CONTROLABILIDADE DE SISTEMAS AFIM

Waldir Silva Soares Junior

Centro de Ciências Exatas
Universidade Estadual de Maringá
Programa de Pós-Graduação em Matemática
(Mestrado)

Orientador: Osvaldo Germano do Rocio

Maringá - Pr
2008

CONTROLABILIDADE DE SISTEMAS AFIM

Waldir Silva Soares Junior

Centro de Ciências Exatas
Universidade Estadual de Maringá
Programa de Pós-Graduação em Matemática
(Mestrado)

Orientador: Osvaldo Germano do Rocio

Maringá - Pr
2008

À minha família.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos a todos que de alguma forma contribuiram para o êxito deste trabalho, e em especial:

- Aos meus pais, Sueli e Waldir (in memorian) pelo modelo de força, trabalho e dedicação que sempre demonstraram;

- À minha esposa pelo incentivo e apoio sempre que necessário e por saber entender minhas dificuldades e minhas ausências;

- À minha família que sempre esteve ao meu lado nas minhas decisões mais difíceis e períodos mais conturbados dando todo suporte e apoio necessários;

- Ao professor Osvaldo Germano do Rocio, pela excelente orientação, pela paciência, pelos incessantes icentivos e por ser esse exemplo de profissional o qual me orgulho em dizer que fui seu orientando;

- Aos meus queridos amigos Carlos, Emerson, Flávio Gomes, Laerte, Rodrigo, Cláudio, Flávio Schiavonni, Eliete, entre outros, pelos incentivos e principalmente pela amizade que nos faz sempre mais fortes;

- Aos amigos e colegas do mestrado pela força nas horas difíceis, conversas e trocas de conhecimento;

- Aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, em especial aos que contribuíram para a minha formação acadêmica e humana;

- Aos professores Pedro José Catuogno, Osvaldo Germano do Rocio, Alexandre José Santana e Marcos Verdi que atenciosamente colaboraram na correção deste trabalho;

Abstract

This work deals with transitivity (controllability) of affine families of vector fields on a finite dimensional vector space V. In particular we focus on affine families whose corresponding families of linear fields are transitive on $V - \{0\}$, and which have no fixed point in V. We show that such families are necessarily transitive on V.

Since any affine system $\mathcal{F}$ naturally defines a system $\mathcal{F}_r$ of right-invariant vector fields on the semi-direct product of V with GL(V) we also investigate transitivity properties of $\mathcal{F}_r$.

Resumo

Este trabalho aborda a transitividade (controlabilidade) de famílias afim de campos vetoriais em um espaço vetorial de dimensão finita V. Em particular nos concentramos em famílias afim cujas famílias de campos lineares correspondentes são transitivas em $V - \{0\}$, e que não tem nenhum ponto fixo em V. Mostramos que essas famílias são necessariamente transitivas em V.

Uma vez que um sistema afim $\mathcal{F}$ naturalmente define um sistema $\mathcal{F}_r$ de campos vectoriais invariantes à direita no produto semi-direto de V com GL(V) nós também investigamos a propriedade de transitividade de $\mathcal{F}_r$

Sumário

Introdução

De modo geral um sistema de controle é qualquer sistema de equações diferenciais no qual "funções de controle"aparecem como parâmetro.

Do ponto de vista geométrico, cada função de controle determina um campo vetorial e, portanto, um sistema de controle pode ser visto como uma família de campos vetoriais parametrizados por controles. Uma trajetória de um sistema de controle é uma concatenação de segmentos de curvas integrais da família de campos vetoriais.

A teoria de controle teve um desenvolvimento significativo a partir de 1960 com as publicações de R. Kalman. Até esta época o enfoque dessa teoria se limitava ao uso da transformação de Laplace. Kalman mostrou em seus trabalhos que os problemas básicos da teoria de controle poderiam ser tratados através da noção de conjunto atingível do sistema.

Além do interesse puramente matemático da teoria de controle, ela se insere na teoria de sistemas, de inteligência artificial, bem como em controle de objetos com entradas e saídas relacionadas por parametrizações que dão origem a sistemas de controle, tanto discretos como contínuos.

O tratamento da teoria de controle, com um certo nível de generalidade, exige conhecimentos avançados da teoria de equações diferenciais, envolvendo sistemas dinâmicos.

A importância do conceito de colchete de Lie na teoria de controle tornou-se clara por volta do ano de 1970 com trabalhos, entre outros, de R. Brockett, H. Hermes, C. Lobri e H. J. Sussmann. Com este novo instrumento houve significativos avanços nessa teoria, particularmente na teoria de controle em grupos de Lie.

O estudo da controlabilidade de sistemas lineares foi completamente resolvido nos trabalhos de R. E. Kalman, Y. C. Ho e K. S. Nakenda, [17]. Em termos matriciais, o resultado, conhecido na literatura por Teorema de Kalman, estabelece que o sistema linear $\dot{x} = Ax+ub$, onde A é uma matriz real $n\times n$, $b \in \mathbb{R}-\{0\}$ e $u \in \mathbb{R}$, é controlável se, e somente se, os vetores $b, Ab, ..., A^{n-1}b$ geram $\mathbb{R}^n$.

O estudo da controlabilidade de um sistema bilinear $\dot{x} = Ax + uBx$, onde A e B são matrizes reais $n \times n$ e $u \in \mathbb{R}$, ainda hoje está longe de ser completamente resolvido, sendo as condições estabelecidas por Jurdjevic e Kupka, em [16], uma das mais significantes e conhecidas até o momento.

Trabalhando no contexto mais geral da teoria de semigrupos, os trabalhos de San Martin na área de conjuntos controláveis, tem contribuído significativamente no desenvolvimento da teoria de sistemas de controle de campos vetoriais invariante à direita (esquerda) em grupos de Lie.

O estudo da controlabilidade de uma família de campos vetoriais afim da forma

$$X(x) = Ax + a, \tag{1}$$

onde A é uma matriz real $n \times n$ e a é um vetor em $\mathbb{R}^n$, foi apresentado em uma série de três artigos [12], [13] e [14]. À uma família $\mathcal{F}$ de campos vetoriais afim, podemos associar naturalmente uma família de campos vetoriais lineares, que denotaremos por $\overrightarrow{\mathcal{F}}$. Ao sistema linear $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ temos associado, naturalmente, um grupo de Lie G, cuja álgebra de Lie é a subálgebra de Lie de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ gerada pelos campos lineares.

Desta forma, o estudo do sistema afim dado em (1), se resume em estudar famílias de campos vetoriais invariantes à direita no grupo de Lie, que é o produto semi-direto de G por $\mathbb{R}^n$. Quando G é um grupo compacto, foi mostrado no segundo dos três artigos acima citados, que a condição sobre a controlabilidade é equivalente à condição do posto, ou seja, a álgebra de Lie gerada pela família de campos vetoriais coincide com a álgebra de Lie do grupo.

O terceiro artigo, o qual será objeto de estudo de nosso trabalho, generaliza os resultados dos dois primeiros. O principal resultado (Teorema 4.13) estabelece que, se $\mathcal{F}$ é uma família de campos vetoriais afim em R^n tal que a família de campos vetoriais lineares $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ é controlável em $R^n - \{0\}$ e $\mathcal{F}$ não possui pontos fixos, então $\mathcal{F}$ é controlável.

A organização desse trabalho é a seguinte: no Capítulo 1 vamos simplesmente definir os ambientes em que se passa o trabalho. Começamos definindo grupos de Lie, passamos depois por álgebras de Lie, definimos e apresentamos propriedades básicas da aplicação exponencial e então apresentamos a definição e alguns resultados sobre semigrupos no âmbito geral e semigrupos em grupos topológicos.

No segundo Capítulo começamos com os conceitos básicos da controlabilidade, apresentando definições e resultados envolvendo órbitas, conjunto de atingibilidade e controlabilidade. Também definimos acessibilidade normal e apresentamos alguns resultados e propriedades associando esse conceito com a controlabilidade. Depois disso definimos sistemas de controle subordinados à ação de um grupo e trabalhamos especificamente com o estudo de sistemas de controle afim.

No Capítulo 3 mostramos algumas condições básicas para a controlabilidade e no quarto e último capítulo vamos apresentar o resultado principal de nosso trabalho, o Teorema (4.13), que nos garante que se tivermos uma família $\mathcal{F}$ de campos vetoriais afim, onde sua parte linear $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ é transitiva e ainda $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ não deixa nenhum ponto fixo, então $\mathcal{F}$ também é transitiva. Após isso ainda faremos uma aplicação de tal teorema.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar noções preliminares que serão necessárias para o desenvolvimento do trabalho.

Começaremos, na primeira seção, definindo Grupos de Lie e álgebras de Lie e logo em seguida, na segunda seção, introduziremos o conceito da aplicação exponencial, que vai relacionar os dois conceitos anteriores, e também apresentaremos vários resultados que relacionam os grupos de Lie com suas respectivas álgebras.

Na terceira seção definiremos semigrupos, mostraremos algumas de suas principais propriedades, alguns resultados de semigrupos no âmbito geral e ainda alguns resultados de semigrupos em grupos topológicos, que nos será muito útil adiante.

1.1 Grupos e álgebras de Lie

Nesta seção simplesmente introduziremos alguns dos conceitos básicos da teoria geral, necessários para o desenvolvimento do trabalho. O ambiente no qual trabalharemos é o de Grupos de Lie e, por isso, começaremos com sua definição formal:

Definição 1.1. Um *grupo de Lie* G é uma variedade diferenciável que possui uma estrutura algébrica de grupo na qual as aplicações:

$$\begin{array}{c} G \times G \longrightarrow G \\ (\sigma, \tau) \longmapsto \sigma\tau \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} G \longrightarrow G \\ \tau \longmapsto \tau^{-1} \end{array}$$

são de classe C^∞.

O principal exemplo de grupos de Lie é o conjunto $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ das matrizes inversíveis de ordem n com entradas reais. Uma maneira simples de verificar que $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ é um grupo de Lie é usar a identificação natural do conjunto $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ com $\mathbb{R}^{n^2}$ das matrizes quadradas de ordem n e entradas reais com $\mathbb{R}^{n^2}$. Como a função determinante é uma função contínua então $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e assim possui uma estrutura de variedade diferenciável. Além disso, o produto usual de matrizes define em $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ uma estrutura algébrica de grupo. As seguintes aplicações

$$\begin{array}{rcl} Gl(n,\mathbb{R})\times \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R}) \\ (A,B) & \longmapsto & AB \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$$

são de classe C^{∞}, pois as entradas do produto de matrizes é a soma do produto de entradas das matrizes e além disso a operação inversão também é C^{∞}, pois $\det(A) \neq 0$ e $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)}$ adj(A). Portanto, $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ é um grupo de Lie.

Note que todo grupo de Lie é um grupo topológico e assim as propriedades de grupos topológicos também são válidas para grupos de Lie.

Definição 1.2. Sejam H e G grupos de Lie. Uma aplicação $\varphi : H \longrightarrow G$ é um *homomorfismo de grupos de Lie* se φ é um homomorfismo de grupos e, além disso, é de classe C^{∞}.

Um subgrupo a 1-parâmetro de um grupo de Lie G é simplesmente um homomorfismo de grupos de Lie $\varphi : G \to \mathbb{R}$.

Uma subvariedade (H,φ) é um *subgrupo de Lie* de um grupo de Lie G se:

(i) H é um grupo de Lie;

(ii) $\varphi : H \longrightarrow G$ é um homomorfismo de grupos de Lie.

Estritamente relacionado com a estrutura de grupos de Lie temos a estrutura de álgebras de Lie.

Definição 1.3. Uma *álgebra de Lie* sobre $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial real $\mathfrak{g}$ munido de uma operação bilinear $[\,,\,] : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, denominada *colchete de Lie*, satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) [X,Y] = -[Y, X], para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$;

(ii) [[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

A primeira condição exige que o colchete de Lie seja anti-simétrico e a segunda que o colchete de Lie satisfaça a identidade de Jacobi. Note que a condição (i) equivale a dizer que $[X, X] = 0$, para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Exemplo 1.4. O espaço vetorial $\mathfrak{g}l(n, \mathbb{R})$, de todas as matrizes reais $n \times n$, com colchete entre duas matrizes dado por

$$[X, Y] = XY - YX, \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{g}l(n, \mathbb{R})$$

é uma álgebra de Lie.

É conveniente introduzirmos a noção de subálgebra de Lie.

Definição 1.5. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma *subálgebra de Lie* de $\mathfrak{g}$ é um subespaço vetorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que é fechado pelo colchete, isto é, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ para todo $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Evidentemente, uma subálgebra de Lie é uma álgebra de Lie.

Definição 1.6. Um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é um *ideal* se $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, para todo $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{h}$.

Claramente, todo ideal é uma subálgebra.

A importância da estrutura de álgebra de Lie reside no fato de que a todo grupo está associado uma álgebra de Lie de dimensão finita e que propriedades de grupos de Lie são refletidas em propriedades de sua álgebra de Lie.

Dado um grupo de Lie G, para cada $g \in G$ temos o difeomorfismo l_g de G definido por $l_g(h) = gh$. Dizemos que um campo vetorial X sobre G é *invariante* *à esquerda* se $dl_g \circ X = X \circ l_g$ para todo $g \in G$. Denotando por $\mathfrak{g}$ o conjunto de todos os campos vetoriais invariantes à esquerda sobre G, temos que $\mathfrak{g}$ torna-se uma álgebra de Lie com o colchete definido por $[X, Y]_m(f) = X_m(Yf) - Y_m(Xf)$. Assim, $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie associada ao grupo de Lie G. Podemos identificar, através do isomorfismo $X \longmapsto X(1)$, o conjunto dos campos vetoriais invariantes à esquerda sobre G com o plano tangente à G no elemento identidade. Portanto a álgebra de Lie de um grupo de Lie G se identifica com o espaço tangente à G na identidade.

1.2 Aplicação Exponencial

Queremos agora estabelecer um vínculo entre os grupos de Lie e suas respectivas álgebras de Lie. Para tanto, vamos considerar a chamada aplicação exponencial, uma ferramenta muito importante que nos permite transportar algumas propriedades das álgebras de Lie para os grupos de Lie. Também é muito útil para determinar a álgebra de Lie correspondente a um dado grupo de Lie. Antes de definirmos a aplicação exponenecial precisamos do conceito de homomorfismo de álgebras de Lie.

Definição 1.7. Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie. Uma aplicação $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ é um *homomorfismo de álgebras de Lie* se φ é linear e preserva o colchete, isto é, $\varphi[X, Y] = [\varphi(X), \varphi(Y)]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Proposição 1.8. *Sejam G e H grupos de Lie, com respectivas álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, e G simplesmente conexo. Se $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um homomorfismo, então existe um único homomorfismo $\varphi : G \to H$ tal que $d\varphi = \psi$.*

Demonstração: Ver Teorema 3.27 em [11]. ■

Definição 1.9. Sejam G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie. Se $X \in \mathfrak{g}$, então

$$\lambda \frac{d}{dr} \longmapsto \lambda X$$

é um homomorfismo de álgebras de Lie de $\mathbb{R}$ em $\mathfrak{g}$. Como $\mathbb{R}$ é simplesmente conexo, pela proposição anterior, existe um único subgrupo a 1- parâmetro

$$\exp_X : \mathbb{R} \longrightarrow G$$

tal que

$$d(\exp_X(\lambda\frac{d}{dr})) = \lambda X.$$

Em outras palavras, $t \longmapsto \exp_X(t)$ é o único subgrupo a 1-parâmetro de G cujo vetor tangente em 0 é $X(1)$. Definimos a *aplicação exponencial*

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

por

$$\exp(X) = \exp_X(1).$$

Dentre as inúmeras propriedades da aplicação exponencial destacamos as seguintes:

Proposição 1.10. *Se G é um grupo de Lie então a aplicação exponencial* $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$, *é um difeomorfismo de uma vizinhança de 0 em $\mathfrak{g}$ sobre uma vizinhança de 1 em G.*

Proposição 1.11. *Sejam G um grupo de Lie e $X, Y \in \mathfrak{g}$. Se* $[X, Y] = 0$ *então* $\exp(X + Y) = \exp(X)\exp(Y)$.

Para maiores detalhes a referência [11] pode ser consultada.

Vejamos agora o conceito de representação adjunta.

Seja V um espaço vetorial e $\mathfrak{g}l(V)$ a álgebra de Lie das transformações lineares de V. Seja também $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma *representação* de $\mathfrak{g}$ em V é um homomorfismo $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}l(V)$. Para um elemento X na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, considere a transformação linear $ad_X : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ definida por $ad_X(Y) = [X, Y]$.

A aplicação $ad : \mathfrak{g} \longmapsto \mathfrak{g}l(\mathfrak{g})$, $X \longmapsto ad_X$ é uma representação de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$ denominada *representação adjunta*.

Para $g \in G$, considere o automorfismo interno $I_g : G \to G$, definido por $h \to ghg^{-1}$. Esse automorfismo induz um automorfismo $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{I_g} & G \\ {\scriptstyle \exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{Ad_g} & \mathfrak{g} \end{array}$$

Então $\exp(Ad_g(X)) = g\exp(X)g^{-1}$.

Uma propriedade básica da aplicação exponencial garante que se $X \in \mathfrak{g}$ então

$$Ad\exp(X) = e^{ad_X} = 1 + ad_X + \frac{1}{2!}(ad_X)^2 + ... \qquad (1.1)$$

Como conseqüência dessa afirmação temos a seguinte proposição.

Proposição 1.12. *Uma subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ é invariante sob todos os automorfismos $Ad\,g$, isto é, $Ad\,g(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}, \forall g \in G$ se, e somente se, $\mathfrak{h}$ for um ideal.*

O próximo resultado relaciona subgrupo normal e ideal de uma álgebra de Lie e será inúmeras vezes usado nesse trabalho.

Proposição 1.13. *Seja $A \subseteq G$ um subgrupo de Lie conexo do grupo de Lie conexo G. Então A é subgrupo normal se, e somente se, a álgebra de Lie $\mathfrak{a}$ de A é um ideal em $\mathfrak{g}$.*

Demonstração: Ver Teorema 3.48 em [11]. ■

A seguinte proposição nos dá uma condição para que um subgrupo abstrato seja um subgrupo de Lie.

Proposição 1.14. *Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo fechado de G. Então H é um subgrupo de Lie de G. Além disso, $\mathfrak{h}$ é subálgebra de $\mathfrak{g}$.*

Demonstração: Ver Teorema 3.42 em [11]. ■

1.3 Semigrupos

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos básicos da teoria de semigrupos juntamente com alguns resultados que serão utilizados no transcorrer desse trabalho.

Abstratamente um *semigrupo* é simplesmente um conjunto não vazio S munido de uma operação associativa. No entanto nosso interesse nesse trabalho será voltado para subsemigrupos de grupos de Lie.

Definição 1.15. Um *subsemigrupo* de um semigrupo S é um subconjunto não vazio $T \subset S$ tal que $T^2 \subset T$.

Exemplo 1.16. O conjunto $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}^+)$, das matrizes inversíveis com entradas não negativas que têm determinante igual a 1, munido do produto usual de matrizes é um subsemigrupo de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$. Com efeito, sejam $A, B \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}^+)$. Pela definição de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}^+)$ temos $\det A = 1$ e $\det B = 1$, assim $\det(A \cdot B) = 1$. Ainda, as entradas de $A \cdot B$ são somas de produtos das entradas de A e B, e soma de produtos de números reais não negativos são sempre não negativas, logo $A \cdot B \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}^+)$ o que implica que $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}^+)$ é um subsemigrupo.

É evidente que a interseção (não vazia) de uma coleção de subsemigrupos de um semigrupo S é ainda um subsemigrupo.

Vamos definir agora o conceito de ideal de um subsemigrupo e trabalhar com algumas propriedades e resultados referentes aos ideais.

Definição 1.17. Um subconjunto não vazio I, de um subsemigrupo S, é um *ideal à esquerda* de S se $SI \subseteq I$, um *ideal à direita* se $IS \subseteq I$ e, é dito um *ideal* se for ideal à direita e à esquerda.

Um ideal I será chamado de *ideal maximal* se $I \neq S$ e o único ideal em S que contém I, e é diferente de I, é o próprio S.

Definição 1.18. Seja G um grupo. Um subconjunto S de G é um *submonóide* se satisfaz as seguintes condições:

(i) S é um subsemigrupo;

(ii) $1 \in S$.

Definição 1.19. Seja S um submonóide de G. O conjunto

$$H(S) = S \cap S^{-1} = \{g \in S : g^{-1} \in S\}$$

é chamado *grupo das unidades*.

Quanto ao grupo das unidades temos:

Proposição 1.20. *Seja S um submonóide de G. Então $H(S)$ é o maior subgrupo de G contido em S.*

Demonstração: Primeiramente, note que como $H(S)$ é a interseção de dois submonóides, então $H(S)$ é um submonóide. Sejam $x, y \in H(S)$. Pela definição de $H(S)$ temos que $y^{-1} \in H(S)$. Logo, $xy^{-1} \in H(S)$ e, conseqüentemente, $H(S)$ é um subgrupo de G. Considere agora um subgrupo K de G tal que $K \subset S$. Então, $K = K \cap K^{-1} \subset S \cap S^{-1} = H(S)$ e, portanto, $H(S)$ é o maior subgrupo de G contido em S. ■

O grupo das unidades também é chamado de *grupo maximal* de S.

Proposição 1.21. *Seja S um submonóide de G tal que $S \neq H(S)$. Então $S^{\#} =: S \backslash H(S)$ é um ideal maximal em S.*

Demonstração: Sejam $x \in S$ e $a \in S^{\#}$. Então $ax \in S$. Suponhamos que $ax \in H(S)$. Neste caso $(ax)^{-1} = x^{-1}a^{-1} \in H(S)$ e assim $x^{-1}a^{-1} \in S$. Como $x \in S$ e S é subsemigrupo temos que $x(x^{-1}a^{-1}) = a^{-1} \in S$, o que contradiz o fato de $a \in S^{\#}$. Então $ax \notin H(S)$ e, conseqüentemente, $ax \in S^{\#}$. De maneira análoga mostra-se que $xa \in S^{\#}$. Logo, $S^{\#}$ é um ideal de S.

Resta mostrarmos que $S^{\#}$ é maximal. Suponhamos que exista um ideal J de S tal que $S^{\#} \subset J \subset S$ e $S^{\#} \neq J$. Desta forma temos que $J \cap H(S) \neq \emptyset$. Vamos mostrar que $J = S$. Para tanto, consideremos $x \in S$ e $a \in J \cap H(S)$. Logo $a^{-1} \in S$ e, conseqüentemente, $x = a(a^{-1}x) \in J$. Assim, $S \subset J$, ou seja, $J = S$. Portanto, $S^{\#}$ é maximal. ■

Definição 1.22. Um subconjunto $A \subseteq G$ é dito *invariante* ou *normal* se $gAg^{-1} = A$, para todo $g \in G$.

Ainda sobre subsemigrupos, definiremos agora o conceito de centro de um subsemigrupo e algumas de suas propriedades.

Definição 1.23. Seja S um submonóide de G. O conjunto

$$C(S) = \bigcap_{g \in G} gH(S)g^{-1}$$

é chamado *centro de* S.

Proposição 1.24. *Seja S um submonóide de G. Então $C(S)$ é o maior subgrupo normal de G contido em S.*

Demonstração: Afirmamos que $Q_g = \{gH(S)g^{-1}\}$, com $g \in G$ é um subgrupo de G. De fato, considere $(gh_1g^{-1}), (gh_2g^{-1}) \in Q_g$. Então

$$(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1})^{-1} = gh_1g^{-1}gh_2^{-1}g^{-1} = gh_1h_2^{-1}g^{-1}.$$

Pela Proposição 1.20, $H(S)$ é um subgrupo. Assim, $h_1h_2^{-1} \in H(S)$ e daí $gh_1h_2^{-1}g^{-1} \in Q_g$. Logo, Q_g é um subgrupo. Como a interseção qualquer de subgrupos é ainda um subgrupo, temos que $C(S) = \bigcap_{g \in G} Q_g$ é um subgrupo. Além disso, $C(S) = \bigcap_{g \in G} gH(S)g^{-1} \subset 1H(S)1 = H(S) \subset S$, isto é, $C(S) \subset S$.

Para verificar que $C(S)$ é um subgrupo normal consideremos $\gamma \in G$. Temos

$$\begin{aligned} \gamma C(S)\gamma^{-1} &= \gamma[\bigcap_{g \in G} gH(S)g^{-1}]\gamma^{-1} = \bigcap_{g \in G} \gamma gH(S)g^{-1}\gamma^{-1} \\ &= \bigcap_{g \in G} (\gamma g)H(S)(\gamma g)^{-1} = \bigcap_{g \in G} gH(S)g^{-1} = C(S). \end{aligned}$$

Logo, $C(S)$ é um subgrupo normal de G. Consideremos agora N um subgrupo normal de G tal que $N \subset S$. Pela Proposição 1.20 temos que $N \subset H(S)$. Como N é normal temos que $N \subset gH(S)g^{-1}$, para todo $g \in G$ e, conseqüentemente, $N \subset \bigcap_{g \in G} gH(S)g^{-1} = C(S)$. Assim, $C(S)$ é o maior subgrupo normal de G contido em S. ■

Relacionado com os homomorfismos e o subsemigrupo, cabe observar o seguinte fato.

Proposição 1.25. *Seja $\varphi : G \to H$ um homomorfismo sobrejetor de grupos. Se T é um subsemigrupo de G e* $\ker(\varphi) = \{g \in G : \varphi(g) = 1\} \subset T$, *então $T = \varphi^{-1}(\varphi(T))$.*

Demonstração: Claramente $T \subset \varphi^{-1}(\varphi(T))$. Considere $x \in \varphi^{-1}(\varphi(T))$. Como φ é sobrejetora temos que $\varphi(x) \in \varphi\varphi^{-1}(\varphi(T)) \subset \varphi(T)$. Assim existe $t \in T$ tal que $\varphi(x) = \varphi(t)$, ou seja $\varphi(x)(\varphi(t))^{-1} = 1$. Como φ é um homomorfismo, $\varphi(x)\varphi(t^{-1}) = \varphi(xt^{-1}) = 1$ e, conseqüentemente, $xt^{-1} \in \ker(\varphi) \subset T$. Assim $xt^{-1} \in T$. Como T é subsemigrupo temos que $(xt^{-1})t \in T$, isto é, $x \in T$ e então $\varphi^{-1}(\varphi(T)) \subset T$. Portanto, $T = \varphi^{-1}(\varphi(T))$. ■

Definição 1.26. Seja $S \subset G$ um submonóide. Dizemos que S é *reduzido* em G se $C(S) = \{1\}$.

Veremos, na próxima proposição, uma maneira de obter semigrupos reduzidos.

Proposição 1.27. *Seja $S \subseteq G$ um submonóide. Então $S/C(S)$ é reduzido em $G/C(S)$.*

Demonstração: Devemos mostrar que $C(S/C(S)) = \{1\} = \{C(S)\}$. Se $\theta : G \longrightarrow G/C(S)$ é o homomorfismo canônico, então $C(\theta(S)) = C(S)$. De fato, como θ é um homomorfismo e, pela Proposição 1.24, $C(\theta(S))$ é um subgrupo normal de $G/C(S)$ segue que $\theta^{-1}(\mathrm{C}(\theta(S)))$ é um subgrupo normal de G. Além disso, $\theta^{-1}(\mathrm{C}(\theta(S))) \subset S$, pois $C(\theta(S)) \subset \theta(S)$. Como $\ker(\theta) = C(S) \subset S$ segue da Proposição (1.25) que

$\theta^{-1}(\theta(S)) = S$. Assim, $\theta^{-1}(\mathrm{C}(\theta(S))) \subset \theta^{-1}(\theta(S)) = S$. Pela Proposição 1.24, $\theta^{-1}(C(\theta(S))) \subset C(S)$, daí $C(\theta(S)) \subset \theta(C(S)) = C(S)$ e, portanto, $C(\theta(S)) = C(S)$. ■

Observação 1.28. Note que, dado qualquer grupo G e qualquer submonóide S, podemos formar a redução (G_R, S_R) de (G, S) tomando o quociente por C(S), ou seja, $G_R = G/C(S)$ e $S_R = S/C(S)$.

Observação 1.29. Considerando o homomorfismo canônico $\varphi : G \to G/C(S)$ e sabendo que $\ker(\varphi) = C(S) \subset S$ obtemos $S = \varphi^{-1}(\varphi(S)) = \varphi^{-1}(S_R)$.

Nos resultados que seguem, estaremos trabalhando com semigrupos em grupos topológicos, que são casos particulares de grupos de Lie. O primeiro deles, é um dos mais importantes dessa seção, nele estabeleceremos condições para um semigrupo ser um grupo.

Antes porém, enunciaremos um lema que será necessário para tal resultado. Tal lema é um resultado clássico de topologia e por isso não apresentaremos demonstração.

Lema 1.30. *Sejam G um grupo topológico conexo e U uma vizinhança de 1, elemento neutro do grupo. Então $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$.*

Demonstração: Ver Proposição 3.18 em [11] ■

Proposição 1.31. *Se S é um subsemigrupo de um grupo topológico conexo G tal que $1 \in \mathrm{int}(S)$, então $S = G$.*

Demonstração: Seja $U = S$. Pelo Lema 1.30 temos que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n$. Como S é subsemigrupo a operação é fechada em S, então $S^n \subset S$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} S = S$ e $S \subset G$, pois S é subsemigrupo de G. Daí segue que $S = G$. ■

A proposição seguinte estabelece que o interior de um subsemigrupo é um ideal, o que é importante pois já começa a existir conexões com os resultados anteriores sobre ideais de subsemigrupos.

Proposição 1.32. *Seja S um subsemigrupo de um grupo topológico G tal que* $\text{int}(S) \neq \emptyset$. *Então* $\text{int}(S)$ *é um ideal em S.*

Demonstração: Como $\text{int}(S) \neq \emptyset$, existem $g \in \text{int}(S)$ e U, uma vizinhança aberta de g, tal que $g \in U \subset S$. Assim, para todo $s \in S$ temos que $gs \in Us \subseteq S$. Como G é um grupo topológico, a translação a direita é um homeomorfismo. Então o conjunto Us é uma vizinhança aberta de gs, ou seja, $gs \in \text{int}(S)$. Logo, $(\text{int}(S))S \subset \text{int}(S)$. Analogamente, obtemos que $S(\text{int}(S)) \subset \text{int}(S)$. Portanto, $\text{int}(S)$ é um ideal de S.
■

Vamos definir agora a ação de um semigrupo em um espaço topológico.

Definição 1.33. Um semigrupo S *age continuamente* em um espaço topológico M se existe uma aplicação

$$\phi : S \times M \to M,$$

denotada por

$$\phi(g, x) = gx,$$

tal que ϕ é contínua, e satisfaz $\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x))$, para todo $g, h \in S$ e todo $x \in M$.

Dessa forma, quando fixamos $g \in S$ a aplicação

$$\phi_g : M \to M$$

definida por

$$\phi_g(x) = \phi(g, x) = gx$$

também é contínua.

Definição 1.34. Seja S um semigrupo agindo em um espaço topológico M. Dado um ponto $x \in M$, definimos

$$Sx = \{y \in M : \text{existe } g \in S \text{ com } gx = y\}.$$

O conjunto Sx é denominado *órbita de x por S*.

As órbitas por S satisfazem a propriedade da transitividade, isto é, dados quaisquer $x, y, z \in M$ com $x \in Sy$ e $y \in Sz$, tem-se que $x \in Sz$. Com efeito, existem $g, h \in S$ tais que $x = gy$ e $y = hz$, logo, $x = ghz$ com $gh \in S$. Devido a essa propriedade, uma órbita por S é invariante pela ação de S, isso quer dizer que $S(Sx) \subset Sx$, para todo $x \in M$

Para finalizar o capítulo vamos apresentar as definições de acessibilidade e transitividade para ação de semigrupos.

Definição 1.35. Um semigrupo S é dito *acessível* a partir de $x \in M$ se $int(Sx) \neq \emptyset$. O semigrupo é dito acessível se for acessível a partir de todo $x \in M$.

Definição 1.36. Um semigrupo S é dito *transitivo*, ou que *age transitivamente* em M, se $Sx = M$, para todo $x \in M$.

Notemos que, claramente, se S é transitivo, então S é acessível.

A seguir vamos apresentar um lema técnico que é muito útil para garantir a transitividade de uma ação de um semigrupo em uma variedade.

Proposição 1.37. *Seja G um grupo topológico conexo agindo em uma variedade conexa M. Seja S um semigrupo conexo de G com $int(S) \neq \emptyset$, $1 \in S$, tal que a as órbitas Sx e $S^{-1}x$ são abertos para todo $x \in M$. Então a ação de S em M é transitiva (controlável).*

Demonstração: Por hipótese temos que Sx e $S^{-1}x$ são abertos $\forall x \in M$.

Suponhamos que $Sx \neq M$ para algum $x \in M$. Neste caso, seja $y \in M$ tal que $y \notin Sx$. Temos que $y \in Sy \cap S^{-1}y$ pois $1 \in S$.

Observe que $(Sy \cap S^{-1}y) \cap Sx = \emptyset$ pois caso contrário existem $a, b, c \in S$ tal que

$$ay = b^{-1}y = cx \Rightarrow by = bcx \in Sx$$

que é um absurdo.

Logo Sx é fechado. Assim, Sx é fechado e aberto no conexo G. Portanto $Sx = M$. ■

O resultado anterior é usado diretamente na demonstração do Teorema 4.13.

Capítulo 2

Sistemas de controle subordinados à ação de um grupo

Nesse capítulo vamos introduzir alguns os conceitos básicos da teoria de controle, com ênfase na noção de atingibilidade, acessibilidade normal e as relações com a controlabilidade. Depois, apresentaremos o conceito de sistemas de controle subordinados à ação de um grupo e trabalharemos especificadmente com o sistema que nos será importante no seguimento do trabalho, que é o estudo de sistemas de controle afim.

2.1 Conceitos básicos da teoria de controle

Sejam G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie. Nesta seção introduziremos as noções básicas e resultados preliminares da teoria de controle para sistemas de campos vetoriais invariantes à direita em grupos de Lie.

Começaremos definindo sistemas de controle invariantes à direita:

Definição 2.1. Um *sistema de controle invariante à direita* em um grupo de Lie G é um conjunto arbitrário Γ de campos de vetores invariantes à direita em G, isto é, qualquer subconjunto $\Gamma \subset \mathfrak{g}$.

A partir daqui, por simplicidade de notação, sempre que nos referirmos a "sistema"estaremos na verdade nos referindo a um sistema invariante à direita, ou seja, um subconjunto da álgebra de Lie.

Definição 2.2. Uma *trajetória* de um sistema Γ em G é uma curva contínua $x(t)$ em G, definida em um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, tal que existe uma partição $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ e elementos $A_1, A_2, \ldots A_k$ em Γ tais que a restrição de $x(t)$ a cada intervalo aberto (t_{i-1}, t_i) é diferenciável e $x'(t) = A_i(x(t))$ para $t \in (t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Observe que, pela definição acima, uma trajetória de um sistema é na verdade uma concatenação de trajetórias dos campos pertencentes a Γ.

Quando fixamos um ponto $x \in G$ podemos pensar nas trajetórias a partir de tal ponto x, ou seja, aquelas trajetórias $x(t)$ tais que $x(0) = x$. precisamente temos:

Definição 2.3. Chamamos de *conjunto de atingibilidade* de um sistema invariante à direita Γ em G a partir de $x \in G$, e denotamos por $\mathbb{A}_\Gamma(x)$, o subconjunto de G que consiste de todos os pontos finais de trajetórias não negativas de Γ, com ponto inicial em x. Em símbolos:

$$\mathbb{A}_\Gamma(x) = \{x(T) : x(.) \text{ é uma trajetória de } \Gamma,\ x(0) = x \text{ e } T \geqslant 0\}.$$

Observação 2.4. Quando não houver possibilidade de dúvidas, usaremos a notação $\mathbb{A}(x)$ para $\mathbb{A}_\Gamma(x)$. Ainda, denotaremos por $\mathbb{A}$ o conjunto $\mathbb{A}(1)$.

Associado ao conjunto de atingibilidade de um sistema Γ temos a órbita de sistema passando pelo ponto $x \in G$, cuja definição é dada a seguir:

Definição 2.5. Chamamos de *órbita* do sistema Γ passando pelo ponto $x \in G$ e denotamos por $\mathcal{O}(x)$ o conjunto:

$$\mathcal{O}(x) = \{x(T) : x(.) \text{ é uma trajetória de } \Gamma,\ x(0) = x, T \in \mathbb{R}\}.$$

Por simplicidade de notação, denotaremos a órbita de Γ passando pelo elemento neutro $1 \in G$ por $\mathcal{O}$.

Seja $\exp : \mathfrak{g} \to G$ a aplicação exponencial do grupo de Lie G e seja $A \in \mathfrak{g}$ fixo. A trajetória do campo A passando pelo elemento neutro 1 é o grupo a um parâmetro $\exp(tA)$, $t \in \mathbb{R}$, e a trajetória de A passando pelo ponto $x \in G$ é $\exp(tA)x$, $t \in \mathbb{R}$.

Para qualquer subconjunto $\Gamma \subset \mathfrak{g}$ denotaremos por $\mathrm{Lie}(\Gamma)$ a menor subálgebra de $\mathfrak{g}$ que contém Γ.
Agora vamos enunciar dois resultados clássicos sobre órbitas e os conjuntos de atingibilidade.

Proposição 2.6. *Sejam G um grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie e Γ um subconjunto de $\mathfrak{g}$. Se x é um ponto arbitrário de G então:*

(i) $\mathcal{O}(x)=\{\exp(t_kA_k)\cdot\exp(t_{k-1}A_{k-1})\cdots\exp(t_1A_1)x : A_i \in \Gamma, t_i \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}\}$*;*

(ii) $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(1)x$*;*

(iii) $\mathcal{O}(1)$ *é um subgrupo de Lie conexo de G cuja álgebra de Lie é Lie*(Γ)*;*

(iv) $\mathcal{O}(x)$ *é a variedade integral maximal da distribuição involutiva invariante à direita de Lie*(Γ) *em G passando pelo ponto x.*

Demonstração: (i) A trajetória de um campo $A \in \Gamma$ por 1 é $\exp(tA)$ e as trajetórias de Γ são concatenações de trajetórias de campos de Γ. Logo, toda trajetória passando por x é do tipo

$$\exp(t_kA_k)\cdots\exp(t_1A_1)x$$

onde $A_i \in \Gamma$, $t_i \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$.

(ii) É imediato a partir de (i).

(iii) $\mathcal{O}(1)$ é claramente conexo por caminhos e portanto conexo. Sendo $\mathcal{O}(1)$ um subgrupo de G conexo por caminhos então, conforme [20], p. 275, $\mathcal{O}(1)$ é subgrupo de Lie de G. Queremos mostrar que a álgebra de Lie de $\mathcal{O}(1)$, que denotaremos por $\mathrm{Lie}(\mathcal{O}(1))$, é igual a $\mathrm{Lie}(\Gamma)$. Sejam $X \in \Gamma$ e t um número real arbitrário. Pela definição de $\mathcal{O}(1)$ temos que $\exp(tX) \in \mathcal{O}(1)$ e então, conforme [11], Proposição 3.33, $X \in \text{Lie}(\mathcal{O}(1))$. Logo $\Gamma \subset \text{Lie}(\mathcal{O}(1))$ e Lie(Γ)$\subset$Lie($\mathcal{O}(1)$). Para mostrarmos a outra inclusão, seja H o subgrupo de Lie conexo de G cuja álgebra de Lie é Lie(Γ). Como $\mathcal{O}(1)$ é o subgrupo de G gerado por $\exp(\mathbb{R}\Gamma)$ e $\mathbb{R}\Gamma \subset \text{Lie}(\Gamma)$ temos $\mathcal{O}(1) \subset H$ e daí $\text{Lie}(\mathcal{O}(1)) \subset \text{Lie}(H)$=Lie($\Gamma$).

(iv)Mostraremos inicialmente que $\mathcal{O}(x)$ é subvariedade de G. Sabemos que a translação à esquerda $E_x : \mathcal{O}(1) \to \mathcal{O}(x)$ definida por $E_x(y) = yx$, é um difeomorfismo. Por (iii) $\mathcal{O}(1)$ é subgrupo de Lie de G e, em particular, é subvariedade. Seja $\psi : \mathcal{O}(1) \to G$ imersão injetora e defina a função $\phi : \mathcal{O}(x) \to G$ por $\phi = \psi \circ D_{x^{-1}}$, onde $D_{x^{-1}}$ é a translação à direita de G por x^{-1}. É claro que ϕ é injetora e $d\phi$ é não singular. Observemos agora que Lie(Γ) define uma distribuição em G da seguinte maneira: dado $x \in G$, como D_x é um difeomorfismo e $D_x(1) = 1x = x$ temos que $dD_x|_1 : T_1G \to T_xG$ é um isomorfismo de espaços vetoriais. Além disso, identificando T_1G com $\mathfrak{g}$, temos que $dR_x|_1(\text{Lie}\Gamma)$ é um subespaço vetorial de T_xG. Então podemos definir a seguinte distribuição:

$$\mathcal{D}(x) = dR_x|_1(\text{Lie}\Gamma).$$

Esta distribuição será chamada de distribuição de Lie(Γ) em G. Vamos mostrar que $\mathcal{O}(x)$ é uma variedade integral de distribuição Lie(Γ) em G passando pelo ponto x. Pelo ítem (ii) $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(1)x$, isto é, $\mathcal{O}(x) = D_x(\mathcal{O}(1))$. Logo $T_x(\mathcal{O}(x)) = dD_x|_1(T_1(\mathcal{O}(1)))$. Por (iii) $T_1(\mathcal{O}(1)$ =LieΓ. Assim $T_x(\mathcal{O}(x)) = dD_x|_1(\text{Lie}\Gamma)$= $\mathcal{D}(x)$. Ou seja, $T_x(\mathcal{O}(x)) = \mathcal{D}(x)$ qualquer que seja $x \in G$. Isto mostra que $\mathcal{O}(x)$ é uma variedade integral da distribuição de LieΓ em G passando pelo ponto x. ■

O resultado a seguir é análogo ao anterior, mas para conjunto de atingibilidade.

Proposição 2.7. *Sejam G um grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie e $\Gamma \subset g$ um sistema invariante à direita. Se x é um ponto arbitrário de G então:*

(i) $\mathbb{A}_\Gamma(x) = \{\exp(t_k A_k) \cdot \exp(t_{k-1}A_{k-1}) \cdots \exp(t_1 A_1)x : A_i \in \Gamma, t_i \geqslant 0, k \in \mathbb{N}\}$*;*

(ii) $\mathbb{A}_\Gamma(x) = \mathbb{A}_\Gamma(1)x$*;*

(iii)$\mathbb{A}_\Gamma(1)$ *é um subsemigrupo de* G*;*

(iv) $\mathbb{A}_\Gamma(x)$ *é um subconjunto conexo por caminhos de* G*.*

Demonstração: A demonstração é imediata. O ítem (i) é análogo à proposição anterior, com o cuidado de tomarmos trajetórias em tempos não negativos. ■

Outra propriedade que nos será útil na descrição de conjuntos de atingibilidade é de acessibilidade, que é definida como segue:

Definição 2.8. Um sistema Γ é chamado de *acessível* em um ponto $x \in G$ se o conjunto de atingibilidade $\mathbb{A}_\Gamma(x)$ tem interior não vazio em G.

O sistema Γ é *acessível* se for acessível a partir de todos os pontos de G.

Agora podemos definir a controlabilidade.

Definição 2.9. Um sistema Γ é chamado *controlável* se, dado qualquer par de pontos x_0 e x_1 em G, o ponto x_1 pode ser atingido a partir de x_0 ao longo de uma trajetória de Γ, para um tempo não negativo, ou seja:

$$x_1 \in \mathbb{A}_\Gamma(x_0) \text{ para cada } x_0, x_1 \in G.$$

Em outras palavras

$$\mathbb{A}_\Gamma(x) = G \text{ para todo } x \in G.$$

Para exemplificar a definição acima, vamos mostrar um caso de sistema controlável em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Exemplo 2.10. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e o sistema $\Gamma = \{A, B, -B\}$.

Vamos mostrar que o sistema Γ é controlável em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Para isto note que,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \; e^{tB} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \text{ e } e^{-tB} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, e^{tA} é uma matriz de rotação, ou seja, a trajetória de um ponto $x \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ é a circunferência $S^2_{\|x\|}$ (circunferência de centro em $(0,0)$ e raio $\|x\|$).

Dados $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ devemos mostrar que existe uma trajetória do sistema Γ com ponto inicial em x e que passa por y, o que faremos analisando alguns casos:

Primeiro caso: $\|x\| = \|y\|$.

Neste caso, ambos pertencem à mesma circunferência de raio $\|x\|$, assim, existe $t_1 > 0$ tal que $e^{t_1 A}x = y$, logo essa é a trajetória com ponto inicial em x e final em y.

Segundo caso: $\|x\| < \|y\|$

Neste caso vamos mostrar separadamente duas possibilidades: $x_1 \neq 0$ e $x_1 = 0$.

Para $x \neq 0$ temos
$e^{tB}x = \begin{pmatrix} e^t x_1 \\ e^{-t} x_2 \end{pmatrix}$, assim, quando $t \to \infty$ temos

$$\|e^{tB}x\| = \sqrt{(e^t x_1)^2 + (e^t x_2)^2} \to \infty,$$

o que implica existe $t_1 > 0$ tal que $e^{t_1 B}x \in S^2_{\|y\|}$, ou seja, a trajetória $e^{tB}x$ leva o ponto x à um ponto da circunferência de centro em $(0,0)$ e raio $\|y\|$.

Em seguida aplicamos a matriz rotação e^{tA} no ponto $e^{t_1 B}x$. Sabemos que existe $t_2 > t_1$ tal que $e^{t_2 A}e^{t_1 B}x = y$. Dessa forma, com essa concatenação de trajetórias obtemos uma trajetória $f(t)$ tal que $f(0) = x$ e $f(t_2) = y$, como queríamos.

Já para $x_1 = 0$ começamos aplicando a matriz rotação e^{tA}, tomando um $t_0 > 0$ onde

$$e^{t_0 A}x = \begin{pmatrix} -\sin t_0 x_2 \\ \cos t_0 x_2 \end{pmatrix} \text{ é tal que } -\sin t_0 x_2 \neq 0.$$

Assim caímos no caso anterior. Desta forma, existem $t_2 > t_1 > t_0$ tais que $e^{t_2 A}e^{t_1 B}e^{t_0 A}x = y$, ou seja, essa concatenação de trajetórias é a trajetória que une x a y.

Terceiro caso: $\|x\| > \|y\|$.

Novamente temos duas possibilidades: $x_2 = 0$ ou $x_2 \neq 0$.

Para $x_2 = 0$ temos que $e^{tB}x = \begin{pmatrix} e^{-t}x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Assim, quando $t \to \infty$ temos:

$$\|e^{t(-B)}x\| = \sqrt{(e^{-t}x_1)^2} \to 0,$$

o que implica que existe $t_1 > 0$ tal que $e^{t_1(-B)}x \in S^2_{\|y\|}$, ou seja, a trajetória $e^{t(-B)}x$ leva o ponto x a um ponto da circunferência de centro em $(0,0)$ e raio $\|y\|$.

Em seguida aplicamos a matriz rotação e^{tA} no ponto $e^{t_1(-B)}x$. Sabemos que existe $t_2 > t_1$ tal que $e^{t_2 A}e^{t_1(-B)}x = y$, e essa trajetória que une x a y.

Já para $x_2 \neq 0$ começamos aplicando a matriz rotação e^{tA}, tomando um $t_0 > 0$ onde

$$e^{t_0 A}x = \begin{pmatrix} \cos t_0 x_1 - \sin t_0 x_2 \\ \sin t_0 x_1 + \cos t_0 x_2 \end{pmatrix} \text{ é tal que } \sin t_0 x_1 + \cos t_0 x_2 = 0.$$

Assim caímos no caso anterior. Desta forma, existem $t_2 > t_1 > t_0$ tais que $e^{t_2 A}e^{t_1 B}e^{t_0 A}x = y$, ou seja, essa concatenação de trajetórias une x a y.

Portanto, dados quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ existe uma trajetória que os contém, o que significa que$\mathbb{A}(x) = \mathbb{R}^2 - \{0\}$, logo o sistema Γ é controlável em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

2.2 Acessibilidade Normal

Dado um grupo de Lie G e um subconjunto Γ de sua álgebra de Lie, um ponto $y \in G$ é Γ-atingível a partir de um ponto $x \in G$ se existem elementos $A_1, A_2, ...A_k \in \Gamma$ e $t = (t_1, t_2, ...t_k) \in \mathbb{R}^k$, com coordenadas não negativas, tais que $y = \exp(t_k A_k) \cdots \exp(t_1 A_1)x$.

A seguinte noção é mais forte que a de atingibilidade e nos será muito útil para o estudo das propriedades topológicas de conjuntos de atingibilidade e da controlabilidade.

Definição 2.11. Um ponto $y \in G$ é chamado de Γ-*normalmente acessível* a partir de um ponto $x \in G$ se existem elementos $A_1, A_2, ...A_k \in \Gamma$ e $t \in \mathbb{R}^k$, com coordenadas positivas $t_1, t_2, ..., t_k$, tais que a aplicação $F(t_1, t_2, ..., t_k) = \exp(t_k A_k) \cdots \exp(t_1 A_1)x$, vista como uma aplicação de $\mathbb{R}^k$ em G, satisfaz as seguintes condições:

(i)$F(t) = y$;

(ii) O posto da diferencial $dF|_t$ é igual à dimensão de G.

Lema 2.12. *Se y é Γ-normalmente acessível a partir de x e z é Γ-atingível a partir de y então z é Γ-normalmente acessível a partir de x.*

Demonstração: Seja F uma aplicação satisfazendo as condições da definição de acessibilidade normal para x e y. Consideremos também campos $A_{k+1}, A_{k+2}, ...A_l \in \Gamma$ tais que $G(t_l, ..., t_{k+1}) = \exp(t_l A_l) \cdots \exp(t_{k+1} A_{k+1})x = z$, onde $t_{k+1}, ..., t_l$ são números reais positivos. Então

$$z = \exp(t_l A_l) \cdots \exp(t_{k+1} A_{k+1}) \exp(t_k A_k) \cdots \exp(t_1 A_1)x = G(t_l, ..., t_{k+1})F(t_1, ..., t_k)$$

e, consequentemente, a aplicação $H(x, y) = F(x) \cdot G(y)$, onde $x \in \mathbb{R}^k$ e $y \in \mathbb{R}^{l-k}$, de $\mathbb{R}^l$ em G satisfaz as condições da definição de acessibilidade normal. ■

Teorema 2.13. *Se $Lie(\Gamma) = \mathfrak{g}$ então em qualquer vizinhança O da identidade $1 \in G$ existem pontos Γ-normalmente acessíveis a partir de 1. Conseqüentemente o conjunto $int\mathbb{A} \cap O$ é não vazio.*

Demonstração: Vamos fazer a demonstração por indução sobre $n = \dim \mathfrak{g} = \dim(Lie(\Gamma))$. Se $n = 0$, a afirmação é óbvia. Suponhamos então que $n > 0$ e fixemos uma vizinhança O da identidade 1. Seja $A_1 \in \Gamma$ um elemento não nulo, $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$ positivo e suficientemente pequeno para que a curva

$$M_1 = \{\exp(t_1 A_1) : 0 < t_1 < \varepsilon_1\}$$

seja uma variedade diferenciável unidimensional contida na vizinhança O. Se $n = 1$ então qualquer ponto de M_1 é normalmente acessível a partir de 1 por A_1, uma vez que a aplicação $F(t_1) = \exp(t_1 A_1)$ tem posto 1 no intervalo $I_1 = (0, \varepsilon_1)$. Se $n > 1$, existe um elemento $A_2 \in \Gamma$ tal que o campo invariante à direita A_2 não é tangente a M_1 em nenhum ponto de M_1 pois, se este for o caso para qualquer $A_2 \in \Gamma$ teríamos que dim(LieΓ)=1, o que não ocorre. Desta forma o conjunto

$$M_2 = \{\exp(t_2 A_2) \exp(t_1 A_1) : 0 < t_i < \varepsilon_i, i = 1, 2\}$$

é uma variedade diferenciável bidimensional contida em O para positivos suficientemente pequenos $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Além disso, a aplicação $F_2(t_1, t_2) = \exp(t_2 A_2) \exp(t_1 A_1)$ tem posto 2 no domínio $I_2 = (0, \varepsilon_1) \times (0, \varepsilon_2)$. Se $n = 2$ o lema está provado, uma vez que, neste caso, todo ponto de M_2 é normalmente acessível a partir de 1 por A_1 e A_2.

Suponhamos então $n > 2$ e que para todo $k < n$ existam elementos $A_1, ..., A_k \in \Gamma$ tais que a variedade diferenciável k-dimensional

$$M_k = \{\exp(t_k A_k) \cdots \exp(t_1 A_1) : 0 < t_i < \varepsilon_i, i = 1, ..., k\}$$

esteja contida na vizinhança O para certos números reais positivos suficientemente pequenos $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k$ e que a aplicação

$$F_k(t_1, ..., t_k) = \exp(t_k A_k) \cdots \exp(t_1 A_1)$$

tenha posto k no domínio $I_k = (0, \varepsilon_1) \times ... \times (0, \varepsilon_k)$.

Se $n = k+1$ então existe um elemento $A_n \in \Gamma$ tal que o campo invariante à direita A_n não é tangente a M_k em nenhum ponto de M_k, pois, se esse for o caso para qualquer $A_n \in \Gamma$ teríamos que dim (LieΓ)$= k$ o que não ocorre.Desta forma o conjunto

$$M_n = \{\exp(t_n A_n) \cdots \exp(t_1 A_1) : 0 < t_i < \varepsilon_i, i = 1, ...n\}$$

é uma variedade diferenciável de dimensão n contida em O para positivos suficientemente pequenos $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$. Além disso, a aplicação $F_n(t_1, ..., t_n) = \exp(t_n A_n) \cdots \exp(t_1 A_1)$ tem posto n no domínio $I_n = (0, \varepsilon_1) \times ... \times (0, \varepsilon_n)$.

Então todo ponto em M_n é normalmente acessível a partir de 1 por $A_1, ...A_n$. Pela construção feita, a imagem de I_n pela aplicação F_n é um conjunto aberto contido em $\mathbb{A}$ e O. Portanto $F_n(I_n) \subset int(\mathbb{A} \cap O)$. ■

O teorema acima ainda pode ser sensivelmente melhorado.

Corolário 2.14. *Se $Lie\Gamma = \mathfrak{g}$ então todo ponto do interior ""'do conjunto de atingibilidade é Γ-normalmente acessível a partir de 1.*

Demonstração: Seja y um ponto no interior do conjunto de atingibilidade $\mathbb{A}$. Então 1 é um ponto no interior do conjunto $(\mathbb{A}^{-1})y$. Desde que $Lie\Gamma = \mathfrak{g}$, pelo Teorema(2.13), existe $x \in (\mathbb{A}^{-1})y$ que é Γ-normalmente acessível a partir de 1. Como $y \in \mathbb{A}x$ pelo Lema(2.12) y é Γ-normalmente acessível a partir de 1. ■

Se a álgebra de Lie gerada por Γ não coincide com a ágebra de Lie $\mathfrak{g}$, então Γ pode ser considerado como um sistema invariante à direita da órbita $\mathcal{O}$. Pelo ítem (iii) da Proposição (2.6) temos que LieΓ coincide com a álgebra de Lie do grupo $\mathcal{O}$.

O próximo resultado relaciona o conjunto de atingibilidade $\mathbb{A}$ com a órbita $\mathcal{O}$. A notação $int_{\mathcal{O}}\mathbb{A}$ indica o interior de $\mathbb{A}$ em $\mathcal{O}$.

Lema 2.15. *Com as notações acima estabelecidas são válidas as relações:*

(i) O conjunto de atingibilidade de $\mathbb{A}$ está contido na órbita $\mathcal{O}$;

(ii) Para qualquer vizinhança O da identidade na topologia da órbita $\mathcal{O}$, a interseção $(int_{\mathcal{O}}\mathbb{A}) \cap O$ é não vazia;

(iii) Além disso, fecho$(int_{\mathcal{O}}\mathbb{A}) \supset \mathbb{A}$.

Demonstração: O ítem (i) é imediato. O ítem (ii) segue do Teorema (2.13) uma vez que LieΓ é a álgebra de Lie do grupo de Lie $\mathcal{O}$. Para provar a inclusão (iii) tome qualquer ponto $x \in \mathbb{A}$ e escolha qualquer vizinhança U de x em $\mathcal{O}$. Temos que mostrar que $(int_{\mathcal{O}}\mathbb{A}) \cap U$ é não vazia.
Existe uma vizinhança O de 1 em $\mathcal{O}$ tal que $Ox \subset U$. Pelo ítem (ii) existe um ponto $y \in int_{\mathcal{O}}\mathbb{A} \cap O$. Então $yx \in int_{\mathcal{O}}\mathbb{A} \cap U$. ■

Trabalhando no contexto mais geral de campos vetoriais sobre uma variedade, Sussman demonstrou em [15], Teorema 4.3, que a controlabilidade é equivalente a acessibilidade normal a partir de todo ponto. No caso particular de grupos e álgebras de Lie tal teorema tem a seguinte formulação:

Teorema 2.16. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se $\Gamma \subset \mathfrak{g}$ é um sistema, então Γ é controlável se, e somente se, x é normalmente acessível a partir de y, para quaisquer $x, y \in G$*

2.3 Ação de Grupos

Com o objetivo estudar os sistemas de controle subordinados à ações grupos, nessa seção, vamos definir este conceito e apresentar alguns exemplos.

Definição 2.17. Dizemos que um grupo de Lie G *age* em uma variedade M se existe uma aplicação diferenciável

$$\theta : G \times M \to M$$

que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\theta(g_1 g_2, x) = \theta(g_1, \theta(g_2, x))$ para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ e qualquer $x \in M$;

(ii) $\theta(1, x) = x$ para todo $x \in M$.

Para cada $g \in G$ consideremos o difeomorfismo

$$\theta_g : M \to M$$

definido por

$$x \mapsto \theta_g(x) = \theta(g, x).$$

Note que a inversa de θ_g é dada por $\theta_{g^{-1}}$.

A aplicação $g \mapsto \theta_g$ é chamada de *ação* de G em M. Qualquer ação é um homomorfismo do grupo G no grupo $Dif(M)$ dos difeomorfismos de M.

Exemplo 2.18. O grupo $G = GL(n, \mathbb{R})$ age no $\mathbb{R}^n$ da seguinte maneira:

$$\theta(g, x) = g \cdot x, g \in GL(n, \mathbb{R}) \text{ e } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dada uma ação θ de G em M, definimos a órbita de um ponto $x \in M$ como sendo o conjunto

$$Gx = \{\theta_g(x) : g \in G\}.$$

Dizemos que a ação θ é transitiva, ou que G age transitivamente em M através de θ se $Gp = M$, para todo $p \in M$, isto é, para todos $p, q \in M$ existe $g \in G$ tal que $\theta(g, p) = q$.

Exemplo 2.19. A ação de $GL(n, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^n$ induz, por restrição, ações de seus subgrupos. No caso do grupo $SL(n, \mathbb{R}) = \{g \in GL(n, R) : \det g = 1\}$ temos que ele age transitivamente em $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Para todo $p_0 \in M$, definimos o conjunto

$$G_{p_0} = \{g \in G : \theta(g, p_0) = p_0\}.$$

Temos que G_{p_0} é um subgrupo fechado de G o qual será denominado de grupo de isotropia do ponto p_0.

Uma variedade que admite uma ação transitiva de um grupo de Lie é chamada espaço homogêneo deste grupo de Lie. Conforme [11], Teorema 3.62, se $\theta : G \times M \to M$ é uma ação transitiva de um grupo de Lie G na variedade M e $p_0 \in G$ então G/H é difeomorfo a M, onde H é o subgrupo de isotropia de p_0. Espaços homogêneos são exatamente variedades que podem ser representadas como quocientes de grupos de Lie.

2.4 Sistemas induzidos

Se G é um grupo de Lie que age em uma variedade M, consideremos um sistema invariante à direita Γ em G. Podemos construir um sistema em M induzido por Γ. É essa a situação que será discutida nessa seção, estabelecendo uma relação entre a controlabilidade de tais sistemas.

Supondo que θ é uma açao do grupo de Lie G na variedade diferenciável M, para qualquer elemento $A \in \mathfrak{g}$ e todo $t \in \mathbb{R}$ temos que $\exp tA \in G$. Assim $\theta_{\exp tA}$ pertence ao grupo dos difeomorfismos de M e, fixando $x \in M$, podemos considerar a curva $\psi : \mathbb{R} \to M$ definida por $\psi(t) = \theta_{\exp tA}(x)$. Observe que $\psi(0) = x$ e que $\frac{d\psi}{dt}|_{t=0}$ é uma aplicação de $\mathbb{R}$ no espaço tangente T_xM. Em particular $\frac{d\psi}{dt}|_{t=0}(1) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\theta_{\exp tA}(x)$ é um vetor em T_xM. Dessa forma, a cada $A \in \mathfrak{g}$ podemos associar um campo de vetores $\theta_*(A)$ em M definindo

$$\theta_*(A)(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\theta_{\exp tA}(x).$$

Usaremos a notação $\theta_*(\mathfrak{g})$ para denotar o conjunto $\{\theta_*(A) : A \in \mathfrak{g}\}$.

Definição 2.20. Um sistema de campos de vetores $\mathcal{F}$ em M é chamado *subordinado a uma ação* θ se $\mathcal{F}$ está contido em $\theta_*(\mathfrak{g})$. Se $\mathcal{F} = \theta_*(\Gamma)$ para algum subconjunto $\Gamma \subset \mathfrak{g}$ dizemos que $\mathcal{F}$ é *induzido* por Γ.

2.5 Sistemas Afim

A ação linear de grupos lineares $G \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ no espaço $\mathbb{R}^n$ induz sistemas que são bilineares, ou mais geralmente, sistemas afim. Este último será visto mais detalhadamente nesta seção.

Seja $Af(n,\mathbb{R})$ o grupo das transformações afim inversíveis de $\mathbb{R}^n$. Se $T \in Af(n,\mathbb{R})$ existem únicos $X \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ e $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $T(v) = Xv + x$. Desta forma podemos identificar cada elemento de $Af(n,\mathbb{R})$ com um elemento $(X,x) \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ munido do produto semi-direto

$$(X_1,x_1)(X_2,x_2) = (X_1X_2, X_1(x_2) + x_1)$$

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ torna-se um grupo, o qual pode ser identificado com o grupo afim $Af(n,\mathbb{R})$. Usando a notação clássica de produto semi-direto temos então que

$$Af(n,\mathbb{R}) = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^n.$$

O grupo afim $Af(n,\mathbb{R})$ pode também ser visto como um subgrupo de $GL(n+1,\mathbb{R})$. Isto é feito identificando cada elemento $(X,x) \in Af(n,\mathbb{R})$ com a matriz $\overline{X} = \begin{pmatrix} X & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})$.

A álgebra de Lie $\mathfrak{af}(n,\mathbb{R})$ do grupo afim é representada pelas matrizes

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}^n.$$

Para obtermos o subgrupo a um parâmetro em $Af(n,\mathbb{R})$ correspondente a $\overline{A} \in \mathfrak{af}(n,\mathbb{R})$, usamos a expansão em série de Taylor para $\exp t\overline{A}$. Temos

$$\exp t\overline{A} = \begin{pmatrix} e^{tA} & \frac{e^{tA}-Id}{A}a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $\frac{e^{tA}-Id}{A} = tId + \frac{t^2}{2}A + \ldots + \frac{t^n}{n!}A^{n-1} + \ldots$

Mergulhando o $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ como o hiperplano

$$\{(v_1,\ldots,v_n,1)^t \in \mathbb{R}^{n+1} : (v_1,\ldots,v_n)^t \in \mathbb{R}^n\}$$

obtemos uma aplicação afim do $\mathbb{R}^n$ definida por um elemento $X \in Af(n, \mathbb{R})$ da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Xv + x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Com isso o grupo $Af(n, \mathbb{R})$ que, com as devidas identificações, é um subgrupo de $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$, age no $\mathbb{R}^n$ como segue:

$$\theta_{\overline{X}}(v) = Xv + x, \text{ com } \overline{X} \in Af(n, \mathbb{R}) \text{ e } v \in \mathbb{R}^n.$$

Assim temos os fluxos correspondentes no $\mathbb{R}^n$ dados por

$$\begin{aligned} \theta_{\exp t\overline{A}}(v) &= \exp t\overline{A} \cdot \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{tA} & \frac{e^{tA} - Id}{A} a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{tA} v + \frac{e^{tA} - Id}{A} a. \end{aligned}$$

Os campos induzidos no $\mathbb{R}^n$ são então:

$$\theta_*(\overline{A})(v) = \frac{d}{dt}|^{t=0} \theta_{\exp t\overline{A}}(v) = Av + a, v \in \mathbb{R}^n.$$

Para exemplificar esta situação podemos tomar G como um subgrupo conexo de $Af(n, \mathbb{R})$ que age transitivamente no $\mathbb{R}^n$, por exemplo, o grupo das transformações afim inversíveis do $\mathbb{R}^n$ que preservam orientação:

$$Af_+(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} X & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : X \in \mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

ou o grupo

$$E(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} X & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : X \in \mathrm{SO}(n, \mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Para vermos que realmente o grupo $E(n, \mathbb{R})$ age transitivamente em $\mathbb{R}^n$, consideremos $u, v \in \mathbb{R}^n$, ambos não nulos.

Sejam $u_1 = \frac{u}{\|u\|}, v_1 = \frac{v}{\|v\|} \in S^{n-1}$, ou seja, u_1 e v_1 pertencem a esfera unitária em $\mathbb{R}^n$.

Sabemos que existe $X \in \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ tal que $Xu_1 = v_1$. Dessa forma temos que

$$Xu = X(\|u\|u_1) = \|u\|Xu_1 = \|u\|v_1 = \frac{\|u\|}{\|v\|}v$$

.

Assim,

$$Xu + x = v,$$

para algum $x \in \mathbb{R}^n$ se, e somente se

$$\frac{\|u\|}{\|v\|}v + x = v$$

que é equivalente a

$$x = \left(1 - \frac{\|u\|}{\|v\|}\right) v.$$

Portanto, se $X \in \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ é tal que $Xu_1 = v_1$ e tomarmos $x = \left(1 - \frac{\|u\|}{\|v\|}\right) v$, então:

$$(X, x)u = Xu + x = \frac{\|u\|}{\|v\|}v + \left(1 - \frac{\|u\|}{\|v\|}\right) v = v.$$

No caso em que $u = 0$, basta tomar $x = v$ e $X \in \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ qualquer.

Já quando $v = 0$, tomamos $X = Id$ e ainda $x = -u$. Assim, fica provado que $E(n, \mathbb{R})$ age transitivamente em $\mathbb{R}^n$.

Agora, para ver que $Af_+(n, \mathbb{R})$ também age transitivamente em $\mathbb{R}^n$ basta observarmos que $Af_+(n, \mathbb{R}) \subset E(n, \mathbb{R})$, logo é evidente o resultado.

Nestes casos temos que as álgebras de Lie correspondentes são respectivamente:

$$\mathfrak{af}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \rtimes \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), a \in \mathbb{R}^n \right\}$$

e

$$\mathfrak{e}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \rtimes \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : A \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}), a \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Um sistema

$$\Gamma = \left\{ \overline{A} + \sum_{i=1}^{m} u_i \overline{B}_i : u = (u_1, ..., u_m) \in U \subset \mathbb{R}^m \right\} \subset \mathfrak{g} \tag{2.1}$$

no grupo de Lie G, onde $\overline{A} = \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\overline{B}_i = \begin{pmatrix} B_i & b_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $i = 1, ..., m$; induz no $\mathbb{R}^n$, o seguinte sistema afim:

$$\dot{x} = Ax + a + \sum_{i=1}^{m} u_i \overline{B}_i ; u = (u_i, ..., u_m) \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

Capítulo 3

Controlabilidade

Neste capítulo vamos apresentar alguns resultados básicos onde serão estabelecidas condições para a controlabilidade de um sistema Γ em grupos de Lie.

Na primeira seção apresentaremos condições básicas para a controlabilidade de sistemas. Começaremos pelo Teorema (3.1) que relaciona a controlabilidade de um sistema Γ em G e do sistema induzido por Γ em G.

Na segunda seção mostraremos uma das principais condições para ocorrência da controlabilidade: mostraremos, no Terorema (3.7), que um sistema Γ é controlável se, e somente se, $1 \in \text{int}\mathbb{A}$.

3.1 Condições básicas para controlabilidade

Nesta seção vamos apresentar resultados que nos dão condições básicas para a controlabilidade de sistemas.

O teorema a seguir é um resultado que relaciona a controlabilidade do sistema Γ em G e do sistema induzido por Γ em M.

Teorema 3.1. *Sejam θ uma ação de um grupo de Lie conexo G em uma variedade diferenciável M, Γ um sistema invariante à direita em G e $\mathcal{F} = \theta_*(\Gamma)$ o sistema induzido em M por Γ. Então:*

(i) Para todo ponto $x \in M$, o conjunto de atingibilidade de $\mathcal{F}$ a partir de x é

$$\mathbb{A}_{\mathcal{F}}(x) = \theta_{\mathbb{A}_\Gamma}(x) = \{\theta_g(x) : g \in \mathbb{A}_\Gamma(x)\};$$

(ii) Se a ação θ é transitiva e Γ é controlável em G, então $\mathcal{F}$ é controlável em M;

(iii) $\mathcal{F}$ é controlável em M se, e somente se, o semigrupo $\mathbb{A}_\Gamma$ age transitivamente em M.

Demonstração: Para demonstrar(i), seja $g(t)$ uma trajetória de Γ. Então $\theta_{g(t)}(x)$ é uma trajetória de $\mathcal{F}$ em M pois, se restringirmos t a um subintervalo onde $g(t)$ é a trajetória de um único campo $A \in \Gamma$ então $g(t) = \exp tA$ neste intervalo. Daí $\theta_{g(t)}(x) = \theta_{\exp tA}(x)$ é uma trajetória do campo $\theta_*(A) \in \mathcal{F}$ mostrando que $\theta_{\mathbb{A}_\Gamma}(x) \in \mathbb{A}_{\mathcal{F}}(x)$. Por outro lado, se $y \in \mathbb{A}_{\mathcal{F}}(x)$, sem perda de generalidade podemos supor $y = x(T)$, onde $T \geqslant 0$ e $x(\cdot)$ é uma trajetória de um campo $\theta_*(A)$ com $A \in \Gamma$. Mas a trajetória de $\theta_*(A)$ por x é $x(t) = \theta_{\exp tA(x)}$. Logo $y = x(T) = \theta_{\exp TA(x)}$ e $\exp tA \in \mathbb{A}_\Gamma$. Portanto $y \in \mathbb{A}_{\mathcal{F}}(x)$.

Sendo Γ controlável então, pelo ítem (i), $\mathbb{A}_{\mathcal{F}}(x)$ coincide com a órbita da ação θ em M através de x. Como a ação é transitiva temos que $\mathbb{A}_{\mathcal{F}}(x) = M$ para todo $x \in M$. Portanto $\mathcal{F}$ é controlável em M, o que mostra (ii).

Suponhamos agora $\mathcal{F}$ controlável em M, ou seja $\mathbb{A}_{\mathcal{F}}(x) = M$ para todo $x \in M$. Pelo ítem (i) concuímos que $\{\theta_g(x) : g \in \mathbb{A}_\Gamma\} = M$. Logo, dado $y \in M$ temos que $y = \theta_g(x)$ para algum $g \in \mathbb{A}_\Gamma$. Portanto $\mathbb{A}_\Gamma$ age transitivamente em M. Por outro lado se $\mathbb{A}_\Gamma$ age transitivamente em M então

$$\{\theta_g(x) : g \in \mathbb{A}_\Gamma\} = M \text{ qualquer que seja } x \in M.$$

Então $\mathbb{A}_{\mathcal{F}}(x) = M$ para todo $x \in M$ e daí $\mathcal{F}$ é controlável em M. ■

Podemos aplicar o teorema acima nos sistemas afim descritos no capítulo anterior. Assim, pelo Teorema (3.1), o sistema (2.2) será controlável no $\mathbb{R}^n$ sempre que (2.1) for controlável em G.

Teorema 3.2. *Seja* Γ *um sistema invariante à direita em um grupo de Lie* G*. Se* Γ *é controlável em um grupo de Lie* G *então o grupo* G *é conexo.*

Demonstração: Se Γ é um sistema controlável em G então $\mathbb{A}(x) = G, \forall x \in G$. Pela Proposição (2.7) temos que $\mathbb{A}(x)$ é conexo. Logo G é conexo. ■

Pelo teorema anterior temos que uma das condições necessárias para a controlabilidade é a conexidade do grupo de Lie em que se está trabalhando. Em vista disso, no que se segue, todos os grupos de Lie considerados serão conexos.

Teorema 3.3. *Uma condição necessária para que um subconjunto* $\Gamma \subset \mathfrak{g}$ *seja controlável é que* Γ *gere* $\mathfrak{g}$ *como sua álgebra de Lie.*

Demonstração: Se $\mathbb{A} = G$ então $\mathcal{O} = G$ e daí $\text{Lie}\mathcal{O} = \text{Lie}G = \mathfrak{g}$. Pelo Lema(2.6) temos que $\text{Lie}\mathcal{O} = \text{Lie}\Gamma$. Assim, $\text{Lie}\Gamma = \mathfrak{g}$. ■

O teorema acima nos dá uma condição para a controlabilidade. Tal condição é usualmente citada como condição do posto. Em geral, a condição do posto não é sufuciente para a controlabilidade, mas é equivalente à acessibilidade pois, em decorrência do Teorema (2.13), se $\text{Lie}\Gamma = \mathfrak{g}$ então o conjunto de atingibilidade $\mathbb{A}$ tem interior não vazio no grupo G.

Teorema 3.4. *Um subconjunto* $\Gamma \subset \mathfrak{g}$ *é acessível na identidade (e portanto em qualquer ponto de* G*) se, e somente se,* $\text{Lie}\Gamma = \mathfrak{g}$.

Demonstração: Se o conjunto $\mathbb{A}$ tem interior não vazio em G então o mesmo acontece para a órbita $\mathcal{O}$. Tomemos então x no interior dessa órbita. Neste caso, o espaço tangente a $\mathcal{O}$ em x coincide com o espaço tangente a G em x e, pelo Lema(2.6), $\mathcal{O}(x)$ é uma variedade integral maximal da distribuição $\text{Lie}(\Gamma)$. Portanto $\mathfrak{g} = \text{Lie}(\Gamma)$. Por outro lado, se $\text{Lie}\Gamma = \mathfrak{g}$ então, pelo Teorema(2.13), $\text{int}\mathbb{A} \neq \emptyset$, isto é, é acessível na identidade. ■

Teorema 3.5. *Se G é conexo, um subconjunto $\Gamma \subset \mathfrak{g}$ é controlável se, e somente se, valem as seguintes condições:*

(i) O conjunto de atingibilidade $\mathbb{A}$ é um subgrupo de G;

(ii) Lie(Γ)= $\mathfrak{g}$.

Demonstração: Suponhamos inicialmente que que Γ seja um sistema controlável, ou seja, $\mathbb{A}(x) = G$ para qualquer $x \in G$. Em particular $\mathbb{A} = \mathbb{A}(1) = G$ é subgrupo de G e, pelo Teorema(2.13), temos Lie$\Gamma = \mathfrak{g}$.

Reciprocamente, suponhamos válidas as condições (i) e (ii) acima e tomemos $A \in \Gamma$. Como $\mathbb{A}$ é subgrupo de G então $\exp(tA)$ bem como seu inverso $\exp(-tA)$ estão em $\mathbb{A}$ para todo $t \geqslant 0$. Assim o conjunto de atingibilidade $\mathbb{A}$ coincide com a órbita $\mathcal{O}$ do sistema Γ. Como Lie(Γ)= $\mathfrak{g}$ e $\mathcal{O}$ é a variedade maximal da distribuição Lie(Γ) passando por 1 temos $\mathcal{O} = G$. Portanto $\mathbb{A} = G$, ou seja, Γ é controlável. ■

Proposição 3.6. *Um sistema Γ invariante à direita é controlável em um grupo de Lie conexo G se, e somente se, é controlável a partir da identidade, isto é, $\mathbb{A} = G$.*

Demonstração: Basta aplicar o Lema(2.7) o qual afirma que $\mathbb{A}(x) = \mathbb{A}(1)x$.De fato, se Γ é controlável e $x \in G$ temos que $\mathbb{A}(x) = G$ e, em particular, $\mathbb{A}(1) = \mathbb{A} = G$. Por outro lado, se $\mathbb{A} = G$ então, como $\mathbb{A}(x) = \mathbb{A}x$ temos $\mathbb{A}(x) = \mathbb{A}x = Gx = G$. Portanto Γ é controlável. ■

Dessa forma vimos que para garantir a controlabilidade de um sistema invariante à direita em um grupo de Lie conexo, basta garantir a controlabilidade na identidade.

3.2 Condição do posto

Um subconjunto $\Gamma \subset \mathfrak{g}$ é dito ter posto máximo se a condição do posto é válida, isto é, se Lie$\Gamma = \mathfrak{g}$.

Em um sistema de posto máximo, o conjunto de atingibilidade $\mathbb{A}$ tem interior não vazio em G. Mas em geral, a identidade 1 pode não pertencer ao interior de $\mathbb{A}$. Quando isso acontece obtemos uma das principais condições para a ocorrência da controlabilidade.

Teorema 3.7. *Um sistema invariante à direita Γ em um grupo de Lie conexo G é controlável se, e somente se, o elemento identidade 1 pertencer ao interior de $\mathbb{A}$.*

Demonstração: Se Γ é controlável então $\mathbb{A} = G$ e assim $1 \in \text{int}\mathbb{A}$.
Por outro lado, seja $U = \text{int}\mathbb{A}$ e suponhamos que $1 \in U$. Conforme [11], Proposição 3.18, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ consiste de todos os produtos com n parcelas de elementos de U. Pelo Lema(2.7), $\mathbb{A}$ é semigrupo de G e portanto $U^n \subset \mathbb{A}$ qualquer que seja o número natural n. Assim $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n \subset \mathbb{A}$ e temos que $\mathbb{A} \subset G \subset \mathbb{A}$. Portanto $G = \mathbb{A}$ e Γ é controlável em G. ■

A seguinte proposição é fundamental pois nos mostra que no estudo da controlabilidade de sistemas de posto máximo podemos substituir o conjunto de atingibilidade $\mathbb{A}$ pelo seu fecho.

Teorema 3.8. *Se G é um grupo de Lie conexo e o conjunto de atingibilidade $\mathbb{A}$ de um sistema invariante à direita Γ de posto máximo é denso então Γ é controlável em G.*

Demonstração: Consideremos o sistema $-\Gamma = \{-A : A \in \Gamma\}$ cujas trajetórias são as trajetórias de Γ percorridas no sentido contrário. O conjunto de atingibilidade de $-\Gamma$ é

$$\mathbb{A}_{-\Gamma} = \{\exp(-t_k A_k \cdots \exp(-t_1 A_1) : A_i \in \Gamma, t_i \geqslant 0, k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{A}^{-1}$$

Como o sistema $-\Gamma$ também tem posto máximo, pois Lie($-\Gamma$)= Lie(Γ)=$\mathfrak{g}$, seu conjunto de atingibilidade tem interior não vazio e assim contém um aberto O_1. Por outro lado, como Γ tem posto máximo existem $x \in G$ e uma vizinhança $O(x)$ de x

contida em $\mathbb{A}$. O fecho do conjunto de atingibilidade a partir de x também é denso, isto é, fecho($\mathbb{A}(x)$)=fecho($\mathbb{A}x$)=G. Assim existe um ponto $y \in \mathbb{A}(x) \cap O_1$. Temos que $y \in \mathbb{A}x$ e portanto $yx^{-1} \in \mathbb{A}$. Levando em consideração que $O(x) \subset \mathbb{A}$ e o fato de $\mathbb{A}$ ser semigrupo de G obtemos que a vizinhança $O(y) = yx^{-1}O(x)$ do ponto y está contida em $\mathbb{A}$. Mas $y \in O_1 \subset \mathbb{A}^{-1}$ implica que $y^{-1} \in \mathbb{A}$ e a vizinhança da identidade $O(1) = y^{-1}O(y)$ está contida em $\mathbb{A}$. Portanto $1 \in int\mathbb{A}$ e então, pelo Teorema(3.7), Γ é controlável em G. ■

O lema a seguir nos mostrará que o conjunto formado por todas as famílias de campos finitas e transitivas formam um conjunto aberto e denso em $\mathfrak{g}$.

Sussman trabalhando em um contexto mais geral, mostrou esse resultado no Teorema (5.1) de [15]. Nós reformulamos o teorema para um caso particular, trabalhando apenas em álgebras de Lie de dimensão finita, pois é esse o caso em que será necessária a sua utilização no decorrer do trabalho.

Considere uma subálgebra de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ e r um inteiro positivo. Seja $\mathcal{F}$ a família de todos os subconjuntos finitos com r elementos de $\mathfrak{g}$ que geram $\mathfrak{g}$ como álgebra de Lie. Nestas condições temos:

Lema 3.9. *$\mathcal{F}$ é um subconjunto aberto e denso de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times ... \times \mathfrak{g}$ (r vezes).*

Demonstração: Considere uma família com r elementos $\{A_1, A_2, ..., A_r\}$. Considere agora uma coleção formada pelos elementos A_i, i=1,...,k, junto com todos os possíveis colchetes entre eles, $[A_1, A_2], [A_1, A_3]$,... e ainda com todos os colchetes iterados $[A_1, [A_1, A_2]], ...$ até termos os colchetes com r elementos, teremos então a coleção $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_m\}$

Seja $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ uma base para $\mathfrak{g}$. Cada elemento da coleção descrita acima é uma matriz cujas entradas são polinômios das entradas de $A_1, A_2, ..., A_r$.

Escrevendo

$$C_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + ... + a_{n1}\alpha_n$$

$$C_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + ... + a_{n2}\alpha_n$$

$$\vdots$$

$$C_m = a_{1m}\alpha_1 + a_{2m}\alpha_2 + ... + a_{nm}\alpha_n$$

donde formamos uma matriz $B_{n\times m}$, onde m é o número de elementos da coleção dada. Logo:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Calculando todos os possíveis determinantes dos blocos $n \times n$ da matriz B obteremos polinômios, que chamaremos p_i, das entradas de $A_1, A_2, ..., A_r$.

O conjunto de elementos $A_1, A_2, ..., A_r$ que a coleção gerada por eles contém menos que n elementos independentes é dada pela anulação dos polinômios p_i acima.

Mas se tais determinantes se anulam, esses são exatamente os elementos que não geram $\mathfrak{g}$ e, dessa forma, se tomarmos o complementar do conjunto formado pelas raízes dos polinômios $p_i = 0$ forma um conjunto aberto e denso de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times ... \times \mathfrak{g}$. ■

Para exemplificar o resultado anterior, vamos tomar o caso particular do $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Exemplo 3.10. Considere $A, B \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ sendo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} d & e \\ f & -d \end{pmatrix}.$$

Dessa forma,

$$[A, B] = \begin{pmatrix} bf - ce & 2(ae - bd) \\ 2(cd - af) & ce - bf \end{pmatrix}.$$

Se tomarmos como base para o $\mathfrak{s}l(2, \mathbb{R})$ os elementos

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

podemos escrever:

$$A = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3;$$

$$B = d\alpha_1 + e\alpha_2 + f\alpha_3;$$

$$[A, B] = (bf - ce)\alpha_1 + 2(ae - bd)\alpha_2 + 2(cd - af)\alpha_3.$$

Obtendo assim a matriz

$$C = \begin{pmatrix} a & d & bf - ce \\ b & e & 2(ae - bd) \\ c & f & 2(cd - af) \end{pmatrix}$$

Temos que os elementos A, B e $[A, B]$ geram $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ como álgebra de Lie se não forem raiz do polinômio dado por:

$$\det C = 0,$$

ou melhor,

$$b^2f^2 + c^2e^2 + 4(acde + abdf - a^2ef - bcd^2) - 2bcef = 0 \tag{3.1}$$

Mas observe que $b^2f^2 + c^2e^2 + 4(acde + abdf - a^2ef - bcd^2) - 2bcef$ é exatamente o determinante do colchete $[A, B]$, ou seja, A, B e $[A, B]$ geram $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ como álgebra de Lie se, e somente se, o $\det[A, B] \neq 0$.

Portanto, pelo resultado acima, o conjunto de todos elementos da forma $(A, B, [A, B]) \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ que não são raízes do polinômio dado em (3.1) formam um conjunto aberto e denso em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Capítulo 4

Controlabilidade de Sistemas afim

O objetivo deste capítulo é determinar condições necessárias e sufucientes para a controlabilidade de sistemas de controloe da forma:

$$\frac{dx}{dt} = (A_0x + a_0) + \sum_{i=0}^{m} u_i(t)(A_ix + a_i), \tag{4.1}$$

onde $A_0, ..., A_m$ são são matrizes $n \times n$ com entradas reais e $a_0, ..., a_m$ são vetores em $\mathbb{R}^n$. Os controles $u_1, ..., u_m$ são funções reais do tempo t definida no intervalo $[0, \infty)$.

Estes sistemas são uma generalização de sistemas bilineares, que são bem mais estudados que sistemas deste tipo.

Na primeira seção deste capítulo apresentaremos alguns resultados preliminares, na direção do teorema principal do trabalho. Nessa seção mostraremos o Teorema (4.5) que diz que Se $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ é uma família de campos vetoriais lineares em V que é transitiva em $V - \{0\}$ então existe uma subfamília finita $\overrightarrow{\mathcal{F}_0}$ de $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ que também é transitiva em $V - \{0\}$.

Na segunda seção, vamos trabalhar principalmente com conjuntos que são deixados invariantes por transformações afim, bem como por sua projeção linear. Apresentaremos alguns resultados, dentre os quais destaca-se o Lema (4.10), onde mostramos que se $\mathcal{F}$ é uma família de campos vetoriais afim tal que $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ é transitiva em $V - \{0\}$ e $\mathcal{F}$ não tem pontos fixos em V então, para cada $x \in V$, $S(\mathcal{F})(x)$

é ilimitada.

Na terceira seção apresentaremos o resultado principal de nosso trabalho, o Teorema (4.13). Em tal teorema mostraremos que seja $\mathcal{F}$ uma família de campos vetoriais afim em V tal que $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ é transitivo em $V - \{0\}$ e $\mathcal{F}$ não tem ponto fixo em V então $\mathcal{F}$ é transitiva em V.

Na quarta seção vamos fazer aplicações do Teorema (4.13). Vamos apresentar também um contra-exemplo mostrando que a condição da transitividade de $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ não é necessária para a transitividade de $\mathcal{F}$.

4.1 Resultados preliminares

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados auxiliares, que nos fornecerão ferramentas para a demonstração do teorema principal do trabalho.

Começaremos com um lema, que pode ser encontrado de forma mais geral em [18], mas que aqui será enunciado e demonstrado, segundo nossas necessidades, em um espaço vetorial de dimensão finita.

Nesta seção consideraremos V um espaço com produto interno e denotemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal produto interno. Ainda, chamaremos de S^n a esfera unitária em V.

Consideremos $A \in \text{End}(V)$ e $\text{sp}(A)$ o espectro de A, ou seja, o conjunto de todos os autovalores de A. Seja A^* aplicação adjunta de A relativa ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Com essas notações temos:

Lema 4.1. *Seja T um operador auto-adjunto em um espaço vetorial de dimensão finita e $\beta = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ uma base ortonormal constituída de autovetores de T. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ os autovalores de H associados respectivamente a cada e_i. Suponhamos que $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant ... \leqslant \lambda_n$. Seja $v_0 \in V$ com $\|v_0\| = 1$ tal que $\lambda_0 = \langle T(v_0), v_0 \rangle = \inf\{\langle T(v), v \rangle : v \in V, \|v\| = 1\}$.*
Então λ_0 é autovalor de T, mais precisamente $\lambda_0 = \lambda_1$.

Demonstração: Suponhamos que $v_0 = a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n$. Observe que $\langle T(e_i), e_i\rangle = \langle \lambda_i e_i, e_i\rangle = \lambda_i$, para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Como $\langle T(v), v\rangle \geqslant \langle T(v_0), v_0\rangle$ sempre que $\|v\| = 1$ temos que, se $v = b_1e_1 + b_2e_2 + ... + b_ne_n$, então

$$b_1^2\lambda_1 + b_2^2\lambda_2 + ... + b_n^2\lambda_n \geqslant a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + ... + a_n\lambda_n, \tag{4.2}$$

sempre que $b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2 = 1$.

Se $a_1 = 1$ o resultado é imediato. Suponha então que $a_1 \neq 1$.

Se $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n$ então $\langle T(v), v\rangle = b_1^2\lambda_1+b_2^2\lambda_2+...+b_n^2\lambda_n = (b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)\lambda_1 = \lambda_1$ e assim temos o resultado.

Caso contrário existe $i \geqslant 1$ tal que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_i \leqslant \lambda_{i+1} \leqslant ... \leqslant \lambda_n. \tag{4.3}$$

Suponhamos que $a_1 = a_2 = ... = a_i = 0$. Neste caso $\lambda_1 = \lambda_1(a_{i+1}^2 + ... + a_n^2) < a_{i+1}^2\lambda_1 + ... + a_n^2\lambda_n$, o que é um absurdo. Assim existe $j \in \{1, ..., i\}$ tal que $a_j \neq 1$ e $a_j \neq 0$. Logo

$$a_j^2 = 1 - \sum_{k=1,k\neq j}^{n} a_k^2 > 0. \tag{4.4}$$

Note que se $a_{i+1} = a_{i+2} = ... = a_n = 0$ temos $v_0 = a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ie_i$ e então $\langle T(v_0), v_0\rangle = a_1^2\lambda_1 + a_2^2\lambda_2 + ... + a_i^2\lambda_i = \lambda_1$.

Caso contrário, existe $l \in \{i + 1, ..., n\}$ tal que $a_l \neq 0$. Assim temos por (4.7) que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_l^2 - \frac{a_j^2}{m} > 0$ logo

$$a_1^2\lambda_1 + ... + (a_l^2 + \frac{a_j^2}{m})\lambda_j + ... + a_i^2\lambda_i + ... + (a_l^2 - \frac{a_j^2}{m})\lambda_l + ... + a_n^2\lambda_n <$$

$$< a_1^2\lambda_1 + ... + a_j^2\lambda_j + \frac{a_j^2}{m}\lambda_l + ... + a_i^2\lambda_i + ... + a_l^2\lambda_l - \frac{a_j^2}{m}\lambda_l + ... + a_n^2\lambda_n =$$

$$= a_1^2\lambda_1 + ... + a_j^2\lambda_j + ... + a_i^2\lambda_i + ... + a_l^2\lambda_l + ... + a_n^2\lambda_n.$$

o que é um absurdo. ■

Agora, vamos enunciar um lema técnico, que será usado diretamente na demonstração do próximo resultado.

Lema 4.2. *Seja V um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal produto interno, se $\langle Xx, x \rangle \geqslant 0$, para todos $x \in S^n$ e $X \in \overrightarrow{\mathcal{F}}$ então o exterior de S^n é invariante por $\overrightarrow{\mathcal{F}}$.*

Demonstração: Inicialmente observe que se $X \in \overrightarrow{\mathcal{F}}$ e $\langle Xx, x \rangle \geqslant 0$, $\forall x \in S^n$, então $\langle Xy, y \rangle \geqslant 0$ para todo y em V onde $y \neq 0$. Isto pois

$$\langle Xy, y \rangle = \|y\|^2 \langle X \tfrac{y}{\|y\|}, \tfrac{y}{\|y\|} \rangle \geqslant 0, \text{ se } y \neq 0$$

.

Tomemos então y no exterior de S^n e $X \in \overrightarrow{\mathcal{F}}$. Consideremos a função real

$$f(t) = \langle e^{tX} y, e^{tx} y \rangle.$$

Temos que $f'(t) = 2\langle X e^{tX} y, e^{tX} y \rangle$ e então pela observação inicial $f'(t) \geqslant 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Com isto f é uma função crescente para $t \geqslant 0$.

Como $f(0) = \langle 0, 0 \rangle = \|y\|^2 > 1$ então $\|e^{tX} y\| > 1, \forall t \geqslant 0$. Isto prova o lema. ■

O resultado a seguir diz respeito a transitividade de uma família de campos vetoriais lineares.

Lema 4.3. *Se $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ é uma família de campos vetoriais lineares em V, então $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ é transitivo em $V - \{0\}$ se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:*

(a)$S^n \subset S(\overrightarrow{\mathcal{F}})(x)$, para cada $x \in S^n$ e,

(b)existem X_1 e X_2 em $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ tais que

$$\text{Min sp}(\frac{1}{2}(X_1 + X_1^*) < 0 \qquad e \qquad \text{Max sp}(\frac{1}{2}(X_2 + X_2^*) > 0$$

Demonstração: Suponhamos que $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ seja transitiva em em $V - \{0\}$. Neste caso temos que mostrar apenas que a condição (b) é satisfeita pois a condição (a) claramente se verifica.

Existem $X_1 \in \overrightarrow{\mathcal{F}}$ e $x_1 \in S^n$ tais que $\langle X_1 x_1, x_1 \rangle < 0$ pois, caso não existisse, o Lema (4.2) nos garante que o exterior de S^n seria invariante por $\overrightarrow{\mathcal{F}}$, o que contraria nossa hipótese sobre a transitividade. Então o valor mínimo da função

$$F : S^n \to \mathbb{R}$$

definida por

$$F(x) = \langle X_1 x, x \rangle$$

é menor que zero. Assim, como claramente temos que $(X_1 + X_1^*)$ é auto adjunto, pelo Lema (4.1) temos que tal mínimo é igual ao Min sp$(\frac{1}{2}(X_1 + X_1^*)$. Usaremos argumento análogo para mostrar a existência de X_2, tal que Max sp$(\frac{1}{2}(X_2 + X_2^*) > 0$. (nesse segundo caso o interior é que ficaria invariante e isso geraria a contradição ao supor que não exista X_2)

Reciprocamente, suponhamos que as condições (a) e (b) são satisfeitas. Utilizando o mesmo argumento do parágrafo anterior, existem x_1 e x_2 em S^n tais que $\langle X_1 x_1, x_1 \rangle < 0$ e $\langle X_2 x_2, x_2 \rangle > 0$. Obviamente o mesmo vale para todo λx_1 e λx_2, com λ positivo.

Se S^n_r denota a esfera de raio r em V então, pelo que foi feito acima, temos que para cada $r > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $\{\exp t X_1 (r+\varepsilon) x_1 : t \leqslant 0\}$ e $\{\exp t X_2 (r-\varepsilon) x_2 : t \geqslant 0\}$ interceptam a esfera S^n_λ, para todo λ, tal que $r - \varepsilon \leqslant \lambda \leqslant r + \varepsilon$. Como para cada $x \in V$ e cada $\lambda > 0$ temos que $S(\overrightarrow{\mathcal{F}})(\lambda x) = \lambda S(\overrightarrow{\mathcal{F}})(x)$, segue que $S^n_\lambda \subset S(\overrightarrow{\mathcal{F}})(x)$ para cada $x \in S^n_\lambda$. Logo, para cada $r > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $A_{r,\varepsilon} = \{x : r - \varepsilon \leqslant \|x\| \leqslant r + \varepsilon\}$ está contido em $S(\overrightarrow{\mathcal{F}})(x)$ para cada $x \in A_{r,\varepsilon}$. Isso mostra que $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ é transitivo em $V - \{0\}$, como queríamos. ∎

Vimos no Capítulo 2 que um ponto $y \in G$ é chamado de Γ-normalmente acessível a partir de um ponto $x \in G$ se existem elementos $X_1, X_2, ...X_k \in \Gamma$ e $t \in \mathbb{R}^k$, com coordenadas positivas $t_1, t_2, ..., t_k$, tais que a aplicação $F(t_1, t_2, ..., t_k) = \exp(t_k X_k) \cdots \exp(t_1 X_1) x$, vista como uma aplicação de $\mathbb{R}^k$ em G, satisfaz as seguintes condições:

(i)$F(t) = y$;

(ii) O posto da diferencial $dF|_t$ é igual à dimensão de G.

Para o próximo lema, vamos denotar por $\mathcal{F}_{x,y}$ a subfamília finita $X_1, ..., X_k$ descrita acima. É claro que y permanece no interior de $S(\mathcal{F}_{x,y})(x)$.

Lema 4.4. *Seja $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ uma família de campos vetoriais lineares transitivos em $V - \{0\}$. Se K é um compacto em $V - \{0\}$, então existe uma subfamília finita $\overrightarrow{\mathcal{F}_0}$ de $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ tal que $K \subset S(\overrightarrow{\mathcal{F}_0})(x)$, para todo $x \in K$.*

Demonstração: Como $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ é transitivo em $V - \{0\}$, segue do Teorema (2.16) que, para cada $x \in K$, todo ponto y de K é normalmente acessível a partir de x por elementos de $\overrightarrow{\mathcal{F}}$. Tomemos $\overline{x}$ um ponto de K. Como K é compacto, existem $y_1, y_2, ..., y_m$ em K tais que $K \subset S(\bigcup_{i=1}^{m} \overrightarrow{\mathcal{F}_{\overline{x},y_i}})(\overline{x})$. Consideremos agora $\overrightarrow{\mathcal{F}_1} = \bigcup_{i=1}^{m} \overrightarrow{\mathcal{F}_{\overline{x},y_i}}$. É claro que $\overrightarrow{-\mathcal{F}}$ também é transitivo em $V - \{0\}$. Por argumento idêntico concluímos que existe uma subfamília finita $\overrightarrow{\mathcal{F}_2}$ de $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ tal que $K \subset S(\overrightarrow{-\mathcal{F}_2})(\overline{x})$. Seja agora $\overrightarrow{\mathcal{F}_0} = \overrightarrow{\mathcal{F}_1} \bigcup \overrightarrow{\mathcal{F}_2}$. Dessa forma $K \subset S(\overrightarrow{\mathcal{F}_0})(x)$ para cada $x \in K$ e concluímos a demonstração. ■

Depois desses lemas estamos aptos a enunciar e demonstrar o primeiro teorema deste capítulo, que será utilizado na demonstração do teorema principal deste trabalho.

Teorema 4.5. *Seja $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ uma família de campos vetoriais lineares em V que é transitiva em $V - \{0\}$. Então existe uma subfamília finita $\overrightarrow{\mathcal{F}_0}$ de $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ que também é transitiva em $V - \{0\}$.*

Demonstração: Seja $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ transitiva em $V - \{0\}$. Pelo Lema (4.3) isto é equivalente às condições (a) e (b) de tal lema. Agora, pelo Lema (4.4), existe uma subfamília finita $\overrightarrow{\mathcal{F}_1}$ de $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ tal que $S^n \subset S(\overrightarrow{\mathcal{F}_1})(x)$ para cada $x \in S^n$.

Sejam X_1 e X_2 elementos de $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ que satisfazem (b) do Lema 4.3. Assim $\overrightarrow{\mathcal{F}_0} =$

$\overrightarrow{\mathcal{F}_1}\bigcup\{X_1, X_2\}$ satisfazem as condições (a) e (b) do Lema 4.4 e portanto $\overrightarrow{\mathcal{F}_0}$ é transitivo em $\mathbb{R}^n - \{0\}$. ■

Corolário 4.6. *Seja $\mathcal{F}$ uma família de campos vetoriais afim em V tal que:*

(i) $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ é transitivo em $V - \{0\}$;

(ii) não existe $x \in V$ tal que $X(x) = 0$, para todo $X \in \mathcal{F}$.
Então existe uma subfamília finita $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{F}$ que também satisfaz (i) e (ii).

Demonstração: O conjunto de todos os campos vetoriais afim $Af(V)$ é um espaço vetorial de dimensão finita. Por esse motivo, se $\mathcal{F}_1$ é uma base para o espaço gerado por $\mathcal{F}$, então $\mathcal{F}_1$ é um conjunto finito. Mais ainda, para cada $x \in V$ existe um elemento X em $\mathcal{F}_1$ tal que $X(x) \neq 0$.

Seja $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ tal que $\overrightarrow{\mathcal{F}_2}$ é uma subfamília finita de $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ que é transitiva em $V - \{0\}$. Desse modo $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_1 \bigcup \mathcal{F}_2$ é finito e satisfaz (i) e (ii), o que completa a demonstração.

■

Observação 4.7. Se $\mathcal{F}$ é uma família de campos afim em V que satisfazem a condição (ii) do Corolário 4.6 dizemos que $\mathcal{F}$ não tem *ponto fixo* em V.

4.2 Conjuntos invariantes

.

Nesta seção trabalharemos com conjuntos invariantes por tranformações afim.

Os próximos resultados são a respeito das famílias de tranformações afim.

Para o primeiro resultado consideraremos que se $Q \subset V$, então A(Q) é definido de modo que, $v \in A(Q)$ se, e somente se, $v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i q_i$ onde $q_1, ..., q_p$ são elementos em Q e $\lambda_1, ..., \lambda_p$ são escalares tais que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$.

Também denotaremos por $\overrightarrow{A(Q)}$ o espaço tangente de $A(Q)$. Assim $v \in \overrightarrow{A(Q)}$ se, e somente se, $v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i q_i$ para $q_1, ..., q_p$ em Q e $\lambda_1, ..., \lambda_p$ escalares tais que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 0$.

Lema 4.8. *Seja $\mathcal{T}$ uma família de transformações afim que deixa invariante o subconjunto $Q \subset V$. Então,*

(a) $A(Q)$ é invariante sob $\mathcal{T}$;

(b) $\overrightarrow{A(Q)}$ é invariante por $\overrightarrow{\mathcal{T}}$.

Demonstração: Seja $v \in A(Q)$. Assim $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i q_i$, onde $q_i \in Q$ e $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Queremos mostrar que se $(A, a) \in \mathcal{T}$ então $(A, a)v \in A(Q)$. De fato, temos:

$(A, a)v = (A, a)(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i q_i) = A(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i q_i) + a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A(q_i) + (\sum_{i=1}^{m} \lambda_i)a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (A(q_i) + a) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (A, a) q_i$.

Como Q é invariante pelos elementos de $\mathcal{T}$, $(A, a)q_i \in Q$ e ainda $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Logo, pela definição do conjunto $A(Q)$ temos que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (A, a) q_i \in A(Q)$ e portanto a família $\mathcal{T}$ deixam o conjunto $A(Q)$ invariante, o que mostra (a).

Agora seja $v \in \overrightarrow{A(Q)}$. Nesse caso $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i q_i$, onde $q_i \in Q$ e $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0$. Queremos mostrar que se $A \in \overrightarrow{\mathcal{T}}$ então $Av \in \overrightarrow{A(Q)}$.

De fato,

$Av = A(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i q_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A(q_i)$

Como Q é invariante por $\mathcal{T}$, $Aq_i \in Q$. Além disso, como $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0$ então, pela definição do conjunto $\overrightarrow{A(Q)}$, temos que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i A q_i \in \overrightarrow{A(Q)}$. Portanto a família $\overrightarrow{\mathcal{T}}$ deixa o conjunto $\overrightarrow{A(Q)}$ invariante.

■

Lema 4.9. *Seja $\mathcal{T}$ uma família de tranformações afim e seja K um subconjunto compacto de V com interior não vazio. Se $\mathcal{T}(K) \subset K$, então existe um número B (dependendo de K) tal que $\|\overrightarrow{T}\| \leqslant B(K)$, para todo $\overrightarrow{T} \in \overrightarrow{\mathcal{T}}$.*

Demonstração: Seja w um ponto de interior de K. Então, $K-w$ contém a origem em seu interior. Seja $\varepsilon > 0$ tal que a bola de raio ε centrada na origem B_ε está contida em $K-w$. Se $T \in \mathcal{T}$ então, $T = \overrightarrow{T} + a$, onde $a \in V$, e desse modo, para todo $x \in K$ temos que $\overrightarrow{T}(x-w) = \overrightarrow{T}(x) - \overrightarrow{T}(w) = \overrightarrow{T}(x) + a - (\overrightarrow{T}(w) + a) = T(x) - T(w)$. Logo, $\overrightarrow{T}(x-w) = [T(x) - T(w)] \in K - T(w)$.

Em particular, $\overrightarrow{T}(B_\varepsilon) \subset K - T(w)$. Se $A = sup\{\|x-y\| : x \in K, y \in K\}$ então quando tomamos $B(K) = \dfrac{A}{\varepsilon}$ temos o resultado. ■

O próximo lema trata das órbitas dos campos vetoriais afim. Mostraremos que, sob certas condições, a órbita do semigrupo gerado por uma família de campos afim não é limitada.

Antes definiremos fecho convexo de um conjunto dado. Seja $K \subset V$, definiremos o fecho convexo (ou envoltória convexa) de K, e denotaremos por $CO(K)$, como o menor subconjunto convexo de V que contem K, ou equivalentemente, a interseção de todos os convexos que contem K.

Lema 4.10. *Seja $\mathcal{F}$ uma família de campos vetoriais afim tal que*

(a) $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ é transitiva em $V - \{0\}$; e,

(b) $\mathcal{F}$ não tem pontos fixos em V.

Então, para cada $x \in V$, $S(\mathcal{F})(x)$ é ilimitada.

Demonstração: Suponhamos que exista $x \in V$ tal que $S(\mathcal{F})(x)$ seja limitada. Seja K o fecho de $S(\mathcal{F})(x)$. Então K é compacto e invariante sob o semigrupo $S(\mathcal{F})$. Pelo Lema 4.8, $\overrightarrow{A(K)}$ é invariante sob $\overrightarrow{S((F))}$.

Observe que se $X \in \mathcal{F}$ então $X(x) = \overrightarrow{X}x + a$, onde $\overrightarrow{X} \in End(V)$ e $a \in V$. Assim $(\exp tX)x = \exp t\overrightarrow{X}(x + \int_0^t \exp(-\theta A) a d\theta)$, para todo $x \in V$. Dessa forma fica claro ver que $\overrightarrow{S(\mathcal{F})} = S(\overrightarrow{\mathcal{F}})$, e desde que $\overrightarrow{A(K)}$ é um espaço vetorial, segue da nossa hipótese de transitividade de $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ que $\overrightarrow{A(K)} = V$ ou que $\overrightarrow{A(K)} = \{0\}$. Como $\overrightarrow{A(K)} = A(K) - x$ temos que $\overrightarrow{A(K)} = \{0\}$ implica que $S(\mathcal{F})(x) = \{x\}$, o que contraria a hipótese (b). Portanto $A(K)$ é igual a V e daí $\mathrm{CO}(K)$ tem interior não vazio em V. Mas então, pelo Lema 4.9 os elementos de $S(\mathcal{F})$ são uniformemente limitados na norma o que exclui a transitividade de $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ em $V - \{0\}$. Assim, é impossível para $S(\mathcal{F})(x)$ ser limitada, e nossa prova está terminada. ■

Observação 4.11. Fica evidente que sob as hipóteses do Lema 4.10 as órbitas $S(-\mathcal{F})$ também não são limitadas.

4.3 Controlabilidade de sistemas afim

Nesta seção enunciaremos e demonstraremos o teorema principal deste trabalho. Nele, mostraremos que seja $\mathcal{F}$ uma família de campos vetoriais afim em V tal que $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ é transitivo em $V - \{0\}$ e $\mathcal{F}$ não tem ponto fixo em V então $\mathcal{F}$ é transitiva em V.

Mas antes, definiremos uma função mostraremos algumas propriedades a seu respeito.

Consideremos $\mathcal{F}$ uma família de campos vetoriais afim em V e $w \in V$. Para cada $\lambda > 0$ considere a aplicação

$$h_{\lambda,w} : V \to V, \text{ definida por}$$

$$h_{\lambda,w}(x) = w + \lambda(x - w), \text{ para todo } x \in V.$$

Lema 4.12. *A função $h_{\lambda,w}$ definida acima é um difeomorfismo e $dh_{\lambda,w}.X.h^{-1}{}_{\lambda,w}(x) = \overrightarrow{X}(x - w) + \lambda X(w)$, para cada $X \in \mathcal{F}$.*

Demonstração: Primeiramente queremos mostrar que $h_{\lambda,w}$ é uma bijeção. Assim, observemos que, como $\lambda > 0$, se $h_{\lambda,w}(x_1) = h_{\lambda,w}(x_2)$ então

$$w + \lambda(x_1 - w) = w + \lambda(x_2 - w) \Longrightarrow x_1 - w = x_2 - w \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Logo, para cada λ e cada w fixos, $h_{\lambda,w}$ é injetora.

Ainda, se $w_1 \in V$, temos que $[w + (\frac{1}{\lambda})(w_1 - w)] \in V$ e dessa forma $h_{\lambda,w}([w + (\frac{1}{\lambda})(w_1 - w)]) = w + \lambda\{[w + (\frac{1}{\lambda})(w_1 - w)] - w\} = w + \lambda w + w_1 - w - \lambda w = w_1$ o que significa que, para cada λ e w fixos, $h_{\lambda,w}$ é sobrejetora.

Assim $h_{\lambda,w}$ é uma bijeção e podemos facilmente verificar que $h_{\lambda,w}(w) = w$ e

$$h^{-1}_{\lambda,w}(x) = w + (\frac{1}{\lambda}).(x - w) \tag{4.5}$$

Dessa forma fica claro que $h_{\lambda,w}$ é um difeomorfismo.

Agora vamos mostrar a segunda parte do lema. Continuando com λ e w fixos e tomando $X \in \mathcal{F}$ consideremos a aplicação

$$\Phi : \mathbb{R} \to V, \text{ definida por}$$

$$\Phi(t) : h_{\lambda,w}. \exp tX.h^{-1}_{\lambda,w}.$$

Note que a aplicação Φ é um grupo de difeomorfismos a 1-parâmetro. De fato, se $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, então

$$\Phi(t_1 + t_2) = h_{\lambda,w}. \exp(t_1 + t_2)X.h^{-1}{}_{\lambda,w} = h_{\lambda,w}. \exp t_1X. \exp t_2X.h^{-1}_{\lambda,w} =$$

$$= (h_{\lambda,w}. \exp t_1X.h^{-1}_{\lambda,w}).(h_{\lambda,w}. \exp t_2X.h^{-1}_{\lambda,w}) = \Phi(t_1)\Phi(t_2)$$

Para cada $x \in V$, o gerador infinitesimal desse grupo a 1-parâmetro é dado por $dh_{\lambda,w}.X.h^{-1}_{\lambda,w}(x)$.

Supondo que $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ temos que $h_{\lambda,w}(x_1, x_2, ..., x_n) = (w_1 + \lambda(x_1 - w_1), ..., w_n + \lambda(x_n - w_n))$. Assim,

$$dh_{\lambda,w} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial(w_i + \lambda(x_i - W_i))}{\partial x_j} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda x \tag{4.6}$$

Se $X(x) = Ax + a$, com $a \in V$ e $A \in Gl(n, \mathbb{R})$, então substituindo tal expressão de X junto com (4.5), (4.6) e usando a linearidade de A temos que,

$$dh_{\lambda,w}.X.h^{-1}{}_{\lambda,w}(x) = dh_{\lambda,w}.X.(w + (\frac{1}{\lambda})(x-w)) =$$

$$= dh_{\lambda,w}(A(w + (\frac{1}{\lambda})(x-w))) = \lambda(A(w + (\frac{1}{\lambda})(x-w))) =$$

$$= \lambda(Aw + \frac{1}{\lambda}A(x-w) + a) = A(x-w) + \lambda(A(w) + a) = \overrightarrow{X}(x-w) + \lambda X(w),$$

ou seja,

$$dh_{\lambda,w}.X.h^{-1}{}_{\lambda,w}(x) = \overrightarrow{X}(x-w) + \lambda X(w). \tag{4.7}$$

Como queríamos demonstrar. ■

Sempre que $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ for transitiva e $\mathcal{F}$ não tem pontos fixos, vimos no Corolário (4.6) que é possivel tomar $\mathcal{F}^k$ uma subfamília finita de $\mathcal{F}$ talque $\overrightarrow{\mathcal{F}^k}$ é transitiva em $V - \{0\}$ e ainda $\mathcal{F}^k$ não tenha ponto fixo em V.

Se denotarmos por $\mathcal{F}^k_{\lambda,w}$ a família $dh_{\lambda,w}.\mathcal{F}^k.h^{-1}_{\lambda,w}$ então, pela expressão dada em (4.7), fica claro que $lim_{\lambda\to 0}\overrightarrow{F^k_{\lambda,w}} = \overrightarrow{\mathcal{F}_w{}^k}$, onde $\overrightarrow{\mathcal{F}^k_w}$ é definido por $\overrightarrow{\mathcal{F}^k_w}(x) = \overrightarrow{\mathcal{F}^k}(x-w)$. $\overrightarrow{\mathcal{F}^k_w}$ é transitiva em $V - \{w\}$ pois $\overrightarrow{\mathcal{F}^k}$ é transitivo em $V - \{0\}$. Podemos assim convencionar que $\overrightarrow{\mathcal{F}^k_{0,w}} = \overrightarrow{\mathcal{F}^k_w}$.

Usando as notações acima vamos enunciar e demonstrar o resultado principal deste trabalho.

Teorema 4.13. *Seja $\mathcal{F}$ uma família de campos vetoriais afim em V tal que*

(a) $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ é transitivo em $V - \{0\}$ e

(b) $\mathcal{F}$ não tem ponto fixo em V.

Nessas condições, $\mathcal{F}$ é transitiva em V.

Demonstração: Assumindo que $\mathcal{F}$ satisfaz as condições a e b, provaremos que isso implica que todas as órbitas de $\mathcal{F}$ e $-\mathcal{F}$ são abertas em V, o que nos dará a transitividade de $\mathcal{F}$, segundo o Lema (1.37).

Se S^n_w é a esfera de raio 1 centrada em w, então $S^n_w \subset S(\overrightarrow{\mathcal{F}^k_{0,w}})(x)$, para cada $x \in S^n_w$, onde $\overrightarrow{\mathcal{F}^k_{0,w}}$ é a família descrita anteriormente. Pelo Lema (3.9) temos que o conjunto formado por todas as famílias finitas e transitivas é um conjunto aberto na álgebra de Lie, mas $\overrightarrow{\mathcal{F}^k_w}$ é finita e transitiva, logo $\overrightarrow{\mathcal{F}^k_w}$ pertence a tal conjunto. Como $lim_{\lambda\to 0}\overrightarrow{\mathcal{F}^k_{\lambda,w}} = \overrightarrow{\mathcal{F}^k_w}$ e $\overrightarrow{\mathcal{F}^k_w}$ está num conjunto aberto, temos que existe $\lambda > 0$ tal que $\overrightarrow{\mathcal{F}^k_{\lambda,w}}$ é finito e transitivo, o que nos garante que $S^n_w \subset S(\overrightarrow{\mathcal{F}^k_{\lambda,w}})(x)$ para cada $x \in S^n_w$.

Se $X \in \mathcal{F}$, então $dh_{\lambda,w}.X.h^{-1}_{\lambda,w}(x) = 0$ implica que $X(h^{-1}_{\lambda,w}(x)) = 0$. Por esse motivo $\mathcal{F}_{\lambda,w}$ não tem pontos fixos. Além disso, $\overrightarrow{\mathcal{F}_{\lambda,w}}$ é igual a $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ centrado em w. Portanto o Lema 4.10 é aplicável e concluímos que as órbitas de $\mathcal{F}_{\lambda,w}$ e $-\mathcal{F}_{\lambda,w}$ não são limitadas.

Observemos que para cada x e y em $B^n_w = \{x : \|x - w\| \leqslant 1\}, y \in S(\mathcal{F}_{\lambda,w})(x)$. De fato, sendo $S(\mathcal{F}_{\lambda,w})(x)$ ilimitada, ela intercepta S^n_w. Usando argumento análogo temos que $S(-\mathcal{F}_{\lambda,w})(x)$ também intercepta S^n_w. Como $S^n_w \subset S(\mathcal{F}_{\lambda,w})(x)$, para cada $x \in S^n_w$, temos que $y \in S(\mathcal{F}_{\lambda,w})(x)$. Equivalentemente, $B^n_w \subset S(\mathcal{F}_{\lambda,w})(w) \cap S(-\mathcal{F}_{\lambda,w})(w)$.

Para finalizar a demonstração basta reinterpretarmos os fatos acima em termos de $S(\mathcal{F})$. Sabemos que $S(\mathcal{F}_{\lambda,w}) = h_{\lambda,w}.S(\mathcal{F}).h^{-1}_{\lambda,w}$, dessa forma $h^{-1}_{\lambda,w}.B^n_w.h_{\lambda,w} \subset S(\mathcal{F})(w) \cap S(-\mathcal{F}(w)$.

Mas $h^{-1}_{\lambda,w}.B^n_w.h_{\lambda,w} = h^{-1}_{\lambda,w}.B^n_w = (\frac{1}{\lambda})B^n_w$. Assim $(\frac{1}{\lambda})B^n_w \subset S(\mathcal{F})(w) \cap S(-\mathcal{F}(w)$. Portanto as órbitas $S(\mathcal{F})(w)$ e $S(-\mathcal{F})(w)$ são todas abertas e isso implica transitividade.

■

4.4 Aplicações

Nesta seção vamos fazer alguma aplicações do Teorema (4.13). Começaremos com uma aplicação em uma situação bem particular.

Exemplo 4.14. Considere $A, B \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ tal que $\det[A,B] < 0$ e ainda o determinante de A seja não nulo, ou seja, A é inversível.

Pelo Teorema (4.20) de [19] podemos concluir que o sistema associado ao sistema $\overrightarrow{\mathcal{F}} = \{A, uB : u \in \mathbb{R}\}$ é controlável em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Consideremos agora um sistema afim $\mathcal{F} = \{(A,a), u(B,b) : u \in \mathbb{R}\}$, onde $a, b \in \mathbb{R}^2$, cuja projeção linear é $\overrightarrow{\mathcal{F}}$.

Queremos, utilizando o Teorema (4.13) estabelecer condições sobre a e b para a controlabilidade do sistema $\mathcal{F}$.

Para isso, vamos encontrar os possíveis pontos fixos do sistema dado. Observe que um ponto é dito ponto fixo de uma família de campos se todos os campos se anulam nesse ponto simultaneamente.

Assim, o ponto $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é ponto fixo da família $\mathcal{F}$ se $(A,a)x = (B,b)x = (0,0)$. Dessa forma, x é ponto fixo de $\mathcal{F}$ se, e somente se, $Ax + a = Bx + b = 0$. Neste caso temos que $Ax = -a$ e $Bx = -b$. Como A é inversível, seja A^{-1} sua inversa, assim temos que $x = A^{-1}(-a)$, donde tiramos que $b = B(A^{-1}(a))$.

Portanto, um ponto $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é ponto fixo da família $\mathcal{F} = \{(A,a), u(B,b) : u \in \mathbb{R}\}$ se, e somente se, $b = B(A^{-1}(a))$.

Para podermos aplicar o Teorema (4.13) queremos que $\mathcal{F}$ não tenha pontos fixos, logo se na família dada, $b \neq B(A^{-1}(a))x$ temos que $\mathcal{F}$ não deixa ponto fixo em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ e portanto, pelo Teorema (4.13), $\mathcal{F}$ é controlável em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Observação 4.15. Fica claro que se B for inversível ao invés de A, procedemos de maneira análoga para encontrarmos os possíveis pontos fixos de $\mathcal{F}$ e assim podermos determinar condições de a e b para que $\mathcal{F}$ seja controlável.

Observemos que, quando o sistema $\mathcal{F} = \{(A,a), (B,b)\}$ possui pontos fixos o posto da algebra de Lie gerada pelos campos $\mathcal{F}$ é igual a 3. De fato:

Se $\mathcal{F} = (A,a), (B,b)$ tal que $\overrightarrow{\mathcal{F}} = \{A, B\}$ é transitiva e que $\mathcal{F}$ tenha pontos fixos então o sistema é não controlável. Pelo Teorema 4.6 de [22] devemos ter $\dim(\mathrm{Lie}(\{(A,a);(B,b)\})) < 5$.

Como $\dim(\mathrm{Lie}(\{A;B\})) = 3$ (pois o sistema linear é controlável), então

$$\dim\mathrm{Lie}(\{(A,a);(B,b)\}) = 3 \text{ ou } \dim\mathrm{Lie}(\{(A,a);(B,b)\}) = 4.$$

No entanto se $\dim(\mathrm{Lie}(\{(A,a);(B,b)\})) \geqslant 4$ recaímos nas condições do Lema 4.2 de [22]. Assim, a Proposição 4.5 desse mesmo artigo nos garante que

$$\dim(\mathrm{Lie}(\{(A,a);(B,b)\})) = 5,$$

o que é uma contradição. Portanto devemos ter

$$\dim\mathrm{Lie}(\{(A,a);(B,b)\}) = 3.$$

Com isto o semigrupo de $S(\mathcal{F})$ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ gerado $\mathcal{F}$ possui interior vazio.

No caso em que $\mathcal{F}$ não possui pontos fixos o posto é igual a 5 e e o semigrupo possui interior não vazio. Isto motiva a seguinte questão: será que quando o interior do semigrupo é não vazio e a projeção linear de $S(\mathcal{F})$ é controlável o sistema afim S é controlável? A resposta a essa questão é afirmativa, conforme foi demonstrado por Rocio, Santana e Verdi em [22].

Vamos agora aplicar o que foi feito no Exemplo 4.14 acima em um caso particular. Então tomemos, em $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que $[A,B] = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e portanto $\det[A,B] = -4 < 0$. Assim, pelo Teorema 4.20 de [19] que o sistema de controle associado ao sistema $\overrightarrow{\mathcal{F}} = \{A, uB : u \in \mathbb{R}\}$ é controlável em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Consideremos agora um sistema afim $\mathcal{F} = \{(A,a); u(B,b) : u \in \mathbb{R}\}$ onde

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

são elementos de $\mathbb{R}^2$. O sistema afim $\mathcal{F}$ é tal que sua projeção linear é $\overrightarrow{\mathcal{F}}$.

Como B é inversível, pelo exemplo feito anteriormente temos que se $\mathcal{F}$ tem pontos fixos então $b = B(A^{-1}(a))$. Mas, se $b = B(A^{-1}(a))$ temos:

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

o que significa que se $\mathcal{F}$ tem pontos fixos então

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Assim, veja que para a e b que satisfaz (4.8) temos que $(A, a)(z_1, z_2) = 0 \Rightarrow$

$$(z_1 + a_1, z_2 - a_2) = (0, 0) \Rightarrow z_1 = -a_1 \tag{4.9}$$

e

$$z_2 = a_2. \tag{4.10}$$

Logo $(B, b)(z_1, z_2) = (z_2 - a_2, -z_1 - a_1)$, que por (4.8), (4.9) e (4.10) temos $(B, b)(z_1, z_2) = (0, 0)$

Portanto, sempre que tomamos $a = (a_1, b_1)$ e $b \neq (-a_2, -a_1)$ temos que o sistema $\mathcal{F}$ não tem ponto fixo, assim, pelo Teorema (4.13), $\mathcal{F}$ é controlável em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Exemplo 4.16. Agora, neste exemplo, vamos mostrar que a condição de A ou B ser invertível (como feito no exemplo 4.14) não é necessária.

Para isso, tomemos, em $\mathrm{sl}(2, \mathbb{R})$ as matrizes $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Temos que $[A, B] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e portanto $\det[A, B] = -1 < 0$. Assim, pelo Teorema 4.20 de [19] que o sistema de controle associado ao sistema $\overrightarrow{\mathcal{F}} = \{A, uB : u \in \mathbb{R}\}$ é controlável em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Consideremos agora um sistema afim $\mathcal{F} = \{(A, a); u(B, b) : u \in \mathbb{R}\}$ onde

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

são elementos de $\mathbb{R}^2$. O sistema afim $\mathcal{F}$ é tal que sua projeção linear é $\overrightarrow{\mathcal{F}}$.

Neste caso, nem A nem B são inversíveis, por isso não podemos aplicar o mesmo método do Exemplo 4.14. Porém, mesmo assim podemos determinar condições sobre a e b para que o sistema $\mathcal{F}$ não tenha pontos fixos. Observe:

Dado $x = (x_1, x_2)$ temos que x é um ponto fixo de $\mathcal{F}$ se, e somente se, $(A, a)x = (B, b)x = 0$ ou seja, $(x_2 + a_1, a_2) = (b_1, x_1 + b_2) = (0, 0)$. Mas observe que se a e b são tais que $a_2 \neq 0$ ou $b_1 \neq 0$ então o sistema $\mathcal{F}$ não tem ponto fixo, e assim pelo Teorema (4.13), $\mathcal{F}$ é controlável em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Essa outra aplicação mostra que a transitividade de $\mathcal{F}$ em $V - \{0\}$ não implica a transitividade de $\mathcal{F}_r$ no produto semi-direto $V * G$.

Exemplo 4.17. Seja $V = \mathbb{R}^2$ e seja $G = (\mathrm{GL}_2^+)(\mathrm{V})$ o grupo de todas as matrizes não singulares de V com determinante positivo. Tomemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b$, então definimos $\mathcal{F}$={(A, a); (B, b)}.

Observe que dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ temos que $(A, a)(x, y) = (x + 1, -2y)$ e $(B, b)(x, y) = (y + 1, -x)$. Assim, claramente temos que $(A, a)(x, y)$ e $(B, b)(x, y)$ não se anulam simultaneamente, o que significa que $\mathcal{F}$ não deixa ponto fixo em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Além disso,

$$\exp tA = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \text{ e } \exp tB = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

e desse modo $S(\overrightarrow{\mathcal{F}})$ é o espaço gerado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \right\}$$

é o próprio $\mathbb{R}^2$, o que quer dizer que $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ é transitivo. Assim, pelo Teorema (4.13), $\mathcal{F}$ é transitivo em V. No entanto, o sistema $\mathcal{F}_r$ de campos vetoriais invariantes à direita no produto semi-direto de V e o subgrupo de Lie G de (GL)(V), não é transitivo em $V * G$ porque o semigrupo gerado por $\{\exp tA : t \geqslant 0\}$ e $\{\exp tB : t \geqslant 0\}$ está contido no conjunto de elementos de G com determinante menor ou igual a 1.

Para finalizar observemos que, conforme mostra o próximo exemplo, a condição de controlabilidade da projeção linear de uma família de campos afim não é necessária para a controlabilidade do sistema afim.

Exemplo 4.18. Considere o sistema constante de controles em $\mathbb{R}^2$ dado por $\dot{x} = v$, onde $v \in \mathbb{R}^2$. A projeção linear desse sistema claramente não é controlável, embora o sistema afim o seja. Para verificar essa ultima afirmação consideremos $x, y \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0\}$. Queremos mostrar que existe uma trajetória cujo ponto inicial é x e que passa por y.

De fato, para cada $x \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ a trajetória de x por v é a semireta $x + tv$, com $t \geqslant 0$. Considere os campos dados pelos vetores $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$, bem como $-e_1$ e $-e_2$.

Se $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ vamos analisar alguns casos:

1º caso: x e y são L.D.

Este primeiro caso deve ser subdividido em mais casos.

a)x e y não têm coordenadas nulas e x_1 tem mesmo sinal de y_1 e x_2 tem mesmo sinal de y_2.

Aqui, tomando o campo $v = x$ existe $t_0 > 0$ tal que $y = x + t_0 v$ ou $y = x + t_0(-v)$.

b)x e y não têm coordenadas nulas e x_1 tem sinal oposto de y_1 e x_2 tem sinal oposto de y_2.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $x_1, x_2 > 0$ e $y_1, y_2 < 0$, os outros casos são resolvidos de forma análoga.

Aqui, aplicamos o campo $-e_2$ para o tempo $t_0 = x_2 - y_2$ obtendo assim o ponto $x + t_0(-e_2)$. Em seguida aplicamos o campo $(-e_1)$ em $x + t_0(-e_2)$ no tempo $t_1 = x_1 - y_1$ e dessa forma, a concatenação de trajetórias dada por $x + t_0(-e_2) + t_1(-e_1)$ une os pontos x e y.

c) $x_1 = y_1 = 0$

Neste caso, aplicamos para algum $t_0 > 0$ o campo e_1 em x obtendo o ponto $x + t_0 e_1$.

Agora, sem perda de generalidade, suponhamos $x_2 > y_2$. Assim, tomamos $t_1 = x_2 - y_2$ e aplicamos o campo $-e_2$ em $x + t_0 e_1$ obtendo $(x + t_0 e_1) + t_1(-e_2)$. Em seguida aplicamos o campo $-e_1$ para um tempo $t_2 = t_0$ obtendo a concatenação de trajetórias $(x + t_0 e_1) + t_1(-e_2) + t_2(-e_1)$ que une os pontos x e y.

d) $x_2 = y_2 = 0$

Aqui procederemos de forma análoga ao caso anterior, com o cuidado de aplicar o campo e_1 no lugar de e_2 e vice versa.

2º caso: x e y são L.I.

Neste caso, sejam os campos $v_x = x$ e $v_y = y$. Assim, começamos aplicando o campo v_y em x para um tempo $t_0 = 1$ obtendo assim $x + t_0 v_y$. Em seguida, aplicamos o campo $-v_x$ em $x + t_0 v_y$ para o tempo $t_1 = 1$, obtendo assim $(x + t_0 v_y) + t_1(-v_x)$, e essa concatenação de trajetórias une os pontos x e y, como queríamos.

Bibliografia

[1] BURNSIDE, W.: **The theory of groups of finite order.** Cambridge Univ. Press, Cambrigde, 1911.

[2] CARRUTH, J., A. HILDEBRANT and R. J. KOCH: **The theory of topological semigroups.** Vol.1, Marcel Dekker, New York, 1983.

[3] DOBBINS, J. G.: **Well-bounded semigroup in locally compact groups.** Math. Z., 148, 155-167, 1976.

[4] DUGUNDJI, J.: **Topology.** Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1968.

[5] HILGERT, J; HOFMANN,K. H. e LAWSON, J. D.: **Lie groups, convex cones, and semigroups.** Oxford University Press, 1989.

[6] HOFMANN,K. H.: **A history of topological and analytical semigroups.** Semigroup Forum 61, 1-25, 2000.

[7] HOFMANN,K. H.: **Lie Algebras with subalgebras of codimension one.** Illinois J. Math 9, 636-643, 1965.

[8] MONTGOMERY, D., Zippin, L.: **Topological transformation groups.** New York, Interscience 1955.

[9] PONTRYAGIN, L.S.: **Topological groups.** New York, Gordon and Breach, 1966.

[10] SAN MARTIN, L.A.B.: **Álgebras de Lie.** Editora da Unicamp, 1999.

[11] WARNER, F.W.: **Foundations of diferentiable manifolds and Lie groups.** Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1971.

[12] BONNARD, B., JURDJEVIC, V., KUPKA, I., SALLET, G.: **Transitivity of families of invariant vector fields on the semidirect products os Lie groups.** Transactions of AMS 271(N. 2), 1982.

[13] JURDJEVIC, V., SALLET, G.: **Controlability of affine systems.** Toronto, Canada, 1982.

[14] JURDJEVIC, V., SALLET, G.: **Controlability properties of affine systems.** SIAM J. Control and Optimization, Vol. 22 N. 3, 1984.

[15] SUSSMANN, H., **Some preperties of vector fields not altered by small perturbations.** J. Differential Equations, 20 (1976), pp.292-315.

[16] JURDJEVIC, V. e KUPKA, T.: **Control systems subordinated to a group action acessibility.** Journal of Differential Equations, vol 39 (1981), 180-211.

[17] KALMAN R. E., HO, Y. C., NARENDRA, K. S. **Controlability of linear dynamical systems** Contrib. Diff. Equations, 1: 186-213, 1963.

[18] YOSIDA, KOSAKU., **Functional Analysis.** Berlin : Springerverlag, 1968.

[19] MARTINS, C. A., **Controlabilidade de Sistemas bilineares bidimensionais**. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Maringá, 2006.

[20] KOBAYASHI, S. e NOMIZU, K: **Foundations of differential geometry** Jonh Wiley & Sons, New York, 1963.

[21] SACHKOV, YU L.: **Controllability of invariant systems on Lie groups and homogeneous spaces**, ISAS, 1999.

[22] ROCIO, O. G., SANTANA, A. J., and VERDI, M. J., **Semigroups of Affine Groups, Controllability of Affine Systens and Affine Bilinear Systens in** $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$. Submetido.