

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
(Mestrado)

VANDERLÉA MENDES DE LIMA

Teorema de Fibrção de Milnor

Maringá-PR

2011

VANDERLÉA MENDES DE LIMA

## Teorema de Fibrção de Milnor

Dissertaçõ apresentada ao Programa de Pós-Graduaçõ em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtençõ do título de Mestre em Matemática.

Área de concentraçõ: Álgebra e Geometria

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Martins

Maringá

2011

# Teorema de Fibrção de Milnor

Vanderléa Mendes de Lima

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Prof. Dr. Rodrigo Martins - UEM .....  
(Orientador)

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria Elenice Rodrigues Hernandes - UEM .....

Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior - ICMC/USP .....

Maringá

Junho - 2011

Aos meus pais.

“A persistência transpõe todo obstáculo.”

Sêneca.

# Agradecimentos

A Deus, por todas as bênçãos concedidas e por estar sempre comigo guiando meus passos.

Ao Professor Doutor Rodrigo Martins, pela orientação, pelo conhecimento transmitido, paciência, disponibilidade e pelas críticas construtivas.

Aos meus pais, Jorge e Maria, pela oportunidade do estudo e apoio incondicional.

Aos meus amigos da turma de mestrado, pela amizade, auxílio e apoio.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, pela confiança depositada.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

# Resumo

Nesta dissertação estudamos resultados válidos para conjuntos algébricos, em particular, para variedades algébricas encontrando, ainda, “relações” existentes entre conjuntos algébricos e variedades diferenciáveis. Também, demonstramos o Lema de Seleção da Curva e o Teorema de Fibrção de Milnor, o qual afirma que para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, o espaço  $S_\epsilon \setminus K$  é um fibrado diferenciável localmente trivial sobre  $S^1$ , com projeção  $\phi : S_\epsilon \setminus K \longrightarrow S^1$ , 
$$\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}.$$

**Palavras chaves:** Conjunto Algébrico, Variedade Algébrica, Variedade Diferenciável, Lema de Seleção da Curva, Projeção, Fibrção de Milnor.

## Abstract

In this work we study results available for algebraic sets in particular for algebraic varieties, finding yet “relations” between algebraic sets and smooth manifolds. Furthermore, we prove the Curve Selection Lemma and the Milnor’s Fibration Theorem which assert that for  $\epsilon$  sufficiently small, the space  $S_\epsilon \setminus K$  is a locally trivial differentiable bundle over  $S^1$ , with projection  $\phi : S_\epsilon \setminus K \longrightarrow S^1$ ,  $\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$ .

---

---

# SUMÁRIO

---

<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>13</b>
1.1 Algumas definições algébricas . . . . .	13
1.2 Variedades diferenciáveis . . . . .	16
1.3 Outros resultados . . . . .	20
<b>2 Variedades Algébricas</b>	<b>25</b>
<b>3 Topologia Local</b>	<b>40</b>
<b>4 Lema de Seleção da Curva</b>	<b>51</b>
<b>5 Fibração de Milnor</b>	<b>58</b>

---

# INTRODUÇÃO

---

A presente dissertação apresenta parte do trabalho de John Milnor contido em *Singular Points of Complex Hypersurfaces* ([10]) e tem como objetivo principal demonstrar o Teorema de Fibrção de Milnor, o qual é um dos resultados básicos da teoria de singularidades e tem dado origem a uma vasta literatura. Outro resultado importante aqui é o Lema de Seleção da Curva, usado como ferramenta para o Teorema de Fibrção de Milnor.

Seja  $f(z_1, \dots, z_m)$  uma função polinomial em  $m$  variáveis complexas. Considere a hipersuperfície complexa  $V = f^{-1}(0)$ . A fim de estudar a topologia de  $V$  na vizinhança de algum ponto  $z^0$ , vamos usar a seguinte construção, devido a Karl Brauner: *Interceptar a hipersuperfície  $V$  com uma esfera suficientemente pequena  $S_\epsilon$  centrada no ponto dado  $z^0$ .*

A topologia de  $V$  no interior do disco delimitado por  $S_\epsilon$  está estritamente relacionada à topologia do conjunto  $K = V \cap S_\epsilon$ , chamado de *link*.

Neste trabalho veremos que  $S_\epsilon \setminus K$ , para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, é um fibrado diferenciável localmente trivial sobre  $S^1$ , com projeção

$$\begin{aligned} \phi : S_\epsilon \setminus K &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto \frac{f(z)}{|f(z)|}. \end{aligned}$$

Isto é, para cada  $z = e^{i\theta} \in S^1$  existe uma vizinhança  $U_\theta$  de  $z$  e um difeomorfismo

$$\psi_\theta : U_\theta \times F_\theta \longrightarrow \phi^{-1}(U_\theta), \quad F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta})$$

tal que  $\phi \circ \psi_\theta = \pi_1$ , sendo  $\pi_1$  a projeção na primeira coordenada. Este resultado é o Teorema de Fibrção de Milnor.  $F_\theta$  é dita a fibra de Milnor.

No capítulo 1, reunimos algumas definições básicas e resultados que serão utilizados ao longo do texto.

No capítulo 2, nos dedicamos ao estudo de conjuntos algébricos (que são zeros de uma coleção de polinômios) e de variedades algébricas (que são conjuntos algébricos irredutíveis), dois teoremas de Whitney são enunciados, um destes afirma que o conjunto dos pontos regulares de uma variedade algébrica é uma variedade diferenciável. Outro resultado visto é que uma variedade algébrica complexa não pode ser uma variedade diferenciável em toda uma vizinhança de um ponto singular.

No capítulo 3, fazemos um breve estudo da topologia do link  $K = V \cap S_\epsilon$ , onde  $V \subset \mathbb{L}^m$  é uma variedade algébrica e  $S_\epsilon \subset \mathbb{L}^m$  é uma esfera centrada em um ponto regular ou em um ponto singular isolado de  $V$  e  $\mathbb{L}$  é o corpo dos números reais ou o corpo dos números complexos. Ainda neste capítulo, vemos que se  $V = f^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^m$  é uma hipersuperfície complexa e o centro de  $S_\epsilon$  é um ponto regular de  $f$  então a fibra  $F_0 = \phi^{-1}(1)$  é difeomorfa a  $\mathbb{R}^{2m-2}$ .

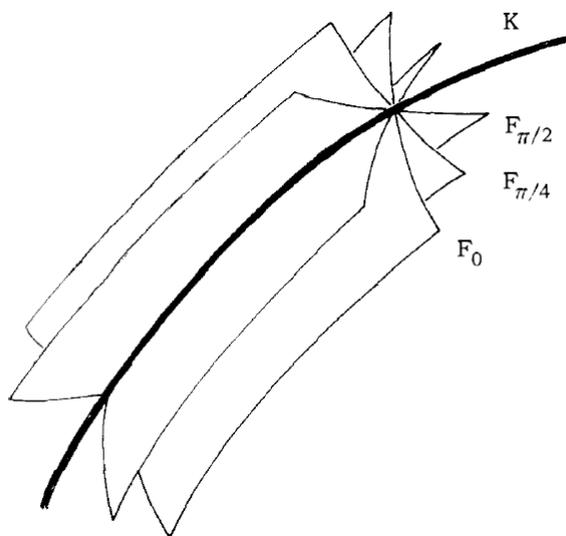
No capítulo 4, demonstramos o Lema de Seleção da Curva e apresentamos uma aplicação deste lema.

No capítulo final, demonstramos alguns resultados que nos permitirão concluir que cada fibra  $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta})$  é uma  $(2m - 2)$ -variedade diferenciável e demonstramos nosso resultado principal, o Teorema de Fibração de Milnor.

Visto o Teorema de Fibração de Milnor, uma continuação dos estudos, que não é feita neste trabalho, seria estudar a topologia de  $K$  e das fibras, obtendo, no caso em que  $f$  não tem pontos críticos próximos de  $z^0$ , exceto o próprio  $z^0$ , que a descrição de  $\phi$  como fibração é dada por:

**Teorema:** *Se  $z^0$  é um ponto crítico isolado de  $f$  então cada fibra  $F_\theta$  tem o tipo de homotopia de um buquê  $S^n \vee \dots \vee S^n$  de  $n$ -esferas, sendo o número de esferas neste buquê estritamente positivo. Cada fibra pode ser considerada como o interior de uma variedade diferenciável compacta com bordo  $\overline{F}_\theta = F_\theta \cup K$ , onde a fronteira comum  $K$  é uma variedade  $(n - 2)$ -conexa.*

Assim, todas as fibras  $F_\theta$  “cabem” em torno de sua fronteira comum  $K$  na forma ilustrada na figura abaixo.



---

# Preliminares

---

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados preliminares e enunciamos alguns resultados importantes como o Teorema da Função Inversa, o Teorema da Função Implícita e o Lema de Morse. A apresentação de tais definições e resultados se faz necessária pelo uso que fazemos no decorrer do texto.

## 1.1 Algumas definições algébricas

Nesta seção exibimos algumas informações sobre anel Noetheriano e módulo sobre um anel. Assumimos que os conhecimentos à respeito de anéis são conhecidos. Encerramos a seção enunciando o Lema de Zorn.

Neste texto todos os anéis são comutativos com unidade.

**Definição 1.1.** *Um anel  $\mathcal{R}$  é Noetheriano se toda cadeia ascendente*

$$I_1 \subset I_2 \subset \dots$$

*de ideais de  $\mathcal{R}$  estaciona (isto é, existe  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $I_i = I_{i+1} = I_{i+2} = \dots$ ).*

Note que se  $\mathbb{L}$  é um corpo então  $\mathbb{L}$  é Noetheriano, pois os únicos ideais de um corpo são os triviais.

**Teorema 1.2** (Teorema da Base de Hilbert). *Se  $\mathcal{R}$  é um anel Noetheriano, então  $\mathcal{R}[X]$  é também Noetheriano.*

Uma demonstração deste resultado pode ser vista, por exemplo, em [13], pag. 148.

**Corolário 1.3.** *Se  $\mathcal{R}$  é Noetheriano então  $\mathcal{R}[X_1, \dots, X_m]$  também o é.*

**Definição 1.4.** *Um conjunto  $M \neq \emptyset$  é um módulo sobre o anel  $\mathcal{R}$  ou um  $\mathcal{R}$ -módulo se  $(M, +)$  é um grupo abeliano e existe uma operação*

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \times M &\longrightarrow M \\ (r, m) &\longmapsto rm \end{aligned}$$

tal que

$$(i) \quad (r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m \quad \forall r_1, r_2 \in \mathcal{R}, \forall m \in M;$$

$$(ii) \quad r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2 \quad \forall r \in \mathcal{R}, \forall m_1, m_2 \in M;$$

$$(iii) \quad (r_1r_2)m = r_1(r_2m) \quad \forall r_1, r_2 \in \mathcal{R}, \forall m \in M;$$

$$(iv) \quad 1m = m \quad \forall m \in M.$$

A operação acima é chamada de multiplicação por escalar.

**Definição 1.5.** *Seja  $M$  um  $\mathcal{R}$ -módulo e  $N \subset M (N \neq \emptyset)$ . Dizemos que  $N$  é submódulo de  $M$  se:*

(i)  $N$  é um subgrupo de  $M$ , ou seja,

$$(a) \quad \text{se } a, b \in N, \text{ então } a + b \in N;$$

$$(b) \quad \text{se } a \in N, \text{ então } -a \in N;$$

(ii) se  $r \in \mathcal{R}$  e  $n \in N$ , então  $rn \in N$ .

**Definição 1.6.** *Seja  $M$  um  $\mathcal{R}$ -módulo. Dizemos que  $M$  é Noetheriano se toda cadeia ascendente*

$$G_1 \subset G_2 \subset \dots$$

de submódulos de  $M$  estaciona (isto é, existe  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $G_i = G_{i+1} = G_{i+2} = \dots$ ).

Dado  $\emptyset \neq S \subset M$ , o submódulo gerado por  $S$  é o conjunto

$$\langle S \rangle = \{r_1s_1 + r_2s_2 + \dots + r_ns_n; n \geq 1, s_i \in S, r_i \in \mathcal{R}\}.$$

Se  $N = \langle S \rangle$  e  $S$  é um conjunto finito então  $N$  é dito finitamente gerado.

**Proposição 1.7.** *Seja  $M$  um  $\mathcal{R}$ -módulo. Então,  $M$  é Noetheriano se, e somente se, todo submódulo de  $M$  é finitamente gerado.*

**Demonstração:** Vamos usar a seguinte equivalência: “Seja  $\mathcal{C}$  um conjunto parcialmente ordenado por  $\preceq$ .  $\mathcal{C}$  satisfaz a condição de cadeia ascendente se, e somente se, satisfaz a condição maximal (todo subconjunto não vazio de  $\mathcal{C}$  admite elemento maximal).”

Suponhamos  $M$  Noetheriano. Seja  $G$  um submódulo de  $M$ . Suponhamos, por absurdo, que  $G$  não é finitamente gerado. Seja  $\mathcal{C}$  o conjunto de todos os submódulos de  $G$  que são finitamente gerados. Então  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ , pois  $0 \in \mathcal{C}$ . Como todo submódulo de  $G$  é também submódulo de  $M$  e  $M$  é Noetheriano segue da condição maximal que  $\mathcal{C}$  tem um elemento maximal com respeito a inclusão, digamos  $N$ . Note que  $N \subsetneq G$ , visto que assumimos que  $G$  não é finitamente gerado. Seja  $g \in G \setminus N$  então  $N + \mathcal{R}g$  é um submódulo finitamente gerado de  $G$  e  $N \subsetneq N + \mathcal{R}g$ , pois  $g \in (N + \mathcal{R}g) \setminus N$ . Uma contradição com a maximalidade de  $N$  em  $\mathcal{C}$ .

Reciprocamente, suponhamos que todo submódulo de  $M$  é finitamente gerado. Seja

$$L_1 \subset L_2 \subset \dots$$

uma cadeia ascendente de submódulos de  $M$ . Então,

$$G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$$

é um submódulo de  $M$ . Obviamente,  $G$  é fechado para a multiplicação por escalar. Se  $g, h \in G$  então existem  $i, j \in \mathbb{N}$  tal que  $g \in L_i$  e  $h \in L_j$ , como  $L_i \subset L_j$  ou  $L_j \subset L_i$  segue que  $g + h \in G$ . Por hipótese,  $G$  é um submódulo finitamente gerado. Suponha que  $G$  é gerado por

$$g_1, \dots, g_t, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Para cada  $i = 1, \dots, t$  existe  $n_i \in \mathbb{N}$  tal que  $g_i \in L_{n_i}$ . Seja  $k = \max\{n_1, \dots, n_t\}$ . Então,  $g_i \in L_k$  para todo  $i = 1, \dots, t$ , assim

$$G = \sum_{i=1}^t \mathcal{R}g_i \subset L_k \subset L_{k+1} \subset \dots \subset L_{k+i} \subset \dots \subset G.$$

Portanto,  $L_k = L_{k+i}$  para todo  $i \in \mathbb{N}$  e a cadeia ascendente inicial estaciona. Consequentemente,  $M$  é Noetheriano. ■

A seguir vamos enunciar o Lema de Zorn, sua demonstração pode ser vista, por exemplo, em [2], pag. 62.

**Lema 1.8. (Lema de Zorn)** *Se  $X \neq \emptyset$  é um conjunto parcialmente ordenado tal que todo subconjunto totalmente ordenado admite limitante superior, então  $X$  admite um elemento maximal.*

## 1.2 Variedades diferenciáveis

Nosso objetivo nesta seção é definir variedade diferenciável. Antes, apresentamos algumas definições que faremos uso.

**Definição 1.9.** *Seja  $\varphi : U_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciável no aberto  $U_0$ :*

- (i) *se para cada  $x \in U_0$ , a diferencial  $\varphi'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma transformação linear injetora,  $\varphi$  é chamada imersão. Tem-se necessariamente  $m \leq n$ ;*
- (ii) *se para cada  $x \in U_0$ , a diferencial  $\varphi'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma transformação linear sobrejetora,  $\varphi$  é chamada submersão. Neste caso, tem-se necessariamente  $m \geq n$ .*

**Exemplo 1.10.** (1) *A inclusão  $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $i(x) = (x, 0)$  é uma imersão. De fato, tomando  $x \in \mathbb{R}$  temos*

$$i'(x)h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{i(x+th) - i(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x+th, 0) - (x, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(h, 0)}{t} = (h, 0).$$

*Suponha que  $i'(x)h_1 = i'(x)h_2$ ,  $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ . Então  $(h_1, 0) = (h_2, 0)$ , logo  $h_1 = h_2$ . Isto mostra que  $i'$  é injetora.*

- (2) *Facilmente verifica-se que a projeção  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\pi(x, y) = x$  é uma submersão.*

**Definição 1.11.** *Uma imersão  $\varphi : U_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ , diz-se um mergulho de classe  $C^k$  de  $U_0$  em  $\mathbb{R}^n$  quando  $\varphi$  é um homeomorfismo de  $U_0$  sobre  $\varphi(U_0)$ . Neste caso, dizemos também que  $\varphi$  é uma parametrização de classe  $C^k$  e dimensão  $m$  do conjunto  $U = \varphi(U_0) \subset \mathbb{R}^n$ .*

**Exemplo 1.12.** Seja  $U_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$  e  $\varphi : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ . Então,  $\varphi$  é uma parametrização de classe  $C^k$  e dimensão 2 do hemisfério superior da esfera

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

De fato,

- $\varphi$  é de classe  $C^k$ , pois cada uma de suas funções coordenadas

$$\varphi_1(x, y) = x, \quad \varphi_2(x, y) = y \quad \text{e} \quad \varphi_3(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

é de classe  $C^k$ .

- Seja  $q \in \mathbb{R}^2$ . Dados  $(g, h), (i, j) \in \mathbb{R}^2$ , suponha

$$d\varphi(q)(g, h) = d\varphi(q)(i, j).$$

Então,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(q) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(q) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(q) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(q) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(q) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g - i \\ h - j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

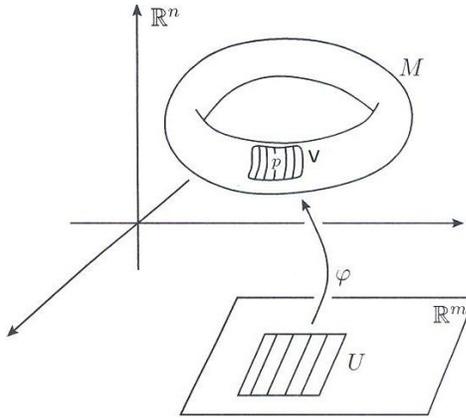
Ou seja,

$$\left( g - i, h - j, \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(q)(g - i) + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(q)(h - j) \right) = (0, 0, 0).$$

Logo,  $g - i = 0$  e  $h - j = 0$ . Ou ainda,  $g = i$  e  $h = j$ . Portanto,  $d\varphi(q)$  é injetora para todo  $q \in \mathbb{R}^2$ .

- Facilmente verifica-se que  $\varphi$  é injetora. Logo,  $\varphi : U_0 \rightarrow \varphi(U_0)$  é bijeção e  $\varphi^{-1} = \pi|_{\varphi(U_0)}$  é a inversa de  $\varphi$ , com  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\pi(x, y, z) = (x, y)$ . Como  $\pi$  é contínua temos que  $\varphi^{-1}$  é contínua.

**Definição 1.13.** Uma variedade diferenciável (mergulhada) de classe  $C^k$  e dimensão  $m$  em  $\mathbb{R}^n$  é um conjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  que pode ser coberto por uma coleção de abertos  $V \subset \mathbb{R}^n$ , tais que cada  $U = V \cap M$  admite uma parametrização  $\varphi : U_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U$ , de classe  $C^k$  e dimensão  $m$ .



**Observação 1.14.** (i) Toda variedade diferenciável complexa de dimensão  $m$  pode ser vista como uma variedade diferenciável real de dimensão  $2m$ .

(ii) Uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  contida em  $\mathbb{R}^{m+1}$  é chamada hipersuperfície.

**Exemplo 1.15.** (1) Uma variedade diferenciável de dimensão 0 em  $\mathbb{R}^n$  é um conjunto de pontos isolados.

(2) Uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  em  $\mathbb{R}^n$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ .

(3) O gráfico de uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^k$  no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ , é uma variedade diferenciável  $M = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{m+n}; x \in U\}$  de classe  $C^k$  e dimensão  $m$  em  $\mathbb{R}^{m+n}$ . Com efeito,  $M$  é a imagem da única parametrização  $\varphi : U \rightarrow M$ ,  $\varphi(x) = (x, f(x))$ .

(4) Considere os abertos  $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ ,  $U_2 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2; x^2 + z^2 < 1\}$  e  $U_3 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2; y^2 + z^2 < 1\}$ . Sejam

$$\varphi_1, \varphi_2 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3; \varphi_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}), \varphi_2(x, y) = (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}),$$

$$\varphi_3, \varphi_4 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^3; \varphi_3(x, z) = (x, \sqrt{1 - x^2 - z^2}, z), \varphi_4(x, z) = (x, -\sqrt{1 - x^2 - z^2}, z),$$

$$\varphi_5, \varphi_6 : U_3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \varphi_5(y, z) = (\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z), \varphi_6(y, z) = (-\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z).$$

Da mesma forma como fizemos no Exemplo 1.12, podemos mostrar que estas aplicações são parametrizações de classe  $C^k$  e dimensão 2, de abertos da esfera  $S^2$ . Como

$$\varphi_1(U_1) \cup \varphi_2(U_1) \cup \varphi_3(U_2) \cup \varphi_4(U_2) \cup \varphi_5(U_3) \cup \varphi_6(U_3)$$

cobrem toda a esfera, temos que, todo ponto da esfera  $S^2$  possui uma vizinhança aberta que admite uma parametrização de classe  $C^k$  e dimensão 2. Logo,  $S^2$  é uma variedade diferenciável de classe  $C^k$  e dimensão 2.

**Definição 1.16.** *Sejam  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade diferenciável de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) e dimensão  $m$ . Seja  $\varphi : U_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset M$  uma parametrização com  $p = \varphi(x) \in M$ ,  $x \in U_0$ . O plano tangente à  $M$  no ponto  $p$  é o espaço vetorial de dimensão  $m$*

$$T_p M = \varphi'(x)\mathbb{R}^m.$$

Os vetores  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \varphi'(x)e_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , formam uma base de  $T_p M$ , onde os vetores  $e_i$  são os vetores da base canônica de  $\mathbb{R}^m$ . Pode-se provar que o plano tangente em  $p$  independe da parametrização  $\varphi$ . Veja, por exemplo, [8], pag. 48.

A seguir vamos enunciar uma proposição que expõe os elementos de  $T_p M$ . A demonstração desta proposição pode ser vista, por exemplo, em [8], pag. 49.

**Proposição 1.17.** *O plano tangente à  $M$  no ponto  $p$  é o conjunto*

$$T_p M = \{v \in \mathbb{R}^m; v = \lambda'(0), \lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n \text{ diferenciável, } \lambda(0) = p\}.$$

**Definição 1.18. (Espaço vetorial normal)** *Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade diferenciável de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) e dimensão  $m$ . O espaço vetorial normal à  $M$  no ponto  $p$  é o conjunto  $T_p M^\perp$  dos vetores  $w \in \mathbb{R}^n$  tais que  $\langle w, v \rangle = 0$  para todo  $v \in T_p M$ , ou seja, é o complemento ortogonal do espaço vetorial tangente à  $M$  no ponto  $p$ . A dimensão de  $T_p M^\perp$  é igual a  $n - m$  e os vetores  $w \in T_p M^\perp$  são chamados os vetores normais à  $M$  no ponto  $p$ .*

**Definição 1.19.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis de classe  $C^k$  e dimensão  $m$  e  $n$ , respectivamente. Dizemos que uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é diferenciável em  $p \in M$  se existem parametrizações de classe  $C^k$ ,  $\varphi : U_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U$  para  $M$  com  $p \in U \subset M$  e  $\psi : V_0 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V$  para  $N$  com  $f(U) \subset V$  tal que  $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$  é diferenciável em  $\varphi^{-1}(p)$ .*

Dizemos que  $f$  é diferenciável se  $f$  é diferenciável em todos os pontos de  $M$ . E dizemos que  $f$  é de classe  $C^k$  se  $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$  é de classe  $C^k$ .

Facilmente verifica-se que a diferenciabilidade de  $f$  independe das parametrizações. Veja, por exemplo, [6], pag. 309.

**Definição 1.20.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis e  $f : M \rightarrow N$  diferenciável:*

- (i) *dizemos que  $p \in M$  é um ponto crítico de  $f$  se  $df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  é identicamente nula;*
- (ii) *dizemos que  $q \in N$  é um valor regular de  $f$  se  $f^{-1}(q)$  não contém pontos críticos.*

## 1.3 Outros resultados

Nesta seção definimos o gradiente de uma função real diferenciável. Também, apresentamos alguns resultados importantes como o Teorema da Função Inversa, o Teorema da Função Implícita e o Lema de Morse.

**Definição 1.21.** *Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável, o gradiente de  $f$  no ponto  $a \in U$  é o vetor*

$$\text{grad } f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

**Definição 1.22.** *Sejam  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável e  $c \in \mathbb{R}$ , o conjunto dos pontos de  $U$  que estão no nível  $c$  é a imagem inversa  $f^{-1}(c)$ , o qual é chamado a superfície de nível  $c$  de  $f$ .*

A seguir destacamos uma propriedade importante do gradiente:

*O gradiente de  $f$  no ponto  $a$  é ortogonal à superfície de nível de  $f$  que passa por esse ponto.*

Dizer que um vetor  $w$  é ortogonal à superfície de nível  $f^{-1}(c)$  no ponto  $a$  significa que  $w$  é ortogonal ao vetor tangente à superfície de nível  $f^{-1}(c)$ , no ponto  $a$ , o qual é dado por  $\lambda'(0)$ ,

onde  $\lambda$  é um caminho diferenciável no ponto  $t = 0$ , com  $\lambda(0) = a$  e  $\lambda(t) \in f^{-1}(c)$ , isto é,  $f(\lambda(t)) = c$ , para todo  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Desta última igualdade segue que

$$0 = (f \circ \lambda)'(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \lambda'_i(0) = \langle \text{grad } f(a), \lambda'(0) \rangle .$$

Portanto,  $\text{grad } f(a)$  é ortogonal a  $\lambda'(0)$ .

**Definição 1.23.** *O posto de uma matriz é a dimensão da imagem da transformação linear associada a esta matriz.*

**Definição 1.24.** *Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciável no aberto  $U$ . Dizemos que um ponto  $a \in U$  é um ponto regular de  $f$  se o posto da matriz Jacobiana*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix},$$

é máximo, isto é,  $\min(n, m)$ . Caso contrário, isto é, se  $f$  não é imersão e nem submersão em  $a$ , dizemos que  $a$  é um ponto singular de  $f$ . Quando  $f$  não é submersão em  $a$ , dizemos que  $a$  é um ponto crítico de  $f$ .

**Definição 1.25.** *Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciável,  $m \geq n$ . Dizemos que um ponto  $c \in \mathbb{R}^n$  é um valor regular de  $f$  quando para todo  $x \in U$  tal que  $f(x) = c$ , a diferencial  $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma transformação linear sobrejetora, ou seja,  $x$  não é ponto crítico.*

**Teorema 1.26. (Teorema da Função Inversa)** *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Se  $a \in U$  é tal que  $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é invertível então existe uma bola aberta  $B = B(a, \delta) \subset U$  tal que a restrição  $f|_B$  é um difeomorfismo sobre um aberto  $V \ni f(a)$ .*

O próximo teorema usa fortemente o Teorema da Função Inversa e sua demonstração, bem como a de seu corolário, podem ser vistas, por exemplo, em [6], pag. 312.

**Teorema 1.27.** *Toda variedade diferenciável  $M \subset \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  é localmente o gráfico de uma aplicação de classe  $C^k$ .*

**Corolário 1.28.** *Toda variedade diferenciável  $M \subset \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  é localmente a imagem inversa de um valor regular por uma aplicação de classe  $C^k$ .*

**Teorema 1.29. (Teorema da Função Implícita)** *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) no aberto  $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ , dada por  $f = (f_1, \dots, f_n, f_{n+1}, \dots, f_m)$ . Suponhamos que, no ponto  $p = (a, b) \in U$ , com  $f(p) = c$ , a matriz  $n \times n$*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(p) \end{pmatrix}$$

*seja invertível. Então existem  $Z \subset U$ , aberto contendo  $p$ ,  $W \subset \mathbb{R}^m$ , aberto contendo  $a$ , e  $\xi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ , com  $\xi(a) = b$ , com a seguinte propriedade:*

$$[(x, y) \in Z \text{ e } f(x, y) = c] \iff [x \in W \text{ e } y = \xi(x)].$$

*A equivalência acima significa que  $f^{-1}(c) \cap Z$  é o gráfico de  $\xi$ , isto é,*

$$f^{-1}(c) \cap Z = \{(x, \xi(x)); x \in W\}.$$

Uma outra versão do Teorema da Função Implícita é a seguinte:

**Teorema 1.30. (Teorema da Função Implícita)** *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciável numa vizinhança  $U \subset \mathbb{R}^m$  da origem com  $f(0) = 0$ . Assumimos que  $0$  é um ponto regular de  $f$ .*

*(I) Se  $m \geq n$  então o posto da matriz Jacobiana é  $n$  e fazendo uma mudança de coordenadas, se necessário, podemos assumir que*

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(0) \end{pmatrix} \neq 0.$$

*Neste caso, existem vizinhanças  $Z$  e  $W \subset U$  da origem em  $\mathbb{R}^m$  e um difeomorfismo  $h : Z \rightarrow W$  com  $h(0) = 0$  tal que*

$$(f \circ h)(z_1, \dots, z_n, \dots, z_m) = (z_1, \dots, z_n),$$

*para todo  $(z_1, \dots, z_m) \in Z$ .*

(II) Se  $m \leq n$  então o posto da matriz Jacobiana é  $m$  e podemos assumir que

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(0) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Neste caso, existem vizinhanças  $Z$  e  $W$  da origem em  $\mathbb{R}^n$  e um difeomorfismo  $h : Z \rightarrow W$  com  $h(0) = 0$  tal que

$$(h \circ f)(z_1, \dots, z_m) = (z_1, \dots, z_m, 0, \dots, 0),$$

para  $(z_1, \dots, z_m)$  em alguma vizinhança da origem contida em  $U$ .

Para maiores informações sobre o Teorema da Função Inversa e o Teorema da Função Implícita veja, por exemplo, [7] e [14].

**Teorema 1.31.** *Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  de classe  $C^k$ . Se  $c \in \mathbb{R}^{n-m}$  é valor regular de  $f$  então  $f^{-1}(c)$  é uma variedade diferenciável de classe  $C^k$  e dimensão  $m$ .*

**Demonstração:** Por hipótese, para cada  $p \in f^{-1}(c)$ ,  $f'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  é uma transformação linear sobrejetora. Logo, a menos de uma mudança de coordenadas, podemos supor que a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-m}}(a) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-m}}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_{n-m}}{\partial x_{n-m}}(a) \end{pmatrix},$$

é invertível. Pelo Teorema da Função Implícita, existe um aberto  $Z \subset \mathbb{R}^n$ , contendo  $p$ , tal que  $Z \cap f^{-1}(c)$  é o gráfico de uma aplicação de classe  $C^k$ , definida num aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Logo, cada  $Z \cap f^{-1}(c)$  é uma variedade diferenciável de classe  $C^k$  e dimensão  $m$ . Segue-se que  $f^{-1}(c)$  também o é. ■

No caso complexo, temos o Teorema da Função Inversa e o Teorema da Função Implícita válidos, considerando-se funções analíticas e tomando as partes real e imaginária de cada função coordenada para calcular a matriz Jacobiana.

A seguir apresentamos algumas definições para, então, enunciar o Lema de Morse.

**Definição 1.32.** *Um sistema de coordenadas de classe  $C^k$  num aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  é um difeomorfismo  $\xi : V \rightarrow U$ , de classe  $C^k$ , definido num aberto  $V \subset \mathbb{R}^n$ .*

As coordenadas de um ponto  $a \in U$  no sistema  $\xi$  são os números  $y_1, \dots, y_n$  tais que  $y = (y_1, \dots, y_n) \in V$  e  $\xi(y) = a$ .

**Definição 1.33.** *Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função duas vezes diferenciável no ponto  $x \in U$ . A diferencial segunda  $d^2f(x)$  é chamada a forma Hessiana da função  $f$  no ponto  $x$  e denotada por  $H(x)$ . A matriz*

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)$$

*é chamada matriz Hessiana de  $f$  no ponto  $x$ .*

Temos que  $x \in U$  é ponto crítico de  $f$  quando  $df(x)=0$ , isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0.$$

Dizemos que  $x$  é um ponto crítico não degenerado quando a matriz Hessiana neste ponto é invertível, ou seja, quando

$$\det \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) \neq 0.$$

O índice de um ponto crítico não degenerado  $x$  é o número de autovalores negativos da matriz Hessiana. Ou seja, é o número de raízes negativas do polinômio característico  $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ , onde  $I$  é a matriz identidade  $n \times n$  e  $A$  é a matriz Hessiana de  $f$  em  $x$ .

**Lema 1.34. (Lema de Morse)** *Seja  $a$  um ponto crítico não degenerado de uma função  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$  ( $k \geq 3$ ). Existe um sistema de coordenadas  $\xi : V_0 \rightarrow W$ , de classe  $C^{k-2}$ , com  $a \in W \subset U$ ,  $0 \in V_0$ ,  $\xi(0) = a$  e*

$$f(\xi(y)) = f(a) - y_1^2 - \dots - y_i^2 + y_{i+1}^2 + \dots + y_n^2.$$

*Onde  $i$  é o índice do ponto crítico  $a$ .*

Uma demonstração do Lema de Morse pode ser vista, por exemplo, em [9], pag. 6.

# Variedades Algébricas

Neste capítulo estudamos propriedades elementares sobre conjuntos algébricos reais ou complexos. Para isto, consideramos  $\mathbb{L}$  o corpo  $\mathbb{R}$  dos números reais ou o corpo  $\mathbb{C}$  dos números complexos e  $\mathbb{L}^m$  o espaço de coordenadas que consiste de todas as  $m$ -uplas  $x = (x_1, \dots, x_m)$  de elementos de  $\mathbb{L}$ .

Considere  $X_1, \dots, X_m$  indeterminadas, o anel comutativo com unidade  $\mathbb{L}[X_1, \dots, X_m]$  é o conjunto

$$\mathbb{L}[X_1, \dots, X_m] = \left\{ \sum_{i=1}^k c_{\alpha^i} X_1^{\alpha_1^i} X_2^{\alpha_2^i} \dots X_m^{\alpha_m^i}; \alpha^i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_m^i) \in \mathbb{N}^m, k \in \mathbb{N}^* \text{ e } c_{\alpha^i} \in \mathbb{L} \right\}.$$

**Definição 2.1.** Dado  $f \in \mathbb{L}[X_1, \dots, X_m]$ , definimos seu conjunto de zeros por

$$V(f) = \{a \in \mathbb{L}^m; f(a) = 0\}.$$

Se  $S \subset \mathbb{L}[X_1, \dots, X_m]$ , então seja  $V(S)$  o conjunto de zeros comuns

$$V(S) = \bigcap_{f \in S} V(f).$$

Um conjunto desta forma é chamado conjunto algébrico. Ou seja, um conjunto algébrico é o lugar geométrico dos zeros comuns de alguma coleção de funções polinomiais definidas em  $\mathbb{L}^m$ .

Quando não houver necessidade de explicitar o conjunto  $S$  escreveremos apenas  $V$ , em vez de  $V(S)$ .

Um conjunto algébrico da forma  $V(f)$  com  $f$  uma função polinomial não constante é chamado hipersuperfície algébrica.

**Observação 2.2.** *Sejam  $S, S' \subset \mathbb{L}[X_1, \dots, X_m]$ . Se  $S \subset S'$  então  $V(S') \subset V(S)$ . De fato, dado  $a \in V(S')$  temos que  $f(a) = 0$  para todo  $f \in S'$ . Como  $S \subset S'$  segue que, em particular,  $f(a) = 0$  para todo  $f \in S$ . Logo,  $V(S') \subset V(S)$ .*

**Definição 2.3.** *Seja  $V$  um conjunto algébrico. Definimos o conjunto*

$$\mathcal{I}(V) = \{f \in \mathbb{L}[X_1, \dots, X_m]; f(x) = 0 \quad \forall x \in V\},$$

*que é um ideal de  $\mathbb{L}[X_1, \dots, X_m]$ .*

Note que este ideal consiste dos polinômios que se anulam em todos os pontos de  $V$ .

**Observação 2.4.** *Sejam  $V$  e  $W$  conjuntos algébricos. Se  $V \subset W$  então  $\mathcal{I}(W) \subset \mathcal{I}(V)$ . Com efeito, seja  $f \in \mathcal{I}(W)$ . Temos que  $f(x) = 0$  para todo  $x \in W$ , como  $V \subset W$  segue que  $f(x) = 0$  para todo  $x \in V$ . Logo,  $f \in \mathcal{I}(V)$ .*

**Definição 2.5.** *Dado  $S \subset \mathbb{L}[X_1, \dots, X_m]$  denotamos por  $\langle S \rangle$  o ideal gerado por  $S$ ,*

$$\langle S \rangle = \left\{ f \in \mathbb{L}[X_1, \dots, X_m]; f = \sum_{i=1}^r a_i f_i, f_i \in S, r \in \mathbb{N}^* \text{ e } a_i \in \mathbb{L}[X_1, \dots, X_m] \right\}.$$

**Proposição 2.6.** *Dado  $S \subset \mathbb{L}[X_1, \dots, X_m]$ ,  $V(S) = V(\langle S \rangle)$ .*

**Demonstração:** De  $S \subset \langle S \rangle$  segue que  $V(\langle S \rangle) \subset V(S)$ . Por outro lado, se  $x \in V(S)$  então todo  $f_i \in S$  se anula em  $x$  e, portanto, o mesmo acontece com todo  $f \in \langle S \rangle$ . Logo,  $V(S) \subset V(\langle S \rangle)$ . ■

Da proposição acima segue que podemos nos restringir ao caso onde  $S$  é um ideal ou, alternativamente, ao caso onde  $S$  é o conjunto de geradores de um ideal.

Note que como  $\mathbb{L}$  é Noetheriano,  $\mathbb{L}[X_1, \dots, X_m]$  é Noetheriano. Logo, todo ideal é gerado (como  $\mathbb{L}[X_1, \dots, X_m]$ -módulo) por uma coleção finita de polinômios. Disto resulta que todo conjunto algébrico  $V$  pode ser definido por uma coleção finita de equações polinomiais, pois

$$V(I) = V(f_1, \dots, f_r) = V(f_1) \cap \dots \cap V(f_r).$$

Uma consequência importante do Teorema da Base de Hilbert é a seguinte:

**Proposição 2.7. (Condição de Cadeia Descendente)** *Qualquer sequência*

$$V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$$

*de conjuntos algébricos estaciona depois de um número finito de etapas (isto é, existe  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $V_i = V_{i+1} = V_{i+2} = \dots$ ).*

**Demonstração:** Considere a sequência de conjuntos algébricos

$$V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$$

Temos que

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots,$$

onde  $I_1, I_2, I_3, \dots$  são ideais tais que  $V_1 = V_1(I_1), V_2 = V_2(I_2), \dots$ . Como

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$$

estaciona (pela propriedade Noetheriana) segue, da Observação 2.2, que a sequência

$$V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$$

estaciona. ■

**Proposição 2.8.** *A união de dois conjuntos algébricos é um conjunto algébrico.*

**Demonstração:** É suficiente provar para a união de dois conjuntos algébricos definidos por ideais  $I$  e  $J$ . Vamos mostrar que  $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$ , onde  $IJ = \{f_1g_1 + \dots + f_rg_r; r \in \mathbb{N}^*, f_i \in I \text{ e } g_i \in J\}$ . Note que  $V(I), V(J) \subset V(IJ)$  (pois,  $IJ \subset I, J$ ). Logo,  $V(I) \cup V(J) \subset V(IJ)$ . Reciprocamente, suponha que  $x \in V(IJ)$  e  $x \notin V(I)$ . Deste modo existe  $f \in I$  tal que  $f(x) \neq 0$ . Para todo  $g \in J$  temos  $fg \in IJ$  e, portanto,  $(fg)(x) = 0$ . Ou seja,  $f(x)g(x) = 0$ . Como  $f(x), g(x) \in \mathbb{L}$  e  $\mathbb{L}$  é corpo, temos  $g(x) = 0$  para todo  $g \in J$ . Portanto  $x \in V(J)$  e, conseqüentemente,  $x \in V(I) \cup V(J)$ . ( O mesmo argumento mostra que  $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$ ) ■

**Proposição 2.9.** *A interseção de dois conjuntos algébricos é um conjunto algébrico.*

**Demonstração:** Sejam  $V(I)$  e  $V(J)$  conjuntos algébricos, com  $I$  e  $J$  ideais. Vamos mostrar que  $V(I) \cap V(J) = V(I + J)$ , onde  $I + J = \{f + g; f \in I, g \in J\}$ . Seja  $a \in V(I) \cap V(J)$ , então  $a$  é raiz de todo polinômio pertencente a  $I$  e, também, de todo polinômio pertencente a  $J$ . Logo,  $a$  é raiz de todo polinômio no conjunto  $I + J = \{f + g; f \in I, g \in J\}$ . Portanto,  $a \in V(I + J)$ . Seja, agora,  $a \in V(I + J)$ . Logo,  $a$  é raiz de todo polinômio pertencente a  $I + J$ . Como  $I, J \subset I + J$  segue que  $a$  é raiz de todo polinômio pertencente a  $I$  e, de todo polinômio pertencente a  $J$ . Assim,  $a \in V(I) \cap V(J)$ . ■

**Definição 2.10.** *Um conjunto algébrico não vazio  $V$  é chamado variedade algébrica se não pode ser expresso como a união de dois subconjuntos algébricos próprios.*

**Proposição 2.11.** *Se  $A$  é um conjunto algébrico então  $A = V(\mathcal{I}(A))$ .*

**Demonstração:** Note que todo elemento de  $A$  anula todos os polinômios de  $\mathcal{I}(A)$ , logo  $A \subset V(\mathcal{I}(A))$ . Por outro lado, como  $A$  é um conjunto algébrico,  $A = V(J)$  para algum ideal  $J$ . Logo,  $J \subset \mathcal{I}(V(J))$ . De fato, dado  $f \in J$ , todo elemento de  $V(J)$  é raiz de  $f$ , logo  $f$  se anula em  $V(J)$  e, conseqüentemente,  $f \in \mathcal{I}(V(J))$ . Assim,

$$A = V(J) \supset V(\mathcal{I}(V(J))) = V(\mathcal{I}(A)).$$

Portanto,  $A = V(\mathcal{I}(A))$ . ■

**Observação 2.12.** *A aplicação  $V \mapsto \mathcal{I}(V)$ , que faz corresponder a um conjunto algébrico  $V$  o ideal  $\mathcal{I}(V)$ , é injetora. De fato, se  $\mathcal{I}(V) = \mathcal{I}(W)$  então  $V(\mathcal{I}(V)) = V(\mathcal{I}(W))$ . Pela proposição anterior segue que  $V = W$ . Assim, se  $V \subset W$  e  $V \neq W$  então existe um polinômio que se anula em  $V$  e não se anula em  $W$  (pois, pela Observação 2.4,  $V \subset W \Rightarrow \mathcal{I}(W) \subset \mathcal{I}(V)$ ).*

**Proposição 2.13.** *Seja  $V$  um conjunto algébrico. Então  $V$  é variedade algébrica se, e somente se,  $\mathcal{I}(V)$  é primo.*

**Demonstração:** Suponhamos que  $V$  é uma variedade algébrica. Seja  $fg \in \mathcal{I}(V)$ , temos

$$V = V(\mathcal{I}(V)) \subset V(fg) = V(f) \cup V(g)$$

e, portanto

$$V = (V(f) \cup V(g)) \cap V = (V(f) \cap V) \cup (V(g) \cap V).$$

Uma vez que  $V$  não é a união de dois subconjuntos algébricos próprios, podemos assumir que  $V(f) \cap V = V$ , isto é,  $V \subset V(f)$ . E, conseqüentemente,  $f \in \mathcal{I}(V)$ .

Reciprocamente, suponhamos  $\mathcal{I}(V)$  primo e que  $V$  não é variedade algébrica, logo podemos escrever  $V = V_1 \cup V_2$  com  $V_1, V_2 \subset V$  subconjuntos próprios. Temos  $\mathcal{I}(V) \subset \mathcal{I}(V_1), \mathcal{I}(V_2)$  e  $\mathcal{I}(V) \neq \mathcal{I}(V_1), \mathcal{I}(V_2)$ . Consideremos  $f_1 \in \mathcal{I}(V_1) \setminus \mathcal{I}(V)$  e  $f_2 \in \mathcal{I}(V_2) \setminus \mathcal{I}(V)$  (que existem pela Observação 2.12), sendo  $\mathcal{I}(V_1), \mathcal{I}(V_2)$  ideais temos que  $f_1 f_2 \in \mathcal{I}(V_1) \cap \mathcal{I}(V_2)$ , logo  $f_1 f_2$  se anula em todo ponto de  $V_1$  e em todo ponto de  $V_2$ . Segue que  $f_1 f_2 \in \mathcal{I}(V)$  (pois,  $V = V_1 \cup V_2$ ), o que é uma contradição já que  $\mathcal{I}(V)$  é primo e  $f_1, f_2 \notin \mathcal{I}(V)$ . Portanto  $V$  não é a união de dois subconjuntos algébricos próprios, logo  $V$  é variedade algébrica. ■

**Observação 2.14.** *Se  $V$  é variedade algébrica, pela proposição acima,  $\mathcal{I}(V)$  é primo. Logo,*

$$\frac{\mathbb{L}[X_1, \dots, X_m]}{\mathcal{I}(V)}$$

*é domínio de integridade.*

**Definição 2.15.** *O corpo de frações  $f/g$  tal que*

$$f, g \in \frac{\mathbb{L}[X_1, \dots, X_m]}{\mathcal{I}(V)}$$

*é chamado corpo de funções racionais em  $V$  e denotado por  $\mathbb{L}^V$ . Seu grau de transcendência sobre  $\mathbb{L}$  é chamado a dimensão algébrica de  $V$  sobre  $\mathbb{L}$  e denotado por  $\partial_{\mathbb{L}} \mathbb{L}^V$ .*

Para maiores informações à respeito de grau de transcendência veja, por exemplo, [12].

**Definição 2.16.** *Seja  $V$  uma variedade algébrica. Uma subvariedade algébrica própria  $W$  de  $V$  é uma variedade algébrica contida em  $V$ , mas distinta de  $V$ .*

Se  $W \subset V$  é uma subvariedade algébrica de  $V$  então, a dimensão algébrica de  $W$  é menor do que a dimensão algébrica de  $V$ . Veja, por exemplo, [3], pag. 29.

**Definição 2.17.** *Seja  $V \subset \mathbb{L}^m$  um conjunto algébrico não vazio. Escolha polinômios  $f_1, \dots, f_k$  que geram o ideal  $\mathcal{I}(V)$  e, para cada  $x \in V$ , considere a matriz  $(\partial f_i / \partial x_j)$  de ordem  $k \times m$*

avaliada em  $x$ . Seja  $\rho$  o maior posto que esta matriz assume em qualquer ponto de  $V$ . Um ponto  $x \in V$  é chamado regular se a matriz  $(\partial f_i / \partial x_j)$  atinge seu maior posto  $\rho$  em  $x$  e singular se

$$\text{posto} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right) < \rho.$$

Note que esta definição não depende da escolha de  $\{f_1, \dots, f_k\}$  (pois, se adicionarmos um polinômio extra  $f_{k+1} = g_1 f_1 + \dots + g_k f_k$ , a nova linha resultante em nossa matriz será uma combinação linear das demais linhas.)

**Proposição 2.18.** *O conjunto  $\Sigma(V)$ , de todos os pontos singulares de  $V$ , é um subconjunto algébrico de  $V$ .*

**Demonstração:** Se  $x \in \Sigma(V)$  então  $(\partial f_i / \partial x_j)$  não assume posto máximo em  $x$ , logo o determinante de todo menor  $\rho \times \rho$  de  $(\partial f_i / \partial x_j)$  se anula em  $x$ . Note que o determinante de um menor  $\rho \times \rho$  é um polinômio pertencente a  $\mathbb{L}[X_1, \dots, X_m]$ . Reciprocamente, se o determinante de todo menor  $\rho \times \rho$  se anula em  $x$  então  $(\partial f_i / \partial x_j)$  não assume posto máximo em  $x$ , logo  $x \in \Sigma(V)$ . Assim,  $\Sigma(V)$  é o conjunto dos pontos que anulam os polinômios que são dados por cada menor determinante  $\rho \times \rho$ . Logo,  $\Sigma(V)$  é um conjunto algébrico e sendo cada  $x \in \Sigma(V)$  um elemento de  $V$  segue que  $\Sigma(V)$  é um subconjunto de  $V$ . ■

Seja  $\rho$  como na Definição 2.17, temos o seguinte teorema devido à Whitney:

**Teorema 2.19. (Whitney)** *Se  $\mathbb{L}$  é o corpo dos números reais (ou complexos), então o conjunto  $V \setminus \Sigma(V)$  dos pontos regulares de  $V \subset \mathbb{L}^m$  forma uma variedade diferenciável não vazia. Além disso, esta variedade é analítica real (ou complexa) e tem dimensão  $m - \rho$ .*

**Observação 2.20.** *No caso em que  $V$  é uma variedade algébrica, Whitney mostra que a dimensão da variedade diferenciável  $V \setminus \Sigma(V)$  é precisamente igual a dimensão algébrica de  $V$  sobre  $\mathbb{L}$ .*

**Teorema 2.21. (Whitney)** *Para qualquer par  $V \supset W$  de conjuntos algébricos num espaço de coordenadas real ou complexo, a diferença  $V \setminus W$  tem, no máximo, um número finito de componentes conexas.*

Para mais informações sobre os teoremas de Whitney veja, por exemplo, [16].

**Observação 2.22.** (i) O próprio  $V$  tem um número finito de componentes conexas.

(ii) A variedade diferenciável  $V \setminus \Sigma(V)$  tem um número finito de componentes conexas.

Cada um dos próximos dois exemplos será uma curva no plano real tendo a origem como único ponto singular.

**Exemplo 2.23.** Seja

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 - x^2(1 - x^2) = 0\}.$$

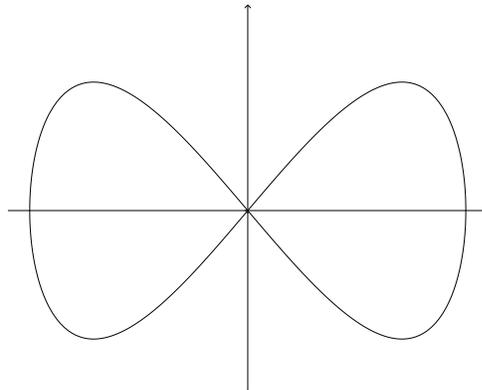


Figura 2.1:  $y = \pm x\sqrt{1 - x^2}$

Esta variedade algébrica ilustra o tipo de ponto singular mais bem comportado e de fácil compreensão, um “ponto duplo” em que dois ramos analíticos reais ( $y = x\sqrt{1 - x^2}$  e  $y = -x\sqrt{1 - x^2}$ ) com tangentes distintas se cruzam. Considerando a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = y^2 - x^2 + x^4$ , temos que o posto máximo da matriz

$$\left( \begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} -2x + 4x^3 & 2y \end{array} \right)$$

é 1. Assim, os pontos singulares de  $V$  são aqueles que anulam a matriz, ou seja,  $(-1/\sqrt{2}, 0)$ ,  $(1/\sqrt{2}, 0)$  e  $(0, 0)$ . Como somente  $(0, 0)$  pertence a  $V$  temos que este é o único ponto singular de  $V$ .

**Exemplo 2.24.** A equação  $y^3 = x^{100}$  pode ser resolvida tomando  $y$  como uma função de  $x$  diferenciável de classe  $C^{33}$ , além disso esta equação define uma variedade algébrica  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^3 - x^{100} = 0\} \subset \mathbb{R}^2$  que tem um único ponto singular, a origem.

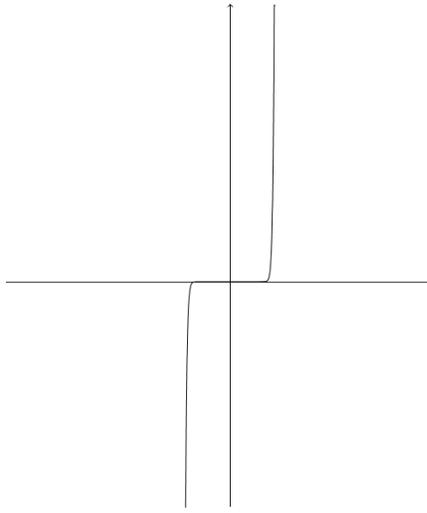


Figura 2.2:  $y = \sqrt[3]{x^{100}}$

Com efeito, para  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; f(x, y) = y^3 - x^{100}$ , temos que a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100x^{99} & 3y^2 \end{pmatrix}$$

tem posto máximo igual a 1. Como a única entrada que anula a matriz é  $(0, 0)$  e  $(0, 0) \in V$  segue que este é o único ponto singular de  $V$ .

**Definição 2.25.** O anel comutativo com unidade  $\mathbb{C}[[X_1, \dots, X_m]]$  consiste de todos os elementos que podem ser expressos por uma série de potências formal nas indeterminadas  $X_1, \dots, X_m$  com coeficientes em  $\mathbb{C}$ .

**Afirmção 2.26.** Uma variedade algébrica complexa não pode ser uma variedade diferenciável em toda uma vizinhança de um ponto singular.

**Demonstração:** Seja a variedade algébrica complexa

$$V = V(I) = \bigcap_{f \in I} V(f)$$

onde  $V(f) = \{a \in \mathbb{C}^m; f(a) = 0\}$ . Suponhamos, por absurdo, que  $V$  é diferenciável de classe  $C^1$  em toda uma vizinhança  $U$  da origem em  $\mathbb{C}^m$ . Temos que  $U \cap V$  é uma variedade diferenciável e para qualquer ponto regular  $z \in U \cap V$  o espaço tangente  $T_z(U \cap V) \subset \mathbb{C}^m$  pode ser tomado sendo um espaço vetorial complexo sobre os números complexos.

Pelo Teorema da Função Implícita, para cada  $z \neq 0 \in U$  existe  $U' \subset U$  tal que

$$U' \cap V = \text{Graf}(F) = \{(z_1, \dots, z_n, F(z_1, \dots, z_n))\}$$

onde  $F : W \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{m-n}$  é analítica. Portanto,  $U' \cap V$  é uma variedade diferenciável complexa.

Seja  $h$  uma função analítica complexa definida numa vizinhança de 0 tal que  $h \in \mathcal{I}(V)$  e  $f_1, \dots, f_k$  polinômios que geram  $\mathcal{I}(V)$ . Temos que

$$h^s = a_1 f_1 + \dots + a_k f_k, \quad s \in \mathbb{N}^*$$

onde  $a_1, \dots, a_k$  são germes de funções analíticas (veja, por exemplo, [1], pag.90).

Temos que  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}[[Z_1, \dots, Z_m]]$ . Logo,  $h^s$  pertence ao ideal  $\mathcal{I}(V)$  de  $\mathbb{C}[[Z_1, \dots, Z_m]]$ . Mas este ideal pode ser expresso como a interseção de ideais primos (veja, por exemplo, [5], pag. 91). Portanto,  $h \in \mathcal{I}(V)$  o qual é gerado por  $f_1, \dots, f_k$  em  $\mathbb{C}[[Z_1, \dots, Z_m]]$ . Tomando derivadas, isto implica que o gradiente  $dh(0)$  pode ser expresso como combinação linear dos gradientes  $df_1(0), \dots, df_k(0)$ . Mas o gradiente  $dh(0)$  pertence ao complemento ortogonal do espaço vetorial tangente à  $U' \cap V$  no ponto 0, o qual tem dimensão  $m-n$  (veja Definição 1.18). Logo, no ponto 0 temos uma quantidade  $m-n$  de vetores que são linearmente independentes, gerados por  $df_1(0), \dots, df_k(0)$ . Portanto, a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial z_j} \end{pmatrix}$$

tem posto  $m-n$  em 0 e, conseqüentemente, a origem não é ponto singular de  $V$ . ■

A seguir vamos enunciar o Nullstellensatz que também é conhecido como Teorema dos Zeros de Hilbert, a demonstração deste teorema pode ser vista, por exemplo, em [12], pag.16.

**Teorema 2.27. (Nullstellensatz)** *Seja  $J$  um ideal de  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_m]$ . Então  $\mathcal{I}(V(J)) = \sqrt{J}$ , onde  $\sqrt{J} = \{f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_m]; \exists n \in \mathbb{N}^*, f^n \in J\}$ .*

**Proposição 2.28.** *Seja  $V$  um conjunto algébrico não vazio. Podemos escrever  $V$  unicamente (exceto por permutações) na forma  $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$ , onde os conjuntos  $V_i$  são variedades algébricas e  $V_i \not\subset V_j$  para  $i \neq j$ . Os conjuntos  $V_i$  são chamados componentes irredutíveis de  $V$ .*

**Demonstração: (Existência)** Procedemos por contradição. Assumimos que existem conjuntos algébricos indecomponíveis e escolhemos um cujo ideal é maximal entre tais conjuntos. (Tal  $V$  existe pois o anel  $\mathbb{L}[X_1, \dots, X_m]$  é Noetheriano). Já que  $V$  não é variedade algébrica, podemos escrever  $V = F \cup G$ , com  $F, G \neq V$ . Logo,  $\mathcal{I}(F), \mathcal{I}(G) \supset \mathcal{I}(V)$  e  $\mathcal{I}(F), \mathcal{I}(G) \neq \mathcal{I}(V)$ . Pela maximalidade de  $\mathcal{I}(V)$  segue que  $F$  e  $G$  são decomponíveis:

$$F = F_1 \cup \dots \cup F_r, \quad G = G_1 \cup \dots \cup G_s.$$

Mas  $V$  é, então, decomponível. Uma contradição.

**(Unicidade)** Suponha dado duas expressões:

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_r = W_1 \cup \dots \cup W_s.$$

Podemos escrever

$$V_i = V \cap V_i = (W_1 \cap V_i) \cup \dots \cup (W_s \cap V_i).$$

Como  $V_i$  é variedade algébrica, existe um  $j$  tal que  $V_i = W_j \cap V_i$ , isto é,  $V_i \subset W_j$ . Do mesmo modo, existe  $k$  tal que  $W_j \subset V_k$  e, portanto  $V_i \subset V_k$ . Isto implica, por hipótese, que  $i = k$ . Segue, então, que  $V_i = W_j$ . ■

**Teorema 2.29.** *Seja  $V = V(f)$  uma hipersuperfície algébrica real ou complexa, com  $f$  irredutível. No caso real com a hipótese adicional de que  $V$  contém um ponto regular de  $f$ . Então, todo polinômio que se anula em  $V$  é um múltiplo de  $f$ . Consequentemente  $V$  é variedade algébrica e o conjunto dos pontos singulares de  $V$ ,  $\Sigma(V)$ , é precisamente a interseção de  $V$  com os pontos críticos de  $f$ .*

**Demonstração:** No caso complexo, é imediato do Teorema 2.27. De fato, como  $\mathbb{C}$  é algebricamente fechado vale que  $\mathcal{I}(V(f)) = \sqrt{(f)}$ . Se  $g$  se anula em  $V(f)$  então  $g \in \mathcal{I}(V(f))$ , logo  $g^n \in (f)$  para algum  $n \in \mathbb{N}^*$ . Como  $f$  é irredutível segue que  $(f)$  é primo e, portanto, de  $g^n \in (f)$  temos que  $g \in (f)$ . Isto mostra que  $g$  é um múltiplo de  $f$ .

No caso real, expresse  $V \subset \mathbb{R}^m$  como uma união

$$V_1 \cup \dots \cup V_k$$

de variedades algébricas, o que é possível pela Proposição 2.28. Seja  $a$  um ponto regular de  $f$  que pertence a  $V$ , então a matriz

$$\left( \begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \end{array} \right)$$

tem posto igual a 1 e  $f(a) = 0$ . Pelo Teorema da Função Implícita, existe  $Z \subset \mathbb{R}^m$ , aberto contendo  $a$ ,  $W \subset \mathbb{R}^{m-1}$  aberto contendo  $(a_1, \dots, a_{m-1})$  e  $\xi : W \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\xi(a_1, \dots, a_{m-1}) = a_m$  tal que

$$x \in Z \text{ e } f(x) = 0 \iff (x_1, \dots, x_{m-1}) \in W \text{ e } x_m = \xi(x_1, \dots, x_{m-1}).$$

Ou seja,  $f^{-1}(0) \cap Z = \{(x_1, \dots, x_{m-1}, \xi(x_1, \dots, x_{m-1})); (x_1, \dots, x_{m-1}) \in W\}$ . Mas  $f^{-1}(0) \cap Z = V \cap Z$  e  $f^{-1}(0) \cap Z = \text{Graf}(\xi)$ . Segue, então, que  $V \cap Z = \text{Graf}(\xi)$ . Portanto, a vizinhança  $V \cap Z$  de  $a$  é a imagem da única parametrização  $\phi : W \subset \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow V$ ,  $\phi(x) = (x, \xi(x))$ . Logo,  $V \cap Z$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $m - 1$ . Desta forma, pelo menos um dos  $V_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , tem dimensão  $m - 1$ . Portanto, de acordo com Whitney, a dimensão  $m - 1$  de  $V_j$  coincide com a dimensão algébrica de  $V_j$  sobre  $\mathbb{R}$ . Ou seja, o corpo de funções racionais em  $V_j$

$$\frac{\mathbb{R}[X_1, \dots, X_m]}{\mathcal{I}(V_j)}$$

tem grau de transcendência  $m - 1$  sobre  $\mathbb{R}$ . Mas o quociente de  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_m]$  pelo ideal primo principal  $(f)$  também tem grau de transcendência  $m - 1$  sobre  $\mathbb{R}$ . Como  $V_j \subset V$  segue que  $\mathcal{I}(V) \subset \mathcal{I}(V_j)$ , mas  $(f) \subset \mathcal{I}(V)$ . Logo  $(f) \subset \mathcal{I}(V_j)$ , o que implica  $(f) = \mathcal{I}(V_j)$ .

Pela Proposição 2.11 temos

$$V(f) = V(\mathcal{I}(V_j)) = V_j.$$

Portanto,  $\mathcal{I}(V) = \mathcal{I}(V_j) = (f)$ .

Note que como  $\mathcal{I}(V) = (f)$  temos que  $\mathcal{I}(V)$  é primo assim, pela Proposição 2.13,  $V$  é variedade algébrica.

Também,

$$\begin{aligned}\Sigma(V) &= \left\{ x \in V; \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) \right) \text{ não tem posto máximo} \right\} \\ &= \left\{ x \in V; \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) \right) = (0, \dots, 0) \right\} \\ &= \{ x \in V; x \text{ é ponto crítico de } f \}.\end{aligned}$$

■

**Observação 2.30.** *O resultado acima é válido sobre qualquer corpo localmente compacto, mas não sobre um corpo arbitrário. Por exemplo, o polinômio irredutível  $x^2 - y - y^3$  sobre o corpo dos números racionais tem apenas um zero racional,  $(0, 0)$  e não tem pontos críticos no plano racional:*

$$Df(x, y) = 0 \iff \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2x & -1 - 3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \nexists.$$

Neste caso,  $\Sigma(V)$  não é a interseção de  $V$  com seus pontos críticos.

Agora, vamos extrair maiores consequências dos dois teoremas de Whitney.

**Proposição 2.31.** *Um conjunto algébrico real ou complexo  $V$  pode ser expresso como uma união finita disjunta*

$$V = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_p,$$

onde cada  $M_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , é uma variedade diferenciável com um número finito de componentes.

Ainda, qualquer diferença  $V \setminus W$  de variedades pode ser expressa como uma união finita.

**Demonstração:** Sejam  $M_1 = V \setminus \Sigma(V)$  o conjunto dos pontos regulares de  $V$ ,  $M_2 = \Sigma(V) \setminus \Sigma(\Sigma(V))$  o conjunto dos pontos regulares de  $\Sigma(V)$ , e assim por diante. Esta construção deve parar após um número finito de etapas, pois, pela Proposição 2.7, a sequência

$$V \supset \Sigma(V) \supset \Sigma(\Sigma(V)) \supset \dots$$

deve estacionar. Pelo Teorema 2.19, cada  $M_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , é uma variedade diferenciável e pelo Teorema 2.21 cada uma destas tem um número finito de componentes conexas. Note que

$$\begin{aligned} V &= V \setminus \Sigma(V) \cup \Sigma(V) = V \setminus \Sigma(V) \cup \Sigma(V) \setminus \Sigma(\Sigma(V)) \cup \Sigma(\Sigma(V)) = \dots \\ &= V \setminus \Sigma(V) \cup \Sigma(V) \setminus \Sigma(\Sigma(V)) \cup \Sigma(\Sigma(V)) \cup \dots \cup \Sigma(\dots(\Sigma(V)) \setminus \Sigma(\Sigma(\dots(\Sigma(V)))) \cup \Sigma(\Sigma(\dots(\Sigma(V)))). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$V = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_p.$$

Semelhantemente,  $V \setminus W$  pode ser expressa como a união disjunta

$$M'_1 \cup M'_2 \cup \dots \cup M'_p,$$

com cada  $M'_i = M_i \setminus (W \cap M_i)$  uma variedade diferenciável tendo uma quantidade finita de componentes conexas. ■

O próximo teorema é frequentemente útil. Como anteriormente  $\mathbb{L}$  denota o corpo dos números reais ou o corpo dos números complexos. Lembramos que um ponto crítico de uma função definida em uma variedade diferenciável é dado na Definição 1.20.

**Teorema 2.32.** *Sejam  $V \subset \mathbb{L}^m$  um conjunto algébrico,  $M_1 = V \setminus \Sigma(V)$  e  $g : \mathbb{L}^m \rightarrow \mathbb{L}$  uma função polinomial. O conjunto dos pontos críticos da restrição  $g|_{M_1}$  é igual a interseção de  $M_1$  com o conjunto algébrico  $W$  que consiste de todos pontos  $x \in V$  para os quais a matriz*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_m}(x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}$$

tem posto menor ou igual a  $\rho$ , onde  $\rho$  é como na Definição 2.17 e  $f_1, \dots, f_k$  denotam polinômios que geram  $\mathcal{I}(V)$ .

**Demonstração:** Sejam  $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{L}[X_1, \dots, X_m]$  tais que  $f_1, \dots, f_k$  geram  $\mathcal{I}(V)$ ,  $F : \mathbb{L}^m \rightarrow \mathbb{L}^k$ ;  $F(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_k(x_1, \dots, x_m))$  e  $a = (a_1, \dots, a_m) \in M_1$ . Então,

$$\begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \dots & \partial f_1 / \partial x_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_k / \partial x_1 & \dots & \partial f_k / \partial x_m \end{pmatrix}$$

tem posto máximo  $\rho$  em  $a$ . Pelo Teorema da Função Implícita, existem vizinhanças  $Z$  e  $W$  de  $a$  em  $\mathbb{L}^m$  e um difeomorfismo  $h : Z \rightarrow W$  com  $h(a) = 0$  tal que

$$(F \circ h)(x_1, \dots, x_\rho, x_{\rho+1}, \dots, x_m) = (u_1, \dots, u_\rho).$$

Note que se  $x \in M_1$  então  $F(x) = 0$ . Localmente,  $F(x) = (u_1, \dots, u_\rho)$ . Logo,  $(u_1, \dots, u_\rho) = 0$ . Ou seja,  $M_1$  corresponde ao lugar geométrico

$$u_1 = \dots = u_\rho = 0.$$

Assim,  $u_{\rho+1}, \dots, u_m$  podem ser tomadas como coordenadas locais em  $M_1$ . Note que  $\partial f_i / \partial u_j$ , avaliada num ponto de  $M_1$ , é zero para  $j \geq \rho + 1$  (já que  $f_i$  se anula em  $M_1$ ). Como a matriz  $(\partial f_i / \partial u_j)$  é coluna equivalente à matriz  $(\partial f_i / \partial x_l)$  e, portanto tem posto  $\rho$ , segue que as primeiras  $\rho$  colunas de  $(\partial f_i / \partial u_j)$  devem ser linearmente independentes. Então, a matriz

$$\begin{pmatrix} \partial g / \partial u_1 & \dots & \partial g / \partial u_m \\ \partial f_1 / \partial u_1 & \dots & \partial f_1 / \partial u_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_k / \partial u_1 & \dots & \partial f_k / \partial u_m \end{pmatrix}$$

terá posto  $\rho$  se, e somente se,

$$\partial g / \partial u_{\rho+1} = \dots = \partial g / \partial u_m = 0$$

ou, em outras palavras, se e somente se, o ponto dado for um ponto crítico de  $g|_{M_1}$ .

Uma vez que esta nova matriz é coluna equivalente a matriz dada no enunciado temos o resultado. ■

**Corolário 2.33.** *Uma função polinomial  $g$  em  $M_1 = V \setminus \Sigma(V)$  pode ter, no máximo, um número finito de valores críticos.*

(Um valor crítico  $g(x) \in \mathbb{L}$  é a imagem por  $g$  de um ponto crítico)

**Demonstração:** O conjunto dos pontos críticos de  $g|_{M_1}$  pode ser expresso pela diferença  $W \setminus \Sigma(V)$  de conjuntos algébricos (pois, pelo teorema anterior,  $W \subset V$  e o conjunto dos pontos críticos de  $g|_{M_1}$  é igual a  $(V \setminus \Sigma(V)) \cap W$ ) e, portanto pode ser expresso como uma união finita de variedades diferenciáveis

$$W \setminus \Sigma(V) = M'_1 \cup \dots \cup M'_p,$$

onde cada  $M'_i$  tem um número finito de componentes.

Cada ponto  $x \in M'_i$  é um ponto crítico da função diferenciável  $g|_{M_1}$ , logo é um ponto crítico da restrição  $g|_{M'_i}$ . Já que todos os pontos de  $M'_i$  são críticos então  $g'$  se anula em todos eles, logo  $g$  é constante em cada componente de  $M'_i$ . Portanto, a imagem  $g(M'_i)$  é um conjunto finito (já que a quantidade de componentes é finita). Assim,

$$g(M'_1) \cup \dots \cup g(M'_p)$$

é um conjunto finito. Mas, este conjunto é precisamente o conjunto dos valores críticos de  $g|_{M_1}$ . ■

# Topologia Local

Neste capítulo estudamos alguns resultados mais específicos, aqui  $V \subset \mathbb{L}^m$  denota um conjunto algébrico real ou complexo.

**Proposição 3.1.** *Seja  $x^0$  um ponto regular de  $V$  ou um ponto isolado de  $\Sigma(V)$ . Toda esfera suficientemente pequena  $S_\epsilon$  centrada em  $x^0$  intercepta  $V$  numa variedade diferenciável (possivelmente vazia).*

**Demonstração:** No caso real segue aplicando o Corolário 2.33 ao polinômio

$$r(x) = \|x - x^0\|^2 = (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2.$$

De fato, se  $\epsilon^2$  é menor do que qualquer valor crítico positivo de  $r|_{(V \setminus \Sigma(V))}$  então qualquer  $x$  pertencente a  $V$ , que é ponto crítico de  $r$ , é tal que  $r(x) > \epsilon^2$  ou  $0$ , logo se  $x \in V$  é ponto crítico de  $r$  então  $x \notin S_\epsilon$ . Portanto,  $r^{-1}(\epsilon^2) = \{x \in V \setminus \Sigma(V); r(x) = \epsilon^2 \text{ e } x \text{ não é ponto crítico}\}$  e, conseqüentemente,  $\epsilon^2$  é valor regular de  $r$ . Assim, sua imagem inversa

$$r^{-1}(\epsilon^2) \cap (V \setminus \Sigma(V)) = S_\epsilon \cap (V \setminus \Sigma(V))$$

é uma variedade diferenciável  $K = S_\epsilon \cap (V \setminus \Sigma(V))$ . Tomando  $\epsilon$  suficientemente pequeno,  $S_\epsilon$  não terá interseção com  $\Sigma(V)$ . Desta forma,  $K = S_\epsilon \cap V$ .

A afirmação correspondente no caso complexo é imediata, pois toda variedade algébrica complexa em  $\mathbb{C}^m$  pode ser vista como uma variedade algébrica real em  $\mathbb{R}^{2m}$ . ■

**Definição 3.2.** *O conjunto  $K = S_\epsilon \cap V$  é chamado “link”.*

**Definição 3.3.** *Uma partição da unidade diferenciável em uma variedade diferenciável  $M$  consiste de uma cobertura por abertos  $\{U_i\}$  de  $M$  e uma coleção de funções diferenciáveis  $\sigma_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo as seguintes condições:*

- (i)  $\sigma_i(x) \geq 0 \forall x \in M$ ;
- (ii)  $\text{Suporte}(\sigma_i) \subset U_i$ , onde  $\text{Suporte}(\sigma_i)$  é o fecho do conjunto dos pontos  $x \in M$  tais que  $\sigma_i(x) \neq 0$ ;
- (iii) cada  $x \in M$  tem uma vizinhança na qual somente um número finito de  $\sigma_i$  são não nulas;
- (iv) para cada  $x \in M$ ,  $\sum_i \sigma_i(x) = 1$ .

**Definição 3.4.** Sejam  $x^0 \in \mathbb{L}^m$  um ponto e  $A \subset \mathbb{L}^m$  um conjunto. O cone sobre  $A$  com base em  $x^0$ , denotado por  $\text{Cone}(A)$ , é união de todos segmentos de reta

$$tk + (1 - t)x^0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

unindo pontos  $a \in A$  ao ponto base  $x^0$ .

O próximo resultado nos diz o tipo topológico da interseção  $V \cap D_\epsilon$ , onde  $D_\epsilon = \{x \in \mathbb{L}^m; \|x - x^0\| \leq \epsilon\}$  e  $x^0$  é um ponto regular ou singular isolado de  $V$ . Considerando  $S_\epsilon$  centrada em  $x^0$  temos, de acordo com a definição acima, que o  $\text{Cone}(S_\epsilon)$  é naturalmente igual a  $D_\epsilon$ .

**Teorema 3.5.** Para  $\epsilon$  suficientemente pequeno a interseção de  $V$  com  $D_\epsilon$  é homeomorfa ao cone sobre  $K = V \cap S_\epsilon$ . Além disso, o par  $(D_\epsilon, V \cap D_\epsilon)$  é homeomorfo ao par  $(\text{Cone}(S_\epsilon), \text{Cone}(K))$ .

**Demonstração:** Novamente, é suficiente considerar apenas o caso real já que toda variedade algébrica complexa em  $\mathbb{C}^m$  pode ser vista como uma variedade algébrica real em  $\mathbb{R}^{2m}$ . Seja  $\epsilon$  suficientemente pequeno de modo que o disco  $D_\epsilon$  não contenha pontos singulares de  $V$  e nem pontos críticos de  $r|_{(V \setminus \Sigma(V))}$ , exceto o próprio  $x^0$ .

Vamos construir um campo vetorial diferenciável  $v(x)$  no disco perfurado  $D_\epsilon - x^0$ , ou seja, uma aplicação diferenciável  $v : D_\epsilon - x^0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ , com duas propriedades:

- (i) o vetor  $v(x)$  sempre apontará para “fora” de  $x^0$  para todo  $x$ ; isto é, o produto interno euclidiano

$$\langle v(x), x - x^0 \rangle$$

será estritamente positivo;

- (ii) o vetor  $v(x)$  será tangente a variedade diferenciável  $M_1 = V \setminus \Sigma(V)$  quando  $x$  pertencer a  $M_1$ .

Primeiro, vamos construir tal campo vetorial localmente. Dado qualquer ponto  $x^a \in D_\epsilon - x^0$  construiremos um campo vetorial  $v^a(x)$  em toda uma vizinhança  $U^a$  de  $x^a$  de modo que estas duas propriedades sejam satisfeitas.

Se  $x^a$  não pertence a  $V$ , então podemos simplesmente definir

$$v^a(x) = x - x^0$$

para todo  $x$  em alguma vizinhança  $U^a \subset \mathbb{R}^m \setminus V$ . Temos

$$\langle v^a(x), x - x^0 \rangle = \langle x - x^0, x - x^0 \rangle = \|x - x^0\|^2 > 0, \text{ pois } x \neq x^0 \text{ (} x^0 \in V \text{ e } x \notin V \text{)}$$

e  $x^a \notin M_1$  (pois,  $x^a \notin V$ ).

Se  $x^a$  pertence a  $V$  e, portanto pertence a  $M_1$  (pois  $x^a \in D_\epsilon - x^0$ , o qual não contém pontos singulares de  $V$ ), escolha, da mesma forma como fizemos na demonstração do Teorema 2.32, um sistema de coordenadas locais  $u_1, \dots, u_m$  em toda uma vizinhança de  $x^a$  de modo que  $M_1$  corresponde ao lugar geométrico  $u_1 = \dots = u_\rho = 0$ . Como  $x^a$  não é ponto crítico da função  $r|_{M_1}$ , onde  $r(x) = \|x - x^0\|^2$ , segue da demonstração do Teorema 2.32, que pelo menos uma das derivadas parciais

$$\partial r / \partial u_{\rho+1}, \dots, \partial r / \partial u_m$$

deve ser não nula em  $x^a$ . Se, por exemplo,  $\partial r / \partial u_h$  é não nula em  $x^a$  então seja  $U^a$  uma vizinhança suficientemente pequena conexa na qual  $\partial r / \partial u_h \neq 0$  e seja  $v^a(x)$  o vetor

$$\pm(\partial x_1 / \partial u_h, \dots, \partial x_m / \partial u_h)$$

tangente a curva  $u_h$ -coordenada em  $x$ , escolhendo o sinal positivo ou negativo conforme  $\partial r / \partial u_h$  é positivo ou negativo. Note que  $v^a(x)$  é tangente a  $M_1$ , sempre que  $x \in M_1$ , pois a curva  $u_h$ -coordenada está contida em  $M_1$ . Além disso,

$$2\langle v^a(x), x - x^0 \rangle = \sum 2(x_i - x_i^0)v_i^a = \sum (\partial r / \partial x_i)(\pm \partial x_i / \partial u_h)$$

é igual a  $\pm \partial r / \partial u_h > 0$  para todo  $x \in U^a$ .

Agora, seja  $\{\lambda^a\}$  uma partição da unidade em  $D_\epsilon - x^0$  diferenciável com  $\text{Suporte}(\lambda^a) \subset U^a$  (a existência de tal partição da unidade pode ser verificada em [4], pag. 33). Então o campo vetorial

$$v(x) = \sum \lambda^a(x) v^a(x)$$

em  $D_\epsilon - x^0$ , satisfaz (i) e (ii):

(i)  $\langle v(x), x - x^0 \rangle = \langle \sum \lambda^a(x) v^a(x), x - x^0 \rangle = \sum \lambda^a(x) \langle v^a(x), x - x^0 \rangle > 0$ , pois  $\lambda^a(x) \geq 0$ ,  $\langle v^a(x), x - x^0 \rangle > 0$  e esta soma é finita já que somente um número finito de  $\lambda^a$  são não nulas;

(ii) sendo cada  $v^a(x)$  tangente à  $M_1$  segue que  $v(x)$  é tangente à  $M_1$ .

Normalize definindo

$$w(x) = \frac{v(x)}{\langle 2(x - x^0), v(x) \rangle}$$

e considere a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = w(x).$$

As soluções são curvas diferenciáveis  $x = p(t)$ , definidas para  $\alpha < t < \beta$ , que satisfazem

$$\frac{dp}{dt}(t) = w(p(t)).$$

Dada qualquer solução  $p(t)$ , a derivada da composição  $r(p(t))$  é dada por

$$\begin{aligned} r'(p(t))p'(t) &= r'(x)w(x) \\ &= \left( \partial r / \partial x_1 \quad \dots \quad \partial r / \partial x_m \right) \begin{pmatrix} w_1(x) \\ \vdots \\ w_m(x) \end{pmatrix} \\ &= (\partial r / \partial x_1)w_1(x) + \dots + (\partial r / \partial x_m)w_m(x) \\ &= 2(x_1 - x_1^0)w_1(x) + \dots + 2(x_m - x_m^0)w_m(x) \\ &= \langle 2(x - x^0), w(x) \rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

onde  $x = p(t)$ . Assim, a função  $r(p(t))$  deve ser igual a  $t + c$  com  $c$  uma constante. Portanto, subtraindo a constante  $c$  do parâmetro  $t$ , se necessário, podemos assumir que

$$r(p(t)) = \|p(t) - x^0\|^2 = t.$$

**Afirmção 3.6.** *Esta solução  $p(t)$  pode ser estendida em todo o intervalo  $0 < t \leq \epsilon^2$ .*

Deixamos a demonstração desta afirmação para depois, retomamos, agora, a demonstração atual.

Note que a solução  $p(t)$ ,  $0 < t \leq \epsilon^2$ , é unicamente determinada pelo valor inicial

$$p(\epsilon^2) \in S_\epsilon.$$

Para cada  $a \in S_\epsilon$  seja

$$p_a(t) = P(a, t), \quad 0 < t \leq \epsilon^2$$

a única solução que satisfaz a condição inicial

$$p_a(\epsilon^2) = P(a, \epsilon^2) = a.$$

Então,

$$\begin{aligned} P : S_\epsilon \times (0, \epsilon^2] &\longrightarrow D_\epsilon - x^0 \\ (a, t) &\longmapsto p_a(t) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo local. Note que  $r(p_a(t)) = t$ , logo  $p_a$  tem inversa à esquerda e portanto é sobrejetora. Dado  $x \in D_\epsilon - x^0$ , existe  $w(x)$  para este  $x$ , logo existe  $p_a(t)$  tal que  $p'_a(t) = w(x)$ . Como  $p_a(t)$  é sobrejetora, existe  $t_0$  tal que  $x = p_a(t_0) = P(a, t_0)$ . Isto mostra que  $P$  é sobrejetora. Suponha que  $P(a, t_1) = P(b, t_2)$ , então  $p_a(t_1) = p_b(t_2)$ . Temos, assim, que

$$\begin{aligned} \|p_a(t_1) - x^0\| = \|p_b(t_2) - x^0\| &\implies \|p_a(t_1) - x^0\|^2 = \|p_b(t_2) - x^0\|^2 \\ &\implies r(p_a(t_1)) = r(p_b(t_2)) \implies t_1 = t_2. \end{aligned}$$

E, tomando  $t_1 = t_2 = \epsilon^2$  temos  $p_a(\epsilon^2) = p_b(\epsilon^2)$ , ou seja,  $a = b$ . Logo,  $P$  é injetora. Sendo cada  $p_a$  diferenciável segue que  $P$  é diferenciável. E como  $P$  é não nula temos, pelo Teorema da Função Inversa, que  $P$  é um difeomorfismo local.

Como o campo vetorial  $w(x)$  é tangente à  $M_1$  para todo  $x \in M_1$ , segue que toda curva solução que toca  $M_1$  deve estar contida em  $M_1$ . Portanto,  $P$  aplica o produto  $K \times (0, \epsilon^2]$  difeomorficamente em  $V \cap (D_\epsilon - x^0)$ .

Finalmente, note que  $P(a, t)$  tende uniformemente para  $x^0$  quando  $t \rightarrow 0$ . Assim, a correspondência

$$ta + (1 - t)x^0 \mapsto P(a, t\epsilon^2)$$

definida para  $0 < t \leq 1$ , estende-se, unicamente, a um homeomorfismo do  $\text{Cone}(S_\epsilon)$  à  $D_\epsilon$ . Além disso, este homeomorfismo leva o  $\text{Cone}(K)$  em  $V \cap D_\epsilon$ . ■

Vamos demonstrar, agora, a Afirmação 3.6 feita no decorrer da demonstração do Teorema 3.5.

**Demonstração: (Afirmação 3.6)** Podemos assumir que o campo vetorial  $w(x)$  foi construído sobre um conjunto aberto ligeiramente maior do que  $D_\epsilon - x^0$ , de modo que os pontos de fronteira de  $D_\epsilon$  não causam nenhum problema. Pelo Lema de Zorn (1.8), a solução dada  $p(t)$  pode ser estendida sobre algum intervalo maximal  $\alpha' < t < \beta'$ . Suponha, por exemplo, que  $\beta' \leq \epsilon^2$ . Então estenderemos a solução  $p(t)$  sobre um intervalo ligeiramente maior contradizendo, assim, a definição de  $\beta'$ .

Como os pontos  $p(t)$  com  $\alpha' < t < \beta'$  pertencem ao conjunto compacto  $D_\epsilon$ , existe pelo menos um ponto limite  $x'$  de  $\{p(t)\}$  quando  $t \rightarrow \beta'$  e, claramente,  $r(x') = \beta' \neq 0$  de modo que  $x' \in D_\epsilon - x^0$ .

Dada a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = w(x),$$

pelo Teorema de Existência, Unicidade e Diferenciabilidade Local, para cada  $x''$  em alguma vizinhança  $U$  de  $x'$  e cada  $t''$  em algum intervalo arbitrariamente pequeno  $I$  contendo  $\beta'$  existe uma única solução  $x = q(t)$ ,  $t \in I$  satisfazendo a condição inicial  $q(t'') = x''$  e, além disso,  $q(t)$  é uma função diferenciável de  $x''$ ,  $t''$  e  $t$  ([4], Capítulo 4 §1). Para aplicar este teorema, escolha  $t'' \in (\alpha', \beta') \cap I$  e seja  $x''$  igual a  $p(t'')$ . Usando o Teorema de Unicidade Local ([4], pag. 64), podemos verificar que  $p(t) = q(t)$  para todo  $t$  no domínio comum da definição  $(\alpha', \beta') \cap I$ . Assim, as soluções  $p$  e  $q$  podem ser unidas para fornecer uma solução que é definida para  $t$  no intervalo maior  $(\alpha', \beta') \cup I$ . Esta contradição prova que  $\beta' > \epsilon^2$ , e

um argumento semelhante mostra que  $\alpha' = 0$ . ■

A seguir vamos apresentar um exemplo como ilustração do Teorema 3.5.

**Exemplo 3.7.** *Seja  $V$  como na Figura 3.1. Considere  $S_\epsilon$  uma esfera de raio  $\epsilon$  centrada em  $O$ , o qual estamos supondo um ponto singular isolado de  $V$ . Na Figura 3.1 temos as representações de  $V$  interseção com  $S_\epsilon$ , do link  $K = V \cap S_\epsilon$  e do  $\text{Cone}(K)$ .*

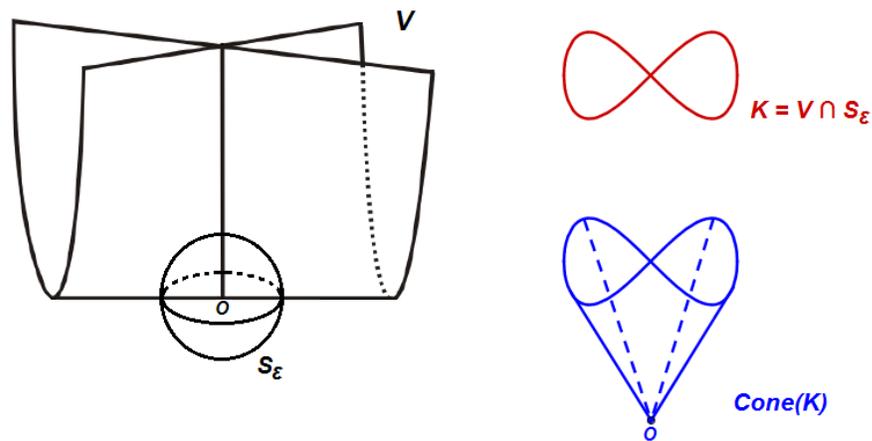


Figura 3.1: O cone sobre o link  $K$ .

No restante deste capítulo consideramos apenas pontos regulares de  $V$ .

**Definição 3.8.** *Dizemos que  $E \subset S_\epsilon$  é uma esfera não enodada em  $S_\epsilon$  se existe  $S^{m-1}$  e um difeomorfismo  $h : S_\epsilon \rightarrow S^{m-1}$  tal que  $h|_E : E \rightarrow F$  é homeomorfismo, onde  $F = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in S^{m-1}; x_1 = \dots = x_i = 0, 1 \leq i \leq m\}$ .*

**Proposição 3.9.** *Se  $x^0$  é um ponto regular de  $V$ , então a interseção  $K = V \cap S_\epsilon$  é uma esfera não enodada em  $S_\epsilon$ , para todo  $\epsilon$  suficientemente pequeno.*

**Demonstração:** Seja

$$\begin{aligned} F : M_1 \subset \mathbb{L}^m &\longrightarrow \mathbb{L}^k \\ x &\longmapsto (f_1(x), \dots, f_k(x)), \end{aligned}$$

onde  $f_1, \dots, f_k$  geram  $\mathcal{I}(V)$ . Em cada ponto de  $M_1$ ,

$$\begin{pmatrix} \partial f_1/\partial z_1 & \cdots & \partial f_1/\partial z_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_k/\partial z_1 & \cdots & \partial f_k/\partial z_m \end{pmatrix}$$

tem posto máximo igual a  $k$ . Logo, numa vizinhança de qualquer ponto de  $M_1$  existem coordenadas locais  $x_1, \dots, x_k$  para  $M_1$ .

Seja  $r : M_1 = V \setminus \Sigma(V) \rightarrow \mathbb{R}$  a função diferenciável definida por  $r(x) = \|x - x^0\|^2$ . Podemos escrever  $r(x) = \|x - x^0\|^2 = (x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_k - x_k^0)^2$ . Temos  $\partial r/\partial x_i = 2(x_i - x_i^0)$  logo,  $\partial r/\partial x_i(x^0) = 0$ . Portanto,  $x^0$  é ponto crítico de  $r$ . Note que a matriz Hessiana de  $r$  no ponto  $x^0$ , que é dada por:

$$H(x^0) = d^2r(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 r}{\partial x_1 \partial x_1}(x^0) & \frac{\partial^2 r}{\partial x_1 \partial x_2}(x^0) & \cdots & \frac{\partial^2 r}{\partial x_1 \partial x_k}(x^0) \\ \frac{\partial^2 r}{\partial x_2 \partial x_1}(x^0) & \frac{\partial^2 r}{\partial x_2 \partial x_2}(x^0) & \cdots & \frac{\partial^2 r}{\partial x_2 \partial x_k}(x^0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 r}{\partial x_k \partial x_1}(x^0) & \frac{\partial^2 r}{\partial x_k \partial x_2}(x^0) & \cdots & \frac{\partial^2 r}{\partial x_k \partial x_k}(x^0) \end{pmatrix}$$

é igual a

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\det \left( \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) \right) = 2^k \neq 0.$$

Portanto,  $x^0$  é um ponto crítico não degenerado de  $r$ .

Pela Lema de Morse (1.34), existe um sistema de coordenadas  $\xi : V_0 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow W$  com  $x^0 \in W \subset M_1$ ,  $0 \in V_0$ ,  $\xi(0) = x^0$  e

$$r(\xi(u)) = r(x^0) - u_1^2 - \dots - u_i^2 + u_{i+1}^2 + \dots + u_k^2,$$

onde  $i$  é o índice do ponto crítico  $x^0$ . Note que

$$\det(\lambda I - H(x^0)) = 0 \iff (\lambda - 2)^k = 0 \iff \lambda = 2.$$

Logo, a matriz Hessiana não tem autovalores negativos e, conseqüentemente,  $i = 0$ . Portanto, existe um sistema de coordenadas locais  $u_1, \dots, u_k$  para  $M_1$ , próximo de  $x^0$ , de modo que

$$r(x) = r(\xi(u)) = u_1^2 + \dots + u_k^2.$$

Segue que  $K = V \cap S_\epsilon$  é difeomorfa a esfera que consiste de todos  $(u_1, \dots, u_k)$  com  $u_1^2 + \dots + u_k^2 = \epsilon^2$ . Mas, o Lema de Morse (1.34) pode ser aplicado também ao par de variedades  $M_1 \subset \mathbb{R}^m$ . Isto é, existem coordenadas locais  $v_1, \dots, v_m$  para  $\mathbb{R}^m$  próximo de  $x^0$  tal que

$$r(x) = r(\varphi(v)) = v_1^2 + \dots + v_m^2$$

e de modo que  $V$  corresponde ao lugar geométrico  $v_{k+1} = \dots = v_m = 0$ .

Assim, o par  $(S_\epsilon, K)$  é difeomorfo ao par que consiste de uma esfera e uma esfera no subespaço de  $\mathbb{R}^m$  das  $v$ -coordenadas. ■

Vejamos um exemplo.

**Exemplo 3.10.** *Sejam  $V$  o parabolóide de revolução dado pela equação  $x^2 + y^2 + 2z = 0$  e  $S_\epsilon$  uma esfera centrada na origem de raio  $\epsilon$ .*

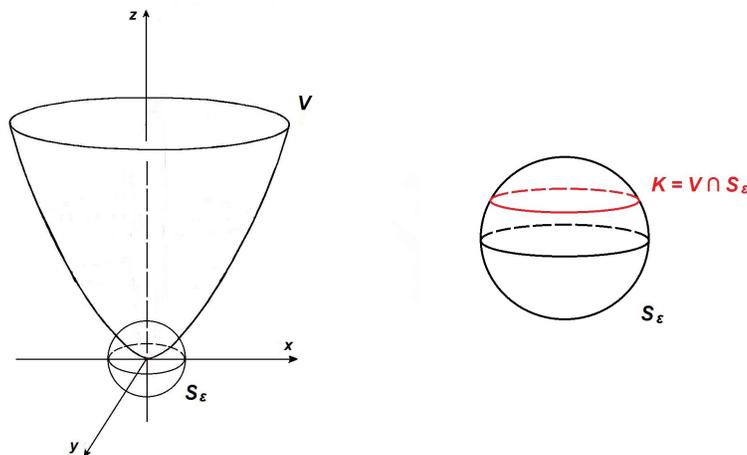


Figura 3.2: Parabolóide de revolução interseção com  $S_\epsilon$ .

Note que a origem é um ponto regular de  $V$ . De fato, considere  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z$ . Temos que  $V = f^{-1}(0)$  e a matriz

$$\left( \begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc} 2x & 2y & 2 \end{array} \right)$$

tendo uma entrada constante diferente de zero, assume posto máximo igual a 1 em todo ponto de  $\mathbb{R}^3$ , em particular na origem.

A interseção  $K = V \cap S_\epsilon$  é, claramente, homeomorfa ao equador de  $S_\epsilon$ , o qual é uma esfera de dimensão 1. Portanto,  $K$  é uma esfera não enodada em  $S_\epsilon$ .

Agora, considere um ponto regular  $z^0$  de uma hipersuperfície algébrica complexa

$$V = f^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^m.$$

Queremos estudar o conjunto

$$F_0 = \phi^{-1}(1) = f^{-1}(\mathbb{R}_+) \cap S_\epsilon,$$

onde

$$\begin{aligned} \phi : S_\epsilon \setminus K &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto \frac{f(z)}{|f(z)|}. \end{aligned}$$

**Proposição 3.11.** *Se o centro  $z^0$  de  $S_\epsilon$  é um ponto regular de  $f$ , então a “fibra”  $F_0 = \phi^{-1}(1)$  é difeomorfa a  $\mathbb{R}^{2m-2}$ .*

**Demonstração:** Considere a aplicação

$$\begin{aligned} r : f^{-1}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}^m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \|z - z^0\|^2. \end{aligned}$$

Temos que  $z^0$  é um ponto crítico não degenerado de  $r$ . Aplicando o Lema de Morse (1.34) ao par de variedades  $V \subset f^{-1}(\mathbb{R})$ , existe um sistema de coordenadas  $\xi : V_0 \longrightarrow W$  com  $z^0 \in W \subset f^{-1}(\mathbb{R})$ ,  $0 \in V_0$ ,  $\xi(0) = z^0$  e

$$r(z) = \|z - z^0\|^2 = \|\xi(u) - \xi(0)\|^2 = u_1^2 + \dots + u_{2m-1}^2, \quad (u = (u_1, \dots, u_{2m-1})) \quad (3.1)$$

Note que  $f(z^0) = 0$  e

$$\left( \frac{\partial f}{\partial z_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial z_m} \right)$$

avaliada em  $z^0$  tem posto igual a 1. Pelo Teorema da Função Implícita, existem vizinhanças  $U$  e  $Z$  de  $z^0$  em  $\mathbb{C}^m$  e um difeomorfismo  $h : U \rightarrow Z$  com  $h(z^0) = 0$  tais que

$$(f \circ h)(z_1, z_2, \dots, z_m) = z_1. \quad (3.2)$$

Sendo  $V = f^{-1}(0) = \{z \in \mathbb{C}^m; f(z) = 0\}$ , localmente  $V = \{z \in \mathbb{C}^m; z_1 = 0\}$ . Tomando uma vizinhança menor, se necessário, temos que 3.1 e 3.2 são satisfeitas simultaneamente. Como  $\phi^{-1}(1) \subset S_\epsilon \setminus K$  ( $K = V \cap S_\epsilon$ ),  $\phi^{-1}(1)$  não contém pontos de  $V$  que é onde  $u_1 = 0$  e, sendo  $r$  contínua no conexo  $S_\epsilon \setminus K$  e  $u_1 \neq 0$  temos que  $u_1$  é estritamente positivo ou estritamente negativo. Então,

$$\phi^{-1}(1) = f^{-1}(\mathbb{R}_+) \cap S_\epsilon$$

corresponderá ao hemisfério aberto

$$\pm u_1 > 0; \quad u_1^2 + \dots + u_{2m-1}^2 = \epsilon^2,$$

o qual é difeomorfo a  $\mathbb{R}^{2m-2}$ . ■

# Lema de Seleção da Curva

Dados  $V \subset \mathbb{R}^m$  um conjunto algébrico real e  $U \subset \mathbb{R}^m$  um conjunto aberto definido por um número finito de desigualdades polinomiais:

$$U = \{x \in \mathbb{R}^m; g_1(x) > 0, \dots, g_l(x) > 0\}.$$

Provamos, neste capítulo, o seguinte lema:

**Lema 4.1. (Lema de Seleção da Curva)** *Se  $U \cap V$  contém pontos arbitrariamente próximos da origem (isto é, se  $0 \in \overline{U \cap V}$ ) então existe uma curva analítica real definida por*

$$p : [0, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

com  $p(0) = 0$  e  $p(t) \in U \cap V$  para  $t > 0$ .

Suponha  $\dim V \geq 2$ . Vamos construir um subconjunto algébrico próprio  $V_1 \subset V$  tal que  $0 \in \overline{U \cap V_1}$ . Este processo pode ser repetido indutivamente até encontrarmos um subconjunto algébrico  $V_q$  tal que  $\dim V_q \leq 1$  e  $0 \in \overline{U \cap V_q}$ .

Podemos assumir que  $V$  é variedade algébrica. Pois se  $V$  é a união de dois subconjuntos algébricos próprios, então um deles servirá como  $V_1$ .

Também podemos assumir que  $D_\eta \cap U \cap \Sigma(V) = \emptyset$  em alguma vizinhança  $D_\eta$  de 0. Caso contrário, poderíamos escolher  $V_1$  sendo  $\Sigma(V)$ .

Será conveniente usar a linguagem de diferenciais. Por definição a diferencial  $df(x)$  de um polinômio  $f$  em  $x$  é o elemento do espaço (vetorial) dual

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$$

que corresponde ao vetor linha

$$(\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_m)$$

avaliado em  $x$ .

Sejam  $f_1, \dots, f_k$  os geradores do ideal  $I(V)$ . Lembremos que o conjunto dos pontos singulares de  $V$ ,  $\Sigma(V)$ , é o conjunto de todos  $x \in V$  para os quais

$$\text{posto}\{df_1(x), \dots, df_k(x)\} < \rho,$$

onde a dimensão da variedade algébrica  $V$  é  $m - \rho$ .

Faremos uso de duas funções auxiliares:

$$r(x) = \|x\|^2, \quad g(x) = (g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \dots \cdot g_l(x)).$$

Seja  $V'$  o conjunto de todos  $x \in V$  com

$$\text{posto}\{df_1(x), \dots, df_k(x), dr(x), dg(x)\} \leq \rho + 1.$$

Temos:

**Lema 4.2.** *A interseção  $U \cap V'$  também contém pontos arbitrariamente próximos de 0.*

**Demonstração:** Por hipótese, existem esferas suficientemente pequenas  $S_\epsilon$  centradas em 0 que contém pontos de  $U \cap V$ . Seja  $S_\epsilon$  uma dessas esferas e considere o conjunto

$$C = \{x \in V \cap S_\epsilon; g_1(x) \geq 0, \dots, g_l(x) \geq 0\}.$$

Provemos que  $C$  é compacto. Note que os conjuntos  $U_i = \{x \in \mathbb{R}^m; g_i(x) \geq 0\}$  são fechados. De fato, seus complementares  $\mathbb{R}^m \setminus U_i$  são subconjuntos abertos de  $\mathbb{R}^m$  pois são a imagem inversa do intervalo aberto  $(-\infty, 0)$  por  $g_i$  que é contínua. Como a interseção de conjuntos fechados é um conjunto fechado e

$$K = \{x \in \mathbb{R}^m; g_1(x) \geq 0, \dots, g_l(x) \geq 0\} = U_1 \cap \dots \cap U_l,$$

segue que  $K$  é fechado. Também,  $V \cap S_\epsilon$  é fechado (pois, é a interseção de fechados). Como  $C = V \cap S_\epsilon \cap K$  segue que  $C$  é fechado e, como  $C$  é limitado segue que  $C$  é compacto.

A função  $g$  sendo contínua deve assumir máximo e mínimo em algum ponto  $x'$  deste compacto. Claramente  $x' \in U$ , vamos mostrar que  $x' \in V'$ . Note que  $S_\epsilon$  intercepta  $U \cap V$  numa variedade diferenciável de dimensão  $m - \rho - 1$  e que

$$\text{posto}\{df_1(x), \dots, df_k(x), dr(x)\} = \rho + 1$$

em cada ponto  $x \in U \cap V \cap S_\epsilon$ . Isto segue das demonstrações da Proposição 3.1, do Teorema 2.32 e do fato que  $U \cap S_\epsilon$  não contém pontos singulares de  $V$  para  $\epsilon$  suficientemente pequeno. Como  $U \cap V \cap S_\epsilon$  é uma variedade diferenciável e  $\text{posto}\{df_1(x), \dots, df_k(x), dr(x)\} = \rho + 1 \forall x \in U \cap V \cap S_\epsilon$ , pelo Teorema 2.32, temos que o conjunto dos pontos críticos de  $g|_{U \cap V \cap S_\epsilon}$  é igual a interseção de  $U \cap V \cap S_\epsilon$  com o conjunto de todos os  $x \in V$  tal que  $\text{posto}\{df_1(x), \dots, df_k(x), dr(x), dg(x)\} \leq \rho + 1$ . Ou seja, os pontos críticos de  $g|_{U \cap V \cap S_\epsilon}$  são os pontos críticos de  $U \cap V \cap S_\epsilon$  que estão em  $V'$ .

Mas,  $g|_{U \cap V \cap S_\epsilon}$  assume seu máximo em  $x'$ . Logo,  $x'$  é ponto crítico de  $g|_{U \cap V \cap S_\epsilon}$  e, portanto,  $x' \in V'$ . ■

Deste modo, se  $V'$  é um subconjunto próprio de  $V$  então  $V'$  satisfaz nossas condições. Resta a questão do que fazer quando  $V = V'$ .

Também podemos fazer a construção usando a função

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto x_i g(x_1, \dots, x_m)$$

no lugar de  $g$ . Seja  $V'_i$  o conjunto de todos  $x \in V$  tal que

$$\text{posto}\{df_1(x), \dots, df_k(x), dr(x), d(x_i g)(x)\} \leq \rho + 1.$$

Da mesma forma que fizemos anteriormente, podemos mostrar que  $0 \in \overline{U \cap V'_i}$ . Assim, encontramos um conjunto algébrico adequado  $V_1 \subset V$ , exceto no caso

$$V = V' = V'_1 = \dots = V'_m.$$

**Afirmção 4.3.** *Este caso somente poderá ocorrer quando a dimensão  $m - \rho$  de  $V$  é igual a 1.*

**Demonstração:** Podemos escolher  $x' \in U \cap V$  de modo que

$$\text{posto}\{df_1(x'), \dots, df_k(x'), dr(x')\} = \rho + 1.$$

Se  $V = V'$  então  $x' \in V'$  e, portanto a diferencial  $dg(x')$  deve pertencer ao  $(\rho + 1)$ -espaço vetorial gerado por

$$\{df_1(x'), \dots, df_k(x'), dr(x')\}.$$

Da mesma forma, se  $V = V'_i$  então  $d(x_i g)(x')$  deve pertencer a este  $\rho + 1$ -espaço vetorial.

Mas as diferenciais  $dx_1, \dots, dx_m$  formam uma base para todo o  $m$ -espaço vetorial de diferenciais em  $x'$ . Como  $dx_1(x'), \dots, dx_m(x')$  pertencem ao espaço gerado por  $df_1(x'), \dots, df_k(x')$  e  $dr(x')$  segue que o subespaço gerado por  $df_1(x'), \dots, df_k(x')$  e  $dr(x')$  deve ser todo o espaço e sua dimensão  $\rho + 1$  deve ser igual a  $m$ . Portanto,  $m - \rho = 1$ . ■

Agora, podemos fazer uso da descrição clássica das variedades algébricas de dimensão 1:

**Lema 4.4.** *Seja  $x^0$  um ponto não isolado de uma 1-variedade real ou complexa  $V$ . Então, uma vizinhança convenientemente escolhida de  $x^0$  em  $V$  é a união de um número finito de ramos que se interceptam somente em  $x^0$ . Cada ramo é homeomorfo a um intervalo de números reais (ou a um disco aberto de números complexos) através de um homeomorfismo  $x = p(t)$  que é dado por uma série de potências*

$$p(t) = x^0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$$

*convergente para  $|t| < \epsilon$ .*

Antes de iniciarmos a demonstração do lema note que se  $k$  é o menor índice de modo que  $V$  não está contida num hiperplano coordenado  $x_k = c$  com  $c$  constante, então a parametrização  $p$  pode ser escolhida de modo que  $x_k = p_k(t)$  é uma função polinomial da forma

$$p_k(t) = cte \pm t^\mu, \quad \mu \geq 1.$$

Além disso,  $p$  pode ser escolhida de modo que a coleção  $\{i; a_i \neq 0\}$  de expoentes tem máximo divisor comum igual a 1. A série de potências  $p$  é, então, unicamente determinada exceto pelo sinal do parâmetro  $t$  (ou, pela multiplicação de  $t$  por raízes da unidade no caso complexo).

**Demonstração:** Não faremos o caso de curva em  $\mathbb{C}^m$ ,  $m \geq 2$ , para mais informações ver [15] que faz para o caso  $m = 2$  o qual pode ser estendido para  $m > 2$ . O caso de 1-variedade  $V \subset \mathbb{R}^m$  pode ser tratado como segue:

Seja  $V_c$  o menor conjunto algébrico complexo em  $\mathbb{C}^m$  que contém  $V$ . Temos que  $V_c$  é irreduzível, de dimensão complexa 1 e que o conjunto  $\mathbb{R}^m \cap V_c$  de pontos reais em  $V_c$  é igual a  $V$ . Para provar que  $V_c$  é irreduzível suponha, por absurdo, que  $V_c$  é redutível. Logo, existem  $V_{c_1}, V_{c_2} \subset \mathbb{C}^m$  tais que  $V_{c_1}, V_{c_2} \neq V_c$  e  $V_c = V_{c_1} \cup V_{c_2}$ . Como  $V_c \cap \mathbb{R}^m = V$  temos  $(V_{c_1} \cup V_{c_2}) \cap \mathbb{R}^m = V$ . Logo,  $(V_{c_1} \cap \mathbb{R}^m) \cup (V_{c_2} \cap \mathbb{R}^m) = V$  com  $V_{c_1} \cap \mathbb{R}^m, V_{c_2} \cap \mathbb{R}^m \neq V$ , pois  $V_{c_1}, V_{c_2} \neq V_c$ . Mas neste caso  $V$  seria redutível. Absurdo! Já que  $V$  é variedade algébrica.

Para cada ramo de  $V_c$  podemos obter a parametrização complexa

$$x = p(t) = x^0 + (0, \dots, 0, t^\mu, \sum_i a_{k+1,i} t^i, \dots, \sum_i a_{m,i} t^i).$$

Estamos interessados em saber para quais valores de parâmetros complexos  $t$  o vetor  $p(t)$  é real. Veja que a  $k$ -ésima componente  $t^\mu$  é real se, e somente se,  $t$  pode ser expresso como o produto de uma  $2\mu$ -ésima raiz da unidade  $\xi$  e um número real  $s$ . Mas, para cada escolha de  $\xi$ , substituindo  $t = \xi s$  na série de potências  $p$ , obtemos uma nova série de potências complexa  $x^0 + \sum (a_i \xi^i) s^i$  na variável  $s$ .

Se os coeficientes  $a_i \xi^i$  são todos reais então  $p(\xi s) \in \mathbb{R}^m$ . Mas se algum vetor coeficiente  $a_i \xi^i$  não é real, então  $p(\xi s) \notin \mathbb{R}^m$  para todos valores pequenos de  $s$ . Portanto, cada ramo de  $V_c$  intercepta  $\mathbb{R}^m$ , no máximo, num número finito de ramos (na maioria, um ramo) da variedade algébrica real  $V$ . ■

Agora, podemos demonstrar o Lema 4.1.

**Demonstração: (Lema 4.1)** Suponha que  $V$  tem dimensão 1. Se  $0 \in \overline{U \cap V}$  então 0 não é ponto isolado de  $V$ . Pelo lema anterior, próximo de 0,  $V$  é a união finita de ramos que se interceptam somente em 0. Um desses ramos deve conter pontos de  $U$  arbitrariamente próximos de 0. Seja

$$x = p(t) = x^0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots, \quad |t| < \epsilon$$

uma parametrização deste ramo. Note que  $p(0) = 0$ . Como  $p$  é contínua existe um intervalo  $(-\epsilon', \epsilon')$  tal que

$$x = p(t) > 0 \quad \forall t \in (0, \epsilon')$$

e,

$$x = p(t) < 0 \quad \forall t \in (-\epsilon', 0),$$

ou vice-versa. Como  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, l$  é contínua e o ramo contém pontos de  $U$  próximos de 0 então tomando  $t \in (0, \epsilon')$  temos

$$g_i(p(t)) > 0 \quad \forall t \in (0, \epsilon'') \quad \forall i = 1, \dots, l$$

ou,

$$g_i(p(t)) \leq 0 \quad \forall t \in (0, \epsilon'') \quad \forall i = 1, \dots, l,$$

onde  $\epsilon'' < \epsilon'$ . O mesmo podemos fazer para  $t \in (-\epsilon', 0)$ .

Assim, o meio-ramo  $p(0, \epsilon'')$  está contido em  $U$  ou é disjunto de  $U$ , para  $\epsilon''$  suficientemente pequeno. Da mesma forma, o meio-ramo  $p(-\epsilon'', 0)$  está contido em  $U$  ou é disjunto de  $U$ . Como  $p(-\epsilon, \epsilon)$  contém pontos de  $U$  arbitrariamente próximos de 0, pelo menos um desses dois meios ramos deve estar contido em  $U$  e também estará contido em  $V$  já que  $p(-\epsilon, \epsilon) \subset V$ . ■

Para concluir esta seção vamos apresentar uma aplicação do Lema 4.1.

**Corolário 4.5.** *Se  $f \geq 0$  e  $g \geq 0$  são polinômios não negativos em  $\mathbb{R}^m$  que se anulam em  $x^0$ , então para  $x$  pertencente a alguma vizinhança  $D_\epsilon$  de  $x^0$ , as diferenciais  $df(x)$  e  $dg(x)$  não podem apontar em direções opostas, a menos que uma delas se anule.*

**Demonstração:** Seja  $U$  o conjunto aberto que consiste de todos os pontos  $x$  para os quais o produto interno

$$\sum_i (\partial f(x)/\partial x_i)(\partial g(x)/\partial x_i)$$

é negativo e seja  $V^*$  o conjunto algébrico que consiste de todos os  $x$  para os quais

$$\text{posto}\{df(x), dg(x)\} \leq 1.$$

Assim,  $U \cap V$  é o conjunto de todos os  $x$  para os quais  $df(x)$  e  $dg(x)$  apontam em direções opostas.

Se  $U \cap V$  contém pontos arbitrariamente próximos de  $x^0$ , então existe uma curva analítica real

$$x = p(t), \quad 0 \leq t < \epsilon,$$

que consiste inteiramente de tais pontos, exceto para  $x^0 = p(0)$ .

---

Para todo  $x \in U$  note que  $f(x) > 0$  e  $g(x) > 0$ . Pois sempre que a função não negativa  $f$  se anula em  $x$  então a diferencial  $df(x)$  também se anula em  $x$ , portanto  $x$  não pode pertencer a  $U$ . Assim,

$$f(p(t)) > 0 \text{ para } t > 0$$

e como  $f \circ p$  é analítica real segue que  $df(p(t))/dt > 0$  para valores positivos pequenos de  $t$ . Da mesma forma,  $dg(p(t))/dt$  é positivo para valores positivos pequenos de  $t$ . Mas

$$df/dt = \sum (\partial f / \partial x_i) dp_i / dt \text{ e } dg/dt = \sum (\partial g / \partial x_i) dp_i / dt,$$

onde o vetor linha  $(\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_m)$  é um múltiplo negativo de  $(\partial g / \partial x_1, \dots, \partial g / \partial x_m)$ , para todo  $t > 0$ . Portanto,  $df/dt$  e  $dg/dt$  devem ter sinais opostos. Uma contradição. Logo,  $x^0$  não pode ser um ponto limite de  $U \cap V$ . ■

# Fibração de Milnor

Neste capítulo demonstramos o resultado principal desta dissertação, o Teorema de Fibrção de Milnor. Iniciamos com a definição de fibrado diferenciável:

**Definição 5.1.** *Sejam  $B$  e  $E$  variedades diferenciáveis e  $F$  espaço topológico. Um fibrado diferenciável  $\eta$  sobre  $B$ , com fibra  $F$ , é uma quádrupla  $\eta = (E, p, B, F)$  satisfazendo as seguintes condições:*

- (i)  $p : E \rightarrow B$  é uma aplicação diferenciável sobrejetora, chamada projeção;
- (ii) para cada  $b \in B$ , existem um aberto  $U_\alpha \subset B$ ,  $b \in U_\alpha$  e um difeomorfismo  $\varphi_\alpha : U_\alpha \times F \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$  tal que  $p \circ \varphi_\alpha = \pi_1$ , sendo  $\pi_1$  a projeção na primeira coordenada.

O espaço  $E$  é chamado espaço total, o espaço  $B$  base do fibrado e o par  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  uma trivialização local do fibrado, sendo que  $\{U_\alpha\}$  é uma cobertura por abertos da base  $B$ .

**Definição 5.2.** *O gradiente de uma função analítica  $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$  num ponto  $z \in \mathbb{C}^m$  é a  $m$ -upla*

$$\text{grad } f(z) = \left( \overline{\frac{\partial f}{\partial z_1}}(z), \dots, \overline{\frac{\partial f}{\partial z_m}}(z) \right),$$

onde a barra denota o conjugado complexo.

A seguir, definimos o argumento principal de um número complexo.

**Definição 5.3.** *Dado  $\lambda \neq 0 \in \mathbb{C}$ , o único número  $\theta \in (-\pi, \pi]$  tal que  $\lambda = |\lambda| e^{i\theta}$  é chamado argumento principal de  $\lambda$  e denotado por  $\text{Arg } \lambda$ .*

Considere o produto interno hermitiano

$$\begin{aligned} \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\longmapsto \sum_{i=1}^m u_i \bar{v}_i. \end{aligned}$$

Seja  $p : I \longrightarrow \mathbb{C}^m$  um caminho diferenciável, dado por  $p(t) = (p_1(t), \dots, p_m(t))$ . A derivada direcional de  $f$  no ponto  $z = p(t)$ , na direção do vetor  $p'(t)$ , é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f \circ p)(t) &= \frac{d}{dz} f(p(t)) \frac{dp}{dt}(t) = \left( \frac{\partial f}{\partial z_1}(z) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial z_m}(z) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial t}(t) \\ \vdots \\ \frac{\partial p_m}{\partial t}(t) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial z_i}(z) \frac{\partial p_i}{\partial t}(t) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial p_i}{\partial t}(t) \overline{\overline{\frac{\partial f}{\partial z_i}(z)}} \\ &= \langle \langle \frac{dp}{dt}(t), \text{grad} f(z) \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Assim, a definição de gradiente de  $f$  é tal que a regra da cadeia para a derivada de  $f$  na direção do vetor  $v$ , no ponto  $z$ , satisfaz:

$$df(z) v = \langle \langle v, \text{grad} f(z) \rangle \rangle.$$

Considere  $K = V \cap S_\epsilon$ , com  $V = f^{-1}(0)$  e  $S_\epsilon = \{z \in \mathbb{C}^m; \|z\| = \epsilon\}$ . Seja

$$\begin{aligned} \phi : S_\epsilon \setminus K &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto \frac{f(z)}{|f(z)|}. \end{aligned}$$

Facilmente verifica-se que  $S_\epsilon \setminus K$  é uma variedade diferenciável.

A próxima proposição expõe uma caracterização dos pontos críticos de  $\phi$ .

**Proposição 5.4.** *Os pontos críticos de  $\phi$  são os pontos  $z \in S_\epsilon \setminus K$  para os quais o vetor  $i \text{grad} \log f(z)$  é um múltiplo real do vetor  $z$ .*

Antes de iniciarmos a demonstração desta proposição, faremos algumas observações:

- (1) Localmente,  $\log f(z)$  assume um único valor. O mesmo vale para a aplicação  $\theta(z)$  considerada a seguir. Podemos escrever

$$\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|} = e^{i\theta(z)}.$$

Note que  $\theta(z)$  pode ser descrito como a parte real de  $-i \log f(z)$ . De fato, multiplicando a equação

$$i\theta(z) = \log \left( \frac{f(z)}{|f(z)|} \right) = \log f(z) - \log |f(z)|,$$

por  $-i$  e tomando a parte real, obtemos

$$\operatorname{Re}(\theta(z)) = \operatorname{Re}(-i \log f(z) + i \log |f(z)|) = \operatorname{Re}(-i \log f(z)).$$

Como  $\theta(z) \in \mathbb{R}$ , segue que

$$\theta(z) = \operatorname{Re}(-i \log f(z)).$$

- (2) Usando a definição de gradiente e a derivada da função logaritmo, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \log f(z) &= \left( \overline{\frac{\partial \log f}{\partial z_1}}(z), \dots, \overline{\frac{\partial \log f}{\partial z_m}}(z) \right) \\ &= \left( \frac{1}{f(z)} \overline{\frac{\partial f}{\partial z_1}}(z), \dots, \frac{1}{f(z)} \overline{\frac{\partial f}{\partial z_m}}(z) \right) \\ &= \frac{1}{f(z)} \left( \overline{\frac{\partial f}{\partial z_1}}(z), \dots, \overline{\frac{\partial f}{\partial z_m}}(z) \right) \\ &= \frac{\operatorname{grad} f(z)}{f(z)}. \end{aligned}$$

Logo,  $\operatorname{grad} \log f(z)$  pode ser estendido naturalmente para todo  $z \in \mathbb{C}^m$ , com  $f(z) \neq 0$ .

- (3) O espaço vetorial hermitiano  $\mathbb{C}^m$  pode ser visto como um espaço vetorial euclidiano (de dimensão  $2m$ ) sobre os números reais definindo o produto interno euclidiano de dois vetores  $a$  e  $b$  como a parte real

$$\operatorname{Re}\langle a, b \rangle = \operatorname{Re}\langle b, a \rangle.$$

De fato, considere o isomorfismo

$$\begin{aligned} \zeta : \quad \mathbb{C}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^{2m} \\ (z_1, \dots, z_m) &\longmapsto (a_1, b_1, \dots, a_m, b_m), \end{aligned}$$

onde  $z_j = a_j + ib_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Dados  $z, v \in \mathbb{C}^m$ , temos

$$\langle\langle z, v \rangle\rangle = \sum_{j=1}^m z_j \bar{v}_j = \sum_{j=1}^m (a_j + ib_j)(\overline{c_j + id_j}) = \sum_{j=1}^m (a_j + ib_j)(c_j - id_j).$$

Assim,

$$\operatorname{Re}\langle\langle z, v \rangle\rangle = \sum_{j=1}^m (a_j c_j + b_j d_j) = \langle\langle (a_1, b_1, \dots, a_m, b_m), (c_1, d_1, \dots, c_m, d_m) \rangle\rangle.$$

Onde este último produto interno é o produto interno canônico em  $\mathbb{R}^{2m}$ .

(4) A derivada direcional da aplicação  $\theta(z)$  na direção de  $v = p'(t)$  é igual a

$$\operatorname{Re}\langle\langle v, \operatorname{igrad} \log f(z) \rangle\rangle.$$

De fato, derivando a igualdade

$$\theta(z) = \operatorname{Re}(-i \log f(z)),$$

ao longo do caminho  $z = p(t)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dz}(z) &= \operatorname{Re} \left( \frac{d}{dz} (-i \log f(z)) \right) = \operatorname{Re}\langle\langle v, \operatorname{grad}(-i \log f(z)) \rangle\rangle \\ &= \operatorname{Re}\langle\langle v, \operatorname{igrad} \log f(z) \rangle\rangle. \end{aligned} \tag{5.1}$$

**Demonstração:(Proposição 5.4)** Note que um vetor  $v$  é tangente a esfera  $S_\epsilon$  em  $z$  se, e somente se, o produto interno euclidiano  $\operatorname{Re}\langle\langle v, z \rangle\rangle$  é zero. Logo, se o vetor  $\operatorname{igrad} \log f(z)$  é um múltiplo real de  $z$ , ou seja, se este vetor é normal a  $S_\epsilon$ , então para todo vetor  $v$  tangente a  $S_\epsilon$  em  $z$

$$\operatorname{Re}\langle\langle v, \operatorname{igrad} \log f(z) \rangle\rangle = 0, \tag{5.2}$$

isto é, a derivada direcional de  $\theta(z)$  na direção de  $v$  é nula. Temos que

$$d\phi(z) = \left( \frac{\partial\phi(z)}{\partial z_1} \quad \dots \quad \frac{\partial\phi(z)}{\partial z_m} \right).$$

Logo,  $z$  é um ponto crítico de  $\phi$  se  $d\phi(z) : T_z(S_\epsilon \setminus K) \longrightarrow T_{\phi(z)}(S^1)$  for a transformação linear nula. Também podemos escrever

$$d\phi(z) = de^{i\theta(z)} = ie^{i\theta(z)}d\theta(z) = i\phi(z)d\theta(z).$$

Logo, por (5.1) e (5.2), dado qualquer  $v \in T_z(S_\epsilon \setminus K)$

$$d\phi(z)v = i\phi(z)d\theta(z)v = 0.$$

Portanto,  $z$  é um ponto crítico de  $\phi$ .

Por outro lado, se o vetor  $i\text{grad} \log f(z)$  não é um múltiplo real de  $z$ , então  $i\text{grad} \log f(z)$  e  $z$  são linearmente independentes sobre  $\mathbb{R}$ . Logo, existe um vetor  $v$  pertencente ao espaço vetorial euclidiano tal que

$$\text{Re}\langle v, z \rangle = 0$$

e

$$\text{Re}\langle v, i\text{grad} \log f(z) \rangle \neq 0.$$

Basta tomar um vetor  $v$  ortogonal a  $z$  e que não é ortogonal a  $i\text{grad} \log f(z)$ , tal vetor  $v$  existe pelo fato dos vetores serem linearmente independentes. Assim,  $v$  é tangente a  $S_\epsilon$  e a derivada direcional de  $\theta$  na direção de  $v$  é diferente de zero pois,  $d\theta(z)v = \text{Re}\langle v, i\text{grad} \log f(z) \rangle$ . Assim,

$$d\phi(z)v = i\phi(z)d\theta(z)v \neq 0.$$

Logo,  $d\phi(z)$  não é a transformação linear nula. Portanto,  $z$  não é ponto crítico de  $\phi$ . ■

Assumimos, a partir de agora, que  $f$  é uma função polinomial que se anula na origem.

Queremos provar que a aplicação associada

$$\phi : S_\epsilon \setminus K \longrightarrow S^1$$

não tem pontos críticos para todo  $\epsilon$  suficientemente pequeno. De acordo com a Proposição 5.4 devemos provar que para todo  $z \in \mathbb{C}^m \setminus V$  suficientemente próximo da origem,  $z$  e  $i\text{grad} \log f(z)$  são linearmente independentes sobre  $\mathbb{R}$ , este resultado será o Corolário 5.7 e será uma consequência da Proposição 5.6, a qual depende do lema a seguir.

**Lema 5.5.** *Seja  $p : [0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}^m$  um caminho analítico real com  $p(0) = 0$  tal que, para cada  $t > 0$ , o número  $f(p(t))$  é não nulo e  $\text{grad} \log f(p(t)) = \lambda(t)p(t)$ ,  $\lambda(t) \in \mathbb{C}$ . Então,*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \theta(t) = 0,$$

onde  $\theta(t) = \text{Arg } \lambda(t)$ .

Em outras palavras,  $\lambda(t)$  é não nulo para valores positivos suficientemente pequenos de  $t$  e

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|} = 1.$$

**Demonstração:** Como  $p$ ,  $f$  e  $\text{grad} f$ , na variável  $t$ , são funções analíticas, podemos considerar suas expansões em série de Taylor em torno da origem

$$\begin{aligned} p(t) &= a_0 t^\alpha + a_1 t^{\alpha+1} + a_2 t^{\alpha+2} + \dots, \\ f(p(t)) &= b_0 t^\beta + b_1 t^{\beta+1} + b_2 t^{\beta+2} + \dots, \\ \text{grad} f(p(t)) &= c_0 t^\gamma + c_1 t^{\gamma+1} + c_2 t^{\gamma+2} + \dots, \end{aligned} \tag{5.3}$$

onde os coeficientes  $a_0$ ,  $b_0$  e  $c_0$  são não nulos e os expoentes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são inteiros tais que  $\alpha \geq 1$ ,  $\beta \geq 1$  e  $\gamma \geq 0$  (pois  $p$  e  $f$  se anulam na origem, logo suas expansões não têm termo independente).

Note que  $\text{grad} f(p(t))$  não pode ser identicamente nulo, caso contrário teríamos

$$\frac{d}{dt} f(p(t)) = \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \text{grad} f(p(t)) \right\rangle = 0,$$

o que implicaria  $f(p(t)) = c$  com  $c$  constante, numa vizinhança de  $t = 0$ . Como  $f(p(0)) = f(0) = 0$  teríamos  $f(p(t))$  identicamente nula nesta vizinhança, contradizendo a hipótese.

Suponhamos que as séries em (5.3) sejam convergentes, digamos, para  $|t| < \epsilon'$ .

Por hipótese,

$$\text{grad} \log f(p(t)) = \lambda(t)p(t), \quad \lambda(t) \in \mathbb{C}, \quad t > 0.$$

Como

$$\text{grad} \log f(p(t)) = \frac{\text{grad} f(p(t))}{f(p(t))},$$

temos que

$$\text{grad} f(p(t)) = \lambda(t)p(t)\overline{f(p(t))}.$$

Logo,

$$(c_0 t^\gamma + \dots) = \lambda(t)(a_0 \bar{b}_0 t^{\alpha+\beta} + \dots).$$

Comparando componentes correspondentes destas duas funções vetoriais, temos que  $\lambda(t)$  é um quociente de funções analíticas reais e, portanto, possui uma expansão de Laurent da forma

$$\lambda(t) = \lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta}(1 + k_1 t + k_2 t^2 + \dots).$$

Portanto, os coeficientes dominantes satisfazem a igualdade

$$c_0 = \lambda_0 a_0 \bar{b}_0. \quad (5.4)$$

Substituindo (5.4) na expansão em série de potências da igualdade

$$\frac{d}{dt} f(p(t)) = \left\langle \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \text{grad} f(p(t)) \right\rangle \right\rangle,$$

obtemos

$$\begin{aligned} (\beta b_0 t^{\beta-1} + \dots) &= \langle \alpha a_0 t^{\alpha-1} + \dots, \lambda_0 a_0 \bar{b}_0 t^\gamma + \dots \rangle \\ &= \alpha a_0 \bar{a}_0 \bar{\lambda}_0 b_0 t^{\alpha-1+\gamma} + \dots \\ &= \alpha \|a\|^2 \bar{\lambda}_0 b_0 t^{\alpha-1+\gamma} + \dots \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes dominantes segue que

$$\beta = \alpha \|a_0\|^2 \bar{\lambda}_0.$$

Logo,  $\lambda_0$  é um número real positivo. Note que se  $\lambda(t) = 0$ , em uma vizinhança de 0, então a série de Laurent é nula nesta vizinhança, o que não acontece visto que  $\lambda_0 \neq 0$ . Temos, assim,

$$\lim_{t \rightarrow 0} e^{i\theta(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta}(1 + k_1 t + k_2 t^2 + \dots)}{|\lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta}(1 + k_1 t + k_2 t^2 + \dots)|} = 1.$$

Ou equivalentemente,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \theta(t) = 0.$$

■

**Proposição 5.6.** *Dado uma função polinomial  $f$ , existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que para todo  $z \in \mathbb{C}^m \setminus V$  com  $\|z\| \leq \epsilon_0$ , os vetores  $z$  e  $\text{grad} \log f(z)$  são linearmente independentes sobre  $\mathbb{C}$  ou*

$$\text{grad} \log f(z) = \lambda z,$$

onde  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $\text{Arg } \lambda < \pi/4$ .

Em outras palavras,  $\lambda$  pertence ao quadrante aberto do plano complexo contendo o semi-eixo real positivo. Segue-se que

$$\text{Re}(\lambda) > 0.$$

Portanto,  $\lambda$  não pode ser imaginário puro.

**Demonstração:** Primeiro, suponhamos, por absurdo, que existem pontos  $z \in \mathbb{C}^m \setminus V$  arbitrariamente próximos da origem tal que

$$\text{grad } \log f(z) = \lambda z \neq 0 \quad \text{e} \quad |\text{Arg } \lambda| > \pi/4. \quad (5.5)$$

Em outras palavras, suponhamos que  $\lambda$  está no semi-plano aberto

$$\text{Re}((1+i)\lambda) < 0$$

ou no semi-plano

$$\text{Re}((1-i)\lambda) < 0.$$

Com efeito,

$$|\text{Arg } \lambda| > \pi/4 \implies \text{Arg } \lambda > \pi/4 \quad \text{ou} \quad \text{Arg } \lambda < -\pi/4.$$

Escrevendo  $\lambda = a + ib$ , temos  $\text{Re}((1+i)\lambda) = a - b$ . Se  $\text{Arg } \lambda > \pi/4$  então  $a < b$ . Assim,  $\text{Re}((1+i)\lambda) = a - b < 0$ . Se  $\text{Arg } \lambda < -\pi/4$  então  $a < -b$ , logo  $\text{Re}((1-i)\lambda) = a + b < 0$ .

Queremos expressar as condições dadas em 5.5 por igualdades e desigualdades polinomiais para, assim, aplicar o Lema de Seleção da Curva.

Seja  $W$  o conjunto de todos os pontos  $z \in \mathbb{C}^m$  para os quais  $\text{grad} f(z)$  e  $z$  são linearmente dependentes. Assim  $z \in W$  se, e somente se, as equações

$$z_j \left( \frac{\overline{\partial f}}{\partial z_k} \right) = z_k \left( \frac{\overline{\partial f}}{\partial z_j} \right)$$

são satisfeitas. De fato, se  $\text{grad} f(z)$  e  $z$  são linearmente dependentes então, para algum  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,

$$\left( \frac{\overline{\partial f}}{\partial z_1}(z), \dots, \frac{\overline{\partial f}}{\partial z_m}(z) \right) = \lambda(z_1, \dots, z_m).$$

Assim,

$$\frac{\overline{\partial f}}{\partial z_j}(z) = \lambda z_j.$$

Logo,

$$z_k \left( \overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)} \right) = z_k \lambda z_j = z_j \left( \overline{\frac{\partial f}{\partial z_k}(z)} \right).$$

E, se

$$z_j \left( \overline{\frac{\partial f}{\partial z_k}(z)} \right) = z_k \left( \overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)} \right), \quad z_k \neq 0,$$

então

$$\frac{z_j}{z_k} \left( \overline{\frac{\partial f}{\partial z_k}(z)} \right) = \left( \overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)} \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{grad}f(z) &= \left( \overline{\frac{\partial f}{\partial z_1}(z)}, \dots, \overline{\frac{\partial f}{\partial z_m}(z)} \right) = \left( \frac{z_1}{z_k} \overline{\frac{\partial f}{\partial z_k}(z)}, \dots, \frac{z_m}{z_k} \overline{\frac{\partial f}{\partial z_k}(z)} \right) \\ &= \frac{1}{z_k} \overline{\frac{\partial f}{\partial z_k}(z)} (z_1, \dots, z_m) \\ &= \lambda z, \quad \text{pois } \lambda = \frac{1}{z_k} \overline{\frac{\partial f}{\partial z_k}(z)} \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Agora, escrevendo  $z_j = x_j + iy_j$  e tomando as partes real e imaginária obtemos uma coleção de equações polinomiais reais nas variáveis  $x_j$  e  $y_j$ . Isto prova que  $W \subset \mathbb{C}^m$  é um conjunto algébrico real.

Note que um ponto  $z \in \mathbb{C}^m \setminus V$  pertence a  $W$  se, e somente se,

$$\frac{\text{grad}f(z)}{\overline{f(z)}} = \lambda z, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (5.6)$$

Multiplicando por  $\overline{f(z)}$  e tomando o produto interno com  $\overline{f(z)}z$ , temos

$$\langle \langle \text{grad}f(z), \overline{f(z)}z \rangle \rangle = \langle \langle \lambda z \overline{f(z)}, \overline{f(z)}z \rangle \rangle = \lambda \| \overline{f(z)}z \|^2.$$

Em outras palavras, o número  $\lambda$  multiplicado por um número real positivo é igual a

$$\langle \langle \text{grad}f(z), \overline{f(z)}z \rangle \rangle.$$

Seja  $\lambda_0(z) = \langle \langle \text{grad}f(z), \overline{f(z)}z \rangle \rangle$ , então  $\text{Arg } \lambda_0 = \text{Arg } \lambda$  para  $\lambda$  tal que (5.6) é satisfeito.

Claramente,  $\lambda_0$  é uma função polinomial complexa das variáveis reais  $x_j$  e  $y_j$ .

Agora, seja  $U_+$  (respectivamente  $U_-$ ) o conjunto aberto de todos os pontos  $z$  satisfazendo a desigualdade polinomial real

$$\operatorname{Re}((1+i)\lambda_0(z)) < 0 \quad (5.7)$$

(respectivamente  $\operatorname{Re}((1-i)\lambda_0(z)) < 0$ ).

Assumimos que existem pontos  $z$  arbitrariamente próximos da origem com  $z \in W \cap (U_+ \cup U_-)$ .

Pelo Lema de Seleção da Curva, existe um caminho analítico real

$$p : [0, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

com  $p(0) = 0$  e

$$p(t) \in W \cap U_+, \quad \forall t > 0$$

ou

$$p(t) \in W \cap U_-, \quad \forall t > 0.$$

Em qualquer caso, para cada  $t > 0$ , obtemos

$$\operatorname{grad} \log f(p(t)) = \lambda(t)p(t)$$

com  $|\operatorname{Arg} \lambda(t)| > \pi/4$ .

Note que  $f(p(t)) \neq 0$ . Caso contrário,  $\lambda_0(p(t)) = 0$  e, então,  $p(t)$  não pertenceria nem a  $U_+$  e nem a  $U_-$ . Temos assim uma contradição com o Lema 5.5. Esta contradição não completa a demonstração. Ainda resta a possibilidade que  $W \setminus (U_+ \cup U_-)$  contenha pontos  $z$  arbitrariamente próximos da origem com  $\lambda_0(z) = 0$  ou  $|\operatorname{Arg} \lambda_0(z)| = \pi/4$ . Mas, neste caso podemos usar o mesmo argumento substituindo a desigualdade (5.7) pela igualdade

$$\operatorname{Re}((1+i)\lambda_0(z))\operatorname{Re}((1-i)\lambda_0(z)) = 0,$$

junto com a desigualdade

$$\|f(z)\|^2 > 0.$$

Neste caso, assumimos que existem pontos  $z$  arbitrariamente próximos da origem com  $z \in W \cap Z \cap U$ , onde

$$Z = \{z \in \mathbb{C}^m; \operatorname{Re}((1+i)\lambda_0(z))\operatorname{Re}((1-i)\lambda_0(z)) = 0\} \quad \text{e} \quad U = \{z \in \mathbb{C}^m; \|f(z)\|^2 > 0\}.$$

Novamente pelo Lema de Seleção da Curva, existe um caminho analítico real

$$p : [0, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{C}^m,$$

com  $p(0) = 0$  e  $p(t) \in W \cap Z \cap U$  para  $t > 0$ .

Note que  $f(p(t)) \neq 0$ , pois  $p(t) \in U$ . De  $p(t) \in W$  temos  $\text{grad} \log f(p(t)) = \lambda(t)p(t)$  e, de  $p(t) \in Z$  temos  $\text{Re}((1+i)\lambda_0(p(t)))\text{Re}((1-i)\lambda_0(p(t))) = 0$ . Logo, um dos dois casos acontece:

- (1)  $\text{Re}((1+i)\lambda_0(p(t))) = \text{Re}((1-i)\lambda_0(p(t))) = 0$ ;
- (2)  $\text{Re}((1+i)\lambda_0(p(t))) = 0$  ou  $\text{Re}((1-i)\lambda_0(p(t))) = 0$ .

Escrevendo  $\lambda_0(p(t)) = a + ib$  temos, no Caso (1),  $a - b = 0$  e  $a + b = 0$ . Logo,  $a = b = 0$  e, portanto,  $\lambda_0(p(t)) = 0$ . No Caso (2), temos  $a - b = 0$  ou  $a + b = 0$ . Ou ainda,  $a = b$  ou  $a + b = 0$ . Desta forma,

$$|\text{Arg} \lambda(p(t))| = |\text{Arg} \lambda_0(p(t))| = \pi/4.$$

Uma contradição com o Lema 5.5. ■

Note que, se  $z$  e  $\text{grad} \log f(z)$  são linearmente independentes sobre  $\mathbb{C}$  então  $z$  e  $i \text{grad} \log f(z)$  também o são. Logo, são linearmente independentes sobre  $\mathbb{R}$ . E se,  $\text{grad} \log f(z) = \lambda z$ ,  $\lambda$  não sendo imaginário puro, então,  $i \text{grad} \log f(z) = (i\lambda)z$  com  $(i\lambda)$  não pertencente a  $\mathbb{R}$ . Logo  $i \text{grad} \log f(z)$  não pode ser um múltiplo real de  $z$ , o que implica  $i \text{grad} \log f(z)$  e  $z$  linearmente independentes sobre  $\mathbb{R}$ . Segue, assim, da proposição acima, o seguinte corolário:

**Corolário 5.7.** *Para todo  $z \in \mathbb{C}^m \setminus V$  suficientemente próximo da origem, os vetores  $z$  e  $i \text{grad} \log f(z)$  são linearmente independentes sobre  $\mathbb{R}$ .*

Combinando a Proposição 5.4 e o Corolário 5.7, provamos:

**Corolário 5.8.** *Se  $\epsilon \leq \epsilon_0$  então a aplicação*

$$\begin{aligned} \phi : S_\epsilon \setminus K &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto \frac{f(z)}{|f(z)|}, \end{aligned}$$

*não tem pontos críticos.*

Segue que, para cada  $e^{i\theta} \in S^1$ , a fibra

$$F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta}) \subset S_\epsilon \setminus K$$

é uma  $(2m - 2)$ -variedade diferenciável.

**Definição 5.9.**  $F_\theta$  é dita a fibra de Milnor de  $f$ .

A fim de provar que  $\phi$  é de fato a projeção de um fibrado localmente trivial, faremos uso da Proposição 5.6, para controlar cuidadosamente o comportamento de  $\phi(z)$  quando  $z$  tende ao conjunto  $K$  onde  $\phi$  não está definida.

**Proposição 5.10.** Se  $\epsilon \leq \epsilon_0$  então existe um campo vetorial diferenciável tangente  $v(z)$  em  $S_\epsilon \setminus K$  tal que, para cada  $z \in S_\epsilon \setminus K$ , o produto interno hermitiano

$$\langle \langle v(z), i \operatorname{grad} \log f(z) \rangle \rangle$$

é não nulo e tem argumento principal menor do que  $\pi/4$  em valor absoluto.

**Demonstração:** De modo análogo ao que foi feito na demonstração do Teorema 3.5, construiremos tal campo vetorial localmente e usaremos uma partição da unidade para obter um campo vetorial diferenciável tangente global.

Seja  $z^\alpha \in S_\epsilon \setminus K$  e consideremos os casos:

- (1) Se os vetores  $z^\alpha$  e  $\operatorname{grad} \log f(z^\alpha)$  são linearmente independentes sobre  $\mathbb{C}$  então o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} \langle \langle v, z^\alpha \rangle \rangle = 0 \\ \langle \langle v, i \operatorname{grad} \log f(z^\alpha) \rangle \rangle = 1 \end{cases}$$

tem uma única solução simultânea  $v$  (veja, por exemplo, [11], pag. 15). A primeira equação garante que  $\operatorname{Re} \langle \langle v, z^\alpha \rangle \rangle = 0$ , de modo que  $v$  é tangente a  $S_\epsilon$  em  $z^\alpha$ .

- (2) Se  $\operatorname{grad} \log f(z^\alpha)$  é igual a um múltiplo complexo de  $z^\alpha$ , ou seja, se  $\operatorname{grad} \log f(z^\alpha) = \lambda z^\alpha$ , então defina  $v = iz^\alpha$ . Claramente

$$\operatorname{Re} \langle \langle iz^\alpha, z^\alpha \rangle \rangle = 0$$

e, pela Proposição 5.6, o número

$$\langle \langle iz^\alpha, i\text{grad} \log f(z^\alpha) \rangle \rangle = \bar{\lambda} \|z^\alpha\|^2$$

tem argumento menor do que  $\pi/4$  em valor absoluto.

Em ambos os casos podemos construir um campo vetorial local tangente  $v^\alpha(z)$ , em uma vizinhança  $U^\alpha$  de  $z^\alpha$ , que leva  $z^\alpha$  no valor construído  $v$ . A condição

$$|\text{Arg}\langle \langle v^\alpha(z), i\text{grad} \log f(z) \rangle \rangle| < \pi/4,$$

no Caso (2), será satisfeita em uma vizinhança  $U^\alpha$  de  $z^\alpha$ . De fato, considere a aplicação

$$z \mapsto |\text{Arg}\langle \langle v^\alpha(z), i\text{grad} \log f(z) \rangle \rangle|.$$

Esta aplicação é a composta de aplicações contínuas, logo é contínua e, portanto, existe uma vizinhança  $U^\alpha$  de  $z^\alpha$  tal que  $|\text{Arg}\langle \langle v^\alpha(z), i\text{grad} \log f(z) \rangle \rangle| < \pi/4$ , para todo  $z \in U^\alpha$ .

Usando uma partição da unidade, obtemos um campo vetorial global  $v(z)$  satisfazendo as mesmas propriedades. Fazemos isso escolhendo uma partição da unidade  $\{\lambda^\alpha\}$  em  $S_\epsilon \setminus K$  diferenciável com  $\text{Suporte}(\lambda^\alpha) \subset U^\alpha$  e definimos

$$v(z) = \sum \lambda^\alpha(z) v^\alpha(z).$$

Temos que

- (1)  $v(z)$  é tangente à  $S_\epsilon$  em  $z$ , pois cada  $v^\alpha(z)$  é tangente à  $S_\epsilon$  em  $z$  e  $v(z)$  é uma combinação linear com coeficientes reais dos vetores  $v^\alpha(z)$ .
- (2)  $|\text{Arg}\langle \langle v(z), i\text{grad} \log f(z) \rangle \rangle| < \pi/4$ .

Vamos mostrar que esta propriedade é válida para o caso em que  $v = \lambda^\alpha v^\alpha + \lambda^\beta v^\beta$ , o caso geral segue por indução. Temos,

$$|\text{Arg}\langle \langle v(z), i\text{grad} \log f(z) \rangle \rangle| = |\text{Arg}\langle \langle \lambda^\alpha(z) v^\alpha(z) + \lambda^\beta(z) v^\beta(z), i\text{grad} \log f(z) \rangle \rangle|. \quad (5.8)$$

Se  $z$  e  $\text{grad} \log f(z)$  são linearmente independentes sobre  $\mathbb{C}$  então

$$\langle \langle v^\alpha(z), i\text{grad} \log f(z) \rangle \rangle = 1$$

e

$$\langle\langle v^\beta(z), i\text{grad log } f(z) \rangle\rangle = 1.$$

Logo, segue de (5.8) que

$$| \text{Arg}\langle\langle v(z), i\text{grad log } f(z) \rangle\rangle | = | \text{Arg}(\lambda^\alpha(z) + \lambda^\beta(z)) | = 0 < \pi/4.$$

Se  $\text{grad log } f(z) = \lambda z$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  então  $v^\alpha(z) = v^\beta(z) = iz$  e, de (5.8), segue que

$$\begin{aligned} | \text{Arg}\langle\langle v(z), i\text{grad log } f(z) \rangle\rangle | &= | \text{Arg}((\lambda^\alpha(z) + \lambda^\beta(z))\langle\langle iz, \text{grad log } f(z) \rangle\rangle) | \\ &= | \text{Arg}\bar{\lambda} \| z \|^2 | \\ &< \pi/4. \end{aligned}$$

■

Normalizamos o campo global  $v(z)$  tomando

$$w(z) = \frac{v(z)}{\text{Re}\langle\langle v(z), i\text{grad log } f(z) \rangle\rangle}.$$

Assim, obtemos um campo vetorial diferenciável  $w$ , tangente à  $S_\epsilon \setminus K$ , que satisfaz duas propriedades:

$$(1) \quad \langle\langle w(z), i\text{grad log } f(z) \rangle\rangle = 1.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \text{Re}\langle\langle w(z), i\text{grad log } f(z) \rangle\rangle &= \text{Re}\left\langle\left\langle \frac{v(z)}{\text{Re}\langle\langle v(z), i\text{grad log } f(z) \rangle\rangle}, i\text{grad log } f(z) \right\rangle\right\rangle \\ &= \frac{\text{Re}\langle\langle v(z), i\text{grad log } f(z) \rangle\rangle}{\text{Re}\langle\langle v(z), i\text{grad log } f(z) \rangle\rangle} \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$(2) \quad | \text{Re}\langle\langle w(z), \text{grad log } f(z) \rangle\rangle | < 1.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Re}\langle\langle w(z), \operatorname{grad} \log f(z)\rangle\rangle| &= \left| \operatorname{Re} \left\langle \left\langle \frac{v(z)}{\operatorname{Re}\langle\langle v(z), i\operatorname{grad} \log f(z)\rangle\rangle}, \operatorname{grad} \log f(z) \right\rangle \right\rangle \right| \\
&= \frac{|\operatorname{Re}\langle\langle v(z), \operatorname{grad} \log f(z)\rangle\rangle|}{|\operatorname{Re}\langle\langle v(z), i\operatorname{grad} \log f(z)\rangle\rangle|} \\
&= \frac{|\operatorname{Im}\langle\langle v(z), i\operatorname{grad} \log f(z)\rangle\rangle|}{|\operatorname{Re}\langle\langle v(z), i\operatorname{grad} \log f(z)\rangle\rangle|}
\end{aligned}$$

que é menor do que 1, pois  $|\operatorname{Arg}\langle\langle v(z), i\operatorname{grad} \log f(z)\rangle\rangle| < \pi/4$ , o que implica

$$|\operatorname{Re}\langle\langle v(z), i\operatorname{grad} \log f(z)\rangle\rangle| > |\operatorname{Im}\langle\langle v(z), i\operatorname{grad} \log f(z)\rangle\rangle|.$$

Considere soluções da equação diferencial

$$\frac{dz}{dt} = w(z).$$

**Proposição 5.11.** *Dado  $z^0 \in S_\epsilon \setminus K$  existe um único caminho diferenciável*

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow S_\epsilon \setminus K$$

que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dp}{dt}(t) = w(p(t))$$

com a condição inicial  $p(0) = z^0$ .

**Demonstração:** A solução  $z = p(t)$  existe localmente e pode ser estendida a algum intervalo maximal de  $\mathbb{R}$  (veja a demonstração da Afirmação 3.6). O único problema que surge para estender a solução em todo  $\mathbb{R}$ , visto que  $S_\epsilon \setminus K$  não é compacto, é assegurar que  $p(t)$  não tende a  $K$  quando  $t$  tende a algum limite finito  $t_0$ . Isto é, devemos garantir que  $f(p(t))$  não tende para zero, ou equivalentemente, que  $\operatorname{Re} \log f(p(t))$  não tende para  $-\infty$  quando  $t$  tende para  $t_0$ . Mas a derivada

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{Re} \log f(p(t))) = \operatorname{Re}\langle\langle \frac{dp}{dt}(t), \operatorname{grad} \log f(p(t))\rangle\rangle = \operatorname{Re}\langle\langle w(p(t)), \operatorname{grad} \log f(p(t))\rangle\rangle,$$

tem valor absoluto menor do que 1. Portanto,  $\operatorname{Re} \log f(p(t))$  é limitado numa vizinhança de  $t_0$ . ■

Escrevendo

$$\phi(z) = e^{i\theta(z)},$$

temos, de (5.1), que

$$\frac{d}{dt} \theta(p(t)) = \operatorname{Re} \left\langle \left\langle \frac{dp}{dt}(t), i \operatorname{grad} \log f \right\rangle \right\rangle .$$

Logo, das propriedades do campo  $w(z)$ , segue que

$$\frac{d\theta}{dt}(z) = 1$$

para todo  $z = p(t)$  que é solução da equação diferencial  $dz/dt = w(z)$ . Portanto,

$$\theta(p(t)) = t + \text{constante} = t + \theta(p(0)).$$

Em outras palavras,  $\phi$  projeta o caminho  $p(t)$  em um caminho que gira em torno do círculo unitário no sentido anti-horário com velocidade unitária.

Para cada  $z \in S_\epsilon \setminus K$ , seja  $p_z(t) : \mathbb{R} \rightarrow S_\epsilon \setminus K$  o único caminho diferenciável que é solução da equação  $dp/dt = w(z)$  e satisfaz a condição inicial  $p_z(0) = z$ . E, seja

$$\begin{aligned} h : (S_\epsilon \setminus K) \times \mathbb{R} &\longrightarrow S_\epsilon \setminus K \\ (z, t) &\longmapsto p_z(t). \end{aligned}$$

Para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $h_t : S_\epsilon \setminus K \rightarrow S_\epsilon \setminus K$  é um difeomorfismo. De fato, sendo  $e^z$  e  $\theta(z)$  aplicações diferenciáveis, segue que

$$h_t(z) = p_z(t) = r e^{i\theta(p_z(t))} = r e^{i(t+\theta(z))},$$

é diferenciável. Como a exponencial é não nula para todo número complexo temos, pelo Teorema da Função Inversa, que  $h_t(z)$  é um difeomorfismo local. Note que

$$\phi(h_t(z)) = \phi(p_z(t)) = e^{i\theta(p_z(t))} = e^{i(t+\theta(p_z(0)))} = e^{i(t+\theta(z))} = e^{i(t+\theta)}.$$

Logo,  $h_t$  leva cada fibra  $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta})$  na fibra  $F_{\theta+t}$  e para  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  temos  $h_{t_1} \circ h_{t_2} = h_{t_1+t_2}$ .

Com efeito,

$$\begin{aligned}
(h_{t_1} \circ h_{t_2})(z) &= h_{t_1}(h_{t_2}(z)) = h_{t_1}(p_z(t_2)) = h_{t_1}(r_1 e^{i\theta(p_z(t_1))}) \\
&= h_{t_1}(r_1 e^{i(t_2 + \theta(z))}) \\
&= r_2(e^{i(t_1 + \theta(r_1 e^{i(t_2 + \theta(z))}))}) \\
&= r_2(e^{i(t_1 + \theta(r_1) + \theta(e^{i(t_2 + \theta(z))}))}) \\
&= r_2(e^{i(t_1 + t_2 + \theta(z))}) \\
&= p_z(t_1 + t_2) \\
&= h_{t_1 + t_2}(z).
\end{aligned}$$

Finalmente, temos o seguinte resultado:

**Teorema 5.12. (Teorema de Fibrção de Milnor)** *Para  $\epsilon \leq \epsilon_0$ , o espaço  $S_\epsilon \setminus K$  é um fibrado diferenciável localmente trivial sobre  $S^1$ , com projeção*

$$\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}.$$

**Demonstração:** Dado  $z = e^{i\theta} \in S^1$ , queremos provar que existe uma vizinhança  $U_\theta$  de  $z$  e um difeomorfismo

$$\psi_\theta : U_\theta \times F_\theta \longrightarrow \phi^{-1}(U_\theta),$$

tal que  $\phi \circ \psi_\theta = \pi_1$ , sendo  $\pi_1$  a projeção na primeira coordenada.

Seja  $U_\theta = \{e^{it} \in S^1; t \in (\theta - \delta, \theta + \delta), \delta = \text{constante}\}$  e consideremos a aplicação

$$\begin{aligned}
\psi_\theta : U_\theta \times F_\theta &\longrightarrow \phi^{-1}(U_\theta) \\
(e^{it}, z) &\longmapsto h_{t-\theta}(z).
\end{aligned}$$

Temos

$$(\phi \circ \psi_\theta)(e^{it}, z) = \phi(h_{t-\theta}(z)) = \phi(p_z(t - \theta)) = e^{i\theta(p_z(t - \theta))} = e^{i(t - \theta + \theta(z))} = e^{it},$$

pois  $z \in F_\theta$  o que implica  $\theta(z) = \theta$ . Logo,  $\phi \circ \psi_\theta = \pi_1$ . Resta mostrar que  $\psi_\theta$  é um difeomorfismo. Considere as aplicações diferenciáveis

$$\begin{aligned}
\alpha : U_\theta \times F_\theta &\longrightarrow (\theta - \delta, \theta + \delta) \times F_\theta & \beta : (\theta - \delta, \theta + \delta) \times F_\theta &\longrightarrow F_\theta \times (-\delta, \delta) \\
(e^{it}, z) &\longmapsto (t, z), & (t, z) &\longmapsto (z, t - \theta).
\end{aligned}$$

Temos,  $\psi_\theta = h \circ \beta \circ \alpha$ . Portanto,  $\psi_\theta$  é diferenciável.

Seja

$$\begin{aligned} g: \phi^{-1}(U_\theta) &\longrightarrow U_\theta \times F_\theta \\ z &\longmapsto (\phi(z), h_{\theta - \text{Arg } \phi(z)}(z)) = (e^{i\theta(z)}, h_{\theta - \theta(z)}(z)). \end{aligned}$$

Temos

$$\psi_\theta(g(z)) = \psi_\theta(e^{i\theta(z)}, h_{\theta - \theta(z)}(z)) = h_{\theta(z) - \theta}(h_{\theta - \theta(z)}(z)) = h_0(z) = p_z(0) = z$$

e

$$\begin{aligned} g(\psi_\theta(e^{it}, z)) &= g(h_{t-\theta}(z)) = (e^{i\theta(h_{t-\theta}(z))}, h_{\theta - \theta(h_{t-\theta}(z))}(h_{t-\theta}(z))) \\ &= (e^{i\theta(p_z(t-\theta))}, h_{\theta - \theta(p_z(t-\theta))}(h_{t-\theta}(z))) \\ &= (e^{it}, h_{\theta-t}(h_{t-\theta}(z))) \\ &= (e^{it}, h_0(z)) \\ &= (e^{it}, p_z(0)) \\ &= (e^{it}, z). \end{aligned}$$

Portanto,  $g = \psi_\theta^{-1}$ . Considere, agora, as seguintes aplicações diferenciáveis

$$\begin{aligned} \lambda: \phi^{-1}(U_\theta) &\longrightarrow \phi^{-1}(U_\theta) \times (\theta - \delta, \theta + \delta) \\ z &\longmapsto (z, \text{Arg } \phi(z)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \xi: \phi^{-1}(U_\theta) \times (\theta - \delta, \theta + \delta) &\longrightarrow \phi^{-1}(U_\theta) \times (-\delta, \delta) \\ (z, \text{Arg } \phi(z)) &\longmapsto (z, \theta - \text{Arg } \phi(z)). \end{aligned}$$

Temos  $h_{\theta - \text{Arg } \phi(z)} = h \circ \xi \circ \lambda$ . Logo, a segunda função coordenada de  $g$  é diferenciável. Sendo  $\phi$  diferenciável, segue que  $g$  é diferenciável. ■

---

---

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] **Gunning, R.C. e Rossi, H.**, *Analytic Functions of Several Complex Variables*, American Mathematical Society, United States of America, 1965.
- [2] **Halmos, P. R.**, *Naive Set Theory*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1960.
- [3] **Lang, S.**, *Introduction to Algebraic Geometry*, Addison-Wesley Publishing Company, United States of America, 1973.
- [4] **Lang, S.**, *Differentiable Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [5] **Lefschetz, S.**, *Algebraic Geometry*, Dover Publications, New York, 2005.
- [6] **Lima, E. L.**, *Curso de Análise*, Volume 2, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [7] **Lima, E. L.**, *Análise Real*, Volume 2, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2006.
- [8] **Lima, E. L.**, *Variedades Diferenciáveis*, IMPA, Rio de Janeiro, 1973.
- [9] **Milnor, J.**, *Morse Theory*, Annals of Mathematics Studies, Number 51. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.
- [10] **Milnor, J.**, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Annals of Mathematics Studies, Number 61. Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton, New Jersey, 1968.
- [11] **Nascimento, V. M.**, *A Fibrção de Milnor*, Dissertação de Mestrado. ICMC, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1990.

- 
- [12] **Perrin, D.**, *Algebraic Geometry*, Springer, London, 2008.
- [13] **Sharp, R. Y.**, *Steps in Commutative Algebra*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [14] **Suwa, T.**, *Introduction to Complex Analytic Geometry*, Advanced School and Workshop on Singularities in Geometry and Topology. ICTP, Itália, 2005.
- [15] **Van Der Waerden, B. L.**, *Einführung in Die Algebraische Geometrie*,. Springer, 1939.
- [16] **Whitney, H.** *Elementary Structure of Real Algebraic Varieties*, The Annals of Mathematics, Second Series, 1957.

---

---

# ÍNDICE

---

- Índice de um ponto crítico, 24
- Anel Noetheriano, 13, 14
- Campo vetorial diferenciável, 41, 69
- Condição de cadeia descendente, 27
- Conjunto algébrico, 25
- Dimensão algébrica, 29
- Espaço vetorial normal, 19
- Fibra, 49, 73
- Fibra de Milnor, 69
- Fibrado diferenciável, 58, 74
- Gradiente de uma função analítica, 58
- Gradiente de uma função real, 20
- Grau de transcendência, 29
- Hipersuperfície, 18
- Hipersuperfície algébrica, 25
- Ideal gerado por um conjunto, 26
- Imersão, 16
- Lema de Morse, 24
- Lema de Seleção da Curva, 51
- Módulo Noetheriano, 14, 15
- Módulo sobre um anel, 14
- Matriz Hessiana, 24
- Mergulho, 16
- Nullstellensatz, 33
- Parametrização, 16
- Partição da unidade, 40
- Plano tangente, 19
- Ponto crítico, 20, 21, 24
- Ponto crítico não degenerado, 24
- Ponto regular, 21
- Ponto regular de um conjunto algébrico, 29
- Ponto singular, 21
- Ponto singular de um conjunto algébrico, 29
- Posto de uma matriz, 21
- Produto interno hermitiano, 59
- Submódulo, 14
- Submersão, 16
- Subvariedade algébrica, 29
- Superfície de nível, 20
- Teorema da Base de Hilbert, 13
- Teorema da Função Implícita, 22
- Teorema da Função Inversa, 21
- Teorema de Fibrção de Milnor, 74

Trivialização local, 58

Valor regular, 20, 21

Variedade Algébrica, 28

Variedade diferenciável, 17

Vetor normal, 19