{A} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \omega(B, \mathcal{F}).$$

Como $(\mathcal{S}, X, \mu)$ é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta, pela Proposição 3.21 temos que $\omega(B, \mathcal{F})$ é não vazio, compacto e $\mathcal{F}$-atrai B, para todo $B \in \mathcal{B}$. Por hipótese, $\omega(B, \mathcal{F})$ é invariante e segue pela Proposição 3.3 que o conjunto $\mathcal{A}$ é não vazio, invariante e $\mathcal{F}$-atrai B, para todo $B \in \mathcal{B}$. Mostremos que $\mathcal{A}$ é compacto. Com efeito, como a ação de $\mathcal{S}$ é $\mathcal{F}$-limitada dissipativa, existe $D' \subset X$ limitado que $\mathcal{F}$-atrai cada subconjunto $B \in \mathcal{B}$. Tome, se necessário, $D = \overline{D'}$ conjunto fechado. Pela Proposição 3.22, temos que $\omega(B, \mathcal{F})$ é menor fechado que $\mathcal{F}$-atrai B, logo segue que $\omega(B, \mathcal{F}) \subset D$, para todo $B \in \mathcal{B}$. Logo, $\mathcal{A} \subset D$ e, portanto $\omega(\mathcal{A}, \mathcal{F}) \subset \omega(D, \mathcal{F})$. Como $\mathcal{A}$ é invariante, temos que

$$\mathcal{A} \subset \omega(\mathcal{A}, \mathcal{F}) \subset \omega(D, \mathcal{F}).$$

Mas, D é um subconjunto limitado, logo, $\omega(D, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$. Assim, temos a igualdade $\mathcal{A} = \omega(D, \mathcal{F})$. Como $\omega(D, \mathcal{F})$ é compacto, pela Proposição 3.21, segue que $\mathcal{A}$ é compacto. □

Corolário 3.27 *Sejam $\mathcal{S}$ semigrupo e $\mathcal{F}$ uma base de filtro de subconjuntos de $\mathcal{S}$ satisfazendo a hipótese H_3 e H_4 tal que $\omega(B, \mathcal{F})$ é invariante, para todo subconjunto limitado B de X. Se a ação de $\mathcal{S}$ é eventualmente compacta, $\mathcal{F}$-eventualmente limitada e $\mathcal{F}$-ponto dissipativa, então existe $\mathcal{F}$-atrator global para a ação de $\mathcal{S}$.*

Demonstração: Primeiramente, como $(\mathcal{S}, X, \mu)$ é eventualmente compacta e $\mathcal{F}$-eventualmente limitada, pela Proposição 3.20 temos que a ação de $\mathcal{S}$ é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta.

Assim, basta provarmos que a ação é $\mathcal{F}$-limitada dissipativa. Por hipótese, $(\mathcal{S}, X, \mu)$ é $\mathcal{F}$-ponto dissipativa, então existe um subconjunto D_0 limitado de X que $\mathcal{F}$-absorve todo ponto $x \in X$. Agora, dado $\epsilon > 0$ definimos o conjunto limitado $D_1 = \mathrm{B}(D_0, \epsilon)$. A ação de $\mathcal{S}$ é $\mathcal{F}$-eventualmente limitada, então para este conjunto limitado D_1, existe $F^* \in \mathcal{F}$ tal que o conjunto

$$D = F^* D_1$$

é limitado. Afirmamos que o subconjunto limitado D $\mathcal{F}$-absorve cada subconjunto limitado B de X. Com efeito, considere o conjunto compacto $K \subset X$. Para cada $x \in K$, existe $F_x \in \mathcal{F}$ tal que

$$F_x x \in D_0 \subset D_1.$$

Seja $t_x \in F_x$. Note que D_1 é aberto e a aplicação $\mu_{t_x} : X \to X$ é contínua, então existe $\delta_x > 0$ tal que

$$t_x \mathrm{B}(x, \delta_x) \subset D_1.$$

Como a família $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_3, dados $t_x \in \mathcal{S}$ e $F^* \in \mathcal{F}$, existe $F'_x \in \mathcal{F}$ tal que $F'_x \subset F^* t_x$. Assim,

$$F'_x \mathrm{B}(x, \delta_x) \subset F^* t_x \mathrm{B}(x, \delta_x) \subset F^* D_1 = D$$

Considere a cobertura aberta $\{\mathrm{B}(x, \delta_x)\}_{x \in K}$ de K. Pela compacidade de K, existem $x_1, ..., x_n \in K$ tais que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{B}\left(x_j, \delta_{x_j}\right).$$

Como $\mathcal{F}$ é base de filtro, tome $F' \in \mathcal{F}$ tal que $F' \subset F'_{x_1}$, $F' \subset F'_{x_2}, ..., F' \subset F'_{x_n}$. Logo,

$$F'K \subset F' \left(\bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{B}\left(x_j, \delta_{x_j}\right) \right) = \bigcup_{j=1}^{n} F'\mathrm{B}\left(x_j, \delta_{x_j}\right) \subset \bigcup_{j=1}^{n} F'_{x_j} \mathrm{B}\left(x_j, \delta_{x_j}\right) \subset D \tag{3.7}$$

Por fim, como a ação de $\mathcal{S}$ é eventualmente compacta, existe $t_0 \in \mathcal{S}$ tal que $K = \overline{t_0 B}$ é compacto, para todo $B \subset X$ limitado. Logo, pela inclusão 3.7

$$F' t_0 B \subset F'K \subset D.$$

Novamente pelo fato de $\mathcal{F}$ satisfazer a hipótese H_3, dados $t_0 \in \mathcal{S}$ e $F' \in \mathcal{F}$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset F't_0$. Logo,

$$FB \subset F't_0B \subset D.$$

Portanto, o conjunto D $\mathcal{F}$-absorve todo subconjunto limitado B de X, ou seja $(\mathcal{S}, X, \mu)$ é $\mathcal{F}$-limitada dissipativa. Pelo Teorema 3.26, temos o resultado desejado. $\square$

Exemplo 3.19 *Considere o gupo*

$$\mathcal{S} = \{g \in GL\left(n, \mathbb{R}\right); \det g > 0,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\}$$

com a ação

$$\begin{array}{rccc} \mu: & \mathcal{S} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (g, x) & \longmapsto & gx \end{array}$$

Considere a família $\mathcal{F}$ dada no Exemplo 3.9. Temos que

$$\omega\left(\left(0, ..., 0\right), \mathcal{F}\right) = \left(0, ..., 0\right) \text{ e } \omega\left(x, \mathcal{F}\right) = \mathbb{R}^n \backslash \left\{(0, ..., 0)\right\},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n \backslash \left\{(0, ..., 0)\right\}$. Com efeito, a primeira igualdade é imediata. Agora, seja $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \left\{(0, ..., 0)\right\}$ e $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \left\{(0, ..., 0)\right\}$. Como $x \neq 0$, existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $x_i \neq 0$. Tome a matriz

$$g_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \frac{z_1 - x_1}{x_i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{z_2 - x_2}{x_i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{z_i}{x_i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{z_{i+1} - d_m x_{i+1}}{x_i} & d_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{z_n - x_n}{x_i} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que $\det g_m = d_m \det g_{i+1\ i+1} \neq 0$*, onde $g_{i+1\ i+1}$ é a matriz obtida de g_m retirando-se a $i+1$-ésima linha e $i+1$-ésima coluna. Assim, tome a sequência real (d_m) de modo* *que*

$$\begin{cases} (d_m) \subset \mathbb{R}_+ \text{ com } d_m \longrightarrow +\infty, \text{ se } \det g_{i+1\ i+1} > 0 \\ (d_m) \subset \mathbb{R}_- \text{ com } d_m \longrightarrow -\infty, \text{ se } \det g_{i+1\ i+1} < 0 \end{cases}$$

Logo, $\det g_m > 0$ *e* $g_m \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$. *Além disso,* $g_m x = z$, *para todo* $m \in \mathbb{N}$, *donde* $g_m x \longrightarrow z$. *Portanto,* $\omega(x, \mathcal{F}) = \mathbb{R}^n \backslash \{(0, ..., 0)\}$. *Usando mesmo raciocínio, podemos provar que* $\mathcal{S}x = \mathbb{R}^n \backslash \{(0, ..., 0)\}$, *para todo* $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{(0, ..., 0)\}$. *Além disso, temos que não existe* $\mathcal{F}$*-atrator global para ação de semigrupo* $\mathcal{S}$. *Com efeito, dado* $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{(0, ..., 0)\}$, *se existe* $\mathcal{F}$*-atrator global* $\mathcal{A}$, *então dado* $\epsilon > 0$ *existe* $r > 0$ *tal que*

$$A_r x \subset \mathrm{B}(\mathcal{A}, \epsilon).$$

Mas,

$$\mathbb{R}^n \backslash \{(0, ..., 0)\} = \omega(x, \mathcal{F}) = \bigcap_{r>0} \overline{A_r x} \subset \overline{A_r x} \subset \overline{\mathrm{B}(\mathcal{A}, \epsilon)},$$

o que é um absurdo, uma vez que $\mathcal{A}$ *é compacto. Isso ocorre pelo fato de a ação de* $\mathcal{S}$ *não ser* $\mathcal{F}$*-assintoticamente compacta. De fato, seja a matriz*

$$g_m = \begin{pmatrix} m & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m \end{pmatrix},$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. *Temos que* $\det g_m = m^n > 0$ *e* $g_m \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$. *Seja* x_m *uma sequência limitada. Temos que* $g_m x_m = (m x_1^m, ..., m x_n^m)$ *não possui subsequência convergente. Este fato nos mostra que a hipótese da ação ser* $\mathcal{F}$*-assintoticamente compacta é essencial para o Teorema 3.26.*

Exemplo 3.20 *Considere agora o grupo do Exemplo 3.19, porém com* $n = 1$. *Assim, temos*

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{g \in GL(1, \mathbb{R}) ;\ \det g > 0\} \\ &= \{g \in \mathbb{R};\ g > 0\} = \mathbb{R}_+^*. \end{aligned}$$

Neste caso, a ação é dada por

$$\begin{array}{rccc} \mu: & \mathcal{S}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (g,x) & \longmapsto & gx \end{array}$$

Para cada $r>0$*, definimos o conjunto* $A_r=\{g\in\mathcal{S};\ g\geq r\}=[r,+\infty)$. *Considere a família* $\mathcal{F}=\{A_r;\ r>0\}=\{[r,+\infty);r>0\}$. *Seja* $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. *Note que não existem* (x_n) *em* $\mathbb{R}$ *e* (g_n) *em* $\mathcal{S}$ *com* $g_n\longrightarrow_{\mathcal{F}}\infty$ *tais que* $g_nx_n\longrightarrow x$*, pois* $g_n\longrightarrow+\infty$*. Assim, temos*

$$\begin{cases} \omega(0,\mathcal{F})=0 \\ \omega(x,\mathcal{F})=\emptyset \end{cases}$$

3.4 Sistemas de Controle

Nesta seção, vamos desenvolver os conceitos abordados neste capítulo, em especial para sistemas de controle.

Definição 3.28 *Um **sistema de controle** sobre uma variedade diferenciável* M *consiste de uma família de equações diferenciais*

$$\dot{x}=X(x,u(t)), \tag{$*$}$$

onde $x\in M$ *e* $u\in\mathcal{U}=\{u:\mathbb{R}\longrightarrow U\subset\mathbb{R}^n\}$ *é uma função de controle admissível. Dizemos que* U *é **conjunto de controle**.*

Aqui, assumimos que para cada $u\in\mathcal{U}$ e $x_0\in M$, a equação $\dot{x}=X(x,u(t))$ admite uma única solução $\varphi(t,x_0,u)$ satisfazendo $\varphi(0,x_0,u)=x_0$. Temos também que essa solução satisfaz a propriedade de cociclo, isto é,

$$\varphi(t+s,x_0,u)=\varphi(t,\varphi(s,x_0,u),u\cdot s),$$

onde $u\cdot s(\tau)=u(s+\tau)$.

Note que, cada função de controle $u(t)$ determina uma equação diferencial não-autônoma

$$\dot{x} = X_{u(t)}(x) = X(x, u(t)).$$

Assim, as diferentes funções de controle dão origem às diferentes trajetórias do sistema.

Definição 3.29 *Sejam $u_1, u_2 \in U$ e $s \in \mathbb{R}$. Uma s-**concatenação** de u_1 e u_2 é a função*

$$\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{R} & \longrightarrow & U \\ & t & \longmapsto & u(t) = \left\{ \begin{array}{c} u_1(t); t < s \\ u_2(t-s); t \geq s \end{array} \right. \end{array}$$

Na teoria geométrica de controle, em geral, são consideradas as funções de controle constantes por partes. Definamos $\mathcal{U}_{cp} = \{u : \mathbb{R} \longrightarrow U;\ u \text{ é constante por partes}\}$. Logo, pode-se mostrar que as trajetórias do sistema de controle passam a ser concatenações das trajetórias de equações autônomas.

Assumamos também que os campos de vetores $X_u = X(\cdot, u)$, $u \in U$, são completos. Assim, considere o conjunto $\mathcal{V} = \{X_u; u \in U\}$, de campos de vetores completos. As trajetórias do sistema $(*)$ são concatenações de trajetórias dos campos de vetores em $\mathcal{V}$. Assim, o sistema $(*)$ é determinado pela família de campos de vetores $\mathcal{V}$. A cada campo $X_u \in \mathcal{V}$ e $t \in \mathbb{R}$, corresponde um difeomorfismo $\varphi_t^u : M \longrightarrow M$ definida por $\varphi_t^u(x) = \varphi^u(t, x)$ satisfazendo $\varphi_0^u = Id$ e $\varphi_{s+t}^u = \varphi_s^u \circ \varphi_t^u$.

Exemplo 3.21 *Seja $\{X, Y\}$ os campos de vetores definidas por*

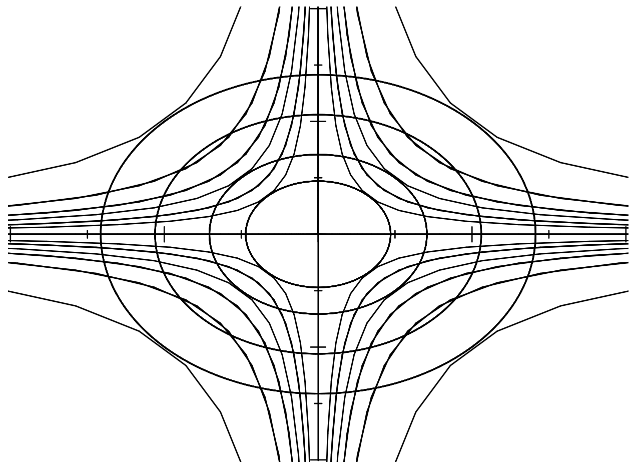
$$X(x) = X(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2),\ \lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

$$Y(x) = Y(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$$

apresendados no Exemplo2.5 e Exemplo 2.6, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. As trajetórias da equação

$$\dot{x} = X(x_1, x_2) + u(t) Y(x_1, x_2)$$

onde $u \in \mathcal{U}_{cp} = \{u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ u \text{ é constante por partes}\}$, são as concatenações das trajetórias das equações $\dot{x} = X(x_1, x_2)$ e $\dot{x} = u(t) Y(x_1, x_2)$.



Exemplo de concatenações das trajetórias

O nosso interesse é tomar concatenações de trajetórias do campo em $\mathcal{V}$, isto é, tomar as possíveis composições de φ_t^u. Assim, definimos o conjunto de todas as composições possíveis entre esses difeomorfismos.

Definição 3.30 *Seja $\mathcal{V}$ a família de campos de vetores definida anteriormente. Definimos os conjuntos*

$$\mathcal{G}_{\mathcal{V}} = \left\{ \varphi_{t_n}^{u_n} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}^{u_1};\ t_i \in \mathbb{R},\ u_i \in U,\ k \in \mathbb{N} \right\}$$

e

$$\mathcal{S}_{\mathcal{V}} = \left\{ \varphi_{t_n}^{u_n} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}^{u_1};\ t_i \geq 0,\ u_i \in U,\ k \in \mathbb{N} \right\}$$

*chamados, respectivamente de **grupo do sistema** e **semigrupo do sistema**.*

Agora, vamos estudar o comportamento assintótico de um sistema de controle. Seja $T > 0$. Considere o conjunto

$$\mathcal{S}_{\geq T} = \left\{ \varphi_{t_n}^{u_n} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}^{u_1};\ t_i \geq 0,\ u_i \in U,\ \sum_{i=1}^{n} t_i \geq T,\, k \in \mathbb{N} \right\}$$

e definamos a família

$$\mathcal{F}_{ctr} = \left\{ \mathcal{S}_{\geq T}; T > 0 \right\}.$$

Temos que $\mathcal{F}_{ctr}$ é uma base de filtro sobre $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$, pois dados $T_1, T_2 > 0$, vale a inclusão

$$\mathcal{S}_{\geq T_1+T_2} \subset \mathcal{S}_{\geq T_1} \cap \mathcal{S}_{\geq T_2}.$$

Essa base de filtro é utilizada para estudar o comportamento assintótico do sistema de controle e pode ser encontrada em [5], [6], [8], [9], [25] e [26]. A família $\mathcal{F}_{ctr}$ satisfaz as hipóteses H_1 e H_2, mas, em geral, não satisfazem as hipóteses H_3 e H_4. No entanto, existem sistemas de controle onde $\mathcal{F}_{ctr}$ também satisfaz as hipóteses H_3 e H_4 (veja [9] e [25]).

A notação dada na Definição 3.15, pode ser utilizada na teoria de sistemas de controle. Temos que $\varphi(t_\lambda, x_\lambda, u_\lambda) \longrightarrow_{\mathcal{F}_{ctr}} \infty$ siginifica $t_\lambda \longrightarrow +\infty$. Com efeito, se $\varphi(t_\lambda, x_\lambda, u_\lambda) \longrightarrow_{\mathcal{F}_{ctr}} \infty$, então dado $T > 0$, existe λ_0 tal que $\varphi(t_\lambda, x_\lambda, t_\lambda) \in S_{\geq T}$, para todo $\lambda \succeq \lambda_0$, ou seja, $t_\lambda \geq T$. Logo, $t_\lambda \longrightarrow +\infty$. Assim podemos definir o conjunto ω-limite de um subconjunto B de M, a saber:

$$\omega(B, \mathcal{F}_{ctr}) = \left\{ \begin{array}{c} x \in M;\ \text{Existem sequências } t_n \longrightarrow +\infty,\ (x_n) \subset B \text{ e } (u_n) \subset \mathcal{U}_{cp} \\ \text{tais que } \varphi(t_n, x_n, u_n) \longrightarrow x \end{array} \right\}.$$

O subconjunto $A \subset M$ **atrai** $B \subset M$ se dado $\epsilon > 0$, existe $\tau > 0$ tal que $\mathrm{d}(\varphi(t, b, u), A) < \epsilon$, para todo $t \geq \tau$, $b \in B$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$. Dizemos que o sistema de controle é $\mathcal{F}_{ctr}$**-eventualmente limitado** se para cada subconjunto limitado B de M, existe $T > 0$ tal que $\mathcal{S}_{\geq T}B$ é um conjunto limitado, isto é, existe $x_0 \in M$ e $K > 0$ tal que $d(\varphi(t, b, u), x_0) < K$, para todo $t \geq T$, $b \in B$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$. Agora, o conjunto $D \subset M$ **absorve** o conjunto $B \subset M$ se existe $T > 0$ tal que $\mathcal{S}_{\geq T}B \subset D$. Assim, o sistema de controle é $\mathcal{F}_{ctr}$**-limitado dissipativo** se existe um subconjunto D de M limitado que absorve todo subconjunto limitado de M. Por fim, o sistema de controle é $\mathcal{F}_{ctr}$**-assintoticamente compacto** se para toda sequência $(x_n) \subset M$, $(u_n) \subset U_{cp}$ e $t_n \longrightarrow +\infty$, a sequência $(\varphi(t_n, x_n, u_n))$ possui subsequência convergente.

Vamos analisar alguns exemplos de atratores globais para sistema de controle.

Exemplo 3.22 *Considere o sistema de controle sobre* $\mathbb{R}^2$

$$x' = X(x(t), u(t)) = u(t)\, x(t),$$

onde $u \in \mathcal{U}_{cp} = \{u : \mathbb{R} \to [-2,-1];\ u$ *é constante por partes*$\}$ *com conjunto de controle* $U = [-2,-1]$. *Para cada* $u \in U$ *e* $x \in \mathbb{R}^2$, *a trajetória do campo de vetores* X_u *é dada por*

$$\varphi_x^u(t) = \mathrm{e}^{ut}x.$$

Consideremos o semigrupo do sistema

$$\mathcal{S} = \left\{\mathrm{e}^{u_n t_n} ... \mathrm{e}^{u_1 t_1};\ u_i \in U, t_i \geq 0, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Considere a base de filtro $\mathcal{F}_{ctr}$. *Temos que* $\mathcal{F}_{ctr}$ *satisfaz todas as hipóteses* H_1, H_2, H_3 *e* H_4. *Além disso,* $\mathcal{A} = \{(0,0)\}$ *é* $\mathcal{F}_{ctr}$*-atrator global. Com efeito, é imediato que* $\mathcal{A}$ *é não vazio, compacto e invariante. Assim, basta mostrar que atrai cada subconjunto limitado de* $\mathbb{R}^2$. *Seja* B *um subconjunto limitado de* $\mathbb{R}^2$. *Dado* $\epsilon > 0$, *queremos mostrar que existe* $T > 0$ *tal que*

$$\mathcal{S}_{\geq T}B \subset B(\mathcal{A}, \epsilon)$$

Como B *é limitado, existe* $M > 0$ *tal que* $\|x\| \leq M$, *para todo* $x \in \mathbb{R}^2$. *Tome* $T > 0$ *tal que*

$$T > \ln \frac{M}{\epsilon}.$$

Seja $x \in B$ *e* $\mathrm{e}^{u_n t_n} ... \mathrm{e}^{u_1 t_1} \in \mathcal{S}_{\geq T}$. *Então,* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i \geq T$ *e* $u_i \leq -1$. *Assim,*

$$\begin{aligned}
\left\|\mathrm{e}^{u_n t_n} ... \mathrm{e}^{u_1 t_1} x\right\| &= \mathrm{e}^{u_n t_n} ... \mathrm{e}^{u_1 t_1} \|x\| \\
&\leq \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^{n} t_i} M \leq \mathrm{e}^{-T} M \\
&< \mathrm{e}^{-\ln \frac{M}{\epsilon}} M = \mathrm{e}^{\ln \frac{\epsilon}{M}} M \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, *existe* $T > \ln \frac{M}{\epsilon}$ *tal que*

$$\mathcal{S}_{\geq T}B \subset B(\mathcal{A}, \epsilon).$$

Portanto, $\mathcal{A} = \{(0,0)\}$ é $\mathcal{F}_{ctr}$-atrator global.

Exemplo 3.23 *Considere o sistema de controle*

$$x'(t) = X(x(t), u(t)) = X_0(x(t)) + u(t) X_1(x(t)),$$

onde $u \in \mathcal{U}_{cp} = \{u : \mathbb{R} \longrightarrow [1,2]\,;\ u \text{ é constante por partes}\}$ sobre $X = \mathbb{R}^2$, com o conjunto de controle $U = [1,2]$,

$$X_0(x,y) = (y, -x) \ \text{ e } X_1(x,y) = \left(x - xy^2 - x^3, y - yx^2 - y^3\right)$$

são campos de vetores em $\mathbb{R}^2$. Considere as coordenadas polares $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\theta$. Então, para cada $u \in U$ e (r,θ), $r > 0$, a trajetória sobre o campo de vetor X_u é dada por

$$\begin{aligned}
\varphi(t,(r,\theta),u) &= \left(\sqrt{1 - e^{-2ut} + \frac{e^{-2ut}}{r^2}}^{\,-1}, \theta - t\right), \text{ com } t \in \mathbb{R} \text{ se } r \in (0,1], \\
\varphi(t,(r,\theta),u) &= \left(\sqrt{1 - e^{-2ut} + \frac{e^{-2ut}}{r^2}}^{\,-1}, \theta - t\right), \text{ com } t \in (-\delta,+\infty) \text{ se } r > 1,
\end{aligned}$$

onde $\delta > 0$ depende de u e r. Seja $\mathbb{D}^1 = \{(r,\theta)\,;\ 0 \leq r \leq 1\}$ disco unitário em $\mathbb{R}^2$. É imediato que D é não vazio e compacto. E temos também que $\mathbb{D}^1$ é invariante pela ação φ_t^u, para cada $u \in U$ e $t \in \mathbb{R}$. De fato, seja (r,θ) em $\mathbb{D}^1$. Então, $\frac{1}{r^2} \geq 1$, de onde segue que

$$0 < \sqrt{1 - e^{-2ut} + \frac{e^{-2ut}}{r^2}}^{\,-1} \leq 1,$$

ou seja, $\varphi_t^u(r,\theta) \in \mathbb{D}^1$. Por outro lado, seja $(r,\theta) \in \mathbb{D}^1$ tal que

$$(r,\theta) = \left(\sqrt{1 - e^{-2ut} + \frac{e^{-2ut}}{(r')^2}}^{\,-1}, \theta' - t\right).$$

Então,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{1-e^{-2ut}+\frac{e^{-2ut}}{(r')^2}}^{-1} \\ &\Rightarrow \frac{1}{r^2}=1-e^{-2ut}+\frac{e^{-2ut}}{(r')^2} \\ &\Rightarrow (r')^2=\frac{r^2e^{-2ut}}{1-r^2+r^2e^{-2ut}} \\ &\Rightarrow r'=\sqrt{\frac{r^2e^{-2ut}}{1-r^2+r^2e^{-2ut}}}. \end{aligned}$$

Como $0\leq r\leq 1$*, temos que* $1-r^2\geq 0$*, logo*

$$0\leq\sqrt{\frac{r^2e^{-2ut}}{1-r^2+r^2e^{-2ut}}}\leq 1,$$

ou seja, $0\leq r'\leq 1$*. Portanto,* $(r,\theta)\in\varphi_t^u\left(\mathbb{D}^1\right)$*, concluindo que* $\mathbb{D}^1$ *é invariante. Considere agora o semigrupo do sistema*

$$S=\left\{\varphi_{t_n}^{u_n}\circ\cdots\circ\varphi_{t_1}^{u_1};\ u_i\in U,t_i\geq 0\right\}$$

Definimos a base de filtro $F_{ctr}=\{S_{\geq T};T>0\}$*. Efetuando alguns cálculos, temos que*

$$\varphi_{t_n}^{u_n}\circ\cdots\circ\varphi_{t_1}^{u_1}(r,\theta)=\left(\sqrt{1-e^{-2\sum u_it_i}+\frac{e^{-2\sum u_it_i}}{r^2}}^{-1},\theta-\sum t_i\right).$$

Vamos mostrar que $\mathbb{D}^1$ *atrai todo subconjunto limitado de* $\mathbb{R}^2$*. Note que precisamos apenas considerar os subconjuntos limitados de* $\mathbb{R}^2$ *fora do disco* $\mathbb{D}^1$*, uma vez que ele é invariante. Seja* $B\subset\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{D}^1$*. Então, existe* $M>0$ *tal que* $B\subset\mathrm{B}\left((0,0),M\right)$*. Queremos mostrar que dado* $\epsilon>0$*, existe* $T>0$ *tal que*

$$S_{\geq T}B\subset\mathrm{B}\left(\mathbb{D}^1,\epsilon\right).$$

Para facilitar os cálculos, vamos considerar a igualdade $\mathrm{B}\left(\mathbb{D}^1,\epsilon\right)=\mathrm{B}\left((0,0),1+\epsilon\right)$*. Então, queremos mostrar que*

$$\left\|\left(\sqrt{1-e^{-2\sum u_it_i}+\frac{e^{-2\sum u_it_i}}{r^2}}^{-1},\theta-\sum t_i\right)\right\|=\sqrt{1-e^{-2\sum u_it_i}+\frac{e^{-2\sum u_it_i}}{r^2}}^{-1}<1+\epsilon,$$

isto é,

$$1 - e^{-2\sum u_i t_i} + \frac{e^{-2\sum u_i t_i}}{r^2} > \frac{1}{(1+\epsilon)^2}.$$

Tome $T > \ln \frac{1+\epsilon}{M}\sqrt{\frac{1-M^2}{1-(1+\epsilon)^2}}$. *Então, levando em conta que* $\sum t_i \geq T$, $u_i \geq 1$ *e* $r \leq M$, *temos as desigualdades:*

$$-2\sum u_i t_i \leq -2\sum t_i,$$
$$-2\sum t_i \leq -2T$$

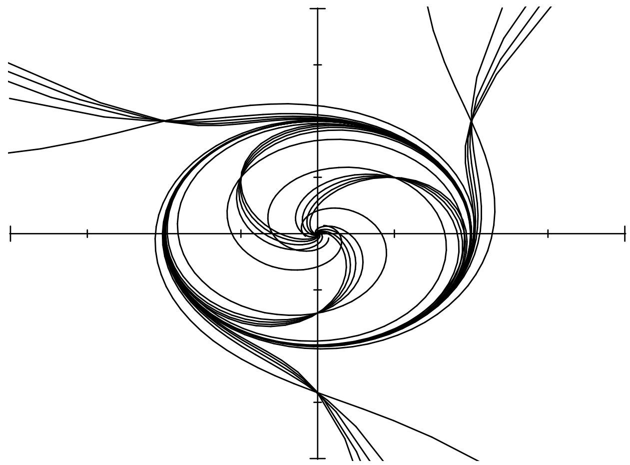
e

$$\frac{r^2-1}{r^2} \leq \frac{M^2-1}{M^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 1 - e^{-2\sum u_i t_i} + \frac{e^{-2\sum u_i t_i}}{r^2} &= 1 - e^{-2\sum u_i t_i}\left(\frac{r^2-1}{r^2}\right) \\ &\geq 1 - e^{-2\sum t_i}\left(\frac{M^2-1}{M^2}\right) \\ &\geq 1 - e^{-2T}\left(\frac{M^2-1}{M^2}\right) \\ &> 1 - \left(\frac{1+\epsilon}{M}\sqrt{\frac{1-M^2}{1-(1+\epsilon)^2}}\right)^{-2}\left(\frac{M^2-1}{M^2}\right) \\ &= \frac{1}{(1+\epsilon)^2}. \end{aligned}$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$ *existe* $T > \ln \frac{1+\epsilon}{M}\sqrt{\frac{1-M^2}{1-(1+\epsilon)^2}}$ *tal que* $S_{\geq T}B \subset \mathrm{B}(D,\epsilon)$, *ou seja,* $\mathbb{D}^1$ *atrai todo subconjunto limitado de* $\mathbb{R}^2$. *Concluindo assim que o disco fechado* $\mathbb{D}^1$ *é um* $\mathcal{F}_{ctr}$*-atrator global. A figura abaixo ilustra algumas trajetórias do sistema.*



Exemplos de trajetórias do sistema

Exemplo 3.24 *Considere $\mathcal{V} = \{X, Y\}$ o conjunto dos campos de vetores sobre disco aberto $M = B((0,0),1) \subset \mathbb{R}^2$, onde os campos $X = \{X_1, X_2\}$ e $Y = \{Y_1, Y_2\}$ são dados por*

$$X_1(x) = -x_2 + x_1 \|x\|^2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{\|x\|},$$

$$X_2(x) = x_1 + x_2 \|x\|^2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{\|x\|},$$

$$Y_1(x) = \alpha(x)\, x_1 + (\alpha(x) - \beta(x))\, x_2 + x_1 \|x\|^2 \left(\beta(x) \operatorname{sen}\frac{\pi}{\|x\|} - 4\alpha(x)\right),$$

$$Y_2(x) = \alpha(x)\, x_2 + (\beta(x) - \alpha(x))\, x_1 + x_2 \|x\|^2 \left(\beta(x) \operatorname{sen}\frac{\pi}{\|x\|} - 4a(x)\right),$$

$X(0) = Y(0) = 0$ *e* $x = (x_1, x_2) \in M$, *onde* α *e* β *são funções diferenciáveis tais que*

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1, \ se \ \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ 0, \ se \ \frac{1}{2} < \|x\| < 1 \end{cases}$$

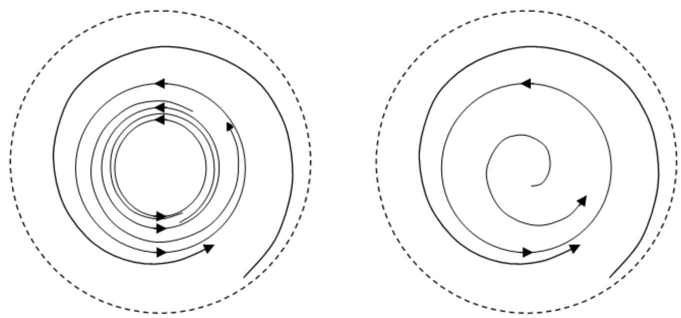
$$\beta(x) = \begin{cases} 0, \ se \ \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ 1, \ se \ \frac{1}{2} < \|x\| < 1 \end{cases}$$

Assim, para $\|x\| \leq \frac{1}{2}$, *o campo* Y *é dado por*

$$Y_1(x) = x_2 + x_1 \left(1 - 4\|x\|^2\right)$$

$$Y_2(x) = -x_1 + x_2\left(1 - 4\|x\|^2\right)$$

e para $\frac{1}{2} < \|x\| < 1$, *o campo* Y *coincide com o campo* X. *A figura à direita ilustra o campo* X *e a figura à esquerda ilustra o campo* Y.



Considere a família $\mathcal{F}_{ctr}$. *As trajetórias do sistema de controle determinada pelo* $\mathcal{V}$ *são concatenações das trajetórias dos campos de vetores* X *e* Y. *Note que o comportamento das trajetórias são semelhantes às trajetórias do sistema de controle do Exemplo 3.23. Assim, usando o mesmo argumento, temos que* $\mathcal{A} = \left\{x \in M; \|x\| \leq \frac{1}{2}\right\}$ *é invariante e atrai todos os subconjuntos limitados em* $M \backslash \mathcal{A}$. *Logo,* $\mathcal{A}$ *é* $\mathcal{F}_{ctr}$*-atrator global.*

Capítulo 4

Atrator Uniforme Global para Ações de Semigrupos

Os conceitos de prolongamento e conjunto limite prolongacional para sistema dinâmico foram estudados em [3] e [4]. Esses resultados foram generalizados para ações de semigrupos em [10]. Apresentamos aqui a definição de ambos conceitos e suas caracterizações em termos de redes. Em seguida, definimos o domínio de atração uniforme, atrator uniforme e atrator uniforme global. No final desse trabalho, mostramos as equivalências das definições de atrator global no sentido da Definição 3.5 e atrator uniforme global, que foram estudados separadamente.

4.1 Prolongamentos

Começamos com a definição de prolongamento progressivo. Seja X um espaço métrico com a métrica $\mathrm{d} : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definição 4.1 *Seja $x \in X$ e F um subconjunto do semigrupo $\mathcal{S}$. Definimos o* ***primeiro F-prolongamento progressivo*** *de x como*

$$\mathrm{D}\left(x, F\right) = \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{F\mathrm{B}\left(x, \epsilon\right)}.$$

Se C é um subconjunto de X, definimos

$$\mathrm{D}\left(C,F\right)=\bigcup_{x\in C}\mathrm{D}\left(x,F\right).$$

Agora, vamos apresentar uma caracterização do prolongamento progressivo em termos de redes.

Proposição 4.2 *Sejam $x\in X$ e $F\subset\mathcal{S}$. Então, podemos caracterizar o primeiro F-prolongamento progressivo de x por*

$$\mathrm{D}\left(x,F\right)=\left\{\begin{array}{c} y\in X;\ \textit{Existem redes}\ \left(t_{\lambda}\right)\subset F\ \textit{e}\ \left(x_{\lambda}\right)\subset X \\ \textit{tais que}\ x_{\lambda}\longrightarrow x\ \textit{e}\ t_{\lambda}x_{\lambda}\longrightarrow y \end{array}\right\}.$$

Demonstração: Seja o conjunto

$$\mathrm{D}'\left(x,F\right)=\left\{\begin{array}{c} y\in X;\ \text{Existem redes}\ \left(t_{\lambda}\right)\subset F\ \text{e}\ \left(x_{\lambda}\right)\subset X \\ \text{tais que}\ x_{\lambda}\longrightarrow x\ \text{e}\ t_{\lambda}x_{\lambda}\longrightarrow y \end{array}\right\}.$$

Mostremos que $\mathrm{D}\left(x,F\right)=\mathrm{D}'\left(x,F\right).$ Seja $y\in\mathrm{D}\left(x,F\right).$ Pela Definição 4.1, $y\in\overline{F\mathrm{B}\left(x,\epsilon\right)}$, para todo $\epsilon>0$. Então, dado $n\in\mathbb{N}$, tome

$$y_n\in\mathrm{B}\left(y,\frac{1}{n}\right)\cap F\mathrm{B}\left(x,\frac{1}{n}\right).$$

Logo, podemos escrever $y_n=t_nx_n$, onde $t_n\in F$ e $x_n\in\mathrm{B}\left(x,\frac{1}{n}\right)$. Assim, considere as sequências $\left(t_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\subset F$ e $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$. Temos que $x_n\longrightarrow x$. De fato, dado $\epsilon>0$, tome $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0}<\epsilon$. Assim, para $n\geq n_0$ temos que $\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_0}$, donde

$$x_n\in\mathrm{B}\left(x,\frac{1}{n}\right)\subset\mathrm{B}\left(x,\epsilon\right).$$

Como $\epsilon>0$ é arbitrário, temos que $x_n\longrightarrow x$. Analogamente, temos que $t_nx_n\longrightarrow y$ e, portanto, $y\in\mathrm{D}'\left(x,F\right).$

Reciprocamente, seja $y\in\mathrm{D}'\left(x,F\right).$ Então existem redes $\left(t_{\lambda}\right)\subset F$ e $\left(x_{\lambda}\right)\subset X$ tais que $x_{\lambda}\longrightarrow x$ e $t_{\lambda}x_{\lambda}\longrightarrow y$. Assim, dado $\epsilon>0$ existe $\lambda_0\in\Lambda$ tal que $x_{\lambda}\in\mathrm{B}\left(x,\epsilon\right)$, para todo $\lambda \succeq \lambda_0$. Logo, $(t_\lambda x_\lambda)_{\lambda \succeq \lambda_0} \subset F\mathrm{B}(x,\epsilon)$, donde $y \in \overline{F\mathrm{B}(x,\epsilon)}$. Pela arbitrariedade do $\epsilon > 0$, segue que $y \in \mathrm{D}(x,F)$. $\square$

Note que, para o caso onde X é um espaço métrico, podemos tomar sequências ao invés de redes. Assim, para $x \in X$ e $F \subset S$,

$$\mathrm{D}(x,F) = \left\{ \begin{array}{c} y \in X;\ \text{Existem sequências } (t_n) \subset F \text{ e } (x_n) \subset X \text{ tais que} \\ x_n \longrightarrow x \text{ e } t_n x_n \longrightarrow y \end{array} \right\}.$$

4.2 Conjuntos Limite Prolongacionais

Definição 4.3 *Seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos do semigrupo $\mathcal{S}$ e X um espaço métrico. Definimos o* ***primeiro $\mathcal{F}$-conjunto limite progressivo prolongacional*** *de $x \in X$ como sendo o conjunto*

$$\mathrm{J}(x,\mathcal{F}) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \mathrm{D}(x,F).$$

Se C é um subconjunto de X, então

$$\mathrm{J}(C,\mathcal{F}) = \bigcup_{x \in C} \mathrm{J}(x,\mathcal{F}).$$

O próximo resultado é uma caracterização do primeiro $\mathcal{F}$-conjunto limite progressivo prolongacional de $x \in X$. Uma caracterização foi apresentada em [10], onde se considera uma rede em cada conjunto da família $\mathcal{F}$. Aqui, estendemos essa caracterização tomando apenas uma única rede em $\mathcal{S}$.

Proposição 4.4 *Seja $x \in X$ e $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de $\mathcal{S}$. Então, podemos caracterizar o primeiro $\mathcal{F}$-conjunto limite progressivo prolongacional de $x \in X$ por*

$$\mathrm{J}(x,\mathcal{F}) = \left\{ \begin{array}{c} y \in X;\ \textit{Existem redes } (t_\lambda) \subset \mathcal{S} \textit{ e } (x_\lambda) \subset X \textit{ tais que} \\ t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty, x_\lambda \longrightarrow x \textit{ e } t_\lambda x_\lambda \longrightarrow y \end{array} \right\}.$$

Demonstração: Definamos o conjunto

$$\mathrm{J}'(x,\mathcal{F}) = \left\{ \begin{array}{c} y \in X;\ \text{Existem redes } (t_\lambda) \subset S \text{ e } (x_\lambda) \subset X \text{ tais que} \\ t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty, x_\lambda \longrightarrow x \text{ e } t_\lambda x_\lambda \longrightarrow y \end{array} \right\}.$$

Mostremos que $\mathrm{J}(x,\mathcal{F}) = \mathrm{J}'(x,\mathcal{F})$. Seja $y \in \mathrm{J}(x,\mathcal{F})$. Assim,

$$y \in \mathrm{D}(x,F) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{F\mathrm{B}\left(x,\frac{1}{n}\right)}.$$

para todo $F \in \mathcal{F}$. Considere o conjunto de índices $\mathcal{F} \times \mathbb{N}$ com a direção

$$(F_1,n_1) \succeq (F_2,n_2) \iff F_1 \subset F_2 \text{ e } n_1 \geq n_2.$$

Para cada $F \in \mathcal{F}$ e $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\mathrm{B}\left(y,\frac{1}{n}\right) \cap F\mathrm{B}\left(x,\frac{1}{n}\right) \neq \emptyset.$$

Assim, tome

$$t_{(F,n)}x_{(F,n)} \in \mathrm{B}\left(y,\frac{1}{n}\right) \cap F\mathrm{B}\left(x,\frac{1}{n}\right),$$

onde $t_{(F,n)} \in F$ e $x_{(F,n)} \in \mathrm{B}\left(x,\frac{1}{n}\right)$. Temos que $t_{(F,n)} \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$. De fato, dado $F \in \mathcal{F}$, tome $F_0 = F$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ qualquer. Então, se $(F',n) \succeq (F_0,n_0)$, temos que $t_{(F',n)} \in F' \subset F_0 = F$, donde $t_{(F,n)} \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$. Agora, $x_{(F,n)} \longrightarrow x$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \epsilon$ e escolha $F_0 \in \mathcal{F}$ qualquer. Se $(F,n) \succeq (F_0,n_0)$ temos que $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$, donde

$$x_{(F,n)} \in \mathrm{B}\left(x,\frac{1}{n}\right) \subset \mathrm{B}\left(x,\frac{1}{n_0}\right) \subset \mathrm{B}(x,\epsilon).$$

Pela arbitrariedade do $\epsilon > 0$, segue que $x_{(F,n)} \longrightarrow x$. De modo análogo, temos que $t_{(F,n)}x_{(F,n)} \longrightarrow y$. Logo, $y \in \mathrm{J}'(x,\mathcal{F})$.

Por outro lado, seja $y \in \mathrm{J}'(x,\mathcal{F})$. Então existem redes $(t_\lambda) \subset \mathcal{S}$ e $(x_\lambda) \subset X$ tais que $t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$, $x_\lambda \longrightarrow x$ e $t_\lambda x_\lambda \longrightarrow y$. Seja $F \in \mathcal{F}$. Como $t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $t_\lambda \in F$, para todo $\lambda \succeq \lambda_0$. Agora, como $x_\lambda \longrightarrow x$, dado $\epsilon > 0$ existe $\lambda_1 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in B(x,\epsilon)$, para todo $\lambda \succeq \lambda_1$. Tome $\lambda^* \in \Lambda$ tal que $\lambda^* \succeq \lambda_0$ e $\lambda^* \succeq \lambda_1$. Logo,

$t_\lambda x_\lambda \in F\mathrm{B}(x,\epsilon)$, para todo $\lambda \succeq \lambda^*$. Assim, $y \in \overline{F\mathrm{B}(x,\epsilon)}$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue que $y \in \mathrm{J}(x,\mathcal{F})$. □

Definimos agora o domínio de atração uniforme, conceito necessário para se definir atrator uniforme global.

Definição 4.5 *Sejam Y um subconjunto de X e $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de $\mathcal{S}$. Definimos o conjunto **$\mathcal{F}$-domínio de atração uniforme** de Y por*

$$\mathrm{A}_{\mathcal{U}}(Y,\mathcal{F}) = \{x \in X;\ \mathrm{J}(x,\mathcal{F}) \neq \emptyset \ e\ \mathrm{J}(x,\mathcal{F}) \subset Y\}.$$

Definição 4.6 *Seja Y um subconjunto de X e $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de $\mathcal{S}$. Dizemos que Y é um **$\mathcal{F}$-atrator uniforme** se existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathrm{B}(Y,\epsilon) \subset \mathrm{A}_{\mathcal{U}}(Y,\mathcal{F})$. Dizemos que Y é um **$\mathcal{F}$-atrator uniforme global** se $\mathrm{A}_{\mathcal{U}}(Y,\mathcal{F}) = X$.*

A Proposição a seguir nos mostra que se um conjunto é atrator global no sentido da Definição 3.5, então ele é um atrator uniforme global.

Proposição 4.7 *Sejam $\mathcal{F}$ uma base de filtro para o semigrupo $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$ um $\mathcal{F}$-atrator global em $\mathcal{S}$ no sentido da Definição 3.5. Então $\mathcal{A}$ é um $\mathcal{F}$-atrator uniforme global.*

Demonstração: Sejam $x \in X$ e $\mathcal{A}$ um $\mathcal{F}$-atrator global. Pelo Teorema 3.26, temos que $(\mathcal{S}, X)$ é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta. Logo, pela Proposição 3.21, segue que $\omega(x,\mathcal{F}) \neq \emptyset$ e, portanto, $\mathrm{J}(x,\mathcal{F}) \neq \emptyset$. Suponha que $\mathrm{J}(x,\mathcal{F}) \not\subset \mathcal{A}$. Então, existe $y \in \mathrm{J}(x,\mathcal{F})$ tal que $y \notin \mathcal{A}$. Agora, como $\mathcal{A}$ é compacto, temos que existe $\delta > 0$ tal que $\mathrm{d}(y,\mathcal{A}) = \delta$. Por outro lado, como $y \in \mathrm{J}(x,\mathcal{F})$, pela Proposição 4.4, existem redes $(t_\lambda) \subset \mathcal{S}$ e $(x_\lambda) \subset X$ tais que $t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$, $x_\lambda \longrightarrow x$ e $t_\lambda x_\lambda \longrightarrow y$. Seja U uma vizinhança de $x \in X$. Pela convergência da rede (x_λ), existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in U$, para todo $\lambda \succeq \lambda_0$. Assim, considere $B = \{x_\lambda;\ \lambda \succeq \lambda_0\}$ um subconjunto limitado de X. Então, o $\mathcal{F}$- atrator global $\mathcal{A}$ atrai B. Logo, dado $\frac{\delta}{2} > 0$ existe $F' \in \mathcal{F}$ tal que $F'B \subset \mathrm{B}\left(\mathcal{A}, \frac{\delta}{2}\right)$. Como $t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$, para este $F' \in \mathcal{F}$, existe $\lambda' \in \Lambda$ tal que $t_\lambda \in F'$, para todo $\lambda \succeq \lambda'$. Tome $\lambda^* \in \Lambda$ tal que $\lambda^* \succeq \lambda_0$ e $\lambda^* \succeq \lambda'$. Assim, para todo $\lambda \succeq \lambda^*$, temos

$$\mathrm{d}\left(t_\lambda x_\lambda, \mathcal{A}\right) < \frac{\delta}{2}.$$

Logo, pelo fato de $t_\lambda x_\lambda \longrightarrow y$ e d ser contínua, temos que $\mathrm{d}\left(y, \mathcal{A}\right) \leq \frac{\delta}{2}$, o que contradiz o fato de $\mathrm{d}\left(y, \mathcal{A}\right) = \delta$. Portanto, $\mathrm{J}\left(x, \mathcal{F}\right) \subset \mathcal{A}$. Pela arbitrariedade de $x \in X$, temos que $X \subset A_{\mathcal{U}}\left(\mathcal{A}, \mathcal{F}\right)$, obtendo a igualdade $A_{\mathcal{U}}\left(\mathcal{A}, \mathcal{F}\right) = X$. Portanto, $\mathcal{A}$ é um $\mathcal{F}$-atrator uniforme global. $\square$

A recíproca da Proposição 4.7 não é imediata. Para garantir que um atrator uniforme global é também um atrator global devemos acrescentar algumas hipóteses.

Teorema 4.8 *Sejam $\mathcal{F}$ uma base de filtro para um semigrupo $\mathcal{S}$ e Y um $\mathcal{F}$-atrator uniforme global não vazio, compacto e invariante. Se a ação de $\mathcal{S}$ é $\mathcal{F}$- eventualmente compacta, $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta e $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_3, então Y é um $\mathcal{F}$-atrator global.*

Demonstração: Seja B um subconjunto limitado de X. Basta provar que Y atrai o subconjunto B pela ação de $\mathcal{S}$. Suponha que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $F \in \mathcal{F}$ tem-se $FB \not\subset \mathrm{B}\left(Y, \epsilon\right)$. Como $\left(\mathcal{S}, X\right)$ é $\mathcal{F}$-eventualmente compacta, existe $t_0 \in \mathcal{S}$ tal que

$\overline{t_0 B}$ é compacto. Agora, como $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_3, para cada $F \in \mathcal{F}$, existe $\widetilde{F} \in \mathcal{F}$ tal que

$$\widetilde{F} \subset F t_0.$$

Assim, para cada $\widetilde{F} \in \mathcal{F}$, existem $t_{\widetilde{F}} \in \widetilde{F}$ e $x_{\widetilde{F}} \in B$ tais que $t_{\widetilde{F}} x_{\widetilde{F}} \notin \mathrm{B}\left(Y, \epsilon\right)$ e podemos escrever

$$t_{\widetilde{F}} x_{\widetilde{F}} = t_F t_0 x_{\widetilde{F}}.$$

Considere a rede $\left(x_{\widetilde{F}}\right) \subset B$. Então, como $\overline{t_0 B}$ é compacto, temos que existe uma subrede tal que

$$t_0 x_{\widetilde{F_\lambda}} \longrightarrow y \in X.$$

Então a rede $\left(t_0 x_{\widetilde{F_\lambda}}\right)$ é limitada. Sejam as redes $(t_{F_\lambda}) \subset \mathcal{S}$ e $\left(t_0 x_{\widetilde{F_\lambda}}\right) \subset X$ limitada. Temos que $t_{F_\lambda} \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$, pois dado $F \in \mathcal{F}$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $F_{\lambda_0} \subset F$ e, portanto, para todo $\lambda \succeq \lambda_0$, $t_{F_\lambda} \in F_\lambda \subset F_{\lambda_0} \subset F$. Como a ação de $\mathcal{S}$ é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta, existe uma subrede com mesmo nome $\left(t_{F_\lambda}\left(t_0 x_{\widetilde{F_\lambda}}\right)\right)$ tal que

$$t_{F_\lambda}\left(t_0 x_{\widetilde{F_\lambda}}\right) \longrightarrow z \in X. \tag{4.1}$$

com $t_0 x_{\widetilde{F_\lambda}} \longrightarrow y$. Logo, pela Proposição 4.4, $z \in \mathrm{J}(y, \mathcal{F})$. Por outro lado, como $t_{\widetilde{F_\lambda}} x_{\widetilde{F_\lambda}} \notin \mathrm{B}(Y, \epsilon)$, temos que $\mathrm{d}\left(t_{F_\lambda} t_0 x_{\widetilde{F_\lambda}}, Y\right) \geq \epsilon$, donde por 4.1 segue que $\mathrm{d}(z, Y) \geq \epsilon$, contradizendo o fato de Y ser um $\mathcal{F}$-atrator uniforme global, pois $\mathrm{J}(y, \mathcal{F}) \subset Y$. Portanto, Y atrai B pela ação de $\mathcal{S}$. □

O resultado seguinte é junção da Proposição 4.7 e Proposição 4.8. É uma forma de fazer a equivalência das definições de atrator global e atrator uniforme global.

Corolário 4.9 *Sejam $\mathcal{F}$ uma base de filtro sobre $\mathcal{S}$ satisfazendo hipóteses H_3 e H_4, e $(\mathcal{S}, X, \mu)$ $\mathcal{F}$-eventualmente limitada, eventualmente compacta. Então, $Y \subset X$ não vazio, compacto e invariante é um $\mathcal{F}$-atrator uniforme global se, e somente se, $Y \subset X$ é um $\mathcal{F}$-atrator global.*

Demonstração: Suponha que Y é um $\mathcal{F}$-atrator uniforme global não vazio, compacto e invariante. Pela Proposição 3.20, temos que $(\mathcal{S}, X)$ é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta. Logo, pelo Teorema 4.8, temos que Y é um $\mathcal{F}$-atrator global.

Reciprocamente, suponha que Y é um $\mathcal{F}$-atrator global. Então, Y é não vazio, compacto e invariante e pela Proposição 4.7 segue que Y é um $\mathcal{F}$-atrator uniforme global. □

Exemplo 4.1 *Retomando o Exemplo 3.22, vimos que* $\mathcal{A} = \{(0,0)\}$ *é um* $\mathcal{F}_{ctr}$*-atrator global. Assim, temos pela Proposição 4.7 que* $\mathcal{A}$ *é um* $\mathcal{F}_{ctr}$*-atrator uniforme global.*

Exemplo 4.2 *Analogamente, no Exemplo 3.23, mostramos que o disco unitário* $\mathcal{A} = \mathbb{D}^1$ *é* $\mathcal{F}_{ctr}$*-atrator global e, portanto é* $\mathcal{F}_{ctr}$*-atrator uniforme global.*

Exemplo 4.3 *Vimos no Exemplo 3.18 que* $\omega\left((x,y), \mathcal{F}_{trans}\right) = \{(0,0)\}$*, ou seja,*

$$\mathcal{A} = \{(0,0)\} \subset \mathrm{J}\left((x,y), \mathcal{F}_{trans}\right).$$

Seja $(z,w) \in \mathrm{J}\left((x,y), \mathcal{F}_{trans}\right)$*. Pela Proposição 4.4, existem sequências* (s_n, t_n) *em* $\mathcal{S}$ *com* $(s_n, t_n) \longrightarrow_{\mathcal{F}_{trans}} \infty$ *e* (x_n, y_n) *em* $\mathbb{R}^2$ *tais que*

$$(x_n, y_n) \longrightarrow (x,y)$$

e

$$\left(a^{s_n} x_n, a^{t_n} y_n\right) \longrightarrow (z,w).$$

Como $(s_n, t_n) \longrightarrow_{\mathcal{F}_{trans}} \infty$*, temos que* $(a^{s_n} x_n, a^{t_n} y_n) \longrightarrow (0,0)$*. Logo,* $(z,w) = (0,0)$ *e, portanto,* $\mathrm{J}\left((x,y), \mathcal{F}_{trans}\right) = \{(0,0)\}$*, para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*. Assim,* $A_{\mathcal{U}}\left(\mathcal{A}, \mathcal{F}_{trans}\right) = \mathbb{R}^2$*, isto é,* $\mathcal{A}$ *é* $\mathcal{F}_{trans}$*-atrator uniforme global. Sejam* $(s', t') \in S$ *e* $F = S + (s,t) \in \mathcal{F}_{trans}$*. Temos que existe* $F' = S + (s+s', t+t') \in \mathcal{F}_{trans}$ *tal que* $F' \subset F + (s', t')$*, isto é, a família* $\mathcal{F}_{trans}$ *satisfaz a hipótese* H_3*. Como o semigrupo* $\mathcal{S}$ *é abeliano,* $\mathcal{F}_{trans}$ *satisfaz a hipótese* H_4*. Agora seja* B *um subconjunto limitado de* $\mathbb{R}^2$*. Considere a aplicação contínua* $\mu_{(s_0,t_0)}$*. Então,*

$$(s_0, t_0)\, B \subset (s_0, t_0)\, \overline{B}$$

e como $(s_0, t_0)\, \overline{B}$ *é compacto, temos que* $\overline{(s_0, t_0)\, B}$ *é compacto. Logo, a ação de* $\mathcal{S}$ *é eventualmente compacta. No Exemplo 3.6 mostramos que dado* $\epsilon > 0$*, existe* $A_r \in \mathcal{F}$ *tal que* $A_r B \subset \mathrm{B}\left((0,0), \epsilon\right)$*. Note que* $A_r = S + (r,r) \in \mathcal{F}_{trans}$*. Então, dado* $\epsilon > 0$ *existe* $F = S + (r,r) \in \mathcal{F}_{trans}$ *tal que* $FB \in \mathrm{B}\left((0,0), \epsilon\right)$*, ou seja, a ação de* $\mathcal{S}$ *é* $\mathcal{F}_{trans}$*-eventualmente limitada. Como* $\mathcal{A} = \{(0,0)\}$ *é não vazio, compacto e invariante e já* *vimos que a ação de $\mathcal{S}$ é $\mathcal{F}_{trans}$-assintoticamente compacta, pelo Teorema 4.9 segue que $\mathcal{A} = \{(0,0)\}$ é $\mathcal{F}_{trans}$-atrator global.*

Referências Bibliográficas

[1] Aragão-Costa, E. R.: Sistemas gradientes, decomposição de Morse e funções de Lyapunov sob pertubação. Tese de Doutorado. USP - São Carlos. (2012).

[2] Aragão-Costa, E. R.; Carvalho, A. N.; Caraballo, T.; Langa, J. A.: Stability of gradient semigroups under perturbation. Nonlinearity (Bristol. Print), v. 24, p.2099-2117. (2011).

[3] Bhatia, N.P.; Szegö, G.P.: Dynamical systems: stability theory and applications. Lecture Notes in Mathematics 35. Springer-Verlag. (1967).

[4] Bhatia, N. P. e Szegö, G. P.: Stability theory of dynamical systems. Springer-Verlag, New York. (2002)

[5] Braga Barros, C. J.; San Martin, L. A. B.: Chain control sets for semigroup actions. Mat. Apl. Comp. 15, 257-276. (1996)

[6] Braga Barros, C. J.; Souza, J. A.: Attractors and chain recurrence for semigroup actions. J. of Dyn. Diff. Eq. 22, 723-740 (2010).

[7] Braga Barros, C. J.; Souza, J. A.: Finest Morse decompositions for semigroup actions on fiber bundles. J. of Dyn. Diff. Eq. 22, 741-760 (2010).

[8] Braga Barros, C. J.; Souza, J. A.: On the number of maximal chain transitive sets in fiber bundles. Forum Math. DOI: 10.1515/FORM.2011.121.

[9] Braga Barros, C. J.; Souza, J. A.; Reis, R. A.: Dynamic Morse decompositions for semigroups of homeomorphisms and control systems. To appear.

[10] Braga Barros, C. J.; Souza, J. A.; Rocha, V. H. L.: Lyapunov stability for semigroup actions. submetido

[11] Cheban, D.; Kloeden, P. E.; Schmalfuβ, B.: The relationship between pullback, forwards and global attractors of nonautonomous dynamical systems, Nonlinear Dyn. Syst. Theory, 2, 125-144. (2002).

[12] Colonius, F.; Kliemann, W.: The dynamics of control. Birkhäuser, Boston. (2000).

[13] Conley, Charles C.: Isolated invariant sets and the Morse index. CBMS Regional Conf. Ser. in Math., n. 38, American Mathematical Society. (1978).

[14] Doering, C. I.; Lopes, A. O.: Equações diferenciais ordinárias. 3 ed. IMPA, Rio de Janeiro. (2008).

[15] Dugundji, J.: Topology. Allyn and Bacon, Boston. (1966).

[16] Hale, J. K.: Asymptotic behavior of dissipative systems. Mathematical Surveys and Monographs Number 25. American Mathematical Society, Providence, RI. (1988).

[17] MA Qingfeng; WANG Shouhong; ZHONG Chengkui: Necessary and sufficient conditions for the existence of global attractors for semigroups and applications [J]. Indiana Univ. Math. J. 51(6): 1541–1559. (2002)

[18] Mujica, J.: Notas de topologia geral. Notas de aula, UNICAMP. (2005).

[19] Munkres J. R.: Topology. 2 ed. Prentice Hall, New Jersey. (2000).

[20] Ladyzhenskaya, O. A.: Attractors for semigroups and evolution equations. Cambridge University Press, Cambridge. (1991)

[21] Pata, V.; Zelik, S.: A result on the existence of global attractors for semigroups of closed operators. Comm. Pure Appl. Anal. 6. 481-486. (2007).

[22] Robinson, J.C.: Infinite-Dimensional dynamical systems: From Basic Facts to Actual Calculations, Cambridge Univ. Pres, Cambridge, UK. (2001).

[23] Rocha, V. H. L.: Estabilidade e ações de semigrupos. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Maringá. (2012)

[24] Scheutzow, M.: Comparison of various concepts of a random atractor: A case study. Technical report, Technische Universität Berlin. (2000).

[25] Souza, J. A.: Complete Lyapunov functions of control systems. Systems & Control Letters, 61, 322-326. (2012)

[26] Souza, J. A.: Recurrence theorem for semigroup actions. Semigroup Forum, vol 83, n. 3, 351-370. (2011)

[27] Souza, J. A.: Semigroup actions under compactifications. pams. submetido

[28] Souza, J. A.; Raminelli, S. A.: Global attractors for semigroup actions. jmaa. submetido

[29] Souza, J. A.: Sistemas dinâmicos, sistemas de controle e ações de semigrupos. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Maringá. (2005).

[30] Temam, R.: Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. Springer, New York. (1988).