

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

TÁSIA HICKMANN

ANÉIS DE ARF E CARACTERES

Maringá

2010

TÁSIA HICKMANN

Anéis de Arf e Caracteres

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Álgebra

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes

Maringá

2010

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá – PR., Brasil)

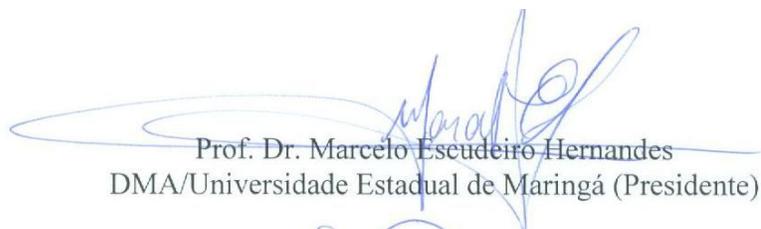
H628a	Hickmann, Tásia Anéis de Arf e Caracteres / Tásia Hickmann. -- Maringá, 2010. 86 f. : il.
	Orientador : Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2010.
	1. Anéis de Arf. 2. Caracteres de Arf. 3. Teoria de singularidades. I. Hernandez, Marcelo Escudeiro, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.
	CDD 21.ed. 516.35

TÁSIA HICKMANN

Anéis de Arf e Caracteres

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática pela Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA



Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandez
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)



Profa. Dra. Miriam Garcia Manoel
Universidade de São Paulo – São Carlos



Prof. Dr. Ednei Aparecido Santulo Júnior
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 11 de fevereiro de 2010.

Local de defesa: Auditório “Adelbar Sampaio” - CCE, Bloco F-67, *campus* da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho aos meus pais Eugênio e Ivete, a minha irmã Janete e ao meu namorado Ricardo por serem pessoas identicamente amáveis, belas e surpreendíveis em essência, as quais sempre me estimularam a buscar uma vida nova a cada dia.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por dar a oportunidade de me aprofundar na ciência e ofertar muita saúde, força e paciência durante os meus estudos.

Ao Professor Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes que sempre me conduziu com sabedoria e entusiasmo para que eu pudesse crescer cientificamente. Obrigada meu pai acadêmico!

Aos meus professores do Mestrado que me guiaram ao conhecimento levando-me a alcançar a sabedoria; e aos professores da Graduação pela motivação.

Aos professores do Ensino Fundamental e Médio, pois devo a eles o alicerce que me trouxe até aqui.

Aos meus pais, grandes educadores, pela força, afeto, amor, carinho, paciência, dedicação, oração e preocupação que tiveram e têm por mim.

Ao Anjo da minha vida, meu namorado Ricardo, pelo amor e carinho; pela paciência, compreensão e dedicação dados a mim que contribuíram para o meu sucesso.

Aos amigos, em especial, Mariana, Kelly, Diego e Anderson, que ajudaram tornar os momentos da vida mais felizes.

Aos colegas de Mestrado, em especial, a Daniela, minha companheira de moradia, meu profundo agradecimento pela amizade e compreensão, que fez com que os momentos longe da família fossem menos tristes.

Finalmente, agradeço à Capes pelo grande apoio financeiro neste estudo.

“Se eu tivesse o dom da profecia, se conhecesse todos os mistérios e toda a ciência, se tivesse toda a fé, a ponto de remover montanhas, mas não tivesse amor, eu nada seria.”

ICoríntios 13,2.

Anéis de Arf e Caracteres

RESUMO

Neste trabalho estudamos o semigrupo de Arf e o anel de Arf associados a uma curva algebróide irredutível, ou simplesmente, um ramo.

A sequência de multiplicidades de um ramo, obtida no processo da resolução canônica, é uma importante informação sobre a curva. No entanto, o processo de resolução é em geral um trabalho árduo.

Apresentamos, neste trabalho, um método para obter a sequência de multiplicidades de um ramo diretamente de sua parametrização. Tal método se baseia nos conceitos de caracteres, semigrupo de Arf e anel de Arf.

Arf Rings and Characters

ABSTRACT

In this work we study the Arf semigroup and the Arf ring associated with an irreducible algebroid curve, or shortly, a branch.

The multiplicity sequence of a branch, obtained by the canonical resolution process, is an important information about the curve. However, the resolution process is a hard work in general.

We present, in this work, a method to obtain the multiplicity sequence of a branch from its parameterization. This method is based on the concepts of characters, Arf semigroup and Arf ring.

CONTEÚDO

Introdução	10
1 Curvas Algebróides Irredutíveis	13
1.1 Resolução de Singularidades	16
2 Semigrupos Numéricos	46
2.1 Semigrupo Contido nos Naturais	46
2.2 Semigrupos de Arf	52
3 Anéis de Arf	62
3.1 Anéis de Arf	62
Bibliografia	86

INTRODUÇÃO

O estudo de curvas algebróides irredutíveis teve um grande avanço com os trabalhos de Zariski, Brauner e Bureau sobre curvas planas, em \mathbb{C}^2 , na década de 1930, onde a equivalência topológica de curvas planas foi totalmente descrita em termos dos semigrupos de valores e sequência de multiplicidades, que se mostraram equivalentes entre si, ou seja, é possível obter um destes objetos em termos do outro.

O fato mais marcante é que estes objetos dependem única e exclusivamente de certos expoentes presentes em uma parametrização da curva, propriedade esta que não é verdadeira para curvas espaciais, ou seja, em \mathbb{C}^n com $n > 2$. De fato, embora se possa definir semigrupo de valores e sequência de multiplicidades para curvas espaciais, estes objetos não são equivalentes.

No final da década de 1930, vários autores começaram a investigar a sequência de multiplicidades de uma curva espacial obtida no processo de resolução canônica. Como podemos constatar no trabalho de Semple (Veja [Sem]) e nos exemplos que apresentamos neste trabalho, o processo de resolução é trabalhoso e pode necessitar de muitos passos para sua finalização e conseqüentemente para a obtenção da sequência de multiplicidades.

Em 1942, Du Val em [DV1] mostrou que a sequência de multiplicidades pode ser obtida a partir de um número finito de números naturais, denominados *caracteres*, os quais são caracterizados por certas propriedades geométricas dos objetos envolvidos no processo de resolução canônica, a saber, os *pontos líderes*.

Neste ponto, Cahit Arf, o autor do artigo [Arf] que serviu de inspiração para este trabalho, entra em cena. Segundo Sinan Sertöz, aluno de Arf, em uma versão impressa de uma

conferência por ocasião da comemoração dos oitenta anos de Arf em Istambul (veja [Ser]), Du Val expôs seus resultados na Universidade de Istambul em 1945. Arf que estava presente na conferência não muito satisfeito com a quantidade de considerações geométricas, comenta que deveria haver objetos algébricos que poderiam descrever os caracteres e conseqüentemente a seqüência de multiplicidades, o que simplificaria a solução do problema. Naturalmente Du Val sugere que Arf trabalhe no problema, tendo em vista a seguinte questão:

Como encontrar os caracteres de uma curva algebróide irredutível diretamente de sua parametrização sem efetuar o processo de resolução canônica?

No dia seguinte Arf ficou acamado devido a um forte resfriado e decide pensar melhor sobre a questão. Na semana seguinte quando retorna ao trabalho, em seu bolso traz pequenos pedaços de papel com as idéias centrais que respondem a questão, que mais tarde foram apresentadas em [Arf] e publicadas no Proc. London Math Soc., seguidas de uma nota do próprio Du Val [DV2] salientando sua importância.

Neste trabalho, apresentamos em uma linguagem moderna e enxuta os principais resultados de Arf apresentados em [Arf]. Acreditamos que nossa contribuição se deve ao fato de reunirmos em um mesmo material, a descrição da resolução canônica de uma curva algebróide irredutível em \mathbb{C}^n , resultados sobre semigrupos numéricos e a teoria de anéis e semigrupos de Arf.

O trabalho está estruturado da seguinte maneira:

No capítulo 1, reunimos os pré-requisitos relacionados às curvas algebróides irredutíveis e ao processo de resolução canônica de um ramo. Destacamos os exemplos elaborados para curvas espaciais que evidenciam a dependência da seqüência de multiplicidades não só dos expoentes, mas também dos coeficientes presentes em uma parametrização. O grande número de passos e a análise geométrica minuciosa explica a ausência de exemplos desta natureza nas referências estudadas.

O capítulo 2 reúne resultados sobre semigrupos numéricos e propriedades destes. Neste capítulo apresentamos o conceito de semigrupo de Arf, semigrupo característico e caracteres de um semigrupo.

Finalmente no capítulo 3 apresentamos os resultados principais do trabalho, relacionados a anéis e fecho de Arf, bem como resultados que respondem a questão proposta por Du Val.

Curvas Algebróides Irredutíveis

Neste capítulo introduzimos alguns conceitos e resultados referentes às curvas algebróides irredutíveis que serão importantes no desenvolvimento deste trabalho. Iniciamos com alguns conceitos e resultados gerais sobre séries de potências, em seguida introduzimos o objeto central deste trabalho, curvas algebróides irredutíveis. Finalizamos o capítulo apresentando o processo de resolução canônica de uma curva algebróide irredutível.

Sejam \mathbb{K} um corpo e X_1, \dots, X_r indeterminadas sobre \mathbb{K} . Denotaremos por $\mathbb{K}[[X_1, \dots, X_r]]$ o anel constituído de todas as somas formais do tipo

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} P_n$$

onde cada P_n é um polinômio homogêneo de grau n nas indeterminadas X_1, \dots, X_r com coeficientes em \mathbb{K} .

Os elementos de $\mathbb{K}[[X_1, \dots, X_r]]$ serão chamados **séries de potências formais** nas indeterminadas X_1, \dots, X_r com coeficientes em \mathbb{K} . A proposição que segue caracteriza os elementos invertíveis do anel $\mathbb{K}[[X_1, \dots, X_r]]$.

Proposição 1.1. *O elemento $f = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \in \mathbb{K}[[X_1, \dots, X_r]]$ é invertível se, e somente se, $P_0 \neq 0$.*

Demonstração: Veja em [H].

□

Definição 1.1. *Seja $f \in \mathbb{K}[[X_1, \dots, X_r]]$ e escreva*

$$f = P_n + P_{n+1} + \dots,$$

onde todo P_j é um polinômio homogêneo de grau j e $P_n \neq 0$. O inteiro n é chamado **multiplicidade**, ou ainda, **ordem** de f e é denotado por $\text{mult}(f)$. Se $f = 0$, temos $\text{mult}(f) = \infty$.

Segue da proposição acima que f é invertível em $\mathbb{K}[[X_1, \dots, X_r]]$ se, e somente se, $\text{mult}(f) = 0$.

A multiplicidade de séries de potências possui as propriedades descritas na proposição abaixo, cuja verificação é imediata.

Proposição 1.2. *Sejam $f, g \in \mathbb{K}[[X_1, \dots, X_r]]$. Temos:*

- (i) $\text{mult}(fg) = \text{mult}(f) + \text{mult}(g)$;
- (ii) $\text{mult}(f \pm g) \geq \min\{\text{mult}(f), \text{mult}(g)\}$, com sinal de igualdade sempre que $\text{mult}(f) \neq \text{mult}(g)$.

Podemos encontrar várias definições e abordagens diferentes para curvas algebróides irredutíveis, neste trabalho adotaremos a que segue.

Definição 1.2. *Uma curva algebróide irredutível ou ramo \mathcal{C} em \mathbb{C}^n ($n > 1$) é (dada por) uma parametrização:*

$$\mathcal{C} : \begin{cases} X_1 = \varphi_1(t) \\ X_2 = \varphi_2(t) \\ \vdots \\ X_n = \varphi_n(t), \end{cases}$$

com $\varphi_i(t) \in \mathbb{C}[[t]]$.

Quando $n = 2$, dizemos que a curva é plana e quando $n > 2$ a curva é espacial.

Por meio de uma mudança de parâmetro, se necessário, podemos assumir que o máximo divisor comum de todos os expoentes de $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ seja igual a 1. De fato, se o

máximo divisor comum for $d > 1$, então considerando a reparametrização $t_1 = t^d$, temos que

$$\mathcal{C} : \begin{cases} X_1 = \widetilde{\varphi}_1(t_1) \\ X_2 = \widetilde{\varphi}_2(t_1) \\ \vdots \\ X_n = \widetilde{\varphi}_n(t_1) \end{cases}$$

tem a propriedade mencionada e neste caso, diremos que a parametrização é **primitiva**. Neste trabalho, todas as parametrizações serão consideradas primitivas.

Além disto, por meio de uma mudança de coordenadas, se necessário, podemos assumir que a curva passa pela origem $O = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$, isto é, $\varphi_i(0) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Pode-se mostrar que

$$I = \{g \in \mathbb{C}[[X_1, \dots, X_n]]; \quad g(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) = 0\}$$

é um ideal. Como $\mathbb{C}[[X_1, \dots, X_n]]$ é Noetheriano, I é finitamente gerado, ou seja, existem $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{C}[[X_1, \dots, X_n]]$ tais que $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$.

Um ponto $P \in \mathbb{C}^n$ é chamado uma **singularidade** da curva \mathcal{C} se P é solução do sistema

$$f_i = f_{iX_j} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, r \text{ e } \forall j = 1, \dots, n.$$

Geometricamente, pode-se mostrar que em uma singularidade P a reta tangente a \mathcal{C} não está definida.

O inteiro $m = m_0 = \min_{1 \leq i \leq n} \{mult(\varphi_i(t))\}$ é chamado de **multiplicidade** da curva e denotado por $mult(\mathcal{C})$. Quando $mult(\mathcal{C}) = 1$, dizemos que a curva é **suave** e caso contrário, ou seja, $mult(\mathcal{C}) > 1$, dizemos que a curva é **singular**.

1.1 Resolução de Singularidades

Nesta seção vamos apresentar o método denominado resolução de singularidades. Em geral, na literatura encontramos uma vasta bibliografia abordando tal método para curvas planas, entre as quais [W] e [H]. Este último opta por um enfoque mais direto e simplificado, omitindo a análise geométrica por trás do processo. Para curvas espaciais indicamos ao leitor a referência [Sem].

Uma descrição detalhada contendo todas as demonstrações dos resultados relacionados com o método seria muito extensa e direcionaria o enfoque deste trabalho para este tópico e não para os resultados que de fato nos interessam. Assim, optamos em apresentar os resultados diluídos no texto e oferecer ao leitor exemplos detalhados e completos, uma vez que nossas fontes pesquisadas, embora apresentem a teoria de modo claro, não fornecem exemplos, principalmente no caso espacial.

Uma relação de equivalência entre curvas, muito estudada, é a relação que identifica duas curvas equiresolúveis (Veja definição (1.4) adiante). Tal relação de equivalência se baseia no processo de resolução de singularidades e, no caso de curvas planas, coincide com a equivalência topológica. No entanto, como Zariski notou, não coincide com a equivalência topológica no caso espacial.

Grosseiramente falando, o processo de resolução de singularidades consiste em transformar, por meio de um número finito de *blowing-ups*, qualquer curva algebróide em uma curva algebróide suave. Este processo permite estudar uma singularidade transformando-a em singularidades mais simples. Tal processo ficará mais claro nas páginas seguintes.

Definição 1.3. *Seja $O = (0, \dots, 0)$ a origem de \mathbb{C}^{n+1} e considere em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{O\}$ a seguinte relação de equivalência:*

$$(a_1, \dots, a_{n+1}) \sim (b_1, \dots, b_{n+1}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; (a_1, \dots, a_{n+1}) = (\lambda b_1, \dots, \lambda b_{n+1}).$$

A classe de equivalência de um elemento (a_1, \dots, a_{n+1}) pela relação acima é indicada por $[a_1 : \dots : a_{n+1}]$ e o conjunto de todas as classes de equivalência dos elementos de \mathbb{C}^{n+1} pela

relação acima é chamado de **espaço projetivo** e denotado por \mathbb{P}^n , ou seja,

$$\mathbb{P}^n = \{[a_1 : \dots : a_{n+1}]; (a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{O\}\}.$$

Denominamos \mathbb{P}^1 de **reta projetiva** e \mathbb{P}^2 de **plano projetivo**.

Note que a relação de equivalência acima identifica todos os elementos de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{O\}$ que pertencem a uma mesma reta passando pela origem como um único elemento de \mathbb{P}^n .

Se $[a_1 : \dots : a_{i-1} : a_i : a_{i+1} : \dots : a_{n+1}] \in \mathbb{P}^n$ é tal que $a_i \neq 0$, então temos que

$$(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n+1}) \sim \left(a_i \frac{a_1}{a_i}, \dots, a_i \frac{a_{i-1}}{a_i}, a_i, a_i \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, a_i \frac{a_{n+1}}{a_i} \right),$$

ou seja,

$$[a_1 : \dots : a_{i-1} : a_i : a_{i+1} : \dots : a_{n+1}] = \left[\frac{a_1}{a_i} : \dots : \frac{a_{i-1}}{a_i} : 1 : \frac{a_{i+1}}{a_i} : \dots : \frac{a_{n+1}}{a_i} \right].$$

Denotando

$$\begin{aligned} U_i &= \{[a_1 : \dots : a_{i-1} : a_i : a_{i+1} : \dots : a_{n+1}] \in \mathbb{P}^n; a_i \neq 0\} \\ &= \{[b_1 : \dots : b_{i-1} : 1 : b_{i+1} : \dots : b_{n+1}] \in \mathbb{P}^n\}, \end{aligned}$$

temos que

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i.$$

Chamamos cada U_i de uma **carta local** de \mathbb{P}^n . Note que U_i pode ser identificado de modo natural com \mathbb{C}^n .

O **Blowing-up** de \mathbb{C}^2 em O , consiste do espaço

$$\mathcal{B} = \{((x, y), [a_1 : a_2]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1; a_1 y = a_2 x\}.$$

Temos $\mathbb{P}^1 = U_1 \cup U_2$, com $U_1 = \{[a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^1; a_2 \in \mathbb{C}, a_1 \neq 0\} = \{[1 : \frac{a_2}{a_1}] \in \mathbb{P}^1\}$ e

$U_2 = \{[a_1 : a_2]; a_i \in \mathbb{C}, a_2 \neq 0\} = \{[\frac{a_1}{a_2} : 1] \in \mathbb{P}^1\}$. Na parte de \mathcal{B} tal que $a_1 \neq 0$, podemos escrever $Y = \frac{a_2}{a_1}$ e como $a_1y = a_2x$ (em \mathcal{B}), temos que $y = \frac{a_2}{a_1}x = Yx$ e os pontos de \mathcal{B} com esta propriedade são $V_1 = \{((x, Yx), [1 : Y]) \in \mathcal{B}\}$ que podem ser identificados naturalmente com \mathbb{C}^2 munido com o sistema de coordenadas (X, Y) onde $X = x$. Analogamente, para o conjunto de pontos de \mathcal{B} tais que $a_2 \neq 0$ podemos escrever $X = \frac{a_1}{a_2}$ e a condição $a_1y = a_2x$ nos dá $x = \frac{a_1}{a_2}y = Xy$ e deste modo, os pontos de \mathcal{B} com esta propriedade pertencem a $V_2 = \{((Xy, y), [X : 1]) \in \mathcal{B}\}$ que também podemos identificar com \mathbb{C}^2 munido com o sistema de coordenadas (X, Y) onde $Y = y$. Temos assim que $\mathcal{B} = V_1 \cup V_2$ e cada V_i é chamado uma **carta local** de \mathcal{B} .

Se considerarmos a projeção $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}^2$, então temos que $\mathcal{E} = \pi^{-1}(0, 0)$ é isomorfo a \mathbb{P}^1 é chamado de **divisor excepcional** que é dado pela equação $x = 0$ em V_1 e pela equação $y = 0$ em V_2 . Observe também que se $(x, y) \neq (0, 0)$, então temos que $[a_1 : a_2] = [x : y]$, ou seja, $\pi^{-1}(\mathbb{C}^2 - \{O\})$ é isomorfo a $\mathcal{B} - \mathcal{E}$. Chamamos de **transformada total** de \mathcal{C} o conjunto $\pi^{-1}(\mathcal{C})$. Note que $\mathcal{E} \subset \pi^{-1}(\mathcal{C})$. O fecho do conjunto $\pi^{-1}(\mathcal{C} - \{O\})$ é denotado por $\mathcal{C}^{(1)}$ e é chamado de **transformada estrita** de \mathcal{C} .

Se \mathcal{C} é um ramo plano, então podemos defini-lo por uma série $f(X, Y) \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ irredutível de modo que se

$$\mathcal{C} : \begin{cases} X = \varphi_1(t) \\ Y = \varphi_2(t) \end{cases}$$

é uma parametrização de \mathcal{C} , então $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = 0$.

Exemplo 1.1. *Seja \mathcal{L} uma reta que passa pela origem de \mathbb{C}^2 dada por $ay - bx = 0$. A transformada total de \mathcal{C} possui como equação*

$$aYX - bX = X(aY - b) = 0 \text{ em } V_1$$

$$aY - bXY = Y(a - bX) = 0 \text{ em } V_2,$$

onde temos que o divisor excepcional \mathcal{E} tem equação $X = 0$ e a transformada estrita é $aY = b$ em V_1 , respectivamente $Y = 0$ e $bX = a$ em V_2 . Deste modo, para todas as retas $ay - bx = 0$ tais que $a \neq 0$, temos que a transformada estrita intercepta o divisor excepcional no ponto $(0, \frac{b}{a})$ em V_1 e para aquelas retas com $b \neq 0$ temos, como interseção com o divisor

excepcional o ponto $(\frac{a}{b}, 0)$ em V_2 . Deste modo, para cada direção em \mathbb{C}^2 temos um ponto no divisor excepcional \mathcal{E} .

Exemplo 1.2. Considere a curva \mathcal{C} dada por $y^2 - x^3 = 0$. A transformada total de \mathcal{C} é dada pela equações

$$(YX)^2 - X^3 = X^2(Y^2 - X) = 0 \text{ em } V_1$$

$$Y^2 - (XY)^3 = Y^2(1 - X^3Y) = 0 \text{ em } V_2,$$

onde temos que o divisor excepcional \mathcal{E} tem equação $X = 0$ e a transformada estrita é $Y^2 - X = 0$ em V_1 , respectivamente $Y = 0$ e $1 - X^3Y = 0$ em V_2 . Note que em V_1 , $(0, 0)$ é um ponto do divisor excepcional e da transformada estrita em V_1 , enquanto que o mesmo não ocorre em V_2 .

A seguir apresentamos uma visualização “real” de \mathcal{C} , $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ e $\mathcal{C}^{(1)}$ usando \mathbb{R}^2 em vez de \mathbb{C}^2 e \mathbb{R} em vez de \mathbb{P}^1 para termos uma ideia da situação geométrica dos conceitos.

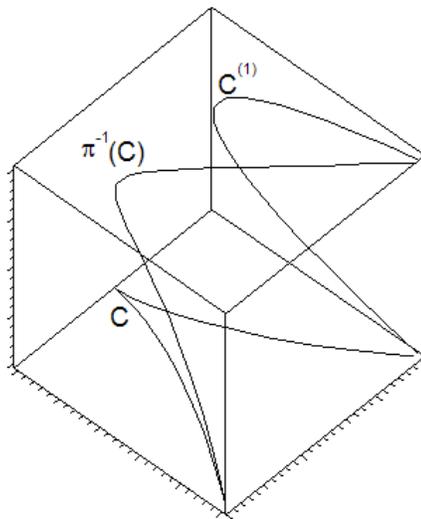


Figura 1.1: Blowing-up da curva $y^2 - x^3$.

Seja a curva \mathcal{C} dada parametricamente, digamos por

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \end{cases}$$

com $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in \mathbb{C}[[t]]$, então podemos, sem perda de generalidade, supor que $\text{mult}(\varphi_1(t)) \leq \text{mult}(\varphi_2(t))$ e assim, podemos obter uma parametrização para a transformada estrita de \mathcal{C} que intercepta o divisor excepcional na carta local de \mathcal{B} correspondente, observando que em V_1 temos $y = Yx$ e $x = X$. Assim, basta considerar

$$\begin{cases} X = \varphi_1(t) \\ Y = \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} \end{cases}$$

e o divisor excepcional \mathcal{E} é dado pela equação $X = 0$. Note que em V_2 , temos as coordenadas $x = Xy$ e $y = Y$ e se $\text{mult}(\varphi_1(t)) < \text{mult}(\varphi_2(t))$ não conseguimos uma parametrização na origem do novo sistema de coordenadas (X, Y) .

Se o ponto em que o divisor excepcional e a curva se interceptam ainda é um ponto singular podemos repetir o processo, efetuando um blowing-up neste ponto, que sempre pode ser considerado, a menos de uma translação como sendo a origem do novo sistema.

Vejamos agora a situação geral.

O **Blowing-up** de \mathbb{C}^n em O é o espaço

$$\mathcal{B} = \{((x_1, \dots, x_n), [a_1 : \dots : a_n]) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}; a_j x_i = a_i x_j, 1 \leq i, j \leq n\}.$$

Como no caso plano, se $a_i \neq 0$, então temos que

$$[a_1 : \dots : a_{i-1} : a_i : a_{i+1} : \dots : a_n] = \left[\frac{a_1}{a_i} : \dots : \frac{a_{i-1}}{a_i} : 1 : \frac{a_{i+1}}{a_i} : \dots : \frac{a_n}{a_i} \right]$$

e denotando $X_j = \frac{a_j}{a_i}$ temos que $x_j = \frac{a_j}{a_i} x_i = X_j x_i$ de modo que o conjunto dos pontos de \mathcal{B} com esta propriedade é dado por

$$V_i = \{((X_1 x_i, \dots, X_{i-1} x_i, x_i, X_{i+1} x_i, \dots, X_n x_i), [X_i : \dots : X_{i-1} : 1 : X_{i+1} : \dots : X_n]) \in \mathcal{B}\}$$

que é isomorfo a \mathbb{C}^n e é munido com o sistema de coordenadas (X_1, \dots, X_n) onde $X_i = x_i$.

Temos assim que V_i é uma carta local para \mathcal{B} , que pode ser considerado como

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^n V_i.$$

Como no caso plano, considerando a projeção $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}^n$ temos o conceito de divisor excepcional, transformada total e estrita de uma curva \mathcal{C} que contém a origem O .

Seja a curva \mathcal{C} em \mathbb{C}^n dada por uma parametrização

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(t) \end{cases}$$

com $\varphi_i(t) \in \mathbb{C}[[t]]$. Podemos, sem perda de generalidade, supor que $\text{mult}(\varphi_1(t)) \leq \text{mult}(\varphi_i(t))$ para todo $1 \leq i \leq n$. Neste caso, a transformada estrita da curva intercepta o divisor excepcional \mathcal{E} que tem equação $X_1 = 0$ na carta local V_1 e admite parametrização no novo sistema de coordenadas

$$\begin{cases} X_1 = \varphi_1(t) \\ X_2 = \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} \\ \vdots \\ X_n = \frac{\varphi_n(t)}{\varphi_1(t)}. \end{cases}$$

Observação 1.1. *Sejam $O \in \mathbb{C}^n$, \mathcal{C} uma curva em \mathbb{C}^n que passa por O , \mathcal{B}_1 o blowing-up de \mathbb{C}^n na origem e V_1^1, \dots, V_n^1 as cartas locais de \mathcal{B}_1 e \mathcal{E}_0 o divisor excepcional. Na carta local V_i^1 temos que o divisor excepcional \mathcal{E}_0 tem equação $X_i^1 = 0$. Digamos que a transformada estrita $\mathcal{C}^{(1)}$ de \mathcal{C} intercepte \mathcal{E}_0 em O_1 , onde O_1 denota a origem do sistema de coordenadas em V_i^1 . Realizando um blowing-up em $O_1 \in V_i^1$, temos que na carta local V_j^2 , o divisor excepcional \mathcal{E}_1 tem equação $X_j^2 = 0$ e intercepta a transformada estrita $\mathcal{E}_0^{(1)}$ de \mathcal{E}_0 transversalmente se $j \neq i$.*

Um resultado clássico da teoria de curvas algebróides é que após um número finito de blowing-ups toda curva é transformada em uma curva suave.

A sequência de parametrizações $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{(0)}, \mathcal{C}^{(1)}, \mathcal{C}^{(2)}, \dots, \mathcal{C}^{(N)}$ obtida pelos blowing-ups, onde $\mathcal{C}^{(N)}$ é suave e $\mathcal{C}^{(N-1)}$ é singular, é chamada **resolução canônica** de \mathcal{C} .

Definição 1.4. *A resolução canônica de \mathcal{C} determina a seguinte sequência:*

$$\text{mult}(\mathcal{C}) \geq \text{mult}(\mathcal{C}^{(1)}) \geq \dots \geq \text{mult}(\mathcal{C}^{(i)}) \geq \dots > 1 = \text{mult}(\mathcal{C}^{(N)}) = \text{mult}(\mathcal{C}^{(N+1)}) = \dots$$

que é chamada **sequência de multiplicidades** de \mathcal{C} . Dizemos que dois ramos são **equioresolúveis** se suas sequências de multiplicidades são iguais.

Sejam $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{(0)}$ um ramo em \mathbb{C}^n que tem sua singularidade O_0 localizada na origem de \mathbb{C}^n , \mathcal{E}_0 o divisor excepcional obtido pelo blowing-up em O_0 , $\mathcal{C}^{(1)}$ a curva dada pela transformada estrita de $\mathcal{C}^{(0)}$ após o blowing-up em O_0 e O_1 o ponto de interseção de $\mathcal{C}^{(1)}$ com \mathcal{E}_0 na carta local correspondente. Recursivamente denotamos por \mathcal{E}_i o divisor excepcional obtido pelo blowing-up em O_i , $\mathcal{C}^{(i+1)}$ a curva dada pela transformada estrita de $\mathcal{C}^{(i)}$ e $O_{i+1} = \mathcal{C}^{(i+1)} \cap \mathcal{E}_i$ na respectiva carta local. A multiplicidade de $\mathcal{C}^{(k)}$ (em O_k) será denotada por m_k .

Como mencionamos, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

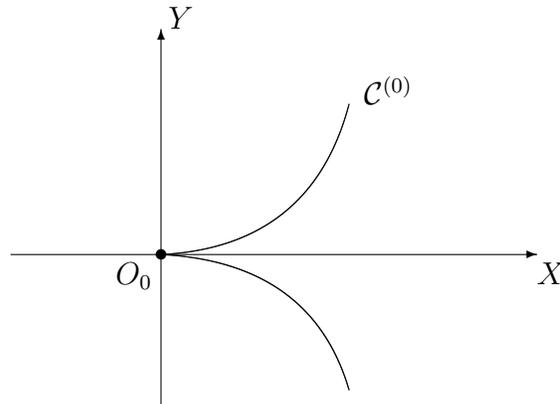
$$m_0 \geq m_1 \geq \dots > 1 = m_N = m_{N+1} \dots$$

O comportamento (geométrico) no processo de resolução (blowing-up), ou mais precisamente, a configuração dos divisores excepcionais e da transformada estrita da curva reserva informações importantes sobre a curva.

No que segue, vamos representar o divisor excepcional, que é isomorfo a \mathbb{P}^1 no caso plano e a \mathbb{P}^2 no caso de curvas em \mathbb{C}^3 , respectivamente, por uma reta e por um plano.

Exemplo 1.3. *Vamos resolver a singularidade da curva $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{(0)}$:*
$$\begin{cases} X = t^4 \\ Y = t^{10} + t^{15} \end{cases} .$$

Inicialmente temos que $O_0 = (0, 0)$ e $m_0 = \text{mult}(\mathcal{C}^{(0)}) = 4$.

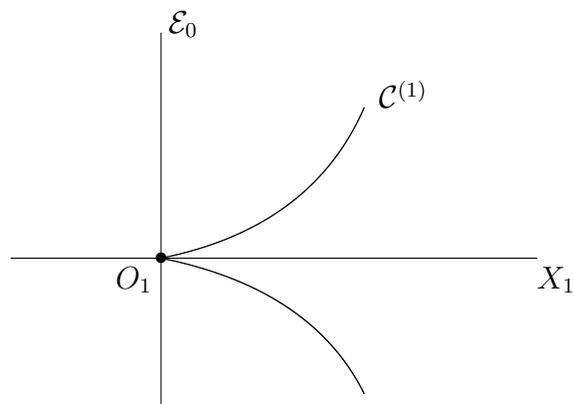


1° Blowing-up

Note que $\text{mult}_t(X) < \text{mult}_t(Y)$, assim realizando um blowing-up em O_0 , obtemos que a transformada estrita $C^{(1)}$ da curva $C^{(0)}$ tem como parametrização em V_1 , no novo sistema de coordenadas:

$$C^{(1)} : \begin{cases} X_1 = t^4 \\ Y_1 = t^6 + t^{11} \end{cases} .$$

Assim temos que o divisor excepcional obtido pelo blowing-up em $O_0 = (0, 0)$ é dado por $\mathcal{E}_0 : X_1 = 0$ e $O_1 = C^{(1)} \cap \mathcal{E}_0 = (0, 0)$. E mais, $m_1 = \text{mult}(C^{(1)}) = 4$.



2° Blowing-up

Agora fazendo um blowing-up em O_1 , obtemos que a transformada estrita $C^{(2)}$ da curva $C^{(1)}$ tem como parametrização em V_1^1 :

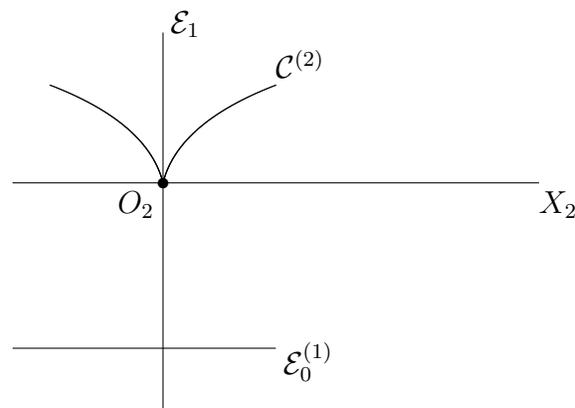
$$\mathcal{C}^{(2)} : \begin{cases} X_2 = t^4 \\ Y_2 = t^2 + t^7 \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : X_2 = 0$$

$$O_2 = \mathcal{C}^{(2)} \cap \mathcal{E}_1 = (0, 0)$$

$$m_2 = \text{mult}(\mathcal{C}^{(2)}) = 2.$$

Quando realiza-se o blowing-up em $\mathcal{E}_0 : X_1 = 0$, temos que $\mathcal{E}_0^{(1)}$ não passa pela origem do sistema de coordenadas considerado.



3° Blowing-up

Agora veja que $\text{mult}_t(Y_2) < \text{mult}_t(X_2)$, logo ao realizar um blowing-up em O_2 , obtemos que a transformada estrita $\mathcal{C}^{(3)}$ da curva $\mathcal{C}^{(2)}$ tem como parametrização em V_2^2 :

$$\mathcal{C}^{(3)} : \begin{cases} X_3 = t^2 - t^7 + t^{12} + \dots \\ Y_3 = t^2 + t^7 \end{cases}$$

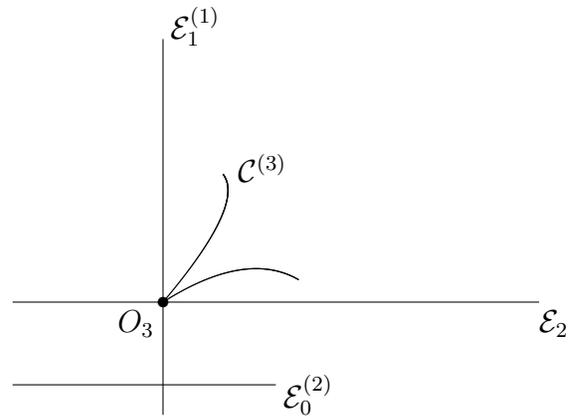
$$\mathcal{E}_2 : Y_3 = 0$$

$$\mathcal{E}_1^{(1)} : X_3 = 0$$

$\mathcal{E}_0^{(2)}$: não passa pela origem do sistema de coordenadas

$$O_3 = \mathcal{C}^{(3)} \cap \mathcal{E}_2 = (0, 0)$$

$$m_3 = \text{mult}(\mathcal{C}^{(3)}) = 2.$$



4° Blowing-up

Realizando um blowing-up em O_3 , obtemos que a transformada estrita $\mathcal{C}^{(4)}$ da curva $\mathcal{C}^{(3)}$ tem como parametrização em V_2^3 :

$$\mathcal{C}^{(4)} : \begin{cases} X_4 = 1 - 2t^5 + 3t^{10} + \dots \\ Y_4 = t^2 + t^7 \end{cases} .$$

Fazendo a translação $\overline{X}_4 = X_4 - 1$ e $\overline{Y}_4 = Y_4$ obtemos, neste novo sistema de coordenadas,

$$\mathcal{C}^{(4)} : \begin{cases} \overline{X}_4 = -2t^5 + 3t^{10} + \dots \\ \overline{Y}_4 = t^2 + t^7 \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_3 : \overline{Y}_4 = 0$$

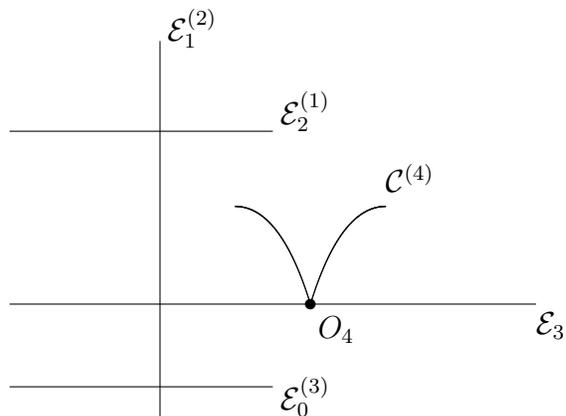
$\mathcal{E}_2^{(1)}$: não passa pela origem do sistema de coordenadas

$$\mathcal{E}_1^{(2)} : \overline{X}_4 = -1$$

$\mathcal{E}_0^{(3)}$: não passa pela origem do sistema de coordenadas

$$O_4 = \mathcal{C}^{(4)} \cap \mathcal{E}_3 = (0, 0)$$

$$m_4 = \text{mult}(\mathcal{C}^{(4)}) = 2.$$



5° Blowing-up

Efetuada um blowing-up em O_4 , obtemos que a transformada estrita $\mathcal{C}^{(5)}$ da curva $\mathcal{C}^{(4)}$ tem como parametrização em V_2^4 :

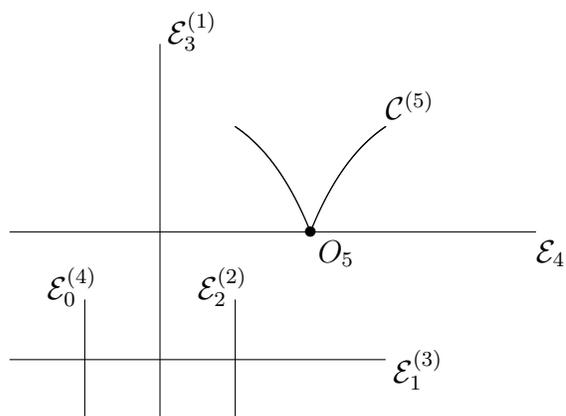
$$\mathcal{C}^{(5)} : \begin{cases} \bar{X}_5 = -2t^3 + 5t^8 + \dots \\ \bar{Y}_5 = t^2 + t^7 \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \bar{Y}_5 = 0$$

$\mathcal{E}_3^{(1)}, \mathcal{E}_2^{(2)}, \mathcal{E}_1^{(3)}, \mathcal{E}_0^{(4)}$: não passam pela origem do sistema de coordenadas

$$O_5 = \mathcal{C}^{(5)} \cap \mathcal{E}_4 = (0, 0)$$

$$m_5 = \text{mult}(\mathcal{C}^{(5)}) = 2.$$



6° Blowing-up

Fazendo um blowing-up em O_5 , obtemos que a transformada estrita $\mathcal{C}^{(6)}$ da curva $\mathcal{C}^{(5)}$ tem como parametrização em V_2^5 :

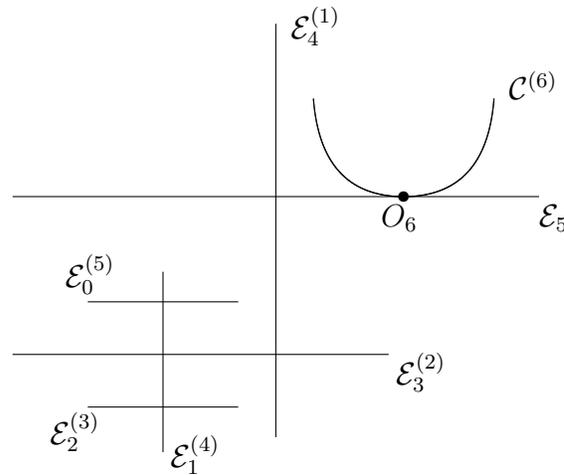
$$\mathcal{C}^{(6)} : \begin{cases} \overline{X}_6 = -2t + 7t^6 - 7t^{11} + \dots \\ \overline{Y}_6 = t^2 + t^7 \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_5 : \overline{Y}_6 = 0$$

$\mathcal{E}_4^{(1)}, \mathcal{E}_3^{(2)}, \mathcal{E}_2^{(3)}, \mathcal{E}_1^{(4)}, \mathcal{E}_0^{(5)}$: não passam pela origem do sistema de coordenadas

$$O_6 = \mathcal{C}^{(6)} \cap \mathcal{E}_5 = (0, 0)$$

$$m_6 = \text{mult}(\mathcal{C}^{(6)}) = 1.$$



Obtemos assim a sequência de multiplicidades

$$4, 4, 2, 2, 2, 2, 1, \dots$$

Definição 1.5. Dizemos que uma curva \mathcal{C} em \mathbb{C}^n dada por uma parametrização $X_i = \varphi_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ é **transversal** na origem a um hiperplano H de equação $\sum_{i=1}^n a_i X_i = 0$ se $\text{mult}_t(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(t)) = \text{mult}(\mathcal{C})$.

Geometricamente, uma curva \mathcal{C} é transversal a um hiperplano H na origem O , se H não contém a reta tangente a \mathcal{C} em O .

Uma **boa resolução** de singularidade é um processo de resolução (cadeia de blowing-ups) tal que obtemos uma curva suave $\mathcal{C}^{(N)}$ e divisores excepcionais $\mathcal{E}_0^{(N-1)}, \mathcal{E}_1^{(N-2)}, \dots, \mathcal{E}_{N-2}^{(1)}, \mathcal{E}_{N-1}^{(0)} = \mathcal{E}_{N-1}$ com três destes objetos não se interceptando simultaneamente e dois a dois transversais na origem. Pode-se garantir (Veja em [Hir]) que sempre existe uma boa resolução para uma curva dada.

Note que no exemplo anterior os objetos obtidos no último blowing-up são tais que quaisquer três deles não se interceptam simultaneamente. No entanto, a curva $\mathcal{C}^{(6)}$ e \mathcal{E}_5 não são transversais, pois \mathcal{E}_5 tem equação $\overline{Y}_6 = 0$ e $\text{mult}_t(t^2 + t^7) = 2$ e pela definição acima, $\mathcal{C}^{(6)}$ e \mathcal{E}_5 não são transversais e, assim, não obtivemos uma boa resolução. Assim podemos continuar o processo de resolução de singularidades até obtermos uma boa resolução.

7° Blowing-up

Ao realizar um blowing-up em O_6 , obtemos que a transformada estrita $\mathcal{C}^{(7)}$ da curva $\mathcal{C}^{(6)}$ tem como parametrização em V_1^6 :

$$\mathcal{C}^{(7)} : \begin{cases} \overline{X}_7 = -2t + 7t^6 - 7t^{11} + \dots \\ \overline{Y}_7 = -\frac{1}{2}t - \frac{9}{4}t^6 - \frac{49}{8}t^{11} + \dots \end{cases}$$

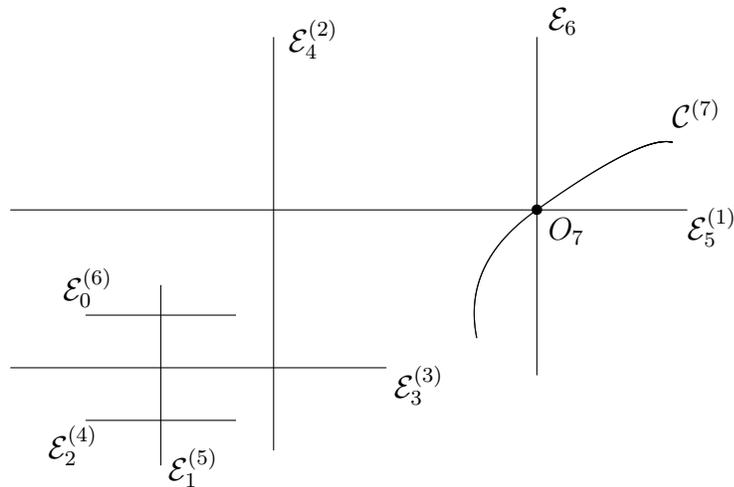
$$\mathcal{E}_6 : \overline{X}_7 = 0$$

$$\mathcal{E}_5^{(1)} : \overline{Y}_7 = 0$$

$$\mathcal{E}_4^{(2)}, \mathcal{E}_3^{(3)}, \mathcal{E}_2^{(4)}, \mathcal{E}_1^{(5)}, \mathcal{E}_0^{(6)} : \text{não passam pela origem do sistema de coordenadas}$$

$$O_7 = \mathcal{C}^{(7)} \cap \mathcal{E}_6 = (0, 0)$$

$$m_7 = \text{mult}(\mathcal{C}^{(7)}) = 1.$$



Veja que as curvas $\mathcal{C}^{(7)}$, \mathcal{E}_6 e $\mathcal{E}_5^{(1)}$ interceptam-se simultaneamente, e portanto ainda não alcançamos uma boa resolução. Partimos então para o próximo blowing-up.

8° Blowing-up

Veja agora que ao fazer um blowing-up em O_7 , obtemos que a transformada estrita $\mathcal{C}^{(8)}$ da curva $\mathcal{C}^{(7)}$ tem como parametrização em V_1^7 :

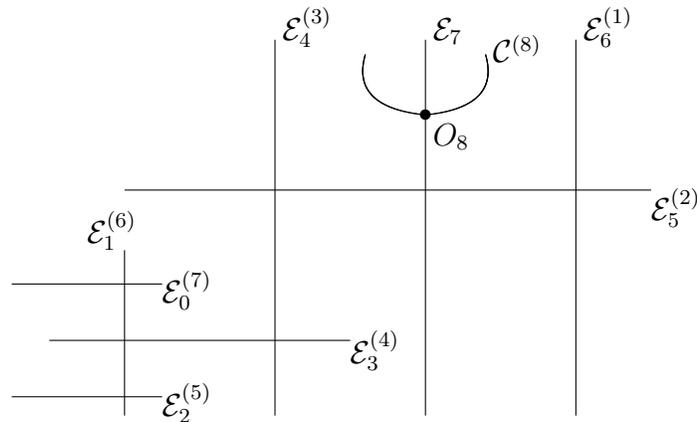
$$\mathcal{C}^{(8)} : \begin{cases} \overline{X}_8 = -2t + 7t^6 - 7t^{11} + \dots \\ \overline{Y}_8 = \frac{1}{4} - 2t^5 + \frac{147}{16}t^{10} + \dots \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7 : \overline{X}_8 = 0$$

$$\mathcal{E}_5^{(2)} : \overline{Y}_8 = 0$$

$\mathcal{E}_6^{(1)}, \mathcal{E}_4^{(3)}, \mathcal{E}_3^{(4)}, \mathcal{E}_2^{(5)}, \mathcal{E}_1^{(6)}, \mathcal{E}_0^{(7)}$: não passam pela origem do sistema de coordenadas

$$m_8 = \text{mult}(\mathcal{C}^{(8)}) = 1.$$



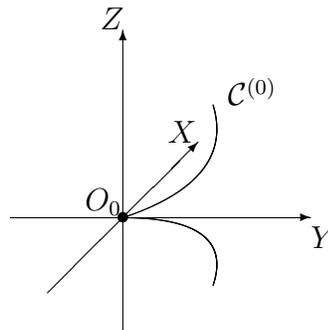
Note que $\mathcal{C}^{(8)}$ é suave e levando-se em conta os divisores $\mathcal{E}_0^{(7)}, \mathcal{E}_1^{(6)}, \mathcal{E}_2^{(5)}, \mathcal{E}_3^{(4)}, \mathcal{E}_5^{(2)}, \mathcal{E}_6^{(1)}$, $\mathcal{E}_7^{(0)} = \mathcal{E}_7$ temos obtido uma boa resolução para a curva $\mathcal{C}^{(0)}$:
$$\begin{cases} X = t^4 \\ Y = t^{10} + t^{15} \end{cases} .$$

Exemplo 1.4. Vamos obter uma boa resolução para a singularidade da curva espacial $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{(0)}$ dada pela seguinte parametrização formal:

$$\mathcal{C}^{(0)} : \begin{cases} X = t^8 \\ Y = t^{10} + t^{13} \\ Z = t^{12} + at^{15}, \end{cases}$$

onde $a \in \mathbb{C}$.

Vamos proceder os cálculos de forma similar aos realizados no exemplo (1.3). Inicialmente temos que $O_0 = (0, 0, 0)$ e $m_0 = \text{mult}(\mathcal{C}^{(0)}) = 8$.

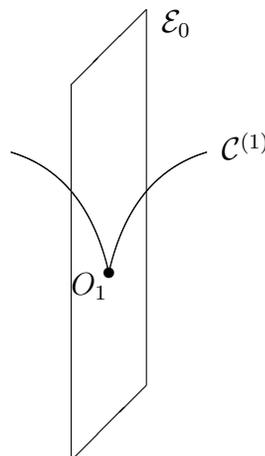


1° Blowing-up

Note que X possui a menor multiplicidade dentre X , Y e Z . Assim realizando um blowing-up em O_0 , obtemos que a transformada estrita $\mathcal{C}^{(1)}$ da curva $\mathcal{C}^{(0)}$ tem como parametrização em V_1 , no novo sistema de coordenadas:

$$\mathcal{C}^{(1)} : \begin{cases} X_1 = t^8 \\ Y_1 = t^2 + t^5 \\ Z_1 = t^4 + at^7. \end{cases}$$

O divisor excepcional é dado por $\mathcal{E}_0 : X_1 = 0$, $O_1 = \mathcal{C}^{(1)} \cap \mathcal{E}_0 = (0, 0, 0)$ e $m_1 = \text{mult}(\mathcal{C}^{(1)}) = 2$.



2° Blowing-up

Veja agora que Y_1 possui a menor multiplicidade, deste modo fazendo um blowing-up em O_1 , obtemos que a transformada estrita $\mathcal{C}^{(2)}$ da curva $\mathcal{C}^{(1)}$ tem como parametrização em V_2^1 :

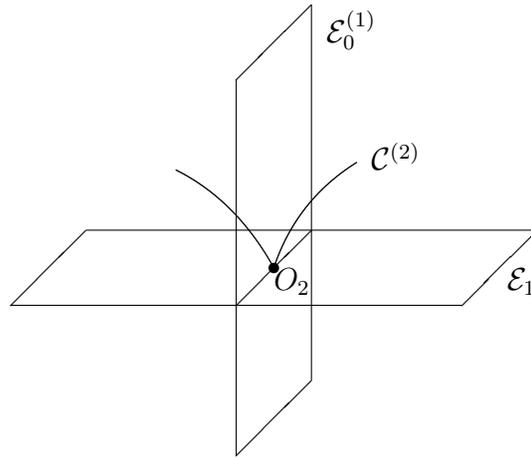
$$\mathcal{C}^{(2)} : \begin{cases} X_2 = t^6 - t^9 + t^{12} - \dots \\ Y_2 = t^2 + t^5 \\ Z_2 = t^2 + (a-1)t^5 + (a-1)t^8 + (a-1)t^{11} + \dots \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : Y_2 = 0$$

$$\mathcal{E}_0^{(1)} : X_2 = 0$$

$$O_2 = \mathcal{C}^{(2)} \cap \mathcal{E}_1 = (0, 0, 0)$$

$$m_2 = \text{mult}(\mathcal{C}^{(2)}) = 2.$$



3° Blowing-up

Após o segundo blowing-up, escolhendo Y_2 , ao realizar um blowing-up em O_2 , obtemos que a transformada estrita $\mathcal{C}^{(3)}$ da curva $\mathcal{C}^{(2)}$ tem como parametrização em V_2^2 :

$$\mathcal{C}^{(3)} : \begin{cases} X_3 = t^4 - 2t^7 + 3t^{10} + \dots \\ Y_3 = t^2 + t^5 \\ Z_3 = 1 + (a-2)t^3 + (3-2a)t^6 + (3a-4)t^9 + \dots \end{cases}$$

A curva $\mathcal{C}^{(3)}$ não passa pela origem e continua singular, uma vez que não possui multiplicidade 1. Fazendo a translação $\bar{Z}_3 = Z_3 - 1$, $\bar{X}_3 = X_3$ e $\bar{Y}_3 = Y_3$ obtemos, neste novo sistema de coordenadas,

$$\mathcal{C}^{(3)} : \begin{cases} \overline{X}_3 = t^4 - 2t^7 + 3t^{10} + \dots \\ \overline{Y}_3 = t^2 + t^5 \\ \overline{Z}_3 = (a-2)t^3 + (3-2a)t^6 + (3a-4)t^9 + \dots \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_2 : \overline{Y}_3 = 0$$

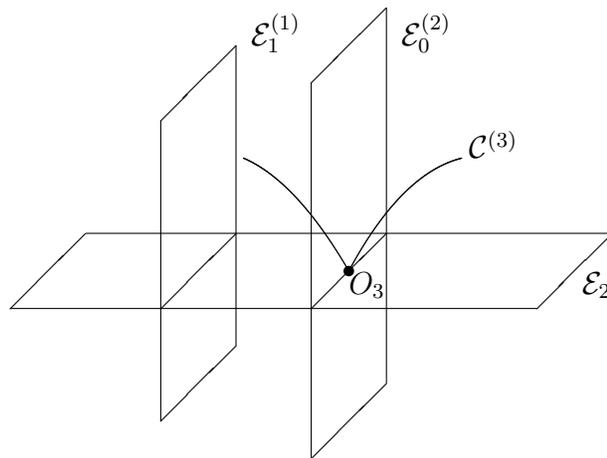
$\mathcal{E}_1^{(1)}$: não passa pela origem do sistema de coordenadas

$$\mathcal{E}_0^{(2)} : \overline{X}_3 = 0$$

$$O_3 = \mathcal{C}^{(3)} \cap \mathcal{E}_2 = (0, 0, 0)$$

$$m_3 = \text{mult}(\mathcal{C}^{(3)}) = 2.$$

Note que mesmo se $a = 2$, a multiplicidade da curva $\mathcal{C}^{(3)}$ não se altera. No entanto, no próximo blowing-up o valor que se atribuir a “a” determinará a multiplicidade da curva $\mathcal{C}^{(4)}$.



4° Blowing-up

Ao realizar um blowing-up em O_3 , obtemos que a transformada estrita $\mathcal{C}^{(4)}$ da curva $\mathcal{C}^{(3)}$ tem como parametrização em V_2^3 :

$$\mathcal{C}^{(4)} : \begin{cases} \overline{X}_4 = t^2 - 3t^5 + 6t^8 + \dots \\ \overline{Y}_4 = t^2 + t^5 \\ \overline{Z}_4 = (a-2)t + (-3a+5)t^4 + (6a-9)t^7 + \dots \end{cases}$$

Se $a = 2$, então $\text{mult}(\mathcal{C}^{(4)}) = 2$, caso contrário $\text{mult}(\mathcal{C}^{(4)}) = 1$ e assim obtemos uma curva suave. Portanto para continuar o processo de resolução de singularidades vamos dividir o processo em dois casos.

CASO 1: $a \neq 2$.

O quarto blowing-up, além de fornecer a curva $\mathcal{C}^{(4)}$, dada pela parametrização acima, nos dá

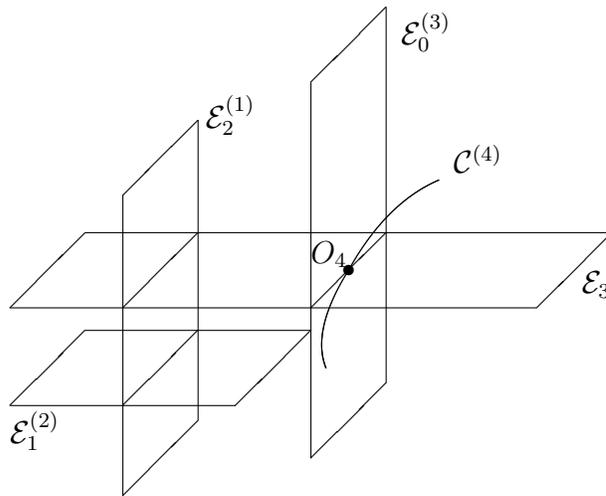
$$\mathcal{E}_3 : \overline{Y}_4 = 0$$

$\mathcal{E}_2^{(1)}, \mathcal{E}_1^{(2)}$: não passam pela origem do sistema de coordenadas

$$\mathcal{E}_0^{(3)} : \overline{X}_4 = 0$$

$$O_4 = \mathcal{C}^{(4)} \cap \mathcal{E}_3 = (0, 0, 0)$$

$$m_4 = \text{mult}(\mathcal{C}^{(4)}) = 1.$$



Observe que $\mathcal{C}^{(4)}$, \mathcal{E}_3 e $\mathcal{E}_0^{(3)}$ interceptam-se num mesmo ponto, $(0, 0, 0)$, logo não obtivemos uma boa resolução. Prossequimos para o próximo blowing-up.

5° Blowing-up

Note agora que Z_4 possui a menor multiplicidade, logo fazendo um blowing-up em O_4 , obtemos que a transformada estrita $\mathcal{C}^{(5)}$ da curva $\mathcal{C}^{(4)}$ tem como parametrização em V_3^4 :

$$\mathcal{C}^{(5)} : \begin{cases} \overline{X}_5 = \frac{1}{a-2}t + \frac{1}{(a-2)^2}t^4 + \dots \\ \overline{Y}_5 = \frac{1}{a-2}t + \frac{4a-7}{(a-2)^2}t^4 + \dots \\ \overline{Z}_5 = (a-2)t + (-3a+5)t^4 + (6a-9)t^7 + \dots \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \overline{Z}_5 = 0$$

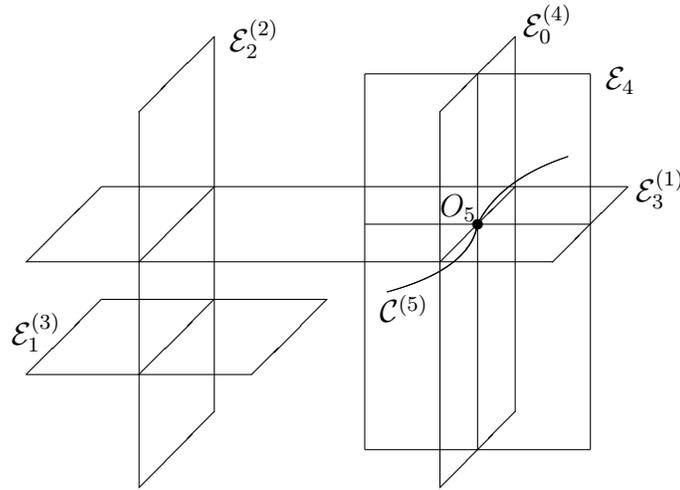
$$\mathcal{E}_3^{(1)} : \overline{Y}_5 = 0$$

$\mathcal{E}_2^{(2)}, \mathcal{E}_1^{(3)}$: não passam pela origem do sistema de coordenadas

$$\mathcal{E}_0^{(4)} : \overline{X}_5 = 0$$

$$O_5 = \mathcal{C}^{(5)} \cap \mathcal{E}_4 = (0, 0, 0)$$

$$m_5 = \text{mult}(\mathcal{C}^{(5)}) = 1.$$



Veja que faz-se necessário realizar outro blowing-up, pois apesar da curva $\mathcal{C}^{(5)}$ ser suave, temos que os divisores $\mathcal{E}_0^{(4)}, \mathcal{E}_3^{(1)}$ e \mathcal{E}_4 possuem o ponto $(0, 0, 0)$ em comum.

6° Blowing-up

Efetuada um blowing-up em O_5 , obtemos que a transformada estrita $\mathcal{C}^{(6)}$ da curva $\mathcal{C}^{(5)}$ tem como parametrização em V_2^5 :

$$\mathcal{C}^{(6)} : \begin{cases} \overline{X}_6 = 1 + \frac{4a-6}{a-2}t^3 + \dots \\ \overline{Y}_6 = \frac{1}{a-2}t + \frac{4a-7}{(a-2)^2}t^4 + \dots \\ \overline{Z}_6 = (a-2)^2 + (a-2)^2t^3 + \dots \end{cases}$$

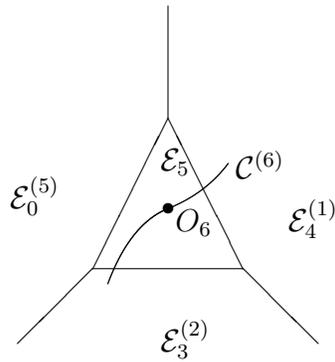
$$\mathcal{E}_5 : \overline{Y}_6 = 0$$

$$\mathcal{E}_4^{(1)} : \overline{Z}_6 = 0$$

$\mathcal{E}_3^{(2)}, \mathcal{E}_2^{(3)}, \mathcal{E}_1^{(4)}$: não passam pela origem do sistema de coordenadas

$$\mathcal{E}_0^{(5)} : \overline{X}_6 = 0$$

$$m_6 = \text{mult}(\mathcal{C}^{(6)}) = 1.$$



E finalmente alcançamos a boa resolução. Deste modo, a curva

$$\mathcal{C}^{(0)} : \begin{cases} X = t^8 \\ Y = t^{10} + t^{13} \\ Z = t^{12} + at^{15} \end{cases}$$

com $a \neq 2$, possui a seguinte sequência de multiplicidades:

$$8, 2, 2, 2, 1, 1, \dots$$

CASO 2: $a = 2$.

Como foi visto, o valor de “a” não interfere no processo de resolução de singularidade da curva $\mathcal{C}^{(0)}$ até o quarto blowing-up. Vamos continuar este processo atribuindo $a = 2$ na parametrização da curva $\mathcal{C}^{(4)}$. Temos assim,

$$\mathcal{C}^{(4)} : \begin{cases} \overline{X}_4 = t^2 - 3t^5 + 6t^8 + \dots \\ \overline{Y}_4 = t^2 + t^5 \\ \overline{Z}_4 = -t^4 + 3t^7 + \dots \end{cases}$$

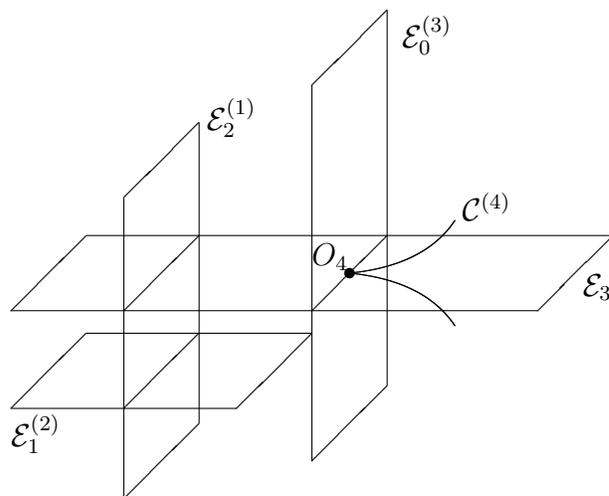
$$\mathcal{E}_3 : \overline{Y}_4 = 0$$

$\mathcal{E}_2^{(1)}, \mathcal{E}_1^{(2)}$: não passam pela origem do sistema de coordenadas

$$\mathcal{E}_0^{(3)} : \overline{X}_4 = 0$$

$$O_4 = \mathcal{C}^{(4)} \cap \mathcal{E}_3 = (0, 0, 0)$$

$$m_4 = \text{mult}(\mathcal{C}^{(4)}) = 2.$$



5° Blowing-up

Realizando um blowing-up em O_4 , obtemos que a transformada estrita $\mathcal{C}^{(5)}$ da curva $\mathcal{C}^{(4)}$ tem como parametrização em V_2^4 :

$$\mathcal{C}^{(5)} : \begin{cases} \overline{X}_5 = 1 - 4t^3 + 10t^6 - 16t^9 + \dots \\ \overline{Y}_5 = t^2 + t^5 \\ \overline{Z}_5 = -t^2 + 4t^5 - 9t^8 + \dots \end{cases}$$

Fazendo a translação $\overline{\overline{X}}_5 = \overline{X}_5 - 1$, $\overline{\overline{Y}}_5 = \overline{Y}_5$ e $\overline{\overline{Z}}_5 = \overline{Z}_5$ obtemos, neste novo sistema de coordenadas,

$$\mathcal{C}^{(5)} : \begin{cases} \overline{\overline{X}}_5 = -4t^3 + 10t^6 - 16t^9 + \dots \\ \overline{\overline{Y}}_5 = t^2 + t^5 \\ \overline{\overline{Z}}_5 = -t^2 + 4t^5 - 9t^8 + \dots \end{cases}$$

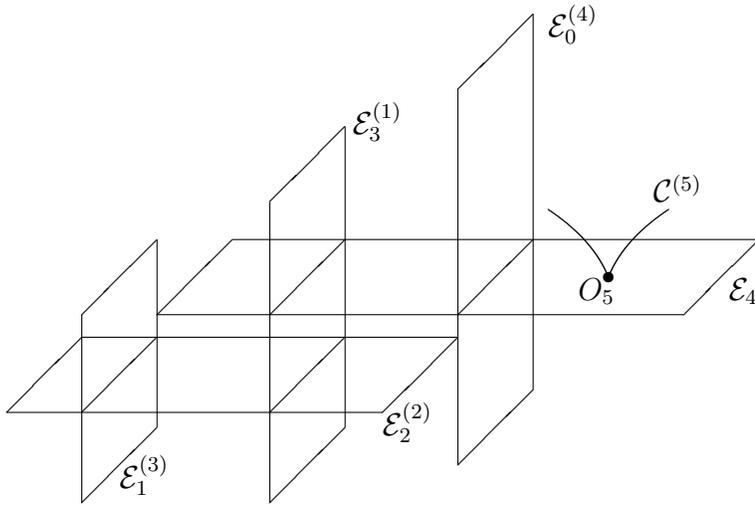
$$\mathcal{E}_4 : \overline{\overline{Y}}_5 = 0$$

$\mathcal{E}_3^{(1)}$, $\mathcal{E}_2^{(2)}$, $\mathcal{E}_1^{(3)}$: não passam pela origem do sistema de coordenadas

$$\mathcal{E}_0^{(4)} : \overline{\overline{X}}_5 = -1$$

$$O_5 = \mathcal{C}^{(5)} \cap \mathcal{E}_4 = (0, 0, 0)$$

$$m_5 = \text{mult}(\mathcal{C}^{(5)}) = 2.$$



6° Blowing-up

Obtemos ao realizar um blowing-up em O_5 , que a transformada estrita $\mathcal{C}^{(6)}$ da curva $\mathcal{C}^{(5)}$ tem como parametrização em V_2^5 :

$$\mathcal{C}^{(6)} : \begin{cases} \overline{X}_6 = -4t + 14t^4 - 30t^7 + \dots \\ \overline{Y}_6 = t^2 + t^5 \\ \overline{Z}_6 = -1 + 5t^3 - 14t^6 + \dots \end{cases}$$

Note que a curva $\mathcal{C}^{(6)}$ é suave e fazendo a translação $\widetilde{Z}_6 = \overline{Z}_6 + 1$, $\widetilde{X}_6 = \overline{X}_6$ e $\widetilde{Y}_6 = \overline{Y}_6$ obtemos, neste novo sistema de coordenadas,

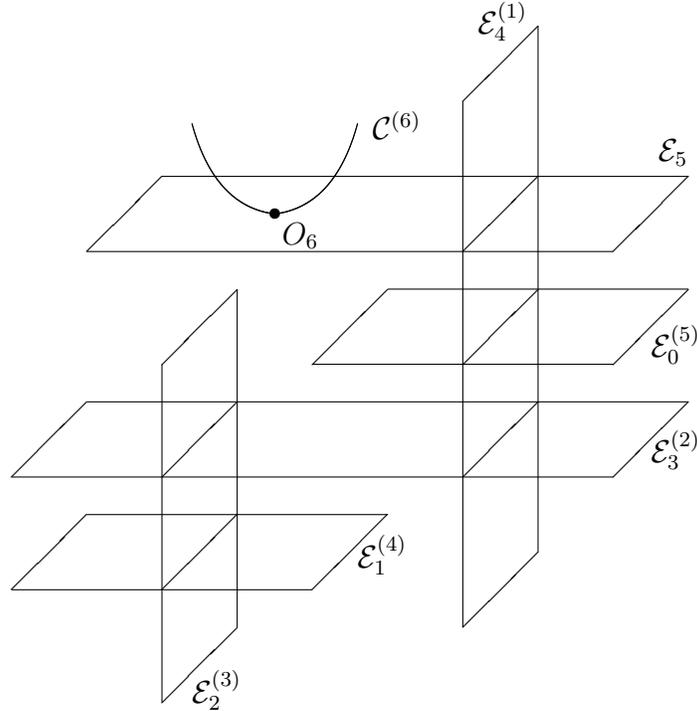
$$\mathcal{C}^{(6)} : \begin{cases} \widetilde{X}_6 = -4t + 14t^4 - 30t^7 + \dots \\ \widetilde{Y}_6 = t^2 + t^5 \\ \widetilde{Z}_6 = 5t^3 - 14t^6 + \dots \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_5 : \widetilde{Y}_6 = 0$$

$\mathcal{E}_4^{(1)}$, $\mathcal{E}_3^{(2)}$, $\mathcal{E}_2^{(3)}$, $\mathcal{E}_1^{(4)}$, $\mathcal{E}_0^{(5)}$: não passam pela origem do sistema de coordenadas

$$O_6 = \mathcal{C}^{(6)} \cap \mathcal{E}_5 = (0, 0, 0)$$

$$m_6 = \text{mult}(\mathcal{C}^{(6)}) = 1.$$



O divisor excepcional \mathcal{E}_5 e a curva $\mathcal{C}^{(6)}$ não são transversais, logo ainda não temos uma boa resolução para a curva $\mathcal{C}^{(0)}$.

7° Blowing-up

Note que X_6 possui a menor multiplicidade, assim fazendo um blowing-up em O_6 , a transformada estrita $\mathcal{C}^{(7)}$ da curva $\mathcal{C}^{(6)}$ tem como parametrização em V_1^6 :

$$\mathcal{C}^{(7)} : \begin{cases} \widetilde{X}_7 = -4t + 14t^4 - 30t^7 + \dots \\ \widetilde{Y}_7 = -\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}t^3 + \dots \\ \widetilde{Z}_7 = -\frac{5}{4}t^2 - \frac{7}{8}t^5 + \dots \end{cases}$$

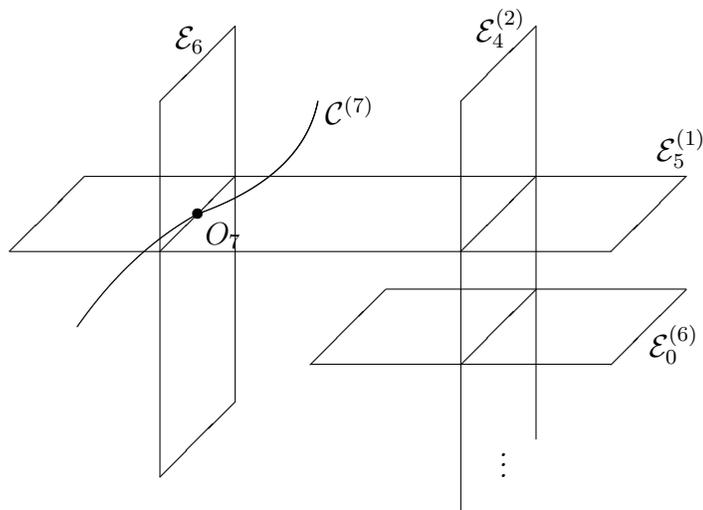
$$\mathcal{E}_6 : \widetilde{X}_7 = 0$$

$$\mathcal{E}_5^{(1)} : \widetilde{Y}_7 = 0$$

$\mathcal{E}_4^{(2)}, \mathcal{E}_3^{(3)}, \mathcal{E}_2^{(4)}, \mathcal{E}_1^{(5)}, \mathcal{E}_0^{(6)}$: não passam pela origem do sistema de coordenadas

$$O_7 = \mathcal{C}^{(7)} \cap \mathcal{E}_6 = (0, 0, 0)$$

$$m_7 = \text{mult}(\mathcal{C}^{(7)}) = 1.$$



Note que $\mathcal{C}^{(7)}$, \mathcal{E}_6 e $\mathcal{E}_5^{(1)}$ possuem um ponto em comum, $(0, 0, 0)$, assim será necessário realizar outro blowing-up.

8° Blowing-up

Efetuada um blowing-up em O_7 , a transformada estrita $\mathcal{C}^{(8)}$ da curva $\mathcal{C}^{(7)}$ tem como parametrização em V_1^7 :

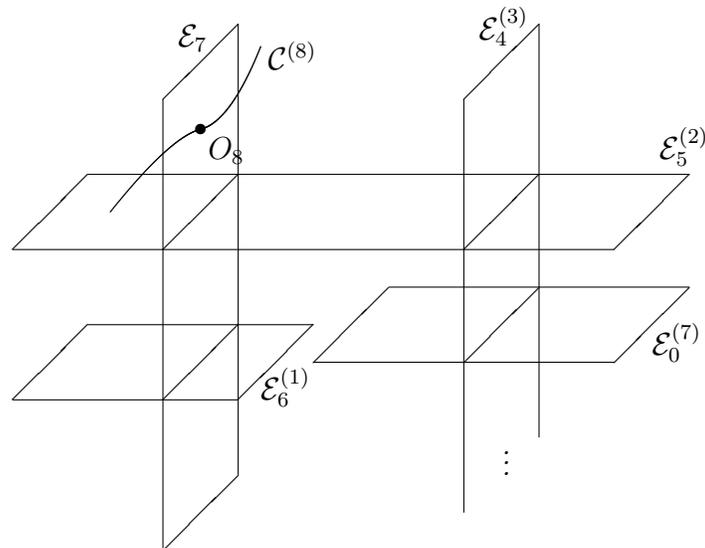
$$\mathcal{C}^{(8)} : \begin{cases} \widetilde{X}_8 = -4t + 14t^4 - 30t^7 + \dots \\ \widetilde{Y}_8 = 16 + \frac{1}{16}t + \frac{7}{32}t^3 + \dots \\ \widetilde{Z}_7 = \frac{5}{16}t + \frac{21}{16}t^4 + \dots \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7 : \widetilde{X}_8 = 0$$

$$\mathcal{E}_5^{(2)} : \widetilde{Y}_8 = 0$$

$\mathcal{E}_6^{(1)}$, $\mathcal{E}_4^{(3)}$, $\mathcal{E}_3^{(4)}$, $\mathcal{E}_2^{(5)}$, $\mathcal{E}_1^{(6)}$, $\mathcal{E}_0^{(7)}$: não passam pela origem do sistema de coordenadas

$$m_8 = \text{mult}(\mathcal{C}^{(8)}) = 1.$$



Finalmente alcançamos a boa resolução e a sequência de multiplicidades para a curva $\mathcal{C}^{(0)}$ quando $a = 2$ é

$$8, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, \dots$$

O conceito a seguir será útil para o estudo do comportamento geométrico no processo de resolução de uma curva irreduzível.

Definição 1.6. Sejam $O = O_0, O_1, \dots, O_N$ os pontos obtidos no processo de uma boa resolução de uma curva irreduzível. Dizemos que um ponto O_i é **próximo** de O_j ($i > j$), se o divisor excepcional \mathcal{E}_j tem a transformada estrita $\mathcal{E}_j^{(i-1-j)}$ contendo O_i .

Observação 1.2. Note que O_i é sempre próximo a O_{i-1} .

Exemplo 1.5. Retomando o exemplo (1.3), temos a seguinte relação de proximidade entre os pontos O_i 's determinados pelos blowing-ups.

O_0 é próximo a nenhum ponto
 O_1 é próximo a 1 ponto (O_0)
 O_2 é próximo a 1 ponto (O_1)
 O_3 é próximo a 2 pontos (O_1 e a O_2)
 O_4 é próximo a 1 ponto (O_3)
 O_5 é próximo a 1 ponto (O_4)
 O_6 é próximo a 1 ponto (O_5)
 O_7 é próximo a 2 pontos (O_5 e a O_6)
 O_8 é próximo a 1 ponto (O_7)

Da mesma forma vamos determinar a relação de proximidade entre os pontos O_i 's do exemplo (1.4).

CASO $a \neq 2$:

O_0 é próximo a nenhum ponto
 O_1 é próximo a 1 ponto (O_0)
 O_2 é próximo a 2 pontos (O_0 e a O_1)
 O_3 é próximo a 2 pontos (O_0 e a O_2)
 O_4 é próximo a 2 pontos (O_0 e a O_3)
 O_5 é próximo a 3 pontos (O_0 , O_3 e a O_4)
 O_6 é próximo a 1 ponto (O_5).

CASO $a = 2$:

O_0 é próximo a nenhum ponto
 O_1 é próximo a 1 ponto (O_0)
 O_2 é próximo a 2 pontos (O_0 e a O_1)
 O_3 é próximo a 2 pontos (O_0 e a O_2)
 O_4 é próximo a 2 pontos (O_0 e a O_3)
 O_5 é próximo a 1 ponto (O_4)
 O_6 é próximo a 1 ponto (O_5)
 O_7 é próximo a 2 pontos (O_5 e a O_6)
 O_8 é próximo a 1 ponto (O_7).

Utilizando o conceito de pontos próximos podemos apresentar o conceito introduzido por Du Val em [DV1].

Definição 1.7. *Sejam $O = O_0, O_1, \dots, O_N$ os pontos obtidos no processo de uma boa resolução de uma curva irredutível. Dizemos que um ponto O_i é líder (ou principal) se o número de pontos de quem ele é próximo é menor que o número de pontos de quem O_{i+1} é próximo. Se O_i é um ponto principal, então*

$$\sum_{j=0}^i \text{mult}(\mathcal{C}^{(j)})$$

é chamado um **caracter** da curva.

Exemplo 1.6. *Analisando o exemplo (1.3), pela definição acima concluímos que O_0, O_2 e O_6 são os pontos líderes e*

$$\sum_{j=0}^0 \text{mult}(\mathcal{C}^{(j)}) = 4$$

$$\sum_{j=0}^2 \text{mult}(\mathcal{C}^{(j)}) = 4 + 4 + 2 = 10$$

$$\sum_{j=0}^6 \text{mult}(\mathcal{C}^{(j)}) = 4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 17$$

são os caracteres da curva \mathcal{C} .

No exemplo (1.4), para o caso $a \neq 2$, os pontos líderes são O_0, O_1 e O_4 . Assim, temos os seguintes caracteres:

$$\sum_{j=0}^0 \text{mult}(\mathcal{C}^{(j)}) = 8$$

$$\sum_{j=0}^1 \text{mult}(\mathcal{C}^{(j)}) = 8 + 2 = 10$$

$$\sum_{j=0}^4 \text{mult}(\mathcal{C}^{(j)}) = 8 + 2 + 2 + 2 + 1 = 15.$$

Já para o caso $a = 2$, os pontos líderes são O_0, O_1 e O_6 e os caracteres são:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^0 \text{mult}(\mathcal{C}^{(j)}) &= 8 \\ \sum_{j=0}^1 \text{mult}(\mathcal{C}^{(j)}) &= 8 + 2 = 10 \\ \sum_{j=0}^6 \text{mult}(\mathcal{C}^{(j)}) &= 8 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 19.\end{aligned}$$

O conjunto de todos os caracteres de uma curva foi mais tarde chamado de *caracteres de Arf*. Segundo Sertoz, em [Ser], a primeira pessoa que observou a importância destes números e os chamou *caracteres* foi Du Val e Arf foi a primeira pessoa que pôde explicitamente calculá-los diretamente da parametrização da curva, sem realizar uma resolução da singularidade.

Em [DV1], Du Val apresenta um algoritmo, por ele denominado de **Algoritmo Jacobiano Modificado**, para calcular a sequência de multiplicidades até um estágio antes de obtermos uma boa resolução quando os caracteres da curva são conhecidos. Abaixo descrevemos o algoritmo.

Entrada: $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$ caracteres de um ramo \mathcal{C} e $M = \emptyset$.

Etapa 1: Enquanto o número de elementos de Σ for maior que 1 defina $\rho_1 = \min \Sigma$ e $\rho_2 = \min \Sigma \setminus \{\rho_1\}$ e considere

$$q = \left\lceil \frac{\rho_2}{\rho_1} \right\rceil, \text{ ou seja, } q \text{ é o maior inteiro tal que } q\rho_1 \leq \rho_2.$$

Etapa 2: $M = M \cup \{(\rho_1, q)\}$.

Etapa 3: Redefina Σ por $\{\rho_1\} \cup \{\sigma_i - q\rho_1; \sigma_i \in \Sigma \setminus \{\rho_1\}\}$, desprezando os zeros e retorne à etapa 1.

Saída: A sequência de multiplicidades é dada por m aparecendo n vezes para cada $(m, n) \in M$.

Exemplo 1.7. Vamos aplicar o algoritmo exposto acima no caso do exemplo (1.3), onde os caracteres da curva deste exemplo são $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = 10$ e $\sigma_3 = 17$.

Como $\left[\frac{10}{4}\right] = 2$, temos que 4 aparece 2 vezes na sequência de multiplicidades.

Agora temos o conjunto $\{4, 10 - 4.2, 17 - 4.2\} = \{2, 4, 9\}$ que nos fornece:

$\left[\frac{4}{2}\right] = 2$, isto é, 2 aparece 2 vezes na sequência de multiplicidades.

Tomando agora o conjunto $\{2, 4 - 2.2, 9 - 2.2\} = \{2, 0, 5\}$ e continuando o algoritmo com $\{2, 5\}$, temos que

$\left[\frac{5}{2}\right] = 2$, ou seja, 2 aparece 2 vezes na sequência de multiplicidades.

Considerando o conjunto $\{2, 5 - 2.2\} = \{1, 2\}$ o algoritmo nos dá

$\left[\frac{2}{1}\right] = 2$, que indica que 1 aparece 2 vezes na sequência de multiplicidades.

O algoritmo finaliza nesta etapa, pois obtemos o conjunto $\{1, 2 - 2.1\} = \{0, 1\}$ e temos que a sequência de multiplicidades do ramo até um estágio anterior a uma boa resolução é

$$4, 4, 2, 2, 2, 2, 1, 1,$$

como já havíamos encontrado no processo de resolução.

Considere agora o conjunto de caracteres $\{8, 10, 15\}$ da curva \mathcal{C} do exemplo (1.4) para o caso $a \neq 2$. Da mesma forma como feito acima, vamos aplicar a este conjunto o Algoritmo Jacobiano Modificado.

Como $\left[\frac{10}{8}\right] = 1$, temos que 8 aparece 1 vez na sequência de multiplicidades.

Assim temos o conjunto $\{8, 10 - 8.1, 15 - 8.1\} = \{2, 7, 8\}$ que nos dá:

$\left[\frac{7}{2}\right] = 3$, ou seja, 2 aparece 3 vezes na sequência de multiplicidades.

Tomando agora o conjunto $\{2, 7 - 2.3, 8 - 2.3\} = \{1, 2\}$ e aplicando novamente o algoritmo, temos que

$\left[\frac{2}{1}\right] = 2$, isto é, 1 aparece 2 vezes na sequência de multiplicidades.

Consideremos o conjunto de caracteres, $\{8, 10, 19\}$, da curva \mathcal{C} do exemplo (1.4) para o caso $a = 2$.

Uma vez que $\left[\frac{10}{8}\right] = 1$, então 8 aparece 1 vez na sequência de multiplicidades.

Considere o conjunto $\{8, 10 - 8.1, 19 - 8.1\} = \{2, 8, 11\}$ e aplicando a ele o algoritmo, segue que

$\left[\frac{8}{2}\right] = 4$, ou seja, 2 aparece 4 vezes na sequência de multiplicidades.

Tomando agora o conjunto $\{2, 8 - 2.4, 11 - 2.4\} = \{2, 0, 3\}$ e continuando o algoritmo com $\{2, 3\}$, temos que

$\left[\frac{3}{2}\right] = 1$, isto é, 2 aparece 1 vez na sequência de multiplicidades.

Considerando o conjunto $\{2, 3 - 2.1\} = \{1, 2\}$ o algoritmo nos dá

$\left[\frac{2}{1}\right] = 2$, logo 1 aparece 2 vezes na sequência de multiplicidades.

Como mencionamos Du Val, em seu artigo [DV1], mostra que este algoritmo fornece a sequência de multiplicidades até um passo anterior a boa resolução, o que verifica-se nos exemplos (1.3) e (1.4).

Portanto, temos que a sequência de multiplicidades de um ramo pode ser obtida via resolução de singularidades, ou ainda, por meio dos caracteres do ramo após aplicar a eles o Algoritmo Jacobiano Modificado.

Assim, a questão natural, feita por Du Val relacionada aos caracteres de uma curva irreduzível é:

Pergunta: Como determinar os caracteres de um ramo conhecendo apenas a parametrização local, dada como séries de potências formais, sem efetuar a resolução canônica?

Nos capítulos que seguem vamos responder a questão acima, seguindo o estudo feito por Arf em [Arf].

Semigrupos Numéricos

Neste capítulo, veremos que podemos associar a uma curva algebróide irredutível um semigrupo numérico, ou seja, um semigrupo contido no conjunto dos números naturais. Tal semigrupo fornece importantes informações sobre a curva e está relacionado com a questão que pretendemos responder e que foi apresentada no final do capítulo anterior.

2.1 Semigrupo Contido nos Naturais

Definição 2.1. *Um subconjunto $S \subseteq \mathbb{N}$ é chamado um **semigrupo** se:*

- (i) *S é fechado com respeito à adição;*
- (ii) *$0 \in S$.*

*O menor elemento não nulo de um semigrupo S é chamado **multiplicidade** de S .*

Definição 2.2. *Dado um subconjunto A de \mathbb{N} , denotamos por $\langle A \rangle$ o menor semigrupo de \mathbb{N} que contém A .*

Exemplo 2.1. *Seja $W = \{v_0, v_1, \dots, v_g\} \subset \mathbb{N}$, temos que*

$$\langle W \rangle = \{\alpha_0 v_0 + \dots + \alpha_g v_g ; \alpha_i \in \mathbb{N}\}.$$

*Neste caso, chamamos $\langle W \rangle$ de **semigrupo gerado** por W e o denotamos por $\langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$.*

Note que $\langle 1 \rangle = \mathbb{N}$.

Proposição 2.1. *Seja $S \subseteq \mathbb{N}$ um semigrupo. Existe um conjunto $W = \{v_0, v_1, \dots, v_g\}$ tal que $S = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$, com $g < v_0$, ou seja, todo semigrupo de \mathbb{N} é finitamente gerado.*

Demonstração: Defina

$$\begin{aligned} v_0 &= \min S \setminus \{0\} \\ v_1 &= \min S \setminus \langle v_0 \rangle \\ v_2 &= \min S \setminus \langle v_0, v_1 \rangle \\ &\vdots \\ v_i &= \min S \setminus \langle v_0, v_1, \dots, v_{i-1} \rangle \\ &\vdots \end{aligned}$$

Temos que $v_j \not\equiv v_k \pmod{v_0}$ sempre que $j \neq k$.

De fato, suponha sem perda de generalidade que $v_j > v_k$ e que $v_j \equiv v_k \pmod{v_0}$, então $v_j - v_k = \alpha v_0$ com $\alpha \in \mathbb{N}$. Deste modo

$$v_j = v_k + \alpha v_0 \Rightarrow v_j \in \langle v_0, v_k \rangle \subset \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle \subset \langle v_0, v_1, \dots, v_{j-1} \rangle$$

o que é uma contradição. Como v_j e v_k possuem restos diferentes na divisão por v_0 , temos que a sequência acima terá no máximo v_0 termos, o que prova a proposição.

□

O conjunto de geradores $\{v_0, v_1, \dots, v_g\}$ de um semigrupo S obtido como na proposição anterior é chamado de **sistema mínimo de geradores**.

Considere uma curva espacial irreduzível \mathcal{C} em \mathbb{C}^n dada por uma parametrização:

$$\begin{cases} X_1 = \varphi_1(t) \\ X_2 = \varphi_2(t) \\ \vdots \\ X_n = \varphi_n(t) \end{cases}$$

com $\varphi_i(t) \in \mathbb{C}[[t]]$. O conjunto

$$S_\varphi = \{mult_t(g(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))) ; \quad g \in \mathbb{C}[[X_1, \dots, X_n]] \text{ e } g(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \neq 0\}$$

é um semigrupo de \mathbb{N} .

De fato, uma vez que $0 = mult_t(1)$ temos que $0 \in S_\varphi$. Além disso, se $\alpha, \beta \in S_\varphi$, então existem $g, h \in \mathbb{C}[[X_1, \dots, X_n]]$ tais que

$$\alpha = mult_t(g(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))) \text{ e } \beta = mult_t(h(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))),$$

então

$$\begin{aligned} mult_t(gh(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))) &= mult_t(g(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))h(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))) \\ &= mult_t(g(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))) + mult_t(h(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))) \\ &= \alpha + \beta. \end{aligned}$$

Portanto S_φ é um semigrupo de \mathbb{N} , chamado **semigrupo de valores** da curva.

Exemplo 2.2. *Seja a curva \mathcal{C} dada por:*

$$\begin{cases} X = t^4 \\ Y = t^6 + 2t^7. \end{cases}$$

Claramente $\langle 4, 6 \rangle \subset S_\varphi$, no entanto $\langle 4, 6 \rangle \neq S_\varphi$, pois dada

$$g(X, Y) = Y^2 - X^3 \in \mathbb{C}[[X, Y]]$$

temos que,

$$g(t^4, t^6 + 2t^7) = 4t^{13} + 4t^{14}.$$

Assim, $13 \in S_\varphi$ e $13 \notin \langle 4, 6 \rangle$.

Vamos apresentar agora algumas propriedades de parametrizações e semigrupos que

irão caracterizar um semigrupo de valores de uma curva.

Definição 2.3. *Considere uma parametrização*

$$\begin{cases} X_1 = \varphi_1(t) \\ X_2 = \varphi_2(t) \\ \vdots \\ X_n = \varphi_n(t) \end{cases}$$

de uma curva \mathcal{C} . O anel

$$\mathcal{O}_\varphi = \mathbb{C}[[\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)]] \subseteq \mathbb{C}[[t]]$$

é chamado **anel local** da curva.

Note que o semigrupo de valores da curva pode ser reescrito como

$$S_\varphi = \{\text{mult}_t(g(t)); \quad g(t) \in \mathcal{O}_\varphi \setminus \{0\}\}$$

e temos (conforme [AM]) que o corpo de frações de \mathcal{O}_φ é

$$\left\{ \frac{g(t)}{h(t)} ; \quad g(t), h(t) \in \mathcal{O}_\varphi \text{ e } h(t) \neq 0 \right\} = \mathbb{C}((t)),$$

onde $\mathbb{C}((t))$ é o corpo de frações de $\mathbb{C}[[t]]$.

Desta forma, temos que existem $g(t), h(t) \in \mathcal{O}_\varphi$ tais que

$$t = \frac{g(t)}{h(t)}$$

e assim $g(t) = t.h(t)$, ou seja,

$$\alpha = \text{mult}_t(g(t)) = \text{mult}_t(t.h(t)) = 1 + \text{mult}_t(h(t)) = 1 + \beta,$$

onde, $\alpha = \text{mult}_t(g(t))$, $\beta = \text{mult}_t(h(t)) \in S_\varphi$. Daí concluímos que o semigrupo de valores de uma curva sempre possui dois números naturais consecutivos. Tal fato permitirá apresentarmos uma importante propriedade das curvas irredutíveis. Antes porém, vejamos um conceito

importante.

Definição 2.4. *Seja $S \subseteq \mathbb{N}$ um semigrupo. Dizemos que S possui **condutor** c se:*

- (i) $c + n \in S$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) $c - 1 \notin S$.

Observação 2.1. *Seja $S = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$. Se houver em S v_0 elementos consecutivos,*

$$\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \alpha + v_0 - 1,$$

então S possui condutor $c \leq \alpha$.

De fato,

$$\begin{aligned} \alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \alpha + v_0 - 1 &\in S \\ \alpha + v_0, \alpha + v_0 + 1, \alpha + v_0 + 2, \dots, \alpha + 2v_0 - 1 &\in S \\ \alpha + 2v_0, \alpha + 2v_0 + 1, \alpha + 2v_0 + 2, \dots, \alpha + 3v_0 - 1 &\in S \\ \vdots & \end{aligned}$$

e assim sucessivamente. Donde concluímos que todo natural maior ou igual a α pertence a S .

Exemplo 2.3. (1) $S = \langle 4, 6 \rangle = \{0, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$ não possui condutor, uma vez que não contém nenhum natural ímpar;

(2) Se $S = \langle 4, 5 \rangle = \{0, 4, 5, 8, 9, 10, 12, \rightarrow\}$, então pela observação anterior, S possui condutor $c = 12$.

(\rightarrow denota que todos os inteiros consecutivos estão contidos no conjunto)

A próxima proposição nos dá uma caracterização dos semigrupos com condutor.

Proposição 2.2. *Seja $S = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ um semigrupo:*

- (1) S possui condutor se, e somente se, S possui dois elementos consecutivos.
- (2) S possui condutor se, e somente se, $\text{mdc}(v_0, v_1, \dots, v_g) = 1$.

Demonstração:

(1) (\Rightarrow) Óbvio!

(\Leftarrow) Suponha que $a, a + 1 \in S$, então

$$(*) \quad 0(a + 1), 1(a + 1), 2(a + 1), \dots, (a - 1)(a + 1) \in S.$$

Tome agora um número natural $n \geq (a - 1)(a + 1)$, então como a e $a + 1$ são primos entre si, cada elemento da sequência $(*)$ deixa um resto distinto na divisão por a . Deste modo, dividindo n por a temos,

$$n = qa + r \quad 0 \leq r < a.$$

Ou seja,

$$n \equiv i(a + 1) \pmod{a}, \quad 0 \leq i \leq a - 1$$

isto é,

$$n = i(a + 1) + ja, \quad \text{com } j \geq 0$$

pois $n \geq (a - 1)(a + 1)$. Deste modo, $n \in \langle a, a + 1 \rangle \subset S$. Além disso, note que o condutor de S é menor ou igual a $(a - 1)(a + 1)$.

(2) (\Rightarrow) Se $\text{mdc}(v_0, v_1, \dots, v_g) = d > 1$, então como um elemento de S é da forma:

$$n = \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_g v_g, \quad \text{com } \alpha_i \in \mathbb{N}$$

temos que n sempre é múltiplo de d , e deste modo não há dois elementos consecutivos em S e, por (1), S não pode ter condutor.

(\Leftarrow) Se $\text{mdc}(v_0, v_1, \dots, v_g) = 1$, então existem $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_g \in \mathbb{Z}$ tais que,

$$\gamma_0 v_0 + \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_g v_g = 1.$$

Denotemos por $\delta_i = -\gamma_i$ sempre que $\gamma_i < 0$, então

$$\sum_{j \in J} \gamma_j v_j = 1 + \sum_{l \in L} -\gamma_l v_l = 1 + \sum_{l \in L} \delta_l v_l$$

onde $J \subset \{0, 1, \dots, g\}$ tal que $\gamma_j \geq 0$ para todo $j \in J$ e $L \subset \{0, 1, \dots, g\}$ tal que $\gamma_l < 0$ para todo $l \in L$. Assim, temos que

$$\sum_{l \in L} \delta_l v_l, 1 + \sum_{l \in L} \delta_l v_l \in S$$

ou seja, há dois naturais consecutivos em S , portanto pelo item (1), S possui condutor.

□

Como corolário imediato desta proposição, temos:

Corolário 2.1. *O semigrupo S de uma curva irredutível admite condutor.*

2.2 Semigrupos de Arf

Considere um semigrupo $S = \{h_0 = 0, h_1, h_2, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$. Dado $h_i \in S$, definimos:

$$S_{h_i} - h_i = \{\alpha - h_i ; \alpha \in S, \alpha \geq h_i\}$$

$$S(i) = \langle S_{h_i} - h_i \rangle.$$

Definição 2.5 (Semigrupo de Arf). *Um semigrupo $S \subseteq \mathbb{N}$ é chamado **semigrupo de Arf** se o conjunto $S_{h_i} - h_i$ é um semigrupo para todo $h_i \in S$, isto é, $S_{h_i} - h_i = S(i)$ para todo $h_i \in S$.*

Exemplo 2.4. *Seja $S = \langle 2, 2p + 1 \rangle$, verifiquemos que S é um semigrupo de Arf para todo $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*

Inicialmente note que

$$S = \{0, 2, 4, 6, \dots, 2p, \rightarrow\}$$

e o condutor de S é $2p$. Seja $h \in S$, temos que:

- Se $h \geq 2p$, segue que

$$S_h - h = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\} = \mathbb{N}$$

que é semigrupo.

- Se $h < 2p$, então $h = 2k$ para algum $k < p$ e $k \in \mathbb{N}$, assim

$$S_h - h = \{0, 2, 4, 6, \dots, 2(p - k), \rightarrow\} = \langle 2, 2(p - k) + 1 \rangle.$$

Dado um semigrupo $S \subseteq \mathbb{N}$ é sempre possível encontrar um menor semigrupo de Arf em \mathbb{N} que contenha S . De fato, \mathbb{N} é claramente um semigrupo de Arf. Assim para qualquer subsemigrupo S de \mathbb{N} a coleção de semigrupos de Arf contidos em \mathbb{N} que contém S é não vazia e pelo Lema de Zorn deve existir um menor elemento. Isto motiva a próxima definição.

Definição 2.6 (Fecho de Arf de um semigrupo). *Seja $S \subseteq \mathbb{N}$ um semigrupo. O fecho de Arf *S de S é o menor semigrupo de Arf em \mathbb{N} que contém S .*

Considere um semigrupo com condutor

$$S = \{0, h_1, h_2, \dots, h_{r-1}, \rightarrow\}.$$

O fecho de Arf *S de S pode ser obtido da seguinte maneira:

Teorema 2.1. *Sejam um semigrupo S e $h_1 = \min S \setminus \{0\}$. Então ${}^*S = \{0, h_1 + {}^*S(1)\}$.*

Demonstração: Seja o semigrupo $\{0, h_1 + S(1)\}$, onde $S(1) = \langle S_{h_1} - h_1 \rangle$.

Afirmção: $S \subseteq \{0, h_1 + S(1)\} \subseteq {}^*S$.

De fato, visivelmente tem-se que $S \subseteq \{0, h_1 + S(1)\}$, mostremos agora a outra inclusão. Uma vez que *S é semigrupo de Arf, temos que ${}^*S_{h_1} - h_1$ é semigrupo e assim obtemos

$$\begin{aligned} S_{h_1} - h_1 &\subset {}^*S_{h_1} - h_1 \\ S(1) = \langle S_{h_1} - h_1 \rangle &\subset {}^*S_{h_1} - h_1 \\ h_1 + S(1) &\subset {}^*S_{h_1} \subset {}^*S \\ \{0, h_1 + S(1)\} &\subset {}^*S. \end{aligned}$$

Como o semigrupo $\{0, h_1 + S(1)\}$ está contido em *S , o mesmo é verdade para $\{0, h_1 + {}^*S(1)\}$, o qual contém $\{0, h_1 + S(1)\} \supset S$ e que é de Arf, portanto

$${}^*S = \{0, h_1 + {}^*S(1)\}.$$

□

Pelo teorema acima a construção de *S é reduzida à construção do fecho de Arf de um semigrupo da forma

$$S(1) = \{0, h'_1, h'_2, \dots, h'_{r-1}, \rightarrow\}$$

onde $h'_{r-1} \leq h_{r-1} - h_1$.

O processo continua, até que para um N suficientemente grande tenhamos $S(N) = \mathbb{N}$, que é o seu próprio fecho de Arf.

Exemplo 2.5. *Seja o semigrupo $S = \langle 8, 10, 12, 23, 27 \rangle$. Encontremos *S .*

Temos que $S = \{0, 8, 10, 12, 16, 18, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, \rightarrow\}$. Note que S não é um semigrupo de Arf, pois

$$S_{h_1} - h_1 = \{0, 2, 4, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, \rightarrow\}$$

não é semigrupo, uma vez que $2 + 4 \notin S_{h_1} - h_1$. Vamos aplicar a construção dada acima.

Temos que o semigrupo $S(1)$ é dado por

$$S(1) = \langle S_{h_1} - h_1 \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \rightarrow\} = \langle 2, 15 \rangle,$$

que pelo exemplo (2.4) é de Arf, assim $*S(1) = S(1)$. Pela construção do fecho de Arf de um semigrupo, temos:

$$*S = \{0, 8 + *S(1)\} = \{0, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, \rightarrow\} = \langle 8, 10, 12, 14, 23, 25, 27, 29 \rangle.$$

Portanto o fecho de Arf $*S$ de $S = \langle 8, 10, 12, 23, 27 \rangle$ é $*S = \langle 8, 10, 12, 14, 23, 25, 27, 29 \rangle$.

Observação 2.2. Note que os elementos de $*S$ construídos dependem apenas dos elementos de S que não os excedam. De fato, suponha que isto seja válido para o fecho $*S(1)$ de $S(1)$. Os elementos de $*S(1)$ que são inferiores a $h_i - h_1$ dependem apenas dos elementos de $S(1)$ que são inferiores a $h_i - h_1$, mas estes, por sua vez, dependem dos números h_1, h_2, \dots, h_i . Resulta assim que os elementos de $\{0, h_1 + *S(1)\} = *S$ que são inferiores a h_{i+1} dependem apenas de h_1, h_2, \dots, h_i .

Teorema 2.2. Dado um semigrupo S , a interseção de todos os semigrupos \bar{S} , tais que $*\bar{S} = *S$, é um semigrupo S_χ tal que $*S_\chi = *S$.

Demonstração: Claramente a interseção de semigrupos é ainda um semigrupo. Assim, resta mostrar que $*S_\chi = *S$. Considere \bar{S} um semigrupo tal que $*\bar{S} = *S$ e que nenhum subsemigrupo próprio de \bar{S} possua esta propriedade. Vamos mostrar que $\bar{S} = S_\chi$. Claramente $S_\chi \subset \bar{S}$.

Suponha que $\bar{S} \neq S_\chi$. Seja h_j o menor elemento de \bar{S} que não pertence a S_χ e sejam $\{h_0 = 0, h_1, \dots, h_{j-1}\} \subset \bar{S} \cap S_\chi$ elementos inferiores a h_j . Como $h_j \notin S_\chi$, segue que $h_j \notin \langle h_1, \dots, h_{j-1} \rangle$.

Por outro lado S_χ é a interseção dos semigrupos cujo fecho de Arf é $*S$, deste modo deve existir um semigrupo S' tal que $*S' = *S$ que não contém o elemento h_j . Os elementos de $*S$ que são inferiores a h_j dependem apenas dos inteiros h_1, h_2, \dots, h_{j-1} . Assim, o semigrupo

S'' obtido em excluir de S' todos os inteiros positivos inferiores a h_j , exceto h_1, h_2, \dots, h_{j-1} , é ainda tal que $*S'' = *S$.

Resulta que os elementos de $*S$ que são menores ou iguais a h_j dependem apenas de h_1, h_2, \dots, h_{j-1} , já que S'' não contém h_j . Deste modo o fecho do subsemigrupo de \bar{S} obtido em excluir o elemento h_j é ainda igual a $*S$, contrariando a escolha de \bar{S} .

Portanto $S_\chi = \bar{S}$ e, conseqüentemente, $*S_\chi = *S$.

□

O subsemigrupo S_χ de $*S$ é chamado de **semigrupo característico** de S .

Definição 2.7. *Seja S um semigrupo e S_χ seu semigrupo característico. Os elementos $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r$ do sistema mínimo de geradores de S_χ são chamados **caracteres** de S .*

Teorema 2.3. *Seja $S = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ um semigrupo. Dado um caracter χ_i de S , se $\chi_i \in S$ então $\chi_i = v_j$ para algum $0 \leq j \leq g$.*

Demonstração: Suponhamos χ_i o menor dos caracteres $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r$ de S tal que $\chi_i \notin \{v_0, v_1, \dots, v_g\}$. Assim,

$$\chi_i = \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_l v_l$$

com $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \mathbb{N}$, $\alpha_l \neq 0$ e $v_l < \chi_i$.

Temos que

$$v_0, v_1, \dots, v_g \in S \subseteq *S = *S_\chi$$

e qualquer semigrupo de Arf contendo $\chi_1, \dots, \chi_{i-1}$, conterà os elementos v_0, v_1, \dots, v_l . Isto implicaria que o fecho de Arf do semigrupo gerado pelos elementos $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{i-1}, \chi_{i+1}, \dots, \chi_r$ contém χ_i e isto nos levaria a concluir que S_χ não é o semigrupo característico de S .

Portanto, se $\chi_i \in S$, então $\chi_i \in \{v_0, v_1, \dots, v_g\}$.

□

Dado um semigrupo de Arf $S = \{0 = h_0, h_1, h_2, \dots, h_r, \rightarrow\}$, existem $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$,

números naturais, tais que

$$S = \{0, \gamma_1, \gamma_1 + \gamma_2, \dots, \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_r, \rightarrow\},$$

com $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3 \geq \dots \geq \gamma_r > 1$. De fato, como S é semigrupo de Arf, temos que $S(i) = S_{h_i} - h_i$ para todo $h_i \in S$ e mais, ${}^*S(i) = S(i)$. Pela construção do fecho de Arf de um semigrupo temos as seguintes relações recursivas:

$$\begin{aligned} {}^*S = S &= \{0, h_1 + {}^*S(1)\} \\ {}^*S(1) &= \{0, h_2 - h_1 + {}^*S(2)\} \\ {}^*S(2) &= \{0, h_3 - h_2 + {}^*S(3)\} \\ &\vdots \\ {}^*S(r-1) &= \{0, h_r - h_{r-1} + {}^*S(r)\} \\ {}^*S(r) &= \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Assim podemos reescrever S como segue

$$S = \{0, h_1, h_1 + (h_2 - h_1), h_1 + (h_2 - h_1) + (h_3 - h_2), \dots, h_1 + (h_2 - h_1) + \dots + (h_r - h_{r-1}), \rightarrow\},$$

basta agora tomar $\gamma_1 = h_1, \gamma_2 = (h_2 - h_1), \gamma_3 = (h_3 - h_2), \dots, \gamma_r = (h_r - h_{r-1})$. Além disso, como S_i é um semigrupo para todo $0 \leq i \leq r$, então

$$\begin{aligned} h_{i+2} - h_i &\leq 2(h_{i+1} - h_i) \\ h_{i+2} - h_{i+1} &\leq h_{i+1} - h_i \end{aligned}$$

donde, $\gamma_{i+2} \leq \gamma_{i+1}$.

Teorema 2.4. *Seja $S = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ um semigrupo com condutor. Os inteiros $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{r-2}, \gamma_{r-1}$ tais que*

$${}^*S = \{0, \gamma_1, \gamma_1 + \gamma_2, \dots, \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{r-1}, \rightarrow\},$$

são obtidos de v_0, v_1, \dots, v_g pelo Algoritmo Jacobiano Modificado. Reciprocamente, se $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{r-2}, \gamma_{r-1}, 1$ são determinados por v_1, v_2, \dots, v_g através do Algoritmo Jacobiano Modificado, o fecho de Arf do semigrupo $S = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ será *S .

Demonstração: Suponha que S seja um semigrupo com condutor e e $v_0 \geq 1$. Se $v_0 = 1$, então $S = \mathbb{N} = {}^*S$. Assim, $\gamma_1 = v_0$, $r = 1$ e o teorema é verdadeiro. Vamos assumir que $v_0 > 1$ e que o teorema é satisfeito para qualquer semigrupo $\langle v'_0, v'_1, \dots, v'_g \rangle$, com $v'_0 < v_0$, vamos concluir que o mesmo é verificado para o semigrupo $S = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$.

Seja v_i o menor dos inteiros v_0, v_1, \dots, v_g que não é divisível por v_0 e seja q o quociente de v_i por v_0 . Considere o semigrupo $S' = \langle v_i - qv_0, v_{i+1} - qv_0, \dots, v_g - qv_0, v_0 \rangle$.

Afirmção: $S \subseteq \{0, v_0, 2v_0, \dots, qv_0 + S'\} \subseteq {}^*S$.

De fato, visivelmente já temos a primeira inclusão, agora veja que

$$\{v_i - qv_0, v_{i+1} - qv_0, \dots, v_g - qv_0, v_0\} \subset S_{qv_0} - qv_0 \subset {}^*S_{qv_0} - qv_0.$$

Como ${}^*S_{qv_0} - qv_0$ é semigrupo temos que

$$\begin{aligned} S' + qv_0 &\subset {}^*S_{qv_0} \subset {}^*S \\ \{0, v_0, 2v_0, \dots, qv_0 + S'\} &\subseteq {}^*S. \end{aligned}$$

Segue que,

$${}^*S = \{0, v_0, 2v_0, \dots, qv_0 + {}^*S'\}.$$

Por hipótese temos que ${}^*S = \{0, \gamma_1, \gamma_1 + \gamma_2, \dots, \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{r-1}, \rightarrow\}$. Assim, $\gamma_1 = v_0, \gamma_2 = v_0, \dots, \gamma_q = v_0$ e ${}^*S' = \{0, \gamma_{q+1}, \gamma_{q+1} + \gamma_{q+2}, \dots, \gamma_{q+1} + \dots + \gamma_{r-1}, \rightarrow\}$.

Os inteiros $v_i - qv_0, v_{i+1} - qv_0, \dots, v_g - qv_0, v_0$ são obtidos após o $(i - 1)$ -ésimo passo do Algoritmo Jacobiano Modificado aplicado aos números v_0, v_1, \dots, v_g . Resta mostrar que os inteiros $\gamma_{q+1}, \gamma_{q+2}, \dots, \gamma_{r-1}$ são obtidos mediante a aplicação do algoritmo aos inteiros $v_i - qv_0, v_{i+1} - qv_0, \dots, v_g - qv_0, v_0$. Ora, $v_i - qv_0$ é menor que v_0 , assim por hipótese de

indução, temos o resultado desejado.

Reciprocamente se os números $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{r-2}, \gamma_{r-1}$ são obtidos a partir de v_0, v_1, \dots, v_g pelo Algoritmo Jacobiano Modificado, então como $*S = \{0, v_0 + *S(1)\}$ temos que $\gamma_1 = v_0$ e $S(1) = \langle v_0, v_1 - v_0, \dots, v_g - v_0 \rangle$. Deste modo, $\gamma_2 = \min\{v_0, v_1 - v_0\}$ e procedendo deste modo, temos que o fecho de Arf do semigrupo $S = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ é

$$*S = \{0, \gamma_1, \gamma_1 + \gamma_2, \dots, \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{r-1}, \rightarrow\}.$$

□

Observação 2.3. *Podemos concluir dos teoremas (2.3) e (2.4) que os inteiros $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{r-2}, \gamma_{r-1}$ são determinados dos caracteres de S pelo Algoritmo Jacobiano Modificado e que todo conjunto de elementos v_0, v_1, \dots, v_g , dos quais o algoritmo forneça o mesmo resultado são provenientes de combinações dos caracteres de S .*

Vamos apresentar agora um método para encontrar os caracteres de um semigrupo de Arf qualquer. Para tanto, seja um semigrupo de Arf

$$*S = \{0, \gamma_1, \gamma_1 + \gamma_2, \dots, \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_r, \rightarrow\} \quad (\gamma_r \neq 1).$$

O semigrupo $*S(r) = \mathbb{N}$ tem visivelmente um único caracter, a saber $\chi_1^{(r)} = 1$. Os caracteres do semigrupo

$$*S(r-1) = \{0, \gamma_r + n, n \in \mathbb{N}\}$$

são $\chi_1^{(r-1)} = \gamma_r$ e $\chi_2^{(r-1)} = \gamma_r + 1$, uma vez que $\gamma_r \neq 1$. Os caracteres de

$$*S(r-2) = \{0, \gamma_{r-1} + *S(r-1)\} = \{0, \gamma_{r-1}, \gamma_{r-1} + \gamma_r + n, n \in \mathbb{N}\}$$

deduzem-se dos caracteres de $*S(r-1)$ e neste caso temos três possibilidades:

- Se $\gamma_{r-1} > \gamma_r + 1$, então os caracteres de ${}^*S(r-2)$ são:

$$\chi_1^{(r-2)} = \gamma_{r-1}, \chi_2^{(r-2)} = \gamma_{r-1} + \gamma_r, \chi_3^{(r-2)} = \gamma_{r-1} + \gamma_r + 1;$$

- Se $\gamma_{r-1} = \gamma_r + 1$, então obtemos os seguintes caracteres para ${}^*S(r-2)$:

$$\chi_1^{(r-2)} = \gamma_{r-1}, \chi_2^{(r-2)} = \gamma_{r-1} + \gamma_r;$$

- Se $\gamma_{r-1} = \gamma_r$ então teremos:

$$\chi_1^{(r-2)} = \gamma_{r-1}, \chi_2^{(r-2)} = \gamma_{r-1} + \gamma_r + 1.$$

Deduzimos sucessivamente os caracteres de todos os semigrupos ${}^*S(i) = \{0, \gamma_{i+1} + {}^*S(i+1)\}$ aplicando a mesma regra, ou seja, se considerarmos $\chi_1^{(i)}, \chi_2^{(i)}, \dots, \chi_l^{(i)}$ os caracteres de ${}^*S(i)$, então os caracteres do semigrupo ${}^*S(i-1) = \{0, \gamma_i + {}^*S(i)\}$ são:

- Se $\gamma_i = \chi_h^{(i)}$ para algum $1 \leq h \leq l$, então

$$\begin{aligned} \chi_1^{(i-1)} &= \gamma_i \\ \chi_2^{(i-1)} &= \gamma_i + \chi_1^{(i)} \\ &\vdots \\ \chi_{h-1}^{(i-1)} &= \gamma_i + \chi_{h-2}^{(i)} \\ \chi_h^{(i-1)} &= \gamma_i + \chi_{h-1}^{(i)} \\ \chi_{h+1}^{(i-1)} &= \gamma_i + \chi_{h+1}^{(i)} \\ &\vdots \\ \chi_l^{(i-1)} &= \gamma_i + \chi_l^{(i)}; \end{aligned}$$

- Se $\gamma_i \neq \chi_h^{(i)}$ para todo $h = 1, \dots, l$, temos

$$\begin{aligned}\chi_1^{(i-1)} &= \gamma_i \\ \chi_j^{(i-1)} &= \gamma_i + \chi_{j-1}^{(i)}\end{aligned}$$

para todo $1 < j \leq l + 1$.

Exemplo 2.6. Retomando o exemplo (2.5), vamos determinar os caracteres do semigrupo $S = \langle 8, 10, 12, 23, 27 \rangle$.

Visto que o fecho de Arf deste semigrupo é $*S = \{0, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, \rightarrow\}$, temos que

$$\gamma_1 = 8, \gamma_2 = \gamma_3 = \dots = \gamma_8 = 2, \gamma_9 = \gamma_{10} = \dots = 1.$$

Pela construção dada acima, temos:

$$\begin{aligned}{}^*S(8) = \mathbb{N} &\implies \chi_1^{(8)} = 1 \\ {}^*S(7) = \{0, \gamma_8 + {}^*S(8)\} &\implies \chi_1^{(7)} = \gamma_8 = 2 \text{ e } \chi_2^{(7)} = \gamma_8 + \chi_1^{(8)} = 3 \\ {}^*S(6) = \{0, \gamma_7 + {}^*S(7)\} &\implies \chi_1^{(6)} = \gamma_7 = 2 \text{ e } \chi_2^{(6)} = \gamma_7 + \chi_2^{(7)} = 5 \\ {}^*S(5) = \{0, \gamma_6 + {}^*S(6)\} &\implies \chi_1^{(5)} = \gamma_6 = 2 \text{ e } \chi_2^{(5)} = \gamma_6 + \chi_2^{(6)} = 7 \\ {}^*S(4) = \{0, \gamma_5 + {}^*S(5)\} &\implies \chi_1^{(4)} = \gamma_5 = 2 \text{ e } \chi_2^{(4)} = \gamma_5 + \chi_2^{(5)} = 9 \\ {}^*S(3) = \{0, \gamma_4 + {}^*S(4)\} &\implies \chi_1^{(3)} = \gamma_4 = 2 \text{ e } \chi_2^{(3)} = \gamma_4 + \chi_2^{(4)} = 11 \\ {}^*S(2) = \{0, \gamma_3 + {}^*S(3)\} &\implies \chi_1^{(2)} = \gamma_3 = 2 \text{ e } \chi_2^{(2)} = \gamma_3 + \chi_2^{(3)} = 13 \\ {}^*S(1) = \{0, \gamma_2 + {}^*S(2)\} &\implies \chi_1^{(1)} = \gamma_2 = 2 \text{ e } \chi_2^{(1)} = \gamma_2 + \chi_2^{(2)} = 15 \\ {}^*S = \{0, \gamma_1 + {}^*S(1)\} &\implies \chi_1 = \gamma_1 = 8, \chi_2 = \gamma_1 + \chi_1^{(1)} = 10 \text{ e } \chi_3 = \gamma_1 + \chi_2^{(1)} = 23.\end{aligned}$$

Temos assim que os caracteres do semigrupo $S = \langle 8, 10, 12, 23, 27 \rangle$ são 8, 10 e 23, e consequentemente o semigrupo característico de S é $S_\chi = \langle 8, 10, 23 \rangle$.

Anéis de Arf

3.1 Anéis de Arf

No que segue vamos considerar $\mathbb{K}[[t]]$ o anel de séries de potências em uma indeterminada, com \mathbb{K} um corpo qualquer. Se H é um subanel de $\mathbb{K}[[t]]$, então definimos

$$S(H) = \{\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r < \dots\}$$

o conjunto das multiplicidades dos elementos de H . O conjunto $S(H)$ é um semigrupo de \mathbb{N} . Mais ainda, como vimos na Proposição (2.1), existem naturais v_0, v_1, \dots, v_g , tais que $S(H) = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$.

Observação 3.1. *Se H é um subanel de $\mathbb{K}[[t]]$, então existem $h_0, \dots, h_g \in H$ tais que $H = \mathbb{K}[[h_0, \dots, h_g]]$.*

De fato, como $S(H) = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$, tome $h_i \in H$ com $\text{mult}_t(h_i) = v_i$ para todo $i = 0, \dots, g$. Dado $h \in H$ temos que $\text{mult}_t(h) = a_0 v_0 + \dots + a_g v_g$, com $a_i \in \mathbb{N}$, então $\text{mult}_t(h) = \text{mult}_t(h_0^{a_0} \dots h_g^{a_g})$. Assim, existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que

$$\text{mult}_t(h - \alpha h_0^{a_0} \dots h_g^{a_g}) > \text{mult}_t(h).$$

Repetindo este argumento podemos mostrar que

$$h = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i h_0^{a_{0i}} \dots h_g^{a_{gi}} \in \mathbb{K}[[h_0, \dots, h_g]], \quad \text{com } \alpha_i \in \mathbb{K},$$

logo $H \subseteq \mathbb{K}[[h_0, \dots, h_g]]$. A recíproca é imediata, pois como $h_i \in H$ para todo $i = 0, \dots, g$, e sendo H um anel, temos que $\mathbb{K}[[h_0, \dots, h_g]] \subseteq H$.

Podemos assumir que H é dado de forma que o semigrupo $S(H)$ tenha condutor. Observe que esta condição não é restritiva, uma vez que é possível por meio de um automorfismo de $\mathbb{K}[[t]]$, que corresponde a uma mudança de parâmetro, transformar H em um subanel H' que satisfaça esta condição.

Lema 3.1. *Seja $h \in H$ com $\text{mult}_t(h) = 0$, então $h^{-1} \in H$.*

Demonstração: A observação acima nos garante que existem $h_0, \dots, h_g \in H$ tais que $H = \mathbb{K}[[h_0, \dots, h_g]]$. Denote $Y_i = h_i$ para todo $i = 0, \dots, g$ e seja $h \in H$. Podemos escrever

$$h = P_0 + P_1 + P_2 + \dots$$

com $P_i \in \mathbb{K}[Y_0, \dots, Y_g]$ homogêneo para todo i e $P_0 \neq 0$. Como $h \in H$ e $1 \in H$, mostremos que existe $g \in H$, onde $hg = 1$.

Note que a existência de $g \in H$ satisfazendo a condição acima corresponde a obtermos $g = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots$, onde Q_i é polinômio homogêneo em $\mathbb{K}[Y_0, \dots, Y_g]$, tal que

$$1 = hg = P_0Q_0 + (P_0Q_1 + P_1Q_0) + (P_0Q_2 + P_1Q_1 + P_2Q_0) + \dots$$

Esta equação é equivalente ao sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0Q_0 = 1 \\ P_0Q_1 + P_1Q_0 = 0 \\ \vdots \\ P_0Q_n + P_1Q_{n-1} + \dots + P_nQ_0 = 0 \\ \vdots \end{array} \right.$$

Como $0 \neq P_0 \in \mathbb{K}$, o sistema acima admite solução e

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_0 = P_0^{-1} \in \mathbb{K} \subset \mathbb{K}[Y_0, \dots, Y_g] \\ Q_1 = -P_0^{-1}(P_1 Q_0) \in \mathbb{K}[Y_0, \dots, Y_g] \\ \vdots \\ Q_n = -P_0^{-1}(P_1 Q_{n-1} + \dots + P_{n-1} Q_1 + P_n Q_0) \in \mathbb{K}[Y_0, \dots, Y_g] \\ \vdots \end{array} \right.$$

Portanto, $g = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots \in \mathbb{K}[[Y_0, \dots, Y_g]]$.

□

Para cada α em $S(H)$ seja h_α um elemento de H com $\text{mult}_t(h_\alpha) = \alpha$ e considere o conjunto

$$I_\alpha = \{g \in H ; \text{mult}_t(g) \geq \alpha\}.$$

Temos que I_α é um ideal de H . De fato, sejam $g, h \in I_\alpha$, então

$$\text{mult}_t(g + h) \geq \min\{\text{mult}_t(g), \text{mult}_t(h)\} \geq \alpha.$$

Logo $g + h \in I_\alpha$. Tome agora $f \in H$ e $g \in I_\alpha$, temos que

$$\text{mult}_t(fg) = \text{mult}_t(f) + \text{mult}_t(g) \geq \alpha,$$

assim $fg \in I_\alpha$.

Considere o conjunto

$$\frac{I_\alpha}{h_\alpha} = \left\{ \frac{g}{h_\alpha} ; g \in I_\alpha \right\}.$$

Temos que $\frac{I_\alpha}{h_\alpha}$ é fechado para soma, uma vez que I_α é um ideal, mas nem sempre é fechado para o produto, como veremos no exemplo adiante.

Vamos considerar o menor subanel de $\mathbb{K}[[t]]$ contendo o conjunto $\frac{I_\alpha}{h_\alpha}$ que denotaremos

por $\left[\frac{I_\alpha}{h_\alpha} \right]$.

Proposição 3.1. *O anel $[I_\alpha/h_\alpha]$ independe da escolha do elemento h_α .*

Demonstração: Seja $h'_\alpha = \varepsilon h_\alpha$ um outro elemento de H com multiplicidade α , em particular, $\text{mult}_t(\varepsilon) = 0$. Como $\varepsilon \in [I_\alpha/h_\alpha]$ então, pelo lema anterior, $\varepsilon^{-1} \in [I_\alpha/h_\alpha]$. Assim,

$$\frac{I_\alpha}{h'_\alpha} = \frac{I_\alpha}{\varepsilon h_\alpha} = \varepsilon^{-1} \frac{I_\alpha}{h_\alpha} \subseteq \left[\frac{I_\alpha}{h_\alpha} \right]$$

e portanto, $\left[\frac{I_\alpha}{h'_\alpha} \right] \subseteq \left[\frac{I_\alpha}{h_\alpha} \right]$. Analogamente mostra-se que $\left[\frac{I_\alpha}{h_\alpha} \right] \subseteq \left[\frac{I_\alpha}{h'_\alpha} \right]$.

$$\text{Donde, } \left[\frac{I_\alpha}{h'_\alpha} \right] = \left[\frac{I_\alpha}{h_\alpha} \right].$$

□

Por causa da independência da escolha do elemento h_α , denotaremos o anel $\left[\frac{I_\alpha}{h_\alpha} \right] \subset \mathbb{K}[[t]]$ simplesmente por $[I_\alpha]$.

O semigrupo $S([I_\alpha])$ contém o semigrupo gerado pelos inteiros $\beta - \alpha$, com $\beta \in S(H)$ e $\beta \geq \alpha$, que são as multiplicidades de elementos de I_α/h_α . Como pode ocorrer que $[I_\alpha] \neq I_\alpha/h_\alpha$, então podemos ter que $S([I_\alpha]) \neq S(I_\alpha/h_\alpha)$, como ilustra o próximo exemplo.

Exemplo 3.1. *Considere o anel $H = \mathbb{C}[[X, Y]]$, com $X = t^4$, $Y = t^{10} + t^{15}$. Podemos escrever*

$$\begin{aligned} H = \mathbb{C}[[t^4, t^{10} + t^{15}]] &= \mathbb{C} + \mathbb{C}t^4 + \mathbb{C}t^8 + \mathbb{C}t^{10}(1 + t^5) + \mathbb{C}t^{12} + \mathbb{C}t^{14}(1 + t^5) + \mathbb{C}t^{16} + \\ &\quad \mathbb{C}t^{18}(1 + t^5) + \mathbb{C}t^{20} + \mathbb{C}t^{22}(1 + t^5) + \mathbb{C}t^{24} + \mathbb{C}t^{25} + \mathbb{C}t^{26}(1 + t^5) + \\ &\quad \mathbb{C}t^{28} + \mathbb{C}t^{29} + \mathbb{C}t^{30} + t^{32}\mathbb{C}[[t]]. \end{aligned}$$

O semigrupo $S(H)$ formado pelas multiplicidades dos elementos de H consiste dos seguintes inteiros

$$\{0, 4, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 32, \rightarrow\}.$$

Elementos típicos com estas multiplicidades são

$$1, X, X^2, Y, X^3, XY, X^4, X^2Y, X^5, X^3Y, X^6, Y^2 - X^5, X^4Y, \\ X^7, XY^2 - X^6, X^5Y, X^8, X^2Y^2 - X^7, X^6Y, Y^3 - X^5Y, \dots$$

Temos que

$$\frac{I_4}{X} = \mathbb{C} + \mathbb{C}t^4 + \mathbb{C}t^6(1+t^5) + \mathbb{C}t^8 + \mathbb{C}t^{10}(1+t^5) + \mathbb{C}t^{12} + \mathbb{C}t^{14}(1+t^5) + \mathbb{C}t^{16} + \\ \mathbb{C}t^{18}(1+t^5) + \mathbb{C}t^{20} + \mathbb{C}t^{21} + \mathbb{C}t^{22}(1+t^5) + \mathbb{C}t^{24} + \mathbb{C}t^{25} + \mathbb{C}t^{26} + t^{28}\mathbb{C}[[t]] \\ e S\left(\frac{I_4}{X}\right) = \{0, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 28, \rightarrow\}.$$

O anel $[I_4]$, que é gerado pelo conjunto I_4/X contém os seguintes elementos

$$\left(\frac{Y}{X}\right)^2 - \frac{X^4}{X} = \frac{(t^{10}(1+t^5))^2}{t^8} - \frac{t^{16}}{t^4} = 2t^{17} + t^{22}, \\ \left(\frac{Y}{X}\right)^3 - \frac{X^3Y}{X} = \frac{(t^{10}(1+t^5))^3}{t^{12}} - \frac{t^{12}(t^{10}(1+t^5))}{t^4} = 2t^{23} + 3t^{28} + t^{33}$$

cujas multiplicidades são 17 e 23, respectivamente, no entanto $17, 23 \notin S(I_4/X)$.

Note que este exemplo ilustra que o conjunto I_α/h_α pode não ser fechado para o produto.

Agora estamos aptos a apresentar a definição de Anel de Arf.

Definição 3.1 (Anel de Arf). *Um subanel H do anel de séries de potências $\mathbb{K}[[t]]$ é chamado um **anel de Arf** se o conjunto I_α/h_α é um anel para todo $h_\alpha \in H \setminus \{0\}$, isto é, $I_\alpha/h_\alpha = [I_\alpha]$ para todo $\alpha \in S(H)$.*

Se H é um anel de Arf, então o conjunto

$$\{\beta - \alpha, \beta \in S(H); \beta \geq \alpha\}$$

é um semigrupo para qualquer $\alpha \in S(H)$. Desta forma sempre que tivermos H , um anel de

Arf, seu semigrupo $S(H)$ é um semigrupo de Arf, mas o contrário nem sempre ocorre, como retrata o próximo exemplo.

Exemplo 3.2. *Seja o anel $H = \mathbb{C}[[X, Y, Z]]$, com $X = t^4$, $Y = t^{10} + t^{15}$, $Z = t^{27}$. Temos que*

$$S(H) = \{0, 4, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, \rightarrow\}$$

é um semigrupo de Arf, mas H não é um anel de Arf, pois $[I_4]$ contém um elemento de ordem 17,

$$\left(\frac{Y}{X}\right)^2 - \frac{X^4}{X} = \frac{(t^{10}(1+t))^2}{t^8} - t^{12} = 2t^{17} + t^{22},$$

que não pertence $\frac{I_4}{X}$.

Uma pergunta natural é se a interseção de anéis de Arf ainda é um anel de Arf. A próxima proposição garante uma resposta afirmativa para tal fato.

Proposição 3.2. *A interseção de anéis de Arf é um anel de Arf.*

Demonstração: Sejam H e H' dois anéis de Arf e $h_\alpha \in H \cap H'$ com $\text{mult}_t(h_\alpha) = \alpha$, I_α e I'_α os ideais de H e H' cujas multiplicidades dos elementos não são inferiores a α . Como

$$\frac{I_\alpha}{h_\alpha} \cap \frac{I'_\alpha}{h_\alpha} = \frac{I_\alpha \cap I'_\alpha}{h_\alpha}$$

e os conjuntos $\frac{I_\alpha}{h_\alpha}$ e $\frac{I'_\alpha}{h_\alpha}$ são anéis, temos que $\frac{I_\alpha}{h_\alpha} \cap \frac{I'_\alpha}{h_\alpha}$ também é um anel, conseqüentemente $H \cap H'$ é um anel de Arf.

□

Proposição 3.3. *Se H é um anel de Arf, então $[I_\alpha]$ é também um anel de Arf.*

Demonstração: Tomemos os elementos de $S(H)$, $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_i < \dots$ e considere o conjunto dos elementos de I_{α_i} , que são da forma

$$\sum_{j=i}^{\infty} c_j h_{\alpha_j} \quad (c_j \in \mathbb{K}),$$

onde $h_{\alpha_j} \in H$ tem multiplicidade α_j .

Sendo H um anel de Arf, o anel $[I_{\alpha_i}]$ é o conjunto das séries da forma $\sum_{j=i}^{\infty} c_j \frac{h_{\alpha_j}}{h_{\alpha_i}}$, cujas multiplicidades são

$$0 = \beta_0 = \alpha_i - \alpha_i, \beta_1 = \alpha_{i+1} - \alpha_i, \beta_2 = \alpha_{i+2} - \alpha_i, \dots$$

O conjunto de elementos de $[I_{\alpha_i}]$ de multiplicidades superiores ou iguais a β_l é o conjunto das séries da forma

$$\sum_{j=i+l}^{\infty} c_j \frac{h_{\alpha_j}}{h_{\alpha_i}} \quad (c_j \in \mathbb{K}).$$

Como $\frac{h_{\alpha_{i+l}}}{h_{\alpha_i}}$ é um elemento de $[I_{\alpha_i}]$ de multiplicidade $\beta_l = \alpha_{i+l} - \alpha_i$, temos que o conjunto de elementos

$$\frac{\sum_{j=i+l}^{\infty} c_j \frac{h_{\alpha_j}}{h_{\alpha_i}}}{\frac{h_{\alpha_{i+l}}}{h_{\alpha_i}}} = \sum_{j=i+l}^{\infty} c_j \frac{h_{\alpha_j}}{h_{\alpha_{i+l}}}$$

constitui o anel $[I_{\alpha_{i+l}}]$. Portanto $[I_{\alpha_i}]$ também é um anel de Arf.

□

Similarmente à proposição anterior, podemos concluir que se

$$\{0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \rightarrow\}$$

é um semigrupo de Arf, o mesmo acontece com o semigrupo

$$\{0, \alpha_{i+1} - \alpha_i, \alpha_{i+2} - \alpha_i, \dots, \alpha_r - \alpha_i, \rightarrow\}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$.

Uma vez que $\mathbb{K}[[t]]$ é anel de Arf, dado um subanel H de $\mathbb{K}[[t]]$ é sempre possível encontrar um menor anel de Arf em $\mathbb{K}[[t]]$ que contenha H . Isto motiva a seguinte definição.

Definição 3.2 (Fecho de Arf de um Anel). *Se H é um subanel de $\mathbb{K}[[t]]$ então definimos o*

fecho de Arf^*H de H como sendo o menor anel de Arf em $\mathbb{K}[[t]]$ contendo H .

Vejamos agora um processo que permite a construção do fecho de Arf^*H de um anel $H \subseteq \mathbb{K}[[t]]$.

Considere H um anel e seu fecho de Arf *H . Podemos representar H como

$$H = \mathbb{K} + \mathbb{K}h_{\alpha_1} + \mathbb{K}h_{\alpha_2} + \cdots + \mathbb{K}[[t]]h_{\alpha_n},$$

onde $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r < \dots$ são todos os elementos não nulos de $S(H)$ e $h_{\alpha_i} \in H$ tem ordem α_i .

Designemos por $H^{(1)}$ o anel

$$[I_{\alpha_1}] = \sum \mathbb{K} \left(\frac{h_{\alpha_2}}{h_{\alpha_1}} \right)^{s_2} \left(\frac{h_{\alpha_3}}{h_{\alpha_1}} \right)^{s_3} \cdots \left(\frac{h_{\alpha_{n-1}}}{h_{\alpha_1}} \right)^{s_{n-1}} + \mathbb{K}[[t]] \frac{h_{\alpha_n}}{h_{\alpha_1}},$$

onde esta soma é estendida a toda combinação de expoentes inteiros não negativos s_2, s_3, \dots, s_{n-1} tais que $s_2(\alpha_2 - \alpha_1) + s_3(\alpha_3 - \alpha_1) + \cdots + s_{n-1}(\alpha_{n-1} - \alpha_1)$ são inferiores a $\alpha_n - \alpha_1$. Temos, de maneira similar ao apresentado no Teorema (2.1) para o caso de semigrupos, que

$$H \subseteq \mathbb{K} + H^{(1)}h_{\alpha_1} \subseteq ^*H.$$

Considerando $^*H^{(1)}$ o fecho de Arf de $H^{(1)}$ e como $\mathbb{K} + ^*H^{(1)}h_{\alpha_1}$ é um anel de Arf, segue que

$$^*H = \mathbb{K} + ^*H^{(1)}h_{\alpha_1}.$$

De maneira geral $H^{(i+1)}$ é deduzido de $H^{(i)}$ como $H^{(1)}$ deduz-se de H . E claramente para um N suficientemente grande teremos que $H^{(N)} = \mathbb{K}[[t]]$. Se T_{i+1} é um elemento de

menor multiplicidade não nula em $H^{(i)}$, então concluímos que

$$\begin{aligned}
 {}^*H &= \mathbb{K} + T_1 {}^*H^{(1)} \\
 &= \mathbb{K} + \mathbb{K}T_1 + {}^*H^{(2)}T_1T_2 \\
 &= \mathbb{K} + \mathbb{K}T_1 + \mathbb{K}T_1T_2 + {}^*H^{(3)}T_1T_2T_3 \\
 &\quad \dots\dots\dots \\
 &= \mathbb{K} + \mathbb{K}T_1 + \mathbb{K}T_1T_2 + \dots + \mathbb{K}T_1T_2\dots T_{N-1} + {}^*H^{(N)}T_1T_2\dots T_{N-1}T_N \\
 &= \mathbb{K} + \mathbb{K}T_1 + \mathbb{K}T_1T_2 + \dots + \mathbb{K}T_1T_2\dots T_{N-1} + \mathbb{K}[[t]]T_1T_2\dots T_{N-1}T_N.
 \end{aligned}$$

As considerações a seguir permitem construir todos os anéis de Arf e, conseqüentemente, todos os semigrupos de Arf, a partir do anel $\mathbb{K}[[t]]$, que é de Arf.

Escolha um elemento qualquer $T_N \in \mathbb{K}[[t]]$ de multiplicidade não nula γ_N . Temos que

$$A_N = \mathbb{K} + T_N \mathbb{K}[[t]]$$

é um anel de Arf e seu semigrupo associado é

$$S(A_N) = \{0, \gamma_N + n, n \in \mathbb{N}\}$$

também o é.

Agora escolha um elemento qualquer $T_{N-1} \in A_N$ de multiplicidade γ_{N-1} não nula. Vemos facilmente que o anel

$$\begin{aligned}
 A_{N-1} &= \mathbb{K} + T_{N-1}A_N \\
 &\quad \mathbb{K} + \mathbb{K}T_{N-1} + T_{N-1}T_N \mathbb{K}[[t]]
 \end{aligned}$$

é de Arf, o mesmo acontecendo com seu semigrupo

$$S(A_{N-1}) = \{0, \gamma_{N-1}, \gamma_{N-1} + \gamma_N + n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Continuando com esta construção, obtemos que os anéis e semigrupos de Arf são, respectivamente, da forma

$$\begin{aligned} & \mathbb{K} + \mathbb{K}T_1 + \mathbb{K}T_1T_2 + \cdots + \mathbb{K}T_1T_2 \cdots T_{N-1} + \mathbb{K}[[t]]T_1T_2 \cdots T_{N-1}T_N \\ & \{0, \gamma_1, \gamma_1 + \gamma_2, \dots, \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{N-1}, \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_N, \rightarrow\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Reciprocamente, dados um anel de Arf e seu semigrupo de Arf, eles são necessariamente escritos como em (3.1).

Com efeito, seja H um anel de Arf, H pode ser escrito como

$$H = \mathbb{K} + \mathbb{K}h_{\alpha_1} + \mathbb{K}h_{\alpha_2} + \cdots + h_{\alpha_r}\mathbb{K}[[t]]$$

e seja $S(H) = \{\alpha_0 = 0, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \rightarrow\}$ seu semigrupo. Como H é um anel de Arf, então o conjunto I_α/h_α é um anel para todo $h_\alpha \in H \setminus \{0\}$, e mais, pela Proposição (3.3) temos que $[I_\alpha]$ é um anel de Arf, ou seja, ${}^*[I_\alpha] = [I_\alpha] = I_\alpha/h_\alpha$ para todo $h_\alpha \in H \setminus \{0\}$. Portanto temos as seguintes relações recursivas

$$\begin{aligned} H &= \mathbb{K} + h_{\alpha_1} {}^*H^{(1)} \\ {}^*H^{(1)} &= \mathbb{K} + \frac{h_{\alpha_2}}{h_{\alpha_1}} {}^*H^{(2)} \\ {}^*H^{(2)} &= \mathbb{K} + \frac{h_{\alpha_3}}{h_{\alpha_2}} {}^*H^{(3)} \\ &\vdots \\ {}^*H^{(r-1)} &= \mathbb{K} + \frac{h_{\alpha_r}}{h_{\alpha_{r-1}}} \mathbb{K}[[t]]. \end{aligned}$$

Daí obtemos que

$$H = \mathbb{K} + \mathbb{K}h_{\alpha_1} + \mathbb{K}h_{\alpha_1} \frac{h_{\alpha_2}}{h_{\alpha_1}} + \mathbb{K}h_{\alpha_1} \frac{h_{\alpha_2}}{h_{\alpha_1}} \frac{h_{\alpha_3}}{h_{\alpha_2}} + \cdots + h_{\alpha_1} \frac{h_{\alpha_2}}{h_{\alpha_1}} \frac{h_{\alpha_3}}{h_{\alpha_2}} \cdots \frac{h_{\alpha_r}}{h_{\alpha_{r-1}}} \mathbb{K}[[t]].$$

Tomamos assim $T_1 = h_{\alpha_1}, T_2 = \frac{h_{\alpha_2}}{h_{\alpha_1}}, T_3 = \frac{h_{\alpha_3}}{h_{\alpha_2}}, \dots, T_r = \frac{h_{\alpha_r}}{h_{\alpha_{r-1}}}$ e temos o desejado.

Claramente o semigrupo de Arf de H é dado por

$$S(H) = \{0, \gamma_1, \gamma_1 + \gamma_2, \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, \dots, \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_r, \rightarrow\},$$

com $\gamma_1 = \alpha_1, \gamma_2 = \alpha_2 - \alpha_1, \gamma_3 = \alpha_3 - \alpha_2, \dots, \gamma_r = \alpha_r - \alpha_{r-1}$.

Definição 3.3. *Sejam H um subanel de $\mathbb{K}[[t]]$ e *H seu fecho de Arf. Chamamos de **caracteres de Arf de H** os caracteres de Arf do semigrupo $S({}^*H)$.*

Exemplo 3.3. *Dado o anel $H = \mathbb{C}[[X, Y]]$, com $X = t^4, Y = t^{10} + t^{15}$, vamos obter os caracteres de H . Para tanto devemos construir o seu fecho de Arf *H .*

Voltando ao exemplo (3.1), temos que H pode ser escrito como

$$\begin{aligned} H = \mathbb{C}[[t^4, t^{10} + t^{15}]] &= \mathbb{C} + \mathbb{C}t^4 + \mathbb{C}t^8 + \mathbb{C}t^{10}(1 + t^5) + \mathbb{C}t^{12} + \mathbb{C}t^{14}(1 + t^5) + \mathbb{C}t^{16} + \\ &\quad \mathbb{C}t^{18}(1 + t^5) + \mathbb{C}t^{20} + \mathbb{C}t^{22}(1 + t^5) + \mathbb{C}t^{24} + \mathbb{C}t^{25} + \mathbb{C}t^{26}(1 + t^5) + \\ &\quad \mathbb{C}t^{28} + \mathbb{C}t^{29} + \mathbb{C}t^{30} + t^{32}\mathbb{C}[[t]]. \end{aligned}$$

O semigrupo $S(H)$ associado ao anel H consiste nos seguintes inteiros

$$S(H) = \{0, 4, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 32, \rightarrow\} = \langle 4, 10, 25 \rangle.$$

Seguindo os passos expostos anteriormente para construção do fecho de Arf de H , vamos encontrar o anel $H^{(1)} = [I_4]$, para tanto tomemos $h_4 = t^4$. Como vimos, no exemplo (3.1), o conjunto

$$\begin{aligned} \frac{I_4}{t^4} &= \mathbb{C} + \mathbb{C}t^4 + \mathbb{C}t^6(1 + t^5) + \mathbb{C}t^8 + \mathbb{C}t^{10}(1 + t^5) + \mathbb{C}t^{12} + \mathbb{C}t^{14}(1 + t^5) + \mathbb{C}t^{16} + \\ &\quad \mathbb{C}t^{18}(1 + t^5) + \mathbb{C}t^{20} + \mathbb{C}t^{21} + \mathbb{C}t^{22}(1 + t^5) + \mathbb{C}t^{24} + \mathbb{C}t^{25} + \mathbb{C}t^{26} + t^{28}\mathbb{C}[[t]] \end{aligned}$$

não é fechado para o produto, logo I_4/t^4 não é um anel. Como $H^{(1)}$ contém os elementos

$2t^{17} + t^{22}$ e $2t^{23} + 3t^{28} + t^{33}$, este anel pode ser escrito da seguinte forma

$$H^{(1)} = \mathbb{C} + \mathbb{C}t^4 + \mathbb{C}t^6(1+t^5) + \mathbb{C}t^8 + \mathbb{C}t^{10}(1+t^5) + \mathbb{C}t^{12} + \mathbb{C}t^{14}(1+t^5) + \mathbb{C}t^{16} + \mathbb{C}t^{17} + \mathbb{C}t^{18} + t^{20}\mathbb{C}[[t]],$$

e seu semigrupo é

$$S(H^{(1)}) = \{0, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 17, 18, 20, \rightarrow\},$$

que não é de Arf, pois $S(H^{(1)})_{17} - 17$ não é semigrupo. O próximo passo é encontrar o anel $H^{(2)}$, que é obtido do anel $H^{(1)}$. Considere o ideal $I_4^{(1)}$ constituído de todas as séries em $H^{(1)}$ cujas multiplicidades são maiores ou iguais a 4 e seja t^4 um elemento de $H^{(1)}$ de multiplicidade 4. Assim,

$$\frac{I_4^{(1)}}{t^4} = \mathbb{C} + \mathbb{C}t^2(1+t^5) + \mathbb{C}t^4 + \mathbb{C}t^6(1+t^5) + \mathbb{C}t^8 + \mathbb{C}t^{10}(1+t^5) + \mathbb{C}t^{12} + \mathbb{C}t^{13} + \mathbb{C}t^{14} + t^{16}\mathbb{C}[[t]].$$

No entanto o conjunto $\frac{I_4^{(1)}}{t^4}$ não configura um anel, pois não possui o elemento $(t^2(1+t^5))^2 - t^4 = 2t^9 + t^{14}$. Como $H^{(2)} = [I_4^{(1)}]$, temos

$$H^{(2)} = \mathbb{C} + \mathbb{C}t^2(1+t^5) + \mathbb{C}t^4 + \mathbb{C}t^6 + t^8\mathbb{C}[[t]]$$

que é de Arf, pois

$$\begin{aligned} \frac{I_2^{(2)}}{t^2(1+t^5)} &= \mathbb{C} + \mathbb{C}\frac{t^2}{1+t^5} + \mathbb{C}\frac{t^4}{1+t^5} + t^6\mathbb{C}[[t]] \\ &= \mathbb{C} + \mathbb{C}t^2(1-t^5+t^{10}-t^{15}+\dots) + \mathbb{C}t^4(1-t^5+t^{10}-t^{15}+\dots) + t^6\mathbb{C}[[t]] \\ &= \mathbb{C} + \mathbb{C}t^2 + \mathbb{C}t^4 + t^6\mathbb{C}[[t]] \end{aligned}$$

é anel, assim como os conjuntos $\frac{I_4^{(2)}}{t^4}$ e $\frac{I_6^{(2)}}{t^6}$. Logo, $*H^{(2)} = H^{(2)}$.

Como

$$\begin{aligned} {}^*H &= \mathbb{C} + t^4 {}^*H^{(1)} \\ {}^*H_1 &= \mathbb{C} + t^4 {}^*H^{(2)} \end{aligned}$$

temos,

$$\begin{aligned} {}^*H^{(1)} &= \mathbb{C} + \mathbb{C}t^4 + \mathbb{C}t^6(1 + t^5) + \mathbb{C}t^8 + \mathbb{C}t^{10} + t^{12}\mathbb{C}[[t]] \\ {}^*H &= \mathbb{C} + \mathbb{C}t^4 + \mathbb{C}t^8 + \mathbb{C}t^{10}(1 + t^5) + \mathbb{C}t^{12} + \mathbb{C}t^{14} + t^{16}\mathbb{C}[[t]]. \end{aligned}$$

O semigrupo associado ao anel *H é dado por

$$S({}^*H) = \{0, 4, 8, 10, 12, 14, 16, \rightarrow\}.$$

Portanto,

$$\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 4, \gamma_3 = \dots = \gamma_6 = 2, \gamma_7 = \gamma_8 = \dots = 1.$$

Vamos agora determinar os caracteres de Arf de H de maneira análoga como foi feito no exemplo (2.6) para semigrupos:

$$\begin{aligned} {}^*S(6) = \mathbb{N} &\implies \chi_1^{(6)} = 1 \\ {}^*S(5) = \{0, \gamma_6 + {}^*S(6)\} &\implies \chi_1^{(5)} = \gamma_6 = 2 \text{ e } \chi_2^{(5)} = \gamma_6 + \chi_1^{(6)} = 3 \\ {}^*S(4) = \{0, \gamma_5 + {}^*S(5)\} &\implies \chi_1^{(4)} = \gamma_5 = 2 \text{ e } \chi_2^{(4)} = \gamma_5 + \chi_2^{(5)} = 5 \\ {}^*S(3) = \{0, \gamma_4 + {}^*S(4)\} &\implies \chi_1^{(3)} = \gamma_4 = 2 \text{ e } \chi_2^{(3)} = \gamma_4 + \chi_2^{(4)} = 7 \\ {}^*S(2) = \{0, \gamma_3 + {}^*S(3)\} &\implies \chi_1^{(2)} = \gamma_3 = 2 \text{ e } \chi_2^{(2)} = \gamma_3 + \chi_2^{(3)} = 9 \\ {}^*S(1) = \{0, \gamma_2 + {}^*S(2)\} &\implies \chi_1^{(1)} = \gamma_2 = 4, \chi_2^{(1)} = \gamma_2 + \chi_1^{(2)} = 6 \text{ e } \chi_3^{(1)} = \gamma_2 + \chi_2^{(2)} = 13 \\ {}^*S = \{0, \gamma_1 + {}^*S(1)\} &\implies \chi_1 = \gamma_1 = 4, \chi_2 = \gamma_1 + \chi_2^{(1)} = 10 \text{ e } \chi_3 = \gamma_1 + \chi_3^{(1)} = 17. \end{aligned}$$

Logo os caracteres de Arf de H são $\chi_1 = 4, \chi_2 = 10$ e $\chi_3 = 17$.

Exemplo 3.4. *Seja o anel $H = \mathbb{C}[[X, Y, Z]]$, onde $X = t^8, Y = t^{10} + t^{13}, Z = t^{12} + at^{15}$ com $a \in \mathbb{C}$. Vamos determinar os caracteres de H .*

O anel H pode ser escrito como

$$\begin{aligned} H = & \mathbb{C} + \mathbb{C}t^8 + \mathbb{C}(t^{10} + t^{13}) + \mathbb{C}(t^{12} + at^{15}) + \mathbb{C}t^{16} + \mathbb{C}t^8(t^{10} + t^{13}) + \mathbb{C}t^8(t^{12} + at^{15}) + \\ & \mathbb{C}(t^{10} + t^{13})(t^{12} + at^{15}) + \mathbb{C}((t^{10} + t^{13})^2 - (t^{20} + at^{23})) + \mathbb{C}t^{24} + \mathbb{C}t^{16}(t^{10} + t^{13}) + \\ & \mathbb{C}((t^{12} + at^{15})^2 - t^{24}) + \mathbb{C}t^8(t^{20} + at^{23}) + \mathbb{C}(t^{10} + t^{13})(t^{20} + at^{23}) + \mathbb{C}t^8((t^{10} + t^{13})^2 - \\ & (t^{20} + at^{23})) + \mathbb{C}t^{32} + \mathbb{C}(t^{10} + t^{13})((2 - a)t^{23} + t^{26}) + \mathbb{C}t^{24}(t^{10} + t^{13}) + \mathbb{C}t^8(2t^{27} + \\ & at^{30}) + \mathbb{C}t^{16}(t^{20} + at^{23}) + \mathbb{C}(t^{10} + t^{13})(2t^{27} + at^{30}) + \mathbb{C}t^8(t^{30} + (a + 1)t^{33} + at^{36}) + \\ & \mathbb{C}((t^{12} + at^{15})^3 - (t^{36} + at^{39})) + \mathbb{C}t^{40} + \dots \end{aligned}$$

ou ainda, se $a \neq 2$

$$\begin{aligned} H = & \mathbb{C} + \mathbb{C}t^8 + \mathbb{C}(t^{10} + t^{13}) + \mathbb{C}(t^{12} + at^{15}) + \mathbb{C}t^{16} + \mathbb{C}(t^{18} + t^{21}) + \mathbb{C}(t^{20} + at^{23}) + \\ & \mathbb{C}(t^{22} + (a + 1)t^{25} + at^{28}) + \mathbb{C}((2 - a)t^{23} + t^{26}) + \mathbb{C}t^{24} + \mathbb{C}(t^{26} + t^{29}) + \mathbb{C}t^{27} + \\ & \mathbb{C}t^{28} + t^{30}\mathbb{C}[[t]]. \end{aligned}$$

O semigrupo associado a H é gerado pelos elementos $\{8, 10, 12, 23, 27\}$, ou seja,

$$S(H) = \{0, 8, 10, 12, 16, 18, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, \rightarrow\}.$$

*Utilizando a construção do fecho de Arf de um anel exposto anteriormente, vamos encontrar *H . O primeiro passo é construir o anel $H^{(1)} = [I_8]$. Para tanto, necessitamos considerar I_8/t^8 , ou seja,*

$$\begin{aligned} \frac{I_8}{t^8} = & \mathbb{C} + \mathbb{C}(t^2 + t^5) + \mathbb{C}(t^4 + at^7) + \mathbb{C}t^8 + \mathbb{C}(t^{10} + t^{13}) + \mathbb{C}(t^{12} + at^{15}) + \\ & \mathbb{C}(t^{14} + (a + 1)t^{17} + at^{20}) + \mathbb{C}((2 - a)t^{15} + t^{18}) + \mathbb{C}t^{16} + \mathbb{C}(t^{18} + t^{21}) + \mathbb{C}t^{19} + \\ & \mathbb{C}t^{20} + t^{22}\mathbb{C}[[t]], \end{aligned}$$

que por sua vez não é anel, pois

$$\begin{aligned}(t^2 + t^5)(t^4 + at^7) &= t^6 + (a + 1)t^9 + at^{12} \notin \frac{I_8}{t^8} \\ (t^2 + t^5)^2 - (t^4 + at^7) &= (2 - a)t^7 + t^{10} \notin \frac{I_8}{t^8}.\end{aligned}$$

Assim,

$$H^{(1)} = \mathbb{C} + \mathbb{C}(t^2 + t^5) + \mathbb{C}t^4 + t^6\mathbb{C}[[t]],$$

que é de Arf. De fato, note que

$$\begin{aligned}\frac{I_2^{(1)}}{t^2 + t^5} &= \mathbb{C} + \mathbb{C}\frac{t^2}{1 + t^3} + t^4\mathbb{C}[[t]] \\ &= \mathbb{C} + \mathbb{C}t^2(1 - t^3 + t^6 - t^9 + \dots) + t^4\mathbb{C}[[t]] \\ &= \mathbb{C} + \mathbb{C}t^2 + t^4\mathbb{C}[[t]], \\ \frac{I_4^{(1)}}{t^4} &= \mathbb{C} + t^2\mathbb{C}[[t]] \text{ e} \\ \frac{I_j^{(1)}}{t^j} &= \mathbb{C}[[t]], \text{ para todo } j \geq 6,\end{aligned}$$

são todos anéis. Logo ${}^*H^{(1)} = H^{(1)}$. Pela construção do fecho de Arf de H temos que

$$\begin{aligned}{}^*H &= \mathbb{C} + t^8{}^*H^{(1)} \\ &= \mathbb{C} + \mathbb{C}t^8 + \mathbb{C}(t^{10} + t^{13}) + \mathbb{C}t^{12} + t^{14}\mathbb{C}[[t]].\end{aligned}$$

Obtemos assim o seguinte semigrupo associado a *H

$$S({}^*H) = \{0, 8, 10, 12, 14, \rightarrow\},$$

com $\gamma_1 = 8, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = 2, \gamma_4 = 2, \gamma_5 = \gamma_6 = \dots = 1$.

Vamos agora determinar os caracteres de Arf de H como no exemplo anterior.

$$\begin{aligned}
*S(4) = \mathbb{N} &\implies \chi_1^{(4)} = 1 \\
*S(3) = \{0, \gamma_4 + *S(4)\} &\implies \chi_1^{(3)} = \gamma_4 = 2 \text{ e } \chi_2^{(3)} = \gamma_4 + \chi_1^{(4)} = 3 \\
*S(2) = \{0, \gamma_3 + *S(3)\} &\implies \chi_1^{(2)} = \gamma_3 = 2 \text{ e } \chi_2^{(2)} = \gamma_3 + \chi_2^{(3)} = 5 \\
*S(1) = \{0, \gamma_2 + *S(2)\} &\implies \chi_1^{(1)} = \gamma_2 = 2 \text{ e } \chi_2^{(1)} = \gamma_2 + \chi_2^{(2)} = 7 \\
*S = \{0, \gamma_1 + *S(1)\} &\implies \chi_1 = \gamma_1 = 8, \chi_2 = \gamma_1 + \chi_1^{(1)} = 10 \text{ e } \chi_3 = \gamma_1 + \chi_2^{(1)} = 15.
\end{aligned}$$

Logo os caracteres de Arf de H são $\chi_1 = 8, \chi_2 = 10$ e $\chi_3 = 15$.

Agora se $a = 2$, o anel $H = \mathbb{C}[[t^8, t^{10} + t^{13}, t^{12} + 2t^{15}]]$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
H = &\mathbb{C} + \mathbb{C}t^8 + \mathbb{C}(t^{10} + t^{13}) + \mathbb{C}(t^{12} + 2t^{15}) + \mathbb{C}t^{16} + \mathbb{C}(t^{18} + t^{21}) + \mathbb{C}(t^{20} + 2t^{23}) + \\
&\mathbb{C}(t^{22} + 3t^{25} + 2t^{28}) + \mathbb{C}t^{24} + \mathbb{C}t^{26} + \mathbb{C}(t^{27} + t^{30}) + \mathbb{C}(t^{28} + 2t^{31}) + \mathbb{C}t^{29} + \\
&\mathbb{C}(t^{30} + 3t^{33}) + \mathbb{C}t^{32} + t^{34}\mathbb{C}[[t]].
\end{aligned}$$

O semigrupo associado a H é gerado pelos elementos $\{8, 10, 12, 27, 29\}$, ou seja,

$$S(H) = \{0, 8, 10, 12, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 34, \rightarrow\}.$$

Encontremos o anel $H^{(1)} = [I_8]$, onde

$$\begin{aligned}
\frac{I_8}{t^8} = &\mathbb{C} + \mathbb{C}(t^2 + t^5) + \mathbb{C}(t^4 + 2t^7) + \mathbb{C}t^8 + \mathbb{C}(t^{10} + t^{13}) + \mathbb{C}(t^{12} + 2t^{15}) + \\
&\mathbb{C}(t^{14} + 3t^{17} + 2t^{20}) + \mathbb{C}t^{16} + \mathbb{C}t^{18} + \mathbb{C}(t^{19} + t^{22}) + \mathbb{C}(t^{20} + 2t^{23}) + \mathbb{C}t^{21} + \\
&\mathbb{C}(t^{22} + 3t^{25}) + \mathbb{C}t^{24} + t^{26}\mathbb{C}[[t]].
\end{aligned}$$

Note que $\frac{I_8}{t^8}$ não é anel, pois

$$\begin{aligned} (t^2 + t^5)(t^4 + 2t^7) &= t^6 + 3t^9 + 2t^{12} \notin \frac{I_8}{t^8} \\ (t^2 + t^5)^2 - (t^4 + 2t^7) &= t^{10} \notin \frac{I_8}{t^8} \\ (t^4 + 2t^7)^2 - t^8 &= 4t^{11} + 4t^{14} \notin \frac{I_8}{t^8}. \end{aligned}$$

Deste modo, temos que

$$H^{(1)} = \mathbb{C} + \mathbb{C}(t^2 + t^5) + \mathbb{C}(t^4 + 2t^7) + \mathbb{C}(t^6 + 3t^9) + \mathbb{C}t^8 + t^{10}\mathbb{C}[[t]].$$

E mais, $H^{(1)}$ é de Arf e a verificação deste fato é análoga a feita no caso $a \neq 2$. Portanto,

$$\begin{aligned} {}^*H &= \mathbb{C} + t^8 {}^*H^{(1)} \\ &= \mathbb{C} + \mathbb{C}t^8 + \mathbb{C}(t^{10} + t^{13}) + \mathbb{C}(t^{12} + 2t^{15}) + \mathbb{C}(t^{14} + 3t^{17}) + \mathbb{C}t^{16} + t^{18}\mathbb{C}[[t]]. \end{aligned}$$

O semigrupo associado a *H é dado por

$$S({}^*H) = \{0, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \rightarrow\},$$

com $\gamma_1 = 8, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = 2, \gamma_4 = 2, \gamma_5 = 2, \gamma_6 = 2, \gamma_7 = \gamma_8 = \dots = 1$

Os caracteres de Arf de H , como feito no caso $a \neq 2$, podem ser determinados como segue

$$\begin{aligned} {}^*S(6) = \mathbb{N} &\implies \chi_1^{(6)} = 1 \\ {}^*S(5) = \{0, \gamma_6 + {}^*S(6)\} &\implies \chi_1^{(5)} = \gamma_6 = 2 \text{ e } \chi_2^{(5)} = \gamma_6 + \chi_1^{(6)} = 3 \\ {}^*S(4) = \{0, \gamma_5 + {}^*S(5)\} &\implies \chi_1^{(4)} = \gamma_5 = 2 \text{ e } \chi_2^{(4)} = \gamma_5 + \chi_2^{(5)} = 5 \\ {}^*S(3) = \{0, \gamma_4 + {}^*S(4)\} &\implies \chi_1^{(3)} = \gamma_4 = 2 \text{ e } \chi_2^{(3)} = \gamma_4 + \chi_2^{(4)} = 7 \\ {}^*S(2) = \{0, \gamma_3 + {}^*S(3)\} &\implies \chi_1^{(2)} = \gamma_3 = 2 \text{ e } \chi_2^{(2)} = \gamma_3 + \chi_2^{(3)} = 9 \end{aligned}$$

$${}^*S(1) = \{0, \gamma_2 + {}^*S(2)\} \implies \chi_1^{(1)} = \gamma_2 = 2 \text{ e } \chi_2^{(1)} = \gamma_2 + \chi_2^{(2)} = 11$$

$${}^*S = \{0, \gamma_1 + {}^*S(1)\} \implies \chi_1 = \gamma_1 = 8, \chi_2 = \gamma_1 + \chi_1^{(1)} = 10 \text{ e } \chi_3 = \gamma_1 + \chi_2^{(1)} = 19.$$

Logo os caracteres de Arf de H são $\chi_1 = 8, \chi_2 = 10$ e $\chi_3 = 19$.

Dado um subanel H de $\mathbb{K}[[t]]$ e $S(H)$ seu semigrupo associado, podemos construir ${}^*S(H)$ e $S({}^*H)$. Uma questão natural que surge é se estes semigrupos são iguais. O próximo exemplo indica que isto não é verdade.

Exemplo 3.5. *Seja H o subanel apresentado no exemplo (3.4) com $a \neq 2$. Temos que $S(H) = \langle 8, 10, 12, 23, 27 \rangle$ e pelo exemplo (2.5) segue que ${}^*S(H) = \langle 8, 10, 12, 14, 23, 25, 27, 29 \rangle$.*

Por outro lado, temos do exemplo anterior que

$$S({}^*H) = \{0, 8, 10, 12, 14, \rightarrow\} = \langle 8, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 21 \rangle.$$

Portanto, ${}^*S(H) \neq S({}^*H)$.

Dados dois subanéis H e \widetilde{H} de $\mathbb{K}[[t]]$ tais que $S(H) = S(\widetilde{H})$, não necessariamente tem-se $\Sigma = \widetilde{\Sigma}$, onde Σ e $\widetilde{\Sigma}$ são os conjuntos de caracteres de H e \widetilde{H} , respectivamente. O próximo exemplo retrata tal fato.

Exemplo 3.6. *Seja o anel $\widetilde{H} = \mathbb{C}[[X, Y, Z]]$, onde $X = t^4, Y = t^{10}, Z = t^{25}$. Vamos determinar os caracteres de \widetilde{H} , e para tanto necessitamos determinar ${}^*\widetilde{H}$.*

O anel \widetilde{H} pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \widetilde{H} = \mathbb{C}[[t^4, t^{10}, t^{25}]] &= \mathbb{C} + \mathbb{C}t^4 + \mathbb{C}t^8 + \mathbb{C}t^{10} + \mathbb{C}t^{12} + \mathbb{C}t^{14} + \mathbb{C}t^{16} + \mathbb{C}t^{18} + \mathbb{C}t^{20} + \mathbb{C}t^{22} + \\ &\quad \mathbb{C}t^{24} + \mathbb{C}t^{25} + \mathbb{C}t^{26} + \mathbb{C}t^{28} + \mathbb{C}t^{29} + \mathbb{C}t^{30} + t^{32}\mathbb{C}[[t]]. \end{aligned}$$

O semigrupo $S(\widetilde{H})$ associado ao anel \widetilde{H} consiste nos inteiros

$$S(\widetilde{H}) = \{0, 4, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 32, \rightarrow\} = \langle 4, 10, 25 \rangle.$$

Tome $h_4 = t^4$ e vamos encontrar o anel $\widetilde{H}^{(1)} = [\widetilde{I}_4]$. O conjunto

$$\frac{\widetilde{I}_4}{t^4} = \mathbb{C} + \mathbb{C}t^4 + \mathbb{C}t^6 + \mathbb{C}t^8 + \mathbb{C}t^{10} + \mathbb{C}t^{12} + \mathbb{C}t^{14} + \mathbb{C}t^{16} + \mathbb{C}t^{18} + \mathbb{C}t^{20} + \mathbb{C}t^{21} + \mathbb{C}t^{22} + \mathbb{C}t^{24} + \mathbb{C}t^{25} + \mathbb{C}t^{26} + t^{28}\mathbb{C}[[t]],$$

não é anel, pois $t^6 \cdot t^{21} = t^{27} \notin \frac{\widetilde{I}_4}{X}$. Segue que o anel $\widetilde{H}^{(1)}$ é da seguinte forma:

$$\widetilde{H}^{(1)} = \mathbb{C} + \mathbb{C}t^4 + \mathbb{C}t^6 + \mathbb{C}t^8 + \mathbb{C}t^{10} + \mathbb{C}t^{12} + \mathbb{C}t^{14} + \mathbb{C}t^{16} + \mathbb{C}t^{18} + \mathbb{C}t^{20} + \mathbb{C}t^{21} + \mathbb{C}t^{22} + t^{24}\mathbb{C}[[t]],$$

e seu semigrupo associado é

$$S(\widetilde{H}^{(1)}) = \{0, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 21, 22, 24, \rightarrow\}.$$

Note que $S(\widetilde{H}^{(1)})$ não é de Arf, pois $(S(\widetilde{H}^{(1)}))_{21} - 21 = \{0, 1, 3, 4, \dots\}$ não é semigrupo, conseqüentemente, $\widetilde{H}^{(1)}$ não é anel de Arf. Continuando com a construção do fecho de Arf de \widetilde{H} , vamos agora determinar ${}^*\widetilde{H}^{(1)}$, que por sua vez depende do anel $\widetilde{H}^{(2)} = [\widetilde{I}_4^{(1)}]$. Veja que

$$\frac{\widetilde{I}_4^{(1)}}{t^4} = \mathbb{C} + \mathbb{C}t^2 + \mathbb{C}t^4 + \mathbb{C}t^6 + \mathbb{C}t^8 + \mathbb{C}t^{10} + \mathbb{C}t^{12} + \mathbb{C}t^{14} + \mathbb{C}t^{16} + \mathbb{C}t^{17} + \mathbb{C}t^{18} + t^{20}\mathbb{C}[[t]]$$

não é anel, pois $t^2 \cdot t^{17} = t^{19} \notin \frac{\widetilde{I}_4^{(1)}}{t^4}$. Logo,

$$\widetilde{H}^{(2)} = \mathbb{C} + \mathbb{C}t^2 + \mathbb{C}t^4 + \mathbb{C}t^6 + \mathbb{C}t^8 + \mathbb{C}t^{10} + \mathbb{C}t^{12} + \mathbb{C}t^{14} + t^{16}\mathbb{C}[[t]].$$

Visivelmente tem-se que $\widetilde{H}^{(2)}$ é de Arf, logo, ${}^*\widetilde{H}^{(2)} = \widetilde{H}^{(2)}$. Como,

$$\begin{aligned} {}^*\widetilde{H} &= \mathbb{C} + t^4 {}^*\widetilde{H}^{(1)} \\ {}^*\widetilde{H}^{(1)} &= \mathbb{C} + t^4 {}^*\widetilde{H}^{(2)}, \end{aligned}$$

temos,

$${}^*\widetilde{H} = \mathbb{C} + \mathbb{C}t^4 + \mathbb{C}t^8 + \mathbb{C}t^{10} + \mathbb{C}t^{12} + \mathbb{C}t^{14} + \mathbb{C}t^{16} + \mathbb{C}t^{18} + \mathbb{C}t^{20} + \mathbb{C}t^{22} + t^{24}\mathbb{C}[[t]].$$

E seu semigrupo associado é

$$S({}^*\widetilde{H}) = \{0, 4, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, \rightarrow\}.$$

Portanto,

$$\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 4, \gamma_3 = \dots = \gamma_{10} = 2, \gamma_{11} = \gamma_{12} = \dots = 1.$$

Procedendo como no exemplo (3.4), temos que $\widetilde{\Sigma} = \{4, 10, 25\}$ é o conjunto de caracteres do semigrupo $S({}^*\widetilde{H})$ e comparando este exemplo com o exemplo (3.3), temos que $S(H) = S(\widetilde{H})$, mas $\Sigma = \{4, 10, 17\} \neq \{4, 10, 25\} = \widetilde{\Sigma}$.

No próximo exemplo veremos que se dois subanéis H e \widetilde{H} de $\mathbb{K}[[t]]$ possuem os mesmos conjuntos de caracteres, ou seja, $\Sigma = \widetilde{\Sigma}$, não podemos afirmar que $S(H) = S(\widetilde{H})$.

Exemplo 3.7. Seja o anel $\widetilde{H} = \mathbb{C}[[X, Y, Z]]$, onde $X = t^8, Y = t^{10}, Z = t^{19}$. O anel \widetilde{H} pode ser escrito como segue:

$$\begin{aligned} \widetilde{H} = \mathbb{C}[[t^8, t^{10}, t^{19}]] &= \mathbb{C} + \mathbb{C}t^8 + \mathbb{C}t^{10} + \mathbb{C}t^{16} + \mathbb{C}t^{18} + \mathbb{C}t^{19} + \mathbb{C}t^{20} + \mathbb{C}t^{24} + \mathbb{C}t^{26} + \mathbb{C}t^{27} + \\ &\quad \mathbb{C}t^{28} + \mathbb{C}t^{29} + \mathbb{C}t^{30} + \mathbb{C}t^{32} + \mathbb{C}t^{34} + \mathbb{C}t^{35} + \mathbb{C}t^{36} + \mathbb{C}t^{37} + \mathbb{C}t^{38} + \\ &\quad \mathbb{C}t^{39} + \mathbb{C}t^{40} + t^{42}\mathbb{C}[[t]], \end{aligned}$$

e seu semigrupo associado é

$$S(\widetilde{H}) = \{0, 8, 10, 16, 18, 19, 20, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, \rightarrow\}.$$

Considere $h_8 = t^8$ e vamos encontrar o anel $\widetilde{H}^{(1)} = [\widetilde{I}_8]$. O conjunto

$$\frac{\widetilde{I}_8}{t^8} = \mathbb{C} + \mathbb{C}t^2 + \mathbb{C}t^8 + \mathbb{C}t^{10} + \mathbb{C}t^{11} + \mathbb{C}t^{12} + \mathbb{C}t^{16} + \mathbb{C}t^{18} + \mathbb{C}t^{19} + \mathbb{C}t^{20} + \mathbb{C}t^{21} + \mathbb{C}t^{22} + \mathbb{C}t^{24} + \mathbb{C}t^{26} + \mathbb{C}t^{27} + \mathbb{C}t^{28} + \mathbb{C}t^{29} + \mathbb{C}t^{30} + \mathbb{C}t^{31} + \mathbb{C}t^{32} + t^{34}\mathbb{C}[[t]],$$

não é anel, pois $t^2 \cdot t^{11} = t^{13} \notin \frac{\widetilde{I}_8}{t^8}$. Segue que o anel $\widetilde{H}^{(1)}$ é da seguinte forma:

$$\widetilde{H}^{(1)} = \mathbb{C} + \mathbb{C}t^2 + \mathbb{C}t^4 + \mathbb{C}t^6 + \mathbb{C}t^8 + t^{10}\mathbb{C}[[t]].$$

Veja que $\widetilde{H}^{(1)}$ é de Arf, assim, ${}^*\widetilde{H}^{(1)} = \widetilde{H}^{(1)}$. Pela construção do fecho de Arf de um anel temos que

$${}^*\widetilde{H} = \mathbb{C} + t^{8*}\widetilde{H}^{(1)} = \mathbb{C} + \mathbb{C}t^8 + \mathbb{C}t^{10} + \mathbb{C}t^{12} + \mathbb{C}t^{14} + \mathbb{C}t^{16} + t^{18}\mathbb{C}[[t]].$$

Portanto,

$$S({}^*\widetilde{H}) = \{0, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \rightarrow\},$$

com $\gamma_1 = 8, \gamma_2 = \dots = \gamma_6 = 2, \gamma_7 = \gamma_8 = \dots = 1$.

Assim, os caracteres de Arf do semigrupo $S({}^*\widetilde{H})$, isto é, de \widetilde{H} são os mesmos do semigrupo $S({}^*H)$, ou seja, de H do exemplo (3.4), para o caso $a = 2$, mas note que $S(\widetilde{H}) \neq S(H)$.

Ao retomarmos o exemplo (1.3), onde resolvemos a singularidade da curva \mathcal{C} , cuja parametrização é dada por $X = t^4, Y = t^{10} + t^{15}$, verificamos que os caracteres da curva calculados no exemplo (1.6) coincidiram com os caracteres de Arf encontrados no exemplo (3.3) para o semigrupo $S({}^*H)$, quando $H = \mathbb{C}[[t^4, t^{10} + t^{15}]]$.

Observamos que este fato também ocorre se compararmos os exemplos (1.4) e (3.4) quando $a = 2$ e $a \neq 2$, respectivamente.

O próximo teorema garante que isso não é mera coincidência, mas sim um fato que ocorre para qualquer curva algebróide irredutível.

Considere inicialmente um ramo \mathcal{C} , passando pela origem, dada pela seguinte parametrização:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} X_1 = \varphi_1(t) \\ X_2 = \varphi_2(t) \\ \vdots \\ X_n = \varphi_n(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

onde cada $\varphi_i(t) \in \mathbb{K}[[t]]$. Considere o anel $H = \mathbb{K}[[X_1, X_2, \dots, X_n]]$, que é na verdade o anel local do ramo \mathcal{C} . O corolário (2.1) garante que $S(H)$ admite condutor, assim temos que H contém elementos de todas as multiplicidades acima de um número N suficientemente grande.

O teorema abaixo permite que encontremos a sequência de multiplicidades de um ramo a partir do fecho de Arf do anel local do ramo.

Teorema 3.1. *Sejam *H o fecho de Arf do anel $H = \mathbb{K}[[X_1, X_2, \dots, X_n]]$ e $S({}^*H) = \{0, \gamma_1, \gamma_1 + \gamma_2, \dots, \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{N-1}, \rightarrow\}$ seu semigrupo. A sequência de multiplicidades do ramo \mathcal{C} com parametrização (3.2) é*

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{N-2}, \gamma_{N-1}, 1, 1, \dots$$

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos considerar que $mult_t(X_1)$ é o menor dentre os números $mult_t(X_1), mult_t(X_2), \dots, mult_t(X_n)$. O ponto $O = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$ é então um ponto de multiplicidade $mult_t(X_1)$. Fica claro assim que $mult_t(X_1) = \gamma_1$.

É suficiente mostrar que a sequência de multiplicidades do ramo

$$\mathcal{C}^{(1)} : \begin{cases} X_1^{(1)} = \varphi_1(t) \\ X_2^{(1)} = \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} \\ \vdots \\ X_n^{(1)} = \frac{\varphi_n(t)}{\varphi_1(t)} \end{cases}$$

é $\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_{N-1}, 1, 1, \dots$

Transportamos a origem do sistema de coordenadas ao ponto do ramo $\mathcal{C}^{(1)}$ quando $t = 0$, ou seja, consideramos a translação $X_1^{(1)} - \eta_1, X_2^{(1)} - \eta_2, \dots, X_n^{(1)} - \eta_n$, onde $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ são os termos constantes das séries $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \dots, X_n^{(1)}$.

Seja I_{γ_1} o ideal de $H = \mathbb{K}[[X_1, X_2, \dots, X_n]]$ formado pelas séries de multiplicidades maior ou igual a γ_1 . Temos que

$$[I_{\gamma_1}] = \mathbb{K}[[X_1^{(1)} - \eta_1, X_2^{(1)} - \eta_2, \dots, X_n^{(1)} - \eta_n]].$$

De fato, tome $\varphi_1(t) = h_{\gamma_1}$, então

$$\begin{aligned} X_1^{(1)} = \varphi_1(t) \in [I_{\gamma_1}] &\implies X_1^{(1)} - \eta_1 \in [I_{\gamma_1}] \\ X_2^{(1)} = \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} \in [I_{\gamma_1}] &\implies X_2^{(1)} - \eta_2 \in [I_{\gamma_1}] \\ &\vdots \\ X_n^{(1)} = \frac{\varphi_n(t)}{\varphi_1(t)} \in [I_{\gamma_1}] &\implies X_n^{(1)} - \eta_n \in [I_{\gamma_1}]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbb{K}[[X_1^{(1)} - \eta_1, X_2^{(1)} - \eta_2, \dots, X_n^{(1)} - \eta_n]] \subseteq [I_{\gamma_1}].$$

Reciprocamente, seja $h \in [I_{\gamma_1}]$, logo h é escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} h &= \sum \mathbb{K}(\varphi_1(t))^{s_1} \left(\frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}\right)^{s_2} \cdots \left(\frac{\varphi_n(t)}{\varphi_1(t)}\right)^{s_n} \\ &= \sum \mathbb{K}(X_1^{(1)})^{s_1} (X_2^{(1)})^{s_2} \cdots (X_n^{(1)})^{s_n} \in \mathbb{K}[[X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \dots, X_n^{(1)}]]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$[I_{\gamma_1}] \subseteq \mathbb{K}[[X_1^{(1)} - \eta_1, X_2^{(1)} - \eta_2, \dots, X_n^{(1)} - \eta_n]].$$

Pela construção do fecho de Arf de um anel temos que

$$\begin{aligned} {}^*H &= \mathbb{K} + \varphi_1(t) {}^*[I_{\gamma_1}] \text{ e} \\ S({}^*H) &= \{0, \gamma_1 + S({}^*[I_{\gamma_1}])\}, \end{aligned}$$

o que implica que

$$S(^*[I_{\gamma_1}]) = \{0, \gamma_2, \gamma_2 + \gamma_3, \dots, \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{N-1}, \rightarrow\}.$$

Portanto a origem é um ponto de multiplicidade γ_2 para o ramo com parametrização

$$X_1^{(1)} - \eta_1, X_2^{(1)} - \eta_2, \dots, X_n^{(1)} - \eta_n,$$

ou seja, o menor dos números

$$\text{mult}_t(X_1^{(1)} - \eta_1), \text{mult}_t(X_2^{(1)} - \eta_2), \dots, \text{mult}_t(X_n^{(1)} - \eta_n)$$

é γ_2 .

Conclui-se a demonstração do teorema repetindo este raciocínio.

□

Finalmente, conforme o teorema (2.4), os números $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{N-2}, \gamma_{N-1}, 1, 1, \dots$ deduzem-se dos caracteres de H exatamente da mesma maneira que estes números agora considerados como elementos da sequência de multiplicidades do ramo, deduzem-se dos caracteres da curva quando associados ao ramo \mathcal{C} . Portanto os caracteres deste ramo são os mesmos do semigrupo $S(^*H)$, ou seja, de H .

Deste modo, respondemos a pergunta que Du Val apresentou em seu artigo e que mencionamos no final do capítulo (1).

Resposta: Seja o anel $H = \mathbb{K}[[X_1, X_2, \dots, X_n]]$, onde os X_i 's são séries em $\mathbb{K}[[t]]$ que compõem a parametrização de um ramo \mathcal{C} . Primeiro construa seu fecho de Arf *H , em seguida tome seu semigrupo $S(^*H)$. Utilizando a construção dada no término do capítulo (2) encontramos os caracteres de Arf de H , que pelo teorema (3.1), sabemos que são os mesmos encontrados via resolução canônica.

BIBLIOGRAFIA

- [AM] M.F. Atiyah; I.G. MacDonald; *Introduction to Commutative Algebra*. Addison Wesley Publishing Company (1969).
- [Arf] C. Arf; *Une Interprétation Algébrique de la suite des ordres de Multiplicité d'une Branche Algébrique*. Proc. London Math. Soc., Series 2, 50, 256-287 (1949).
- [DV1] P. Du Val; *The Jacobian Algorithm and Multiplicity Sequence of an Algebraic Branch*. Rev. Faculté Sci. Univ. Istanbul, 7, 107-112 (1942).
- [DV2] P. Du Val; *Note on Cahit Arf's Une Interprétation Algébrique de la suite des ordres de Multiplicité d'une Branche Algébrique*. Proc. London Math. Soc., Series 2, 50, 288-294 (1949).
- [H] A. Hefez; *Irreducible Plane Curve Singularities. Real and Complex Singularities*. Lectures Notes in Pure and Appl. Math, 232 Dekker, 1-120. New York (2003).
- [Hir] H. Hironaka; *Resolution of Singularities of an Algebraic Variety over a Field of Characteristic Zero*. Ann. of Math., 79, 109-326 (1964).
- [HKT] J.W.P. Hirschfeld; G. Korchmáros; F. Torres; *Algebraic Curves over a Finite Field*. Princeton Series in Applied Mathematics (2008).
- [Sem] J. G. Semple; *Singularities of Space Algebraic Curves*. Proc. London Math. Soc., Series 2, 44, 149-174 (1938).
- [Ser] S. Sertöz; *Arf Rings and Characters*. arXiv. Alg-geom/9604009 v1 11 Apr 1996.

-
- [Todd] J. A. Todd; *On Algebraic Curve Branches*. Proc. London Math. Soc., S1-21, 233-240 (1946).
- [W] C.T.C. Wall; *Singular Points of Plane Curves*. Cambridge University Press (2004).
- [Zar] O. Zariski; *On the Topology of Algebroid Singularities*. Amer. J. Math., 54, 453-465 (1932).