Centro de Ciências Exatas
Universidade Estadual de Maringá
Programa de Pós-Graduação em Matemática
(Mestrado)

A Influência dos Subgrupos Minimais na Estrutura de Grupos Finitos

por Wilian Francisco de Araujo

Orientadora: Irene Naomi Nakaoka

Maringá - PR
2009

A INFLUÊNCIA DOS SUBGRUPOS MINIMAIS NA ESTRUTURA DE GRUPOS FINITOS

Wilian Francisco de Araujo

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Prof^{a}.Dr^{a}. Irene Naomi Nakaoka - UEM ....
(Orientadora)

Prof^{a}.Dr^{a}.Aline Gomes da Silva Pinto - UnB ....

Prof.Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes - UEM ....

Maringá

Fevereiro, 2009

Dedico este trabalho a Deus.

À minha família.

Agradecimentos

Seria difícil em poucas palavras dizer tudo o que gostaria. Mas agradeço primeiramente à Deus, por sua infinita misericórdia, fidelidade, por ter me dado fôlego de vida para estar neste momento tão especial em minha vida.

À minha família, em especial a minha esposa, pelo apoio, incentivo, compreensão e paciência.

Quero agradecer a minha orientadora, Profª Irene Naomi Nakaoka, pela excelente orientação, apoio e pela sábia maneira de passar seu conhecimento.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UEM, pela ajuda, amizade e conhecimento que me proporcionaram.

Sou grato aos meus amigos de mestrado, pela força e amizade dadas nos momentos difíceis.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Esta dissertação é baseada no artigo *"The influence of minimal subgroups of focal subgroups on the structure of finite groups"* de X. Y. Guo e K. P. Shum, onde investigam a influência da existência de complementos dos subgrupos minimais de um grupo G finito na estrutura do grupo. Um resultado de Guo e Shum, diz que se p é o menor divisor primo da ordem de um grupo finito G e P um p-subgrupo de Sylow de G e se todo subgrupo minimal de $P \cap G'$ tem um complemento em $N_G(P)$, então G é p-nilpotente. Neste trabalho apresentamos a demonstração deste resultado e damos algumas aplicações deste teorema.

Abstract

This dissertation is based on article *"The influence of minimal subgroups of focal subgroups on the structure of finite groups"* of X. Y. Guo and K. P. Shum, where they investigate the influence of the existence of complement of the minimal subgroups of a finite group G in the structure of the group. One result of Guo and Shum, says that if p is the smallest prime divisor of the order of a finite group G and P a Sylow p-subgroup of G and if every minimal subgroup of $P \cap G'$ has a complement in $N_G(P)$, then G is p-nilpotent. In this work we will present the demonstration of this result, and give some applications of this theorem.

Índice de Notações

$\emptyset$	conjunto vazio.
Imf	imagem do conjunto A pela f.
$ker\ (f)$	núcleo da função f.
(m, n)	máximo divisor comum entre m e n.
$[x, y]$	$x^{-1}y^{-1}xy$
$\langle X \rangle$	subgrupo gerado por X.
N^G	$\langle N^g \mid g \in G \rangle$
$[X, Y]$	$\langle [x, y]\ :\ x \in X\ \text{ e }\ y \in Y \rangle$
$\gamma_n(G)$	n-ésimo termo da série central inferior de G.
$\phi(G)$	subgrupo de Frattini de G.
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{Z}_n$	$\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.
$\|A\|$	cardinalidade do conjunto A.
$\mathcal{O}(x)$	$\{gx :\ g \in G\}$.
$K \times H$	produto direto de K por H.
$N_G(H)$	normalizador de H em G.
$O_\pi(G)$	π-subgrupo normal maximal de G.
$[G : H]$	índice do subgrupo H em G.
$\circ(x)$	ordem do elemento x.
$A \subset B$	A é um subconjunto próprio de B.
$A \subseteq B$	A é um subconjunto de B.

$Aut(G)$	grupo de automorfismos de G.
$C_G(H)$	centralizador de H em G.
G'	subgrupo derivado de G.
$G^{(n)}$	n-ésimo termo da série derivada de G.
$\frac{G}{H}, G/H$	grupo quociente de G por um subgrupo normal H.
$GF(p^n)$	corpo finito com p^n elementos.
$GL(n, F)$	grupo das matrizes não singulares sobre F.
$GL(V, F)$	grupo dos operadores lineares não singulares de V.
$H \lhd G$	H é um subgrupo normal de G.
$H \;\; char \;\; G$	H é um subgrupo característico de G.
$H \ltimes K$	produto semi-direto de K por H.
H^x	$\{x^{-1}hx \; : \; h \in H\}$.
Hx	$\{hx \; : \; h \in H\}$.
HxK	$\{hxk \mid h \in H, \; k \in K\}$
x^y	$y^{-1}xy$.
XY	$\{xy \; : \; x \in X \text{ e } y \in Y\}$.
$Z(G)$	centro de G.
D_n	grupo diedral de ordem $2n$.
$\pi(G)$	conjunto dos divisores primos de $\lvert G \rvert$.

Sumário

Introdução

Nosso trabalho é dedicado ao estudo da influência dos subgrupos minimais que possuem complementos na estrutura de grupos finitos. A existência de complementos para algumas famílias de subgrupos nos fornece muitas informações sobre sua estrutura. Por exemplo, P. Hall provou em 1937 que um grupo finito G é solúvel se, e somente se, todos os subgrupos de Sylow de G possuem complemento em G. Ainda em 1937 P. Hall, investigando a classe dos grupos finitos em que todos os subgrupos possuem complementos (tais grupos são chamados grupos complementados), provou em [6] que esta classe é exatamente a classe dos grupos supersolúveis finitos com subgrupos de Sylow abelianos elementares.

Em 1997 Ballester-Bolinches e Guo provaram em [1] que um grupo G é complementado se, e somente se, todo subgrupo minimal de G possui um complemento em G. Isto mostra que o fato dos subgrupos minimais de um grupo possuírem complementos tem uma influência sobre a estrutura do grupo.

O objetivo deste trabalho é apresentar as demonstrações de alguns resultados de Guo e Shum [4], como o seguinte teorema.

Teorema. *Sejam G um grupo finito e p um divisor primo da ordem de G e P um p-subgrupo de Sylow de G. Se todo subgrupo minimal de $P \cap G'$ tem complemento em $N_G(P)$ e $N_G(P)$ é p-nilpotente, então G é p-nilpotente.*

Veremos que a hipótese de $N_G(P)$ ser p-nilpotente não pode ser retirada. Mas Guo e Shum mostram que se p é o menor divisor primo da ordem de G, então $N_G(P)$ ser p-nilpotente não precisa ser hipótese. Daremos também algumas aplicações destes teoremas que se encontram no Capítulo 4. Nos capítulos que antecedem, damos a maioria dos resultados necessários para tais demonstrações.

No primeiro capítulo, são abordados alguns requisitos básicos para o desenvolvimento deste trabalho tais como subgrupos característicos, grupos solúveis e nilpotentes, grupos supersolúveis, subgrupos de Frattini e representação de grupos.

No capítulo seguinte, estudamos os subgrupos de Hall e apresentamos a demonstração do Teorema de P. Hall que fornece uma caracterização para os grupos solúveis finitos. Também damos a caracterização de P. Hall para os grupos complementados e terminamos o capítulo estudando as torres de Sylow do tipo supersolúvel.

No Capítulo 3, damos uma breve introdução sobre p-nilpotência e formações, estudamos o homomorfismo transfer com o intuito de demonstrarmos o Teorema de Frobenius, que diz que um grupo finito G é p-nilpotente se, e somente se, todo p-subgrupo de Sylow de G é centralizado pelos p'-elementos de seu normalizador e terminamos o capítulo com uma aplicação do Teorema de Frobenius.

Finalmente, no Capítulo 4, demonstramos alguns resultados que nos fornecem informações sobre a estrutura do grupo se os subgrupos minimais do grupo possuem complementos. Apresentamos as demonstrações dos teoremas de Guo e Shum citados anteriormente e terminamos o capítulo com algumas aplicações destes resultados.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados que serão usados no desenvolvimento do nosso trabalho. Por serem resultados familiares, omitiremos a demonstração deles, mas mencionando uma bibliografia que contenha estas demonstrações. Estaremos assumindo que o leitor domine tópicos básicos de Teoria de Grupos.

Estaremos agora estabelecendo algumas notações que serão utilizadas ao longo desta dissertação, algumas muito comuns outras não tão utilizadas. Dados dois conjuntos X e Y escreveremos $X \subseteq Y$ se X é um subconjunto de Y e $X \subset Y$ se X é um subconjunto próprio de Y. A cardinalidade de X será denotada por $|X|$. Se G é um grupo, denotaremos por $H \leq G$ se H é um subgrupo de G e por $H < G$ se H é um subgrupo próprio de G. O centro de G será denotado por $Z(G)$ e se x e g são elementos de um grupo G, o conjugado de x por g é o elemento $x^g = g^{-1}xg$.

Ao longo desta dissertação estaremos aplicando a função à direita ao invés do usual. Desta forma, se $f : X \longrightarrow Y$ é uma função do conjunto X no conjunto Y escreveremos $(x)f$ para a imagem do elemento x de X pela f ao invés de $f(x)$.

1.1 Alguns Resultados de Subgrupo

Nesta seção apresentaremos alguns resultados que são conhecidos porém enumerados nesta seção com o intuito de facilitar as demonstrações quando necessitarmos deles.

O primeiro resultado garante que vale a recíproca do Teorema de Lagrange para grupos abelianos finitos.

Proposição 1.1. *([9], pág. 28) Se G é um grupo abeliano finito de ordem n, então existe um subgrupo de ordem d, para cada divisor d de n.*

Sabemos que um p-subgrupo está contido em um p-subgrupo de Sylow, mas o resultado a seguir mostra que se o p-subgrupo é normal, então ele está contido em todo p-subgrupo de Sylow.

Proposição 1.2. *Se Q é um p-subgrupo normal de um grupo finito G, então $Q \leq P$ para todo p-subgrupo de Sylow P.*

Os dois próximos resultados são simples, mas muito úteis.

Proposição 1.3. (Lei modular). *([7], pág. 15) Sejam H, K e L subgrupos de um grupo e suponha que $K \subseteq L$. Então $(HK) \cap L = (H \cap L)K$.*

Teorema 1.4. (Argumento de Frattini):*([9], pág. 81) Seja K um subgrupo normal de um grupo finito G. Se P é um p-subgrupo de Sylow de K para algum primo p, então $G = KN_G(P)$.*

Se H e K são subgrupos de G e x é um elemento de G, o subconjunto

$$HxK = \{hxk \mid h \in H,\ k \in K\}$$

é chamado de uma (H,K)-*classe lateral dupla*

O resultado a seguir nos fornece algumas propriedades das classes laterais duplas.

Proposição 1.5. *([7], pág. 12) Sejam H e K subgrupos de um grupo G.*

(i) *O grupo G é a união de (H,K)-classes laterais duplas.*

(ii) *Duas (H,K)-classes laterais duplas são ou iguais ou disjuntas.*

(iii) *A classe lateral dupla HxK é uma união de classes laterais à direita de H e uma união de classes laterais à esquerda de K.*

1.2 Grupos Solúveis e Nilpotentes

Nesta seção definiremos os subgrupos característicos, grupos solúveis e nilpotentes e daremos alguns resultados básicos que serão utilizados ao longo de nosso trabalho.

Recordando que $Aut(G)$ é o grupo dos automorfismos de G, podemos agora definir o subgrupo característico.

Definição 1.6. Seja G um grupo. Um subgrupo H de G é *característico* em G quando $(H)\alpha = H$, para todo $\alpha \in Aut(G)$.

Denotaremos por H *char* G, quando H for um subgrupo característico de G. Daremos algumas propriedades a seguir.

Proposição 1.7. *([9]) Se G é um grupo e H e K subgrupos de G, então:*

(i) *Se $(H)\alpha \subseteq H$, para todo $\alpha \in Aut(G)$, então H char G;*

(ii) *Se H char G, então $H \lhd G$;*

(iii) *Se H char K e K char G, então H char G;*

(iv) *Se H char K e $K \lhd G$, então $H \lhd G$;*

(v) *$Z(G)$ char G.*

Para obtermos a definição de grupos solúveis e nilpotentes, precisaremos antes da definição de séries.

Definição 1.8. Uma *série subnormal* de um grupo G é uma sequência de subgrupos $G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n = 1$ onde $G_{i+1} \lhd G_i$ para todo i. Os *grupos fatores* desta série são os grupos $\dfrac{G_i}{G_{i+1}}$ para $i = 1, \ldots, n-1$.

Definição 1.9. Uma *série de composição* é uma série subnormal $G = G_0 \geq G_1 \geq ... \geq G_n = 1$ na qual, para todo i, ou G_{i+1} é um subgrupo normal maximal de G_i ou $G_{i+1} = G_i$. Os grupos fatores desta série são chamados *fatores de composição.*

Definição 1.10. Uma *série normal* de um grupo G é uma série subnormal $G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n = 1$, onde $G_{i+1} \lhd G$ para todo i.

Definição 1.11. Uma *série principal* é uma série normal $G = G_0 > G_1 > ... > G_n = 1$ na qual, para todo i, não exista subgrupo H de G tal que $G_{i+1} < H < G_i$ e $H \lhd G$. Os grupos fatores desta série são chamados *fatores principais.*

Agora podemos definir os grupos solúveis.

Definição 1.12. Um grupo G é *solúvel* se G possui uma série subnormal $G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n = 1$, onde cada grupo fator $\dfrac{G_i}{G_{i+1}}$ é abeliano.

Exemplo 1.13. *O grupo S_3 é um grupo solúvel. De fato, $A_3 \lhd S_3$ e A_3 é abeliano, logo a série $S_3 \geq A_3 \geq 1$ é uma série subnormal e é claro que $\dfrac{S_3}{A_3}$ e $\dfrac{A_3}{1} \cong A_3$ são abelianos, portanto, S_3 é solúvel.*

Veremos a seguir importantes informações que auxiliam na determinação da solubilidade ou não solubilidade de grupos.

Proposição 1.14. *([9])*

(i) *Todo subgrupo de um grupo solúvel é solúvel.*

(ii) *Todo grupo quociente de um grupo solúvel é solúvel.*

(iii) *Se G é um grupo e N é um subgrupo normal de G tal que N e $\dfrac{G}{N}$ são solúveis, então G é solúvel.*

(iv) *Se G e J são grupos solúveis, o produto direto $G \times J$ também é solúvel.*

Seja G um grupo. Se $a, b \in G$, o *comutador* de a e b, denotado por $[a, b]$ é o elemento

$$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab.$$

Para X e Y subconjuntos não vazios de G, $[X, Y]$ denota o subgrupo de G gerado por todos os comutadores $[x, y]$ com $x \in X$ e $y \in Y$.

O *subgrupo derivado* de G, denotado por G', é o subgrupo de G gerado por todos os comutadores, isto é, $G' = [G, G]$.

Seja G um grupo. Definimos indutivamente

$$G^{(0)} = G, \quad G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}].$$

A cadeia de subgrupos $G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)}...$ é chamada *série derivada* de G.

O próximo resultado utiliza a série derivada para garantir a solubilidade de um grupo.

Proposição 1.15. *([9], pág. 105) Um grupo G é solúvel se, e somente se, $G^{(i)} = 1$ para algum $i \in \mathbb{N}$.*

Os dois próximos resultados nos fornecem uma classe de grupos solúveis.

Proposição 1.16. *([9], pág. 103) Todo p-grupo finito é solúvel.*

Teorema 1.17. (Burnside)*([5], pág. 301) Se G é um grupo finito e $|G| = p^a q^b$, com p e q primos e $a, b \in \mathbb{N}$, então G é solúvel.*

Se p é um primo, um grupo G é um p-grupo abeliano elementar se, a ordem de G é uma potência de p e para qualquer elemento g de G, $g^p = 1$ ou, equivalentemente, G é isomorfo a $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$.

Lembramos que um subgrupo normal minimal de um grupo G é um subgrupo normal H de G tal que $H \neq 1$ e não existe subgrupo normal K de G com $1 < K < H$. O próximo resultado nos fornece uma caracterização para tais subgrupos de grupos solúveis.

Teorema 1.18. *([9], pág. 105) Se G é um grupo solúvel finito, então todo subgrupo normal minimal de G é abeliano elementar.*

Daremos a seguir uma característica do fator de composição de um grupo solúvel.

Proposição 1.19. *([7], pág. 143) Se G é um grupo solúvel finito, então todo fator de composição de G tem ordem prima.*

O próximo resultado nos fornece uma condição suficiente sobre os subgrupos de Sylow de um grupo para que o mesmo seja solúvel.

Teorema 1.20. *(*Holder*)([5], pág. 157) Se todo subgrupo de Sylow de um grupo finito G é cíclico, então G é solúvel.*

Um corolário imediato do teorema anterior é

Corolário 1.21. *Todo grupo G de ordem livre de quadrado é solúvel.*

Definiremos agora grupos nilpotentes.

Definição 1.22. Um grupo G é *nilpotente* se possui um série normal $G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n = 1$, onde cada grupo fator $\dfrac{G_i}{G_{i+1}}$ está contido em $Z\left(\dfrac{G}{G_{i+1}}\right)$, para $i = 1, \ldots, n-1$.

Exemplo 1.23. *É claro que se G é abeliano, então G é nilpotente.*

Exemplo 1.24. *S_3 não é nilpotente. Com efeito, como $|S_3| = 6$, S_3 possui subgrupos de ordem 3 e 2, mas somente o de ordem 3 é um subgrupo normal não trivial de S_3 que é A_3. Este por sua vez, só possui os subgrupos triviais, assim, as únicas séries normais de S_3 são $S_3 \geq 1$ e $S_3 \geq A_3 \geq 1$. É fácil ver que $\dfrac{S_3}{A_3} \subseteq Z\left(\dfrac{S_3}{A_3}\right)$, mas $A_3 \cong \dfrac{A_3}{1} \nsubseteq Z\left(\dfrac{S_3}{1}\right) \cong Z(S_3)$. A outra série normal seria $S_3 \geq 1$ que não satisfaz as hipóteses para ser nilpotente.*

Os grupos nilpotentes têm as seguintes propriedades.

Proposição 1.25. *([9], pág. 115)*

(i) *Todo subgrupo de um grupo nilpotente é nilpotente.*

(ii) *Todo grupo quociente de um grupo nilpotente é nilpotente.*

Nos grupos nilpotentes não podemos afirmar que se G é um grupo e N é um subgrupo normal de G tal que N e $\dfrac{G}{N}$ são nilpotentes, então G é nilpotente. Um contra-exemplo fácil é o grupo S_3.

Dado um grupo G, definimos indutivamente

$$\gamma_1(G) = G \;\text{ e }\; \gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G].$$

Notemos que $\gamma_2(G) = [\gamma_1(G), G] = [G, G] = G'$. É fácil mostrar que $\gamma_i(G)$ *char* G e $\gamma_{i+1}(G) \leq \gamma_i(G)$, para todo $i > 1$. Também do fato de $\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G]$ resulta facilmente que

$$\frac{\gamma_i(G)}{\gamma_{i+1}(G)} \subseteq Z\left(\frac{G}{\gamma_{i+1}(G)}\right).$$

A sequência de subgrupos de G

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \cdots$$

é chamada *série central inferior* de G.

No próximo resultado utilizamos a série central inferior para caracterizar os grupos nilpotentes.

Proposição 1.26. *([8], pág. 152) Um grupo G é nilpotente se, e somente se, $\gamma_n(G) = 1$ para algum inteiro n.*

Veremos a seguir alguns resultados sobre grupos nilpotentes.

Proposição 1.27. *([9], pág. 115)*

(i) *Todo p-grupo finito é nilpotente.*

(ii) *Todo grupo nilpotente é solúvel.*

(iii) *Se $G \neq 1$ é nilpotente, então $Z(G) \neq 1$.*

(iv) *Se G é um grupo nilpotente e $H < G$, então $H < N_G(H)$.*

(v) *Se G é um grupo nilpotente, então todo subgrupo maximal de G é normal em G e tem índice primo.*

(vi) *Um grupo finito G é nilpotente se, e somente se, G é o produto direto de seus subgrupos de Sylow.*

(vii) *Se H é um subgrupo normal não trivial de um grupo finito nilpotente G, então $H \cap Z(G) \neq 1$.*

(viii) *Se $\dfrac{G}{Z(G)}$ é nilpotente, então G é nilpotente.*

1.3 Grupos Supersolúveis

Nesta seção daremos uma breve introdução dos grupos supersolúveis. Outros resultados serão vistos na Seção 2.3.

Definição 1.28. Um grupo G é *supersolúvel* se G possui uma série normal $G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n = 1$, onde cada grupo fator $\dfrac{G_i}{G_{i+1}}$ é cíclico.

Os grupos supersolúveis são solúveis, mas solubilidade não implica em supersolubilidade. De fato, é fácil ver que A_4 é solúvel, mas não é supersolúvel.

Também deduzimos do exemplo acima que $N \lhd G$, N e $\dfrac{G}{N}$ supersolúveis não implicam que G é supersolúvel. De fato, como vimos acima A_4 não é supersolúvel, mas o grupo de Klein V e $\dfrac{A_4}{V}$ são supersolúveis.

Os grupos supersolúveis têm as seguintes propriedades.

Proposição 1.29. *([5], pág. 170)*

(i) *Se G é um grupo supersolúvel, então os subgrupos e os grupos quocientes de G são supersolúveis.*

(ii) *Se G e J são grupos supersolúveis, então o produto direto $G \times J$ é um grupo supersolúvel.*

O próximo teorema garante que os grupos supersolúveis possuem uma série normal, onde cada grupo fator $\dfrac{G_i}{G_{i+1}}$ é um subgrupo minimal de $\dfrac{G}{G_{i+1}}$.

Teorema 1.30. *([5], pág. 171) Um grupo finito supersolúvel G tem uma série normal $G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n = 1$, onde cada grupo fator $\dfrac{G_i}{G_{i+1}}$ é cíclico de ordem prima e se $\dfrac{G_i}{G_{i+1}}$ e $\dfrac{G_{i+1}}{G_{i+2}}$ são de ordens primas p_i e p_{i+1}, respectivamente, temos $p_i \leq p_{i+1}$.*

O teorema a seguir nos fornece algumas informações sobre os fatores principais e sobre os subgrupos maximais de um grupo supersolúvel.

Teorema 1.31. *([10], pág. 156) Um fator principal de um grupo supersolúvel possui ordem prima e um subgrupo maximal possui índice primo.*

Uma relação entre os grupos nilpotentes e os grupos supersolúveis é

Proposição 1.32. *([10], pág. 155) Um grupo nilpotente finito é um grupo supersolúvel.*

Como vimos anteriormente se G é um grupo, $N \lhd G$ e N e $\dfrac{G}{N}$ são supersolúveis não podemos garantir que G é supersolúvel, mas veremos a seguir que se adicionarmos a hipótese de N ser cíclico esta afirmação é verdadeira.

Proposição 1.33. *([10], pág. 158) Seja G um grupo e seja H um subgrupo de G. Se $\dfrac{G}{H}$ é supersolúvel e H é cíclico, então G é supersolúvel.*

Uma condição sobre os subgrupos maximais de um grupo finito para termos a supersolubilidade será dada a seguir.

Proposição 1.34. *([10], pág. 158) Seja G um grupo finito. Se todo subgrupo maximal de G possui índice primo, então G é supersolúvel.*

1.4 Subgrupos de Frattini

Nesta seção daremos a definição de subgrupo de Frattini de um grupo G e alguns resultados que utilizaremos mais adiante.

Definição 1.35. Seja G um grupo. O *subgrupo de Frattini* de G é a interseção de todos os subgrupos maximais de G se G possuir subgrupos maximais, caso contrário, o *subgrupo de Frattini* de G é igual a G.

Denotaremos o subgrupo de Frattini de G por $\phi(G)$. Um elemento $x \in G$ é chamado de não gerador se ele pode ser retirado de qualquer conjunto de geradores de G, isto é, se Y é um subconjunto de G e se $G = \langle\ x, Y\ \rangle$, então $G = \langle\ Y\ \rangle$. Um conjunto de não geradores é um conjunto onde todos os seus elementos são não geradores.

É fácil ver que $\phi(G)$ é um subgrupo característico de G, portanto, é um subgrupo normal de G.

O subgrupo de Frattini tem a seguinte característica.

Proposição 1.36. *([9], pág. 123) Seja G um grupo finito. Então o subgrupo de Frattini $\phi(G)$ é igual ao conjunto dos não geradores de G.*

Veremos a seguir, que em um p-grupo finito P, o grupo quociente $\dfrac{P}{\phi(P)}$ é abeliano elementar.

Teorema 1.37. *([8], pág. 271) Se P é um p-grupo finito, então $\dfrac{P}{\phi(P)}$ é abeliano elementar. Além disso, $\phi(P) = 1$ se, e somente se, P é abeliano elementar.*

O resultado que será dado nos fornece algumas propriedades do subgrupo de Frattini de grupos finitos.

Teorema 1.38. *([9], pág. 123) Seja G um grupo finito. Então*

(i) *$\phi(G)$ é nilpotente;*

(ii) *Se G é um p-grupo finito, então $\phi(G) = G'G^p$, onde G^p é o subgrupo de G gerado pelo conjunto $\{x^p \mid x \in G\}$. Também, se $[G : \phi(G)] = p^r$, todo conjunto de geradores de G possui um subconjunto de r elementos que também geram G.*

1.5 Representação de Grupos

Nesta seção daremos uma breve introdução de representação de grupos apenas para chegarmos no Teorema de Maschke. Aqui F sempre denotará um corpo, V um espaço vetorial sobre F e $GL(V, F)$ é o grupo formado pelos elementos inversíveis do conjunto das transformações lineares de V em V.

Definição 1.39. Sejam F um corpo e G um grupo. Seja V um espaço vetorial sobre F de dimensão finita n. Uma *F-representação* de G em V é um homomorfismo de grupos

$$\varphi : G \to GL(V, F) \cong GL(n, F).$$

Definição 1.40. Sejam F um corpo e $\varphi : G \to GL(V, F)$ uma F-representação de G em V. Um F-subespaço W de V é chamado um *G-subespaço* de V se $(W)(g)\varphi \subseteq W$, para todo elemento g de G.

Dizemos que uma F-representação φ de G em V é *F-irredutível* se os únicos G-subespaços de V são $\{0\}$ e V. Neste caso dizemos que o G-espaço V é F-irredutível.

Uma F-representação φ de G em V é chamada de *F-completamente redutível* se $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$, onde cada V_i com $i = 1, \ldots, r$, é um G-subespaço de V que é F-irredutível.

O próximo resultado nos fornece uma condição para que toda F-representação de um grupo seja completamente redutível.

Teorema 1.41. (Maschke). *Seja G um grupo finito e seja F um corpo onde a característica de F é igual a zero ou não divide a ordem de G. Então toda F-representação de G é F-completamente redutível.*

Capítulo 2

Grupos complementados

Neste capítulo, estudaremos os subgrupos de Hall e apresentaremos a demonstração do Teorema de P.Hall que fornece uma caracterização para os grupos solúveis finitos. Também daremos a caracterização de P. Hall para os grupos complementados e estudaremos as torres de Sylow do tipo supersolúvel.

2.1 Subgrupos de Hall

Dados um grupo finito G e p um divisor primo da ordem de G, sabemos que um p-subgrupo de Sylow de G é um subgrupo de G cuja ordem é a maior potência de p que divide a ordem de G.

Nesta seção faremos uma generalização desta definição. Tais subgrupos são os subgrupos de Hall.

Definição 2.1. Se π é um conjunto não vazio de números primos, então um π-*número* é um inteiro n tal que todos seus fatores primos pertencem a π.

O complemento de π no conjunto de números primos é denotado por π' e, assim, um π'-número é um inteiro m tal que nenhum de seus fatores primos pertence a π.

Definição 2.2. Seja π um conjunto de primos. Um grupo G é um π-*grupo* se a ordem de cada um de seus elementos é um π-número.

Definição 2.3. Se G é um grupo finito, então um π-subgrupo H de G tal que $[G : H]$ é um π'-número é chamado de π-*subgrupo de Hall* de G.

Observamos que π-subgrupos de Hall nem sempre existem. Por exemplo, sejam $G = A_5$ e $\pi = \{3, 5\}$. Como $|A_5| = 60$, um π-subgrupo de Hall teria índice 4 e ordem 15, mas não existe tal subgrupo.

Sabemos que os p-subgrupos de Sylow sempre existem, e que são conjugados entre si. Mas, já os subgrupos de Hall nem sempre existem, como vimos anteriormente. Queremos estudar condições sob as quais tais subgrupos existem e, quando existem, se são conjugados entre si.

O próximo resultado diz que em um grupo solúvel finito, π-subgrupos de Hall sempre existem e são conjugados.

Teorema 2.4. (**P. Hall**). *Se G é um grupo solúvel finito de ordem ab, onde $(a, b) = 1$, então G contém um subgrupo de ordem a. Além disso, quaisquer dois subgrupos de ordem a são conjugados.*

Demonstração: A prova será feita por indução sobre a ordem de G. Se $|G| = 2$, é claro que o resultado é válido.

Suponhamos $|G| > 2$ e que o resultado seja válido para todo grupo de ordem menor que a ordem de G. Vamos dividir a demonstração em dois casos:

1º Caso: G contém um subgrupo normal H de ordem $a'b'$, onde $a'|a$, $b'|b$ e $b' < b$.

Existência: Sendo G solúvel, $\dfrac{G}{H}$ é um grupo solúvel de ordem $(a/a')(b/b')$ e, temos que essa ordem é estritamente menor que ab. Assim, podemos aplicar a hipótese de indução, obtendo que $\dfrac{G}{H}$ possui um subgrupo $\dfrac{A}{H}$ de ordem a/a'. Agora A tem ordem $(a/a')|H| = ab' < ab$ já que $b' < b$ e, como A é solúvel, temos que A possui um subgrupo de ordem a, que é também um subgrupo de G.

Conjugação: Sejam A e B subgrupos de G de ordem a e considere o subgrupo AH de G. Pelo Teorema de Lagrange temos que $|AH|$ divide a ordem de G, assim $|AH| = \alpha\beta$, onde $\alpha|a$ e $\beta|b$. Como $(a, b) = 1$ e $A \leq AH$, temos $a|\alpha$; logo $a = \alpha$. Como $H \leq AH$ temos que $b'|\beta$. Mas a fórmula do produto nos dá que $|AH|$ é um divisor de $aa'b'$, deste modo, $\beta|b'$. Assim concluímos que $|AH| = ab'$. Com cálculos análogos mostramos que $|BH| = ab'$. Logo $\dfrac{AH}{H}$ e $\dfrac{BH}{H}$ são subgrupos de $\dfrac{G}{H}$ de ordem a/a'. Como $\dfrac{G}{H}$ está nas hipóteses de indução, temos que $\dfrac{AH}{H}$ e $\dfrac{BH}{H}$ são conjugados, isto é, $\left(\dfrac{AH}{H}\right)^{xH} = \dfrac{BH}{H}$, para algum $xH \in \dfrac{G}{H}$. Portanto, $x^{-1}Ax$ e B são subgrupos de BH de ordem a. Novamente, por indução, temos que eles são conjugados e isto completa o primeiro caso.

Se existe algum subgrupo próprio normal de G cuja ordem não é divisível por b, então estaremos no primeiro caso. Podemos, portanto, assumir que b é um divisor de $|H|$ para todo subgrupo normal não trivial H de G. Se H é um subgrupo normal minimal, como G é solúvel, temos pelo Teorema 1.18 que H é um p-grupo abeliano elementar para algum primo p. Assim podemos assumir que $b = p^m$. Deste modo, H é um p-subgrupo de Sylow de G e a normalidade de H nos diz que H é único. Desta forma, o problema se reduz ao seguinte caso.

2º caso: $|G| = ap^m$ onde $p \nmid a$, G tem um p-subgrupo de Sylow normal abeliano H e H é o único subgrupo normal minimal de G.

Existência: O grupo $\dfrac{G}{H}$ é solúvel de ordem a. Se $\dfrac{K}{H}$ é um subgrupo normal minimal de $\dfrac{G}{H}$, então $\left|\dfrac{K}{H}\right| = q^n$ para algum primo $q \neq p$ e, assim, $|K| = p^m q^n$. Se Q é um q-subgrupo de Sylow de K, então $K = HQ$. Sejam $N^* = N_G(Q)$ e $N = N^* \cap K = N_K(Q)$. Vamos mostrar que N^* possui ordem a. De fato, pelo Argumento de Frattini, temos que $G = KN^*$ e, então $\dfrac{G}{K} = \dfrac{KN^*}{K} \cong \dfrac{N^*}{N^* \cap K} = \dfrac{N^*}{N}$. Assim $|N^*| = \dfrac{|G||N|}{|K|}$. Como $K = HQ$ e $Q \leq N \leq K$ tiramos $K = HQ \leq HN$. Mas $HN \leq K$, logo $|K| = |HN| = \dfrac{|H||N|}{|H \cap N|}$ e

$$|N^*| = \frac{|G||N|}{|K|} = \frac{|G||N||H \cap N|}{|H||N|} = \left(\frac{|G|}{|H|}\right)|H \cap N| = a|H \cap N|.$$

Para mostrarmos que $|N^*| = a$ provaremos que $|H \cap N| = 1$, e isto será feito mostrando que $H \cap N \leq Z(K)$ e que $Z(K) = 1$. Seja $x \in H \cap N$. Se $k \in K$, como $K = HQ$, segue que $k = hs$ para algum $h \in H$ e $s \in Q$. Sendo H abeliano, x comuta com h. Desta forma, é suficiente mostrarmos que x comuta com s. Mas $(xsx^{-1})s^{-1} \in Q$, pois x normaliza Q e $x(sx^{-1}s^{-1}) \in H$ já que H é normal em G. Portanto $xsx^{-1}s^{-1} \in Q \cap H = 1$, isto é, $x \in Z(K)$, concluímos então que $H \cap N \leq Z(K)$. Vamos agora mostrar que $Z(K) = 1$. Como $Z(K)$ *char* K e $K \lhd G$ temos pela Proposição 1.7 (iv) que $Z(K) \lhd G$. Desta forma, se $Z(K) \neq 1$, então contém um subgrupo normal minimal de G. Assim $H \leq Z(K)$, por H ser o único subgrupo normal minimal de G. Mas, como $K = HQ$ e Q é o único q-subgrupo de Sylow de HQ, segue que Q *char* K. Deste modo obtemos $Q \lhd G$ e, assim,

$H \leq Q$, o que é uma contradição. Portanto $Z(K) = 1$, $H \cap N = 1$ e, consequentemente, $|N^*| = a$, como queríamos .

Conjugação: Usando a mesma notação da prova da existência temos que N^* tem ordem a. Seja A um outro subgrupo de G de ordem a. Queremos mostrar que A é conjugado de N^*. Como $|AK|$ é divisível por a e por $|K| = p^m q^n$, segue que $|AK| = ab = |G|$. Logo $AK = G$,

$$\frac{G}{K} = \frac{AK}{K} \cong \frac{A}{A \cap H}$$

e $|A \cap H| = q^n$. Pelo Teorema de Sylow, $A \cap H$ é um conjugado de Q. Visto que subgrupos conjugados possuem normalizadores conjugados, temos que N^* é conjugado de $N_G(A \cap H)$ e, assim, $|N_G(A \cap H)| = a$. Como $A \cap H \lhd A$, segue que $A \leq N_G(A \cap H)$ e, então, $A = N_G(A \cap H)$ pois ambos têm ordem a. Portanto, A é um conjugado de N^*. □

O Teorema de P. Hall nos diz que em grupos solúveis finitos, π-subgrupos de Hall sempre existem, para todo conjunto de primos π. A seguir veremos que vale a recíproca deste teorema.

Teorema 2.5. (**P. Hall**). *Se G é um grupo finito que possui um p'-subgrupo de Hall para todo primo p, então G é solúvel.*

Demonstração: Suponhamos que existam grupos não solúveis que possuem um p'-subgrupo de Hall, para todo primo p. Dentre tais grupos, seja G um grupo de menor ordem. Primeiramente consideraremos o caso em que G possui um subgrupo normal não trivial N. Seja H um p'-subgrupo de Hall qualquer de G. Deste modo $[N : H \cap N] = [HN : H]$, o qual é um p-número, isto nos diz que $H \cap N$ é um p'-subgrupo de Hall de N. É também fácil ver que $\frac{HN}{N}$ é um p'-subgrupo de Hall de $\frac{G}{N}$. Como N e $\frac{G}{N}$ possuem ordem menor do que $|G|$ temos, pela escolha minimal de G, que N e $\frac{G}{N}$ são solúveis. Desta forma, temos que G é solúvel, o que é uma contradição. Logo podemos supor que G é simples. Seja $|G| = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_n^{e_n}$, onde p_i são primos distintos e $e_i > 0$ para todo i. Para cada i, seja H_i um p_i'-subgrupo de Hall de G. Então, $[G : H_i] = p_i^{e_i}$ e, assim, $|H_i| = \prod_{j \neq i} p_j^{e_j}$.

Colocando $D = H_3 \cap \ldots \cap H_n$ temos que $[G : D] = [G : H_3] \ldots [G : H_n] = \prod_{i=3}^{n} p_i^{e_i}$, já que $([G : H_i], [G : H_j]) = 1$ se $j \neq i$ e, assim, $|D| = p_1^{e_1} p_2^{e_2}$. Logo, pelo Teorema de Burnside (Teorema 1.17), D é um grupo solúvel. Desta forma, se N é um subgrupo normal minimal de D, então N é abeliano elementar pela Proposição 1.18. Sem perda da generalidade, podemos supor que N é um p_1-grupo. Como $([G : D], [G : H_2]) = 1$, temos que $[G : D \cap H_2] = \prod_{i=2}^{n} p_i^{e_i}$, deste modo, $|D \cap H_2| = p_1^{e_1}$ e $D \cap H_2$, é um p_1-subgrupo de Sylow de D. Pela Proposição 1.2, temos que $N \leq D \cap H_2$ e, assim, $N \leq H_2$. De maneira análoga ao demonstrado acima, conseguimos $|D \cap H_1| = p_2^{e_2}$. Logo podemos ver que $G = (D \cap H_1)H_2$. Se $g \in G$, então $g = dh$, onde $h \in H_2$ e $d \in D \cap H_1$. Assim, se $x \in N$, temos $g^{-1}xg = h^{-1}d^{-1}xdh = h^{-1}yh$, onde $y \in N$, pois $N \lhd D$. Notemos que $h^{-1}yh \in H_2$ já que $N \leq H_2$. Portanto, $N^G \leq H_2$, onde N^G é o subgrupo normal de G gerado por N. Como $H_2 < G$ e $N \neq 1$, segue que N^G é um subgrupo normal próprio de G, e isto contradiz a suposição que G é simples. □

Definição 2.6. Seja K um subgrupo (não necessariamente normal) de um grupo G. Então um subgrupo Q de G é um *complemento* de K em G se $K \cap Q = 1$ e $KQ = G$.

O próximo teorema nos fornece uma caracterização para os grupos solúveis finitos.

Teorema 2.7. *Um grupo finito G é solúvel se, e somente se, todo subgrupo de Sylow de G possui complemento em G*

Demonstração: Segue direto dos Teoremas de P. Hall. □

Os π-subgrupos normais são muito importantes. Sabemos que produtos de p-subgrupos normais são p-grupos. Isto também vale para os π-grupos. consequentemente, o subgrupo gerado por todos os π-subgrupos normais de G é um π-grupo. Este é o único π-subgrupo normal maximal de G e é denotado por $O_\pi(G)$.

Definição 2.8. Um subgrupo H de G é *subnormal* em G, quando existem subgrupos $H_0 = H$, H_1, $\cdots$, $H_l = G$ de G, distintos dois a dois, tais que $H = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_l = G$.

A próxima proposição nos fornece algumas propriedades do subgrupo $O_\pi(G)$, e relações entre $O_\pi(G)$ e alguns tipos de π-subgrupos de G.

Proposição 2.9. *Sejam G um grupo e π um conjunto não vazio de números primos.*

(i) $O_\pi(G)$ char G.

(ii) Se H é um π-subgrupo subnormal de G, então $H \leq O_\pi(G)$;

(iii) $O_\pi(G)$ é a interseção de todos os π-subgrupos maximais de G. Em particular, $O_\pi(G)$ está contido em todo π-subgrupo de Hall de G.

Demonstração: (i) Seja $\alpha \in Aut(G)$. Sendo $O_\pi(G)$ gerado por todos os π-subgrupos normais de G, temos que $(O_\pi(G))\alpha \subseteq O_\pi(G)$, pois $(O_\pi(G))\alpha$ é um π-subgrupo normal de G. Disso concluímos que, $O_\pi(G)$ *char* G.

(ii) Por hipótese, existe uma série $H = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_l = G$. Faremos a prova por indução sobre l. Se $l \leq 1$, então $H \lhd G$ e $H \leq O_\pi(G)$. Suponhamos que $l > 1$. Por indução, temos que $H \leq O_\pi(H_{l-1})$. Mas $O_\pi(H_{l-1})$ é característico em H_{l-1} e, assim, pela Proposição 1.7(iv) normal em G. Logo $O_\pi(H_{l-1}) \lhd O_\pi(G)$ e, portanto, $H \leq O_\pi(G)$.

(iii) Sejam $R = O_\pi(G)$ e S um π-subgrupo maximal qualquer de G. Então RS é um π-subgrupo de G. Assim, $R \leq S$, pela maximalidade de S. Portanto, R está contido na interseção de todos os π-subgrupos maximais de G. Por outro lado, a interseção de todos os π-subgrupos maximais de G é normal em G e, portanto, está contido em R. □

Já vimos que π-subgrupos de Hall nem sempre existem. O teorema a seguir fornece uma condição suficiente para a existência de subgrupos de Hall. Mas antes precisamos definir transversal de um subgrupo.

Definição 2.10. Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Uma *transversal* à direita (à esquerda) de H em G é um subconjunto de G constituído de um elemento de cada classe lateral à direita (à esquerda) de H em G.

Teorema 2.11. (**Teorema de Schur Zassenhaus**). *Seja N um subgrupo normal de um grupo finito G. Suponhamos que $|N| = n$ e $[G : N] = m$ são relativamente primos. Então G contém subgrupos de ordem m e quaisquer dois deles são conjugados em G.*

Demonstração: (i) ***Caso N abeliano:***. Primeiramente, vamos provar a existência de um subgrupo de ordem m. Coloquemos $Q = \dfrac{G}{N}$. Como N é abeliano, temos bem definida a seguinte ação:

$$\begin{array}{rll} \alpha: & N \times Q & \to N \\ & (a, Ng) & \mapsto a^{Ng} = a^g \end{array}$$

Para cada classe lateral x em Q, escolhemos um representante t_x. Deste modo, o conjunto $\{t_x \mid x \in Q\}$ é uma transversal para N em G. É fácil ver que o elemento t_xt_y pertence a classe lateral $t_xt_yN = t_{xy}N$. Por causa disso, existe um elemento $c(x,y)$ de N tal que $t_xt_y = t_{xy}c(x,y)$. Aplicando a associatividade, temos por um lado

$$\begin{aligned}(t_xt_y)t_z = &\ t_x(t_yt_z)\\ = &\ t_x(t_{yz}c(y,z))\\ = &\ (t_xt_{yz})c(y,z)\\ = &\ t_{xyz}c(x,yz)c(y,z),\end{aligned}$$

por outro lado

$$\begin{aligned}(t_xt_y)t_z = &\ (t_{xy}c(x,y))t_z\\ = &\ t_{xy}t_zt_z^{-1}c(x,y)t_z\\ = &\ t_{xyz}c(xy,z)c(x,y)^z\end{aligned}$$

Logo,

$$c(xy,z)c(x,y)^z = c(x,yz)c(y,z), \tag{2.1}$$

para todos elementos x,y e z em Q. Agora consideremos o elemento $d(y)$ de N dado por: $d(y) = \prod_{x\in Q} c(x,y)$.

Fazendo o produto da Equação (2.1) para todo x em Q e, usando o fato que N é abeliano, obtemos

$$\begin{aligned}\prod_{x\in Q} c(xy,z)c(x,y)^z = &\ \prod_{x\in Q} c(x,yz)c(y,z)\\ \prod_{x\in Q} c(xy,z)\prod_{x\in Q} c(x,y)^z = &\ \prod_{x\in Q} c(x,yz)\prod_{x\in Q} c(y,z)\\ d(z)d(y)^z = &\ d(yz)c(y,z)^m.\end{aligned}$$

Ou ainda,

$$d(yz) = d(z)d(y)^zc(y,z)^{-m}. \tag{2.2}$$

Agora da hipótese que $(m,n) = 1$ e do Teorema de Bezout, existe um elemento de N, digamos $e(y)$, tal que $e(y)^m = d(y)^{-1}$. Assim, a Equação (2.2) pode ser reescrita como

$$(e(yz))^{-m} = (e(y)^ze(z)c(y,z))^{-m}.$$

Disso e do fato que $(m,|N|) = 1$ resulta que

$$e(yz) = e(y)^ze(z)c(y,z).$$

Definamos $s_x = t_x e(x)$. Observamos que

$$\begin{aligned} s_y s_z = & \; t_y e(y) t_z e(z) = t_y t_z t_z^{-1} e(y) t_z e(z) = t_y t_z e(y)^z e(z) = t_{yz} c(y,z) e(y)^z e(z) \\ = & \; t_{yz} e(yz) = s_{yz}. \end{aligned}$$

Logo, a aplicação

$$\begin{aligned} \theta : \; Q & \longrightarrow G \\ x & \mapsto s_x, \end{aligned}$$

é um homomorfismo. Também é injetor, pois

$$\begin{aligned} ker(\theta) = & \; \{x \in Q : (x)\theta = 1\} \\ = & \; \{x \in Q : s_x = 1\} \\ = & \; \{x \in Q : t_x e(x) = 1\} \\ \subseteq & \; \{x \in Q : t_x \in N\} \\ = & \; \{1_Q\}. \end{aligned}$$

Concluímos que $Im\ \theta \cong Q$ e $|Im\ \theta| = m$, isto é, G possui um subgrupo de ordem m.

Agora suponhamos que H e H^* sejam dois subgrupos de G de ordem m. Vamos mostrar que H e H^* são conjugados. Já que $(|H|, |N|) = 1$, temos $G = HN = H^*N$ e $H \cap N = H^* \cap N = 1$. Assim dado $x \in Q$, existe um único $h_x \in H$ tal que $x = h_x N$. Da mesma forma, existe um único $h_x^* \in H^*$ de modo que $x = h_x^* N$. Sejam $\varphi_1 : Q = \dfrac{HN}{N} \longrightarrow H$ e $\varphi_2 : Q = \dfrac{H^*N}{N} \longrightarrow H^*$ as funções que levam x em h_x e h_x^*, respectivamente. É fácil ver que φ_1 e φ_2 são funções sobrejetoras. Como $h_x N = h_x^* N$ temos $h_x^* = h_x a(x)$ para algum $a(x) \in N$. Mas $h_{xy} a(xy) = h_{xy}^* = h_x^* h_y^* = h_x a(x) h_y a(y) = h_x h_y h_y^{-1} a(x) h_y a(y) = h_{xy} a(x)^y a(y)$. Por causa disso, deduzimos a seguinte relação,

$$a(xy) = a(x)^y a(y). \tag{2.3}$$

Definamos $b = \prod_{x \in Q} a(x)$. Fazendo o produto da Equação (2.3) para todo x em Q, obtemos

$$\prod_{x \in Q} a(xy) = \prod_{x \in Q} a(x)^y a(y)$$

ou seja,

$$b = b^y a(y)^m.$$

Como $(m,n)=1$, existem $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ tais que $\alpha m+\beta n=1$ e, então podemos escrever

$$\begin{aligned} b = &\ (b^y)^{\alpha m+\beta n}a(y)^m \\ b = &\ (b^y)^{\alpha m}(b^y)^{\beta n}a(y)^m \\ = &\ [(b^y)^{\alpha}a(y)]^m \\ = &\ c^m. \end{aligned}$$

Desta forma, se reescrevermos a equação $b=b^y a(y)^m$, obtemos que $c^m=(c^m)^y a(y)^m=(c^y)^m a(y)^m$ o que implica, $c=c^y a(y)$, ou ainda, $a(y)=c^{-y}c$. Portanto $h_y^*=h_y a(y)=h_y c^{-y}c=c^{-1}h_y c$, já que h_y sendo um representante da classe lateral de y temos $c^y=c^{h_y}$. Assim, como φ_1 e φ_2 são sobrejetoras, concluímos que $H^*=c^{-1}Hc$.

(ii) ***Existência. Caso geral:*** Procederemos por indução sobre a ordem de G. Sejam p um primo divisor de $|N|$ e P um p-subgrupo de Sylow de N. Coloquemos $L=N_G(P)$ e $C=Z(P)$, então $L\leq N_G(C)=M$, pois C *char* P. Pelo Argumento de Frattini (Proposição 1.4), temos que $G=LN$ e, portanto, também $G=MN$. Seja $N_1=N\cap M$ o qual é normal em M e observemos que

$$[G:N]=\frac{|G|}{|N|}=\frac{|MN|}{|N|}=\frac{|M|}{|M\cap N|}=\frac{|M|}{|N_1|}=[M:N_1]=m.$$

Como $C\neq 1$, o subgrupo $\dfrac{M}{C}$ tem ordem menor que $|G|$. Além disso, $\dfrac{N_1}{C}$ é um subgrupo normal de $\dfrac{M}{C}$ de ordem relativamente prima com $\left[\dfrac{M}{C}:\dfrac{N_1}{C}\right]=[M:N_1]=m$. Portanto, aplicando a hipótese de indução para o grupo $\dfrac{M}{C}$, temos que existe um subgrupo $\dfrac{X}{C}$ de $\dfrac{M}{C}$ de ordem m, assim, $M=XN_1$ e $X\cap N_1=C$. Uma vez que $[X:C]=m$ é relativamente primo com $|C|$, podemos agora aplicar (i) e concluir que X tem um subgrupo de ordem m.

(iii) ***Conjugação. O caso $\dfrac{G}{N}$ solúvel:***. Seja π o conjunto dos divisores primos de m e escrevamos $R=O_\pi(G)$. Suponhamos que H e K sejam dois subgrupos de G de ordem m. Então $R\leq H\cap K$, já que $[G:H]=[G:K]=n$, o qual é um π'-número, ou seja H e K são π-subgrupos de Hall de G. Se $R\neq 1$, passando para o quociente $\dfrac{G}{R}$, temos que $\dfrac{H}{R}$ e $\dfrac{K}{R}$ são π-subgrupos de Hall de $\dfrac{G}{R}$. Aplicando a hipótese de indução em $\dfrac{G}{R}$, obtemos que $\dfrac{H}{R}$ e $\dfrac{K}{R}$ são conjugados, isto é, existe gR em $\dfrac{G}{R}$ tal que $\dfrac{H}{R}=\left(\dfrac{K}{R}\right)^{gR}$. consequentemente para todo h em H, existe $k\in K$ tal que $hR=(kR)^{gR}=k^gR$, o que implica que h pertence a K^g, já que $R=R^g\subseteq K^g$. Portanto, como as ordens de H e K são iguais, concluímos que $H=K^g$.

Se $O_\pi(G) = 1$, suponhamos que $m > 1$, deste modo $N \neq G$. Seja $\dfrac{L}{N}$ um subgrupo normal minimal de $\dfrac{G}{N}$. Como $\dfrac{G}{N}$ é solúvel obtemos pelo Teorema 1.18 que $\dfrac{L}{N}$ é um p-grupo abeliano elementar para algum primo p em π. Agora $H \cap L$ é um p-subgrupo de Sylow de L, pois $H \cap L \cong \dfrac{(H \cap L)N}{N} \leq \dfrac{L}{N}$ e $[L : H \cap L] = [HL : H]$, que é um p'-número. O mesmo ocorre com $K \cap L$. Aplicando o Teorema de Sylow, temos que $H \cap L = (K \cap L)^g = K^g \cap L$ para algum g em G. Escrevendo $S = H \cap L$, concluímos que $S \lhd \langle\, H, K^g \,\rangle = J$. Suponhamos que $J = G$, deste modo $S \lhd G$, logo $S \leq R = 1$, já que S é um π-grupo. Assim, L é um p'-grupo. Mas isto não pode ocorrer, pois $\dfrac{L}{N}$ é um p-grupo. Portanto, $J \neq G$. Podemos agora aplicar a hipótese de indução sobre $|G|$, para concluirmos que H e K^g são conjugados em J e, portanto, H e K conjugados em G.

(iv) ***Conjugação. Caso N solúvel:*** Sejam H e K subgrupos de G de ordem m. De N' *char* N e $N \lhd G$, obtemos $N' \lhd G$. Como $\left|\dfrac{HN'}{N'}\right| = \left|\dfrac{KN'}{N'}\right| = m$, por (i) segue que $\dfrac{HN'}{N'}$ e $\dfrac{KN'}{N'}$ são conjugados em $\dfrac{G}{N'}$. Assim $H^{g_1} \leq KN'$, para algum g_1 em G. Uma vez que N'' *char* N e $N \lhd G$ temos $N'' \lhd G$ e, portanto, $N'' \lhd KN'$. É fácil ver que $\left|\dfrac{H^{g_1}N''}{N''}\right| = \left|\dfrac{KN''}{N''}\right|$ e $\left|\dfrac{N'}{N''}\right|$ são relativamente primas e já que $\dfrac{N'}{N''}$ é abeliano temos, por (i), que $\dfrac{H^{g_1}N''}{N''}$ e $\dfrac{KN''}{N''}$ são conjugados. Por causa disso, $(H^{g_1})^{g_2} \leq KN''$, para algum g_2 de G. Prosseguindo de forma análoga, teremos para todo $l \geq 1$ que $H^{g_l^*} \leq KN^l$, para algum g_l^* de G. Porém, como N é solúvel, teremos $N^j = 1$ para algum $j \in \mathbb{Z}$. Portanto H e K são conjugados.

(v) ***Conjugação. Caso geral:*** Como os inteiros m e n são relativamentes primos, ao menos um deles é ímpar, e o Teorema de Feit-Thompson, implica que N ou $\dfrac{G}{N}$ é solúvel. O resultado segue agora de (iii) e (iv). □

A hipótese de que N é normal não pode ser retirada do teorema. De fato, sejam $G = A_5$ e N um 2-subgrupo de Sylow de G, logo $|N| = 4$, $[G : N] = 15$ e $(4, 15) = 1$. Portanto G está nas condições do teorema, porém, $G = A_5$ não possui subgrupo de ordem 15. Concluímos, desta forma, que se N não for normal, o resultado nem sempre é válido.

2.2 Grupos Complementados

Nesta seção definiremos grupos complementados, apresentaremos algumas de suas propriedades e uma caracterização para os grupos complementados.

Definição 2.12. Um grupo finito G é *complementado* se, para todo subgrupo H de G existe ao menos um complemento de H em G.

Daremos agora algumas propriedades de grupos complementados.

Proposição 2.13. *(i) Subgrupos de grupos complementados são complementados.*

(ii) Grupos quociente de grupos complementados são complementados.

(iii) Produto direto de grupos complementados são complementados.

Demonstração: (i) Suponhamos que G seja um grupo complementado e H um subgrupo de G. Sejam K um subgrupo de H e L um complemento de K em G. Afirmamos que $H \cap L$ é um complemento de K em H. De fato, $K \cap (H \cap L) = K \cap L = 1$ e $H = (G \cap H) = ((KL) \cap H) = K(H \cap L)$, pela Lei Modular (Proposição 1.3). Portanto, H é complementado.

(ii) Sejam G um grupo complementado e $N \lhd G$, considere $\dfrac{H}{N} \leq \dfrac{G}{N}$. Se K é um complemento de H em G, afirmamos que $\dfrac{KN}{N}$ é um complemento de $\dfrac{H}{N}$ em $\dfrac{G}{N}$. Com efeito, seja u um elemento de $\dfrac{H}{N} \cap \dfrac{KN}{N}$, então existem $h \in H$ e $k \in K$ tais que $u = hN$ e $u = kN$. Logo temos que $k^{-1}h \in N$; mas $N \subseteq H$. Assim temos que $k \in H$ e, então, $u = 1N = N$. Disto resulta que $\dfrac{H}{N} \cap \dfrac{KN}{N} = \{1N\}$. Agora para concluirmos temos que mostrar que $\dfrac{G}{N} = \dfrac{H}{N}\left(\dfrac{KN}{N}\right)$. Seja $gN \in \dfrac{G}{N}$, como $G = HK$ obtemos que $gN = hkN = hNkN$ com $h \in H$ e $k \in K$. Logo $\dfrac{KN}{N}$ é um complemento de $\dfrac{H}{N}$ em $\dfrac{G}{N}$.

(iii) Seja H um subgrupo de $G_1 \times G_2$ e sejam $K_1 = \{x \in G_1 \mid (x, y) \in H, \text{ para algum } y \in G_2\}$ e $K_2 = \{y \in G_2 \mid (1, y) \in H\}$. Temos que K_1 é um subgrupo de G_1, pois $1 \in K_1$ já que $(1, 1) \in H$, e se $x_1, x_2 \in K_1$, então existem $y_1, y_2 \in G_2$ tais que $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in H$. Como H é subgrupo, $(x_1, y_1)(x_2^{-1}, y_2^{-1}) \in H$, o que implica que $(x_1x_2^{-1}, y_1y_2^{-1}) \in H$, logo $x_1x_2^{-1} \in K_1$, como queríamos. Também K_2 é um subgrupo de G_2. De fato, $1 \in K_2$ e se $y_1, y_2 \in K_2$, então $(1, y_1)(1, y_2) \in H$, assim $(1, y_1)(1, y_2^{-1}) = (1, y_1y_2^{-1}) \in H$ e, consequentemente, $y_1y_2^{-1} \in K_2$. Como G_1 e G_2 são grupos complementados existem L_1 complemento de K_1 em G_1 e L_2 complemento de K_2 em G_2. Afirmamos que $L_1 \times L_2$ é um complemento de H em $G_1 \times G_2$. De fato, seja $(x, y) \in H \cap (L_1 \times L_2)$, como $(x, y) \in H$ então $x \in K_1$, mas x também pertence a L_1, assim, $x = 1$ e temos que $(1, y) \in H \cap (L_1 \times L_2)$. Logo $y \in K_2 \cap L_2$. Disto resulta que $y = 1$ e, portanto, $H \cap (L_1 \times L_2) = (1, 1)$. Agora só falta mostrarmos que $G_1 \times G_2$ é escrito como o produto de H por $L_1 \times L_2$. Para isso seja $(x, y) \in G_1 \times G_2$, então $x = k_1 l_1$ com $k_1 \in K_1$ e $l_1 \in L_1$ e, deste modo, H possui um elemento da forma (k_1, r). Mas $r^{-1}y \in G_2$, então $r^{-1}y = k_2 l_2$ com $k_2 \in K_2$ e $l_2 \in L_2$ e, assim, $y = rk_2 l_2$. Podemos escrever $(x, y) = (k_1 l_1, rk_2 l_2) = (k_1, rk_2)(l_1, l_2) = (k_1, r)(1, k_2)(l_1, l_2)$, onde $(k_1, r), (1, k_2) \in H$ e $(l_1, l_2) \in L_1 \times L_2$. Desta maneira $G_1 \times G_2 = H(L_1 \times L_2)$, como queríamos. $\square$

Nosso próximo resultado nos fornece informações a respeito dos subgrupos de Sylow e dos fatores principais dos grupos complementados finitos.

Proposição 2.14. *Se um grupo finito G é complementado, então:*

(i) *seus subgrupos de Sylow são abelianos elementares;*

(ii) *seus fatores principais são cíclicos.*

Demonstração: (i) Seja P um p-subgrupo de Sylow de G e suponhamos que P não seja abeliano, logo P' não é trivial. Como G é complementado, P' tem um complemento em P, isto é, $P = P'K$ e $P' \cap K = 1$ para algum subgrupo K de P. Mas pelo Teorema 1.38, temos que $P' \leq \phi(P)$, portanto, podemos escrever $P = K$, já que $\phi(P)$ consiste dos não geradores de P. Isto implica que $P' = 1$, o que é uma contradição. Portanto P é abeliano. Vamos mostrar agora que todo elemento de P tem ordem p. Suponhamos que exista um elemento $x \in P$, tal que $o(x) > p$. Assim existe um subgrupo K de $\langle\ x\ \rangle$ tal que $|K| = p^2$, logo, $K \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ e, como K é um subgrupo de um grupo complementado, K é complementado. Seja $H \leq K$ com $|H| = p$. Então existe um subgrupo N de K tal que $K = HN$ com $H \cap N = 1$, logo $|N| = |H| = p$. Disto segue que $K = H \times N$, isto é, $\mathbb{Z}_{p^2} \cong K \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, o que não pode ocorrer. Assim não existe elemento $x \in P$ com $o(x) > p$ e concluímos que P é um p-grupo abeliano elementar.

(ii) Pelo Teorema 2.7, temos que grupos complementados finitos são solúveis e pelo Teorema 1.18 seus fatores principais são grupos abelianos elementares. Seja $\dfrac{G_i}{G_{i+1}}$ um fator principal do grupo complementado G, e seja p^{α} sua ordem. Se $\alpha > 1$, podemos escolher um subgrupo H de G tal que $G_i > H > G_{i+1}$. Sejam K um complemento de H em G,

$$L_1 = G_i \cap K \tag{2.4}$$

e

$$L_2 = G_{i+1}L_1. \tag{2.5}$$

$L_1 \neq 1$, pois caso contrário $G_i = G \cap G_i = (HK) \cap G_i = H(K \cap G_i) = H$, o que não pode ocorrer, já que, $H < G_i$. Logo $L_1 \neq 1$. Afirmamos agora que $G_{i+1} < L_2$. De fato, se $G_{i+1} = L_2$ então $L_1 \leq G_{i+1} < H$, mas $H \cap K = 1$, assim $L_1 = 1$, o que mostramos que não acontece. Portanto, $G_{i+1} < L_2$. Agora vamos mostrar também que $L_2 < G_i$. Para isso, suponhamos, por absurdo, que $L_2 = G_i$, então por (2.5) temos que $G_i = G_{i+1}L_1$. Seja $h \in H$ tal que $h \notin G_{i+1}$. Como $H < G_i$ vemos que h pode ser escrito do seguinte modo: $h = ab$, onde $a \in G_{i+1}$ e $b \in L_1$. Isto implica que $b = a^{-1}h$, mas $G_{i+1} < H$ obtendo desta maneira que $a^{-1}h \in H$ e $a^{-1}h = b \in K$. Disto resulta que $b = 1$ e $h = a$, o que é um absurdo pois tomamos $h \in H$ com $h \notin G_{i+1}$. Logo $L_2 < G_i$. Assim $G_i > L_2 > G_{i+1}$. Agora $L_1 \lhd K$, pois $G_i \lhd G$ e, portanto, $L_2 \lhd K$. Mas $L_2 \lhd G_i$, já que $L_2 \geq G_{i+1} \geq (G_i)'$. Portanto $L_2 \lhd G_iK \supseteq HK = G$, isto é, $L_2 \lhd G$, o que é um absurdo, pois nenhum subgrupo normal de G pode ser encontrado estritamente entre G_i e G_{i+1}. Logo $\alpha = 1$ e, consequentemente, $\dfrac{G_i}{G_{i+1}}$ é cíclico. □

O resultado a seguir nos fornece uma característica dos grupos que satisfazem as propriedades (i) e (ii).

Proposição 2.15. *Um grupo finito G com as propriedades (i) e (ii) é isomorfo a um subgrupo do produto direto de um certo número de grupos de ordem livre de quadrado.*

Demonstração: Suponhamos que $G = \{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$. Para cada elemento x de $G\backslash\{1\}$, seja G_x um subgrupo normal de G de maior ordem que não contenha x. Tome $\chi = \left\{ \dfrac{G}{G_x} \mid x \in G\backslash\{1\} \right\}$ e considere a função

$$\begin{array}{rccc} \psi: & G & \to & \dfrac{G}{G_{x_1}} \times \cdots \times \dfrac{G}{G_{x_t}} \\ & g & \mapsto & (gG_{x_1}, \ldots, gG_{x_t}). \end{array}$$

ψ é um homomorfismo, pois:

$$\begin{aligned}(hg)\psi = & \ (hgG_{x_1}, \dots, hgG_{x_t}) \\ = & \ (hG_{x_1}gG_{x_1}, \dots, hG_{x_t}gG_{x_t}) \\ = & \ (hG_{x_1}, \dots, hG_{x_t})(gG_{x_1}, \dots, gG_{x_t}) \\ = & \ (h)\psi(g)\psi.\end{aligned}$$

Também ψ é injetora. De fato, se $g \in ker\ \psi$, então $(gG_{x_1} \dots, gG_{x_t}) = (G_{x_1}, \dots, G_{x_t})$, ou seja, $g \in G_{x_i}$ para todo $i = 1, \dots, t$. Devido a escolha de cada G_x devemos ter $g = 1$. Portanto, G é isomorfo a um subgrupo de $\dfrac{G}{G_{x_1}} \times \cdots \times \dfrac{G}{G_{x_t}}$. Agora resta mostrarmos que cada $H_{x_i} = \dfrac{G}{G_{x_i}}$ é um grupo de ordem livre de quadrado. Observamos que como G satisfaz (i) e (ii) cada H_{x_i} tem também as propriedades (i) e (ii). Além disso, cada H_{x_i} tem a seguinte propriedade :

(iii) H_{x_i} contém um único subgrupo normal minimal.

Com efeito, sejam $\dfrac{L}{G_{x_i}}$ e $\dfrac{K}{G_{x_i}}$ dois subgrupos normais minimais de H_{x_i}. Como G_{x_i} é um subgrupo normal de maior ordem que não contém x_i, temos que $x \in L \cap K$, logo $G_{x_i} \subsetneq L \cap K \subseteq L$ e $G_{x_i} \subsetneq L \cap K \subseteq K$. Pela minimalidade de $\dfrac{L}{G_{x_i}}$ e $\dfrac{K}{G_{x_i}}$ teremos $L \cap K = L$ e $L \cap K = K$, isto é, $K = L$, deste modo, $\dfrac{L}{G_{x_i}} = \dfrac{K}{G_{x_i}}$.

Mostraremos agora que H_{x_i} é um grupo de ordem livre de quadrado. Por simplicidade de notação, vamos escrever H no lugar de H_{x_i}. Por (ii), o único subgrupo normal minimal de H é cíclico, digamos $\langle\ x\ \rangle$, e de ordem um primo p. Seja $C = C_H(x)$. É fácil ver que C é normal em H. Afirmamos que $C = \langle\ x\ \rangle$. Com efeito, se $\langle\ x\ \rangle \subsetneq C$ podemos escolher um subgrupo normal K de H, contido em C e que contenha $\langle\ x\ \rangle$ e tal que $\dfrac{K}{\langle\ x\ \rangle}$ é um fator principal de H. Por (ii) isto implicaria que $\dfrac{K}{\langle\ x\ \rangle}$ é cíclico de ordem prima q e, portanto, $|K| = pq$. Se $p = q$, então $|K| = p^2$ e temos que K é abeliano. Se $p \neq q$ existe um subgrupo J de K, tal que $|J| = q$, assim, $J = \langle\ y\ \rangle$ para algum $y \in K$. Como $K \subseteq C$, $y \in C$, desta forma, $K = \langle\ x\ \rangle\langle\ y\ \rangle$ é abeliano. Agora vamos mostrar que $p = q$. Se $p \neq q$, como K é abeliano, $\langle\ y\ \rangle$ é um q-subgrupo de Sylow normal em K e, consequentemente, $\langle\ y\ \rangle$ é característico em K. Logo, $\langle\ x\ \rangle$ é normal em H. Pelo fato da ordem de $\langle\ y\ \rangle$ ser q obtemos que $\langle\ y\ \rangle$ é um subgrupo minimal de H diferente de $\langle\ x\ \rangle$, o que contradiz a propriedade (iii). Sendo assim $p = q$, e por (i), K é abeliano elementar de ordem p^2.

Notemos que o homomorfismo

$$\begin{array}{rcll} \varphi: & H & \longrightarrow & Aut(K) \cong GL(K,\mathbb{Z}_p) \\ & g & \mapsto & \varphi_g : K \to K \\ & & & \quad y \mapsto y^g \end{array}$$

induz naturalmente um homomorfismo $\overline{\varphi} : H_0 \to Aut(K)$, onde $H_0 = \dfrac{H}{ker(\varphi)}$. Afirmamos que todo p-subgrupo de Sylow de H está contido em $ker(\varphi)$. Com efeito, os p-subgrupos de Sylow de H são abelianos elementares e pela Proposição 1.2 contém K. Portanto seus elementos comutam com todos elementos de K. Por outro lado

$$\begin{aligned} ker(\varphi) &= \{g \in H \,|\varphi_g = id\} \\ &= \{g \in H \,|(y)\varphi_g = y \ para\ todo\ y \in K\} \\ &= \{g \in H \,|gy = yg,\ para\ todo\ y \in K\}. \end{aligned}$$

Isto nos mostra que todo p-subgrupo de Sylow de H está contido no $ker(\varphi)$. Com isso concluímos que p não divide a ordem de H_0, portanto, $\overline{\varphi}$ é completamente redutível pelo Teorema de Mascke (Teorema **??**) . Como H_0 deixa $\langle\, x \,\rangle$ invariante, consequentemente deixa invariante um segundo subgrupo cíclico $\langle\, z \,\rangle$ de K tal que $K = \langle\, x \,\rangle \times \langle\, z \,\rangle$. Então $\langle\, z \,\rangle$ é um subgrupo normal minimal de H diferente de $\langle\, x \,\rangle$, o que não pode ocorrer já que H possui um único subgrupo normal minimal. Concluímos, desta forma, que $C = \langle\, x \,\rangle$ e consequentemente $\dfrac{H}{\langle\, x \,\rangle}$ é isomorfo a um subgrupo do grupo dos automorfismos de $\langle\, x \,\rangle$. Agora, como $\langle\, x \,\rangle$ é cíclico de ordem p, $Aut(\langle\, x \,\rangle)$ é cíclico de ordem $p-1$, portanto, $\dfrac{H}{\langle\, x \,\rangle}$ é cíclico de ordem m, onde m é um divisor de $p-1$. Pela propriedade (i), H não contém subgrupo cíclico de ordem quadrado de um primo, o que resulta que m deve ser livre de quadrado e, portanto, H é um grupo de ordem livre de quadrado. Isso prova o teorema. □

Juntando todos os resultados desta seção podemos caracterizar os grupos complementados.

Teorema 2.16. (P. Hall). *Um grupo finito G é supersolúvel com subgrupos de Sylow abelianos elementares se, e somente se, G é complementado.*

Demonstração: Se G é complementado temos, pela Proposição 2.14, que G é supersolúvel com seus subgrupos de Sylow abelianos elementares. Reciprocamente, se G é supersolúvel com subgrupos de Sylow abelianos elementares, pela Proposição 2.15, temos que G é isomorfo a um subgrupo do produto direto de um certo número de grupos de ordem livre de quadrados. Agora como cada fator H do produto direto é um grupo de ordem livre de quadrado, cada fator H é solúvel pelo Corolário 1.21. Desta forma, se K é um subgrupo de H de ordem m, como a ordem de H é livre de quadrado, $(m, n) = 1$, onde $n = [H : K]$. Assim, pelo Teorema de P. Hall (Teorema 2.4), temos que H possui um subgrupo L de ordem n. É fácil ver que $H = KL$ e $K \cap L = 1$, mostrando assim que L é um complemento de K em H. Portanto, H é complementado. Agora, pela Proposição 2.13, temos que o produto direto de grupos complementados é complementado e subgrupos de grupos complementados são complementados. Portanto G é complementado, como queríamos. □

2.3 Torre de Sylow do Tipo Supersolúvel

Nesta seção estudaremos a torre de Sylow do tipo supersolúvel. Veremos que todo grupo que possui uma torre de Sylow do tipo supersolúvel é solúvel, mas a recíproca não é verdadeira.

Definição 2.17. Seja G um grupo finito de ordem $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, onde $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ são primos. Se

$$P_k, P_k P_{k-1}, \cdots, P_k P_{k-1} \dots P_2 \tag{2.6}$$

são subgrupos normais de G, onde P_i é um p_i-subgrupo de Sylow de G, $i = 1, \dots, k$, então (2.6) é chamado uma *torre de Sylow de G do tipo supersolúvel*.

Apresentamos a seguir uma classe de grupos que sempre possuem uma torre de Sylow do tipo supersolúvel.

Proposição 2.18. *Se G um grupo supersolúvel finito, então G possui uma torre de Sylow do tipo supersolúvel.*

Demonstração: Seja $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, onde $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ são primos. Como G é um grupo supersolúvel finito, pelo Teorema 1.30, obtemos que G possui uma série normal onde todos os grupos fatores tem ordem prima, digamos $G = G_{1,0} \geq G_{1,1} \geq \cdots \geq$

$G_{1,\alpha_1} \geq G_{2,1} \geq \cdots \geq G_{2,\alpha_2} \geq \cdots \geq G_{k,1} \geq \cdots \geq G_{k,\alpha_k} = 1$. Além disso, podemos supor que as ordens de cada grupo fator estão em ordem não decrescente, isto é,

$$\left|\frac{G_{1,0}}{G_{1,1}}\right| = p_1, \left|\frac{G_{1,1}}{G_{1,2}}\right| = p_1, \ldots, \left|\frac{G_{1,\alpha_1}}{G_{2,1}}\right| = p_2, \ldots, \left|\frac{G_{k,\alpha_k-1}}{G_{k,\alpha_k}}\right| = p_k.$$

Desta forma, notemos que

$$|G_{k-1,\alpha_{k-1}}| = p_k^{\alpha_k}, |G_{k-2,\alpha_{k-2}}| = p_k^{\alpha_k} p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}, \ldots, |G_{1,\alpha_1}| = p_k^{\alpha k} p_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \ldots p_2^{\alpha_2}$$

e cada um desses grupos são normais em G. Sendo assim $G_{k-1,\alpha_{k-1}}$ é um p_k-subgrupo de Sylow. Como ele é normal é único, portanto, $G_{k-1,\alpha_{k-1}} = P_k$. Agora podemos dizer então que se P_{k-1} é um p_{k-1}-subgrupo de Sylow de G temos que $P_k P_{k-1}$ é um subgrupo de G. Se considerarmos $\pi = \{p_{k-1}, p_k\}$, teremos que $P_k P_{k-1}$ é um π-subgrupo de Hall de G, logo pelo Teorema de P. Hall (Teorema 2.4) temos que os π-subgrupos de Hall são conjugados entre si. Como $G_{k-2,\alpha_{k-2}}$ também é um π-subgrupo de Hall de G concluímos que existe $g \in G$ tal que $P_k P_{k-1} = (G_{k-2,\alpha_{k-2}})^g = G_{k-2,\alpha_{k-2}}$, já que $G_{k-2,\alpha_{k-2}}$ é normal em G. Assim $P_k P_{k-1}$ é normal em G. Repetindo a argumentação usada acima provamos que $P_k, P_k P_{k-1}, \cdots, P_k P_{k-1} \ldots P_2$ são subgrupos normais de G. $\square$

A proposição anterior mostra que todo grupo supersolúvel finito tem uma torre de Sylow do tipo supersolúvel, mas a recíproca não é verdadeira.

Exemplo 2.19. *Seja $H = \langle\, a, b \mid a^3 = b^3 = 1,\, ab = ba \,\rangle$. Primeiramente, não é difícil ver que existe um automorfismo τ de H tal que $(a)\tau = b$, $(b)\tau = a^{-1}$ e que $o(\tau) = 4$. Agora o produto semi-direto $G = \langle\, \tau \,\rangle \ltimes_\varepsilon H$, onde ε é o homomorfismo inclusão de $\langle\, \tau \,\rangle$ em $Aut(H)$, tem ordem 36, e possui um subgrupo de Sylow normal de ordem 9, mas não possui subgrupo normal de ordem 3. Com efeito, o subgrupo $L = \langle\, 1 \,\rangle \ltimes_\varepsilon H$ é um 3-subgrupo de Sylow de G e é único. Os subgrupos de ordem 3 estão contidos em L. É fácil ver que todo elemento de ordem 3, quando conjugado por $(\tau, (1, 1))$, não está no subgrupo gerado por ele, portanto, os subgrupos de ordem 3 não são normais. Vamos mostrar que G não é supersolúvel. Suponhamos, por absurdo, que G seja supersolúvel, assim, pelo Teorema 1.31, todo fator principal de G tem ordem prima. Mas, como G não possui subgrupo normal de ordem 3, L é isomorfo a um fator principal de G e não possui ordem prima. Concluímos, deste modo, que G não é supersolúvel.Para finalizarmos, podemos ver facilmente que G possui uma torre de Sylow do tipo supersolúvel, já que L é um 3-subgrupo de Sylow normal de G.*

O resultado a seguir mostra uma aplicação para a torre de Sylow do tipo supersolúvel.

Proposição 2.20. *Se G é um grupo finito e G possui uma torre de Sylow do tipo supersolúvel, então G é solúvel.*

Demonstração: Seja $P_k \subseteq P_k P_{k-1} \subseteq \ldots \subseteq P_k P_{k-1} \ldots P_2$ uma torre de Sylow do tipo supersolúvel. Desta forma, a série $G \geq P_k \ldots P_2 \geq \cdots \geq P_k$ é uma série normal de G. Como P_k é um p_k-grupo, P_k é solúvel. Já que $\dfrac{P_k P_{k-1}}{P_k}$ é um p_{k-1}-grupo é também solúvel. Sendo assim, $P_k P_{k-1}$ é solúvel. Agora temos que $P_k P_{k-1}$ e $\dfrac{P_k P_{k-1} P_{k-2}}{P_k P_{k-1}}$ são solúveis. Logo obtemos que $P_k P_{k-1} P_{k-2}$ é solúvel. Da mesma forma feita anteriormente, concluímos que cada subgrupo da série normal acima é solúvel e, portanto, G é solúvel. □

A recíproca deste resultado não vale como mostra o

Exemplo 2.21. *O grupo A_4 é solúvel, mas não possui uma torre de Sylow do tipo supersolúvel, pois A_4 não possui um subgrupo normal de ordem 3.*

Capítulo 3

p-nilpotência

Neste capítulo, daremos uma breve introdução sobre p-nilpotência e formações, estudaremos o homomorfismo transfer com o intuito de obtermos a demonstração do Teorema de Frobenius, que fornece uma condição necessária e suficiente para a p-nilpotência de um grupo finito.

3.1 p-nilpotência

Daremos uma definição que será muito utilizada a partir daqui.

Definição 3.1. Seja G um grupo finito e seja p um divisor primo de $|G|$. Dizemos que G é *p-nilpotente* se G possui um p'-subgrupo de Hall normal.

Se G é um grupo finito p-nilpotente e P é um p-subgrupo de Sylow de G, então $G = PO_{p'}(G)$. De fato, como G é p-nilpotente, G possui um p'-subgrupo de Hall normal de G, o qual deve ser $O_{p'}(G)$ já que $O_{p'}(G)$ é o único p'-subgrupo normal maximal de G. Desta forma, obtemos que $PO_{p'}(G) \leq G$ e como $|PO_{p'}(G)| = |G|$, concluímos que $PO_{p'}(G) = G$.

É fácil ver que todo grupo nilpotente é p-nilpotente. Também temos que se G é p-nilpotente para todo p divisor primo da ordem de G, então G é nilpotente.

Observação 3.2. *É fácil ver que se G possui uma torre de Sylow do tipo supersolúvel e p é o menor divisor primo de $|G|$, então G é p-nilpotente.*

3.2 Formações

Nesta seção daremos uma breve introdução de formações.

Uma classe de grupos finitos $\mathscr{F}$ é dito uma *formação* se $\mathscr{F}$ satisfizer as seguintes condições:

1. Se $G \in \mathscr{F}$, então toda imagem homomórfica de G também está em $\mathscr{F}$.
2. Se N_1 e N_2 são subgrupos normais de G, tais que $\dfrac{G}{N_1}$ e $\dfrac{G}{N_2}$ pertencem a $\mathscr{F}$, então $\dfrac{G}{N_1 \cap N_2}$ pertence a $\mathscr{F}$.

Alguns exemplos de formações serão dados a seguir.

Exemplo 3.3. *As classe dos grupos solúveis finitos é uma formação. De fato, sejam H e K dois subgrupos normais de um grupo G tais que $\dfrac{G}{H}$ e $\dfrac{G}{K}$ sejam solúveis. Vamos mostrar que $\dfrac{G}{H \cap K}$ é solúvel. Considere o homomorfismo*

$$\begin{array}{rccc} \pi: & G & \longrightarrow & \dfrac{G}{H} \times \dfrac{G}{K} \\ & g & \mapsto & (gH, gK). \end{array}$$

Claramente $ker(\pi) = H \cap K$. Assim, pelo Teorema do Isomorfismo, temos que $\dfrac{G}{H \cap K} \cong Im\ \pi \subseteq \dfrac{G}{H} \times \dfrac{G}{K}$. Como produto direto de grupos solúveis é solúvel resulta que $\dfrac{G}{H \cap K}$ é solúvel.

Outros exemplos de formação são: a classe dos grupos finitos, a classe dos grupos abelianos finitos, a classe dos grupos nilpotentes finitos e a classe dos grupos supersolúveis finitos.

Exemplo 3.4. *Considere o grupo abeliano $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, assim, os subgrupos $H = \langle\ (1,0)\ \rangle$ e $K = \langle\ (0,1)\ \rangle$ são subgrupos normais de G e $\dfrac{G}{H}$ e $\dfrac{G}{K}$ são grupos cíclicos já que ambos possuem ordem 2. Agora $H \cap K = \langle\ (0,0)\ \rangle$, logo, $\dfrac{G}{H \cap K} \cong G$, que não é cíclico, pois não possui elemento de ordem 4.*

Desta forma, a classe dos grupos cíclicos é um exemplo de uma classe de grupos que não é uma formação.

Definição 3.5. Uma formação $\mathscr{F}$ é dita *saturada*, se $G \in \mathscr{F}$ sempre que $\dfrac{G}{\phi(G)} \in \mathscr{F}$.

Exemplo 3.6. *A classe dos grupos supersolúveis finitos é uma formação saturada. De fato, se* $\dfrac{G}{\phi(G)}$ *é supersolúvel, então pelo Teorema 1.31, todo subgrupo maximal* $\dfrac{M}{\phi(G)}$ *de* $\dfrac{G}{\phi(G)}$ *possui índice primo. Pela definição do subgrupo de Frattini,* $\phi(G)$ *está contido em todo subgrupo maximal de* G*, portanto, se* L *é um subgrupo maximal de* G *teremos que* $\dfrac{L}{\phi(G)}$ *é um subgrupo maximal de* $\dfrac{G}{\phi(G)}$*. Agora* $[G:L] = \left[\dfrac{G}{\phi(G)} : \dfrac{L}{\phi(G)}\right]$ *que é primo para todo subgrupo maximal* L *de* G*. Assim da Proposição 1.34, segue que* G *é supersolúvel.*

A classe dos grupos solúveis finitos e a classe dos grupos nilpotentes finitos são outros exemplos de formações saturadas.

Exemplo 3.7. *O grupo diedral de ordem 8,* D_4*, é um* 2*-grupo, portanto, pela Proposição 1.37, temos que* $\dfrac{D_4}{\phi(D_4)}$ *é abeliano elementar, logo é abeliano, mas* D_4 *não é abeliano.*

Com isso a classe dos grupos abelianos finitos é um exemplo de uma classe que não é uma formação saturada.

3.3 O Homomorfismo Transfer

Nesta seção estudaremos o homomorfismo transfer, com o intuito de conseguir alguns resultados sobre a p-nilpotência de um grupo.

Seja G um grupo e seja H um subgrupo com índice finito n em G. Escolhemos uma transversal à direita $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ para H em G. Temos que se multiplicarmos à direita uma classe lateral por um elemento de G, teremos uma classe lateral à direita, assim, $Ht_ig = Ht_{(i)g}$ para algum $(i)g \in \{1, \ldots, n\}$. É claro que a aplicação $i \mapsto (i)g$ é uma permutação do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Como $Ht_ig = Ht_{(i)g}$ temos que $t_igt_{(i)g}^{-1} \in H$. Suponhamos que $\theta : H \to A$ seja um homomorfismo de H em algum grupo abeliano A. Então o *transfer* de θ é a aplicação $\theta^* : G \to A$ definida por

$$(x)\theta^* = \prod_{i=1}^{n} (t_ixt_{(i)x}^{-1})\theta,$$

para todo $x \in G$.

O próximo lema garante que a aplicação θ^* é um homomorfismo e independe da transversal escolhida, isto é, para qualquer transversal que escolhermos a função θ^* obtida será a mesma.

Proposição 3.8. *A aplicação $\theta^* : G \to A$ é um homomorfismo o qual não depende da escolha da transversal.*

Demonstração: Vamos primeiro estabelecer a independência da transversal. Seja $\{t'_1, \ldots, t'_n\}$ outra transversal à direita de H em G e suponhamos que $Ht_i = Ht'_i$ e $t'_i = h_i\, t_i$ com h_i em H. Então se $x \in G$,

$$t'_i\, x\, t'^{-1}_{(i)x} = h_i\, t_i\, x\, t^{-1}_{(i)x}\, h^{-1}_{(i)x}$$

e, portanto, como A é abeliano,

$$\prod_{i=1}^{n}(t'_i\, x\, t'^{-1}_{(i)x})\theta = \prod_{i=1}^{n}(t_i\, x\, t^{-1}_{(i)x})\theta \prod_{i=1}^{n}(h_i)\theta\, (h^{-1}_{(i)x})\theta.$$

Agora, como $(i)x$ percorre o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ quando i o percorre e A é abeliano segue que $\prod_{i=1}^{n}(h_i)\theta\, (h^{-1}_{(i)x})\theta = 1$ o que resulta que $\prod_{i=1}^{n}(t'_i\, x\, t'^{-1}_{(i)x})\theta = \prod_{i=1}^{n}(t_i\, x\, t^{-1}_{(i)x})\theta$, isto é, θ^* independe da escolha da transversal. Para mostrarmos que θ^* é um homomorfismo sejam $x, y \in G$, então

$$(xy)\theta^* = \prod_{i=1}^{n}(t_i\, xy\, t^{-1}_{(i)xy})\theta = \prod_{i=1}^{n}(t_i\, xt^{-1}_{(i)x}\, t_{(i)x}\, y\, t^{-1}_{(i)xy})\theta.$$

Como θ é um homomorfismo de H em A e $(i)x$ percorre o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ quando i o percorre temos,

$$\prod_{i=1}^{n}(t_i\, xt^{-1}_{(i)x}\, t_{(i)x}\, y\, t^{-1}_{(i)xy})\theta = \prod_{i=1}^{n}(t_i\, xt^{-1}_{(i)x})\theta \prod_{(i)x=1}^{n}(t_{(i)x}\, y\, t^{-1}_{(i)xy})\theta = (x)\theta^*(y)\theta^*,$$

mostrando que θ^* é um homomorfismo. □

Vamos agora procurar uma forma mais fácil de calcular $(x)\theta^*$ para um certo elemento x de G. Para tal objetivo, como θ^* não depende da transversal, podemos escolher uma transversal à direita de modo que fique mais fácil de calcular $(x)\theta^*$. Continuaremos com a notação acima.

Considere a seguinte ação de $\langle\, x \,\rangle$ sobre $Y = \{Ht_1, \dots, Ht_n\}$,

$$\begin{array}{rccl} \alpha: & \langle\, x \,\rangle \times Y & \longrightarrow & Y \\ & (a, Ht_i) & \mapsto & Ht_i a. \end{array}$$

É fácil ver que para cada $s \in \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, a órbita de Hs tem a forma

$$\mathcal{O}(Hs) = \{Hs, Hsx, \dots, Hsx^{l-1}\},$$

onde x^l é a primeira potência positiva de x tal que $Hsx^l = Hs$. Podemos escrever Y como uma união disjunta de órbitas

$$Y = \{Hs_1, \dots, Hs_1x^{l_1-1}\} \cup \{Hs_2, \dots, Hs_2x^{l_2-1}\} \cup \ldots \cup \{Hs_k, \dots, Hs_kx^{l_k-1}\},$$

da seguinte forma: primeiro tomamos a órbita de Hs_1,

$$\{Hs_1, Hs_1x, \dots, Hs_1x^{l_1-1}\},$$

onde s_1 é um elemento qualquer da transversal. Se $Y = \mathcal{O}(Hs_1)$, acabou, caso contrário, escolhemos $s_2 \in Y$ tal que $Hs_2 \notin \mathcal{O}(Hs_1)$ e consideremos $\mathcal{O}(Hs_2)$. Se

$$Y = \{Hs_1, \dots, Hs_1x^{l_1-1}\} \cup \{Hs_2, \dots, Hs_2x^{l_2-1}\},$$

já temos o que queremos, senão repetindo o processo acima tantas vezes quanto necessário concluiremos que existem $s_1, s_2, \dots, s_k \in \{t_1, \dots, t_n\}$ e inteiros positivos $l_1, l_2, \dots, l_k$ tais que

$$Y = \mathcal{O}(Hs_1) \cup \mathcal{O}(Hs_2) \cup \ldots \cup \mathcal{O}(Hs_k) \tag{3.1}$$

e $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} l_i = n$. Com esta construção, os elementos

$$s_ix^j,\ i = 1, \dots, k \text{ e } j = 1, \dots, l_i - 1,$$

formam uma transversal à direita para H. Vamos agora usar esta transversal para calcular $(x)\theta^*$. Usando a informação que $Hs_ix^{l_i} = Hs_i$ calculemos:

$$\begin{array}{rl} (x)\theta^* = & [(s_1x)(s_1x)^{-1}(s_1x^2)(s_1x^2)^{-1} \ldots (s_1x^{l_1-1})(s_1x^{l_1-1})^{-1}(s_1x^{l_1}s_1^{-1})]\theta \\ & [(s_2x)(s_2x)^{-1}(s_2x^2)(s_2x^2)^{-1} \ldots (s_2x^{l_1-1})(s_2x^{l_1-1})^{-1}(s_2x^{l_1}s_2^{-1})]\theta \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & [(s_kx)(s_kx)^{-1}(s_kx^2)(s_kx^2)^{-1} \ldots (s_kx^{l_1-1})(s_kx^{l_1-1})^{-1}(s_kx^{l_k}s_k^{-1})]\theta. \end{array}$$

Assim, $(x)\theta^*$ se reduz a

$$(x)\theta^* = \prod_{i=1}^{k}(s_i x^{l_i} s_i^{-1})\theta.$$

Com isso acabamos de demonstrar o seguinte lema.

Lema 3.9. *Seja H um subgrupo de um grupo G de índice finito n e seja $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ uma transversal à direita de H em G. Para cada elemento x de G, existem elementos $s_1, s_2, \ldots, s_k$ da transversal e inteiros positivos $l_1, l_2, \ldots, l_k$ tais que o conjunto das classes laterais à direita de H em G é escrito como uma união de órbitas como em (3.1) e $\sum_{i=1}^{k} l_i = n$. Se $\theta : H \to A$ é um homomorfismo de H em um grupo abeliano A, então*

$$(x)\theta^* = \prod_{i=1}^{k}(s_i x^{l_i} s_i^{-1})\theta.$$

Faremos um exemplo usando este método para calcular $(x)\theta^*$ para algum elemento x de G.

Exemplo 3.10. *Consideremos $G = D_4 = \langle\, a, b \mid a^4 = 1 = b^2, b^{-1}ab = b^{-1}\,\rangle$, $H = \langle\, b\,\rangle$, $A = \mathbb{Z}_8$, $T = \{1, a, a^2, a^3\}$ e o homomorfismo $\theta : H \longrightarrow \mathbb{Z}_8$ definido por $(b^r)\theta = 4r$, para todo $r \in \mathbb{Z}$. Com o método dado acima, vamos calcular $(ab)\theta^*$. Tomemos $s_1 = a$, assim,*

$$\mathcal{O}(Ha) = \{Ha, Ha(ab)\} = \{Ha, Ha^2\}.$$

Agora tomemos $s_2 = a^3$, logo,

$$\mathcal{O}(Ha^3) = \{Ha^3, H\}.$$

Notemos que,

$$\{H, Ha, Ha^2, Ha^3\} = \mathcal{O}(Ha) \cup \mathcal{O}(Ha^3).$$

Usando o método acima

$$(ab)\theta^* = (a(ab)^2a^{-1})\theta(a^3(ab)^2(a^3)^{-1})\theta = (1)\theta(1)\theta = 0.$$

Seja P um p-subgrupo de Sylow de um grupo finito G. Como $\frac{P}{P'}$ é abeliano podemos calcular o transfer do homomorfismo canônico de $P \to \frac{P}{P'}$. Chamaremos tal transfer de *transfer de G em P*.

Seja G um grupo. Denotaremos a interseção de todos os subgrupos normais N tais que $\frac{G}{N}$ seja um p-grupo abeliano por $G'(p)$.

É fácil ver que o grupo quociente $\dfrac{G}{G'(p)}$ é o maior p-quociente abeliano de G. A notação $G'(p)$ nos faz lembrar do subgrupo derivado de G, mas levando em conta que $\dfrac{G}{G'(p)}$ é um p-grupo abeliano, portanto, abeliano, concluímos que $G' \subseteq G'(p)$. Nosso próximo resultado nos fornece uma forma de encontrar $G'(p)$.

Proposição 3.11. *Seja $\tau : G \longrightarrow \dfrac{P}{P'}$ o homomorfismo transfer de um grupo finito G em um p-subgrupo de Sylow P. Então $G'(p)$ é o núcleo de τ e $P \cap G'$ é o núcleo da restrição de τ a P.*

Demonstração: Escrevamos $K = ker(\tau)$. Em primeiro lugar $G'(p) \subseteq K$, já que $\dfrac{G}{K}$ é um p-grupo abeliano. Agora vamos decompor o conjunto das classes laterais à direita de P em órbitas como em (3.1), com isso temos

$$(x)\tau = P' \prod_{i=1}^{k} s_i x^{l_i} s_i^{-1}.$$

Agora $G = PG'(p)$, de modo que podemos escolher s_i em $G'(p)$. Logo podemos escrever $(x)\tau = P'x^n c$ onde $n = [G : P]$ e $c \in G'(p)$. Assim $x \in K$ implica que $x^n \in P'G'(p) = G'(p)$. Disto segue que $\dfrac{K}{G'(p)}$ é um p'-grupo, o que significa que $K = G'(p)$. Finalmente $P \cap ker(\tau) = P \cap G'(p) = P \cap G'$, já que $\dfrac{G'(p)}{G'}$ é um p'-grupo. $\square$

Observação 3.12. *É uma consequência imediata da proposição anterior que $Im\ \tau \cong \dfrac{G}{G'(p)}$. Agora $\dfrac{G}{G'(p)}$ é isomorfo ao p-subgrupo de Sylow de $\dfrac{G}{G'}$, isto é,*

$$\frac{G}{G'(p)} \cong \frac{PG'}{G'} \cong \frac{P}{P \cap G'}.$$

Logo teremos, $Im\ \tau \cong \dfrac{P}{P \cap G'}$.

Os Teoremas de Grün que serão provados a seguir nos fornecem uma expressão para o núcleo e para a imagem do transfer em um subgrupo de Sylow.

Teorema 3.13. (Primeiro Teorema de Grün): *Seja G um grupo finito e seja P um p-subgrupo de Sylow de G. Se $N = N_G(P)$ e $\tau : G \longrightarrow \dfrac{P}{P'}$ é o transfer de G em P, então*

$$P \cap ker(\tau) = P \cap G' = \langle\ P \cap N', P \cap (P')^g : g \in G\ \rangle.$$

Demonstração: A primeira igualdade $P \cap ker(\tau) = P \cap G'$ já foi mostrada no Teorema 3.11. Basta agora mostrarmos que $P \cap G' = \langle\ P \cap N', P \cap (P')^g : g \in G\ \rangle$. Para isto, indiquemos por D o subgrupo $\langle\ P \cap N', P \cap (P')^g : g \in G\ \rangle$. Como N' e $(P')^g$ são subgrupos de G', obtemos que $D \leq P \cap G'$. Além disso, $D \lhd P$. De fato, se $x \in D$, então x é da forma $x = x_1 x_2 \ldots x_n$, onde cada x_i está em $P \cap N'$ ou em $\cup_{g \in G} P \cap (P')^g$. Assim para todo $h \in P$ temos

$$x^h = (x_1 x_2 \ldots x_n)^h = x_1^h x_2^h \ldots x_n^h.$$

Mas se $x_i \in P \cap (P')^g$, para algum $g \in G$, então $x_i^h \in P \cap (P')^{g_1}$, para algum $g_1 \in G$. Se $x_i \in P \cap N'$, então $x_i^h \in P \cap N'$, do que decorre que $x^h \in D$, portanto, $D \lhd P$. Vamos mostrar agora que $P \cap G' \leq D$. Suponhamos, por absurdo, que $P \cap G' \nleq D$, isto é, existe ao menos um elemento em $P \cap G'$ que não pertence a D. Dentre tais, escolhemos u como sendo o de menor ordem em $(P \cap G') \setminus D$. Vamos calcular $(u)\tau$ por um refinamento do método do Lema 3.9. Para isto vamos decompor G em (P, P)-classes laterais duplas Px_jP, $j = 1, 2, \ldots, s$. Agora uma classe lateral dupla PxP é uma união de classes laterais da forma Pxy, com $y \in P$. Note que, por multiplicação à direita, P age transitivamente sobre o conjunto das classes laterais da forma Pxy, $y \in P$. Assim, o número de classes laterais da forma Pxy, $y \in P$ com Px fixado, é a cardinalidade da única órbita desta ação. Assim, este número divide $|P|$ e, por isso, igual a uma potência de p, digamos p^t. Multiplicando à direita por u as classes laterais Pxy, $y \in P$ teremos as órbitas da forma

$$(Pxy_i, Pxy_iu, \ldots Pxy_iu^{p^{m_i-1}}), \quad i = 1, 2, \ldots, r, \tag{3.2}$$

onde $y_i \in P$ e $u^{p^{m_i}}$ é a menor potência positiva de u tal que $Pxy_iu^{p^{m_i}} = Pxy_i$. Podemos reenumerar os índices destas órbitas de modo que

$$m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_r.$$

Agora substituindo xy_1 por x podemos supor $y_1 = 1$. Os elementos $xy_iu^j, i \in \{1, 2, \ldots, r\}, j \in \{0, 1, 2, \ldots, p^{m_i-1}\}$ formam parte de uma transversal à direita para P o qual pode ser usado para calcular $(u)\tau$. Vamos calcular a contribuição da órbita (3.2) para $(u)\tau$. Esta é $P'v_i$, onde

$$v_i = xy_iu^{p^{m_i}}y_i^{-1}x^{-1} = (u^{p^{m_i}}[u^{p^{m_i}}, y^{-1}])^{x^{-1}}, \tag{3.3}$$

um elemento de P. Tomando $i = 1$, deduzimos que $(u^{p^{m_1}})^{x^{-1}} \in P$ já que $y = 1$. Agora, como $m_1 \leq m_i$, $(u^{p^{m_i}})^{x^{-1}}$ será uma potência de $(u^{p^{m_1}})^{x^{-1}}$, portanto, $(u^{p^{m_i}})^{x^{-1}} \in P$, para todo i e, segue da Equação (3.3) que $c = [u^{p^{m_i}}, y^{-1}]^{x^{-1}} \in P$. Além disso, $c \in (P')^{x^{-1}}$ o que significa que $c \in D$, consequentemente $v_i \equiv (u^{p^{m_i}})^{x^{-1}} mod\ D$. A contribuição total para $(u)\tau$ da classe lateral dupla PxP é, portanto,

$$\omega(x) = \prod_{i=1}^{r} v_i \equiv (u^{p^t})^{x^{-1}}\ mod\ D, \tag{3.4}$$

já que $\sum_{i=1}^{r} p^{m_i} = p^t$. Vamos dividir em dois casos: quando $t = 0$ e quando $t > 0$. Suponhamos $t > 0$. Como $\omega(x) \in P$ e $u \in P \cap G' = P \cap ker\ \tau$ temos $(u^{p^t})^{x^{-1}} \in P \cap ker\ \tau$, pela Equação (3.4). Pela minimalidade da ordem de u obtemos $(u^{p^t})^{x^{-1}} \in D$. Pela mesma razão $u^{p^t} \in D$. Desta forma,

$$\omega(x) \equiv (u^{p^t})^{x^{-1}} mod\ D,\ (u^{p^t})^{x^{-1}} \equiv 1 mod\ D \text{ e } 1 \equiv u^{p^t} mod\ D,$$

portanto,

$$\omega(x) \equiv u^{p^t} mod\ D.$$

Agora se $t = 0$, então $PxP = Px$, o que é equivalente a $x \in N$. Logo PxP contribui $P'xux^{-1} = P'u[u, x^{-1}]$ para $(u)\tau$. É fácil ver que $[u, x^{-1}] \in P \cap N' \leq D$. Disto segue que

$$[u, x^{-1}] = u^{-1}u^{x^{-1}} \in D, \text{ o que implica, } u^{x^{-1}} \equiv u\ mod\ D.$$

Isto nos diz que $\omega(x) \equiv u^{p^t} mod\ D$. Assim, $\prod_{j=1}^{s} \omega(x_j) \equiv u^l mod\ D$, onde $l = \sum_{j=1}^{s} p^{t_j}$ e p^{t_j} é o número de classes laterais Px_jy em PxP. Então $l = [G : P]$ é o número de classes laterais à direita de P em G. Como $u \in P \cap G'$, temos $(u)\tau = P' \leq D$, isto significa que $u^l \in D$. Agora, como p não divide l, obtemos que $u \in D$, o que é um absurdo. $\square$

Antes de apresentarmos o segundo Teorema de Grün daremos uma definição que será usada na demonstração. Se H e K são subgrupos de um grupo G, H é dito *fracamente fechado* em K se K contém H mas não contém nenhum outro conjugado de H, isto é, se $H \leq K$ e se tivermos $H^g \leq K$ para algum g em G, então $H = H^g$.

Definição 3.14. Seja G um grupo e seja P um p-subgrupo de Sylow de G. Dizemos que G é *p-normal* se o centro de P é fracamente fechado em P.

É fácil ver que grupos finitos cujos p-subgrupos de Sylow são abelianos e os grupos finitos os quais os p-subgrupos de Sylow distintos têm interseção trivial são p-normais.

Teorema 3.15. (Segundo Teorema de Grün): *Seja G um grupo finito p-normal e seja P um p-subgrupo de Sylow de G. Se $L = N_G(Z(P))$, então $P \cap G' = P \cap L'$ e* $\dfrac{G}{G'(p)} \cong \dfrac{L}{L'(p)}$

Demonstração: Em primeiro lugar concluímos da Proposição 3.11 e da Observação 3.12 que

$$\frac{G}{G'(p)} \cong \frac{P}{P \cap G'}.$$

E mais, como $P \leq L$, P é um p-subgrupo de Sylow de L e, portanto, pela Proposição 3.11 $\dfrac{L}{L'(p)} \cong \dfrac{P}{P \cap L'}$. Desta forma, para concluirmos o teorema resta apenas mostrarmos que $P \cap G' = P \cap L'$. Agora, o Primeiro Teorema de Grün diz que é suficiente mostrar que $P \cap N' \leq P \cap L'$, onde $N = N_G(P)$ e $P \cap (P')^g \leq P \cap L'$ para todo $g \in G$. Sendo $Z(P)$ característico em P, é evidente que $N \leq L$ e, assim, $P \cap N' \leq P \cap L'$. Agora resta mostrar que $P \cap (P')^g \leq P \cap L'$ para todo $g \in G$. Para isso coloquemos $I = P \cap (P')^g$, $P_0 = Z(P)$ e $M = N_G(I)$. Então $P_0 \leq M$ e $P_0^g \leq M$, já que $P_0^g = Z(P^g)$. Sejam P_1 e P_2 p-subgrupos de Sylow de M contendo P_0 e P_0^g respectivamente. É fácil ver que $P_1 = P_2^h$ para algum h em M. Visto que $P_1 \leq P^x$ para algum x em G, temos que $P_0 \leq P_1 \leq P^x$. Desta forma, P_0 e $P_0^{x^{-1}}$ ambos estão contidos em P. Pela p-normalidade de G obtemos que $P_0 = P_0^{x^{-1}}$. Além disso

$$P_0^{gh} \leq P_2^h = P_1 \leq P^x,$$

logo, pela p-normalidade novamente, temos

$$P_0^{gh} = P_0^x = P_0.$$

Assim $gh \in L$ e, portanto, $I = I^h = P^h \cap (P')^{gh} \leq L'$, pois como $P \leq L$ temos $P' \leq L'$. Disto segue que $I \leq P \cap L'$, como queríamos. □

Proposição 3.16. (Burnside): *Sejam P_1 e P_2 p-subgrupos de Sylow de um grupo finito G. Suponha que H é um subgrupo de $P_1 \cap P_2$ o qual é normal em P_1 mas não em P_2. Então existem um p-subgrupo M, um primo $q \neq p$ e um q-elemento g tal que $H \leq M$ e $g \in N_G(M) \backslash C_G(M)$.*

Demonstração: Dentre os p-subgrupos de Sylow de G que contenham H e não normalizem H escolhamos P_3 um p-subgrupo de Sylow de G tal que $N_{P_3}(H)$ seja o de maior ordem. Escrevamos $K = N_{P_3}(H)$. Como $K \leq N_G(H)$ e P_1 é um p-subgrupo de Sylow de $N_G(H)$, existe um elemento x em $N_G(H)$ tal que $K \leq P_1^x$. É claro que $H \lhd P_1$, o que implica que $H \lhd P_1^x$, o que nos fornece que podemos substituir, se necessário, P_1 por P_1^x. Assim podemos supor $K \leq P_1$, logo $K \leq P_1 \cap P_3 \leq K$, já que $H \lhd P_1$, deste modo, $K = P_1 \cap P_3$. Agora, como $P_1 \neq P_3$, temos que $K < P_1$ e $K < P_3$. Aplicando a Condição do Normalizador (Proposição 1.27), obtemos que

$$K < N_{P_1}(K) \leq P_1 \text{ e } K < N_{P_3}(K) \leq P_3.$$

Desta forma $K \lhd L = \langle\, N_{P_1}(K), N_{P_3}(K) \,\rangle$. Notemos que L não pode normalizar H, porque se ele assim fizesse, $N_{P_3}(K)$ estaria contido em $N_{P_3}(H) = K$. Vamos mostrar que existe um p-subgrupo de Sylow de L que normaliza H. Uma vez que $N_{P_1}(K)$ é um p-subgrupo de L, ele está contido em um p-subgrupo de Sylow de L, que está contido em um p-subgrupo de Sylow de G, digamos P_4. Observemos que $N_{P_1}(K) \leq N_{P_4}(H)$, pois se $y \in N_{P_1}(K) \leq P_4$, temos que $y \in P_1 \cap P_4$ e, como $H \lhd P_1$, então $H^y = H$, portanto, $y \in N_{P_4}(H)$. Afirmamos que P_4 normaliza H pois, caso contrário como $H \leq K < N_{P_1}(K) \leq P_4$ teríamos que $|N_{P_4}(H)| > |K|$ o que contraria a escolha de K. Segue disto que existe um p-subgrupo de Sylow T de L o qual normaliza H. Assim, como L não normaliza H, existe um primo $q \neq p$ e um q-subgrupo de Sylow Q de L tal que Q não normaliza H. Sejam $g \in Q \backslash N_G(H)$ e $M = H^{\langle\, g \,\rangle} = \langle\, \{h^{g^l}, h \in H,\ l \in \mathbb{Z}\} \,\rangle$. Temos que M é um p-grupo, pois se $x \in M$, x é da forma $x = h_1^{g^{l_1}} h_2^{g^{l_2}} \ldots h_n^{g^{l_n}}$, onde $h_i \in H$. Como $H \lhd K \lhd L$ e $Q \leq L$ temos que cada $h_i^{g^{l_i}} \in K$, que é um p-grupo, portanto, ordem de x é uma potência de p e, assim, M é um p-grupo. Obviamente $g \in N_G(M)$, mas $g \notin C_G(M)$, já que $g \notin C_G(H)$. $\square$

O próximo resultado nos fornece um critério para a p-nilpotência de um grupo G.

Teorema 3.17. (Frobenius): *Um grupo finito G é p-nilpotente se, e somente se, todo p-subgrupo é centralizado pelos p'-elementos de seu normalizador.*

Demonstração: Suponhamos que G é p-nilpotente e que P é um p-subgrupo de G. Então todos os p'-elementos pertencem a $O_{p'}(G)$, e é fácil ver que

$$[O_{p'}(G) \cap N_G(P), P] \leq P \cap O_{p'}(G) = 1.$$

Logo todo p'-elemento do normalizador de P em G centraliza P. Reciprocamente suponhamos que a condição seja satisfeita em G e seja P um p-subgrupo de Sylow de G. Iremos fazer a prova da p-nilpotência de G por indução sobre $|G|$. É claro que podemos supor $|P| > 1$. Coloquemos $C = Z(P)$ e $L = N_G(C)$. Então $1 \neq C \lhd L$ e $\dfrac{P}{C}$ é um p-subgrupo de Sylow de $\dfrac{L}{C}$. Vamos mostrar que todo p-subgrupo de $\dfrac{L}{C}$ é centralizado pelos p'-elementos de seu normalizador. Seja $\overline{P_1}$ um p-subgrupo de $\dfrac{L}{C}$. Existe um p-subgrupo P_1 de L tal que

$$\overline{P_1} = \frac{P_1C}{C} \quad \text{e} \quad N_{\frac{L}{C}}(\overline{P_1}) = \frac{N_L(P_1)C}{C}.$$

Seja gC um p'-elemento de $N_{\frac{L}{C}}(\overline{P_1})$, onde $g \in N_L(P_1)$. Se g não for um p'-elemento, como C é um p-subgrupo, então existe um elemento x de $N_L(P_1)$ tal que x é um p'-elemento e $gC = xC$. Disto segue que para todo yC de $\overline{P_1}$, com $y \in P_1$

$$xCyC = xyC = yxC = yCxC,$$

portanto, xC centraliza $\overline{P_1}$. Deste modo, pela hipótese de indução, $\dfrac{L}{C}$ possui um p'-subgrupo de Hall normal $\dfrac{Q}{C}$. Agora, pelo Teorema de Schur-Zassenhaus (Teorema 2.11), existe um complemento M de C em Q. Mas como M normaliza C e é um p'-subgrupo, ele centraliza C, já que C é um p-subgrupo de G e M está no seu normalizador. Assim $M \lhd Q$ e, portanto, $Q = M \times C$. Como $[L : M] = [L : Q][Q : M]$, temos que $[L : M]$ é uma potência de p. Além disso, M é único com sua ordem pelo Teorema de Schur-Zassenhaus (Teorema 2.11). Portanto M é característico em Q e sendo Q normal em L, segue que M é normal em L. Concluímos assim que $L = PM$ e consequentemente $P \cap L' \leq P \cap (P'M) = P'$. Logo $P \cap L' = P'$. Pela Proposição 3.16 e por nossas hipóteses temos que um subgrupo normal de um p-subgrupo de Sylow de G é normal em todo p-subgrupo de Sylow que o contém. Segue assim que todo p-subgrupo de Sylow que contém C está contido em L. Mas $L = PM$ e P e M centralizam C, de modo que $C \leq Z(L)$. Disto e da normalidade de C nos p-sugrupos de Sylow que o contém resulta que C está contido no centro de todo p-subgrupo de Sylow que o contém. Logo C é fracamente fechado em P, isto é, G é p-normal. Agora estamos nas hipóteses do Segundo Teorema de Grün (Teorema 3.15), portanto, $P \cap G' = P \cap L'$. Mas já vimos que $P \cap L' = P'$, assim de fato $P' = P \cap G'$ o qual é um p-subgrupo de Sylow de G'. Afirmamos que P' é um p-subgrupo de Sylow de $G'(p)$. Com efeito, se $|G| = p^\alpha b$ onde $p \nmid b$, então $|G'(p)| = p^r b$ e $|G'| = p^s \beta$, com $s \leq r \leq \alpha$ e $\beta | b$. Sendo $\dfrac{G}{G'}$ abeliano finito, existe $\dfrac{J}{G'} \leq \dfrac{G}{G'}$ com $\left|\dfrac{J}{G'}\right| = \dfrac{b}{\beta}$. Como $\dfrac{G/G'}{J/G'} \cong \dfrac{G}{J}$ temos que $\dfrac{G}{J}$ é um p-grupo abeliano. Observe que $|J| = p^s b$ mas, pela definição de $G'(p)$, temos que $G'(p) \subseteq J$, disso concluímos que $s = r$. Logo todo p-subgrupo de Sylow de G' é p-subgrupo de Sylow de $G'(p)$. Se $G'(p)$ fosse igual a G seguiria que $P = P'$ e $P = 1$, contrariando a nossa suposição que $P \neq 1$. Desta forma, $G'(p)$ é um subgrupo próprio de G e, por indução sobre $|G|$, $G'(p)$ é p-nilpotente. Seja $K = O_{p'}(G'(p))$. De K *char* $G'(p)$ e $G'(p) \lhd G$ resulta que $K \lhd G$. Notemos que K também é um p'-subgrupo de Hall de G, provando assim a p-nilpotência de G. $\square$

O resultado a seguir é uma aplicação do Teorema de Frobenius, e ainda nos fornece um critério para a nilpotência dos subgrupos maximais.

Teorema 3.18. (Itô): *Seja G um grupo finito o qual não é p-nilpotente mas todos seus subgrupos maximais são p-nilpotentes. Então G possui um p-subgrupo de Sylow normal P tal que $[G : P]$ é uma potência de um primo $q \neq p$. Além disso, todo subgrupo maximal de G é nilpotente.*

Demonstração: Como G não é p-nilpotente, o Teorema 3.17 mostra que existe um p-subgrupo P, um primo $q \neq p$ e um elemento g de ordem q^m tal que g normaliza mas não centraliza P. Agora $\langle\, g, P \,\rangle$ não pode ser p-nilpotente, novamente pelo Teorema 3.17. consequentemente $G = \langle\, g, P \,\rangle$ e $P \lhd G$. Assim $[G : P] = |g| = q^m$ e P é um p-subgrupo de Sylow de G. Agora seja H um subgrupo maximal qualquer de G. Como H é p-nilpotente, $\dfrac{H}{O_{p'}(H)}$ é um p-grupo, portanto nilpotente. E mais, $\dfrac{H}{H \cap P}$ é um q-grupo, portanto, é nilpotente e $P \cap O_{p'}(H) = 1$. Como a classe dos grupos nilpotentes finitos é uma formação e $H \cong \dfrac{H}{(H \cap P) \cap O_{p'}(H)}$ temos que H é nilpotente. $\square$

Segue do último teorema que se G é um grupo finito o qual não é p-nilpotente mas cujos subgrupos maximais são p-nilpotentes, então $|G| = p^n q^m$, com p e q primos e, portanto, concluímos do Teorema 1.17 que G é solúvel.

Teorema 3.19. (Doerk) *Seja G um grupo finito não supersolúvel mas cujos subgrupos próprios são todos supersolúveis. Então existe um subgrupo de Sylow normal P de G tal que $\dfrac{P}{\phi(P)}$ é um subgrupo normal minimal de $\dfrac{G}{\phi(P)}$.*

Demonstração: Primeiramente, vamos provar que se G satisfaz as condições do teorema, então existe um subgrupo de Sylow normal de G. Seja q o menor divisor primo da ordem de G. Vamos dividir a prova em dois casos, quando G é q-nilpotente e quando G não é q-nilpotente.

Caso 1: G não é q-nilpotente. Como todo subgrupo maximal de G é supersolúvel temos, pela Proposição 2.18, que todo subgrupo maximal de G tem uma torre de Sylow do tipo supersolúvel. Assim, pela Observação 3.2, todos os subgrupos maximais de G são q-nilpotentes. Agora, com estas condições, pelo Teorema de Itô (Teorema 3.18) existe um subgrupo de Sylow normal P de G.

Caso 2: G é q-nilpotente. Sendo G q-nilpotente, G possui um q'-subgrupo de Hall normal H e este é um subgrupo próprio de G, portanto, supersolúvel. Pela Proposição 2.18, H possui uma torre de Sylow do tipo supersolúvel, assim, H possui um subgrupo de Sylow normal P. Notemos que P também é um subgrupo de Sylow de G. De P *char* H e $H \lhd G$, obtemos que $P \lhd G$. Portanto, G possui um subgrupo de Sylow normal.

Vamos provar agora que $\dfrac{P}{\phi(P)}$ é um subgrupo normal minimal de $\dfrac{G}{\phi(P)}$. Suponhamos que $\dfrac{P}{\phi(P)}$ não seja um subgrupo normal minimal de $\dfrac{G}{\phi(P)}$. Então existe $\dfrac{K_1}{\phi(P)}$ um subgrupo próprio de $\dfrac{P}{\phi(P)}$ tal que $\dfrac{K_1}{\phi(P)}$ é um subgrupo normal de $\dfrac{G}{\phi(P)}$. Assim K_1 é um subgrupo normal de G. Notemos que o homomorfismo

$$
\begin{array}{rccc}
\varphi: & G/\phi(P) & \longrightarrow & Aut(P/\phi(P)) \cong \quad GL(2,p) \\
& \phi(G)g & \mapsto & \varphi_g : P/\phi(P) \longrightarrow P/\phi(P) \\
& & & \phi(G)y \mapsto \phi(G)y^g
\end{array}
$$

induz naturalmente um homomorfismo $\overline{\varphi} : G_0 \to Aut(P/\phi(P))$, onde $G_0 = \dfrac{G/\phi(P)}{ker(\varphi)}$. É fácil ver que $\dfrac{P}{\phi(P)}$ está contido no $ker(\varphi)$ e, como $\dfrac{P}{\phi(P)}$ é o único p-subgrupo de Sylow de $\dfrac{G}{\phi(P)}$, p não divide a ordem de G_0. Disto resulta, pelo Teorema de Maschke (Teorema 1.41), que $\overline{\varphi}$ é completamente redutível, desta forma existe $\dfrac{K_2}{\phi(P)}$ um subgrupo de $\dfrac{P}{\phi(P)}$, tal que

$$\frac{P}{\phi(P)} = \frac{K_1}{\phi(P)} \times \frac{K_2}{\phi(P)} \quad \text{e} \quad \frac{K_2}{\phi(P)} \lhd \frac{G}{\phi(P)}.$$

É claro que $K_1 \cap K_2 = \phi(P)$ e $P = K_1K_2$. Uma vez que $P \lhd G$, pelo Teorema de Schur-Zassenhaus (Teorema 2.11), G possui um p'-subgrupo de Hall Q. Do fato que K_1Q e K_2Q são subgrupos próprios de G, temos que K_1Q e K_2Q são supersolúveis. O grupo $\dfrac{G}{\phi(P)} = \dfrac{G}{K_1 \cap K_2}$ é isomórfo a um subgrupo de $\dfrac{G}{K_1} \times \dfrac{G}{K_2}$. Agora de $P = K_1K_2$ resulta que $G = K_1K_2Q$. Disto e do Teorema do Isomorfismo obtemos que

$$\frac{G}{K_1} = \frac{K_1K_2Q}{K_1} \cong \frac{K_2Q}{K_1 \cap (K_2Q)} = \frac{K_2Q}{\phi(P)}.$$

De modo análogo

$$\frac{G}{K_2} \cong \frac{K_1Q}{\phi(P)}.$$

Assim, $\frac{G}{K_1}$ e $\frac{G}{K_2}$ são supersolúveis e, da Proposição 1.29, segue que $\frac{G}{\phi(P)}$ é supersolúvel. Desta maneira, $\frac{G}{\phi(P)}$ possui uma série normal

$$\frac{G}{\phi(P)} = \frac{G_0}{\phi(P)} \geq \frac{G_1}{\phi(P)} \geq \cdots \geq \frac{G_n}{\phi(P)} = \frac{\phi(P)}{\phi(P)}, \tag{3.5}$$

onde cada grupo fator é cíclico. Como $\phi(P) \leq \phi(G)$, a série

$$\frac{G}{\phi(G)} = \frac{G_0}{\phi(G)} \geq \frac{G_1\phi(G)}{\phi(G)} \geq \cdots \geq \frac{G_n\phi(G)}{\phi(G)} = \frac{\phi(G)}{\phi(G)} \tag{3.6}$$

é finita e é também normal. Para mostrarmos que $\frac{G}{\phi(G)}$ é supersolúvel, temos que mostrar que cada grupo fator é cíclico. De fato, como $\frac{G_i}{G_{i+1}} \cong \frac{G_i/\phi(P)}{G_{i+1}/\phi(P)}$, existe $g \in G_i$ tal que $\frac{G_i}{G_{i+1}} = \langle\, gG_{i+1} \,\rangle$. Agora, $\frac{G_i\phi(G)}{G_{i+1}\phi(G)} \cong \frac{G_i\phi(G)/\phi(G)}{G_{i+1}\phi(G)/\phi(G)}$. Seja $xG_{i+1}\phi(G)$ um elemento de $\frac{G_i\phi(G)}{G_{i+1}\phi(G)}$, onde $x \in G_i$. É fácil ver que $xG_{i+1}\phi(G) = g^nG_{i+1}\phi(G)$ para algum inteiro n, portanto, $\frac{G_i\phi(G)}{G_{i+1}\phi(G)} = \langle\, gG_{i+1}\phi(G) \,\rangle$ e isto mostra que $\frac{G}{\phi(G)}$ é supersolúvel. Agora, do fato que a formação dos grupos supersolúveis finitos é saturada segue que G é supersolúvel, o que não pode ocorrer. Portanto, $\frac{P}{\phi(P)}$ é um subgrupo normal minimal de $\frac{G}{\phi(P)}$. □

Capítulo 4

Resultados de Guo e Shum

Neste capítulo todos os grupos considerados serão grupos finitos. Aqui estudaremos como os subgrupos minimais com complementos podem influenciar a estrutura do grupo. Em 1997 Ballester-Bolinches e Guo provaram que um grupo G é complementado se, e somente se, todo subgrupo minimal de G possui complemento em G, mostrando que a existência de complemento para os subgrupos minimais influenciam a estrutura do grupo. Mas esta influência não está restrita ao fato de todos os subgrupos minimais de G possuírem complemento em G. Em 2002 Guo e Shum provaram que se tivermos p o menor divisor primo da ordem de um grupo G e se P é um p-subgrupo de Sylow de G e se todo subgrupo minimal de $P \cap G'$ tem complemento em $N_G(P)$, então G é p-nilpotente. Apresentaremos aqui a demonstração destes teoremas.

Os resultados a seguir nos auxiliaram no estudo dos subgrupos com complementos.

Lema 4.1. *Seja G um grupo e seja N um subgrupo normal de G.*

(i) Se $H \leq K \leq G$ e H tem um complemento em G, então H tem um complemento em K.

(ii) Se N está contido em um subgrupo H e H tem um complemento em G, então $\frac{H}{N}$ tem um complemento em $\frac{G}{N}$.

(iii) Seja π um conjunto de números primos. Se N é um π'-subgrupo de G e A um π-subgrupo de G, então A tem um complemento em G se, e somente se, $\frac{AN}{N}$ tem um complemento em $\frac{G}{N}$.

Demonstração: A demonstração de (i) e (ii) é análoga a dos itens (i) e (ii) da Proposição 2.13.

(iii) Sejam N um π'-subgrupo de G e A um π-subgrupo de G o qual tem um complemento em G. Seja M um complemento de A em G. Então $G = MA$ e $M \cap A = 1$. Observamos que o maior π' número que divide a $|G|$ coincide com o maior π' número que divide a $|M|$, pois A é um π-subgrupo. Portanto o maior π' número que divide a $|NM|$ é igual ao maior π' número que divide a $|M|$ e, como $|N \cap M||MN| = |M||N|$, temos que $|N \cap M| = |N|$. Disto resulta que $N \leq M$. Agora é fácil ver que $\frac{M}{N}$ é um complemento de $\frac{AN}{N}$ em $\frac{G}{N}$. Reciprocamente, se $\frac{AN}{N}$ tem um complemento $\frac{M}{N}$ em $\frac{G}{N}$, temos que $\frac{G}{N} = \left(\frac{AN}{N}\right)\left(\frac{M}{N}\right)$ e $AN \cap M = N(A \cap M) = N$. Em particular, $G = AM$ e $A \cap M$ está contido em $N \cap A = 1$. Concluímos assim que M é um complemento de A em G. □

Suponhamos que G seja um grupo e $K \lhd H \leq G$ e $L \leq G$. Então dizemos que L *cobre* $\frac{H}{K}$ se $HL = KL$, ou equivalentemente, se $H = K(H \cap L)$. Agora se $H \cap L = K \cap L$, isto é, $H \cap L \leq K$, então dizemos que L *"avoid"* $\frac{H}{K}$.

Lema 4.2. *Seja G um grupo e sejam A um subgrupo de G e $\frac{H}{K}$ um fator principal de G. Se $A \cap H \lhd G$, então A cobre ou "avoid" $\frac{H}{K}$. Em particular, subgrupos normais de G cobrem ou "avoid" todo fator principal de G.*

Demonstração: Vamos mostrar primeiro que $\frac{(A\cap H)K}{K} \lhd \frac{G}{H}$. De fato, como $A \cap H \lhd G$ e $K \lhd G$, temos que $(A \cap H)K \lhd G$. Portanto obviamente temos o desejado. É claro que $\frac{(A\cap H)K}{K} \leq \frac{H}{K}$. Como $\frac{H}{K}$ é um fator principal de G temos que $\frac{H}{K}$ é um subgrupo normal minimal de $\frac{G}{K}$, portanto, ou $\frac{(A\cap H)K}{K} = \frac{H}{K}$ o que implica $(A \cap H)K = H$, isto é, A cobre $\frac{H}{K}$, ou $A \cap H \leq K$ o que nos dá que A "avoid" $\frac{H}{K}$. Em particular, como para todo subgrupo normal N de G temos que $N \cap H \lhd G$, concluímos assim que todo subgrupo normal de G cobre ou "avoid" todo fator principal de G. □

Já vimos na Seção 1.3 que $N \lhd G$ e $\frac{G}{N}$ e N supersolúveis não implicam que G seja supersolúvel. O teorema a seguir nos dá condições sobre o subgrupo N para que $\frac{G}{N}$ supersolúvel implique em G supersolúvel.

Teorema 4.3. (A. Ballester-Bolinches e X. Y. Guo) *Seja G um grupo finito e seja N um subgrupo normal de G tal que $\frac{G}{N}$ seja supersolúvel. Se todo subgrupo minimal de N tem um complemento em G, então G é supersolúvel.*

Demonstração: Suponhamos que o teorema seja falso e seja G um contra-exemplo de menor ordem. Vamos mostrar primeiro que todo subgrupo próprio de G é supersolúvel. De fato, seja L um subgrupo próprio de G. Então $L \cap N$ é um subgrupo normal de L tal que $\frac{L}{L \cap N} \cong \frac{LN}{N} \leq \frac{G}{N}$, assim $\frac{L}{L \cap N}$ é supersolúvel. Além disso, pelo Lema 4.1, todo subgrupo minimal de $L \cap N$ tem um complemento em L. Devido a escolha minimal de G devemos ter L supersolúvel. Consequentemente, G é um grupo não supersolúvel minimal. Assim, pelo Teorema 3.19, temos que G possui um p-subgrupo de Sylow normal P tal que $\frac{P}{\phi(P)}$ é um fator principal de G.

Iremos agora mostrar que P está contido em N e que P é um p-grupo abeliano elementar. Com efeito, como P é normal em G segue, pelo Teorema de Schur Zassenhaus, que P tem um complemento em G. Seja K um complemento de P em G. Então K é um subgrupo próprio de G, de modo que $\frac{G}{P} \cong K$ é supersolúvel, pela primeira parte da demonstração. De $\frac{G}{P}$ e $\frac{G}{N}$ supersolúveis resulta que $\frac{G}{P \cap N}$ é supersolúvel, uma vez que a classe dos grupos supersolúveis é uma formação. Como G não é supersolúvel, segue que $T = P \cap N$ é um subgrupo normal não trivial de G. Assim T cobre ou "avoid" $\frac{P}{\phi(P)}$. Suponhamos que T "avoid" $\frac{P}{\phi(P)}$. Logo $T \cap P \leq \phi(P)$, o que implica $T \leq \phi(P)$. Seja T_1 um subgrupo minimal de T, por hipótese T_1 tem um complemento em G, já que T_1 é um subgrupo minimal de N. Sendo assim, pelo Lema 4.1, T_1 tem um complemento em P, isto é, existe $H \leq P$ tal que $P = T_1H$ e $T_1 \cap H = 1$. Mas $P = H$, pois $T_1 \leq \phi(P)$, o que é uma contradição. Portanto T cobre $\frac{P}{\phi(P)}$ e $P = T\phi(P) = T \leq N$. É claro que $\phi(P) = 1$, pois se $\phi(P) \neq 1$, $\phi(P)$ possui um subgrupo minimal S que é minimal de N já que $P \leq N$, portanto, pelo Lema 4.1 existe um subgrupo próprio Q de P tal que $P = SQ$ e $S \cap Q = 1$. Mas $\phi(P)$ consiste dos não geradores de P, desta forma, $P = Q$ o que não pode ocorrer. Portanto $\phi(P) = 1$. Com isso, mostramos que P é um p-grupo abeliano elementar, uma vez que, pelo Teorema 3.19, $\frac{P}{\phi(P)}$ é um p-grupo abeliano elementar.

Para concluirmos a demonstração, seja P_1 um subgrupo minimal de P. Por hipótese, existe um subgrupo M de G tal que $G = P_1M$ e $P_1 \cap M = 1$. Assim $P = P_1(P \cap M)$. Como P é abeliano e $P \cap M$ é normalizado por M, segue que $P \cap M$ é um subgrupo normal de G. Agora P é um subgrupo normal minimal de G. Portanto $P \cap M = 1$ e $P = P_1$ é um grupo cíclico de ordem p. Como $\dfrac{G}{P}$ é supersolúvel, temos pela Proposição 1.33 que G também é supersolúvel, o que é uma contradição. □

Um corolário imediato do teorema anterior é dado a seguir.

Corolário 4.4. *Seja G um grupo finito. Se todo subgrupo minimal de G tem um complemento em G, então G é supersolúvel.*

O corolário a seguir nos fornece uma condição necessária e suficiente para que um grupo seja complementado.

Corolário 4.5. *Um grupo finito G é complementado se, e somente se, todo subgrupo minimal de G tem um complemento em G.*

Demonstração: Se G é complementado, então todo subgrupo de G tem complemento, em particular, os subgrupos minimais. Reciprocamente, suponhamos que todo subgrupo minimal de G tem um complemento em G. Pelo Corolário 4.4 sabemos que G é supersolúvel. Vamos mostrar agora que G tem os subgrupos de Sylow abelianos elementares. De fato, pelo Teorema 1.37 temos que $\dfrac{P}{\phi(P)}$ é abeliano elementar para todo p-subgrupo de Sylow P. Para concluirmos nossa afirmação temos que mostrar que $\phi(P) = 1$. Se $\phi(P) \neq 1$, então $\phi(P)$ tem um subgrupo minimal S que é um subgrupo minimal de G. Portanto, por hipótese, S possui um complemento em G e, pelo Lema 4.1, P possui um subgrupo próprio T tal que $P = TS$ e $T \cap S = 1$. Mas $\phi(P)$ consiste dos não geradores de P, desta forma, $P = T$, o que não pode ocorrer. Portanto $\phi(P) = 1$, mostrando assim que P é um p-grupo abeliano elementar. Agora aplicando o Teorema 2.16 concluímos que G é complementado. □

Do Teorema 2.16 e do corolário acima temos o seguinte resultado: Um grupo finito G é supersolúvel com subgrupos de Sylow abelianos elementares se, e somente se, todo subgrupo minimal de G tem um complemento em G.

Analisaremos agora como os subgrupos minimais do subgrupo focal que têm complemento influenciam o grupo. Mas antes precisamos do seguinte resultado que fornece a estrutura dos grupos fintos não nilpotentes minimais.

Teorema 4.6. (O. J. Schmidt). *Seja G um grupo finito não nilpotente, mas que todo subgrupo maximal de G é nilpotente. Então*

(i) *G é solúvel;*

(ii) *$|G| = p^m q^n$ onde p e p são primos distintos;*

(iii) *Existe um único p-subgrupo de Sylow P de G e um q-subgrupo de Sylow Q que é cíclico. Assim $G = PQ$ e P é um subgrupo normal de G;*

(iv) *$\phi(Q) \leq Z(G)$;*

(v) *$P = [P, Q]$ e $\phi(P) \leq Z(G)$, assim, P é nilpotente de classe no máximo 2.*

Demonstração: (i) Suponhamos que (i) não valha e seja G um contra-exemplo de menor ordem. Se N é um subgrupo normal próprio não trivial de G, ambos N e $\dfrac{G}{N}$ são solúveis, assim, G é solúvel, o que não pode ocorrer, pois estamos supondo que G não é solúvel. Disto segue que G é um grupo simples. Suponhamos que a interseção de quaisquer dois subgrupos maximais distintos seja trivial. Seja M um subgrupo maximal qualquer. Então certamente $M = N_G(M)$. Se $|G| = n$ e $|M| = m$, então o número de conjugados de M é $[G : N_G(M)] = [G : M] = n/m$ e quaisquer dois tem interseção trivial. Assim os conjugados de M possuem exatamente $(m-1)\dfrac{n}{m} = n - \dfrac{n}{m}$ elementos não triviais. Como $m \geq 2$, temos $n - \dfrac{n}{m} \geq \dfrac{n}{2} > \dfrac{(n-1)}{2}$. Além disso é claro que $n - \dfrac{n}{m} \leq n - 2 < n - 1$. Como cada elemento não trivial de G pertence a exatamente um subgrupo maximal de G, $n-1$ é uma soma de inteiros estando estritamente entre $\dfrac{(n-1)}{2}$ e $n-1$, isto é claramente impossível. Concluímos, assim, que existem subgrupos maximais distintos M_1 e M_2 de G, com interseção não trivial. Escolha, dentre tais subgrupos, dois subgrupos M_3 e M_4 de modo que $M_3 \cap M_4 = I$ seja o de maior ordem. Escrevamos $N = N_G(I)$. Como M_3 é nilpotente, pela Proposição 1.27, $I \leq N_{M_3}(I)$, deste modo $I < N \cap M_3$. Agora I não pode ser normal em G, assim, N é um subgrupo próprio de G. Desta forma, N está contido em algum subgrupo maximal M de G. Então, $I < N \cap M_3 \leq M \cap M_3$ o que contradiz a maximalidade da ordem de I. Portanto, G é solúvel, como queríamos.

(ii) Seja $|G| = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_k^{e_k}$, onde $e_i > 0$ e os p_i são primos distintos para $i = 1, \ldots, k$. Suponhamos que $k \geq 3$. Sendo G solúvel finito e M é um subgrupo normal maximal de G, pela Proposição 1.19, seu índice é primo, digamos $[G : M] = p_1$. Seja P_i um p_i-subgrupo de Sylow de G. Se $i > 1$, então $P_i \leq M$ e, como M é nilpotente, segue que P_i *char* M. Uma vez que $M \lhd G$, temos que $P_i \lhd G$. Disto resulta que P_1P_i é um subgrupo de G, e não pode ser igual a G, pois $k \geq 3$. Assim, P_1P_i é nilpotente, logo pela Proposição 1.27, temos que $[P_1, P_i] \subseteq P_1 \cap P_i = 1$ para todo $i = 2, \ldots, k$. Assim, obtemos que $N_G(P_1) = G$ e, portanto, $P_1 \lhd G$. Com isso, mostramos que todos os subgrupos de Sylow de G são normais, logo G é nilpotente, o que é uma contradição. Desta forma, $k = 2$ e $|G| = p_1^{e_1}p_2^{e_2}$.

(iii) Seja M um subgrupo normal maximal de G com índice primo q. Como M é nilpotente, o p-subgrupo de Sylow P de M é característico em M e, portanto, normal em G e é, evidentemente, um p-subgrupo de Sylow de G. Seja Q um q-subgrupo de Sylow de G. Então $G = QP$. Suponhamos que Q não seja cíclico, se g é um elemento qualquer de Q, então $\langle\ g, P\ \rangle \neq G$. Assim, $\langle\ g, P\ \rangle$ é nilpotente e, segue que $[g, P] = 1$. Mas isto nos diz que $[Q, P] = 1$, logo $G = Q \times P$ e, deste modo, G é nilpotente, o que não pode ocorrer. Isto significa que Q é cíclico.

(iv) Como P é um subgrupo normal de G, $P\phi(Q)$ é um subgrupo próprio de G, portanto, $P\phi(Q)$ é um subgrupo nilpotente, logo $[P, \phi(Q)] = 1$, isto é, os elementos de $\phi(Q)$ comutam com todos os elementos de P. Do fato de que Q é abeliano e $G = PQ$ resulta que os elementos de $\phi(Q)$ comutam com todos os elementos de G, isto é, $\phi(Q) \leq Z(G)$.

(v) Primeiro vamos mostrar que $\phi(P) \leq Z(G)$. Suponhamos que exista um subgrupo normal K de G com $\left|\dfrac{G}{K}\right| = p^f > 1$ para algum $f \in \mathbb{N}$. Como K é um subgrupo próprio de G, K é nilpotente, portanto, $K = Q \times (K \cap P)$. consequentemente Q é um subgrupo característico de K e, assim, normal em G. Desta forma, G é o produto direto de seus subgrupos de Sylow e, portanto, nilpotente, uma contradição. Sendo assim, não existe um subgrupo normal K tal que $\left|\dfrac{G}{K}\right| = p^f > 1$ para algum $f \in \mathbb{N}$. Em particular

$$Q^G = \langle\ Q^g |\ g \in G\ \rangle = G.$$

O grupo $\phi(P)Q$ é um subgrupo próprio de G, assim, é nilpotente e, consequentemente, $[Q, \phi(P)] = 1$. Agora, como $\phi(P)$ *char* P e $P \lhd G$, temos que $\phi(P) \lhd G$ e, então, $[Q, \phi(P)]^g = [Q^g, \phi(P)] = 1$, para todo elemento g de G. Com isso concluímos que os elementos de $\phi(P)$ comutam com todos elementos de qualquer conjugado de Q e, como $Q^G = G$, obtemos que $\phi(P) \leq Z(G)$. Em particular,

$$P' \leq \phi(P) \leq P \cap Z(G) \leq Z(P),$$

e, portanto, P tem classe no máximo 2. Vamos mostrar agora que $P = [P, Q]$. Como $P \lhd G$, obtemos que $[P, Q] \subseteq P$. Para mostrarmos a outra inclusão suponhamos que $[P, Q] < P$. Logo $[P, Q]Q$ é um subgrupo próprio de G, assim, nilpotente. Desta forma, $[[P, Q], Q] = 1$ e, como $[P, Q] \lhd \langle\ P, Q\ \rangle = G$, temos $[[P, Q], Q]^g = [[P, Q], Q^g] = 1$, para todo $g \in G$. Com isso obtemos que $[P, Q] \leq Z(G)$. Afirmamos que $\dfrac{G}{Z(G)}$ é nilpotente. De fato,

$$\gamma_2\left(\frac{G}{Z(G)}\right) = \left[\frac{G}{Z(G)}, \frac{G}{Z(G)}\right] = \frac{G'Z(G)}{Z(G)}.$$

Agora, do fato que $G = PQ$, não é difícil ver que G' está contido no produto $P'[P, Q]$. Como $P' \subseteq \phi(P) \subseteq Z(G)$ e $[P, Q] \subseteq Z(G)$, obtemos que $P'[P, Q] \subseteq Z(G)$. Então decorre disso que $\gamma_2\left(\dfrac{G}{Z(G)}\right) = 1$. Sendo assim, pela Proposição 1.27 $(viii)$, temos que G é nilpotente, o que não pode ocorrer. Disso segue que $P = [P, Q]$. Concluímos, desta forma, a demonstração. $\square$

O próximo teorema garante a p-nilpotência de um grupo apenas analisando os subgrupos minimais do subgrupo focal.

Teorema 4.7. (X. Y. Guo e K. P. Shum) *Seja G um grupo finito e sejam p um divisor primo da ordem de G e P um p-subgrupo de Sylow de G. Se todo subgrupo minimal do subgrupo focal $P \cap G'$ tem um complemento em $N_G(P)$ e $N_G(P)$ é p-nilpotente, então G é p-nilpotente.*

Demonstração: Vamos supor que o teorema não seja válido e escolhamos G um contraexemplo de menor ordem. Afirmamos que $P \cap G' \leq Z(N_G(P))$. De fato, pela hipótese do teorema de que todo subgrupo minimal de $P \cap G'$ possui um complemento em $N_G(P)$, do Lema 4.1(i) resulta que os subgrupos minimais de $P \cap G'$ possuem complemento em $P \cap G'$. Assim, pelo Corolário 4.5, segue que $P \cap G'$ é complementado e, como $P \cap G'$ é um p-subgrupo de Sylow de $P \cap G'$, do Teorema 2.16 resulta que $P \cap G'$ é abeliano elementar. Se $P \cap G' = 1$, nada temos a fazer. Portanto, vamos supor que $P \cap G' \neq 1$. Provaremos primeiro que $P \cap G' \leq Z(P)$. Como $P \cap G' \lhd P$, existe um subgrupo normal minimal N_1 de P tal que $N_1 \leq P \cap G'$. Evidentemente P é nilpotente, já que é um p-grupo. Disso e da Proposição 1.27 (vii) resulta que $N_1 \cap Z(P) \neq 1$ e, portanto, $N_1 \leq Z(P)$, uma vez que $N_1 \cap Z(P) \lhd P$. E mais, $|N_1| = p$, pois caso contrário, existiria $x \in N_1$ tal que $o(x) = p$, e $\langle\ x\ \rangle$ seria um subgrupo próprio de N_1. Mas $\langle\ x\ \rangle \lhd P$, pois $N_1 \leq Z(P)$, o que contraria a escolha de N_1, logo $|N_1| = p$. Também, pela hipótese e o Lema 4.1, existe um subgrupo K_1 de P tal que $P = N_1K_1$ e $N_1 \cap K_1 = 1$. Se $P \cap G' = N_1$ nada temos a fazer, caso contrário, afirmamos que $(P \cap G') \cap K_1 \neq 1$. De fato, seja $x \in (P \cap G') \backslash N_1$, então existem $a \in N_1$ e $b \in K_1$ com $b \neq 1$, tais que $x = ab \neq 1$, o que implica que $a^{-1}x = b \in (P \cap G') \cap K_1$. Além disso, $(P \cap G') \cap K_1 \lhd P$, já que se $x \in (P \cap G') \cap K_1$ e $y \in P$, $y = ab$ com $a \in N_1$ e $b \in K_1$, visto que $N_1 \leq Z(P)$ teremos $x^y = x^{ab} = x^b \in (P \cap G') \cap K_1$. Com uma argumentação análoga, temos que existirá $N_2 \leq (P \cap G') \cap K_1 = K_1 \cap G'$, $N_2 \leq Z(P)$ com $|N_2| = p$. Logo existe um subgrupo K_2 de K_1 tal que $K_1 = N_2K_2$ e $N_2 \cap K_2 = 1$. Notamos que $N_1 \cap N_2 = 1$ e que $N_1 \times N_2 \leq P \cap G'$. Se $P \cap G' = N_1 \times N_2$ nada mais temos a fazer, caso contrário, observamos que $(P \cap G') \cap K_2 \lhd P$. Portanto, repetindo a argumentação acima tantas vezes quanto necessário concluiremos que $P \cap G' = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_s$ com cada $N_i \leq Z(P)$. Disto resulta que $P \cap G' \leq Z(P)$. Agora como $N_G(P)$ é p-nilpotente podemos escrever $N_G(P) = PO_{p'}(N_G(P))$. Já sabemos que P centraliza $P \cap G'$. Vamos mostrar agora que $O_{p'}(N_G(P))$ também centraliza $P \cap G'$. Para isso, seja $t = [a, b]$, onde $a \in O_{p'}(N_G(P))$ e $b \in P \cap G'$. Por um lado, temos $t = [a, b] = a^{-1}a^b \in O_{p'}(N_G(P))$, visto que $P \cap G' \leq N_G(P)$ e $O_{p'}(N_G(P)) \lhd N_G(P)$. Por outro lado, $t = [a, b] = (b^{-1})^a b \in P$ já que $P \lhd N_G(P)$. Logo, $[O_{p'}(N_G(P)), P \cap G'] \leq P \cap O_{p'}(N_G(P)) = 1$. Portanto, $P \cap G' \leq Z(N_G(P))$.

Finalmente vamos com isto provar o resultado. Sendo G não p-nilpotente, G possui um subgrupo H não p-nilpotente minimal, isto é, H não é p-nilpotente mas todo subgrupo próprio de H é p-nilpotente. Pelo Teorema de Itô (Teorema 3.18) temos que H é um grupo onde todos os seus subgrupos são nilpotentes mas H não o é. Segundo o Teorema 4.6, H possui um p-subgrupo normal H_p e um q-subgrupo de Sylow H_q ($q \neq p$) tal que $H = H_pH_q$. Além disso $H_p = [H_p, H_q]$, desta forma segue que $H_p \leq H' \leq G'$. Sem perda de generalidade, podemos supor que H_p está contido em P (pois caso não esteja, podemos escolher um conjugado de H_p conveniente). Assim $H_p \leq P \cap G'$. Seja $A = N_G(H_p)$. Como $H_p \leq P \cap G'$ e $P \cap G' \leq Z(N_G(P))$ concluímos que H_p é centralizado por $N_G(P)$. Em particular, $P \leq C_G(H_p)$ uma vez que $P \leq N_G(P) \leq C_G(H_p)$. Como $C_G(H_p) \lhd N_G(H_p) = A$ e P é um p-subgrupo de Sylow de $C_G(H_p)$ temos, pelo Argumento de Frattini que

$$A = N_G(H_p) = C_G(H_p)N_A(P).$$

Sendo, $H_p \leq Z(N_G(P))$ e $N_A(P) \leq N_G(P)$ obtemos $N_A(P) \leq C_G(H_p)$. Disso segue que

$N_G(H_p) = C_G(H_p)$. Evidentemente $H_q \lhd H$, visto que $H \leq N_G(H_p) = C_G(H_p)$, portanto $H = H_p \times H_q$ e, assim, pela Proposição 1.27 concluímos que H é nilpotente, o que é uma contradição. Disso segue que G é p-nilpotente. $\square$

A hipótese que $N_G(P)$ é p-nilpotente não pode ser retirada do Teorema 4.7. De fato, se considerarmos $G = A_5$, temos $|A_5| = 60 = 2^2 3.5$. Seja P um 5-subgrupo de Sylow de A_5, então $|N_G(P)| = \dfrac{A_5}{[A_5 : N_G(P)]}$. Pelo Teorema de Sylow temos que $[A_5 : N_G(P)] \equiv 1 \, mod \, 5$ e $[A_5 : N_G(P)] \,|\, 2^2 3$. Disso concluímos que $[A_5 : N_G(P)] = 6$ e, com isto, $|N_G(P)| = 10$. O subgrupo de ordem 2 do $N_G(P)$ não é normal, pois se fosse, como o subgrupo de ordem 5 é normal no $N_G(P)$, teríamos $N_G(P) \cong \mathbb{Z}_{10}$. Entretanto, A_5 não contém elementos de ordem 10. Portanto, $N_G(P)$ não é 5-nilpotente. Agora todo subgrupo minimal de P tem ordem 5. Esse tem um complemento em $N_G(P)$, já que $N_G(P)$ possui um subgrupo de ordem 2. Mas A_5 não pode ser 5-nilpotente, porque A_5 é simples e, portanto, não possui um $5'$-subgrupo de Hall normal.

Como vimos acima, a hipótese do normalizador ser p-nilpotente não pode ser retirada. Entretanto, o próximo resultado fornece uma condição para p para que possamos retirar a hipótese do normalizador ser p-nilpotente.

Teorema 4.8. (X. Y. Guo e K. P. Shum) *Seja G um grupo finito e sejam p o menor divisor primo da ordem de G e P um p-subgrupo de Sylow de G. Se todo subgrupo minimal do subgrupo $P \cap G'$ tem um complemento em $N_G(P)$, então G é p-nilpotente.*

Demonstração: Faremos a demonstração por indução sobre a ordem de G. Suponhamos que $|G| = n > 1$ e que o resultado seja verdadeiro para todo grupo de ordem menor que n. Temos dois casos a serem analisados: quando $N_G(P) = G$ e quando $N_G(P) < G$. Se $N_G(P) < G$, como p é o menor divisor primo de $|N_G(P)|$, $P \subseteq N_G(P)$ e qualquer subgrupo minimal de $P \cap N_G(P)'$ tem um complemento em $N_{N_G(P)}(P)$, temos que $N_G(P)$ está nas hipóteses do teorema. Assim, como $|N_G(P)| < |G|$, pela hipótese de indução, temos que $N_G(P)$ é p-nilpotente. Disso e da hipótese concluímos do Teorema 4.7 que G é p-nilpotente.

Agora, se $N_G(P) = G$, temos que $P \lhd G$, logo, pelo Teorema de Schur Zassenhaus, existe um p'-subgrupo de Hall K de G, tal que $G = PK$. Denotaremos por $\pi(K)$ o conjunto dos números primos divisores da ordem de K.

Se $|\pi(K)| > 1$, é fácil ver que para todo $q \in \pi(K)$ e todo q-subgrupo de Sylow Q de K, o grupo $G_1 = PQ$ satisfaz as hipóteses do teorema. Como $G_1 < G$, então, por hipótese de indução, G_1 é p-nilpotente. Disto segue que Q é um subgrupo normal de G_1, isto é, P normaliza Q. Então decorre que P normaliza todo subgrupo de Sylow de K e, assim, P normaliza K. Logo K é um p'-subgrupo de Hall normal de G e, portanto, G é p-nilpotente.

Se $|\pi(K)| = 1$, então K é um q-grupo para algum primo $q \neq p$, e pelo Teorema 1.17, temos que $G = PK$ é solúvel, disto resulta que $G' < G$. Seja $\frac{T}{G'}$ um q-subgrupo de Sylow de $\frac{G}{G'}$. É fácil ver que $P \cap G'$ é um p-subgrupo de Sylow de T, e todo subgrupo minimal de $P \cap G'$ tem complemento em T, uma vez que $T \leq N_G(P)$. Se $P \cap G' = 1$, então T é um q-subgrupo e é normal, pois $T \supseteq G'$, assim T é um p'-subgrupo de Hall normal de G. Se $P \cap G' \neq 1$, então afirmamos que T possui um q-subgrupo de Hall normal N. De fato, seja $\langle a \rangle$ um subgrupo de ordem p em $P \cap G'$. Então existe um subgrupo L de T, tal que $T = \langle a \rangle L$ e $\langle a \rangle \cap L = 1$, já que $T \leq N_G(P)$. Assim $[T : L] = p$ e p é o menor primo divisor da ordem de T, logo $L \lhd T$. Observe que um subgrupo de L de ordem p é um subgrupo minimal de T. Desta forma, pelo Lema 4.1, todo subgrupo de L de ordem p tem um complemento em L. Assim, L está nas hipóteses do teorema, logo podemos aplicar a hipótese de indução e concluir que L possui um p'-subgrupo de Hall normal N. É claro que N é um p'-subgrupo de Hall normal em T, já que N *char* L que é normal em T e $o(a) = p$. Como N *char* T e $T \lhd G$ e $|N| = |K|$ obtemos que N é um p'-subgrupo de Hall normal de G, provando assim que G é p-nilpotente. □

Corolário 4.9. *Seja G um grupo finito. Se todo subgrupo minimal de $P \cap G'$ tem um complemento em $N_G(P)$ para todo subgrupo de Sylow P de G, então G possui uma torre de Sylow do tipo supersolúvel.*

Demonstração: Faremos a prova por indução sobre $|G|$. Para $|G| \leq 2$ o resultado é claramente verdadeiro. Suponhamos agora que $|G| = n > 2$ e que o resultado seja verdadeiro para todo grupo de ordem menor que n. Seja q o menor divisor primo de n e seja Q um q-subgrupo de Sylow de G. Então, por nossas hipóteses, todo subgrupo minimal de $Q \cap G'$ tem um complemento em $N_G(Q)$. Desta forma, pelo Teorema 4.8, G possui um q'-subgrupo de Hall normal K. Evidentemente, todo subgrupo de Sylow P

de K deve ser também um subgrupo de Sylow de G. É claro que, $N_K(P) \leq N_G(P)$ e $P \cap K' \leq P \cap G'$. Agora, por nossas hipóteses e pelo Lema 4.1, obtemos que K satisfaz as hipóteses do corolário e tem ordem menor que n. Assim, por nossa hipótese de indução, K possui uma torre de Sylow do tipo supersolúvel. Como cada termo da torre de Sylow do tipo supersolúvel é igual a um $O_\pi(G)$ para algum conjunto de primos π, cada um dos seus termos é característico em K, que é normal em G. Portanto, cada termo desta torre é normal em G. Adicionando K a esta torre, obteremos uma nova torre, que é uma torre de Sylow do tipo supersolúvel de G, como queríamos. □

A Proposição 2.20 diz que se G possui uma torre de Sylow do tipo supersolúvel então G é solúvel. Assim o corolário anterior juntamente com a Proposição 2.20 fornecem também uma condição para que um grupo seja solúvel.

Teorema 4.10. (X. Y. Guo e K. P. Shum) *Seja $\mathscr{F}$ uma formação contendo a classe do grupos supersolúveis $\mathscr{U}$. Seja H um subgrupo normal de um grupo G tal que $\dfrac{G}{H} \in \mathscr{F}$. Se para todo subgrupo de Sylow P de H, todo subgrupo minimal de $P \cap G'$ tem um complemento em $N_G(P)$, então $G \in \mathscr{F}$.*

Demonstração: Suponhamos que o teorema seja falso e seja G um contra-exemplo de menor ordem. Pelo Lema 4.1 e Corolário 4.9, o subgrupo normal H de G possui uma torre de Sylow do tipo supersolúvel, uma vez que $P \cap H' \subseteq P \cap G'$ e $N_H(P) \leq N_G(P)$. Denotaremos por $\pi(H)$ o conjunto dos números primos divisores da ordem de H. Sejam p o maior primo em $\pi(H)$ e P um p-subgrupo de Sylow de H. Como $P \lhd H$ temos que P *char* H, logo, $P \lhd G$, pois $H \lhd G$. Vamos mostrar agora que $\dfrac{G}{P} \in \mathscr{F}$. Com efeito, como $\dfrac{G/P}{H/P} \cong \dfrac{G}{H} \in \mathscr{F}$, temos $\dfrac{G/P}{H/P} \in \mathscr{F}$, já que é uma imagem homomórfica de um elemento de $\mathscr{F}$. Consideremos $\dfrac{QP}{P}$ um q-subgrupo de Sylow de $\dfrac{H}{P}$, onde Q é um q-subgrupo de Sylow de H, $(q \neq p)$. Afirmamos que $N_{\frac{G}{P}}\left(\dfrac{QP}{P}\right) = \dfrac{N_G(Q)P}{P}$. Que $\dfrac{N_G(Q)P}{P} \subseteq N_{\frac{G}{P}}\left(\dfrac{QP}{P}\right)$ é fácil de se ver. Agora, seja $gP \in N_{\frac{G}{P}}\left(\dfrac{QP}{P}\right)$, então, $\left(\dfrac{QP}{P}\right)^{gP} = \dfrac{Q^gP}{P} = \dfrac{QP}{P}$, desta forma, $Q^gP = QP$. Como $Q^g \leq QP$ e Q^g é um q-subgrupo de Sylow de QP, então, existe $rs \in QP$ onde $r \in Q$ e $s \in P$ tal que $Q^g = Q^{rs} = Q^s$. Assim, $s^{-1}g \in N_G(Q)$, de modo que $g = xs$ para algum $x \in N_G(Q)$. Sendo assim, $gP \in \dfrac{N_G(Q)P}{P}$. Também é fácil ver que $\left(\dfrac{G}{P}\right)' = \dfrac{G'P}{P}$. Vamos mostrar que $\dfrac{G}{P}$ está nas condições do teorema. Tomemos $\langle\, \overline{x}\, \rangle$

um subgrupo minimal de $\dfrac{QP}{P} \bigcap \left(\dfrac{G}{P}\right)'$. Então podemos escolher $x \in Q \cap G'$, tal que $\langle\, \overline{x}\, \rangle = \dfrac{\langle\, x\, \rangle P}{P}$. Deste modo, pela nossas hipóteses, existe um subgrupo K em $N_G(Q)$, tal que $N_G(Q) = \langle\, x\, \rangle K$ e $\langle\, x\, \rangle \cap K = 1$. Sendo assim

$$N_{\frac{G}{P}}\left(\frac{QP}{P}\right) = \frac{N_G(Q)P}{P} = \frac{\langle\, x\, \rangle KP}{P} = \langle\, \overline{x}\, \rangle \frac{KP}{P}.$$

Afirmamos que $\langle\, \overline{x}\, \rangle \cap \dfrac{KP}{P} = 1$. Com efeito, se $\langle\, x\, \rangle \cap KP \neq 1$, como $\langle\, x\, \rangle \cap KP$ é um subgrupo de $\langle\, x\, \rangle$ e $\langle\, x\, \rangle$ tem ordem p, obtemos que $\langle\, x\, \rangle \cap KP = \langle\, x\, \rangle$. Logo $\langle\, x\, \rangle$ é um subgrupo de KP. Portanto, $N_G(Q)P = KP$. Disto segue que

$$\frac{|N_G(Q)|\,|P|}{|N_G(Q) \cap P|} = \frac{|K||P|}{|K \cap P|}.$$

Mas a ordem de Q divide o primeiro membro, mas não divide o segundo membro, o que é uma contradição. Deste modo $\langle\, x\, \rangle \cap KP = 1$ e, assim, $\langle\, \overline{x}\, \rangle \cap \dfrac{KP}{P} = 1$. Logo $\dfrac{KP}{P}$ é um complemento de $\langle\, \overline{x}\, \rangle$ em $N_{\frac{G}{P}}\left(\dfrac{QP}{P}\right)$. Com isso, mostramos que $\dfrac{G}{P}$ satisfaz as hipóteses do teorema, logo pela escolha minimal de G, devemos ter $\dfrac{G}{P} \in \mathscr{F}$.

Como $\dfrac{G}{G'}$ é abeliano e $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{F}$, temos assim que $\dfrac{G}{G'} \in \mathscr{F}$. Disto e de $\dfrac{G}{P} \in \mathscr{F}$, segue que $\dfrac{G}{G' \cap P} \in \mathscr{F}$. Da hipótese, sabemos que todo subgrupo minimal de $G' \cap P$ tem um complemento em G, já que P é normal em G. Assim, do Corolário 4.5 obtemos que $G' \cap P$ é um grupo complementado. Disso e do Teorema 2.16, segue que $G' \cap P$ é supersolúvel com subgrupos de Sylow abelianos elementares. Como $G' \cap P$ é ele próprio seu Sylow, ele é um subgrupo abeliano elementar. Seja N um subgrupo normal minimal de G tal que $N \leq G' \cap P$. Vamos mostrar que N é um subgrupo de ordem p. Suponhamos que $|N| > p$ e seja $y \in N$ com $o(y) = p$. Assim $\langle\, y\, \rangle$ é um subgrupo minimal de $G' \cap P$ e, portanto, possui um complemento em G, digamos K_1. Desta forma $K_1 \cap N$ é um complemento de $\langle\, y\, \rangle$ em N, observemos que $1 < K_1 \cap N < N$. Agora para todo $t \in G$, existem $l \in \mathbb{Z}$ e $k \in K_1$ tais que $t = y^l.k$, assim temos, $(K_1 \cap N)^t = (K_1 \cap N)^{y^l k} = (K_1 \cap N)^k = K_1 \cap N$, o que significa que $K_1 \cap N$ é normal em G, o que não é possível dado que N é um subgrupo normal minimal de G que está contido em $G' \cap P$. Portanto $|N| = p$. Evidentemente $\dfrac{G' \cap P}{N}$ é um subgrupo normal de $\dfrac{G}{N}$ e $\dfrac{G/N}{(G' \cap P)/N} \in \mathscr{F}$, pois $\dfrac{G}{G' \cap P} \in \mathscr{F}$. Além disso,

$$\left(\frac{G}{N}\right)' \bigcap \frac{G' \cap P}{N} = \frac{G'}{N} \bigcap \frac{G' \cap P}{N} = \frac{G' \cap P}{N}.$$

Agora provaremos que todo subgrupo minimal de $\dfrac{G' \cap P}{N}$ tem um complemento em $\dfrac{G}{N}$. Para este objetivo seja $\langle\, \overline{w}\, \rangle$ um subgrupo minimal de $\dfrac{G' \cap P}{N}$. Como $G' \cap P$ é um p-grupo abeliano elementar, sabemos que existe um elemento w em $G' \cap P$ com ordem p tal que $\langle\, \overline{w}\, \rangle = \dfrac{\langle\, w\, \rangle N}{N}$. Visto que $\langle\, w\, \rangle$ é um subgrupo minimal de $G' \cap P$, pela nossa hipótese, existe um subgrupo K de G tal que $G = \langle\, w\, \rangle K$ e $\langle\, w\, \rangle \cap K = 1$. Vamos analisar dois casos.

Caso 1: Se $N \leq K$, então, é claro que

$$\frac{G}{N} = \frac{\langle\, w\, \rangle N}{N}\frac{K}{N} \quad \text{e} \quad \frac{\langle\, w\, \rangle N}{N} \bigcap \frac{K}{N} = 1.$$

Caso 2: Se $N \nleq K$, então $N \cap K = 1$ e $G = NK$. De fato, $N \cap K \leq N$, mas os únicos subgrupos de N são os triviais, desta forma, como $N \nleq K$ concluímos que $N \cap K = 1$. Agora, por questão de ordem, $G = NK$. Notemos que

$$\begin{aligned} |(\langle\, w\, \rangle N) \cap K| = & \frac{|\langle\, w\, \rangle N||K|}{|\langle\, w\, \rangle||NK|/|\langle\, w\, \rangle \cap NK|} \\ \\ = & \frac{|\langle\, w\, \rangle||N||K||\langle\, w\, \rangle|}{|\langle\, w\, \rangle||N||K|} = p. \end{aligned}$$

Indiquemos por A o subgrupo $(\langle\, w\, \rangle N) \cap K$. Então A é um subgrupo minimal de $G' \cap P$ e $A \leq K$. Pelo Lema 4.1, existe um subgrupo L de K, tal que $K = AL$ e $A \cap L = 1$. É claro que $AN = \langle\, w\, \rangle N$ e, portanto, $\dfrac{G}{N} = \dfrac{\langle\, w\, \rangle N}{N}\dfrac{LN}{N}$. Agora afirmamos que $\dfrac{\langle\, w\, \rangle N}{N} \bigcap \dfrac{LN}{N} = 1$. Com efeito, se $\dfrac{\langle\, w\, \rangle N}{N} \bigcap \dfrac{LN}{N} \neq 1$ teríamos $|\langle\, w\, \rangle N \cap L| \geq p$, o que implicaria

$$|N||K| = |G| = |\langle\, w\, \rangle NL| = \frac{|\langle\, w\, \rangle N||L|}{|(\langle\, w\, \rangle N) \cap L|} \leq \frac{|\langle\, w\, \rangle N||L|}{p} = \frac{|N||K|}{p},$$

o que é uma contradição.

Assim $\dfrac{G}{N}$ satisfaz as hipóteses do teorema e, uma vez que $|G/N| < |G|$, devemos ter $\dfrac{G}{N} \in \mathscr{F}$.

Como N é um subgrupo minimal de $G' \cap P$ existe $M \leq G$ de forma que $G = NM$ e $N \cap M = 1$. Segue que $G' = G \cap G' = N(G' \cap M)$ e $G' \cap M \lhd M$. Visto que N é um grupo cíclico de ordem p, $Aut\ (N)$ é um grupo cíclico de ordem $p - 1$. Também, como $\dfrac{G}{C_G(N)} \cong T \leq Aut\ (N)$, resulta que $\dfrac{G}{C_G(N)}$ é abeliano, logo $G' \leq C_G(N)$. Deste modo,

$G' \cap M$ é normal em G. Se $G' \cap M \neq 1$, seja N_1 um subgrupo normal minimal de G com $N_1 \leq G' \cap M$. Considere o grupo quociente $\dfrac{G}{N_1}$, desta forma,

$$\frac{G/N_1}{NN_1/N_1} \cong \frac{G}{NN_1} \cong \frac{G/N}{NN_1/N} \in \mathscr{F} \text{ e } \left(\frac{G}{N_1}\right)' \bigcap \frac{NN_1}{N_1} = \frac{NN_1}{N_1},$$

pois como $N \leq G'$, temos que $\dfrac{NN_1}{N_1} \leq \dfrac{G'N_1}{N_1} = \left(\dfrac{G}{N_1}\right)'$. Observe que $\dfrac{NN_1}{N_1} \cong N$ e, como $|N| = p$, $\left|\dfrac{NN_1}{N_1}\right| = p$. Assim, $\dfrac{NN_1}{N_1}$ é o seu próprio subgrupo minimal e tem complemento $\dfrac{M}{N_1}$ em $\dfrac{G}{N_1}$. De fato, $\dfrac{M}{N_1}\dfrac{NN_1}{N_1} = \dfrac{G}{N_1}$, pois $G = NM$ e como $N \cap M = 1$ teremos $\dfrac{NN_1}{N_1} \cap \dfrac{M}{N_1} = \{1N_1\}$. Portanto, $\dfrac{G}{N_1} \in \mathscr{F}$, assim, por definição de formação, $G \cong \dfrac{G}{N \cap N_1} \in \mathscr{F}$, o que não pode ocorrer. Logo podemos assumir que $G' \cap M = 1$. Do fato que $G' = N(G' \cap M)$ resulta que $G' = N$ e $\dfrac{G}{N}$ é abeliano. Segue desta forma, do Corolário 4.3 que G é supersolúvel. Como $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{F}$ temos que $G \in \mathscr{F}$, o que é uma contradição. Portanto $G \in \mathscr{F}$, como queríamos. □

O Teorema 4.10 é verdadeiro para qualquer formação que contém a classe dos grupos supersolúveis $\mathscr{U}$. Mas se a formação $\mathscr{F}$ não contém $\mathscr{U}$, o Teorema 4.10 não é verdadeiro. Por exemplo, seja $\mathscr{F}$ a formação saturada de todos os grupos nilpotentes. Considere $G = S_3$ e $H = A_3$. O grupo quociente $\dfrac{G}{H}$ tem ordem 2 e, portanto, é nilpotente. Como H tem ordem 3, um 3-subgrupo de Sylow de H é o próprio H e sabemos que $H = G'$. Desta forma, um subgrupo minimal de $H \cap G'$ é o próprio H que tem complemento em $S_3 = N_{S_3}(H)$. Sendo assim, S_3 está nas hipóteses do teorema, mas S_3 não é nilpotente.

A recíproca do Teorema 2.16 diz que se um grupo G é complementado então G é supersolúvel com subgrupos de Sylow abelianos elementares. O próximo resultado garante somente a supersolubilidade, mas temos somente que garantir que os subgrupos minimais de todo subgrupos de Sylow de G' possuem complemento no normalizador do subgrupo de Sylow.

Corolário 4.11. *Seja G um grupo finito. Se para todo subgrupo de Sylow P de G', todo subgrupo minimal de P tem um complemento em $N_G(P)$, então G é supersolúvel.*

Demonstração: Basta tomar $\mathscr{F}$ como sendo a formação dos grupos supersolúveis e H igual a G' no teorema anterior. Uma vez que $\dfrac{G}{G'}$ é abeliano, temos $\dfrac{G}{G'} \in \mathscr{F}$. Como para todo subgrupo de Sylow P de G', todo subgrupo minimal de $P \cap G'$ tem um complemento em $N_G(P)$, pelo teorema anterior, concluímos que $G \in \mathscr{F}$. Portanto G é supersolúvel. $\square$

Concluímos, deste capítulo, que podemos tirar várias informações a respeito de um grupo G analisando apenas algumas classes de subgrupos minimais. Estávamos analisando quando temos a hipótese que tais subgrupos tinham complemento em um subgrupo de G. Foram obtidas condições suficientes para p-nilpotência, solubilidade, supersolubilidade, e para que um grupo pertença a uma determinada formação. Portanto, a influência desses subgrupos na estrutura do grupo é realmente grande.

Bibliografia

[1] BALLESTER-BOLINCHES, A. & GUO, X.Y.: **On Complemented Subgroups of Finite Groups**. Arch. Math. 72 (1999), 161-166.

[2] DOERK, K.: **Minimal nicht Überauflösbare, endliche Gruppen**. Math. Zeitschr. 91 (1996), 198-205.

[3] GONÇALVES, A.: **Tópicos em representação de grupos**. 9º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, (1973).

[4] GUO, X.Y. & SHUM, K.P.: **The Influence of Minimal Subgroups of Focal Subgroups on the Structure of Finite Groups**. Journal of Pure and Applied Algebra. 169 (2002), 43-50.

[5] HALL, M.J.: **Teoría de los Grupos**. Mexico: Editorial F. Trillas, S.A. (1969).

[6] HALL, P.: **Complemented Groups**. J. London Math. Soc. 12 (1937), 201-204.

[7] ROBINSON, D.J.S.: **A Course in the Theory of Groups**. New York: Spring-Verlag, (1993).

[8] ROSE, J.S.: **A Course on Group Theory**. New York: Dover Publications, 1.ed., (1994).

[9] ROTMAN, J.J.: **An Introduction to the Theory of Groups** . New York: Spring-Verlag, 4.ed., (1994).

[10] SCOTT, W.R.: **Group Theory**. New Jersey: Prentice-Hall, (1964).