UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

THALES MAIER DE SOUZA

Ondas acústicas em domínios limitados com fronteira localmente reagente: Existência, unicidade e estabilidade uniforme

Maringá
2013

THALES MAIER DE SOUZA

Ondas acústicas em domínios limitados com fronteira localmente reagente: existência, unicidade e estabilidade uniforme

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Análise.

Orientador: Cícero Lopes Frota

Maringá

2013

Ondas acústicas em domínios limitados com fronteira localmente reagente: existência, unicidade e estabilidade uniforme

THALES MAIER DE SOUZA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática pela Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA

Cícero Lopes Frota
Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR
(Orientador)

Valéria Neves Domingos Cavalcanti
Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR

Ma To Fu
Universidade de São Paulo - ICMC/USP-SP

Dedico este trabalho à todos que acreditaram em mim.

Agradecimentos

Primeiro agradeço à Deus por tudo.

Agradeço aos meus pais, por entender minha ausência e mesmo assim me dar apoio.

À Adriane, minha namorada, por ter me compreendido nos momentos de estresse.

Aos amigos pelo apoio e o mais importante, as confraternizações.

Agradeço aos professores da graduação e do curso de mestrado, que me ensinaram muito bem.

Agradecimentos ao Cícero Lopes Frota, que me orientou durante a pós-graduação.

Por fim, agradeço ao CNPq, pelo apoio financeiro, sem o qual seria impossível dedicar-se integralmente à jornada de estudos.

Thales Maier de Souza

Se enxerguei mais longe, foi porque me apoiei nos ombros de gigantes.

—— Isaac Newton.

Resumo

Neste trabalho estudamos uma classe de problemas de valores iniciais e de fronteira que modelam o movimento de ondas acústicas em uma região limitada com fronteira localmente reagente. Apresentamos resultados sobre existência e unicidade de solução, bem como, resultados sobre a estabilização uniforme da energia. Técnicas e resultados de análise funcional, especialmente, teoria de semigrupos, espaços de Sobolev e o método construtivo de Faedo-Galerkin foram essenciais.

Palavras-chave: Estabilização uniforme; Equação da onda; Condições de fronteira da acústica.

Abstract

In this work we study a class of initial boundary value problem which models acoustic wave motion in a bounded domain with locally reacting boundary. We present results on the existence and uniqueness of solution as well as results on the uniform stabilization of the energy. The techniques and results of functional analysis, especially, semigroup theory, Sobolev spaces and Faedo-Galerkin's method were essential.

Keywords: Uniform stabilization; Wave equation; Acoustic boundary conditions.

Sumário

Introdução **10**

1 Preliminares **13**

1.1 Motivação Física 13

1.1.1 Movimento de Ondas Acústicas 13

1.1.2 Condições de Fronteira da Acústica 19

1.2 Notações e Resultados Prévios 21

1.3 Espaço $H_D(\Omega)$ 30

1.4 Espaço $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ 32

2 Existência e Unicidade de Soluções **36**

2.1 Introdução 36

2.2 Teoria de existência no espaço $H_D(\Omega)$ 38

2.3 Teoria de existência no Espaço $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ 47

2.3.1 Via Método de Semigrupos 48

2.3.2 Via Método de Faedo-Galerkin 51

2.4 Teoria de existência no Espaço W 63

2.5 Existência e Unicidade de Solução para Problemas com Estabilização Uniforme 67

3 Estabilização Uniforme 76

3.1 Introdução 76

3.2 Estabilização Uniforme - $\left(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1\right)$ na Condição 1 78

3.3 Estabilização Uniforme - $\left(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1\right)$ na Condição 2 88

4 Apêndice 103

4.1 Lema 3.3.1 103

Bibliografia 110

Introdução

Atualmente, com o avanço tecnológico tem-se investido muito no estudo das equações diferenciais parciais, a partir da análise de modelos que estão diretamente relacionados com diversas áreas de conhecimento.

Nesta dissertação estudamos uma classe de problemas de valores iniciais e de fronteira que modelam o movimento de um fluido, sob ação de ondas acústicas, numa região limitada com fronteira localmente reagente, e o deslocamento dos pontos da fronteira. Mais especificamente, suponha que uma determinada região limitada do espaço contenha um fluido ideal o qual se movimenta pela ação de ondas acústicas. As ondas ao se chocarem com a fronteira da região ("parede" , supondo que esta não seja rígida e nem absorva impacto), provocam uma vibração nos seus pontos. O problema em questão é um modelo matemático, que descreve o movimento do fluido e o deslocamento da fronteira, inicialmente proposto por J. T. Beale e S. I. Rosencrans em [3].

De acordo com [3] se u é a velocidade potencial do fluido e δ é o deslocamento dos pontos da fronteira, na direção normal, então estas funções devem satisfazer o seguinte sistema de equações acopladas

(1) $u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty);$

(2) $f(x)\delta_{tt}(x,t) + g(x)\delta_t(x,t) + h(x)\delta(x,t) = -u_t(x,t) \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0,\infty);$

(3) $\delta_t(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0,\infty);$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é o meio a ser considerado, Γ sua fronteira e f, g, h são funções definidas na fronteira relacionadas com a massa por unidade de área da fronteira, resistividade e elasticidade. Adicionalmente às equações (1)-(3) são consideradas condições iniciais

(4) $u(x,0) = u_0(x)$, $u_t(x,0) = u_1(x)$ para todo $x \in \Omega$;

(5) $\delta(x,0) = \delta_0$, $\delta_t(x,0) = \dfrac{\partial u_0}{\partial \nu}$ para todo $x \in \Gamma$

onde u_0, u_1, δ_0 são funções dadas. No Capítulo 1, seção 1.1, detalhamos os aspectos sobre a dedução física do problema de valores iniciais e de fronteira (PVIF) formulado pelas equações (1)-(5). Também no Capítulo 1 fixamos as notações e os resultados preliminares, necessários para o estudo feito nos capítulos subsequentes.

No Capítulo 2 iniciamos com um resultado sobre a existência e unicidade de solução para o (PVIF) dado por (1)-(5) (Teorema 2.1), devido a J. T. Beale [4], cuja demonstração baseia-se na teoria de semigrupos e conveniente escolha de espaços funcionais. A propósito, neste resultado a velocidade potencial u pertence a uma classe de funções de $H^1(\Omega)$, ou seja, no quociente de $H^1(\Omega)$ pela relação de equivalência que não difere funções por translação q.s. de constante ($H^1(\Omega)$ módulo constante), que é denotado por $H_D(\Omega)$.

Outro aspecto técnico fundamental é que em $H_D(\Omega)$ a desigualdade de Poincaré se verifica. Logo não é possível trabalhar diretamente no espaço $H^1(\Omega)$, ou seja, não é possível trocar $H_D(\Omega)$ por $H^1(\Omega)$. Um caminho alternativo para superar esta dificuldade é considerar "problemas intermediários" nos quais considera-se a condição de fronteira da acústica em apenas uma parte de Γ, denotada por Γ_1, e na parte restante, denotada por Γ_0, considera-se que tal parte é isolada acusticamente, isto é, com condição de Dirichlet homogênea. Portanto particiona-se Γ em dois subconjuntos Γ_0 e Γ_1 e introduz-se um subespaço fechado de $H^1(\Omega)$, o espaço das funções que se "anulam em Γ_0", denotado por $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$. Na seção 2.3, do Capítulo 2, apresentamos um estudo sobre a existência e unicidade de solução no espaço $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$. No Teorema 2.2 usamos técnicas de semigrupos, conforme [4], e no Teorema 2.3 usamos o método construtivo de Faedo-Galerkin, conforme [9]. Ainda, de acordo com o estabelecido em [9] na seção 2.4 do Capítulo 2 mostramos a existência e unicidade de solução para o problema (1)-(5), ou seja, com condições de fronteira da acústica impostas em toda fronteira Γ, como limite de soluções de problemas intermediários no espaço $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$.

Além da existência e unicidade de solução um aspecto importante a se analisar é o comportamento das soluções a longos períodos de tempo. Neste sentido, em [4], J. T. Beale provou que para os modelos acima citados não se tem taxa de decaimento exponencial da energia. Na busca de estabilização uniforme da energia introduz-se modificações físicas no modelo, obtendo-se um novo problema. A estabilização uniforme da energia está diretamente relacionada com a geometria do domínio Ω entre outros aspectos também relevantes para tal estudo. Nesta linha apresentamos no Capítulo 3 duas abordagens: Uma feita em [10] onde estudou-se estabilização uniforme da energia em domínios simplesmente conexos e uma outra abordagem em [14] onde tais domínios não se enquadram mas com um ganho em outros aspectos que veremos no decorrer da dissertação.

Finalizamos observando que nosso trabalho não contém contribuição original alguma. Trata-se de uma exposição didática de resultados parciais sobre o problema contidos em [4], [3], [9], [10], [14], [15]. Existem avanços importantes ao estudo de problemas considerando equações não lineares tanto no domínio quanto nas condições de fronteira (Veja [9], [16], [23]). Também existem estudos que levam em conta fronteira não localmente reagente (Veja [28], [29], [11]).

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Motivação Física

1.1.1 Movimento de Ondas Acústicas

Imagine uma determinada região no espaço contendo um fluido ideal sujeito a um movimento causado por ondas sonoras. Suponha ainda que a fronteira desta região não seja rígida (que tenha certa elasticidade) e apresente pequeno deslocamento (vibração) devido ao choque da onda de som. Aqui apresentaremos a equação linear que modela o movimento de ondas de som, de pequenas amplitudes, em um fluido, denominada equação de ondas acústicas, bem como equações acopladas que modelam o comportamento da fronteira. Verificaremos que a velocidade potencial do fluido deve satisfazer a equação da onda. Ondas de som são longitudinais, ou seja, as moléculas do fluido movem-se na direção da propagação da onda. Assim não existem alternância de picos e vales, mas sim entre compressão e rarefação.

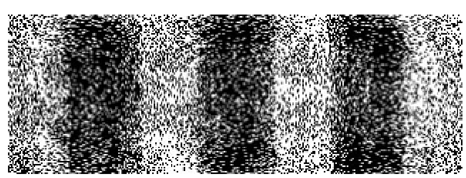


Figura 1.1: Compressão e Rarefação

SIMPLIFICAÇÕES ASSUMIDAS:

- O meio é homogêneo e isotrópico, isto é, ele tem as mesmas propriedades em todos os pontos e todas as direções.

- Pode-se aplicar as leis de Hooke.
- A transferência de calor no meio pode ser ignorada.
- Efeitos gravitacionais podem ser ignorados, ou seja, pressão e densidade são constantes a menos por uma perturbação do meio.
- Os movimentos são suficientemente pequenos para que os efeitos não lineares sejam desprezíveis.

Para elaborar o modelo utilizamos a descrição de Euler, que consiste em fixar um sistema de coordenadas no espaço, digamos $\{e_1, e_2, e_3\}$, e descrever as propriedades do fluido que acontecem numa posição $\vec{r}$, no instante de tempo t. Deste modo, as grandezas envolvidas (como pressão, densidade e velocidade) são funções de $\vec{r}$ e de t. Denotamos:

- Pressão Total: $P_{\mathrm{T}}(\vec{r},t) = P_0 + P(\vec{r},t)$, onde P_0 é a pressão do fluido em estado de equilíbrio e $P(\vec{r},t)$ é pressão causada pelo som no meio, pressão acústica.
- Velocidade: $\vec{v}(\vec{r},t) = (v_1(\vec{r},t), v_2(\vec{r},t), v_3(\vec{r},t))$
- Densidade Total: $\rho_{\mathrm{T}}(\vec{r},t) = \rho_0 + \rho(\vec{r},t)$, onde ρ_0 é densidade no estado de equilíbrio e $\rho(\vec{r},t)$ é a densidade na presença de som.

A densidade ρ esta relacionada com a pressão P pela seguinte equação:

$$\rho = k\rho_0 P \tag{1.1}$$

onde k é uma constante chamada de compressibilidade do fluido.

EQUAÇÃO DE CONTINUIDADE:

Iniciamos com o caso unidimensional. O fluxo de densidade total ρ_{T} é a quantidade de ρ_{T} que passa, por segundo, na direção positiva, através do ponto x. Se ρ_{T} viaja com o fluido, este fluxo será igual ao produto de ρ_{T} por $\vec{v}$, que no caso unidimensional é

$$J(x,t) = \rho_{\text{T}}(x,t)v_1(x,t)$$

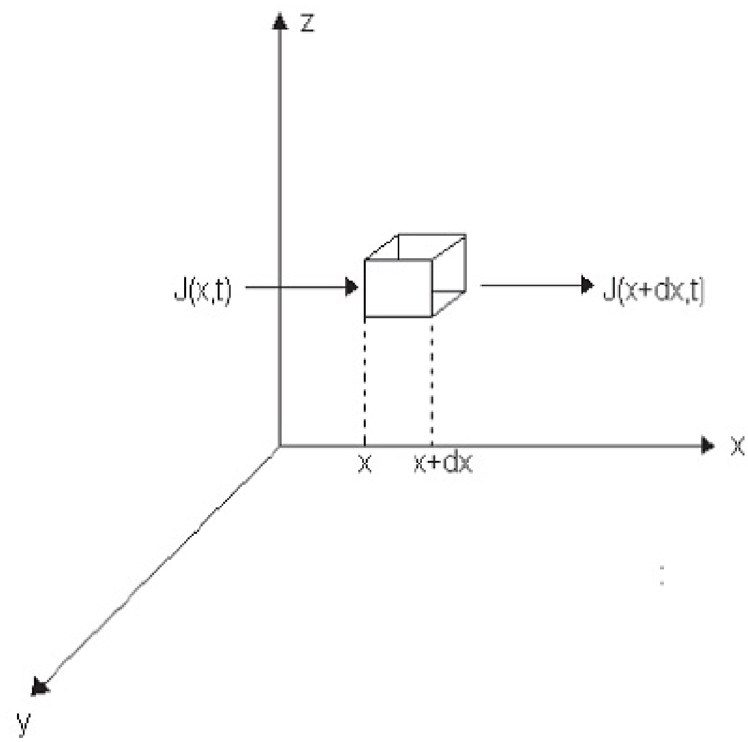


Figura 1.2: Fluxo num elemento de fluido

O fluxo $J(x,t)$ representa um ganho e $J(x+dx,t)$ uma perda de ρ_{T} no intervalo $(x, x+dx)$. A diferença entre o ganho e a perda deve ser igual à taxa de variação, com o tempo, de ρ_{T} no elemento de fluido. Assim a taxa de mudança de ρ_{T} nessa região é

$$\frac{\partial \rho_{\text{T}}}{\partial t}dx = J(x,t) - J(x+dx,t).$$

Expandindo em séries e desprezando os termos não lineares, pois estamos considerando variações suficientemente pequenas, obtemos $\frac{\partial \rho_{\text{T}}}{\partial t}dx = J(x,t) - J(x+dx,t) = -\frac{\partial J}{\partial x}dx$. Ou ainda,

$$\frac{\partial \rho_{\text{T}}}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho_{\text{T}}v_1).$$

Lembrando que $\rho_{\mathrm{T}} = \rho_0 + \rho$ e que ρ_0 é constante, temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\rho_0 + \rho)\frac{\partial v_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial \rho}{\partial x}. \tag{1.2}$$

Agora, vamos generalizar a equação acima para três dimensões. Primeiramente, observe que o fluxo de ρ_{T} é $J(\vec{r},t) = \rho_{\mathrm{T}}(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t) := (J_1(\vec{r},t), J_2(\vec{r},t), J_3(\vec{r},t))$. Assim a variação de fluxo no elemento de volume $dxdydz$ é

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{T}}}{\partial t} dxdydz = [J_1(\vec{r},t) - J_1(\vec{r} + dxe_1, t)]dydz + [J_2(\vec{r},t) - J_2(\vec{r} + dye_2, t)]dxdz +$$

$$+[J_3(\vec{r},t) - J_3(\vec{r} + dze_3, t)]dxdy.$$

Novamente, expandindo em séries e desprezando os termos não lineares temos

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{T}}}{\partial t} dxdydz = -\frac{\partial J_1}{\partial x} dxdydz - \frac{\partial J_2}{\partial y} dxdydz - \frac{\partial J_3}{\partial z} dxdydz$$

ou ainda

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{T}}}{\partial t} dxdydz = -\operatorname{div}(J) dxdydz.$$

Logo,

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{T}}}{\partial t} = -\operatorname{div}(J) = -\operatorname{div}(\rho_{\mathrm{T}}\vec{v}) = -\rho_{\mathrm{T}}\ \operatorname{div}(\vec{v}) - \vec{v}\cdot\nabla\rho_{\mathrm{T}}$$

Substituindo $\rho_{\mathrm{T}} = \rho_0 + \rho$ e levando em consideração que ρ_0 é constante obtemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\rho_0 + \rho)\operatorname{div}\ \vec{v} - \vec{v}\cdot\nabla\rho \tag{1.3}$$

chamada equação de continuidade, a qual relaciona a densidade ρ com a velocidade $\vec{v}$.

EQUAÇÃO DO MOVIMENTO:

Procedendo como anteriormente, iniciamos pelo caso unidimensional. A força no elemento de fluido de massa $\rho_{\mathrm{T}} dx$ (densidade vezes "volume") é a diferença de pressão, ou seja, $P(x,t) - P(x + dx, t)$, que de acordo com a segunda lei de Newton é igual ao produto da massa vezes aceleração. Suponha que a posição de cada partícula é uma função derivável do tempo, isto é, $x = x(t)$ é derivável com relação a t e $\dfrac{dx}{dt}(t) = v_1(x(t), t)$, onde $v_1(x,t)$ é a velocidade. Então $\dfrac{dv_1}{dt}(x(t), t)$ é a aceleração do fluido em x no instante t. Logo

$$P(x,t) - P(x+dx,t) = \rho_{\mathrm{T}}\ dx \left(\frac{dv_1}{dt}(x(t),t)\right) = (\rho_0 + \rho(x(t),t))\,dx\left(\frac{d}{dt}[v_1(x(t),t)]\right).$$

Expandindo em séries e usando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x(t),t)dx = P(x,t) - P(x+dx,t) = (\rho_0 + \rho(x(t),t))\,dx\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}(x(t),t)\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial v_1}{\partial t}(x(t),t)\right).$$

Note que $\dfrac{\partial}{\partial x}(v_1(x,t))^2 = 2\dfrac{\partial v_1}{\partial x}(x,t)v_1(x,t)$. Em particular

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_1(x(t),t))^2 = 2\frac{\partial v_1}{\partial x}(x(t),t)v_1(x(t),t) = 2\frac{\partial v_1}{\partial x}(x(t),t)\frac{dx}{dt}(t)\ .$$

Substituindo na equação anterior, obtemos:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x(t),t)dx = (\rho_0 + \rho(x(t),t))\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(v_1(x(t),t))^2 + \frac{\partial v_1}{\partial t}(x(t),t)\right)\ . \tag{1.4}$$

Por outro lado, substituindo a relação $\rho = \rho_0 k P$ na equação (1.2), temos

$$\rho_0 k\frac{\partial P}{\partial t}(x,t) = -\rho_0(1 + kP(x,t))\frac{\partial v_1}{\partial x}(x,t) - \rho_0 k v_1(x,t)\frac{\partial P}{\partial x}(x,t)\ . \tag{1.5}$$

Como mencionado anteriormente, ρ e P assumem valores pequenos se comparados com ρ_0 e P_0. Assim se desprezarmos os termos de segunda ordem em (1.4) e (1.5), chegamos nas equações

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_0\frac{\partial v_1}{\partial t} \quad \text{e} \quad k\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial v_1}{\partial x}\ .$$

Assim, diferenciando a primeira equação com relação a x e a segunda com relação a t obtemos a Equação do Movimento Acústico

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{1}{k\rho_0}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

ou seja a pressão satisfaz a equação da onda. Analogamente, diferenciando a primeira em relação a t e a segunda em relação a x, temos que v_1 também deve satisfazer a equação da onda

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = \frac{1}{k\rho_0}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \ .$$

Generalizando para três dimensões, suponha que a posição da partícula é uma função derivável no tempo, ou seja, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, com $x = x(t), y = y(t)$ e $z = z(t)$ deriváveis. Considerando cada umas das três direções coordenadas de $\mathbb{R}^3$ e fazendo uma interpretação análoga a anterior, em cada coordenada, obtemos

$$(\rho_0 + \rho)\left(\frac{dv_1}{dt} \ , \ \frac{dv_2}{dt} \ , \ \frac{dv_3}{dt}\right) = \left(-\frac{\partial P}{\partial x} \ , \ -\frac{\partial P}{\partial y} \ , \ -\frac{\partial P}{\partial z}\right).$$

Derivando $v_i(\vec{r}, t) = v_i(x(t), y(t), z(t), t)$, em relação à t, e desprezando os termos de segunda ordem, resulta que

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla P \ . \tag{1.6}$$

Análogo ao caso unidimensional, de (1.3) e usando a relação $\rho = \rho_0 k P$, temos que

$$k\rho_0 \frac{\partial P}{\partial t} = -\rho_0(1 + kP)\,\mathrm{div}\ \vec{v} - k\rho_0 \vec{v}\cdot\nabla P \ .$$

Desprezando os termos de segunda ordem temos

$$k\frac{\partial P}{\partial t} = -\,\mathrm{div}\ \vec{v} \ . \tag{1.7}$$

Tomando o divergente na equação (1.6) e usando (1.7) para eliminar $\vec{v}$, concluímos:

$$\Delta P = \mathrm{div}(\nabla P) = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{div}\ \vec{v} = \rho_0 k \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \ ,$$

ou seja, a pressão da acústica deve satisfazer a equação da onda

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0 k}\Delta P = 0 \ . \tag{1.8}$$

Podemos expressar a velocidade da partícula e a pressão em termos de uma única função com valores escalares. Para isso, suponha que o campo vetorial definido pela velocidade $\vec{v}$ seja conservativo. Assim existe uma função u denominada velocidade potencial do fluido com valores escalares tal que:

$$\vec{v} = -\nabla u \ . \tag{1.9}$$

Disto e de (1.6) segue que:

$$P = \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} \ . \tag{1.10}$$

De (1.7), (1.9) e (1.10) concluímos que a velocidade potencial u também satisfaz a equação da onda, ou seja

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{k\rho_0}\Delta u = 0 \ ,$$

o que conclui a subseção.

1.1.2 Condições de Fronteira da Acústica

Suponha que Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^3$ com um fluido em seu interior, o qual esta em repouso, exceto pela presença de ondas acústicas. Se $u = u(x,t)$ é a velocidade potencial, então $-\nabla u(x,t)$ é o campo velocidade da partícula e, como vimos na subseção anterior, u deve satisfazer a equação da onda

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \ ,$$

onde c é a velocidade do som no fluido. Vamos considerar, sem perda de generalidade, que $c \equiv 1$ para simplificar a notação.

Agora, suponha que a fronteira de Ω, denotada por Γ, não é rígida e está sujeita a pequenas oscilações. Vamos assumir que cada ponto de Γ reage à pressão causada pela onda acústica como um oscilador harmônico amortecido e mais, Γ é localmente reagente, o que significa que cada um de seus pontos age, devido a pressão do som, de modo independente um do outro. Assim, se a fronteira tem massa por unidade de área $m = m(x)$, resistividade $d = d(x)$ e coeficiente de elasticidade $k = k(x)$ (funções não negativas sobre Γ) e denotando por $\delta = \delta(x,t)$ o deslocamento vertical na direção normal à fronteira no ponto x e no instante de tempo t, então δ deve satisfazer a equação

$$m(x)\delta_{tt}(x,t) + d(x)\delta_t(x,t) + k(x)\delta(x,t) = -P(x,t) \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0,\infty) \ , \tag{1.11}$$

onde $P(x,t)$ é a pressão acústica no ponto x e instante de tempo t. Note que em verdade a equação (1.11) é uma EDO. Denotando por ρ_0 a densidade uniforme do fluido em repouso, temos conforme (1.10) que $P(x,t) = \rho_0 u_t(x,t)$. Substituindo em (1.11) e dividindo por ρ_0, vemos que δ deve satisfazer

$$f(x)\delta_{tt}(x,t) + g(x)\delta_t(x,t) + h(x)\delta(x,t) = -u_t(x,t) \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0,\infty) \ , \tag{1.12}$$

onde f, g, h são funções não negativas definidas em Γ.

Vamos assumir também uma condição de impenetrabilidade da fronteira, isto é, admite-se que há compatibilidade entre a velocidade normal da fronteira, $\delta_t(x,t)$, e a velocidade normal do fluido. Logo devemos ter que

$$\delta_t(x,t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0,\infty) \ , \tag{1.13}$$

onde ν é o vetor normal unitário em Γ, exterior a Ω.

As equações (1.12) e (1.13) são chamadas de Condições de Fronteira da Acústica e foram inicialmente propostas por Beale e Rosencrans [3].

Resumindo nossa exposição, verificamos que a velocidade potencial u do fluido e o deslocamento δ da fronteira Γ devem satisfazer ao sistema de equações acopladas

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty); \tag{1.14}$$

$$f(x)\delta_{tt}(x,t) + g(x)\delta_t(x,t) + h(x)\delta(x,t) = -u_t(x,t) \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0,\infty); \tag{1.15}$$

$$\delta_t(x,t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0,\infty); \tag{1.16}$$

que acrescido de condições iniciais compõem um problema de valores iniciais e de fronteira, denominado na literatura de problema de valores iniciais e de fronteira para a equação da onda com condições de fronteira da acústica.

1.2 Notações e Resultados Prévios

Representamos por Ω um subconjunto aberto, conexo e limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ bem regular, que neste trabalho denominamos por um domínio do $\mathbb{R}^n$. A medida (de Lebesgue) de Ω é denotada por $\mu(\Omega) = \int_\Omega dx$. Note que neste caso a fronteira Γ é uma variedade compacta, sem bordo, C^∞, de dimensão $n-1$.

Por $L^p(\Omega)$ denotamos o Espaço de Banach das funções mensuráveis $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é Lebesgue integrável sobre Ω. A norma em $L^p(\Omega)$ é dada por

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^\infty(\Omega)$ denotamos o Espaço de Banach das funções mensuráveis $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que são essencialmente limitadas em Ω. A norma em $L^\infty(\Omega)$ é

$$\|u\|_\infty = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname*{supess}_{x\in\Omega} |u(x)| = \inf\{C \in \mathbb{R}; |u(x)| \leq C \ \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

Em particular, $L^2(\Omega)$ é um Espaço de Hilbert cujo produto interno e norma denotaremos respectivamente por

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)\ dx \quad \text{e} \quad |u| = \|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Análogo ao $L^2(\Omega)$, definimos também o Espaço de Hilbert $L^2(\Gamma)$ cujo produto interno e norma serão denotados respectivamente por

$$(u,v)_\Gamma = \int_\Gamma u(x)v(x)\ dx \quad \text{e} \quad |u|_\Gamma = \|u\|_{L^2(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por outro lado, se $z \in L^\infty(\Gamma)$ é tal que $z(x) > 0$ q.s. em Γ, então podemos definir um outro produto interno e norma em $L^2(\Gamma)$, dados por

$$(u,v)_z = \int_\Gamma z(x)\ u(x)\ v(x)\ d\Gamma \quad \text{e} \quad |u|_z^2 = \int_\Gamma z(x)\ |u(x)|^2\ d\Gamma \tag{1.17}$$

para todo $u, v \in L^2(\Gamma)$. Na literatura tais aplicações são chamadas de produto interno com peso e norma com peso em $L^2(\Gamma)$, respectivamente.

Por $\mathcal{D}(\Omega)$ denotamos o espaço das funções testes sobre Ω, isto é, $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ munido da topologia do limite indutivo, onde $C_0^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis em Ω, cujo suporte é um compacto de Ω. $\mathcal{D}'(\Omega)$ representa o espaço vetorial das distribuições sobre Ω, munido da topologia fraca, ou seja, o espaço constituído por todas as aplicações, $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, lineares e contínuas, munido da seguinte noção de convergência: $T_\nu \to T$ se, e somente se, $\langle T_\nu, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Agora, dado $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e α um multi-índice, definimos a derivada de ordem α, da distribuição T, por $\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle$, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Verifica-se que $D^\alpha T$ é uma distribuição, ou seja, $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação linear e contínua, e mais, o operador $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$, que a cada T associa $D^\alpha T$ é linear e contínuo.

Dado $m \in \mathbb{N}$, por $H^m(\Omega)$ representamos o Espaço de Sobolev de ordem m constituído das funções $u \in L^2(\Omega)$ tal que $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$, para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Aqui D^α é o operador de derivação de ordem α, no sentido das distribuições. A norma usual de $H^m(\Omega)$ é definida por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\le m} |D^\alpha u|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Denotamos por $H_{med}(0)$ o subespaço vetorial fechado de $H^1(\Omega)$ das funções com média zero, isto é:

$$H_{med}(0) = \{u \in H^1(\Omega)\ ;\ \int_\Omega u(x)\ dx = 0\}.$$

Teorema 1.1. (Desigualdade de Poincaré para $H^1(\Omega)$)

a) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2_{L^2(\Omega)} \quad \textit{para toda } u \in H_{med}(0). \tag{1.18}$$

b) De modo mais geral, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{\mu(\Omega)} \left| \int_\Omega u(x)\ dx \right|^2 \leq C \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2_{L^2(\Omega)} \quad \textit{para toda } u \in H^1(\Omega). \tag{1.19}$$

Demonstração: Ver [8].

De acordo com o Teorema 1.1 a aplicação

$$\begin{array}{rcll} \|\cdot\|: & H_{med}(0) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & \|v\| = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

é uma norma em $H_{med}(0)$ a qual é equivalente a norma induzida de $H^1(\Omega)$. Portanto $\Big(H_{med}(0), \|\cdot\|\Big)$ é um espaço de Hilbert. Denotaremos o produto interno em $H_{med}(0)$ por

$$\begin{array}{rcll} ((\cdot,\cdot)): & H_{med}(0) \times H_{med}(0) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & ((u,v)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\ dx \end{array}$$

Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u$ pertence à $L^p(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leq m$. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \operatorname*{supess}_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|, \text{ para } p = \infty$$

é um espaço de Banach. Note que $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ e que os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert. Sabe-se que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$. Motivado por este fato define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é, $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega)$. Quando Ω é um aberto limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$ consideramos $W_0^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\| = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

que é equivalente a norma $\|u\|_{m,p}$. Suponha que $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ denota-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Consideraremos ainda os espaços de Sobolev de ordem $s \in \mathbb{R}^+$. Denotamos $H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in S';\ (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$ munido do produto interno

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^s \hat{u}(x) \overline{\hat{v}(x)} dx.$$

Aqui "$\hat{\ }$" é a transformada de Fourier definida para funções $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dada por $\hat{u}(x) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)} u(y) dy$ e S' é o dual topológico do espaço S das funções rapidamente decrescente no infinito. Prova-se que $H^s(\mathbb{R}^n)$ com o produto interno descrito acima é um espaço de Hilbert. Além disso, se $s \geq 0$ temos que $H^{-s}(\mathbb{R}^n) = \left(H^s(\mathbb{R}^n)\right)'$ e $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Consideremos a aplicação:

$$\begin{array}{rcl} r_\Omega : L^2(\mathbb{R}^n) & \to & L^2(\Omega) \\ u & \mapsto & r_\Omega(u) = u_{|\Omega} \end{array}$$

que leva u na sua restrição a Ω.

Para $s \geq 0$ temos que $H^s(\Omega) = \{u|_\Omega;\ u \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$. A fim de definirmos uma topologia para $H^s(\Omega)$ consideremos o seguinte espaço de Banach

$$\frac{H^s(\mathbb{R}^n)}{\ker(r_\Omega)} = \{v + \ker(r_\Omega); v \in H^s(\mathbb{R}^n)\} = \{[v]; v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

munido da norma

$$||[v]|| = \inf\{||\omega||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; \omega \in [v]\} = \inf\{||\omega||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; \omega \in v + \ker(r_\Omega)\}.$$

Assim, para $s \geq 0$ e $u \in H^s(\Omega)$ denotamos

$$||u||_{H^s(\Omega)} = ||r_\Omega v||_{H^s(\Omega)} = ||[v]||_{H^s(\mathbb{R}^n)/\ker(r_\Omega)} = \inf\{||\omega||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; r_\Omega(\omega) = u\}.$$

Munido desta norma $H^s(\Omega)$ é um espaço de Hilbert. Além disso, se $m \in \mathbb{N}$, as normas

$$\|u\|_{m,2} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad ||u||_{H^m(\Omega)} = \inf\{||\omega||_{H^m(\mathbb{R}^n)}; r_\Omega(\omega) = u\},$$

são equivalentes em $H^m(\Omega)$. Também denotamos $H^{-s}(\Omega) = \left(H_0^s(\Omega)\right)'$ onde $H_0^s(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^s(\Omega)}$. Para maiores detalhes sobre os espaços $H^s(\Omega)$ e suas propriedades consulte [1], [6], [24], [5].

Para os espaços de Sobolev sobre a variedade Γ (fronteira de Ω), suponha $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ ou Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$. Dada uma função u definida em $\overline{\Omega}$ representa-se por $\gamma_0 u$ a restrição de u a Γ, ou seja,$\gamma_0 u = u|_\Gamma$. No caso $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ temos que $\Gamma = \{(x', 0); x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ e identificamos toda função real u definida em Γ com a função $x' \to u(x', 0)$ do $\mathbb{R}^{n-1}$ em $\mathbb{R}$. Com tal identificação temos que $\mathcal{D}(\Gamma) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, $L^p(\Gamma) = L^p(\mathbb{R}^{n-1})$. Portanto, neste caso simples, definimos $H^s(\Gamma)$ como sendo $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$.

Por outro lado, quando Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$, fixamos um sistema de cartas locais de Γ, isto é, $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), ..., (U_N, \varphi_N)\}$, e funções testes $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_N$ no $\mathbb{R}^n$ tais que $supp(\sigma_j) \subset U_j$, $j = 1, 2, ..., N$, $\quad \sum_{j=1}^N \sigma_j(x) = 1$, $x \in \Gamma$. Dada uma função w definida em Γ, para todo $j = 1, 2, ..., N$ seja

$$w_j(y) = \begin{cases} (\sigma_j w)(\varphi_j^{-1}(y', 0)) & \text{se} \quad y' \in \Omega_0 = (0,1)^{n-1}, \\ 0 & \text{se} \quad y' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \Omega_0. \end{cases}$$

Dado $s > 0$, $H^s(\Gamma)$ é o espaço de Hilbert das funções w definidas em Γ tais que $w_j \in H^s(\mathbb{R}^{n-1})$

para todo $j = 1, 2, ...N$, munido do seguinte produto escalar:

$$(w, v)_{H^s(\Gamma)} = \sum_{j=1}^{N} (w_j, v_j)_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})};$$

para todo $w, v \in H^s(\Gamma)$.

Considerando $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ com a topologia induzida por $H^1(\Omega)$ a aplicação $\gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ é linear e contínua. Sendo $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ denso em $H^1(\Omega)$, esta aplicação se prolonga por continuidade a uma aplicação linear e contínua, ainda representada por $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, tal que $\gamma_0 u = u|_\Gamma$; $\forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, a qual denomina-se aplicação traço de ordem zero. A aplicação traço $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ é sobrejetiva e o núcleo de γ_0 é o espaço $H_0^1(\Omega)$.

Seja ν o vetor normal unitário exterior em Γ. Para todo $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, seja $\gamma_1 u = \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma$ a derivada normal de u. Analogamente munindo $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ com a topologia do $H^2(\Omega)$ a aplicação $\gamma_1 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ tal que $\gamma_1 u = \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma$ para todo $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é linear e continua e portanto se estende por densidade a aplicação linear e contínua $\gamma_1 : H^2(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ a qual denomina-se aplicação traço de ordem 1.

Seja $\mathcal{H}(\Delta, \Omega) = \{u \in H^1(\Omega)\ ;\ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$, o espaço de Hilbert munido do seguinte produto interno

$$(u, v)_{\mathcal{H}(\Delta,\Omega)} = (u, v)_{H^1(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v) \quad \text{para todo } u, v \in \mathcal{H}(\Delta, \Omega).$$

Note que $H^2(\Omega) \subsetneq \mathcal{H}(\Delta, \Omega)$. Entretanto podemos ainda “num sentido fraco”falar sobre o traço de ordem 1 para funções de $\mathcal{H}(\Delta, \Omega)$. Munindo $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ com a topologia induzida por $\mathcal{H}(\Delta, \Omega)$, a aplicação $\gamma_1 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ definida por $u \mapsto \gamma_1 u = \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma$ é linear e continua e se estende por continuidade a uma única aplicação linear e contínua

$$\gamma_1 : \mathcal{H}(\Delta, \Omega) \quad \to \quad H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Sobre os espaços de Sobolev e as aplicações traço temos as seguintes identidades fundamentais:

(Fórmula de Gauss e a Fórmula de Green) - Seja Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$.

i) Se $u, v \in H^1(\Omega)$, temos a fórmula de Gauss:

$$\int_\Omega u \; \frac{\partial v}{\partial x_i} \; dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \; v \; dx + \int_\Gamma \gamma_0(u) \; \gamma_0(v) \; \nu_i d\Gamma, \text{ para todo } i = 1, \ldots, n$$

onde $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ denota o vetor normal unitário exterior à Γ.

ii) Se $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$, temos a fórmula de Green:

$$\int_\Omega \nabla u \; \nabla v \; dx = -\int_\Omega \Delta u \; v \; dx + \int_\Gamma \gamma_0(v) \; \gamma_1(u) \; d\Gamma. \tag{1.20}$$

(Identidade de Green generalizada) - Para todo $u \in \mathcal{H}(\Delta, \Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$ tem-se:

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \tag{1.21}$$

Para um estudo detalhado sobre a teoria de traço veja [1], [6], [24].

Além dos espaços funcionais e a teoria de Traço, a demonstração de vários resultados nos capítulos subsequentes se baseia em técnicas e métodos da teoria de Semigrupo. Para completude do trabalho apresentamos na sequência, na forma de Teoremas e Proposições, os principais resultado desta teoria. A demonstração e um estudo completo sobre a teoria de semigrupos pode ser vista em [5], [12], [18], [26].

Teorema 1.2. ***(Hille-Yosida)*** *Seja $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ um operador maximal monótono em um espaço de Hilbert H. Então para todo $u_0 \in D(A)$ existe uma única função*

$$u \in C^1([0, +\infty); H) \cap C([0, +\infty), D(A))$$

tal que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au = 0 \quad \textit{para todo}\, t > 0 \\ u(0) = u_0 \; . \end{cases} \tag{1.22}$$

Além disso, verifica-se as seguinte estimativas

$$\|u(t)\|_H \leq \|u_0\|_H \;\; e \;\; \left\|\frac{d\,u(t)}{dt}\right\|_H = \|Au(t)\|_H \leq \|Au_0\|_H, \forall\, t \geq 0 \;. \tag{1.23}$$

Teorema 1.3. *$A - \omega$ é gerador infinitesimal de um semigrupo S, de classe C_0, satisfazendo $\|S(t)\| \leq M$, se, e somente se, A é gerador infinitesimal de um semigrupo S, de classe C_0, satisfazendo $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$*

Teorema 1.4. *(Lummer-Phillips). Seja $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ um operador linear do espaço de Hilbert H, densamente definido. Se A é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que $Im(\lambda_0 I - A) = H$, então A é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações C_0 sobre H.*

Teorema 1.5. *Seja $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ um gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações C_0 sobre H e $B : D(B) \subset H \longrightarrow H$ dissipativo. Se $D(A) \subset D(B)$ e existem constantes a e b, $0 \leq a < 1$ e $b \geq 0$, tais que $\|Bx\|_H \leq a\|Ax\|_H + b\|x\|_H$ para todo $x \in D(A)$, então $(A+B)$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações C_0 sobre H.*

Teorema 1.6. *Seja $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ um gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 sobre o espaço de Hilbert H. Então para cada $u_0 \in D(A)$ existe uma única função u tal que*

$$\begin{aligned}
&u \in C\Big([0,\infty), D(A)\Big) \cap C^1\Big([0,\infty), H\Big) \;; \\
&\frac{du}{dt}(t) = Au(t) \quad \textit{para todo} \quad t > 0 \;; \\
&u(0) = u_0 \;.
\end{aligned}$$

Os próximos dois resultados (Teoremas 1.7 e 1.8) são devido a Arendt e Batty e podem ser encontrados em [2].

Teorema 1.7. *Sejam $S(t)_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 sobre H e $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ seu gerador infinitesimal. Se $S(t)_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contrações, nenhum autovalor de A reside sobre o eixo imaginário e $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ é enumerável, então $S(t)_{t\geq 0}$ é fortemente estável, ou seja,*

$$\lim_{t\to\infty} \|S(t)x\|_H = 0 \quad \textit{para todo} \quad x \in H \;,$$

ou ainda, toda solução generalizada da equação diferencial $u'(t) = Au(t)$ *tende para* 0 *quando* $t \to \infty$ *na norma do* H*. Aqui* $\sigma(A)$ *denota o espectro do operador* A*.*

Teorema 1.8. *Assuma que* A *é gerador infinitesimal de um semigrupo* S*, de classe* C_0*. Se* S *é um semigrupo de contrações, então* $\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R} = \sigma_r(A) \cap i\mathbb{R}$*, onde* $\sigma_p(A)$ *é o espectro pontual e* $\sigma_r(A)$ *é o espectro residual do operador* A*.*

Enunciaremos três teoremas que vamos utilizar na seção 3.3. Primeiro vamos à um resultado que dá condições para que a solução, de um certo problema variacional, seja identicamente nula. Este resultado pode ser encontrado em [19].

Teorema 1.9. *Sejam* Ω *um domínio do* $\mathbb{R}^n$ *e* B *uma bola aberta (arbitrariamente pequena) tal que* $\Gamma \cap B \neq \emptyset$*. Se* $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ *e* $u \in H^2(\Omega)$ *são tais que*

$$
\begin{aligned}
&-\Delta u + \alpha u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \ , \\
&u = 0 \quad \text{e} \quad \gamma_1(u) = 0 \quad \text{em} \quad \Big(\Gamma \cap B\Big) \ .
\end{aligned}
$$

Então $u \equiv 0$*.*

O próximo resultado dá condições para que um conjunto limitado seja relativamente compacto. A prova desse teorema pode ser encontrada em [7]

Teorema 1.10. *Assuma que* X, Y, Z *são três espaços de Banach tais que* $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y \hookrightarrow Z$*.*

- *Se* F *um conjunto limitado em* $L^p(a, b; X)$*, para algum* $1 \leq p < \infty$*, tal que o conjunto* $\partial_t F := \left\{\frac{\partial f}{\partial t};\ f \in F\right\}$ *é limitado em* $L^q(a, b; Z)$*, para algum* $q \geq 1$*. Então* F *é relativamente compacto em* $L^p(a, b; Y)$*. Mais ainda, se* $q > 1$*, então* F *é também relativamente compacto em* $C(a, b; Z)$*. Aqui* $\frac{\partial f}{\partial t}$ *significa derivada no sentido das distribuições.*

- *Se* F *é um conjunto limitado em* $L^\infty(a, b; X)$ *e o conjunto* $\partial_t F$ *é limitado em* $L^r(a, b; Z)$*, para algum* $r > 1$*, então* F *é relativamente compacto em* $C(a, b; Y)$*.*

Finalizamos a seção com um teorema que estabelece condições adicionais para que o operador linear e limitado do espaço de Hilbert H seja um operador compacto. A demonstração desse fato pode ser vista em [25].

Teorema 1.11. *Seja $A \in \mathcal{L}(H)$. Se H é um espaço de Hilbert separável então $A \in \mathcal{L}_c(H)$.*

1.3 Espaço $H_D(\Omega)$

Nesta seção vamos introduzir o espaço "$H^1(\Omega)$ módulo função constante" o qual denotaremos por $H_D(\Omega)$ conforme [4]. Também veremos que este espaço identifica-se com o subespaço de $H^1(\Omega)$ das funções de média zero, $H_{med}(0)$. Iniciamos definindo a seguinte relação de equivalência em $H^1(\Omega)$:

Definição 1.3.1. *Dados u e v em $H^1(\Omega)$ dizemos que $u \sim v$ se, e somente se, existe uma constante c tal que $u = v + c$ q.s. em Ω.*

É fácil ver que "$\sim$" é uma relação de equivalência em $H^1(\Omega)$ e para toda $u \in H^1(\Omega)$ temos a classe de equivalência $\bar{u} = \{v \in H^1(\Omega);\ v \sim u\} = \{v \in H^1(\Omega);$ para qual existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $u = v + c$ q.s. em $\Omega\}$. O lema a seguir é fundamental para a identificação pretendida:

Lema 1.3.1. *Para cada $u \in H^1(\Omega)$ existe um único $v \in H_{med}(0)$ tal que $u \sim v$.*

Demonstração: Dados $u \in H^1(\Omega)$, considere $v(x) = u(x) - \dfrac{1}{\mu(\Omega)} \displaystyle\int_\Omega u(y)\ dy$. Observe que, $\dfrac{1}{\mu(\Omega)} \displaystyle\int_\Omega u(y)\ dy$ é uma constante. Temos também que

$$\int_\Omega v(x)\ dx = \int_\Omega u(x)\ dx - \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega u(y)\ dy \right) dx = 0,$$

o que prova a existência. Agora, suponha que $v_1, v_2 \in \bar{u} = \{v \in H^1(\Omega); u \sim v\}$ são tais que $\int_\Omega v_1(x)\ dx = \int_\Omega v_2(x)\ dx = 0$. Como $v_1, v_2 \in \bar{u}$ temos que $v_1 \sim v_2$, ou seja, existe uma constante c tal que $v_1 = v_2 + c$ q.s. em Ω. Integrando em Ω obtemos

$$\int_\Omega v_1(x)\ dx = \int_\Omega (v_2(x) + c)\ dx = \int_\Omega v_2(x)\ dx + c\mu(\Omega)\ ,$$

de onde resulta que $c\mu(\Omega) = 0$, ou ainda, $c = 0$. Consequentemente, $v_1 = v_2$ q.s. em Ω e isto prova a unicidade. $\square$

Definição 1.3.2. *O conjunto quociente* $\dfrac{H^1(\Omega)}{\sim} = \{\bar{u};\ u \in H^1(\Omega)\}$ *é chamado espaço* $H^1(\Omega)$ *módulo função constante o qual, por simplicidade, denotamos por* $H_D(\Omega)$.

Veja que de acordo com o lema, em cada classe $\bar{u} \in H_D(\Omega)$ existe um, e somente um, elemento $v \in H_{med}(0)$.

Considere $\bar{u}, \bar{w} \in H_D(\Omega)$ e defina

$$|\bar{u}|_D = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad , \text{ para todo } v \in \bar{u}$$

e

$$(\bar{u}, \bar{w})_D = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\ \frac{\partial \eta}{\partial x_i}(x)\ dx \ , \text{ para todo } v \in \bar{u} \text{ e } \eta \in \bar{w}$$

Note que as definições de $|\bar{u}|_D$ e $(\bar{u}, \bar{w})_D$ independem do representante escolhido na classe.

Proposição 1.3.1. $\Big(H_D(\Omega), (\cdot,\cdot)_D, |\cdot|_D\Big)$ *é um espaço de Hilbert.*

Demonstração: Primeiramente, mostremos que $|\cdot|_D$ é de fato uma norma. Para isto basta provar que se $|\bar{u}|_D = 0$ então $\bar{u} = \bar{0}$, as demais propriedades necessárias para que $|\cdot|_D$ seja uma norma são trivialmente satisfeitas. Suponha que $\bar{u} \in H_D(\Omega)$ e seja $v \in H_{med}(0)$ seu único representante dado pelo Lema 1.3.1. Então, se $|\bar{u}|_D = 0$, obtemos

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \ .$$

Por outro lado, desde que $v \in H_{med}(0)$ pelo Teorema de Poincaré (Teorema 1.1) existe uma constante C tal que

$$|v|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2_{L^2(\Omega)} \ .$$

Consequentemente, $|v|^2_{L^2(\Omega)} \leq 0$ o que implica que $v = 0$ q.s. em Ω. Portanto $\bar{u}$ é a classe do zero em $H_D(\Omega)$.

Agora, vamos verificar que $H_D(\Omega)$ é completo. Seja $\Big(\bar{u}_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $H_D(\Omega)$. Então, se escolhermos os únicos representantes $v_n \in H_{med}(0)$ das classes

$\bar{u}_n$, obtemos uma sequência $\big(v_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy em $H_{med}(0)$. Como $H_{med}(0)$ é um espaço de Banach, existe $v \in H_{med}(0)$ tal que $v_n \to v$ em $H_{med}(0)$. Assim $\bar{u}_n \to \bar{v}$ em $H_D(\Omega)$,onde $\overline{v} \in H_D(\Omega)$ e possui v com seu único representante em $H_{med}(0)$, provando o resultado. $\square$

Finalizando a seção observando que $H_D(\Omega)$ identifica-se com o espaço $H_{med}(0)$. De fato, a aplicação

$$\begin{aligned} F : H_D(\Omega) &\longrightarrow H_{med}(0) \\ \bar{u} \quad &\longmapsto \quad F(\bar{u}) = v \end{aligned}$$

onde v é o único elemento de $H_{med}(0)$ que pertence a classe $\bar{u}$, dado pelo Lema 1.3.1, é um isomorfismo isométrico.

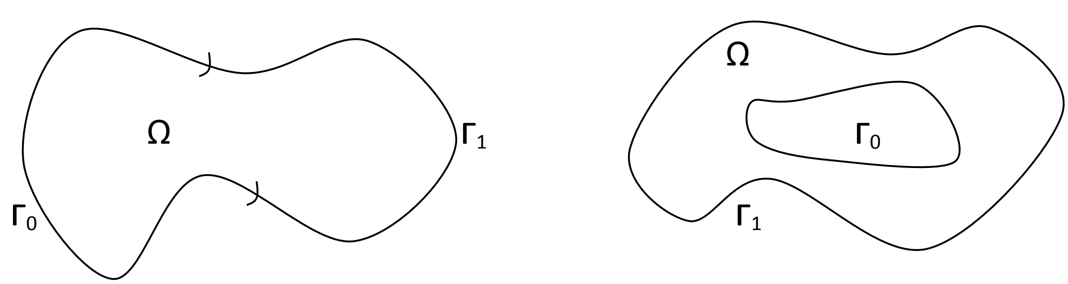
1.4 Espaço $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$

Seja Ω um aberto, limitado e conexo do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, com fronteira Γ bem regular. Suponha que $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ seja uma partição de Γ em dois subconjuntos conexos, disjuntos e de medida positiva, isto é:

$i)$ Γ_0 e Γ_1 são subconjuntos conexos de Γ

$ii)$ $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma$ e $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$

$iii)$ $\mu(\Gamma_0) > 0$ e $\mu(\Gamma_1) > 0$



Assim, definimos por $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$, o espaço da funções $u \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0(u) = 0$ quase sempre em Γ_0. Daqui em diante quando mencionarmos $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ estaremos sempre considerando $(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1)$ nas condições acima.

O espaço $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com a topologia induzida por $H^1(\Omega)$. De fato, basta provar que $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $H^1(\Omega)$. Sejam $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ e $u \in H^1(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ em $H^1(\Omega)$. Pela continuidade da aplicação traço γ_0, temos que $\gamma_0(u_k) \to \gamma_0(u)$ em $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$. Logo existe uma subsequência $\left(u_{k_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\gamma_0(u_{k_j}) \to \gamma_0(u)$ q.s. em Γ. Como $\{u_{k_j}\} \subset H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ temos que $\gamma_0(u_{k_j}) = 0$ q.s. em Γ_0, $\forall\, j \in \mathbb{N}$ e da convergência acima, concluímos que $\gamma_0(u) = 0$ q.s. em Γ_0, o que prova que $u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$. Logo, $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $H^1(\Omega)$.

Em $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ as normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|u\| = |\nabla u|$ são equivalentes. Com efeito, notemos inicialmente que a aplicação

$$u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \longrightarrow \|u\| = |\nabla u|$$

define uma seminorma em $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$. Agora, se $\|u\| = 0$ isto é, $|\nabla u| = 0$ então $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0$, $\forall\, i = 1, ..., n$. Logo, $u = C$, onde C é uma constante (notemos que Ω é conexo). Como $\gamma_0(u)|_{\Gamma_0} = 0$ resulta que $u = 0$ q.s. em Ω. Portanto, a aplicação acima é uma norma.

A desigualdade $\|u\|^2 \leq |u|^2 + \|u\|^2 = \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$ é trivialmente verificada. Para provarmos a equivalência das normas resta mostrar a existência de uma constante $c_1 > 0$ tal que $|u| \leq c_1\|u\|$; $\forall\, u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ (Desigualdade de Poincaré). Se $u = 0$ nada temos a provar, então suponhamos que $u \neq 0$. Mostrar o desejado é equivalente a mostrar a existência de uma constante $c_2 > 0$ tal que

$$c_2 \leq \left\|\frac{u}{|u|}\right\|; \quad \forall\, u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega).$$

Ou ainda, basta provarmos que $\exists\, c > 0$ tal que $\|u\| \geq c$, $\forall u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ com $|u| = 1$. Suponhamos, por absurdo, que isto não ocorra. Então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ com $|u_n| = 1$ e, no entanto, $\|u_n\| < \dfrac{1}{n}$. Tomando o limite quando $n \to +\infty$ resulta que

$$\lim \|u_n\| = 0. \tag{1.24}$$

Agora, observe que

$$\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} = |u_n|^2 + \|u_n\|^2 \leq 1 + \frac{1}{n^2} \leq 2 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ , \tag{1.25}$$

o que implica que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada no espaço topológico $(H^1_{\Gamma_0}(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$. Sendo $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ Hilbert com a topologia induzida por $H^1(\Omega)$, existe $\left(u_\nu\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$ subsequência de $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ e $u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ tais que

$$u_\nu \rightharpoonup u \ \text{ em } \ H^1_{\Gamma_0}(\Omega). \tag{1.26}$$

Usando a semicontinuidade inferior da norma, (1.24) e (1.26) obtemos $\|u\| \leq \lim_{\nu\to\infty} \|u_\nu\| = 0$ e portanto $u = 0$.

Por outro lado, em virtude da imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ser compacta, então de (1.25), após a extração de uma eventual subsequência obtemos

$$u_\nu \to u \ \text{ em } \ L^2(\Omega) \tag{1.27}$$

o que implica que $|u_\nu| \to |u|$. Como $|u_\nu| = 1$ vem que $|u| = 1$ o que é um absurdo, pois $u = 0$. Ficando provado a equivalência entre as normas.

Formalizado o espaço $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ falaremos um pouco da Teoria Espectral que usaremos na Seção 2.3.2. Observe que $\overline{H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap H^2(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ e $\overline{H^1_{\Gamma_0}(\Omega)}^{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega)$. Sempre que nos referirmos ao espaço $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ ele estará munindo com a topologia dada pela norma usual de $H^2(\Omega)$. Como $\left(H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)$ é um espaço de Hilbert separável, existe um sistema ortonormal e completo que denotaremos por $\tilde{A} = \left\{\tilde{w}_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$. Logo

$$\overline{[\ \tilde{A}\ ]}^{H^2(\Omega)} = H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap H^2(\Omega) \ ,$$

onde $[\ \tilde{A}\ ]$ é o subespaço gerado pelo conjunto $\tilde{A}$. Claramente $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ com imersões contínuas e densas. Logo,

$$\overline{[\ \tilde{A}\ ]}^{H^1(\Omega)} = H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \ \text{ e } \ \overline{[\ \tilde{A}\ ]}^{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega) \ .$$

Por outro lado, ortogonalizando o conjunto $\tilde{A}$ em $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ e depois ortogonalizando em $L^2(\Omega)$ via processo de ortogonalização de Gram-Schmidt obtemos um conjunto $A = \left\{w_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que A e $\tilde{A}$ geram o mesmo subespaço, ou seja, $[\ A\ ] = [\ \tilde{A}\ ]$. Dessa forma, $\overline{[\ A\ ]}^{H^2(\Omega)} = H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $\overline{[\ A\ ]}^{H^1(\Omega)} = H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ e $\overline{[\ A\ ]}^{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega)$ e portanto, A é um sistema ortonormal e completo em $L^2(\Omega)$, ortogonal e completo em $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ e ortogonal e completo em $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Feitas essas considerações, para cada $m \in \mathbb{N}$ denotamos por $W_m = [w_1, \ldots, w_m]$ o subespaço vetorial gerado pelos vetores $w_1, \ldots, w_m$. Então, se $u_0 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, existe $\left(u_{0m}\right)_{m\in\mathbb{N}} \subset W_m$ tal que $u_{0m} \to u_0$ e $u_{0m} = \sum_{j=1}^m \alpha_{jm} w_j$. Também se $u_1 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$, existe $\left(u_{1m}\right)_{m\in\mathbb{N}} \subset W_m$ tal que

$$u_{1m} \to u_1 \ \text{ e } \ u_{1m} = \sum_{j=1}^m \beta_{jm} w_j \ .$$

Agora vamos escolher um sistema ortonormal e completo conveniente de $L^2(\Gamma_1)$. Desde que $L^2(\Gamma_1)$ é um espaço de Hilbert separável, consideramos $\left\{z_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ um sistema ortonormal e completo de $L^2(\Gamma_1)$. Observe que

$$W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_m \subset \cdots \subset H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap H^2(\Omega) \ ,$$

e tomando
$$\begin{array}{rcccl} \left(R \circ \gamma_0\right): & H^1(\Omega) & \xrightarrow{\gamma_0} & L^2(\Gamma) & \xrightarrow{R} & L^2(\Gamma_1) \\ & u & \longmapsto & \gamma_0(u) & \longmapsto & R\Big(\gamma_0(u)\Big) = \gamma_0(u)\Big|_{\Gamma_1} \end{array}$$

é fácil ver que $\left(R \circ \gamma_0\right)$ é linear e continua. Assim $\dim\Big((R \circ \gamma_0)(W_k)\Big) \leq k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e consequentemente existe uma reordenação do sistema $\left\{z_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$, digamos $\left\{z_{jl}\right\}_{l\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\left(R \circ \gamma_0\right)(W_1) \subset [z_{j1}] \ , \ \ldots \ , \ \left(R \circ \gamma_0\right)(W_m) \subset [z_{j1}, \ldots, z_{jm}]$$

Escrevendo $Z_m = [z_{j1}, \ldots, z_{jm}]$ temos que o sistema $\left\{z_{jl}\right\}_{l\in\mathbb{N}}$ ainda é ortonormal e completo em $L^2(\Omega)$ e $\left(R \circ \gamma_0\right)(W_k) \subset Z_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Pela construção acima, se $u_{0m} \in W_m$ então $\gamma_0(u_{0m})_{|\Gamma_1} \in Z_m$. Repetindo a construção para aplicação traço γ_1, temos que: se $u_{1m} \in W_m$ então $\gamma_1(u_{1m})_{|\Gamma_1} \in Z_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Soluções

2.1 Introdução

Motivados pela dedução física descrita no capítulo 1, neste capítulo apresentamos um estudo sobre a existência e unicidade de solução para o problema de valores iniciais e de fronteira para equação da onda com condições de fronteira da acústica. Para fixar tal problema consideremos:

- Ω um subconjunto aberto, conexo e limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, com fronteira Γ bem regular. Neste caso a fronteira Γ é uma variedade C^∞, compacta, sem bordo, de dimensão $(n-1)$;
- $f,\ g,\ h,\ \delta_0 : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ quatro funções reais definidas em Γ;
- $u_0,\ u_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais definidas em Ω.

O problema consiste em determinar um par de funções reais (u, δ) com $u : \Omega \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\delta : \Gamma \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que:

$$
\text{(P1)}\begin{cases}
u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \quad \text{para } \ x \in \Omega \text{ e } t > 0;\\
f(x)\delta_{tt}(x,t) + g(x)\delta_t(x,t) + h(x)\delta(x,t) = -u_t(x,t) \quad \text{para } \ x \in \Gamma \text{ e } t > 0;\\
\delta_t(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) \quad \text{para } \ x \in \Gamma \text{ e } t > 0;\\
u(x,0) = u_0(x) \ \ , \ \ u_t(x,0) = u_1(x) \quad \text{para } \ x \in \Omega;\\
\delta(x,0) = \delta_0(x) \ \ , \ \ \delta_t(x,0) = \dfrac{\partial u_0}{\partial \nu}(x) \quad \text{para } \ x \in \Gamma\ .
\end{cases}
$$

Uma vez posto o problema (P1), é necessário fazer hipóteses sobre as funções $f, g, h,$, bem como, estabelecer o conceito de solução. Tecnicamente falando é necessário escolher espaços funcionais convenientes onde, dentre vários aspectos, se tenha a desigualdade de Poincaré. Fazendo uso da Teoria de Semigrupos estudamos o problema (P1) no espaço $H_D(\Omega)$, conforme [4]. Note que ao considerar o espaço $H_D(\Omega)$ introduzimos ao problema uma condição adicional, neste espaço não há distinção entre funções que diferem q.s. por constantes ($H^1(\Omega)$ módulo função constante). Conforme vimos no Capítulo 1 este espaço identifica-se com o $H_{med}(0)$.

Num outro momento, a busca de solução para o problema em um espaço funcional (subespaço de $H^1(\Omega)$) e na impossibilidade de uma abordagem direta, uma ideia é considerar "problemas intermediários" onde as condições de fronteira da acústica são impostas sobre uma parte da fronteira, e na sequência considerar o limite desses problemas intermediários. Deste modo, vamos considerar as condições de fronteira da acústica somente numa parte da fronteira Γ e condições de Dirichlet homogênea no restante. Isto nos leva a particionar a fronteira Γ em duas partes disjuntas Γ_0, Γ_1 e estudar o problema no espaço $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$. Lembre que em $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ vale a desigualdade de Poincaré. Nas próximas seções realizamos este estudo via método de semigrupos e também o método construtivo de Faedo-Galerkin, veja [4] e [9]. Observe também que este problema tem seu apelo físico próprio. Basta imaginar que parte da fronteira Γ_0 seja isolada acusticamente e Γ_1 não seja isolada.

Para explicitar o problema, consideremos $\left(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1\right)$ conforme descrito na Seção 1.4 onde definimos o espaço $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ e aqui $f,\ g,\ h,\ \delta_0 : \Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ quatro funções reais definidas em Γ_1. O problema consiste em determinar um par de funções (u, δ) com $u : \Omega \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\delta : \Gamma_1 \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$
(\text{P2})\begin{cases}
u_{tt}(x,t)-\Delta u(x,t)=0 \quad \text{para} \;\; x\in\Omega \text{ e } t>0;\\
u(x,t)=0 \;\; \text{para} \;\; x\in\Gamma_0 \text{ e } t>0;\\
f(x)\delta_{tt}(x,t)+g(x)\delta_t(x,t)+h(x)\delta(x,t)=-u_t(x,t) \quad \text{para} \;\; x\in\Gamma_1 \text{ e } t>0;\\
\delta_t(x,t)=\dfrac{\partial u}{\partial\nu}(x,t) \quad \text{para} \;\; x\in\Gamma_1 \text{ e } t>0;\\
u(x,0)=u_0(x) \;\; , \;\; u_t(x,0)=u_1(x) \quad \text{para} \;\; x\in\Omega;\\
\delta(x,0)=\delta_0(x) \;\; , \;\; \delta_t(x,0)=\dfrac{\partial u_0}{\partial\nu}(x) \quad \text{para} \;\; x\in\Gamma_1 \;.
\end{cases}
$$

Após o estudo do problema (P2) retornamos com uma nova abordagem para o problema (P1), definindo de forma adequada uma sequência encaixante de conjuntos em Γ, dada por $\left(\Gamma_{0m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $\mu(\Gamma_{0m})\to 0$. A ideia é que para cada $m\in\mathbb{N}$ se tenha uma solução de (P2) e quando passarmos o limite no m obteremos uma solução de (P1) como limite de soluções de (P2). Veja [9].

Finalizamos o capítulo fazendo algumas modificações físicas no modelo, chegando à um novo problema que denominaremos por (P3). Estas alterações no modelo ocorrem porque pretendemos obter estabilização uniforme da energia associada. Para os problemas citados anteriormente J. T. Beale em [4] provou que não há taxa de decaimento uniforme. Mostraremos a existência e unicidade de solução do problema (P3) via método de semigrupos. Veja [10], [14] e [15]. Por simplicidade vamos deixar a formulação do problema (P3) para Seção 2.5.

2.2 Teoria de existência no espaço $H_D(\Omega)$

Suponhamos que as funções f,g,h sejam contínuas e positivas e que o par (u,δ) seja uma solução suficientemente suave do problema (P1). Então, multiplicando primeira equação de (P1) por $2u_t(x,t)$ e integrando em Ω obtemos

$$\int_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial t}(u_t(x,t))^2-2\Delta u(x,t)u_t(x,t)\right]dx=0$$

Usando a fórmula de Green na identidade acima temos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (u_t(x,t))^2\,dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega 2\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)\ \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(x,t)dx - 2\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t)\ u_t(x,t)d\Gamma = 0$$

Substituindo $\partial_\nu u = \delta_t$ chegamos em

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (u_t(x,t))^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)\right)^2 dx - 2\int_\Gamma \delta_t(x,t)\ u_t(x,t)d\Gamma = 0$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}\left[\ |u_t(t)|^2 + \|u(t)\|^2\ \right] - 2\Big(\delta_t(t), u_t(t)\Big)_\Gamma = 0 \tag{2.1}$$

Analogamente multiplicando a segunda equação de (P1) por $2\delta_t(x,t)$ e integrando sobre Γ, resulta

$$\int_\Gamma \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[f(x)(\delta_t(x,t))^2\right] + 2g(x)\Big(\delta_t(x,t)\Big)^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left[h(x)(\delta(x,t))^2\right]\right\} d\Gamma = -2\int_\Gamma u_t(x,t)\delta_t(x,t)d\Gamma$$

ou seja

$$\frac{d}{dt}\int_\Gamma \left[\Big(f^{\frac{1}{2}}(x)\delta_t(x,t)\Big)^2 + \Big(h^{\frac{1}{2}}(x)\delta(x,t)\Big)^2\right] d\Gamma + \int_\Gamma \Big(g^{\frac{1}{2}}(x)\delta_t(x,t)\Big)^2 d\Gamma = -2\int_\Gamma u_t(x,t)\delta_t(x,t)d\Gamma\,,$$

que pode ainda ser reescrito na forma

$$\frac{d}{dt}\left[\ |f^{\frac{1}{2}}\delta_t(t)|_\Gamma^2 + |h^{\frac{1}{2}}\delta(t)|_\Gamma^2\ \right] + 2|g^{\frac{1}{2}}\delta_t(t)|_\Gamma^2 = -2\Big(\delta_t(t), u_t(t)\Big)_\Gamma\ . \tag{2.2}$$

De (2.1) e (2.2) temos

$$\frac{d}{dt}\left[\ |u_t(t)|^2 + \|u(t)\|^2 + |f^{\frac{1}{2}}\delta_t(t)|_\Gamma^2 + |h^{\frac{1}{2}}\delta(t)|_\Gamma^2\ \right] = -2|g^{\frac{1}{2}}\delta_t(t)|_\Gamma^2\ .$$

Esta identidade nos motiva definir a energia associada ao problema (P1) por

$$E(t) = |u_t(t)|^2 + \|u(t)\|^2 + |f^{\frac{1}{2}}\delta_t(t)|_\Gamma^2 + |h^{\frac{1}{2}}\delta(t)|_\Gamma^2\ ,\ t \geq 0$$

e com isso a energia deve satisfazer:

$$\frac{dE}{dt}(t) = -2|g^{\frac{1}{2}}\delta_t(t)|^2_{\Gamma} \ .$$

Logo a energia $E = E(t)$ é não crescente e também, se $g \equiv 0$ então a energia é conservada, ou seja, constante.

Definição 2.2.1. *Dados $u_0 \in H_D(\Omega)$ tal que $\Delta u_0 \in L^2(\Omega)$, $u_1 \in H^1(\Omega)$ e $\delta_0 \in L^2(\Gamma)$, uma solução do problema (P1) é um par de funções (u, δ) na classe:*

$$u \in C^1([0,\infty), H_D(\Omega)) \cap C^2([0,\infty), L^2(\Omega)) \ \text{e} \ \Delta u(t) \in L^2(\Omega)$$

$$\delta \in C^2([0,\infty), L^2(\Gamma))$$

satisfazendo:

$$\begin{aligned}
&u_{tt}(t) - \Delta u(t) = 0 \quad \text{em} \quad L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad t > 0; \\
&f\delta_{tt}(t) + g\delta_t(t) + h\delta(t) + \gamma_0(u_t(t)) = 0 \quad \text{em} \quad L^2(\Gamma) \quad \text{e} \quad t > 0; \\
&\int_\Omega (\Delta u(t)\psi + \nabla u(t)\nabla\psi)dx = \int_\Gamma \delta_t(t)\gamma_0(\psi)d\Gamma, \ \forall \psi \in H^1(\Omega) \quad \text{e} \quad t > 0; \qquad (2.3) \\
&u(0) = u_0 \ , \ u_t(0) = u_1 \ , \ \delta(0) = \delta_0 \ \text{e} \ \delta_t(0) = \gamma_1(u_0) \ \text{em} \ H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)
\end{aligned}$$

Observação 2.2.1. *Note que o operador derivada com relação a t e com relação a x são invariantes pelas classes de equivalência do espaço $H_D(\Omega)$. Além disso, a equação (2.3) significa que $\partial_\nu u = \delta_t$ esta satisfeita num sentido fraco. Com efeito, como $u(t) \in \mathcal{H}(\Delta, \Omega)$ para todo $t \geq 0$, temos, pela fórmula de Green generalizada (1.21) e a pela condição (2.3), que*

$$\Big\langle \gamma_1(u(t)), \gamma_0(\psi) \Big\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \Big(\delta_t(t), \gamma_0(\psi)\Big)_\Gamma \ \ \forall \ \psi \in H^1(\Omega)$$

Se u for suficientemente regular, ou seja, $u(t) \in H^2(\Omega)$ para todo $t \geq 0$, então podemos reescrever $\Big(\gamma_1(u(t)), \gamma_0(\psi)\Big)_\Gamma = \Big(\delta_t(t), \gamma_0(\psi)\Big)_\Gamma$ para todo $\psi \in H^1(\Omega)$, ou ainda, $\Big(\gamma_1(u(t)) - \delta_t(t), \gamma_0(\psi)\Big)_\Gamma = 0$ para todo $\psi \in H^1(\Omega)$ de onde resulta que $\gamma_1(u(t)) = \delta_t(t)$ em $L^2(\Gamma)$ para todo $t \geq 0$. Supondo ainda mais regularidade sobre u, ou seja, $u(t) \in C^2(\bar{\Omega})$, para todo $t \geq 0$, *então* $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \delta_t$ *em* $\Gamma \times [0,\infty)$.

Teorema 2.1. *Sejam* $f, g, h \in C(\Gamma)$ *com* f *e* h *funções estritamente positivas e* g *não negativa. Se* $u_0 \in H_D(\Omega)$ *com* $\Delta u_0 \in L^2(\Omega)$ *e é tal que existe* $\delta_1 \in L^2(\Gamma)$ *satisfazendo*

$$\Big\langle \gamma_1(u_0), \gamma_0(\psi) \Big\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \Big(\delta_1, \gamma_0(\psi)\Big)_\Gamma \quad \forall\ \psi \in H^1(\Omega),$$

$u_1 \in H^1(\Omega)$ *e* $\delta_0 \in L^2(\Gamma)$*, então existe uma única solução para o problema (P1) segundo a definição (2.2.1).*

Demonstração: Seja $H = H_D(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$, com o produto interno dado por:

$$(W,V)_H = (\overline{w_1}, \overline{v_1})_D + (w_2, v_2) + (h^{\frac{1}{2}} w_3, h^{\frac{1}{2}} v_3)_\Gamma + (f^{\frac{1}{2}} w_4, f^{\frac{1}{2}} v_4)_\Gamma$$

onde $W = (\overline{w_1}, w_2, w_3, w_4) \in H$ e $V = (\overline{v_1}, v_2, v_3, v_4) \in H$. Note que $\Big(H, (\cdot\ ,\cdot)_H\Big)$ é um espaço de Hilbert, pois cada coordenada com seu respectivo produto interno é um espaço de Hilbert.

Definimos o operador $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ da seguinte forma:

$$D(A) = \Big\{ W = (\overline{w_1}, w_2, w_3, w_4) \in H; \quad \Delta w_1 \in L^2(\Omega), \quad w_2 \in H^1(\Omega)\ , \\ \int_\Omega (\Delta w_1 \psi + \nabla w_1 \nabla \psi) dx = \int_\Gamma w_4 \gamma_0(\psi) d\Gamma, \quad \forall\ \psi \in H^1(\Omega) \Big\}$$

$$AW = A \begin{pmatrix} \overline{w_1} \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{w_2} \\ \Delta w_1 \\ w_4 \\ -\dfrac{1}{f}\Big(\gamma_0(w_2) + h w_3 + g w_4\Big) \end{pmatrix} \quad \text{para todo } W \in D(A)\ .$$

Desde que $D(A)$ é um subespaço vetorial de H, temos que A é um operador linear não limitado de H. Provaremos que $(-A)$ é maximal e monótono.

- $(-A)$ **é monótono:**

Seja $W = (\overline{w_1}, w_2, w_3, w_4) \in D(A)$, então:

$$\begin{aligned}
(-AW, W)_H &= -(\overline{w_2}, \overline{w_1})_D - (\Delta w_1, w_2) - (h^{\frac{1}{2}} w_4, h^{\frac{1}{2}} w_3)_\Gamma \\
&\quad - \left(f^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{f} \right] [\gamma_0(w_2) + hw_3 + gw_4] \; , \; f^{\frac{1}{2}} w_4 \right)_\Gamma \\
&= - \left[\int_\Omega (\nabla w_2 \nabla w_1 + \Delta w_1 w_2) dx + \int_\Gamma h w_4 w_3 d\Gamma \right] \\
&\quad + \int_\Gamma (\gamma_0(w_2) w_4 + h w_3 w_4 + g|w_4|^2) d\Gamma \; . \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Agora, como $W \in D(A)$ temos que $\overline{w_1}$ e w_4 satisfazem a relação

$$\int_\Omega (\Delta w_1 \psi + \nabla w_1 \nabla \psi) dx = \int_\Gamma w_4 \gamma_0(\psi) d\Gamma, \quad \forall \; \psi \in H^1(\Omega) \; .$$

Em particular tomando $\psi = w_2 \in H^1(\Omega)$ e substituindo em (2.4) temos que

$$\begin{aligned}
(-AW, W)_H &= - \left[\int_\Gamma w_4 \gamma_0(w_2) d\Gamma + \int_\Gamma h w_4 w_3 d\Gamma \right] + \int_\Gamma (\gamma_0(w_2) w_4 + h w_3 w_4 + g|w_4|^2) d\Gamma \\
&= \int_\Gamma g|w_4|^2 d\Gamma \geq 0 \; ,
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade levamos em conta que $g \in C(\Gamma)$ e é não negativa, concluindo assim que $(-A)$ é monótono.

- $(-A)$ **é maximal:**

Devemos mostrar que o operador $(I - A) : D(A) \longrightarrow H$ é sobrejetor, ou seja, dado $\Phi = (\overline{\varphi_1}, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) \in H$, devemos mostrar que existe $W = (\overline{w_1}, w_2, w_3, w_4) \in D(A)$ tal que $W - AW = \Phi$ em H. Para isso, dado $\Phi = (\overline{\varphi_1}, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) \in H$, escolha um representante φ_1 em $H^1(\Omega)$ da classe $\overline{\varphi_1} \in H_D(\Omega)$ e defina:

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{1}{f + g + h} \in C(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma) \qquad (2.5) \\
\xi_1 &= (\varphi_1 + \varphi_2) \in L^2(\Omega) \qquad (2.6) \\
\xi_2 &= \beta \left[\gamma_0(\varphi_1) - h\varphi_3 + f\varphi_4 \right] \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Consideremos em $H^1(\Omega)$ a estrutura dada pelo seguinte produto interno:

$$(((u,v))) = (u,v) + (\nabla u, \nabla v) + (\beta^{\frac{1}{2}}\gamma_0(u), \beta^{\frac{1}{2}}\gamma_0(v))_\Gamma \tag{2.8}$$

para todo $u, v \in H^1(\Omega)$. Observe que pela continuidade da aplicação traço $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$, a norma induzida por esse produto interno é equivalente a norma usual em $H^1(\Omega)$. Consequentemente $\Big(H^1(\Omega), (((\cdot,\cdot)))\Big)$ é um espaço de Hilbert. Definindo

$$\begin{array}{rccl} \chi : & H^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \psi & \longmapsto & \langle \chi, \psi \rangle = (\xi_1, \psi) + (\xi_2, \gamma_0(\psi))_\Gamma \end{array}$$

é claro que χ esta bem definida e é linear. Provemos que χ é contínua. De fato:

$$\begin{aligned} |\langle \chi, \psi \rangle|^2 &= |(\xi_1, \psi) + (\xi_2, \gamma_0(\psi))_\Gamma|^2 \leq 2|(\xi_1, \psi)|^2 + 2|(\xi_2, \gamma_0(\psi))_\Gamma|^2 \\ &\leq 2(|\xi_1|^2|\psi|^2 + |\xi_2|^2_\Gamma |\gamma_0(\psi)|^2_\Gamma) \leq 2(|\xi_1|^2|\psi|^2 + |\nabla\psi|^2 + C|\xi_2|^2_\Gamma |\psi|^2_{H^1(\Omega)}) \leq M|\psi|^2_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Logo $\chi \in \Big(H^1(\Omega)\Big)'$. Assim pelo Teorema da Representação de Riesz existe um único $w_1 \in H^1(\Omega)$ tal que:

$$(((w_1, \psi))) = \langle \chi, \psi \rangle \quad \text{para todo } \psi \in H^1(\Omega)\ . \tag{2.9}$$

Note que w_1 depende da escolha do representante de φ_1 em $H^1(\Omega)$. Porém, para qualquer representante $\varphi_1 \in \overline{\varphi_1}$ o w_1 que obtemos na construção acima pertence sempre a mesma classe $\overline{w_1} \in H_D(\Omega)$, isto é, dado a classe $\overline{\varphi_1}$ encontramos uma única classe $\overline{w_1}$ tais que seus respectivos representantes satisfazem (2.9). De fato: Suponha que φ_1 e $(\varphi_1 + c)$ sejam dois representantes de $\overline{\varphi_1} \in H_D(\Omega)$. Então, para o elemento $\varphi_1 \in H^1(\Omega)$, sabemos que existe $w_1 \in H^1(\Omega)$ satisfazendo (2.9). Analogamente, repetindo a construção para $(\varphi_1 + c)$, temos definido uma aplicação linear e contínua

$$\tilde{\chi} : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

com $\langle \tilde{\chi}, \psi \rangle = (\xi_1, \psi) + (\xi_2, \gamma_0(\psi))_\Gamma + (c, \psi) + (\beta c, \gamma_0(\psi))_\Gamma = \langle \chi, \psi \rangle + (c, \psi) + (\beta c, \gamma_0(\psi))_\Gamma$. Novamente pelo teorema da representação de Riesz existe um único $\tilde{w_1} \in H^1(\Omega)$ tal que

$$(((\tilde{w_1}, \psi))) = \langle \tilde{\chi}, \psi \rangle \quad \text{para todo } \psi \in H^1(\Omega) \ .$$

Consequentemente, de (2.9) e da igualdade acima

$$(((\tilde{w_1}, \psi))) = \langle \tilde{\chi}, \psi \rangle = \langle \chi, \psi \rangle + (c, \psi) + (\beta c, \gamma_0(\psi))_\Gamma = (((w_1, \psi))) + (c, \psi) + (\beta c, \gamma_0(\psi))_\Gamma \ .$$

Logo $(((\tilde{w_1} - w_1, \psi))) = (c, \psi) + (\beta c, \gamma_0(\psi))_\Gamma$. De (2.8), vem que

$$(\tilde{w_1} - w_1, \psi) + (\nabla(\tilde{w_1} - w_1), \nabla\psi) + (\beta^{\frac{1}{2}}\gamma_0(\tilde{w_1} - w_1), \beta^{\frac{1}{2}}\gamma_0(\psi))_\Gamma = (c, \psi) + (\beta c, \gamma_0(\psi))_\Gamma,$$

ou ainda

$$(\tilde{w_1} - w_1 - c, \psi) + (\nabla(\tilde{w_1} - w_1 - c), \nabla\psi) + (\beta^{\frac{1}{2}}\gamma_0(\tilde{w_1} - w_1 - c), \beta^{\frac{1}{2}}\gamma_0(\psi))_\Gamma = 0 \ .$$

Fazendo $\psi = \tilde{w_1} - w_1 - c$, obtemos

$$\left|\tilde{w_1} - w_1 - c\right|^2 + \left|\nabla(\tilde{w_1} - w_1 - c)\right|^2 + \left|\beta^{\frac{1}{2}}\gamma_0(\tilde{w_1} - w_1 - c)\right|_\Gamma^2 = 0 \ .$$

Portanto $\tilde{w_1} = w_1 + c$, ou seja, $\tilde{w_1}$ e w_1 pertencem a mesma classe $\overline{w_1} \in H_D(\Omega)$, como queríamos.

Das relações (2.8) e (2.9) resulta que

$$\int_\Omega (w_1\psi + \nabla w_1 \nabla\psi)dx + \int_\Gamma \beta\gamma_0(w_1)\gamma_0(\psi)d\Gamma = \int_\Omega \xi_1\psi dx + \int_\Gamma \xi_2\gamma_0(\psi)d\Gamma \tag{2.10}$$

para todo $\psi \in H^1(\Omega)$. Em particular para $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega (w_1\psi + \nabla w_1 \nabla\psi)dx = \int_\Omega \xi_1\psi dx$$

para todo $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e, usando a definição de derivada distribucional, obtemos que $-\Delta w_1 = \xi_1 - w_1 \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega)$. Como o segundo membro desta igualdade é regular, ou seja, pertence a $L^2(\Omega)$, devemos ter $\Delta w_1 \in L^2(\Omega)$ e

$$-\Delta w_1 = \xi_1 - w_1 \quad \text{em} \quad L^2(\Omega)\ . \tag{2.11}$$

Isolando o termo w_1 e substituindo na equação (2.10), chegamos em

$$\int_\Omega (\Delta w_1 \psi + \nabla w_1 \nabla \psi) dx = \int_\Gamma (\xi_2 - \beta\gamma_0(w_1))\gamma_0(\psi) d\Gamma$$

para todo $\psi \in H^1(\Omega)$. Assim, definindo

$$w_4 = \xi_2 - \beta\gamma_0(w_1)\ , \quad w_2 = w_1 - \varphi_1 \text{ e } w_3 = \varphi_3 + w_4\ , \tag{2.12}$$

resulta que:

$$\begin{aligned}
&\overline{w_1} \in H_D(\Omega) \quad \text{e} \quad \Delta w_1 \in L^2(\Omega),\\
&w_2 = \Big(w_1 - \varphi_1\Big) \in H^1(\Omega),\\
&w_3 = \varphi_3 + w_4 = \Big(\varphi_3 + \xi_2 - \beta\gamma_0(w_1)\Big) \in L^2(\Gamma),\\
&w_4 = \Big(\xi_2 - \beta\gamma_0(w_1)\Big) \in L^2(\Gamma)
\end{aligned}$$

e mais, $\int_\Omega (\Delta w_1 \psi + \nabla w_1 \nabla \psi) dx = \int_\Gamma w_4 \gamma_0(\psi) d\Gamma$ para todo $\psi \in H^1(\Omega)$. Portanto $W = (\overline{w_1}, w_2, w_3, w_4) \in D(A)$. Provemos agora que $W - AW = \Phi$ em H, isto é,

$$\begin{pmatrix} \overline{w_1} \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overline{w_2} \\ \Delta w_1 \\ w_4 \\ -\dfrac{1}{f}\Big(\gamma_0(w_2) + hw_3 + gw_4\Big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}$$

Com efeito, usando as igualdades (2.5)-(2.7), (2.11) e (2.12), temos:

- $\overline{w_1} - \overline{w_2} = \overline{w_1} - (\overline{w_1} - \overline{\varphi_1}) = \overline{\varphi_1}$

- $w_2 - \Delta w_1 \;\; = \;\; w_2 + (\xi_1 - w_1) = w_1 - \varphi_1 + (\varphi_1 + \varphi_2) - w_1 = \varphi_2$

- $w_3 - w_4 = w_4 - \varphi_4 + w_4 = \varphi_3$

- $$\begin{aligned} w_4 + \tfrac{1}{f}(\gamma_0(w_2) + hw_3 + gw_4) &= \frac{fw_4 + \gamma_0(w_2) + hw_3 + gw_4}{f} \\ &= \tfrac{1}{f}\{fw_4 + \gamma_0(w_2) + h(\varphi_3 + w_4) + gw_4\} \\ &= \tfrac{1}{f}\{\gamma_0(w_2) + h\varphi_3 + (f+g+h)w_4\} \\ &= \tfrac{1}{f}\{\gamma_0(w_2) + h\varphi_3 + \beta^{-1}w_4\} \\ &= \tfrac{1}{f}\{\gamma_0(w_2) + h\varphi_3 + \beta^{-1}[\xi_2 - \beta\gamma_0(w_1)]\} \\ &= \tfrac{1}{f}\{\gamma_0(w_2) + h\varphi_3 + \beta^{-1}[\beta(\gamma_0(\varphi_1) - h\varphi_3 + f\varphi_4) - \beta\gamma_0(w_1)]\} \\ &= \tfrac{1}{f}\{\gamma_0(w_1 - \varphi_1) + h\varphi_3 + \gamma_0(\varphi_1) - h\varphi_3 + f\varphi_4 - \gamma_0(w_1)\} \\ &= \tfrac{1}{f}\{\gamma_0(w_1) - \gamma_0(\varphi_1) + h\varphi_3 + \gamma_0(\varphi_1) - h\varphi_3 + f\varphi_4 - \gamma_0(w_1)\} = \varphi_4 \end{aligned}$$

o que conclui a prova de que $(-A)$ é maximal.

Pelas hipótese do teorema se denotarmos $W_0 = (\overline{u_0}, u_1, \delta_0, \delta_1)$ então $W_0 \in D(A)$. Assim pelo Teorema de Hille-Yosida (Teorema 1.2), existe uma única função

$$W \in C([0,\infty); D(A)) \cap C^1([0,\infty); H)$$

tal que

$$(P) \quad \begin{cases} \dfrac{dW}{dt}(t) &= AW(t) \quad \text{em} \quad H \text{ e para todo } t \geq 0; \\ W(0) &= W_0 \quad \text{em} \quad H\ . \end{cases}$$

Tomando $u = w_1$ e $\delta = w_3$ temos que o par (u, δ) é uma solução do problema (P1) segundo a definição 2.2.1. De fato, desde que $W = (\overline{w_1}, w_2, w_3, w_4) \in C([0,\infty); D(A)) \cap C^1([0,\infty); H)$ é a única solução do problema acima, então:

$$\begin{aligned} &w_1 \in C^1([0,\infty); H_D(\Omega)) && \text{e} \quad \Delta w_1(t) \in L^2(\Omega); \\ &w_2 \in C^1([0,\infty); L^2(\Omega)) && \text{e} \quad w_2(t) \in H^1(\Omega); \\ &w_3, w_4 \in C^1([0,\infty); L^2(\Gamma)) \end{aligned}$$

e

$$w_1'(t) = w_2(t)\ ,\ w_2'(t) = \Delta w_1(t)\ ,\ w_3'(t) = w_4(t)\ ,$$
$$w_4'(t) = -\frac{1}{f}(\gamma_0(w_2)(t) + hw_3(t) + gw_4(t))\ ,$$

onde $u'(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial t}$. Logo,

$$w_1 \in C^1([0,\infty); H_D(\Omega)) \cap C^2([0,\infty); L^2(\Omega))\ ,\ \Delta w_1(t) \in L^2(\Omega);$$

$$w_3 \in C^2([0,\infty); L^2(\Gamma));$$

$$w_1'' - \Delta w_1 = 0$$

$$w_3'' = -\frac{1}{f}(\gamma_0(w_1'(t)) + hw_3(t) + gw_3'(t))$$

e assim $fw_3'' + gw_3'(t) + hw_3(t) + \gamma_0(w_1'(t)) = 0$. Também temos

$$\int_\Omega (\Delta w_1(t)\psi + \nabla w_1(t)\nabla\psi)dx = \int_\Gamma w_4(t)\gamma_0(\psi)d\Gamma = \int_\Gamma w_3'(t)\gamma_0(\psi)d\Gamma$$

para todo $\psi \in H_1(\Omega)$ e pela fórmula de Green generalizada (1.21) temos

$$\langle \gamma_1(w_1(t)), \gamma_0(\psi)\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \int_\Gamma w_3'(t)\gamma_0(\psi)d\Gamma \quad \forall\ \psi \in H^1(\Omega)\ .$$

Por outro lado, de (P) temos que $w_1(0) = u_0$, $w_2(0) = u_1$, $w_3(0) = \delta_0$, $w_4(0) = \delta_1$. Logo, $u = w_1$ e $\delta = w_3$ verificam existência de solução, do problema (P1) segundo a definição (2.2.1).

A unicidade segue do fato que o problema (P) tem uma única solução. Com efeito, dada uma solução do problema (P1) segundo a definição (2.2.1), basta definir $\tilde{W}(t) = \big(u(t), u_t(t), \delta(t), \delta_t(t)\big)$ e notar que $\tilde{W}$ resolve o problema (P), que por sua vez tem solução única. Consequentemente o par (u,δ), solução do problema (P1), é necessariamente único. $\square$

2.3 Teoria de existência no Espaço $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$

Como dissemos na introdução deste capítulo, vamos considerar a terna $\big(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1\big)$, já mencionada na seção 1.4, alguns espaços funcionais e resolver o problema (P2).

Definição 2.3.1. *Dados $u_0 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Delta,\Omega)$, $u_1 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ e $\delta_0 \in L^2(\Gamma_1)$, uma solução* *do problema (P2) é um par de funções (u, δ) na classe:*

$$u, u_t \in L^\infty(0,T; H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) \ , \ u_{tt} \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \ , \ u(t) \in \mathcal{H}(\Delta, \Omega) \ q.s. \ em \ (0,T);$$
$$\delta, \delta_t, \delta_{tt} \in L^\infty(0,T; L^2(\Gamma_1))$$

satisfazendo:

$$u_{tt}(t) - \Delta u(t) = 0 \quad em \quad L^2(\Omega) \quad e \quad t > 0; \tag{2.13}$$

$$f\delta_{tt}(t) + g\delta_t(t) + h\delta(t) = -\gamma_0(u_t(t)) \quad em \quad L^2(\Gamma_1) \quad e \quad t > 0; \tag{2.14}$$

$$\int_\Omega (\Delta u(t)\psi + \nabla u(t)\nabla\psi)dx = \int_{\Gamma_1} \delta_t(t)\gamma_0(\psi)d\Gamma, \ \forall \psi \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \quad e \quad t > 0; \tag{2.15}$$

$$u(0) = u_0 \ , \ u_t(0) = u_1 \ , \ \delta(0) = \delta_0 \ e \ \delta_t(0) = \gamma_1(u_0) \ em \ H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \ . \tag{2.16}$$

2.3.1 Via Método de Semigrupos

Teorema 2.2. *Sejam $f, g, h \in C(\overline{\Gamma}_1)$ com f e h funções estritamente positivas e g não negativa. Se $u_0 \in \left(H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Delta, \Omega)\right)$ é tal que existe $\delta_1 \in L^2(\Gamma_1)$ satisfazendo*

$$\left\langle \gamma_1(u_0), \gamma_0(\psi) \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \left(\delta_1, \gamma_0(\psi)\right)_{\Gamma_1} \quad \forall \ \psi \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega),$$

$u_1 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ e $\delta_0 \in L^2(\Gamma_1)$. Então existe uma única solução para o problema (P2), segundo a definição (2.3.1).

Demonstração: A demonstração é análoga a do Teorema 2.1. Sejam $H = H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_1)$ o espaço de Hilbert com o produto interno dado por:

$$(W, V)_H = ((w_1, v_1)) + (w_2, v_2) + (h^{\frac{1}{2}} w_3, h^{\frac{1}{2}} v_3)_\Gamma + (f^{\frac{1}{2}} w_4, f^{\frac{1}{2}} v_4)_\Gamma \tag{2.17}$$

onde $W = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in H$ e $V = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in H$ e o operador linear não limitado de H, $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$, definido da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
D(A) = \Big\{ W =& (w_1, w_2, w_3, w_4) \in H; \quad \Delta w_1 \in L^2(\Omega), \quad w_2 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \;, \\
& \int_\Omega (\Delta w_1 \psi + \nabla w_1 \nabla \psi) dx = \int_{\Gamma_1} w_4 \gamma_0(\psi) d\Gamma, \quad \forall\, \psi \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \Big\}
\end{aligned}
$$

$$
AW = A \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2 \\ \Delta w_1 \\ w_4 \\ -\dfrac{1}{f}\Big(\gamma_0(w_2)_{|\Gamma_1} + h w_3 + g w_4\Big) \end{pmatrix} \;, \quad \forall\, W \in D(A)
$$

Provaremos que $(-A)$ é maximal e monótono. Com efeito:

- $(-A)$ **é monótono:**

Seja $W = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in D(A)$, então:

$$
\begin{aligned}
(-AW, W)_H &= -((w_2, w_1)) - (\Delta w_1, w_2) - (h^{\frac{1}{2}} w_4, h^{\frac{1}{2}} w_3)_{\Gamma_1} \\
&\quad - \left(f^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{f} \right] [\gamma_0(w_2) + h w_3 + g w_4] \;,\; f^{\frac{1}{2}} w_4 \right)_{\Gamma_1} \\
&= -\left[\int_\Omega (\nabla w_2 \nabla w_1 + \Delta w_1 w_2) dx + \int_{\Gamma_1} h w_4 w_3 d\Gamma \right] + \int_{\Gamma_1} (\gamma_0(w_2) w_4 + h w_3 w_4 + g |w_4|^2) d\Gamma \\
&= -\left[\int_{\Gamma_1} w_4 \gamma_0(w_2) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} h w_4 w_3 d\Gamma \right] + \int_{\Gamma_1} (\gamma_0(w_2) w_4 + h w_3 w_4 + g |w_4|^2) d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_1} g |w_4|^2 d\Gamma \geq 0
\end{aligned}
$$

onde na última desigualdade levamos em conta que $g \in C(\overline{\Gamma}_1)$ e é não negativa. Concluímos assim que $(-A)$ é monótono.

- $(-A)$ **é maximal:**

Seja $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) \in H$ e defina:

$$
\beta = \frac{1}{f + g + h} \in C(\Gamma_1) \hookrightarrow L^2(\Gamma_1) \tag{2.18}
$$

$$
\xi_1 = (\varphi_1 + \varphi_2) \in L^2(\Omega) \tag{2.19}
$$

$$
\xi_2 = \beta \left[\gamma_0(\varphi_1) - h\varphi_3 + f\varphi_4 \right] \in L^2(\Gamma_1) \tag{2.20}
$$

Considere o espaço de Hilbert $\left(H^1_{\Gamma_0}(\Omega)(((\cdot,\cdot)))\right)$ onde

$$(((u,v))) = (u,v) + (\nabla u, \nabla v) + (\beta^{\frac{1}{2}}\gamma_0(u), \beta^{\frac{1}{2}}\gamma_0(v))_{\Gamma_1}, \quad \forall u,v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega). \tag{2.21}$$

e defina

$$\begin{array}{rccl} \chi: & H^1_{\Gamma_0}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \psi & \longmapsto & \langle \chi, \psi \rangle = (\xi_1, \psi) + (\xi_2, \gamma_0(\psi))_{\Gamma_1} \end{array}$$

Logo $\chi \in \left(H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\right)'$. Assim pelo Teorema da Representação de Riesz existe um único $w_1 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ tal que:

$$(((w_1, \psi))) = \langle \chi, \psi \rangle \quad \forall\ \psi \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\ . \tag{2.22}$$

Agora, das relações (2.21) e (2.22) conclui-se que

$$-\Delta w_1 = \xi_1 - w_1 \quad \text{em} \quad L^2(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega (\Delta w_1 \psi + \nabla w_1 \nabla \psi) dx = \int_{\Gamma_1} (\xi_2 - \beta\gamma_0(w_1))\gamma_0(\psi) d\Gamma, \quad \forall\ \psi \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\ .$$

Definindo

$$w_4 = \xi_2 - \beta\gamma_0(w_1) \quad w_2 = w_1 - \varphi_1 \quad w_3 = \varphi_3 + w_4$$

teremos que $W = (w_1, w_2, w_3, w_3) \in D(A)$ e $W - AW = \Phi$ em H. O que conclui a prova de que $(-A)$ é maximal.

Por outro lado, pelas hipótese do teorema temos que $W_0 = (u_0, u_1, \delta_0, \delta_1) \in D(A)$. Como $(-A)$ é maximal e monótono temos pelo Teorema de Hille-Yosida (Teorema 1.2), que existe uma única função

$$W \in C^1([0,\infty); H) \cap C([0,\infty); D(A))$$

tal que

$$\begin{cases} \dfrac{dW}{dt}(t) & = & AW(t) \quad \text{em} \quad H, \quad \forall t \geq 0 \\ W(0) & = & W_0 \quad \text{em} \quad H \end{cases} \tag{2.23}$$

Tomando $u = w_1$ e $\delta = w_3$ temos que o par (u, δ) é a única solução do problema (P2) segundo a definição 2.3.1.

□

2.3.2 Via Método de Faedo-Galerkin

Vamos estudar o problema (P2) usando o método construtivo de Faedo-Galerkin.

Teorema 2.3. *Sejam $f, g, h \in C(\overline{\Gamma}_1)$ com f e h funções estritamente positivas e g não negativa. Se $u_0 \in \Big(H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap H^2(\Omega)\Big)$, $u_1 \in H^1_{\Gamma_0}$ e $\delta_0 \in L^2(\Gamma_1)$, então existe uma única solução para o problema (P2), segundo a definição (2.3.1) a qual depende continuamente dos dados iniciais.*

Demonstração: Pelas hipótese sobre as funções f, g e h para todo $x \in \overline{\Gamma_1}$ temos

$$\begin{aligned} 0 < f_0 = \min_{s \in \overline{\Gamma}_1} f(s) \leq f(x) \leq \max_{s \in \overline{\Gamma}_1} f(s) = f_1 \\ 0 \leq g_0 = \min_{s \in \overline{\Gamma}_1} g(s) \leq g(x) \leq \max_{s \in \overline{\Gamma}_1} g(s) = g_1 \\ 0 \leq h_0 = \min_{s \in \overline{\Gamma}_1} h(s) \leq h(x) \leq \max_{s \in \overline{\Gamma}_1} h(s) = h_1 \end{aligned}$$

Sejam $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ um sistema ortonormal e completo em $L^2(\Omega)$, ortogonal e completo em $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ e ortogonal e completo em $\Big(H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap H^2(\Omega)\Big)$ e $\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma sistema ortonormal e completo em $L^2(\Gamma_1)$. Denote por $\mathbb{W}_m = [w_1, \ldots, w_m]$ o subespaço de $\Big(H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap H^2(\Omega)\Big)$ de dimensão finita gerado pelos vetores $w_1, \ldots, w_m$. Analogamente, $\mathbb{Z}_m = [z_1, \ldots, z_m]$ representa o subespaço de $L^2(\Gamma_1)$ gerado pelos vetores $z_1, \ldots, z_m$. A existência de tais sistemas foi discutida no final da seção 1.4 do capítulo 1. Para simplificar a notação denotamos $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t) = u'(x, t)$

PROBLEMA APROXIMADO:

Dado $m \in \mathbb{N}$ queremos encontrar funções

$$\begin{array}{llll} u_m : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{W}_m & \text{e} & \delta_m : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{Z}_m \\ \quad t \longmapsto u_m(t) = \sum_{j=1}^m a_{jm}(t) w_j & & \quad t \longmapsto \delta_m(t) = \sum_{j=1}^m b_{jm}(t) z_j \end{array}$$

tais que:

$$(u''_m(t), w_j) + ((u_m(t), w_j)) - (\delta'_m(t), \gamma_0(w_j))_{\Gamma_1} = 0 \quad , \quad 1 \leq j \leq m \ , \tag{2.24}$$

$$\Big(f\delta''_m(t) + g\delta'_m(t) + h\delta_m(t) + \gamma_0(u'_m(t)), z_j\Big)_{\Gamma_1} = 0 \quad , \quad 1 \leq j \leq m \ , \tag{2.25}$$

$$u_m(0) = u_{0m} = \sum_{j=1}^m \alpha_{jm} w_j \to u_0 \ \text{ em } \ H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap H^2(\Omega) \ , \tag{2.26}$$

$$u'_m(0) = u_{1m} = \sum_{j=1}^m \beta_{jm} w_j \to u_1 \ \text{ em } \ H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \ , \tag{2.27}$$

$$\delta_m(0) = \delta_{0m} = \sum_{j=1}^m \xi_{jm} z_j \to \delta_0 \ \text{ em } \ L^2(\Gamma_1) \ , \tag{2.28}$$

$$\delta'_m(0) = \gamma_1(u_{0m}) \to \gamma_1(u_0) \ \text{ em } \ L^2(\Gamma_1) \ . \tag{2.29}$$

Como foi feito nas preliminares, por meio de uma reordenação do sistema $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, sem perda de generalidade podemos afirmar que $\gamma_1(u_{0m}) \in \mathbb{Z}_m$, ou seja, para todo $m \in \mathbb{N}$ podemos escrever $\delta'_m(0) = \gamma_1(u_{0m}) = \sum_{j=1}^m c_{jm} z_j$.

Por outro lado, levando em conta a ortogonalidade das bases, o problema aproximado se resume em determinar as funções $a_{jm} = a_{jm}(t)$ e $b_{jm} = b_{jm}(t)$ tais que, para $1 \leq j \leq m$, se tenha

$$\begin{array}{l} a''_{jm}(t) + \|w_j\|^2 a_{jm}(t) - \sum_{i=1}^m (z_i, \gamma_0(w_j))_{\Gamma_1} b'_{im}(t) = 0 \ ; \\ \sum_{i=1}^m (fz_i, z_j)_{\Gamma_1} b''_{im}(t) + \sum_{i=1}^m (gz_i, z_j)_{\Gamma_1} b'_{im}(t) + \sum_{i=1}^m (hz_i, z_j)_{\Gamma_1} b_{im}(t) + \sum_{i=1}^m (\gamma_0(w_i), z_j)_{\Gamma_1} a'_{im} = 0 \ ; \\ a_{jm}(0) = (u_0, w_j) \quad , \quad a'_{jm}(0) = (u_1, w_j) \quad , \quad b_{jm}(0) = (\delta_0, z_j) \quad , \quad b'_{jm}(0) = c_{jm} \ . \end{array}$$

Agora, observe que o problema acima pode ser reescrito na forma vetorial

$$AY''(t) + BY'(t) + CY(t) = 0 \ ,$$

$$\text{onde}\, Y(t) = \begin{bmatrix} a_{1m}(t) \\ \vdots \\ a_{mm}(t) \\ b_{1m}(t) \\ \vdots \\ b_{mm}(t) \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} Id_{m\times m} & 0_{m\times m} \\ 0_{m\times m} & \begin{matrix} (f^{\frac{1}{2}}z_1, f^{\frac{1}{2}}z_1)_{\Gamma_1} & \cdots & (f^{\frac{1}{2}}z_m, f^{\frac{1}{2}}z_1)_{\Gamma_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (f^{\frac{1}{2}}z_1, f^{\frac{1}{2}}z_m)_{\Gamma_1} & \cdots & (f^{\frac{1}{2}}z_m, f^{\frac{1}{2}}z_m)_{\Gamma_1} \end{matrix} \end{bmatrix}_{2m\times 2m}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0_{m\times m} & \begin{matrix} -\Big(z_1, \gamma_0(w_1)\Big)_{\Gamma_1} & \cdots & -\Big(z_m, \gamma_0(w_1)\Big)_{\Gamma_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\Big(z_1, \gamma_0(w_m)\Big)_{\Gamma_1} & \cdots & -\Big(z_m, \gamma_0(w_m)\Big)_{\Gamma_1} \end{matrix} \\ \begin{matrix} (\gamma_0(w_1), z_1)_{\Gamma_1} & \cdots & (\gamma_0(w_m), z_1)_{\Gamma_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\gamma_0(w_1), z_m)_{\Gamma_1} & \cdots & (\gamma_0(w_m), z_m)_{\Gamma_1} \end{matrix} & \begin{matrix} (g^{\frac{1}{2}}z_1, g^{\frac{1}{2}}z_1)_{\Gamma_1} & \cdots & (g^{\frac{1}{2}}z_m, g^{\frac{1}{2}}z_1)_{\Gamma_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (g^{\frac{1}{2}}z_1, g^{\frac{1}{2}}z_m)_{\Gamma_1} & \cdots & (g^{\frac{1}{2}}z_m, g^{\frac{1}{2}}z_m)_{\Gamma_1} \end{matrix} \end{bmatrix}_{2m\times 2m}$$

$$C = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \|w_1\| & \cdot & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \|w_m\| \end{matrix} & 0_{m\times m} \\ 0_{m\times m} & \begin{matrix} (h^{\frac{1}{2}}z_1, h^{\frac{1}{2}}z_1)_{\Gamma_1} & \cdots & (h^{\frac{1}{2}}z_m, h^{\frac{1}{2}}z_1)_{\Gamma_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (h^{\frac{1}{2}}z_1, h^{\frac{1}{2}}z_m)_{\Gamma_1} & \cdots & (h^{\frac{1}{2}}z_m, h^{\frac{1}{2}}z_m)_{\Gamma_1} \end{matrix} \end{bmatrix}_{2m\times 2m}$$

Como o conjunto $\{f^{\frac{1}{2}}z_j\}_{1\leq j\leq m}$ é LI, sobre os reais, temos que A é inversível. Consequentemente, da forma vetorial, resulta

$$Y''(t) = DY'(t) + EY(t)$$

onde $D = -[A^{-1}.B]_{2m\times 2m}$ e $C = -[A^{-1}.C]_{2m\times 2m}$. Agora, fazendo $X(t) = \begin{bmatrix} Y(t) \\ Y'(t) \end{bmatrix}_{4m\times 1}$ temos que:

$$X'(t) = \begin{bmatrix} Y(t) \\ Y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{2m\times 2m} & Id_{2m\times 2m} \\ E & D \end{bmatrix}_{4m\times 4m} \begin{bmatrix} Y(t) \\ Y'(t) \end{bmatrix} = F_{4m\times 4m} X(t)$$

e definindo $X_0 = \begin{bmatrix} (\alpha_{jm})_{1\leq j\leq m} \\ (\xi_{jm})_{1\leq j\leq m} \\ (\beta_{jm})_{1\leq j\leq m} \\ (c_{jm})_{1\leq j\leq m} \end{bmatrix}_{4m\times 1}$, chegamos no PVI

$$\begin{cases} X'(t) = FX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

o qual é equivalente ao problema aproximado (2.24)-(2.29), cuja única solução é dada por $X(t) = [e^{Ft}X_0]_{4m\times 1}$, para todo $t \geq 0$. Note que a solução $X = X(t)$ esta globalmente definida e é infinitamente diferenciável.

ESTIMATIVAS A PRIORI

Das equações (2.24) e (2.25) e da linearidade, temos que:

$$(u''_m(t), w) + ((u_m(t), w)) - \Big(\delta'_m(t), \gamma_0(w)\Big)_{\Gamma_1} = 0 \quad , \quad \forall w \in \mathbb{W}_m \ , \tag{2.30}$$

$$\Big(f\delta''_m(t) + g\delta'_m(t) + h\delta_m(t) + \gamma_0(u'_m(t)), z\Big)_{\Gamma_1} = 0 \quad , \quad \forall z \in \mathbb{Z}_m \ . \tag{2.31}$$

Fazendo $w = 2u'_m(t)$ em (2.30) e $z = 2\delta'_m(t)$ em (2.31) e somando as equações resultantes obtemos

$$\frac{d}{dt}\left[|u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2 + |f^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1} + |h^{\frac{1}{2}}\delta_m(t)|^2_{\Gamma_1}\right] = -2|g^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1} \ .$$

Denotando $E_m(t) = |u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2 + |f^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1} + |h^{\frac{1}{2}}\delta_m(t)|^2_{\Gamma_1}$ temos

$$\frac{dE_m}{dt}(t) = -2|g^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1} \leq 0 \ \text{ para todo } \ t > 0 \ .$$

Integrando de 0 a t resulta que

$$E_m(t) \leq E_m(0) \ .$$

Note que

$$\begin{aligned} E_m(0) \ &= |u'_{1m}|^2 + \|u_{0m}\|^2 + |f^{\frac{1}{2}}\gamma_1(u_{0m})|^2_{\Gamma_1} + |h^{\frac{1}{2}}\delta_{0m}|^2_{\Gamma_1} \\ &\leq |u'_{1m}|^2 + \|u_{0m}\|^2 + f_1|\gamma_1(u_{0m})|^2_{\Gamma_1} + h_1|\delta_{0m}|^2_{\Gamma_1} \leq C_1 \ , \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos as convergências (2.26)-(2.29). Aqui $C_1 > 0$ é uma constante que não depende de m e nem de $t \geq 0$. Logo

$$E_m(t) \leq C_3 \ \text{ para todo } m \in \mathbb{N} \text{ e todo } t \geq 0. \tag{2.32}$$

Para concluir nossas estimativas faça t=0 em (2.30) e (2.31) e em seguida considere, respectivamente, $w = u''_m(0)$ e $z = \delta''_m(0)$. Assim

$$|u''_m(0)|^2 + \Big(\Big(u_{0m}, u''_m(0)\Big)\Big) - \Big(\gamma_1(u_{0m}), \gamma_0(u''_m(0))\Big)_{\Gamma_1} = 0 \ , \tag{2.33}$$

$$|f^{\frac{1}{2}}\delta''_m(0)|^2_{\Gamma_1} + \Big(g\gamma_1(u_{0m}), \delta''_m(0)\Big)_{\Gamma_1} + \Big(h\delta_{0m}, \delta''_m(0)\Big)_{\Gamma_1} + \Big(\gamma_0(u_{1m}), \delta''_m(0)\Big)_{\Gamma_1} = 0 \ . \tag{2.34}$$

Aplicando a fórmula de Green, dada pela equação (1.20), em (2.33) temos

$$\begin{aligned} |u''_m(0)|^2 \ &= -\Big(\Big(u_{0m}, u''_m(0)\Big)\Big) + \Big(\gamma_1(u_{0m}), \gamma_0(u''_m(0))\Big)_{\Gamma_1} \\ &= \Big(\Delta u_{0m}, u''_m(0)\Big) - \Big(\gamma_1(u_{0m}), \gamma_0(u''_m(0))\Big)_{\Gamma_1} + \Big(\gamma_1(u_{0m}), \gamma_0(u''_m(0))\Big)_{\Gamma_1} \\ &\leq |\Delta u_{0m}| \ |u''_m(0)| \end{aligned}$$

ou seja

$$|u''_m(0)| \leq |\Delta u_{0m}| \leq \|u_{0m}\|_{H^2(\Omega)} \leq C_2 \ , \tag{2.35}$$

onde na última desigualdade usamos que $u_{0m} \to u_0$ em $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e C_2 é uma constante não depende de t e nem de m. Por outro lado, de (2.34) temos

$$\begin{aligned}|f^{\frac{1}{2}}\delta''_m(0)|^2_{\Gamma_1} &= -\Big(g\gamma_1(u_{0m}),\delta''_m(0)\Big)_{\Gamma_1} - \Big(h\delta_{0m},\delta''_m(0)\Big)_{\Gamma_1} - \Big(\gamma_0(u_{1m}),\delta''_m(0)\Big)_{\Gamma_1}\\ &\le g_1|\gamma_1(u_{0m})|_{\Gamma_1}|\delta''_m(0)|_{\Gamma_1} + h_1|\delta_{0m}|_{\Gamma_1}|\delta''_m(0)|_{\Gamma_1} + |\gamma_0(u_{1m})|_{\Gamma_1}|\delta''_m(0)|_{\Gamma_1}\ .\end{aligned}$$

Logo

$$|\delta''_m(0)|_{\Gamma_1} \le \frac{g_1}{f_0}|\gamma_1(u_{0m})|_{\Gamma_1} + \frac{h_1}{f_0}|\delta_{0m}|_{\Gamma_1} + \frac{1}{f_0}|\gamma_0(u_{1m})|_{\Gamma_1}\ .$$

Note que $\gamma_1(u_{0m}) \to \gamma_1(u_0)$ em $L^2(\Gamma)$, $\delta_{0m} \to \delta_0$ em $L^2(\Gamma_1)$ e $\gamma_0(u_{1m}) \to \gamma_0(u_1)$ em $L^2(\Gamma)$. Assim, existe uma constante C_3 que não depende de t e m tal que

$$|\delta''_m(0)|_{\Gamma_1} \le C_3\ . \tag{2.36}$$

Agora vamos derivar o problema aproximado com respeito a t chegando á

$$\begin{aligned}&(u'''_m(t),w) + ((u'_m(t),w)) - \Big(\delta''_m(t),\gamma_0(w)\Big)_{\Gamma_1} = 0 \quad \forall w \in \mathbb{W}_m\ ,\\ &\Big(f\delta'''_m(t) + g\delta''_m(t) + h\delta'_m(t) + \gamma_0(u''_m(t)),z\Big)_{\Gamma_1} = 0 \quad \forall z \in \mathbb{Z}_m\ .\end{aligned}$$

Fazendo $w = 2u''_m(t)$, $z = 2\delta''_m(t)$ e somando as equações resultantes temos

$$\frac{d}{dt}\Big[|u''_m(t)|^2 + \|u'_m(t)\|^2 + |f^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1} + |h^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}\Big] = -2|g^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1} \le 0\ .$$

Integrando de 0 a t, obtemos:

$$\begin{aligned}|u''_m(t)|^2 + \|u'_m(t)\|^2 + &|f^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1} + |h^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}\\ &\le |u''_m(0)|^2 + \|u'_m(0)\|^2 + |f^{\frac{1}{2}}\delta''_m(0)|^2_{\Gamma_1} + |h^{\frac{1}{2}}\delta'_m(0)|^2_{\Gamma_1} \le C_4\ .\end{aligned} \tag{2.37}$$

onde na última desigualdade usamos as convergências (2.27), (2.29) e as limitações (2.35), (2.36). Observe que C_4 é uma constante que não depende de t e nem de m.

PASSAGEM AO LIMITE

Das estimativas (2.32),(2.37) e fixado arbitrariamente $T > 0$ obtemos que:

$$\begin{aligned}
&\Big(u_m\Big)_{m\in\mathbb{N}} \text{ e } \Big(u'_m\Big)_{m\in\mathbb{N}} \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) \equiv \Big[L^1\Big(0,T;[H^1_{\Gamma_0}(\Omega)]'\Big)\Big]';\\
&\Big(u''_m\Big)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \equiv \Big[L^1\Big(0,T;[L^2(\Omega)]'\Big)\Big]';\\
&\Big(\delta_m\Big)_{m\in\mathbb{N}},\ \Big(\delta'_m\Big)_{m\in\mathbb{N}} \text{ e } \Big(\delta''_m\Big)_{m\in\mathbb{N}} \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)) \equiv \Big[L^1\Big(0,T;[L^2(\Gamma_1)]'\Big)\Big]'
\end{aligned}$$

Logo, tomando tantas subsequências quantas forem necessárias, temos que existem uma subsequência de $\Big(u_m\Big)_{m\in\mathbb{N}}$, que por simplicidade ainda denotaremos por $\Big(u_m\Big)_{m\in\mathbb{N}}$, uma subsequência de $\Big(\delta_m\Big)_{m\in\mathbb{N}}$, que também por simplificação mantemos a mesma notação, e funções $u, v_1, v_2, \delta, y_1, y_2$ tais que

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) \ , \tag{2.38}$$

$$u'_m \overset{*}{\rightharpoonup} v_1 \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) \ , \tag{2.39}$$

$$u''_m \overset{*}{\rightharpoonup} v_2 \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \ , \tag{2.40}$$

$$\delta_m \overset{*}{\rightharpoonup} \delta \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)) \ , \tag{2.41}$$

$$\delta'_m \overset{*}{\rightharpoonup} y_1 \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)) \ , \tag{2.42}$$

$$\delta''_m \overset{*}{\rightharpoonup} y_2 \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)) \ . \tag{2.43}$$

Primeiramente vamos mostrar que $v_1 = u'$, $v_2 = u''$, $y_1 = \delta'$ e $y_2 = \delta''$. De fato, de (2.38)

$$\Big\langle u_m, \Phi \Big\rangle_{\Big[L^1(0,T;[H^1_{\Gamma_0}(\Omega)]')\Big]' \times L^1(0,T;[H^1_{\Gamma_0}(\Omega)]')} \longrightarrow \Big\langle u, \Phi \Big\rangle_{\Big[L^1(0,T;[H^1_{\Gamma_0}(\Omega)]')\Big]' \times L^1(0,T;[H^1_{\Gamma_0}(\Omega)]')} \tag{2.44}$$

para toda $\Phi \in L^1(0,T;[H^1_{\Gamma_0}(\Omega)]')$.

Agora veja que podemos ter $L^1(0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) \hookrightarrow L^1(0,T;[H^1_{\Gamma_0}(\Omega)]')$. Para tal defina

$$\begin{aligned}
F : L^1(0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) &\longrightarrow L^1(0,T;[H^1_{\Gamma_0}(\Omega)]')\\
\psi \quad &\longmapsto \quad F(\psi) : (0,T) \longrightarrow \Big[H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\Big]'\\
&\qquad\qquad t \longmapsto F(\psi)(t) : H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \xi \longmapsto \langle F(\psi)(t), \xi \rangle = ((\psi(t), \xi))
\end{aligned}$$

Observe que F é linear, contínua e injetora. Portanto fazendo em particular $\Phi = F(\psi)$ temos

$$\Big\langle u_m, F(\psi)\Big\rangle_{\Big[L^1(0,T;[H^1_{\Gamma_0}(\Omega)]')\Big]'\times L^1(0,T;[H^1_{\Gamma_0}(\Omega)]')} \longrightarrow \Big\langle u, F(\psi)\Big\rangle \ ,$$
$$\int_0^T \Big\langle F(\psi)(t), u_m(t)\Big\rangle_{[H^1_{\Gamma_0}(\Omega)]'\times H^1_{\Gamma_0}(\Omega)} dt \longrightarrow \int_0^T \Big\langle F(\psi)(t), u(t)\Big\rangle_{[H^1_{\Gamma_0}(\Omega)]'\times H^1_{\Gamma_0}(\Omega)} dt \ .$$

Logo

$$\int_0^T \Big(\Big(u_m(t), \psi(t)\Big)\Big)dt \longrightarrow \int_0^T \Big(\Big(u(t), \psi(t)\Big)\Big)dt \quad , \quad \forall\ \psi \in L^1(0,T; H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) \ .$$

Também podemos ver que se $u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T; H^1_{\Gamma_0}(\Omega))$ então $u_m \to u$ em $\mathcal{D}'(Q)$. Com efeito, para $\psi \in \mathcal{D}(Q)$ podemos definir

$$\begin{aligned} G(\psi)(t) : H^1_{\Gamma_0}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi \quad &\longmapsto \Big\langle G(\psi)(t), \xi\Big\rangle = \Big(\psi(t), \xi\Big) \end{aligned}$$

É fácil ver que $G(\psi)(t) \in \Big[H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\Big]'$ e mais $G(\psi) \in L^1\Big(0,T; [H^1_{\Gamma_0}(\Omega)]'\Big)$. Logo, fazendo em particular $\Phi = G(\psi)$ em (2.44) resulta que

$$\begin{aligned} &\langle u_m, G(\psi)\rangle \longrightarrow \langle u, G(\psi)\rangle \\ \Rightarrow &\int_0^T \langle G(\psi)(t), u_m(t)\rangle_{[H^1_{\Gamma_0}(\Omega))]'\times H^1_{\Gamma_0}(\Omega)} dt \longrightarrow \int_0^T \langle G(\psi)(t), u(t)\rangle_{[H^1_{\Gamma_0}(\Omega))]'\times H^1_{\Gamma_0}(\Omega)} dt \\ \Rightarrow &\int_0^T \Big(\psi(t), u_m(t)\Big)dt \longrightarrow \int_0^T \Big(\psi(t), u(t)\Big)dt \\ \Rightarrow &\int_Q u_m(x,t)\psi(x,t)dxdt \longrightarrow \int_Q u(x,t)\psi(x,t)dxdt \quad , \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(Q) \ , \end{aligned}$$

o que prova que $u_m \to u$ em $D'(Q)$. Resumindo, se $u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T; H^1_{\Gamma_0}(\Omega))$ então

$$\begin{aligned} &u_m \to u \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(Q) \ \text{ e} \\ &\int_0^T \Big(\Big(u_m(t), \psi(t)\Big)\Big)dt \longrightarrow \int_0^T \Big(\Big(u(t), \psi(t)\Big)\Big)dt \quad , \quad \forall\ \psi \in L^1(0,T; H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) \end{aligned} \tag{2.45}$$

De (2.39), por um processo análogo resulta que $u'_m \to v_1$ em $\mathcal{D}'(Q)$ e pela continuidade do operador de derivação em $\mathcal{D}'(Q)$ temos também $u'_m \to u'$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Então da unicidade do limite obtemos $u' = v_1$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Desde que $u', v_1 \in L^\infty(0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega))$, então a igualdade se dá neste espaço. Da mesma forma de (2.40)-(2.43) resulta que $u'' = v_2$, $\delta' = y_1$, $\delta'' = y_2$ e mais ainda

$$\int_0^T \Big(u''_m(t), \psi(t)\Big)dt \longrightarrow \int_0^T \Big(u''(t), \psi(t)\Big)dt \quad \forall\psi \in L^1\Big(0,T;L^2(\Omega)\Big) \ , \tag{2.46}$$

$$\int_0^T \Big(h\delta_m(t), \psi(t)\Big)_{\Gamma_1} dt \longrightarrow \int_0^T \Big(h\delta(t), \psi(t)\Big)_{\Gamma_1} dt \quad \forall\psi \in L^1\Big(0,T;L^2(\Gamma_1)\Big) \ , \tag{2.47}$$

$$\int_0^T \Big(g\delta'_m(t), \psi(t)\Big)_{\Gamma_1} dt \longrightarrow \int_0^T \Big(g\delta'(t), \psi(t)\Big)_{\Gamma_1} dt \quad \forall\psi \in L^1\Big(0,T;L^2(\Gamma_1)\Big) \ , \tag{2.48}$$

$$\int_0^T \Big(f\delta''_m(t), \psi(t)\Big)_{\Gamma_1} dt \longrightarrow \int_0^T \Big(f\delta''(t), \psi(t)\Big)_{\Gamma_1} dt \quad \forall\psi \in L^1\Big(0,T;L^2(\Gamma_1)\Big) \ , \tag{2.49}$$

Para passar o limite no Problema Aproximado precisamos ainda de mais esta convergência

$$\int_0^T \Big(\gamma_0(u'_m)(t), \psi(t)\Big)_{\Gamma_1} dt \longrightarrow \int_0^T \Big(\gamma_0(u')(t), \psi(t)\Big)_{\Gamma_1} dt \quad , \quad \forall\psi \in L^1\Big(0,T;L^2(\Gamma_1)\Big) \ , \tag{2.50}$$

que se verifica de forma análoga as anteriores, porém usando a continuidade da aplicação traço.

Agora podemos passar o limite no problema aproximado. Fixando $j \in \mathbb{N}$, multiplicando as equações (2.24) e (2.25) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 a T, obtemos

$$\int_0^T (u''_m(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((u_m(t), w_j))\theta(t)dt - \int_0^T (\delta'_m(t), \gamma_0(w_j))_{\Gamma_1}\theta(t)dt = 0 \quad \forall m \geq j \ ,$$
$$\int_0^T \Big(f\delta''_m(t) + g\delta'_m(t) + h\delta_m(t) + \gamma_0(u'_m(t)), z_j\Big)_{\Gamma_1}\theta(t)dt = 0 \quad \forall m \geq j \ .$$

Tomando o limite quando $m \to \infty$ e usando as convergências (2.45)-(2.50) temos

$$\int_0^T (u''(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((u(t), w_j))\theta(t)dt - \int_0^T (\delta'(t), \gamma_0(w_j))_{\Gamma_1}\theta(t)dt = 0 \text{ para todo } j \in \mathbb{N},$$
$$\int_0^T \Big(f\delta''(t) + g\delta'(t) + h\delta(t) + \gamma_0(u'(t)), z_j\Big)_{\Gamma_1}\theta(t)dt = 0 \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Por densidade resulta que

$$\int_0^T (u''(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T ((u(t), w))\theta(t)dt - \int_0^T (\delta'(t), \gamma_0(w))_{\Gamma_1}\theta(t)dt = 0 \ , \quad (2.51)$$

$$\int_0^T \Big(f\delta''(t) + g\delta'(t) + h\delta(t) + \gamma_0(u'(t)), z\Big)_{\Gamma_1}\theta(t)dt = 0 \quad (2.52)$$

para todo $w \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$, $z \in L^2(\Gamma_1)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$.

De (2.51) podemos passar para $\mathcal{D}'(Q)$ considerando em particular $w \in \mathcal{D}(\Omega)$ e tendo em vista que $\mathcal{D}(\Omega) \otimes \mathcal{D}(0, T)$ é denso em $\mathcal{D}(Q)$. Logo obtemos

$$u'' - \Delta u = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(Q) \ .$$

como $u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \subset L^2(Q)$ temos que $\Delta u \in L^2(Q)$ e

$$u''(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \quad \text{q.s. em} \ \ Q \quad (2.53)$$

Por outro lado, aplicando o Lema de Du Bois Raimond em (2.52) concluímos

$$\Big(f\delta''(t) + g\delta'(t) + h\delta(t) + \gamma_0(u'(t)), z\Big)_{\Gamma_1} = 0 \ \text{ q.s. em } [0, T] \text{ e para todo } z \in L^2(\Gamma_1) \ ,$$

consequentemente

$$f(x)\delta''(x, t) + g(x)\delta'(x, t) + h(x)\delta(x, t) + \gamma_0(u')(x, t) = 0 \quad \text{q.s. em} \ \ \Sigma_1 \ .$$

Como $\Delta u(t) \in L^2(\Omega)$ para quase todo $t \in [0, T]$, segue que $u(t) \in \mathcal{H}(\Delta, \Omega)$ para quase todo $t \in [0, T]$. Além disso, multiplicando (2.53) por $w \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ e integrando em Ω obtemos

$$(u''(t), w) - (\Delta u(t), w) = 0 \ \text{ para quase todo } t \in [0, T]$$

Aplicando a identidade de Green generalizada (1.21) resulta que

$$(u''(t), w) - ((u(t), w)) - \langle \gamma_1(u(t)), \gamma_0(w) \rangle = 0 \quad (2.54)$$

Por outro lado de (2.51) vemos que

$$(u''(t), w) + ((u(t), w)) - (\delta'(t), \gamma_0(w))_{\Gamma_1} = 0 \;\text{ para quase todo }\; t \in [0, T] \text{ e } \forall w \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$$

comparando a equação acima com a equação (2.54) concluímos que

$$\Big\langle \gamma_1(u(t)), \gamma_0(w) \Big\rangle = \Big(\delta'(t), \gamma_0(w)\Big)_{\Gamma_1} \;\text{ para todo }\; w \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \ .$$

CONDIÇÕES INICIAIS

Agora vamos verificar as condições iniciais. Das etapas anteriores sabemos que

$$u \in L^\infty(0, T; H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) \qquad \delta \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1)) \ , \tag{2.55}$$

$$u' \in L^\infty(0, T; H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) \qquad \delta' \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1)) \ , \tag{2.56}$$

$$u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \qquad \delta'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1)) \ . \tag{2.57}$$

Logo $u \in C\Big([0, T]; H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\Big)$, $u' \in C\Big([0, T]; L^2(\Omega)\Big)$ e $\delta, \delta' \in C\Big([0, T]; L^2(\Gamma_1)\Big)$, ou ainda, $u \in C\Big([0, T]; H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\Big) \cap C^1\Big([0, T]; L^2(\Omega)\Big)$ e $\delta \in C^1\Big([0, T]; L^2(\Gamma_1)\Big)$. Dessa forma faz sentido calcular as soluções e suas derivadas com relação a t em $t = 0$. Vamos demonstrar apenas que $u(0) = u_0$ e as outras condições iniciais seguem de modo análogo. Com efeito, seja $\theta \in C^1\Big([0, T]\Big)$ tal que $\theta(T) = 0$ e $\theta(0) = 1$. De (2.39) segue que

$$\int_0^T (u'_m, w)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (u'(t), w)\theta(t)dt \quad , \quad \forall w \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \ .$$

Integrando por partes

$$(u_m(t), w)\theta(t)\Big|_0^T - \int_0^T (u_m, w)\theta'(t)dt \longrightarrow (u(t), w)\theta(t)\Big|_0^T - \int_0^T (u(t), w)\theta'(t)dt \ ,$$

ou seja

$$-(u_{0m}, w) - \int_0^T (u_m, w)\theta'(t)dt \longrightarrow -(u(0), w) - \int_0^T (u(t), w)\theta'(t)dt \ .$$

Por outro lado, de (2.26) e (2.38) temos

$$-(u_{0m},w)-\int_0^T(u_m,w)\theta'(t)dt\longrightarrow-(u_0,w)-\int_0^T(u(t),w)\theta'(t)dt\ .$$

Pela unicidade do limite

$$\Big(u_0-u(0),w\Big)=0\quad,\quad\forall w\in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\ ,$$

de onde resulta que $u(0)=u_0$. Da mesma forma prova-se que $u'(0)=u_1$, $\delta(0)=\delta_0$ e $\delta'(0)=\gamma_1(u_0)$ e combinando a passagem do limite com as condições iniciais conclui-se a demonstração da existência de solução do problema (P2) segundo a definição 2.3.1.

UNICIDADE

Suponha que (u_1,δ_1) e (u_2,δ_2) são soluções do problema (P2) segundo a definição 2.3.1 e faça $u=u_1-u_2$ e $\delta=\delta_1-\delta_2$. Logo $u,u'\in L^\infty(0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega))$, $u''\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, $\delta,\delta',\delta''\in L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1))$, e mais

$$u''(x,t)-\Delta u(x,t)=0\text{ q.s. em }Q\ ,$$
$$f(x)\delta''(x,t)+g(x)\delta'(x,t)+h(x)\delta(x,t)+\gamma_0(u')(x,t)=0\text{ q.s. em }\Sigma_1\ ,$$
$$\Big\langle\gamma_1(u(t)),\gamma_0(\psi)\Big\rangle=\Big(\delta(t),\gamma_0(\psi)\Big)_{\Gamma_1}\text{ q.s. em }(0,T)\text{ e para todo }\psi\in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\ ,$$
$$u(x,0)=u'(x,0)=0\ \text{ para quase todo }\ x\in\Omega\ ,\tag{2.58}$$
$$\delta(x,0)=\delta'(x,0)=0\ \text{ para quase todo }\ x\in\Gamma_1\ .\tag{2.59}$$

De modo análogo aos cálculos feitos no início da seção 2.2, quando introduzimos a função energia $E=E(t)$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\Big[|u'(t)|^2+\|u(t)\|^2+|f^{\frac12}\ \delta'(t)|^2_{\Gamma_1}+|h^{\frac12}\ \delta(t)|^2_{\Gamma_1}\Big]=-2|g^{\frac12}\ \delta'(t)|^2_{\Gamma_1}\ .$$

Assim, integrando de 0 a $t\in[0,T]$ e usando as igualdades (2.58) e (2.59) temos que

$$|u'(t)|^2+\|u(t)\|^2+|f^{\frac12}\ \delta'(t)|^2_{\Gamma_1}+|h^{\frac12}\ \delta(t)|^2_{\Gamma_1}\le 0\ \text{ q.s. em }\ [0,T]\ .$$

Portanto $u(x,t) = 0$ quase sempre em Q e $\delta(x,t) = 0$ quase sempre em Σ_1. Consequentemente as soluções (u_1, δ_1) e (u_2, δ_2) são as mesmas, o que prova a unicidade.

A dependência contínua dos dados iniciais decorre diretamente da seguinte desigualdade

$$|u'(t)|^2 + \|u(t)\|^2 + |f^{\frac{1}{2}}\ \delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + |h^{\frac{1}{2}}\ \delta(t)|^2_{\Gamma_1} \leq |u_1|^2 + \|u_0\|^2 + |f^{\frac{1}{2}}\ \gamma_1(u_0)|^2_{\Gamma_1} + |h^{\frac{1}{2}}\ \delta_0|^2_{\Gamma_1}\ .$$

$\square$

2.4 Teoria de existência no Espaço W

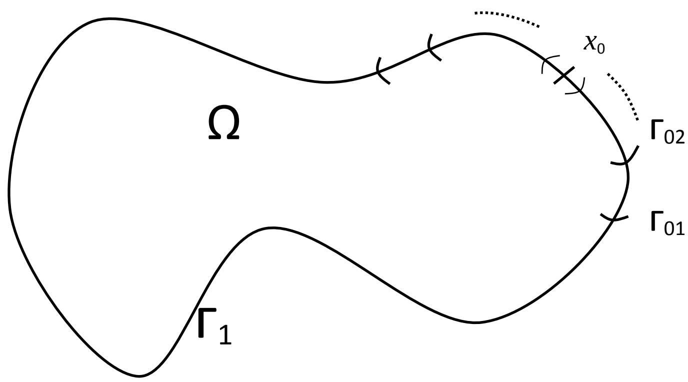
Nosso objetivo agora é estender a condição de fronteira da acústica para toda fronteira, ou seja, resolver o problema (P1) como limite de soluções do problema (P2). É necessário impor restrições sobre a geometria de Ω, eliminando os domínios do tipo anel. Logo em toda esta seção estamos considerando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, aberto, limitado, simplesmente conexo com fronteira Γ bem regular. No problema anterior tínhamos condição homogênea de Dirichlet em uma parte de Γ, denotada por Γ_0.

Vamos proceder da seguinte forma:
Fixe $x_0 \in \Gamma$ e para cada $m \in \mathbb{N}$, seja Γ_{0m} um subconjunto conexo de Γ tal que

$$\begin{aligned}
&\mu(\Gamma_{0m}) > 0 \quad , \quad \forall m \in \mathbb{N};\\
&\Gamma_{0(m+1)} \subset \Gamma_{0m} \quad , \quad \forall m \in \mathbb{N};\\
&\lim_{m\to\infty}\ \mu(\Gamma_{0m}) = 0;\\
&\bigcap_{m=1}^{\infty} \Gamma_{0m} = \{x_0\}.
\end{aligned}$$

Ou seja, $(\Gamma_{0m})_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos encaixante, de medida positiva, com $\mu(\Gamma_{0m}) \to 0$ e “fechando em x_0”.

Defina $V_m = \{u \in H^1(\Omega); \gamma_0(u) = 0$ q.s. em $\Gamma_{0m}\}$ e $V_\infty = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} V_m$. Agora considere



$W = \overline{V_\infty}^{H^1(\Omega)}$. Observe que W é um subespaço fechado de $H^1(\Omega)$ e

$$H_0^1(\Omega) \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_\infty \subset W \subset H^1(\Omega) \ .$$

Também podemos ver que W é igual ao fecho do conjunto $\{u \in C^1(\overline{\Omega});\ u(x_0) = 0\}$ na norma de $H^1(\Omega)$, isto é

$$W = \overline{\{u \in C^1(\overline{\Omega});\ u(x_0) = 0\}}^{H^1(\Omega)} \ .$$

Deste fato resulta que W só depende do ponto x_0 fixado em Γ e existe uma constante C_p que só depende da medida de Ω tal que

$$|w|^2 \leq C_p \|w\|^2 \ \ \forall\ w \in W \ ,$$

ou seja, no espaço W vale a desigualdade de Poincaré e portanto $\|\cdot\|$ é uma norma em W, equivalente a norma induzida de $H^1(\Omega)$. Nesta seção o conceito de solução para o problema (P1) é dada por:

Definição 2.4.1. *Dados $u_0 \in \Big(W \cap H^2(\Omega)\Big)$, $u_1 \in W$ e $\delta_0 \in L^2(\Gamma)$, uma solução do problema (P1) é um par de funções (u, δ) na classe:*

$$u, u_t \in L^\infty(0,T;W) \ , \ u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \ , \ u(t) \in \mathcal{H}(\Delta,\Omega) \ q.s. \ em \ [0,T];$$
$$\delta, \delta_t, \delta_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2(\Gamma))$$

tais que

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad q.s. \ em \quad \Omega \times (0,T)$$
$$f\delta_{tt} + g\delta_t + h\delta + \gamma_0(u_t) = 0 \quad q.s. \ em \quad \Gamma \times (0,T)$$
$$\Big\langle \gamma_1(u)(t), \gamma_0(v) \Big\rangle = (\delta_t(t), \gamma_0(v))_\Gamma \quad q.s. \ em \ (0,T) \ e \ para \ todo \ v \in W$$
$$u(0) = u_0 \quad , \quad u_t(0) = u_1 \quad , \quad \delta(0) = \delta_0 \quad e \quad \delta_t(0) = \gamma_1(u_0)$$

Dado o conceito de solução do problema (P1), podemos enunciar e demonstrar o teorema de existência e unicidade.

Teorema 2.4. *Sejam $f, g, h \in C(\Gamma)$ com f e h funções estritamente positivas e g não negativa. Se $u_0 \in \Big(W \cap H^2(\Omega)\Big)$, $u_1 \in W$ e $\delta_0 \in L^2(\Gamma)$, então existe uma única solução para o problema (P1), segundo a Definição 2.4.1, que depende continuamente dos dados iniciais.*

Demonstração: Veja que para cada $m \in \mathbb{N}$ a terna $\Big(\Omega, \Gamma_{0m}, \Gamma_{1m}\Big)$, onde $\Gamma_{1m} = \Gamma \setminus \Gamma_{0m}$, está nas condições da seção 1.4. Assim a ideia é considerar para cada $m \in \mathbb{N}$, o problema (P2) com condições de Dirichlet homogênea em Γ_{0m} e condição da acústica na parte Γ_{1m}, aplicar o Teorema 2.3 obtendo soluções (u_m, δ_m) e por fim, verificarmos que tais soluções (u_m, δ_m) convergem para (u, δ) solução do problema (P1) segundo a Definição 2.4.1.

Sejam $\{u_{0m}\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{u_{1m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{\delta_{0m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ sequências tais que

$$u_{0m} \in \Big(V_m \cap H^2(\Omega)\Big) \ \text{ e } \ u_{0m} \to u_0 \ \text{ em } \ \Big(W \cap H^2(\Omega)\Big);$$
$$u_{1m} \in V_m \ \text{ e } \ u_{1m} \to u_1 \ \text{ em } \ W;$$
$$\delta_{0m} = \delta_0 \mid_{\Gamma_{1m}} \in L^2(\Gamma_{1m}) \ \text{ e } \ \widetilde{\delta}_{0m} \to \delta_0 \ \text{ em } \ L^2(\Gamma);$$

onde $\widetilde{\delta}_{0m}$ é visto em $L^2(\Gamma)$ como sendo a extensão de δ_{0m} zero fora de Γ_{1m}.

Note que para cada $m \in \mathbb{N}$, $(u_{0m}, u_{1m}, \delta_{0m})$ são condições iniciais satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.3, logo para cada $m \in \mathbb{N}$ existe um único par de funções (u_m, δ_m) de forma que

$$u_m, u_m' \in L^\infty(0,T;V_m),\ u_m'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\ u_m(t) \in \mathcal{H}(\Delta,\Omega) \text{ q.s. em } (0,T);$$

$$\delta_m, \delta_m', \delta_m'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_{1m}));$$

$$u_m'' - \Delta u_m = 0 \text{ q.s. em } \Omega \times (0,T); \tag{2.60}$$

$$f\delta_m'' + g\delta_m' + h\delta_m + \gamma_0(u_m') = 0 \text{ q.s. em } \Gamma_{1m} \times (0,T); \tag{2.61}$$

$$\Big\langle \gamma_1(u_m)(t), \gamma_0(v) \Big\rangle = (\delta_m'(t), \gamma_0(v))_\Gamma \quad \text{q.s. em } (0,T) \text{ e para todo } v \in V_m;$$

$$u_m(0) = u_{0m} \ \ , \ \ u_m'(0) = u_{1m} \ \ , \ \ \delta_m(0) = \delta_{0m} \ \text{ e } \ \delta_m'(0) = \gamma_1(u_{0m}) \ .$$

Por simplificação denotamos $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = u'(x,t)$. Por meio de cálculos análogos aos realizados nas estimativas a priori da demonstração do Teorema 2.3, obtemos que

$$|u_m'(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2 + |f^{\frac{1}{2}}\delta_m'(t)|_\Gamma^2 + |h^{\frac{1}{2}}\delta_m(t)|_\Gamma^2 \le C_1$$

e

$$|u_m''(t)|^2 + \|u_m'(t)\|^2 + |f^{\frac{1}{2}}\delta_m''(t)|_\Gamma^2 + |h^{\frac{1}{2}}\delta_m'(t)|_\Gamma^2 \le C_2 \ ,$$

onde C_1 e C_2 são constantes que não dependem de t e nem de m.

Logo, como anteriormente:

$$\Big(u_m\Big)_{m\in\mathbb{N}} \text{ e } \Big(u_m'\Big)_{m\in\mathbb{N}} \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T;W) \equiv \Big[L^1\Big(0,T;[W]'\Big)\Big]' \ ,$$
$$\Big(u_m''\Big)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \equiv \Big[L^1\Big(0,T;[L^2(\Omega)]'\Big)\Big]' \ ,$$
$$\Big(\delta_m\Big)_{m\in\mathbb{N}} \ , \ \Big(\delta_m'\Big)_{m\in\mathbb{N}} \text{ e } \Big(\delta_m''\Big)_{m\in\mathbb{N}} \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T;L^2(\Gamma)) \equiv \Big[L^1\Big(0,T;[L^2(\Gamma)]'\Big)\Big]' \ ,$$

Passando a tantas subsequências quantas forem necessárias, temos que existem u e δ tais que

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T;W)$$
$$u_m' \overset{*}{\rightharpoonup} u' \text{ em } L^\infty(0,T;W)$$
$$u_m'' \overset{*}{\rightharpoonup} u'' \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$
$$\delta_m \overset{*}{\rightharpoonup} \delta \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Gamma))$$

$$\delta'_m \overset{*}{\rightharpoonup} \delta' \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Gamma))$$
$$\delta''_m \overset{*}{\rightharpoonup} \delta'' \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Gamma))$$

Com raciocínio análogo ao Teorema 2.3, efetuamos a passagem ao limite provando assim que (u,δ) é a única solução do problema (P1), segundo a Definição 2.4.1, o qual depende continuamente dos dados iniciais. Como queríamos demonstrar. □

2.5 Existência e Unicidade de Solução para Problemas com Estabilização Uniforme

Nos capítulos anteriores estudamos a dedução física do problema de valores iniciais e de fronteira para equação da onda, num domínio Ω, com condição de fronteira da acústica, bem como teoria de existência e unicidade de solução. Tal problema é um sistema acoplado envolvendo funções $u = u(x,t)$ e $\delta = \delta(x,t)$ que representam, respectivamente, a velocidade potencial de um fluido, numa região Ω, o qual se movimenta pela ação de ondas acústicas e o deslocamento na direção normal dos pontos da fronteira. Veja os problemas (P1) e (P2). Na seção 2.2 do Capítulo 2, introduzimos a energia associada ao sistema e vimos que ela é uma função não crescente e, se $g \equiv 0$ a energia é constante $\Big(E(t) = E(0),\ t \geq 0\Big)$.

Uma questão crucial, associada ao estudo de problema de valores iniciais e de fronteira para equação da onda, é investigar o decaimento da energia, especialmente sob que condições temos taxas de decaimento uniforme para a energia do sistema. Nesta direção, já em [4] J. Thomas Beale provou que não há taxa de decaimento exponencial para a energia, acima mencionada, mesmo quando $g(x) > 0$, $\forall x \in \Gamma$. Assim só podemos ter taxa de decaimento uniforme se modificarmos o problema, acrescentando termos dissipativo (damping), na primeira equação (1.14), atuando no interior do domínio Ω, ou nas equações (1.15) e (1.16), atuando na fronteira Γ.

Outra possibilidade para que tenhamos estabilidade uniforme é fazer considerações físicas distintas daquelas do Capítulo 1 e obter condições de fronteira da acústica um pouco diferente das estabelecidas pelas equações (1.14)-(1.16). Logo suponha agora que a fronteira é porosa e parte dela possua porosidade variável modelada por

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = k(x)\delta_t \ \text{ em } \ \Gamma_1 \times (0,\infty) \ ,$$

onde $k = k(x)$ é uma função não negativa. Também admita que o material que compõe a fronteira é muito mais leve do que o fluido passando no interior. Resultando que a massa da superfície é desprezível e assim $f \equiv 0$. Portanto as invés da equação (1.15) obtemos a equação de primeira ordem no tempo

$$g(x)\delta_t + h(x)\delta = -u_t \ \text{ em } \ \Gamma_1 \times (0,\infty) \ .$$

Por fim admitindo ainda uma força, proporcional a velocidade potencial, atuando no interior de Ω chegamos a seguinte equação

$$u_{tt} - \Delta u + \alpha(x)u = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times (0,\infty) \ ,$$

onde $\alpha = \alpha(x)$ é uma função definida em Ω, a priori sem qualquer restrição no seu sinal.

Resumindo nossas considerações, vamos estudar a existência e unicidade de solução e, mais adiante a estabilização uniforme do seguinte problema

$$(\text{P3}) \begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \alpha(x)u(x,t) = 0 \quad \text{para } \ x \in \Omega \text{ e } t > 0; \\ u(x,t) = 0 \ \text{ para } \ x \in \Gamma_0 \text{ e } t > 0; \\ g(x)\delta_t(x,t) + h(x)\delta(x,t) = -u_t(x,t) \quad \text{para } \ x \in \Gamma_1 \text{ e } t > 0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = k(x)\delta_t(x,t) \quad \text{para } \ x \in \Gamma_1 \text{ e } t > 0; \\ u(x,0) = u_0(x) \ \ , \ \ u_t(x,0) = u_1(x) \quad \text{para } \ x \in \Omega; \\ \delta(x,0) = \delta_0(x) \ \ , \ \ \delta_t(x,0) = \dfrac{1}{k(x)}\dfrac{\partial u_0}{\partial \nu}(x) \quad \text{para } \ x \in \Gamma_1. \end{cases}$$

onde $\alpha, u_0, u_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g, h, k, \delta_0 : \Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas.

Para o problema (P3) esperamos ter estabilização uniforme da energia associada, entretanto, é importante notar que os estudos sobre existência e unicidade de solução dos problemas (P1) e (P2) não se aplicam. Lembre-se que nos estudos realizados sobre os problemas (P1) e (P2) tínhamos f estritamente positiva. Logo antes do estudo sobre a estabilização uniforme, primeiro vamos provar a existência e unicidade de solução do problema (P3). Veja [10] e [14]. Para isso segue a definição de solução do problema (P3).

Definição 2.5.1. *Dados $u_0 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Delta, \Omega)$, $u_1 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ e $\delta_0 \in L^2(\Gamma_1)$, uma solução do problema (P3) é um par de funções (u, δ) na classe:*

$$\begin{aligned} & u \in C^1\Big([0,\infty); H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\Big) \cap C^2\Big([0,\infty); L^2(\Omega)\Big) \quad e \quad u(t) \in \mathcal{H}(\Delta, \Omega); \\ & \delta \in C^1\Big([0,\infty); L^2(\Gamma_1)\Big) \end{aligned}$$

tais que

$$u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \alpha(x) u(x,t) = 0 \quad q.s. \ em \quad \Omega \times (0,\infty); \tag{2.62}$$

$$g(x)\delta_t(x,t) + h(x)\delta(x,t) + \gamma_0(u_t)(x,t) = 0 \quad q.s. \ em \quad \Gamma_1 \times (0,\infty); \tag{2.63}$$

$$\Big\langle \gamma_1(u(t)), \gamma_0(\psi) \Big\rangle = (k\delta_t(t), \gamma_0(\psi))_{\Gamma_1} \quad q.s. \ em \ (0,\infty) e \ para \ todo \ \psi \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega); \tag{2.64}$$

$$u(0) = u_0 \quad , \quad u_t(0) = u_1 \quad , \quad \delta(0) = \delta_0 \quad e \quad \delta_t(0) = \frac{1}{k}\gamma_1(u_0) \ .$$

Teorema 2.5. *Sejam $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ e $g, h, k \in C(\overline{\Gamma}_1)$ com g e h funções estritamente positivas, k uma função positiva quase sempre em $\overline{\Gamma}_1$. Se $u_0 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Delta, \Omega)$, $u_1 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$, $\delta_0 \in L^2(\Gamma_1)$ satisfazem*

$$\Big\langle \gamma_1(u_0), \gamma_0(\psi) \Big\rangle = \left(-\frac{k}{g}[\gamma_0(u_1) + h\delta_0], \gamma_0(\psi) \right)_{\Gamma_1} \quad para \ todo \ \psi \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \ ,$$

então existe uma única solução do problema (P3) segundo a Definição 2.5.1.

Demonstração: Pelas hipótese sobre as funções g, h e k, para todo $x \in \overline{\Gamma_1}$ temos

$$\begin{aligned} 0 < g_0 = \min_{s \in \overline{\Gamma}_1} g(s) \leq g(x) \leq \max_{s \in \overline{\Gamma}_1} g(s) = g_1 \\ 0 < h_0 = \min_{s \in \overline{\Gamma}_1} h(s) \leq h(x) \leq \max_{s \in \overline{\Gamma}_1} h(s) = h_1 \\ 0 \leq k_0 = \min_{s \in \overline{\Gamma}_1} k(s) \leq k(x) \leq \max_{s \in \overline{\Gamma}_1} k(s) = k_1 \end{aligned}$$

Defina o espaço de Hilbert $H = H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1)$ com seguinte produto interno

$$(W,V)_H = ((w_1,v_1)) + (w_2,v_2) + (k^{\frac{1}{2}}w_3, k^{\frac{1}{2}}v_3)_{\Gamma_1}$$

Considere também os operadores

$$\begin{aligned} D(A) = \Big\{ & W = (w_1,w_2,w_3) \in H;\ w_2 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega),\ \Delta w_1 \in L^2(\Omega), \\ & \langle \gamma_1(w_1), \gamma_0(\psi)\rangle = \Big(-\frac{k}{g}(\gamma_0(w_2)+hw_3), \gamma_0(\psi)\Big)_{\Gamma_1} \ , \quad \forall \psi \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\Big\} \ , \end{aligned}$$

$D(B) = H$ e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ \Delta & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{g}\gamma_0 & 0 \end{bmatrix} \ , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{h}{g} \end{bmatrix}$$

Coloque $\mathcal{A} = A + B$. Claramente $D(\mathcal{A}) = D(A)$. Agora queremos provar que $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 e consequentemente veremos que o teorema estará provado.

Primeiramente, usando o Teorema de Lummer-Phillips (Teorema 1.4) provaremos para algum $w_A > 0$ o operador $\Big(A - w_A I\Big)$ gera um semigrupo de contrações de classe C_0. Observe que $\Big(A - w_A I\Big)$ é dissipativo para algum $w_A > 0$. Com efeito, para $W \in D(A)$ temos

$$(AW,W)_H = ((w_2,w_1)) + (\Delta w_1, w_2) - \Big((k/g)^{\frac{1}{2}}\gamma_0(w_2), (k/g)^{\frac{1}{2}} w_3\Big)_{\Gamma_1} \ .$$

Pela fórmula de Green generalizada

$$\begin{aligned} (AW,W)_H &= \Big((k/g)(-\gamma_0(w_2) - hw_3), \gamma_0(\psi)\Big)_{\Gamma_1} - \Big((k/g)^{\frac{1}{2}}\gamma_0(w_2), (k/g)^{\frac{1}{2}}w_3\Big)_{\Gamma_1} \\ &= -\Big((k/g)^{\frac{1}{2}}\gamma_0(w_2), (k/g)^{\frac{1}{2}}\gamma_0(w_2)\Big)_{\Gamma_1} - \Big((hk/g)^{\frac{1}{2}}w_3, (hk/g)^{\frac{1}{2}}\gamma_0(w_2)\Big)_{\Gamma_1} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \Big((k/g)^{\frac{1}{2}}\gamma_0(w_2), (k/g)^{\frac{1}{2}}w_3\Big)_{\Gamma_1} \\ &\leq -\Big|(k/g)^{\frac{1}{2}}w_2\Big|^2_{\Gamma_1} + \Big|(hk/g)^{\frac{1}{2}}w_3\Big|_{\Gamma_1}\Big|(hk/g)^{\frac{1}{2}}\gamma_0(w_2)\Big|_{\Gamma_1} + \Big|(k/g)^{\frac{1}{2}}w_3\Big|_{\Gamma_1}\Big|(k/g)^{\frac{1}{2}}\gamma_0(w_2)\Big|_{\Gamma_1} \\ &\leq -\Big|(k/g)^{\frac{1}{2}}w_2\Big|^2_{\Gamma_1} + 2\Big(\frac{h_1+1}{2}\Big)\Big|(k/g)^{\frac{1}{2}}w_3\Big|_{\Gamma_1}\Big|(k/g)^{\frac{1}{2}}\gamma_0(w_2)\Big|_{\Gamma_1} \ . \end{aligned}$$

Denotando $\zeta = \dfrac{h_1+1}{2}$ e completando quadrado obtemos

$$\begin{aligned}(AW,W)_H &\leq -\Big(\Big|(k/g)^{\frac{1}{2}}w_2\Big|^2_{\Gamma_1} - \zeta\Big|(k/g)^{\frac{1}{2}}w_3\Big|_{\Gamma_1}\Big)^2 + \zeta^2\Big|(k/g)^{\frac{1}{2}}w_3\Big|^2_{\Gamma_1} \\ &\leq \zeta^2\Big|(k/g)^{\frac{1}{2}}w_3\Big|^2_{\Gamma_1} \leq \frac{\zeta^2}{g_0}\Big(k^{\frac{1}{2}}w_3, k^{\frac{1}{2}}w_3\Big)_{\Gamma_1} \leq w_A(W,W)_H\ ,\end{aligned}$$

onde $w_A = \frac{\zeta^2}{g_0}$ Assim $\Big([A - w_A I]W, W\Big) \leq 0$ para todo $W \in D(A)$. Como H é Hilbert, o operador $[A - w_A I]$ é dissipativo. Para aplicarmos o Teorema de Lummer-Phillips resta mostrar que $Im(\lambda I - A) = H$ para algum $\lambda > w_A$. De fato, seja $\Phi \in H$ e defina

$$\begin{aligned}F_1 &= \varphi_2 + \lambda\varphi_1 \in L^2(\Omega)\ \ ,\ \ F_2 = \frac{k}{g}\Big(\lambda - \frac{h}{g}\Big) \in C(\Gamma_1) \\ F_3 &= -\frac{k}{g}\Big(-\gamma_0(\varphi_1) + \frac{h\varphi_3}{\lambda} + \frac{h}{g\lambda}\gamma_0(\varphi_1)\Big) \in L^2(\Gamma_1)\end{aligned}$$

com λ suficientemente grande de forma que

$$\frac{k}{g}\Big(\lambda - \frac{h}{g}\Big) > 0 \ \text{ em } \ \overline{\Gamma_1}.$$

Por outro lado considere a seguinte forma bilinear, contínua e coerciva

$$\begin{aligned}a(\cdot,\cdot) : H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1_{\Gamma_0}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (z,w) &\longmapsto a(z,w) = (\lambda^2 z, w) + ((z,w)) + \Big(F_2\gamma_0(z), \gamma_0(w)\Big)_{\Gamma_1}\end{aligned}$$

Defina também, o funcional linear e contínuo

$$\begin{aligned}\chi : H^1_{\Gamma_0}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \chi(\varphi) = (F_1,\varphi) + (F_3, \gamma_0(\varphi))_{\Gamma_1}\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Lax-Milgran, existe um único $w_1 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ tal que

$$a(w_1,\varphi) = \chi(\varphi) \ \text{ para todo } \ \varphi \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$$

isto é

$$(\lambda^2 w_1, \varphi) + ((w_1, \varphi)) + \Big(F_2\gamma_0(w_1), \gamma_0(\varphi)\Big)_{\Gamma_1} = (F_1, \varphi) + (F_3, \gamma_0(\varphi))_{\Gamma_1}\ ,\ \forall \varphi \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega). \quad (2.65)$$

Em particular, para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ temos que

$$\lambda^2 w_1 - \Delta w_1 = F_1 = \varphi_2 + \lambda\varphi_1 \ \text{ em } \ L^2(\Omega). \quad (2.66)$$

Agora, basta considerar $w_2 = \lambda w_1 - \varphi_1$ e $w_3 = \dfrac{\varphi_3}{\lambda} - \dfrac{\gamma_0(w_1)}{g} + \dfrac{\gamma_0(\varphi_1)}{g\lambda}$, ou ainda $\lambda w_3 = \varphi_3 - \dfrac{\gamma_0(w_2)}{g}$. Então, claramente

$$\Big(\lambda I - A\Big)\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda w_1 - w_2 \\ \lambda w_2 - \Delta w_1 \\ \lambda w_3 + \frac{\gamma_0(w_2)}{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

Assim resta mostrar que $W = (w_1, w_2, w_3) \in D(A)$. Já temos que $\Delta w_1 \in L^2(\Omega)$ e $w_2 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$. Deste modo, aplicando a fórmula de Green generalizada em (2.65) concluímos que

$$(\lambda w_1, \varphi) - (\Delta w_1, \varphi) + \langle \gamma_1(w_1), \gamma_0(\varphi)\rangle + (F_2\gamma_0(w_1), \gamma_0(\varphi))_{\Gamma_1} = (F_1, \varphi) + \Big(F_3, \gamma_0(\varphi)\Big)_{\Gamma_1}$$

e usando (2.66) temos que

$$\begin{aligned}
\langle \gamma_1(w_1), \gamma_0(\varphi)\rangle &= \Big(-F_2\gamma_0(w_1) + F_3, \gamma_0(\varphi)\Big)_{\Gamma_1} \\
&= \Big(-\frac{k}{g}[\lambda - (h/g)]\gamma_0(w_1) - \frac{k}{g}\Big[-\gamma_0(\varphi_1) + \frac{h\varphi_3}{\lambda} + \frac{h}{g\lambda}\gamma_0(\varphi_1)\Big], \gamma_0(\varphi)\Big)_{\Gamma_1} \\
&= \Big(-\frac{k}{g}\Big[\lambda\gamma_0(w_1) - \gamma_0(\varphi_1) + \frac{h\varphi_3}{\lambda} - \frac{h}{g}\gamma_0(w_1) + \frac{h}{g\lambda}\gamma_0(\varphi_1)\Big], \gamma_0(\varphi)\Big)_{\Gamma_1} \\
&= \Big(-\frac{k}{g}[\gamma_0(w_2) + hw_3], \gamma_0(\varphi)\Big)_{\Gamma_1}
\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$. Logo $W \in D(A)$.

Portanto, dado $\Phi \in H$ mostramos que existe $W \in D(A)$ tal que $[\lambda I - A]W = \Phi$ para algum $\lambda > w_A$, ou seja, $Im(\lambda I - A) = H$. Veja que $D(A)$ é denso em H, para isso basta mostrar que, se $f \in H$ tal que $(f, v)_H = 0$ para todo $v \in D(A)$ então $f \equiv 0$. (Corolário do Teorema de Hanh-Banach).

Com isso, podemos aplicar o Teorema de Lummer-Phillips (Teorema 1.4), no operador $\Big(A - w_A I\Big)$ e concluir que ele é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações C_0 sobre H.

Por outro lado, seja $W \in D(B) = H$, então

$$
\begin{aligned}
(BW, W)_H &= -(\alpha w_1, w_2) - \Big((hk/g)^{\frac{1}{2}} w_3, (hk/g)^{\frac{1}{2}} w_3\Big)_{\Gamma_1} \le \|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} |w_1| \ |w_2| + \frac{h_1}{g_0} |k^{\frac{1}{2}} w_3|_{\Gamma_1} \\
&\le \frac{\|\alpha\|}{2}\Big[|w_1|^2 + |w_2|^2\Big] + \frac{h_1}{g_0}|k^{\frac{1}{2}} w_3|_{\Gamma_1} \le \frac{C_p\|\alpha\|}{2}\|w_1\|^2 + \frac{\|\alpha\|}{2}|w_2|^2 + \frac{h_1}{g_0}|k^{\frac{1}{2}} w_3|_{\Gamma_1} \\
&\le w_B (W, W)_H
\end{aligned}
$$

Logo $\Big([B - w_B I]W, W\Big)_H \le 0$. Consequentemente $\Big(B - w_B I\Big)$ é dissipativo para algum $w_B > 0$ e pelo Teorema 1.5, podemos concluir que

$$A + B - (w_A + w_B) I = \mathcal{A} - \omega I$$

é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0. Pelo Teorema 1.3, resulta que $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo S de classe C_0 satisfazendo $\|S(t)\|_H \le e^{\omega t}$.

Para concluirmos a existência defina $W_0 = (u_0, u_1, \delta_0) \in D(A)$. Pelas hipótese impostas no Teorema $W_0 \in D(A)$ e aplicando o Teorema 1.6, garantimos a existência de uma única função W tal que

$$
\begin{aligned}
& W \in C\Big([0, \infty); D(A)\Big) \cap C^1\Big([0, \infty); H\Big); \\
& \frac{dW}{dt}(t) = \mathcal{A} W(t) \quad , \quad t > 0; && (2.67) \\
& W(0) = W_0 \ . && (2.68)
\end{aligned}
$$

Logo $w_1 \in C^1\Big([0, \infty), H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\Big)$, $w_2 \in C^1\Big([0, \infty), L^2(\Omega)\Big)$, $w_3 \in C^1\Big([0, \infty), L^2(\Gamma_1)\Big)$, $w_1' = w_2$,

$w_2' = \Delta w_1 - \alpha w_1$ e $w_3' = -\dfrac{1}{g}\gamma_0(w_2) - \dfrac{h}{g}w_3$. Assim

$$\begin{aligned}
&w_1'' \in C\Big([0,\infty), L^2(\Omega)\Big);\\
&w_1'' - \Delta w_1 + \alpha w_1 = 0 \ \text{ q.s. em } \ \Omega \times (0,\infty);\\
&\gamma_0(w_1') + g w_3' + h w_3 = 0 \ \text{ q.s. em } \ \Gamma_1 \times (0,\infty);\\
&w_1(0) = u_0 \ , \ \ w_1'(0) = w_2(0) = u_1 \ \text{ e } \ w_3(0) = \delta_0 \ .
\end{aligned}$$

Como $W \in D(A)$ temos

$$\langle \gamma_1(w_1), \gamma_0(\varphi)\rangle = \Big(-\frac{k}{g}[\gamma_0(w_2) + h w_3], \gamma_0(\varphi)\Big)_{\Gamma_1} = \Big(k w_3', \gamma_0(\varphi)\Big)_{\Gamma_1} \ , \ \forall \varphi \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \ .$$

Portanto, fazendo $u = w_1$ e $\delta = w_3$ temos que o par (u, δ) é a solução do problema (P3) segundo a Definição 2.5.1. Note que a unicidade segue do fato de que o problema (2.67)-(2.68) tem solução única e é equivalente ao problema (P3). $\square$

Observe que no Teorema 2.5 não assumimos hipótese alguma sobre o sinal da função α. Porém se adicionalmente considerarmos $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ e $\alpha \geq 0$ q.s. em Ω, é possível demonstrar o resultado de forma direta e simplificada.

Veja que o seguinte produto interno

$$((u,v))_\alpha = ((u,v)) + (\alpha u, v) \ \text{ para todo } \ u, v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \tag{2.69}$$

em $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ induz uma norma $\|\cdot\|_\alpha$ equivalente a norma usual de $H^1(\Omega)$. De fato, seja $u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ então

$$\|u\|_\alpha^2 = \|u\|^2 + |\alpha^{\frac{1}{2}} u|^2 \leq \Big(1 + \|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)\|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

e

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2 + |u|^2 \leq \Big(1 + C_p\Big)\|u\|^2 + |\alpha^{\frac{1}{2}} u|^2 = \|u\|_\alpha^2$$

onde C_p é a constante de Poincaré.

Teorema 2.6. *Assuma a hipótese do Teorema 2.5 e adicionalmente suponha que $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ com $\alpha \geq 0$ q.s. em Ω. Então existe uma única solução do problema (P3) segundo a Definição 2.5.1.*

Demonstração: Defina o espaço de Hilbert $H = H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1)$ com o produto interno dado por

$$((W,V))_H = ((w_1,v_1))_\alpha + (w_2,v_2) + \Big((hk)^{\frac{1}{2}}\ w_3, (hk)^{\frac{1}{2}}\ v_3\Big)_{\Gamma_1}\ . \tag{2.70}$$

Note que $\Big(H, ((\cdot,\cdot))_H\Big)$ é Hilbert pois $\alpha \geq 0$. Considere também o operador $\mathcal{A}$ definido por

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) = \Big\{ & W = (w_1,w_2,w_3) \in H;\ w_2 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega),\ \Delta w_1 \in L^2(\Omega), \\ & \langle \gamma_1(w_1), \gamma_0(\psi)\rangle = \Big(-\frac{k}{g}[\gamma_0(w_2) + hw_3], \gamma_0(\psi)\Big)_{\Gamma_1}\quad ,\quad \forall \psi \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\Big\} \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ \Delta - \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{g}\gamma_0 - \frac{h}{g} & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que $\mathcal{A}$ é dissipativo em $\Big(H, \|\cdot\|_H, ((\cdot,\cdot))_H\Big)$. De fato, seja $W \in D(\mathcal{A})$. Então pela fórmula de Green generalizada e pelas condições impostas ao $D(\mathcal{A})$ segue que

$$\begin{aligned} ((\mathcal{A}W,W))_H &= ((w_2,w_1))_\alpha + (\Delta w_1 - \alpha w_1, w_2) - \Big(hk[\frac{1}{g}\gamma_0(w_2) + \frac{h}{g}w_3], w_3\Big)_{\Gamma_1} \\ &= -\Big(\frac{k}{g}[\gamma_0(w_2) + hw_3], \gamma_0(w_2)\Big)_{\Gamma_1} - \Big(\frac{k}{g}[\gamma_0(w_2)+hw_3], hw_3\Big)_{\Gamma_1} \\ &= -\int_{\Gamma_1} \frac{k}{g}\Big(\gamma_0(w_2) + hw_3\Big)^2\, d\Gamma \leq 0\ , \end{aligned}$$

e análogo ao que foi feito na demonstração do Teorema 2.5 prova-se que $Im(\lambda I - \mathcal{A}) = H$ para algum $\lambda > 0$.

Como anteriormente temos também que $D(\mathcal{A})$ é denso em H. Portanto estamos nas condições do Teorema de Lummer-Phillips (Teorema 1.4). Logo $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações $\Big(S(t)\Big)_{t>0}$ de classe C_0 e novamente análogo a prova do Teorema 2.5 temos garantido existência e unicidade de solução do problema (P3) segundo a Definição 2.5.1. $\square$

Capítulo 3

Estabilização Uniforme

3.1 Introdução

Na última seção do capítulo anterior introduzimos o problema (P3) para o qual teremos estabilização uniforme da energia. O estudo sobre a estabilização uniforme está diretamente relacionado a quatro aspectos, a saber:

1^o) Dimensão do espaço $\mathbb{R}^n$, ou seja, escolha do n ;

2^o) Geometria do aberto Ω, ou seja, escolha particular da terna $\Big(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1\Big)$;

3^o) A função $k = k(x)$, ou seja, escolha das hipóteses sobre a função k ;

4^o) A função $\alpha = \alpha(x)$, ou seja, escolha das hipóteses sobre a função α .

Detalhemos a geometria de Ω abordado no 2^o item acima. Para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, fixado arbitrariamente, representamos por $m_{x_0} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a função dada por

$$m_{x_0}(x) = x - x_0 \ \text{ para todo } \ x \in \mathbb{R}^n$$

Definição 3.1.1. *Seja* $\Big(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1\Big)$ *conforme a seção 1.4.*

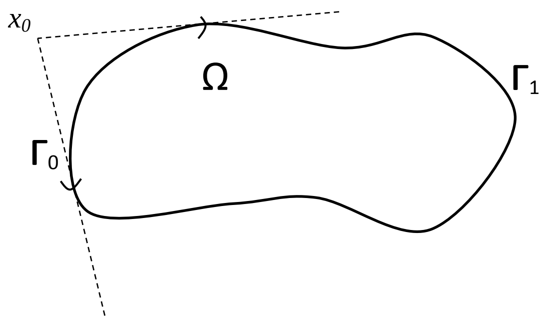
i) *Dizemos que a terna* $\Big(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1\Big)$ *satisfaz a condição 1, quando existe* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$\Gamma_0 = \Big\{x \in \Gamma;\ \langle m_{x_0}(x), \nu(x)\rangle \le 0\Big\} \ e \ \Gamma_1 = \Big\{x \in \Gamma;\ \langle m_{x_0}(x), \nu(x)\rangle > 0\Big\} \ ,$$

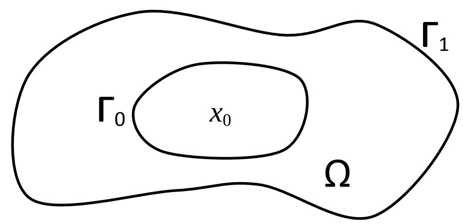
onde $\nu(x)$ é o vetor normal unitário no ponto $x \in \Gamma$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual no $\mathbb{R}^n$.

ii) *Dizemos que a terna $\left(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1\right)$ satisfaz a condição 2, quando Γ_0 e Γ_1 são fechados e existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\langle m_{x_0}(x), \nu(x) \rangle \leq 0$ para todo $x \in \Gamma_0$.*

Observe que se $\left(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1\right)$ satisfaz a condição 1 então podemos ter domínios simplesmente conexos e também domínios do tipo anel

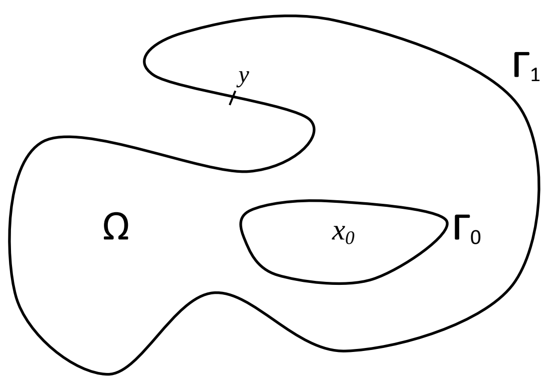


$\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 \neq \emptyset$



$\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \emptyset$

Por outro lado quando $\left(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1\right)$ satisfaz a condição 2 não podemos ter domínios simplesmente conexos. Neste caso o domínio Ω deve ser necessariamente do tipo anel



$\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \emptyset$

Diferente da condição 1, na condição 2 não tem restrição geométrica em Γ_1, por exemplo na figura acima $y \in \Gamma_1$ e $\langle m_{x_0}(y), \nu(y) \rangle \leq 0$.

3.2 Estabilização Uniforme - $\Big(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1\Big)$ na Condição 1

Seja (u, δ) uma solução do problema (P3) dada pelo Teorema 2.5. Então a energia do problema é dada pela função $E : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(t) = |u'(t)|^2 + \|u(t)\|^2 + \int_{\Gamma_1} h(x)k(x)\Big(\delta(x,t)\Big)^2\, d\Gamma \quad \text{para todo} \quad t \geq 0\ . \tag{3.1}$$

Nesta seção provaremos que quando $\Big(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1\Big)$ esta na condição 1, restringindo a dimensão n, fazendo uma escolha adequada para a função $k = k(x)$ e tomando $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ suficientemente pequena, a energia $E = E(t)$ tende à zero exponencialmente quando $t \to \infty$. Este resultado foi obtido em [10]

Teorema 3.1. *Suponha que*

(H.1) $n = 2$ *ou* $n = 3$ *;*

(H.2) *A terna* $\Big(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1\Big)$ *satisfaz a condição 1 ;*

(H.3) $g, h \in C(\overline{\Gamma}_1)$ *são funções estritamente positivas em* $\overline{\Gamma}_1$*;*

(H.4) $k(x) = \beta(x)\langle m_{x_0}(x), \nu(x)\rangle$ *para todo* $x \in \overline{\Gamma}_1$, *onde* $\beta \in C^1(\overline{\Gamma}_1)$ *satisfaz* $0 < \beta_0 \leq \beta(x)$ *para todo* $x \in \overline{\Gamma}_1$.

(H.5) $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ *satisfaz*

$$\|\alpha\|_\infty < \frac{1}{M(1 + C_p) + C_p(n-1)} \tag{3.2}$$

onde $M = \max\limits_{1 \leq i \leq n}\Big(\max\limits_{x \in \overline{\Omega}} |x_j - (x_0)_j|\Big)$ *e* C_p *é a constante de Poincaré em* $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$.

Se (u, δ) *é solução de (P3) dada pelo Teorema 2.5 e* $E = E(t)$ *a energia associada definida por (3.1) então existem constantes positivas* ξ *e* θ *tais que*

$$E(t) \leq \xi e^{-\theta t} \quad \text{para todo} \quad t > 0.$$

Demonstração: Como podemos ver, das hipóteses (H.3) e (H.4) temos que

$$\begin{aligned}
0 < g_0 = \min_{s\in\overline{\Gamma}_1} g(s) \leq g(x) \leq \max_{s\in\overline{\Gamma}_1} g(s) = g_1 \\
0 < h_0 = \min_{s\in\overline{\Gamma}_1} h(s) \leq h(x) \leq \max_{s\in\overline{\Gamma}_1} h(s) = h_1 \\
0 \leq k_0 = \min_{s\in\overline{\Gamma}_1} k(s) \leq k(x) \leq \max_{s\in\overline{\Gamma}_1} k(s) = k_1
\end{aligned}$$

Portanto todas as hipóteses do Teorema 2.5 estão satisfeitas o que garante a existência de solução (u, δ).

Multiplicando (2.62) por $2u'$ e integrando em Ω e multiplicando (2.63) por $2k\delta'$ e integrando em Γ_1 temos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}|u'(t)|^2 - 2(\Delta u(t), u'(t)) + \frac{d}{dt}\int_\Omega \alpha(x)|u(x,t)|^2 dx = 0 \ , \\
&2|g^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}} \ \delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + \frac{d}{dt}|h^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1} + 2\Big(k\delta'(t), \gamma_0(u'(t))\Big)_{\Gamma_1} = 0 \ .
\end{aligned}$$

Somando as igualdades acima e usando a fórmula de Green generalizada, temos

$$\frac{d}{dt}\Big[|u'(t)|^2 + \|u(t)\|^2 + \Big|h^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}\delta(t)\Big|^2_{\Gamma_1} + \int_\Omega \alpha(x)|u(x,t)|^2 dx\Big] = -2\Big|g^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}\delta'(t)\Big|^2_{\Gamma_1} \ . \tag{3.3}$$

Defina

$$E_\alpha(t) = |u'(t)|^2 + \|u(t)\|^2 + \Big|h^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}\delta(t)\Big|^2_{\Gamma_1} + \int\limits_\Omega \alpha(x)|u(x,t)|^2 dx \ . \tag{3.4}$$

Como vimos nas preliminares denotemos $|\delta(t)|^2_{hk} = \displaystyle\int_{\Gamma_1} h(x)k(x)|\delta(x,t)|^2 d\Gamma$. Note que E_α é uma energia perturbada do problema, já que

$$E_\alpha(t) = E(t) + \int_\Omega \alpha(x)|u(x,t)|^2 dx \tag{3.5}$$

Vamos mostrar que tais energias são equivalentes.De fato, da desigualdade de Poincaré,

$$-\|\alpha\|_\infty \, C_p \, E(t) \leq -\|\alpha\|_\infty \, C_p \, \|u(t)\|^2 \leq -\|\alpha\|_\infty \, |u(t)|^2 \leq \int_\Omega \alpha(x)|u(x,t)|^2 dx = E_\alpha(t) - E(t),$$

consequentemente

$$\Big(1 - \|\alpha\|_\infty \; C_p\Big) E(t) \leq E_\alpha(t)$$

com $\Big(1 - \|\alpha\|_\infty \; C_p\Big) > 0$, pois de (3.2) podemos ver que

$$\|\alpha\|_\infty < \frac{1}{M(1+C_p) + C_p(n-1)} < \frac{1}{C_p}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} E_\alpha(t) = E(t) + \int_\Omega \alpha(x)|u(x,t)|^2 dx &\leq E(t) + \|\alpha\| \; |u(t)|^2 \leq E(t) + \|\alpha\| \; C_p \; \|u(t)\|^2 \\ &= |u'(t)|^2 + \Big(1 + \|\alpha\| C_p\Big)\|u(t)\|^2 + \Big|h^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} \delta(t)\Big|^2_{\Gamma_1} \leq \Big(1 + \|\alpha\| C_p\Big) E(t) \end{aligned}$$

Logo E_α e E são equivalentes. Assim, para demonstrar o Teorema basta mostrar que E_α decai exponencialmente.

Agora vamos considerar uma perturbação de E_α, da seguinte forma:
Para cada $\varepsilon > 0$ defina

$$E_{\alpha\varepsilon}(t) = E_\alpha(t) + \varepsilon \rho(t) \quad , \quad \forall t \geq 0 \tag{3.6}$$

onde

$$\begin{aligned} \rho(t) = 2 \int_\Omega \Big[\langle m_{x_0}(x), \nabla u(x,t)\rangle u'(x,t) + \frac{n-1}{2} u(x,t) u'(x,t)\Big] dx \\ + \int_{\Gamma_1} \Big[2h(x)\langle m_{x_0}(x), \nu(x)\rangle + k(x)\Big]\Big[\gamma_0(u)(x,t)\delta(x,t) + \frac{g(x)}{2}|\delta(x,t)|^2\Big] d\Gamma \end{aligned}$$

Provaremos a seguir que E_α e $E_{\alpha\varepsilon}$ são equivalentes. No que segue omitiremos o índice x_0 na função m_{x_0}, ou seja, $m_{x_0}(x) = m(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e também omitiremos as variáveis x e t das integrais para facilitar a notação.

Lembrando que, $|u(t)|^2 \leq C_p \|u(t)\|^2$ e $|\gamma_0(u(t))|^2_{\Gamma_1} \leq C_\gamma \|u(t)\|^2$, vamos fazer algumas estimativas.

$$\begin{aligned}\left|2\int_\Omega \langle m, \nabla u\rangle u' dx\right| &\leq 2\int_\Omega \Big|\langle m, \nabla u\rangle\Big|\ |u'|dx \leq 2\int_\Omega \|m\|_{\mathbb{R}^n}\ \|\nabla u\|_{\mathbb{R}^n}\ |u'|dx \\ &\leq M\int_\Omega 2\|\nabla u\|_{\mathbb{R}^n}\ |u'|dx \leq M\int_\Omega \Big(\|\nabla u\|^2_{\mathbb{R}^n} + |u'|^2\Big)dx \leq M\Big(\|u(t)\|^2 + |u'(t)|^2\Big);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|(n-1)\int_\Omega u\ u' dx\right| &\leq \frac{(n-1)}{2}\int_\Omega 2|u|\ |u'|dx \leq \frac{(n-1)}{2}\int_\Omega (|u|^2 + |u'|^2)dx \\ &\leq \frac{(n-1)}{2}|u(t)|^2 + \frac{(n-1)}{2}|u'(t)|^2 \leq \frac{(n-1)}{2}\Big[C_p\|u(t)\|^2 + |u'(t)|^2\Big];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_1} 2h\langle m, \nu\rangle\gamma_0(u)\ \delta\ d\Gamma\right| &= \left|\int_{\Gamma_1} \frac{2hk}{\beta}\gamma_0(u)\ \delta\ d\Gamma\right| \leq \frac{h_1}{\beta_0}\int_{\Gamma_1} 2k^{\frac{1}{2}}|\gamma_0(u)|k^{\frac{1}{2}}|\delta|d\Gamma \\ &\leq \frac{h_1}{\beta_0}\int_{\Gamma_1}\Big(k|\gamma_0(u)|^2 + k|\delta|^2\Big)d\Gamma \leq \frac{h_1 k_1}{\beta_0}C_\gamma\|u(t)\|^2 + \frac{h_1}{\beta_0}\Big|k^{\frac{1}{2}}\delta(t)\Big|^2_{\Gamma_1};\end{aligned}$$

$$\left|\int_{\Gamma_1} k\gamma_0(u)\delta d\Gamma\right| \leq \frac{k_1 C_\gamma}{2}\|u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\Big|k^{\frac{1}{2}}\delta(t)\Big|^2_{\Gamma_1};$$

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_1}\Big(\frac{2h\langle m, \nu\rangle + k}{2}\Big)g\delta^2 d\Gamma\right| &= \left|\int_{\Gamma_1}\Big(\frac{hk}{\beta} + \frac{k}{2}\Big)g\delta^2 d\Gamma\right| \\ &\leq \int_{\Gamma_1}\Big(\frac{hg}{\beta} + \frac{g}{2}\Big)k|\delta|^2 d\Gamma \leq \Big(\frac{h_1 g_1}{\beta_0} + \frac{g_1}{2}\Big)\Big|k^{\frac{1}{2}}\delta(t)\Big|^2_{\Gamma_1}\ .\end{aligned}$$

Usando as estimativas anteriores, temos que existe uma constante C_1, tal que

$$|\rho(t)| \leq C_1\Big(|u'(t)|^2 + \|u(t)\|^2 + |k^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\Big)\ .$$

Desta desigualdade e do fato de que a função h tem mínimo, vemos que existe uma constante C_2 satifazendo

$$|\rho(t)| \leq C_2\Big(|u'(t)|^2 + \|u(t)\|^2 + |h^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\Big) = C_2 E(t)\ .$$

Agora, usando a equivalência das energias E e E_α, temos que

$$|\rho(t)| \leq C_3 E_\alpha(t) \ .$$

Por outro lado, de (3.6) e usando a desigualdade acima obtemos que $|E_{\alpha\varepsilon}(t) - E_\alpha(t)| = |\varepsilon\rho(t)| \leq \varepsilon C_3 E_\alpha(t)$. Logo $(1-\varepsilon C_3)E_\alpha(t) \leq E_{\alpha\varepsilon}(t) \leq (1+\varepsilon C_3)E_\alpha(t)$. Definindo $C_4 = (1-\varepsilon C_3)$, $C_5 = (1+\varepsilon C_3)$ e escolhendo

$$\varepsilon < \frac{1}{C_3} \tag{3.7}$$

temos que $C_4 > 0$.

Portanto até agora provamos que E, E_α e $E_{\alpha\varepsilon}$ são energias equivalentes. Desta forma, basta mostrar que $E_{\alpha\varepsilon}$ tem decaimento exponencial. Com efeito:

Diferenciando $E_{\alpha\varepsilon}$, temos que $E'_{\alpha\varepsilon}(t) = E'_\alpha(t) + \varepsilon\rho'(t)$, onde

$$\begin{aligned}
\rho'(t) &= 2\frac{d}{dt}\int_\Omega \Big[\langle m, \nabla u\rangle u' + \frac{(n-1)}{2} u\ u'\Big]dx + \frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1}\Big[2h\langle m,\nu\rangle + k\Big]\Big[\gamma_0(u)\delta + \frac{g}{2}|\delta|^2\Big]d\Gamma \\
&= 2\int_\Omega \Big[\langle m, \nabla u'\rangle u' + \langle m, \nabla u\rangle u''\Big]dx + (n-1)|u'(t)|^2 + (n-1)\int_\Omega u\ u'' dx \\
&\qquad + \frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1}\Big[2h\langle m,\nu\rangle + k\Big]\Big[\gamma_0(u)\delta + \frac{g}{2}|\delta|^2\Big]d\Gamma \\
&= 2\int_\Omega \Big[\langle m, \nabla u'\rangle u' + \langle m, \nabla u\rangle(\Delta u - \alpha u)\Big]dx + (n-1)|u'(t)|^2 \\
&\qquad + (n-1)\int_\Omega u\ (\Delta u - \alpha u)dx + \frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1}\Big[2h\langle m,\nu\rangle + k\Big]\Big[\gamma_0(u)\delta + \frac{g}{2}|\delta|^2\Big]d\Gamma \\
&= 2\int_\Omega \Big[\langle m, \nabla u'\rangle u' + \langle m, \nabla u\rangle\Delta u - \langle m, \nabla u\rangle\alpha u\Big]dx + (n-1)|u'(t)|^2 \\
&\qquad + (n-1)\int_\Omega \Big(u\ \Delta u - \alpha u^2\Big)dx + \frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1}\Big[2h\langle m,\nu\rangle + k\Big]\Big[\gamma_0(u)\delta + \frac{g}{2}|\delta|^2\Big]d\Gamma
\end{aligned}$$

A seguir vamos analisar os termos da igualdade acima. Primeiro, note que para cada $1 \leq j \leq n$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial u'}{\partial x_j}\ (m_j\ u')\ dx &= -\int_\Omega u'\frac{\partial}{\partial x_j}(m_j\ u')dx + \int_{\Gamma_1}\gamma_0(u')\gamma_0(m_j u')\nu_j d\Gamma \\
&= -\int_\Omega u'\frac{\partial u'}{\partial x_j}m_j dx - \int_\Omega |u'|^2\ \frac{\partial m_j}{\partial x_j}dx + \int_{\Gamma_1}|\gamma_0(u')|^2 m_j\ \nu_j d\Gamma
\end{aligned}$$

Logo $2\int_\Omega \dfrac{\partial u'}{\partial x_j}\ (m_j\ u')\ dx = -\int_\Omega |u'|^2\ \dfrac{\partial m_j}{\partial x_j}dx + \int_{\Gamma_1} |\gamma_0(u')|^2 m_j\ \nu_j d\Gamma$. Somando de 1 a n, resulta que

$$2\int_\Omega \langle m, \nabla u'\rangle u' dx = -n|u'(t)|^2 + \int_{\Gamma_1} |\gamma_0(u')|^2 \langle m, \nu\rangle d\Gamma \tag{3.8}$$

Desde que a dimensão do $\mathbb{R}^n$ é $n = 2$ ou $n = 3$, usando argumentos análogos aos usados por V. Komornik e E. Zuazua (Lema 2.2) em [20] e P. Grisvard em [13], obtemos

$$2\int_\Omega \langle m, \nabla u\rangle \Delta u\ dx \leq (n-2)\|u(t)\|^2 + 2\int_{\Gamma_1} \langle m, \nabla u\rangle k\delta' d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \langle m, \nu\rangle \|\nabla u\|^2_{\mathbb{R}^n}\ . \tag{3.9}$$

Mais ainda

$$\begin{aligned} -2\int_\Omega \alpha\langle m, \nabla u\rangle u dx &\leq \int_\Omega 2|\alpha|\ |\langle m, \nabla u\rangle|\ |u| dx \leq M\|\alpha\|_\infty \int_\Omega (\|\nabla u\|^2_{\mathbb{R}^n} + |u|^2) dx \\ &\leq M\|\alpha\|_\infty (1 + C_p)\|u(t)\|^2; \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$(n-1)\int_\Omega u\Delta u\ dx = -(n-1)\|u(t)\|^2 + (n-1)\int_{\Gamma_1} k\gamma_0(u)\delta' d\Gamma; \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} -(n-1)\int_\Omega \alpha|u|^2 dx &= -(n-1)\int_\Omega (\alpha^+ - \alpha^-)|u|^2 dx \leq (n-1)\int_\Omega \alpha^-|u|^2 dx \\ &\leq (n-1)\|\alpha\|_\infty C_p\|u(t)\|^2\ . \end{aligned} \tag{3.12}$$

Por outro lado, de (3.3) e (3.6), resulta que $E'_{\alpha\varepsilon}(t) = E'_\alpha(t) + \varepsilon\rho'(t) = -2\int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma + \varepsilon\rho'(t)$. Agora, usando as relações (3.8)-(3.12) para estimar ρ' temos que

$$\begin{aligned} E'_{\alpha\varepsilon}(t) = -2\int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma + \varepsilon\Big\{2\int_\Omega \Big[\langle m, \nabla u'\rangle u' + \langle m, \nabla u\rangle \Delta u - \langle m, \nabla u\rangle \alpha u\Big] dx \\ +(n-1)|u'(t)|^2 + (n-1)\int_\Omega (u\Delta u - \alpha|u|^2) dx\Big\} \\ + \varepsilon\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1} \Big[2h\langle m, \nu\rangle + k\Big]\Big[\gamma_0(u)\delta + \frac{g}{2}|\delta|^2\Big] d\Gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le -2\int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma + \varepsilon\Big\{-n|u'(t)|^2 + \int_{\Gamma_1} |\gamma_0(u')|^2\langle m,\nu\rangle d\Gamma + (n-2)\|u(t)\|^2 \\
&\qquad + \int_{\Gamma_1}\Big(2\langle m,\nabla u\rangle k\delta' - \langle m,\nu\rangle\|\nabla u\|^2_{\mathbb{R}^n}\Big)d\Gamma + \|\alpha\|_\infty M(1+C_p)\|u(t)\|^2 \\
&\qquad\qquad + (n-1)|u'(t)|^2 - (n-1)\|u(t)\|^2 \\
&\qquad\qquad\quad + (n-1)\int_{\Gamma_1} k\gamma_0(u)\delta' d\Gamma + (n-1)\|\alpha\|_\infty\, C_p\, \|u(t)\|^2\Big\} \\
&\qquad\qquad\qquad + \varepsilon\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1}\Big[2h\langle m,\nu\rangle + k\Big]\Big[\gamma_0(u)\delta + \frac{g}{2}|\delta|^2\Big]d\Gamma \\
&\le \varepsilon\Big\{-|u'(t)|^2 - C_6\|u(t)\|^2 \\
&\qquad + \int_{\Gamma_1}\Big[|\gamma_0(u')|^2\langle m,\nu\rangle + 2\langle m,\nabla u\rangle k\delta' + (n-1)k\gamma_0(u)\delta' - \langle m,\nu\rangle\|\nabla u\|^2_{\mathbb{R}^n}\Big]d\Gamma \\
&\qquad\quad + \frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1}\Big[2h\langle m,\nu\rangle + k\Big]\Big[\gamma_0(u)\delta + \frac{g}{2}|\delta|^2\Big]d\Gamma\Big\} - 2\int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma\ , \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

onde de (3.2)

$$-C_6 = \Big(\|\alpha\|_\infty[M(1+C_p) + C_p(n-1)] - 1\Big) < 0\ .$$

Somando e subtraindo $\varepsilon\displaystyle\int_{\Gamma_1} hk|\delta|^2 d\Gamma$ em (3.13) obtemos:

$$\begin{aligned}
E'_{\alpha\varepsilon}(t) &\le \varepsilon\Big\{-|u'(t)|^2 - C_6\|u(t)\|^2 - \int_{\Gamma_1} hk|\delta|^2 d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma_1}\Big[|\gamma_0(u')|^2\langle m,\nu\rangle + 2\langle m,\nabla u\rangle k\delta' + (n-1)k\gamma_0(u)\delta' + hk|\delta|^2 - \langle m,\nu\rangle\|\nabla u\|^2_{\mathbb{R}^n}\Big]d\Gamma \\
&\qquad + \frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1}\Big[2h\langle m,\nu\rangle + k\Big]\Big[\gamma_0(u)\delta + \frac{g}{2}|\delta|^2\Big]d\Gamma\Big\} - 2\int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma\ .
\end{aligned}$$

Note que

$$-|u'(t)|^2 - C_6\|u(t)\|^2 - \int_{\Gamma_1} hk|\delta|^2 d\Gamma \le -C_7 E(t)\ ,$$

com $C_7 = \min\{1, C_6\}$. Logo

$$\begin{aligned}
E'_{\alpha\varepsilon}(t) &\le -\varepsilon C_7 E(t) - 2\int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma + \varepsilon\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1}\Big[2h\langle m,\nu\rangle + k\Big]\Big[\gamma_0(u)\delta + \frac{g}{2}|\delta|^2\Big]d\Gamma \\
&\quad + \varepsilon\int_{\Gamma_1}\Big[|\gamma_0(u')|^2\langle m,\nu\rangle + 2\langle m,\nabla u\rangle k\delta' + (n-1)k\gamma_0(u)\delta' + hk|\delta|^2 - \langle m,\nu\rangle\|\nabla u\|^2_{\mathbb{R}^n}\Big]d\Gamma\ ,
\end{aligned}$$

mas como as energias E e E_α são equivalentes, podemos ver que

$$
\begin{aligned}
E'_{\alpha\varepsilon}(t) \leq -\varepsilon C_8 E_\alpha(t) - 2\int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma + \varepsilon \frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1} \Big[2h\langle m,\nu\rangle + k\Big]\Big[\gamma_0(u)\delta + \frac{g}{2}|\delta|^2\Big] d\Gamma \\
+\varepsilon \int_{\Gamma_1} \Big[|\gamma_0(u')|^2\langle m,\nu\rangle + 2\langle m,\nabla u\rangle k\delta' + (n-1)k\gamma_0(u)\delta' \\
+hk|\delta|^2 - \langle m,\nu\rangle\|\nabla u\|^2_{\mathbb{R}^n}\Big] d\Gamma \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Na sequência continuamos estimando os termos do lado direito desta desigualdade. Lembrando que $\gamma_0(u') = -g\delta' - h\delta$, então

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \Big[\langle m,\nu\rangle|\gamma_0(u')|^2 + hk|\delta|^2\Big] d\Gamma &\leq \int_{\Gamma_1} \Big[\langle m,\nu\rangle|(-g\delta' - h\delta)|^2 + hk|\delta|^2\Big] d\Gamma \\
&\leq \int_{\Gamma_1} \Big[2\langle m,\nu\rangle g^2|\delta'|^2 + 2\langle m,\nu\rangle h^2|\delta|^2 + hk|\delta|^2\Big] d\Gamma \\
&= 2\int_{\Gamma_1} \langle m,\nu\rangle g^2|\delta'|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \Big(2h\langle m,\nu\rangle + k\Big) h|\delta|^2 d\Gamma \\
&= 2\int_{\Gamma_1} \langle m,\nu\rangle g^2|\delta'|^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \Big(2h\langle m,\nu\rangle + k\Big)\Big(-g\delta\delta' - h|\delta|^2 + \delta'\gamma_0(u) + g\delta\delta'\Big) d\Gamma \\
&\qquad + \int_{\Gamma_1} \Big(2h\langle m,\nu\rangle + k\Big)\delta'\gamma_0(u) d\Gamma \\
&= 2\int_{\Gamma_1} \langle m,\nu\rangle g^2|\delta'|^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \Big(2h\langle m,\nu\rangle + k\Big)\Big(\frac{d}{dt}[\gamma_0(u)\delta + \frac{g}{2}\delta^2]\Big) d\Gamma \\
&\qquad + \int_{\Gamma_1} \Big(2h\langle m,\nu\rangle + k\Big)\delta'\gamma_0(u) d\Gamma \\
&= 2\int_{\Gamma_1} \langle m,\nu\rangle g^2|\delta'|^2 d\Gamma - \frac{d}{dt}\left\{\int_{\Gamma_1} \Big(2h\langle m,\nu\rangle + k\Big)\Big(\gamma_0(u)\delta + \frac{g}{2}\delta^2\Big) d\Gamma\right\} \\
&\qquad + \int_{\Gamma_1} \Big(2h\langle m,\nu\rangle + k\Big)\delta'\gamma_0(u) d\Gamma
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
2\int_{\Gamma_1} \langle m,\nabla u\rangle k\delta' d\Gamma &\leq 2M\int_{\Gamma_1} k^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_{\mathbb{R}^n}\lambda^{\frac{1}{2}} \;\; \frac{k^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{2}}}\delta' d\Gamma \\
&\leq M\int_{\Gamma_1} \Big(\lambda k\|\nabla u\|^2_{\mathbb{R}^n} + \frac{k}{\lambda}|\delta'|^2\Big) d\Gamma \;,
\end{aligned}
$$

onde λ é um número arbitrário positivo. Agora, de (3.14) e das duas desigualdades acima resulta que

$$
\begin{aligned}
E'_{\alpha\varepsilon}(t) \leq & -\varepsilon C_8 E_\alpha(t) - 2\int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma + \varepsilon \frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1}\Big[2h\langle m,\nu\rangle + k\Big]\Big[\gamma_0(u)\delta + \frac{g}{2}|\delta|^2\Big]d\Gamma \\
& + \varepsilon\int_{\Gamma_1}\Big[(n-1)k\gamma_0(u)\delta' + 2\langle m,\nabla u\rangle k\delta' + |\gamma_0(u')|^2\langle m,\nu\rangle + hk|\delta|^2 - \langle m,\nu\rangle\|\nabla u\|^2_{\mathbb{R}^n}\Big]d\Gamma \\
\leq & -\varepsilon C_8 E_\alpha(t) - 2\int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma + \varepsilon\Bigg\{\int_{\Gamma_1}\Big((n-1)k\gamma_0(u)\delta' + M\lambda k\|\nabla u\|^2_{\mathbb{R}^n} + M\frac{k}{\lambda}|\delta'|^2\Big)d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma_1}\Big[2\langle m,\nu\rangle g^2|\delta'|^2 + \Big(2h\langle m,\nu\rangle + k\Big)\gamma_0(u)\delta' - \langle m,\nu\rangle\|\nabla u\|^2_{\mathbb{R}^n}\Big]d\Gamma\Bigg\} \\
\leq & -\varepsilon C_8 E_\alpha(t) - \int_{\Gamma_1}\Big(2g - \frac{\varepsilon M}{\lambda}\Big)k|\delta'|^2 d\Gamma + \varepsilon\Bigg\{\int_{\Gamma_1}\Big(2h\langle m,\nu\rangle + nk\Big)\gamma_0(u)\delta' d\Gamma \\
& + 2\int_{\Gamma_1}\langle m,\nu\rangle g^2|\delta'|^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_1}\Big(\langle m,\nu\rangle - M\lambda k\Big)\|\nabla u\|^2_{\mathbb{R}^n} d\Gamma\Bigg\} \ . \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

Vamos estimar um dos termos separadamente. Denotando por $M_1 = \max\limits_{x\in\overline{\Gamma}_1}\{2g\langle m,\nu\rangle + nk\}$, vemos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1}\Big(2h\langle m,\nu\rangle + nk\Big)\gamma_0(u)\delta' d\Gamma &= \int_{\Gamma_1}\Big(2h\langle m,\nu\rangle + nk\Big)(2\lambda)^{\frac{1}{2}}\gamma_0(u)\frac{1}{(2\lambda)^{\frac{1}{2}}}\delta' d\Gamma \\
&\leq \int_{\Gamma_1}\Big(2h\langle m,\nu\rangle + nk\Big)\lambda|\gamma_0(u)|^2 + \frac{1}{4\lambda}|\delta'|^2 d\Gamma \\
&\leq M_1\lambda|\gamma_0(u(t))|^2_{\Gamma_1} + \frac{1}{4\lambda}\int_{\Gamma_1}\Big(2h\langle m,\nu\rangle + nk\Big)|\delta'|^2 d\Gamma \\
&\leq M_1 C_9 E(t) + \frac{1}{4\lambda}\int_{\Gamma_1}\Big(2h\langle m,\nu\rangle + nk\Big)|\delta'|^2 d\Gamma \\
&\leq \frac{M_1\lambda C_9}{1-\|\alpha\|C_p}E_1(t) + \frac{1}{4\lambda}\int_{\Gamma_1}\Big(2h\langle m,\nu\rangle + nk\Big)|\delta'|^2 d\Gamma \ .
\end{aligned}
$$

Logo usando a desigualdade acima para majorar (3.15) temos

$$
\begin{aligned}
E'_{\alpha\varepsilon}(t) \leq & -\varepsilon C_8 E_\alpha(t) - \int_{\Gamma_1}\Big(2g - \frac{\varepsilon M}{\lambda}\Big)k|\delta'|^2 d\Gamma + \varepsilon\Bigg\{\frac{M_1\lambda C_9}{1-\|\alpha\|C_p}E_\alpha(t) + \\
& \frac{1}{4\lambda}\int_{\Gamma_1}\Big(2h\langle m,\nu\rangle + nk\Big)|\delta'|^2 d\Gamma + 2\int_{\Gamma_1}\langle m,\nu\rangle g^2|\delta'|^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_1}\Big(\langle m,\nu\rangle - M\lambda k\Big)\|\nabla u\|^2_{\mathbb{R}^n} d\Gamma\Bigg\} \\
\leq & -\varepsilon\Big(C_8 - \frac{M_1\lambda C_9}{1-\|\alpha\|C_p}\Big)E_\alpha(t) - \varepsilon\int_{\Gamma_1}\Big(\langle m,\nu\rangle - M\lambda k\Big)\|\nabla u\|^2_{\mathbb{R}^n} d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_1}\Bigg[\Big(2g - \frac{\varepsilon M}{\lambda}\Big)k - \varepsilon\Big(2\langle m,\nu\rangle g^2 + \frac{h}{2\lambda}\langle m,\nu\rangle + \frac{nk}{4\lambda}\Big)\Bigg]|\delta'|^2 d\Gamma \ .
\end{aligned}
$$

Lembrando que $k = \beta\langle m, \nu\rangle$ segue que

$$
\begin{aligned}
E'_{\alpha\varepsilon}(t) \leq & -\varepsilon\Big(C_8 - \frac{M_1\lambda C_9}{1-\|\alpha\|C_p}\Big)E_\alpha(t) - \varepsilon\int_{\Gamma_1}\Big(\langle m,\nu\rangle - M\lambda\beta\langle m,\nu\rangle\Big)\|\nabla u\|^2_{\mathbb{R}^n}d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_1}\left[\Big(2g - \frac{\varepsilon M}{\lambda}\Big)\beta\langle m,\nu\rangle - \varepsilon\Big(2\langle m,\nu\rangle g^2 + \frac{h}{2\lambda}\langle m,\nu\rangle + \frac{n\beta\langle m,\nu\rangle}{4\lambda}\Big)\right]|\delta'|^2 d\Gamma \\
\leq & -\varepsilon\Big(C_8 - \frac{M_1\lambda C_9}{1-\|\alpha\|C_p}\Big)E_\alpha(t) - \varepsilon\int_{\Gamma_1}\langle m,\nu\rangle(1-M\lambda\beta)\|\nabla u\|^2_{\mathbb{R}^n}d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_1}\langle m,\nu\rangle\left[2g\beta - \varepsilon\Big(2g^2 + \frac{h}{2\lambda} + \frac{n\beta}{4\lambda} + \frac{M\beta}{\lambda}\Big)\right]|\delta'|^2 d\Gamma \\
\leq & -\varepsilon\Big(C_8 - \frac{M_1\lambda C_9}{1-\|\alpha\|C_p}\Big)E_\alpha(t) - \varepsilon\int_{\Gamma_1}\langle m,\nu\rangle(1-M\lambda\beta)\|\nabla u\|^2_{\mathbb{R}^n}d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_1}\langle m,\nu\rangle\left[2g\beta - \varepsilon\Big(\frac{8\lambda g^2 + 2h + n\beta + 4M\beta}{4\lambda}\Big)\right]|\delta'|^2 d\Gamma \ . \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

Neste momento, escolhemos $\lambda > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$
C_{10} = \Big(C_8 - \frac{M_1\lambda C_9}{1-\|\alpha\|C_p}\Big) > 0 \ , \quad (1 - M\beta\lambda) > 0 \ \text{ e}
$$

$$
\varepsilon < \frac{8\lambda g(x)\beta(x)}{8\lambda g^2(x) + 2h(x) + n\beta(x) + 4M\beta(x)} \quad \text{para todo} \ \ x \in \overline{\Gamma}_1 \ ,
$$

ou ainda,

$$
\left[2g\beta - \varepsilon\Big(\frac{8\lambda g^2 + 2h + n\beta + 4M\beta}{4\lambda}\Big)\right] > 0 \ .
$$

Note que tal escolha é possível porque as funções envolvidas acima, β, g e h tem máximo e mínimo em $\overline{\Gamma}_1$. Lembrando também que ε deve satisfazer a restrição (3.7).

Portanto, das escolhas de λ e ε, podemos majorar as duas últimas integrais de (3.16) e concluir que

$$
E'_{\alpha\varepsilon}(t) \leq -\varepsilon C_{10}E_\alpha(t) \leq -C_{11}E_{\alpha\varepsilon}(t) \ ,
$$

ou seja, $E'_{\alpha\varepsilon}(t) + C_{11}E_{\alpha\varepsilon}(t) \leq 0$, de onde concluímos o decaimento exponencial de $E_{\alpha\varepsilon}$. $\square$

3.3 Estabilização Uniforme - $\left(\Omega,\Gamma_0,\Gamma_1\right)$ na Condição 2

Na seção anterior estudamos a estabilização uniforme da energia associada ao problema (P3) levando-se em conta que os aspectos (1^o) à (4^o), citados na introdução deste capítulo, estejam dados pelo conjunto de hipóteses (H.1)-(H.5) formulados no Teorema 3.1. Nesta seção veremos um resultado de estabilização assumindo aspectos distintos conforme [14]. Antes de tratarmos o resultado sobre estabilização uniforme, veremos um resultado parcial sobre a estabilidade forte da energia, ou seja, a energia do sistema tende para zero quando $t\to\infty$

Na seção anterior não tínhamos restrição no sinal da função α mas, exigimos α suficientemente "pequena" (conforme (3.2)). Agora não vamos restringir o "tamanho" de α porém vamos considerar α não negativa, ou seja, $\alpha\in L^\infty(\Omega)$ tal que $\alpha\geq 0$ q.s. em Ω. Como vimos na seção 2.5, o produto interno $((\cdot,\cdot))_\alpha$ dado pela relação (2.69) é equivalente ao produto interno usual de $H^1(\Omega)$ em $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$.

Quanto as funções g, h e k mantemos as mesmas condições sobre g e h, isto é funções na classe $C(\overline{\Gamma}_1)$ estritamente positivas. Entretanto não fixamos uma forma explicita para a função k conforme fizemos na hipótese (H.4). Agora consideramos $k\in C(\overline{\Gamma}_1)$ estritamente positiva. Logo

$$0<k_0=\min_{s\in\overline{\Gamma}_1}k(s)\leq k(x)\leq\max_{s\in\overline{\Gamma}_1}k(s)=k_1\ .$$

Análogo ao produto interno definido em (1.17), nas preliminares, podemos ver que

$$(\xi,\psi)_{hk}=\Big((hk)\xi,\psi\Big)_{\Gamma_1}\quad\text{e}\quad|\xi|^2_{hk}=|(hk)^{\frac{1}{2}}\xi|^2_{\Gamma_1}\ .$$

Definem produto interno e norma em $L^2(\Gamma_1)$, equivalentes aos usuais. Tal equivalência segue do fato que as funções h e k tem máximo e mínimo.

Sejam (u,δ) uma solução do problema (P3) dada pelo Teorema 2.6 e $E=E(t)$ a energia associada ao problema dada por 3.1. Nesta seção trabalharemos com a energia perturbada $E_\alpha = E_\alpha(t)$ dada em (3.4) que pode ser reescrita na forma

$$E_\alpha(t) = \|u(t)\|_\alpha^2 + |u'(t)|^2 + |\delta|_{hk}^2 \;\text{ para todo } t \geq 0\;.$$

Note que as energias E e E_α são equivalentes, já que as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_\alpha$ são equivalente em $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$.

Teorema 3.2. *Suponha as hipóteses de Teorema 2.6 e seja (u, δ) a solução do problema (P3). Então*

$$\lim_{t\to\infty} E_\alpha(t) = 0$$

Demonstração: Sejam H, $D(\mathcal{A})$ e $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \longrightarrow H$ definidos exatamente como na demonstração do Teorema 2.6. Então vimos que $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0, $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$. O resultado fica provado se demonstrarmos que $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ é fortemente estável, isto é, para cada $W_0 \in H$ temos que

$$\lim_{t\to\infty} \|S(t)W_0\|_H = 0$$

De fato, basta notar que a solução do problema $W'(t) = \mathcal{A}W(t)$ com $W(0) = W_0$ é dada por $W(t) = (u(t), u'(t), \delta(t)) = S(t)W_0$ e de acordo com a topologia que colocamos no espaço de Hilbert $\big(H, ((\cdot,\cdot))_H\big)$ obtemos que

$$\|S(t)W_0\|_H = \|\big(u(t), u'(t), \delta(t)\big)\|_H = \|u(t)\|_\alpha^2 + |u'(t)|^2 + |\delta|_{hk}^2 = E_\alpha(t)$$

tendo em vista que $((\cdot,\cdot))_H$ é dado por (2.70).

Passemos então à demonstração de que $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ é fortemente estável. De acordo com o Teorema 1.7, devido a W. Arendt e C. J. K. Batty em [2], é suficiente mostrar que $\sigma_p(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, $\sigma_r(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ e $\sigma_c(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R}$ é enumerável, onde $\sigma_p(\mathcal{A})$ é espectro pontual de $\mathcal{A}$, $\sigma_r(\mathcal{A})$ é espectro residual de $\mathcal{A}$ e $\sigma_c(\mathcal{A})$ é espectro contínuo de $\mathcal{A}$.

Primeiro vamos mostrar que $\sigma_p(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. De fato, seja $r \in \mathbb{R}$, $V = (v_1, v_2, v_3) \in$

$D(\mathcal{A})$ e suponha que $\mathcal{A}V = irV$, então

$$
\begin{aligned}
&v_2 = irv_1 \quad , \quad \Delta v_1 - \alpha v_1 = ir\ v_2 \\
&-\gamma_0(v_2) - hv_3 = ir\ gv_3 \quad , \quad \gamma_1(v_1) = \frac{k}{g}(-\gamma_0(v_2) - hv_3)\ .
\end{aligned}
$$

Como $V \in D(\mathcal{A})$ e com um pouco de álgebra

$$
r^2 v_1 + \Delta v_1 - \alpha v_1 = 0 \tag{3.17}
$$

$$
v_1 = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0 \tag{3.18}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_1(v_1) = \frac{k}{g}(-\gamma_0(v_2) - hv_3) = k\ ir\ v_3 &= -\frac{k\ ir}{h + irg}\gamma_0(irv_1) \\
&= k\frac{r^2 h - ir^3 g}{h^2 + r^2 g^2}\gamma_0(v_1)
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

Multiplicando (3.17) pelo conjugado de v_1, integrando em Ω e usando a fórmula de Green, obtemos

$$
\begin{aligned}
&(r^2 v_1, v_1) + (\Delta v_1, v_1) - (\alpha v_1, v_1) = 0 \\
&(r^2 v_1, v_1) - ((v_1, v_1)) + \langle \gamma_1(v_1), \gamma_0(v_1) \rangle - (\alpha v_1, v_1) = 0 \\
&\|v_1\|_\alpha^2 - r^2|v_1|^2 - \left(\frac{r^2 h - ir^3 g}{h^2 + r^2 g^2}\gamma_0(v_1), \gamma_0(v_1) \right)_k = 0 \\
&\|v_1\|_\alpha^2 - r^2|v_1|^2 - r^2 \left| \sqrt{\frac{h}{h^2 + r^2 g^2}}\ \gamma_0(v_1) \right|_k^2 + ir^3 \left| \sqrt{\frac{g}{h^2 + r^2 g^2}}\ \gamma_0(v_1) \right|_k^2 = 0
\end{aligned}
$$

Façamos por casos. Se $r = 0$, temos que $\|u(t)\|_\alpha^2 = 0$, ou seja, $v_1 \equiv 0$ e das relações acima, $v_2 \equiv 0$ e $v_3 \equiv 0$. Por outro lado, se $r \neq 0$ da equação acima temos que

$$
r^3 \left| \sqrt{\tfrac{g}{h^2 + r^2 g^2}}\ \gamma_0(v_1) \right|_k^2 = 0 \text{ ou ainda } \left| \sqrt{\tfrac{g}{h^2 + r^2 g^2}}\ \gamma_0(v_1) \right|_k^2 = 0
$$

Logo, $\gamma_0(v_1) \equiv 0$ em Γ. Assim, de (3.17), (3.18) e (3.19), v_1 deve satisfazer o seguinte problema

$$\begin{aligned}
&r^2 v_1 + \Delta v_1 - \alpha v_1 = 0 \\
&v_1 = 0 \ \text{ em } \ \Gamma \\
&\gamma_1(v_1) = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_1
\end{aligned}$$

Logo, de acordo com o Teorema 1.9, $v_1 \equiv 0$ e consequentemente $v_2 \equiv 0$ e $v_3 \equiv 0$. Portanto ir não pode pertencer à $\sigma_p(\mathcal{A})$ para qualquer $r \in \mathbb{R}$ já que $\sigma_p(\mathcal{A})$ é o conjunto dos valores próprios de $\mathcal{A}$. Observe que isso mostra que nenhum autovalor de $\mathcal{A}$ reside no eixo imaginário, uma das hipóteses do Teorema 1.7.

Note que umas da hipóteses do Teorema 1.9 requer que $v_1 \in H^2(\Omega)$. De fato, como Ω satisfaz a condição geométrica 2 e $V = (v_1, v_2, v_3) \in D(\mathcal{A})$, temos que $v_1 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ e $\Delta v_1 \in L^2(\Omega)$, assim por regularidade elíptica podemos concluir que $v_1 \in H^2(\Omega)$ e ainda $\gamma_1(v_1) = \frac{k}{g}(-\gamma_0(v_2) - hv_3)$ em $L^2(\Gamma_1)$.

Lembrando que o semigrupo $\Big(S(t)\Big)_{t>0}$ que estamos trabalhando é um semigrupo de contrações, podemos aplicar o Teorema 1.8, ou seja

$$\sigma_r(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \sigma_p(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$$

Assim resta provar que $\sigma_c \cap i\mathbb{R}$ é enumerável. Para isso, primeiro vamos mostrar que $Im(ir\ I - \mathcal{A}) = H$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Com efeito, sejam $r \in \mathbb{R}$ e $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in H$. Queremos encontrar $W = (w_1, w_2, w_3) \in D(\mathcal{A})$ tal que $(ir - \mathcal{A})W = \Phi$, em outras palavras,

$$\begin{aligned}
&ir\ w_1 - w_2 = \varphi_1 \quad , \quad ir\ w_2 - \Delta w_1 + \alpha w_1 = \varphi_2 \\
&ir\ gw_3 + \gamma_0(w_2) + hw_3 = g\varphi_3 \ \Rightarrow \ w_3 = \frac{g\varphi_3 - \gamma_0(ir\ w_1 - \varphi_1)}{h + ir\ g}
\end{aligned}$$

Note que, w_2 e w_3 são facilmente obtidos a partir de w_1. Então, do sistema acima devemos encontrar w_1 satisfazendo

$$\begin{aligned}
&\alpha w_1 - r^2 w_1 - \Delta w_1 = \varphi_2 + ir\varphi_1 \\
&\gamma_1(w_1) = \frac{k}{g}(-\gamma_0(w_2) - hv_3) = k(irw_3 - \varphi_3) \\
&\qquad\quad = ir\ k\left(-\frac{\gamma_0(w_1)}{h+irg} + \frac{g\varphi_3 + \gamma_0(\varphi_1)}{h+irg}\right) - k\varphi_3 \\
&\qquad\quad = k\frac{r^2}{h+irg}\gamma_0(w_1) + k\frac{ir\gamma_0(\varphi_1) - h\varphi_3}{h+irg} \\
&\qquad\quad = k\frac{r^2h - ir^3g}{h^2 + r^2g^2}\gamma_0(w_1) + k\frac{ir\gamma_0(\varphi_1) - h\varphi_3}{h+irg}
\end{aligned}$$

Denotemos $F = \varphi_2 + ir\varphi_1$, $G = k\frac{ir\gamma_0(\varphi_1)-h\varphi_3}{h+irg}$, $\zeta = k\frac{r^2h-ir^3g}{h^2+r^2g^2}$. Logo

$$\alpha w_1 - r^2 w_1 - \Delta w_1 = F \quad , \quad \gamma_1(w_1) = \zeta\gamma_0(w_1) + G$$

Por outro lado, defina $A_N : D(A_N) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ tal que $A_N u = \Delta u - \alpha u$ onde

$$D(A_N) = \{u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega);\ \ \Delta u \in L^2(\Omega)\ ,\ \ \gamma_1(u) = 0\ \text{ em } \Gamma_1\}\ .$$

É fácil ver A_N é invertível e sua inversa é contínua. Basta aplicar o Teorema da representação de Riesz. Em outras palavras, temos que $A_n^{-1} : L^2(\Omega) \longrightarrow D(A_N) \subset H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ é um operador contínuo. Considere também a aplicação de Neumann, $N : L^2(\Gamma) \longrightarrow H^1(\Omega)$ tal que, dado $\theta \in L^2(\Gamma)$, $N(\theta)$ é a solução do seguinte problema variacional

$$\begin{aligned}
&\Delta\psi - \alpha\psi = 0 \ \text{ em } \ \Omega \\
&\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = \theta \ \text{ em } \ \Gamma_1 \\
&\psi = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_0
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Novamente pelo Teorema da representação de Riesz, a aplicação N está bem definida e mais

N é contínua. Observe que $N(\theta) = \psi$. De (3.20) resulta que

$$\begin{aligned} A_N\left[w_1 - N\Big(\zeta\gamma_0(w_1) + G\Big)\right] + r^2 w_1 &= \Delta\left[w_1 - N\Big(\zeta\gamma_0(w_1) + G\Big)\right] \\ &\quad - \alpha\left[w_1 - N\Big(\zeta\gamma_0(w_1) + G\Big)\right] + r^2 w_1 \\ &= \Delta w_1 - \alpha w_1 + r^2 w_1 = -F \end{aligned}$$

ou melhor

$$A_N\left[w_1 - N\Big(\zeta\gamma_0(w_1) + G\Big)\right] + r^2 w_1 = -F \tag{3.21}$$

Note que $\left[w_1 - N\Big(\zeta\gamma_0(w_1) + G\Big)\right] \in D(A_N)$ já que $\gamma_1\left[w_1 - N\Big(\zeta\gamma_0(w_1) + G\Big)\right] = \gamma_1(w_1) - \gamma_1\left[N\Big(\zeta\gamma_0(w_1) + G\Big)\right] = 0$.

Agora definindo $B : H^1(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$ tal que $Bw_1 = N\Big(\zeta\gamma_0(w_1)\Big) - r^2 A_N^{-1} w_1$ e usando (3.21) temos que $\Big(I - B\Big)w_1 = N(G) - A_N^{-1}(F)$.

Resumindo, pela construção que fizemos, dado $r \in \mathbb{R}$ e $\Phi \in H$ temos que os seguintes problemas são equivalentes,

$$\begin{cases} \text{encontrar} \quad W \in D(\mathcal{A}) \\ \text{tal que} \quad (ir - A)W = \Phi \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{definir} \\ w_1 = (I - B)^{-1}\Big[N(G) - A_N^{-1}(F)\Big] \end{cases}$$

Veja que o segundo problema implica que

$$\begin{aligned} & w_1 = N(\zeta\gamma_0(w_1)) - r^2 A_N^{-1} w_1 + N(G) - A_N^{-1}(F) \\ & \gamma_0(w_1)\Big|_{\Gamma_0} = 0 \quad , \quad \Delta w_1 \in L^2(\Omega) \quad , \quad \gamma_1(w_1)\Big|_{\Gamma_1} = \zeta\gamma_0(w_1) + G\ . \end{aligned}$$

Pela equivalência dos problemas, para mostrar que $Im(ir - A) = H$, basta mostrar que $(I - B)$ é invertível e para tal vamos usar a alternativa de Fredholm.

Observe que $B \in \mathcal{L}(H^1(\Omega))$. De fato, como $Bu \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ e pela continuidade das aplicações N e A_N^{-1} então

$$\begin{aligned} \|Bu\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|Bu\|_\alpha = C\|N\Big(\zeta\gamma_0(u)\Big) - r^2 A_N^{-1} u\|_\alpha &\leq C\Big(\|N\Big(\zeta\gamma_0(u)\Big)\|_\alpha + \|r^2 A_N^{-1} u\|_\alpha\Big) \\ \leq C\Big(\tilde{C}\|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)}|\gamma_0(u)|_\Gamma + \tilde{C}_1 r^2 |u|\Big) \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Como $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável então do Teorema 1.11 temos que $B \in \mathcal{L}_c(H^1(\Omega))$.

Para usar alternativa de Fredholm precisamos mostrar ainda que $Nuc(I - B) = \{0\}$, para isso suponha que existe $u \in H^1(\Omega)$ tal que $Bu = u$, logo

$$u = N(\zeta\gamma_0(u)) - r^2 A_N^{-1}(u)$$

e usando as informações sobre os operadores envolvidos temos que u deve satisfazer o seguinte problema

$$\begin{aligned}
&r^2 u + \Delta u - \alpha u = 0 \\
&\gamma_0(u) = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0 \\
&\gamma_1(u) = \zeta\gamma_0(0) \quad \text{em} \quad \Gamma_1
\end{aligned}$$

Note que a função u satisfaz o problema dado pelas equações (3.17)-(3.19) e como vimos anteriormente, na prova de que $\sigma_p(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, se $r \in \mathbb{R}$ necessariamente a função u deve ser identicamente nula. Portanto $Nuc(I - B) = \{0\}$ e pela alternativa de Fredholm $Im(I - B) = H^1(\Omega)$ consequentemente $(I - B)$ é invertível.

Para concluir, dado $r \in \mathbb{R}$, suponha que $ir \in \sigma_c(\mathcal{A})$ então $(ir - \mathcal{A})^{-1}$ existe e não é limitado, e como provamos acima $Im(ir - \mathcal{A}) = H$, ou melhor, $D\Big((ir - \mathcal{A})^{-1}\Big) = H$, como $\mathcal{A}$ é fechado temos $(ir - \mathcal{A})^{-1}$ é fechado. Assim pelo teorema do gráfico fechado $(ir - A)^{-1}$ é limitado. Absurdo!

Portanto $\sigma_c(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ e como queríamos $S(t)$ é fortemente estável. $\square$

Observe que, a priori no Teorema 3.2 temos estabilização forte da energia somente para soluções regulares, ou seja, segundo a Definição 2.5.1, porém como a demonstração acima não impõe restrição na localização do W_0, isto é, pode estar tanto em $D(\mathcal{A})$ quanto em H, podemos concluir também estabilização forte da energia do problema para soluções generalizadas de $W'(t) = \mathcal{A}W(t)$, isto é, considerando $W_0 \in H$. Neste caso a solução generalizada será uma solução fraca do problema (P3).

Teorema 3.3. *Suponha que*

H'.1 *A terna* $\left(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1\right)$ *satisfaz a condição 2 ;*

H'.2 $g, h, k \in C(\overline{\Gamma}_1)$ *tais que* $g(x) > 0$, $h(x) > 0$ *e* $k(x) > 0$ *para todo* $x \in \overline{\Gamma}_1$ *;*

H'.3 $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ *tal que* $\alpha \geq 0$ *para quase todo* $x \in \Omega$ *.*

Se (u, δ) *é a solução de (P3) dada pelo Teorema 2.6 então existem constantes positivas* M *e* θ *tais que*

$$E_\alpha(t) \leq M E_\alpha(0) e^{-\theta t} \quad \text{para todo} \quad t \geq 0 \ .$$

Demonstração: Seja (u, δ) segundo Teorema 2.6. Como já fizemos antes, Multiplicando (2.62) por $2u'(t)$ e integrando em Ω e multiplicando (2.63) por $2k\delta'(t)$ e integrando em Γ_1, depois usando fórmula de Green e somando as equações resultantes chegamos a

$$\frac{d}{dt}\Big[\|u(t)\|_\alpha^2 + |u'(t)|^2 + |\delta|_{hk}^2\Big] + 2|\delta'(t)|_{kg}^2 = \frac{dE_\alpha}{dt}(t) + 2|\delta'(t)|_{kg}^2 = 0$$

Logo

$$E_\alpha(T) + 2\int_S^T |\delta'(t)|_{kg}^2 dt = E_\alpha(S) \tag{3.22}$$

Faremos a demonstração em três etapas. A primeira Etapa explora a condição geométrica do Ω.

Lema 3.3.1. *Assuma que* $\left(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_1\right)$ *esta na condição 2 e fixe* $T > 0$ *arbitrário. Se* $u \in C\Big([0,T]; H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\Big) \cap C^1\Big([0,T]; L^2(\Omega)\Big)$ *satisfaz*

$$\begin{aligned} &u'' - \Delta u = -\alpha u \qquad && \gamma_0(u') \in L^2\Big(0,T; L^2(\Gamma_1)\Big) \\ &u(0) = u_0 \ , \ u'(0) = u_1 && \gamma_1(u) \in L^2\Big(0,T; L^2(\Gamma_1)\Big) \end{aligned}$$

Então

$$\int_\beta^{T-\beta} \Big[\|u(t)\|_\alpha^2 + |u'(t)|^2\Big]dt \leq C\Big[\sup_{t\in[0,T]} \{\|u(t)\|_\alpha^2 + |u'(t)|^2\} + \int_0^T \Big(|\gamma_1(u)|^2 + |\gamma_0(u')|^2\Big)d\Gamma dt\Big] + C_T|u|^2_{L^2([0,T];H^{\frac{1}{2}+\rho}(\Omega))}$$

onde C *é uma constante que não depende do tempo, e* $\beta > 0$, $0 < \rho < \frac{1}{2}$ *são constantes pequenas mais fixas.*

Essa demonstração esta no Apêndice, pois é muito longa. Observe que, a solução u segundo o Teorema 2.6, satisfaz as hipóteses do Lema 3.3.1, já que Ω satisfaz a condição geométrica 2 e assim pode-se usar regularidade elíptica, ou seja, $u(t) \in H^2(\Omega)$ e portanto $\gamma_1\Big(u(t)\Big) = k\delta'(t)$ em $L^2(\Gamma_1)$. Para facilitar denote $|u|^2_{L^2([0,T];H^{\frac{1}{2}+\rho}(\Omega))} = |||u|||$. Da desigualdade dada pelo Lema 3.3.1 podemos ver que

$$\int_\beta^{T-\beta} \Big[\|u(t)\|_\alpha^2 + |u'(t)|^2\Big]dt \leq C\left[\sup_{t\in[0,T]} \Big\{E_\alpha(t)\Big\} + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{g}{g} k^2 |\delta'|^2 d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\gamma_0(u')|^2 d\Gamma dt\right]$$
$$+ C_T|||u||| \leq C\left[E_\alpha(0) + \frac{1}{g_0}k_1 \int_0^T \int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\gamma_0(u')|^2 d\Gamma dt\right] + C_T|||u|||$$

por (3.22)

$$\begin{aligned}\int_\beta^{T-\beta} \Big[\|u(t)\|_\alpha^2 + |u'(t)|^2\Big]dt &\leq C\left[E_\alpha(T) + \Big(2 + \frac{1}{g_0}k_1\Big)\int_0^T \int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma dt\right. \\ &\qquad \left. + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\gamma_0(u')|^2 d\Gamma dt\right] + C_T|||u||| \\ &\leq C_1\left[E_\alpha(T) + \int_0^T \int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma dt\right. \\ &\qquad \left. + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\gamma_0(u')|^2 d\Gamma dt\right] + C_T|||u|||\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\left\{\int_0^\beta + \int_{T-\beta}^T\right\} \Big[\|u(t)\|_\alpha^2 + |u'(t)|^2\Big]dt \leq \left\{\int_0^\beta + \int_{T-\beta}^T\right\} E_\alpha(t)dt \leq 2\beta E_\alpha(0)$$
$$\leq 2\beta\Big[E_\alpha(T) + 2\int_0^T \int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma\Big]$$

Logo

$$\int_0^T \Big[\|u(t)\|_\alpha^2 + |u'(t)|^2\Big]dt \leq C_2 \Bigg[E_\alpha(T) + \int_0^T \int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\gamma_0(u')|^2 d\Gamma dt\Bigg] + C_T|||u||| \tag{3.23}$$

Na segunda etapa provaremos um lema que estima os termos da fronteira em termos do damping $|\delta'|^2$.

Lema 3.3.2. *Seja $\varepsilon > 0$. Então existe constantes C_3 e $C(\varepsilon)$ (C_3 não depende de ε) tais que*

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} h|\delta|^2 d\Gamma dt \leq C_3 E_\alpha(T) + \varepsilon \int_0^T E_\alpha(t)dt + C(\varepsilon) \int_0^T \int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma dt \tag{3.24}$$

Demonstração: Multiplicando (2.63) por δ e integrando em Σ_1 e usando integração por partes, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Gamma_1} h\delta^2 d\Gamma dt &= -\int_0^T \int_{\Gamma_1} g\delta'\delta d\Gamma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \gamma_0(u')\delta d\Gamma dt \\
&= -\int_0^T \int_{\Gamma_1} g\delta'\delta d\Gamma dt - \Big[\int_{\Gamma_1} \gamma_0(u)\delta\Big]_0^T + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \gamma_0(u)\delta' d\Gamma dt \\
&\leq \int_0^T \int_{\Gamma_1} g|\delta'|\ |\delta| d\Gamma dt + \Big[\int_{\Gamma_1} |\gamma_0(u)|\ |\delta|\Big]_0^T + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\gamma_0(u)|\ |\delta'| d\Gamma dt \\
&\leq C_1(\varepsilon_1) \int_0^T \int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma dt + \varepsilon_1 \int_0^T \int_{\Gamma_1} h|\delta|^2 d\Gamma dt \\
&\qquad + C_4 \sup_{t\in[0,T]} \Big\{\int_{\Gamma_1} |\gamma_0(u)|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_1} hk|\delta|^2 \Gamma\Big\} \\
&\qquad\quad + \varepsilon_1 \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\gamma_0(u)|^2 d\Gamma dt + C_2(\varepsilon_1) \int_0^T \int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma dt
\end{aligned}$$

aqui foi usada desigualdade de Young e as limitações de g, h, k. Agora pelo teorema do Traço e como $E_\alpha(t) \leq E_\alpha(0)$, para todo $t \geq 0$, obtemos

$$\sup_{t\in[0,T]} \Big\{\int_{\Gamma_1} |\gamma_0(u)|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_1} hk|\delta|^2 \Gamma\Big\} \leq C_5 E_\alpha(0) = C_5 \Big[E_\alpha(T) + 2\int_0^T \int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma dt\Big]$$

$$\varepsilon_1 \Big(\int_0^T \int_{\Gamma_1} h|\delta|^2 d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\gamma_0(u)|^2 d\Gamma\Big) \leq C_6 \varepsilon_1 \int_0^T E_\alpha(t)dt$$

considere $\varepsilon = C_6\varepsilon_1$. Portanto, combinando as desigualdades, concluímos (3.24), onde $C_3 = (C_4C_5)$, $C(\varepsilon_1) = \left(2C_5 + C_1(\varepsilon_1) + C_2(\varepsilon_1)\right)$ □

Observe que

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} |\gamma_0(u')|^2 d\Gamma dt = \int_0^T \int_{\Gamma_1} (g\delta' + h\delta)^2 d\Gamma \leq C_7 \int_0^T \int_{\Gamma_1} (gk|\delta'|^2 + h|\delta|^2) d\Gamma dt dt \qquad (3.25)$$

Por outro lado, somando $\int_0^T \int_{\Gamma_1} hk|\delta|^2 d\Gamma dt$, em ambos lados de (3.23), temos que

$$\begin{aligned}\int_0^T \left[\|u(t)\|_\alpha^2 + |u'(t)|^2\right] dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} hk|\delta|^2 d\Gamma dt \leq C_2 \Bigg[E_\alpha(T) + \int_0^T \int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma dt \\ + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\gamma_0(u')|^2 d\Gamma dt\Bigg] + C_T|||u||| + \int_0^T \int_{\Gamma_1} hk|\delta|^2 d\Gamma dt\end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned}\int_0^T E_\alpha(t) dt \leq C_2 \Bigg[E_\alpha(T) + \int_0^T \int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma dt \\ + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\gamma_0(u')|^2 d\Gamma dt\Bigg] + C_T|||u||| + \int_0^T \int_{\Gamma_1} hk|\delta|^2 d\Gamma dt\end{aligned}$$

de (3.25)

$$\begin{aligned}\int_0^T E_\alpha(t) dt \leq C_2 \left[E_\alpha(T) + \int_0^T \int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma dt + C_7 \int_0^T \int_{\Gamma_1} (gk|\delta'|^2 + h|\delta|^2) d\Gamma dt\right] \\ + C_T|||u||| + k_1 \int_0^T \int_{\Gamma_1} h|\delta|^2 d\Gamma dt\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 3.3.2 com $\varepsilon < \dfrac{1}{C_2C_7 + k_1}$, tem-se

$$\begin{aligned}\int_0^T E_\alpha(t) dt \leq C_2 \Bigg[E_\alpha(T) + (1 + C_7) \int_0^T \int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma dt \\ + C_7 \left(C_3E(T) + \varepsilon \int_0^T E_\alpha(t) dt + C(\varepsilon) \int_0^T \int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma dt\right)\Bigg] \\ + C_T|||u||| + k_1\Big(C_3E(T) + \varepsilon \int_0^T E_\alpha(t) dt + C(\varepsilon) \int_0^T \int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma dt\Big)\end{aligned}$$

Logo

$$(1 - C_2C_7\varepsilon - k_1\varepsilon)\int_0^T E_\alpha(t)dt \leq \Big(C_2 + C_7C_3 + k_1C_3\Big)E_\alpha(T) + \Big(C_2 + C_2C_7 + C_2C_7C(\varepsilon) + k_1C(\varepsilon)\Big)\int_0^T\int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma dt + C_T|||u|||$$

pela escolha do ε chegamos em

$$\int_0^T E_\alpha(t)dt \leq C_8\Big[E_\alpha(T) + \int_0^T\int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma dt\Big] + C_T|||u||| \tag{3.26}$$

Agora, pelo fato de que $TE_\alpha(T) \leq \displaystyle\int_0^T E_\alpha(t)dt$ e notando que C_8 não depende de T, podemos escolher T suficientemente grande, tal que da equação (3.26) se tenha

$$E_\alpha(T) \leq C_8\int_0^T\int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma dt + C_T|||u||| \tag{3.27}$$

Na terceira etapa nós vamos estimar o termo $|||u|||$.

Lema 3.3.3. *Sejam $T > 0$ tal que (3.27) é satisfeita para qualquer par de solução de (P3) e $\rho < \dfrac{1}{2}$. Então existe uma constante $\tilde{C}_T$ tal que se (u, δ) é solução forte de (P3), Então*

$$|||u||| \leq \tilde{C}_T\int_0^T\int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma dt$$

Demonstração: Suponha, por absurdo, que existe uma sequência de soluções forte (u_m, δ_m) tal que:

$$|||u_m||| = 1 \quad , \quad \forall m \in \mathbb{N} \tag{3.28}$$

$$\int_0^T\int_{\Gamma_1} gk|\delta'_m|^2 d\Gamma dt \longrightarrow 0 \tag{3.29}$$

Denote por $E_{\alpha m}(t) = \|u_m(t)\|_\alpha^2 + |u_m'(t)|^2 + |\delta_m(t)|_{hk}^2$ e como vimos anteriormente

$$E_{\alpha m}(t) \leq E_{\alpha m}(0) = E_{\alpha m}(T) + \int_0^T \int_{\Gamma_1} gk|\delta_m'|^2 d\Gamma dt$$

Agora, combinando (3.27), (3.28) e (3.29), garantimos a existência de uma constante M, tal que

$$E_{\alpha m}(t) \leq E_{\alpha m}(0) = E_{\alpha m}(T) + \int_0^T \int_{\Gamma_1} gk|\delta_m'|^2 d\Gamma dt \leq M$$

Portanto

$$\begin{aligned}
&\{u_m\} \ \text{ é limitada em } \ L^\infty\Big(0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\Big) \ \ , \ \ \{u_m'\} \ \text{ é limitada em } \ L^\infty\Big(0,T;L^2(\Omega)\Big)\\
&\{\delta_m\} \ \text{ é limitada em } \ L^\infty\Big(0,T;L^2(\Gamma_1)\Big)
\end{aligned}$$

Note que $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} H^{\frac{1}{2}+\rho}(\Omega)$, assim pelo Teorema 1.10, $\{u_m\}$ é relativamente compacto em $C\Big([0,T];H^{\frac{1}{2}+\rho}(\Omega)\Big)$ e consequentemente relativamente compacto em $L^2\Big([0,T];H^{\frac{1}{2}+\rho}(\Omega)\Big)$. Assim passando tantas subsequências quantas forem necessárias temos

$$\begin{aligned}
&u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u_\infty \ \text{ em } \ L^\infty\Big(0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\Big) \ \ , \ \ u_m' \overset{*}{\rightharpoonup} u_\infty' \ \text{ em } \ L^\infty\Big(0,T;L^2(\Omega)\Big)\\
&\delta_m \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_\infty \ \text{ em } \ L^\infty\Big(0,T;L^2(\Gamma_1)\Big) \ \ , \ \ \delta_m' \to 0 \ \text{ em } \ L^2\Big(0,T;L^2(\Gamma_1)\Big)\\
&u_m \to u_\infty \ \text{ em } \ L^2\Big([0,T];H^{\frac{1}{2}+\rho}(\Omega)\Big)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Como (u_m, δ_m) é uma sequência de solução forte sabemos que,

$$u_m'' - \Delta u_m + \alpha u_m = 0 \ , \ \gamma_0(u_m') + g\delta_m' + h\delta_m = 0 \ , \ \gamma_1(u_m) = k\delta_m'$$

Passando o limite nas equações temos que $(u_\infty, \delta_\infty)$ é uma solução fraca de (P3) e análogo à(3.22) temos

$$E_{\alpha m}(t) + 2\int_0^t \int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma dt = E_{\alpha m}(0)$$

Passando o limite no m, tem-se $E_{\alpha\infty}(t) = E_{\alpha\infty}(0)$ para todo $t \geq 0$. Por outro lado do Teorema 3.2 (Estabilidade Forte)

$$\lim_{t\to\infty} E_{\alpha\infty}(t) = 0$$

Logo $E_{\alpha\infty}(t) = 0$ para todo $t \geq 0$, e com isso $u_\infty \equiv 0$. Absurdo! já que $|||u_m||| = 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e também temos a convergência (3.30). $\square$

Assim aplicando o Lema 3.3.3 em (3.27), concluímos que

$$E_\alpha(T) \leq 2\tilde{C}_{1T} \int_0^T \int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma dt$$

para algum $T > 0$. Agora para finalizar, usando (3.22) e a equação acima

$$(1 + \tilde{C}_{1T})E_\alpha(T) \leq 2\tilde{C}_{1T} \int_0^T \int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma dt + \tilde{C}_{1T}E_\alpha(0) - 2\tilde{C}_{1T} \int_0^T \int_{\Gamma_1} gk|\delta'|^2 d\Gamma dt$$

$$E_\alpha(T) \leq \frac{\tilde{C}_{1T}}{1 + \tilde{C}_{1T}} E_\alpha(0)$$

A partir dessa desigualdade queremos concluir o decaimento exponencial. Então primeiramente lembre da demonstração do Teorema 2.6, onde definimos um operador $\mathcal{A}$ e por argumentos de semigrupo garantimos a existência de uma terna $W(t) = \Big(u(t), u'(t), \delta(t)\Big)$ tal que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}W(t) = \mathcal{A}W(t) \\ &W(0) = \Big(u(0), u'(0), \delta(0)\Big) = \Big(u_0, u_1, \delta_0\Big) = W_0 \end{aligned}$$

e com energia associada a esse problema é $E_\alpha(t) = \|u(t)\|_\alpha^2 + |u'(t)|^2 + |\delta(t)|_{hk}^2$.

Definindo um outro problema de seguinte forma

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}V(t) = \mathcal{A}V(t) \\ &V(0) = W(r) \end{aligned}$$

Temos que sua única solução é $V(t) = W(t + r)$. Denotaremos a energia com respeito à U e V por $E_\alpha(t, U) = E_\alpha(t)$ e $E_\alpha(t, V) = E_\alpha(t + r)$ para todo $t \geq 0$, respectivamente. Assim, da mesma forma que fizemos com $E_\alpha(T)$ podemos fazer para $E_\alpha(T, V)$ resultando $E_\alpha(T, V) \leq \dfrac{\tilde{C}_{1T}}{1 + \tilde{C}_{1T}} E_\alpha(0, V)$, em outras palavras, $E_\alpha(T + r) \leq \dfrac{\tilde{C}_{1T}}{1 + \tilde{C}_{1T}} E_\alpha(r)$. Assim,

procedendo por indução
$$E_\alpha(nT + r) \leq \left(\frac{\tilde{C}_{1T}}{1 + \tilde{C}_{1T}}\right)^n E_\alpha(r)$$

Certo, agora seja $t \geq 0$, então pelo algorítimo da divisão, existe $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq r_1 < T$, tal que $t = nT + r_1$. Portanto

$$E(t) \leq \left(\frac{\tilde{C}_{1T}}{1 + \tilde{C}_{1T}}\right)^n E(r_1) \leq \left(\frac{\tilde{C}_{1T}}{1 + \tilde{C}_{1T}}\right)^n E(0) \leq \left(\frac{\tilde{C}_{1T}}{1 + \tilde{C}_{1T}}\right)^{\frac{t-r_1}{T}} E(0) \leq \left(\frac{\tilde{C}_{1T}}{1 + \tilde{C}_{1T}}\right)^{\frac{t}{T}-1} E(0)$$
$$= \left(\frac{1 + \tilde{C}_{1T}}{\tilde{C}_{1T}}\right) \left(\frac{1 + \tilde{C}_{1T}}{\tilde{C}_{1T}}\right)^{-\frac{t}{T}} E(0) = \left(\frac{1 + \tilde{C}_{1T}}{\tilde{C}_{1T}}\right) e^{-1/T \ ln\left(\frac{1+\tilde{C}_{1T}}{\tilde{C}_{1T}}\right)t} E(0)$$

Assim esta provado o teorema com $M = \left(\frac{1+\tilde{C}_{1T}}{\tilde{C}_{1T}}\right)$, $\theta = 1/T \ ln\left(\frac{1+\tilde{C}_{1T}}{\tilde{C}_{1T}}\right)$ □

Capítulo 4

Apêndice

4.1 Lema 3.3.1

Para demonstração utilizaremos algumas identidades definidas na fronteira Γ. Primeiro seja $u : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suficientemente regular e q um campo de vetores definido sobre Γ. Então

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \nu}\, \nu + \nabla_T u \tag{4.1}$$

$$q \cdot \nabla u = \frac{\partial u}{\partial \nu}(q \cdot \nu) + q \cdot \nabla_T u \tag{4.2}$$

$$|\nabla u|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 + |\nabla_T u|^2 \tag{4.3}$$

onde ∇_T é a derivada tangencial.

Relembrando algumas hipóteses importantes para essa demonstração temos que, existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\langle m_{x_0}(x), \nu(x)\rangle \leq 0$ para todo $x \in \Gamma_0$ e estamos supondo que $u \in C\Big([0,T]; H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\Big) \cap C^1\Big([0,T]; L^2(\Omega)\Big)$ satisfaz

$$u'' - \Delta u = -\alpha u \tag{4.4}$$

$$u(0) = u_0 \ , \ u'(0) = u_1 \tag{4.5}$$

$$\gamma_0(u') \in L^2\Big(0,T; L^2(\Gamma_1)\Big) \tag{4.6}$$

$$\gamma_1(u) \in L^2\Big(0,T; L^2(\Gamma_1)\Big) \tag{4.7}$$

Queremos concluir que

$$\int_{\beta}^{T-\beta}\Big[\|u(t)\|_{\alpha}^{2}+|u'(t)|^{2}\Big]dt\le C\Big[\sup_{t\in[0,T]}\{\|u(t)\|_{\alpha}^{2}+|u'(t)|^{2}\}+\int_{0}^{T}\Big(|\gamma_1(u)|^2+|\gamma_0(u')|^2\Big)d\Gamma dt\Big] + C_T|u|^2_{L^2([0,T];H^{\frac{1}{2}+\rho}(\Omega))} \tag{4.8}$$

onde C é uma constante que não depende do tempo, e $\beta>0$, $0<\rho<\frac{1}{2}$ são constantes pequenas mais fixas.

Demonstração: Seguiremos na prova por soluções regulares e o resultado se estenderá por densidade às soluções fracas. Para simplificar as notações vamos denotar o produto interno usual do $\mathbb{R}^n$ por $x\cdot y$, para todo $x,y\in\mathbb{R}^n$, omitir as aplicações traço e denotar $m_{x_0}=x-x_0$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$ apenas por m.

Então, seja $u\in C([0,T];H^2(\Omega))\cap C^1([0,T];H^1_{\Gamma_0}(\Omega))$ satisfazendo (4.4)-(4.5). Multiplicando a equação (4.4) por $(m\cdot\nabla u)\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, e integrando em $Q=\Omega\times(0,T)$, obtemos

$$\underbrace{\int_0^T\int_\Omega u_{tt}(m\cdot\nabla u)dx\ dt}_{N_1}-\underbrace{\int_0^T\int_\Omega \Delta u(m\cdot\nabla u)dx\ dt}_{N_2}=\int_0^T\int_\Omega(-\alpha u)(m\cdot\nabla u)dx\ dt \tag{4.9}$$

Integrando N_1 por partes, temos

$$\begin{aligned} N_1 &= \int_0^T\int_\Omega u_{tt}(m\cdot\nabla u)dx\ dt \\ &= \Big[\int_\Omega u'(m\cdot\nabla u)dx\Big]_0^T-\underbrace{\int_0^T\int_\Omega u'(m\cdot\nabla u')dx\ dt}_{N_3}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Pondo $m(x)=\Big(m_1(x),m_2(x),...,m_n(x)\Big)$, $\nabla u'=\left(\dfrac{\partial u'}{\partial x_1},...,\dfrac{\partial u'}{\partial x_n}\right)$, aplicando a Fórmula de Gauss em N_3, para $i = 1, ..., n$, e como $u' = 0$ em Σ_0, segue que

$$\begin{aligned} N_3 &= \int_0^T \int_\Omega u'(m \cdot \nabla u') dx\ dt = \int_0^T \int_\Omega u' \Big(\sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial u'}{\partial x_i} \Big) dx\ dt = \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (u')^2 m_i\ dx\ dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_\Omega (u')^2 \frac{\partial m_i}{\partial x_i}\ dx\ dt + \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_\Gamma (u')^2 m_i\ \nu_i\ d\Gamma\ dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega (div\ m)(u')^2 dx\ dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (u')^2 (m \cdot \nu)\ d\Gamma\ dt. \end{aligned} \tag{4.11}$$

De (4.10) e (4.11) e do fato de $div\ m = n$, vem que

$$N_1 = \Big[\int_\Omega u'(m \cdot \nabla u) dx \Big]_0^T + \frac{n}{2} \int_0^T \int_\Omega (u')^2 dx\ dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (u')^2 (m \cdot \nu)\ d\Gamma\ dt. \tag{4.12}$$

Por outro lado, aplicando a Fórmula de Green em N_2, obtemos

$$\begin{aligned} N_2 &= -\int_0^T \int_\Omega \Delta u (m \cdot \nabla u) dx\ dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla (m \cdot \nabla u) dx\ dt - \int_0^T \int_\Gamma \partial_\nu u (m \cdot \nabla u) d\Gamma\ dt. \end{aligned}$$

Usando a identidade (4.2) e o fato que $u = 0$ em Σ_0, segue que $\nabla_T u = 0$ em Γ_0 e portanto

$$\begin{aligned} N_2 &= \underbrace{\int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla (m \cdot \nabla u) dx\ dt}_{N_4} \\ &= -\int_0^T \int_\Gamma \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 (m \cdot \nu) d\Gamma\ dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} (m \cdot \nabla_T u) d\Gamma\ dt. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Assim, usando a notação

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla m \cdot \nabla u\ dx = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial m_j}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\ dx, \tag{4.14}$$

$$
\begin{aligned}
N_4 &= \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla (m \cdot \nabla u) dx\ dt = \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}(m \cdot \nabla u) dx\ dt \\
&= \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n m_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) dx\ dt \\
&= \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial m_j}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + m_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right] dx\ dt \\
&= \int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial m_j}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\ dx\ dt + \int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} m_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\ dx\ dt \\
&= \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla m \cdot \nabla u\ dx\ dt + \underbrace{\int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} m_j\ dx\ dt}_{N_5}. \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

Da Fórmula de Gauss e utilizando novamente que $div\ m = n$, decorre que

$$
\begin{aligned}
N_5 &= \int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} m_j\ dx\ dt = \int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 m_j\ dx\ dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} |\nabla u|^2 m_j\ dx\ dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^T \sum_{j=1}^n \int_\Omega |\nabla u|^2 \frac{\partial m_j}{\partial x_j}\ dx\ dt + \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{j=1}^n \int_\Gamma |\nabla u|^2 m_j\ \nu_j\ d\Gamma\ dt \\
&= -\frac{n}{2} \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2 dx\ dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma |\nabla u|^2 (m \cdot \nu)\ d\Gamma\ dt. \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

De (4.3) e considerando que $u = 0$ sobre Σ_0, temos que

$$
\begin{aligned}
N_5 &= -\frac{n}{2} \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2 dx\ dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 (m \cdot \nu)\ d\Gamma\ dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 (m \cdot \nu)\ d\Gamma\ dt. \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

Portanto, de (4.13)-(4.17), resulta que

$$\begin{aligned} N_2 &= \int_0^T\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla m\cdot\nabla u\ dx\ dt - \frac{n}{2}\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\ dt \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma \left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 (m\cdot\nu)\ d\Gamma\ dt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 (m\cdot\nu) d\Gamma\ dt \\ &\quad -\int_0^T\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}(m\cdot\nabla_T u) d\Gamma\ dt. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Portanto, observando que $\dfrac{\partial m_j}{\partial x_i} = 1$ se $i = j$ e $\dfrac{\partial m_j}{\partial x_i} = 0$ se $i \neq j$, concluímos de (4.14) e (4.18)

$$\begin{aligned} \int_0^T\int_\Omega \Delta u\,(m\cdot\nabla u)\,dx\ dt &= \frac{1}{2}\int_\Sigma \left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 (m\cdot\nu)\ d\Sigma - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} |\nabla_T u|^2 (m\cdot\nu)\ d\Sigma \\ &\quad + \int_{\Sigma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}(m\cdot\nabla_T u)\ d\Sigma + \left(\frac{n}{2}-1\right)\int_Q |\nabla u|^2\ dQ. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Lembrando que, $m\cdot\nu \leq 0$ em Γ_0 e das igualdades (4.9), (4.12) e (4.19) vem que

$$\int_Q (-\alpha u)(m\cdot\nabla u)\ dQ = \left[\int_\Omega u'(m\cdot\nabla u)\ dx\right]_0^T - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} |u'|^2 (m\cdot\nu)\ d\Sigma + \frac{n}{2}\int_Q |u'|^2\ dQ$$

$$-\frac{1}{2}\int_\Sigma \left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 (m\cdot\nu)\ d\Sigma + \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} |\nabla_T u|^2 (m\cdot\nu)\ d\Sigma - \int_{\Sigma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}(m\cdot\nabla_T u)\ d\Sigma + \left(1-\frac{n}{2}\right)\int_Q |\nabla u|^2\ dQ$$

$$\geq \frac{n}{2}\int_Q \left[|u'|^2 - |\nabla u|^2\right] dQ + \int_Q |\nabla u|^2\ dQ + \left[\int_\Omega u'(m\cdot\nabla u)\ d\Sigma\right]_0^T - \int_{\Sigma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}(m\cdot\nabla_T u)\ d\Sigma$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} \left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 (m\cdot\nu)\ d\Sigma + \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} |\nabla_T u|^2 (m\cdot\nu)\ d\Sigma - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} |u'|^2 (m\cdot\nu)\ d\Sigma.$$

Assim,

$$\frac{n}{2}\int_Q \left[|u'|^2 - |\nabla u|^2\right] dQ + \int_Q |\nabla u|^2\ dQ$$

$$\leq \int_Q (-\alpha u)(m\cdot \nabla u)\ dQ - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} |\nabla_T u|^2 (m\cdot \nu)\ d\Sigma + \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} |u'|^2 (m\cdot \nu)\ d\Sigma$$

$$-\left[\int_\Omega u'(m\cdot \nabla u)\ d\Sigma\right]_0^T - \int_{\Sigma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}(m\cdot \nabla_T u)\ d\Sigma + \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 (m\cdot \nu)\ \ d\Sigma;$$

isto é, de (4.3) e da regularidade do campo m, ou seja, tem máximo e mínimo no compacto Γ_1, então

$$\frac{n}{2}\int_Q \left[|u'|^2 - |\nabla u|^2\right] dQ + \int_Q |\nabla u|^2\ dQ$$

$$\leq C\int_Q \alpha |u|^2\ dQ + \frac{1}{4}\int_Q |\nabla u|^2\ dQ + C\int_{\Sigma_1} |\nabla_T u|^2\ d\Sigma + C\int_{\Sigma_1} |u'|^2\ d\Sigma$$

$$+C\sup_{t\in[0,T]}\left\{|u'(t)|^2 + |\nabla u(t)|^2 + |\alpha^{\frac{1}{2}} u(t)|^2\right\} + C\int_{\Sigma_1} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2\ \ d\Sigma.$$

Donde

$$\frac{n}{2}\int_Q \left[|u'|^2 - |\nabla u|^2\right] dQ + \frac{3}{4}\int_Q |\nabla u|^2\ dQ \leq C\sup_{t\in[0,T]}\left\{|u'(t)|^2 + \|u(t)\|_\alpha^2\right\} + C\int_{\Sigma_1} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2\ \ d\Sigma$$

$$+C\left\{\int_{\Sigma_1} |u'|^2\ d\Sigma + \int_{\Sigma_1} |\nabla_T u|^2\ d\Sigma + \int_Q \alpha |u|^2\ dQ\right\}.$$

Logo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_Q \left[|u'|^2 - |\nabla u|^2\right] dQ + \frac{3}{4}\int_Q |\nabla u|^2\ dQ &\leq \frac{n}{2}\int_Q \left[|u'|^2 - |\nabla u|^2\right] dQ + \frac{3}{4}\int_Q |\nabla u|^2\ dQ \\ &\leq C\sup_{t\in[0,T]}\left\{|u'(t)|^2 + \|u(t)\|_\alpha^2\right\} + C\int_{\Sigma_1} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2\ \ d\Sigma \\ &\quad +C\left\{\int_{\Sigma_1} |u'|^2\ d\Sigma + \int_{\Sigma_1} |\nabla_T u|^2\ d\Sigma + \int_Q \alpha |u|^2\ dQ\right\}\end{aligned}$$

somando em ambos os lados $\int_Q \alpha|u|^2 dQ$ e ajustando as constantes

$$\int_Q \left[|u'|^2 + |\nabla u|^2\right] dQ + \int_Q \alpha|u|^2 dQ \leq C \sup_{t\in[0,T]} \left\{|u'(t)|^2 + \|u(t)\|_\alpha^2\right\} + C\int_{\Sigma_1} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 \, d\Sigma$$
$$+C\left\{\int_{\Sigma_1} |u'|^2 \, d\Sigma + \int_{\Sigma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Sigma + \int_Q \alpha|u|^2 \, dQ\right\}$$

Portanto

$$\int_0^T \left[|u'(t)|^2 + \|u(t)\|_\alpha^2\right] dt \leq C \sup_{t\in[0,T]} \left\{|u'(t)|^2 + \|u(t)\|_\alpha^2\right\} + C\int_Q \alpha|u|^2 \, dQ$$
$$+C\left\{\int_{\Sigma_1} |u'|^2 \, d\Sigma + \int_{\Sigma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Sigma + \int_{\Sigma_1} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 \, d\Sigma\right\} \quad (4.20)$$

Agora, do lema 7.2, desigualdade (7.5) em [22], temos

$$\int_\beta^{T-\beta} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma dt \leq C_{\rho,\beta} \left\{\int_{\Sigma_1} \left[\left|\frac{\partial u}{\partial \nu} \, u\right|^2 + |u|^2\right] d\Sigma\right.$$
$$\left. + C_T |u|^2_{L^2(0,T;H^{1/2+\rho}(\Omega))} + \int_Q |\alpha u|^2 dQ\right\}, \quad (4.21)$$

com β e ρ sob as hipóteses enunciadas no lema. Majorando em (4.20), substituindo $(0,T)$ por $(\beta, T-\beta)$ e usando a desigualdade (4.21), obtemos que

$$\int_\beta^{T-\beta} \left[|u'(t)|^2 + ||u(t)||_\alpha^2\right] dt \leq C \sup_{t\in[0,T]} \left\{|u'(t)|^2 + \|u(t)\|_\alpha^2\right\} + C\left[\int_{\Sigma_1} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma + \int_{\Sigma_1} |u'|^2 d\Sigma +\right]$$

$$+C_T |u|^2_{L^2(0,T;H^{1/2+\rho}(\Omega))} + C\int_Q \alpha|u|^2 dQ$$

Agora basta observar que $\int_Q \alpha|u|^2 dQ \leq C|u|_{L^2(0,T;H^{1/2+\rho}(\Omega))}$ e como queríamos concluir, temos (4.8).

$\square$

Bibliografia

[1] ADAMS, R. A.; FOURNIER J. J. **Sobolev spaces**, Academic Press, 2003.

[2] ARENDT, W.; BATTY, C. J. K. **Tauberian Theorems and Stability of One-parameter Semigroups**, Transactions of the AMS , Vol. 306, Number 2, p. 837-852, 1998.

[3] BEALE, J. T.; ROSENCRANS, S. I. **Acoustic Boundary Conditions**, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 80, Number 6, p.1276-1278, 1974.

[4] BEALE, J. T. **Spectral Properties of an Acoustic Boundary Condition**, Indiana Univ Math. J., Vol 25, p.895-917, 1976.

[5] BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**, Universitext. Springer, New York, 2011.

[6] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. **Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev**, Maringá: Eduem, 2009.

[7] CHUESHOV, I.; LASIECKA, I. **Von Karman evolution equations: Well-posedness and long-time dynamics**, Springer, Série Springer Monographs in Mathematics, 2010

[8] DAUTRAY, R.; LIONS, J. L. **Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology**, Springer Verlag, Vol. 2, New York, 1990.

[9] FROTA, C. L.; GOLDSTEIN, J. A. **Some Nonlinear Wave Equations with Acoustic Boundary Conditions**, Journal Differential Equations, Vol. 164, p. 92-109, 2000.

[10] FROTA, C. L.; LARKIN, N.A. **Uniform Stabilization for a Hyperbolic Equation with Acoustic Boundary Conditions in Simple Connected Domains**, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. 66, p. 297-312, 2005.

[11] FROTA, C. L.; MEDEIROS L. A.; VICENTE, A. **Wave equation in domains with non-locally reacting boundary**, Differential and Integral Equations, Vol. 24, Número 11-12, p.1001-1020, 2011.

[12] GOMES, A. M. **Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução**, Rio de Janeiro: UFRJ. IM, 2^a Edição, 2011.

[13] GRISVARD, P. **Contrôlabilité exacte avec conditions mêlées**, C. R. Acad. Sci. Paris, Vol. 305, série I, p.363-366, 1997.

[14] GRABER, P. **Strong stability and uniform decay of solutions to a wave equation with semilinear porous acoustic boundary conditions**, Nonlinear Analysis: Theory Weth and Applications, Vol. 74, p.3058-3068, 2011.

[15] GRABER, P. **Wave equation with porous nonlinear acoustic boundary conditions generates a well-posed dynamical system**, Nonlinear Analysis: Theory Weth and Applications, Vol. 73, p.3058-3068, 2010.

[16] GRABER, P. **Uniform boundary stabilization of a wave equation with nonlinear acoustic boundary conditions and nonlinear boundary damping**, J. Evol. Equ., Vol. 12, p.141-164, 2012.

[17] KESAVAN, S. **Topic in Functional Analysis and Applications**, New Dehli: John Wiley and Sons, 1989.

[18] KESAVAN, S. **Functional analysis**, Hindustan Book Agency, 2009.

[19] KOMORNIK, V. **Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method**, Mason-John Wiley, Paris, 1994.

[20] KOMORNIK, V.; ZUAZUA E. **A direct method boundary stabilization of the wave equation**, J. Math. Pures et Appl., Vol. 69, p.33-54, 1990.

[21] LASIECKA, I.; TATARU, D. **Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping**, Differential and Integral Equations, Vol. 6, p. 507-533, 1993.

[22] LASIECKA I.; TRIGGIANI R. **Uniform stabilization of the wave equation with Dirichlet or Neumann feedback control without geometric conditions**, Appl. Math. Optim.,Vol. 25, 189-224, 1992.

[23] LÍMACO, J.; CLARK, H. R.; FROTA, C. L.; MEDEIROS, L. A. **On an evolution equation with acoustic boundary conditions**, Math. Meth. Appl. Sci., Vol. 34, p.2047-2059, 2011. doi: 10.1002/mma.1503

[24] MEDEIROS, L. A., MILLA MIRANDA, M.: **Espaços de Sobolev (iniciação aos problemas elípticos não homogêneos)**. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2000.

[25] OLIVEIRA, C. R., **Introdução à Análise Funcional**, Edição 1, Coleção Projeto Euclides, 2012.

[26] PAZY, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**, Springer, 2012.

[27] SHOWALTER, R. **Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations**, AMS, Providence, 1997.

[28] VICENTE, A. **Equações de ondas com condições de fronteira da acústica**, Tese de doutorado, UNICAMP, 2010

[29] VICENTE, A.; FROTA, C. L. **Nonlinear wave equation with weak dissipative term in domains with non-locally reacting boundary**, Wave Motion, Vol. 50, p.162-169, 2013.