UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

EMANUELA RÉGIA DE SOUSA COELHO

ESTABILIDADE EXPONENCIAL PARA UM PROBLEMA DE TRANSMISSÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA VISCOELÁSTICA

Maringá - PR
2018

EMANUELA RÉGIA DE SOUSA COELHO

ESTABILIDADE EXPONENCIAL PARA UM PROBLEMA DE TRANSMISSÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA VISCOELÁSTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas, da Universidade Estadual de Maringá como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientadora: Profa. Dra. Valéria Neves Domingos Cavalcanti

Maringá - PR

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Coelho, Emanuela Régia de Sousa
C672e Estabilidade exponencial para um problema de transmissão da equação da onda viscoelástica / Emanuela Régia de Sousa Coelho. -- Maringá, 2018.
88 f. : il.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Valéria Neves Domingos Cavalcanti.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2018.

1. Equação da onda. 2. Problema de transmissão. 3. Efeito viscoelástico. 4. Estabilidade exponencial. 5. Wave equation. 6. Transmission problem. 7. Viscoelastic effect. 8. Exponential stability. I. Cavalcanti, Valéria Neves Domingos, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 515.3535
Edilson Damasio CRB9-1.123

EMANUELA RÉGIA DE SOUSA COELHO

ESTABILIDADE EXPONENCIAL PARA UM PROBLEMA DE TRANSMISSÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA VISCOELÁSTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Valéria Neves Domingos Cavalcanti
Profa. Dra. Valéria Neves Domingos Cavalcanti
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Aldo Trajano Lourêdo
Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo
Universidade Estadual da Paraíba

Profa. Dra. Maria Rosario Astudillo Rojas
Universidade Federal do Paraná

Juan Soriano
Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino
Universidade Estadual de Maringá

Claudete Webler
Profa. Dra. Claudete Matilde Webler Martins
Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em 23 de novembro de 2018.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

À minha mãe, Alda, em nome de todas as mulheres fortes da minha família e à minha orientadora, Profa. Valéria, em nome de todas as mulheres pesquisadoras desse país. À vocês, que me abriram as portas, dedico!

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, e de maneira especial, a minha família: meus pais, meus irmãos e minha cunhada que estiveram sempre comigo, incondicionalmente, em todos os momentos dessa caminhada.

Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UEM tanto pelo conhecimento compartilhado em sala de aula, quanto pelo amparo fora dela. Em especial, agradeço aos professores Juan Soriano e Marcelo Cavalcanti que, juntamente com a Profa. Valéria Domingos Cavalcanti, formam os patriarcas da família Soriano Cavalcanti, da qual, agora, tenho orgulho de fazer parte.

Agradeço, também, aos funcionários do PMA-UEM pela disponibilidade sempre que solicitada. Especialmente, agradeço a Lúcia Kato(secretária) a quem dei muito trabalho durante esse período em Maringá.

Agradeço a meus colegas de programa, todos que aqui passaram enquanto eu estava na luta. Cada um se tornou especial a sua forma e, por isso, eles são inesquecíveis. Em particular, gostaria de agradecer a Marieli, Gilson, Giovana Higinio, Leonel e Djeison, amigos que fiz aqui e que vou levar para além da academia.

Agradeço a meus amigos do Nordeste, que se fizeram presentes sempre que precisei de um ombro amigo, bem como, sempre que quis celebrar. Estes, que recarregavam minhas baterias todo semestre, para que eu superasse o semestre seguinte. Entre eles, meu agradecimento especial a Izaque, Arlandson, Débora, Dany, Matheus, Diego, Eliene, Manu e Clésio.

Agradeço a toda minha família: meus tios, primos e minha avó. Agradeço pelo apoio, pelo incentivo, pela comida gostosa quando eu os visitva, pelas recepções e pelas despedidas. Agradeço pelo exemplo de humanidade e de unidade, apesar de tudo. Minha vitória é vitória de vocês!

Agradeço aos professores Juan Soriano e Aldo Trajano, além das professoras Claudete Webler e Maria Astudillo por aceitarem examinar esse trabalho e pelas valiosas contribuições para sua melhoria.

Ao professor Aldo Trajano, meu agradecimento especial, por toda a confiança depositada em mim, desde a graduação, quando fui sua aluna de Iniciação Científica, até o fim do mestrado. Por todo o direcionamento dado até que esse momento (de defesa de tese) se consolidasse, meu muito obrigada!

Por fim, agradeço a profa. Valéria Neves Domingos Cavalcanti, com muito prazer, minha orientadora. Agradeço pela orientação dada, pelas discussões, debates, até brigas, ás vezes, e agradeço pela compreensão, pelo companheirismo, pela força, pelas palavras de conforto, pela amizade. Agradeço, especialmente, pelo exemplo de mulher forte e guerreira que é. Agradeço pelas portas que abriu, mesmo que algumas tenha sido no empurrão. Agradeço por ser fiel ao que representa e por ajudar a fazer desse mundo um lugar menos sombrio para nós, mulheres. Muito, muito obrigada!

Ah, sim, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estamos interessados em estudar um problema de transmissão de ondas com uma componente viscoelástica, em que este termo é constituído de uma memória com história. Aqui, mostramos resultados de Existência e Unicidade de Soluções para o referido problema, além do decaimento exponencial do funcional de energia associado ao sistema correspondente.

Para a obtenção da Existência e Unicidade de Solução, utilizamos resultados de Teoria de Semigrupos Lineares, antes, porém, para nos adequarmos as condições da Teoria, fazemos uma mudança de variáveis seguindo as ideias de Dafermos [17]. No que se refere a estabilização, utilizamos estimativas de energia, juntamente com resultados de Medida de Defeito Microlocal introduzidos, inicialmente, por Gérard [24].

Palavras-chave: Equação de Ondas; Problema de Transmissão; Efeito Viscoelástico; Estabilidade Exponencial

Abstract

In the present work, we are interested in studying a wave transmission problem with a viscoelastic term and a hereditary memory . We establish the well-posedness results to this problem, besides the exponential decay of the functional energy associated to the corresponding system.

In order to obtain the Existence and Uniqueness of Solutions, we use Linear Semigroup Theory results, but firstwe perform a change of variables following the ideas of Dafermos [17]. Concerning the stabilization, we use energy estimates, together with microlocal defect measures results which were initially introduced by Gérard [24].

Keywords: Wave equation ; Transmission problem ; Viscoelastic effect; Exponential stability.

Conteúdo

Introdução

No presente trabalho estudamos um problema de transmissão de ondas em um domínio N-dimensional, $N \geq 2$, composto de duas partes: uma consiste de material viscoelástico com história passada juntamente com material elástico localizado, a outra consiste de material elástico e a fronteira em comum é responsável pelas condições de transmissão. Estamos, portanto, interessados em estudar o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - k_1 \Delta u + k_1 \displaystyle\int_{-\infty}^{t} g(t-s)\Delta u(s)\, ds + b(x)u_t = 0 \;\; \text{em } \Omega_1 \times (0,\infty), \\ v_{tt} - k_2 \Delta v + b(x) v_t = 0 \;\; \text{em } \Omega_2 \times (0,\infty), \\ u = 0 \;\; \text{sobre } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ u = v \;\; \text{sobre } \Gamma_2 \times (0,\infty), \\ k_2 \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = k_1 \dfrac{\partial u}{\partial \nu} - k_1 \displaystyle\int_{-\infty}^{t} g(t-s) \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(s)\, ds \;\; \text{sobre } \Gamma_2 \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x); \;\; u_t(x,0) = u_1(x), \;\; x \in \Omega_1, \\ v(x,0) = v_0(x); v_t(x,0) = v_1(x), x \in \Omega_2, \\ u(x,t) = u_0(x,t), \;\; u_t(x,t) = \partial_t u_0(x,t), \;\; t < 0. \end{cases} \tag{1}$$

em que $\Omega_1 = \Omega \backslash \overline{\Omega}_2$ e Ω, Ω_2 são subconjuntos abertos, limitados e conexos de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ de fronteiras suaves Γ_1 e Γ_2, respectivamente, tais que $\Omega_2 \subset\subset \Omega$ e $u_1(x) = \partial_t u_0(x,t)|_{t=0}$.

Os resultados aqui apresentados foram aceitos para publicação no periódico Applied Mathematics and Optimization em 2018, conforme referência [11].

Um problema de transmissão para equações hiperbólicas (também chamado de problema de difração), visto como modelo matemático, consiste de um problema de valor inicial para uma equação hiperbólica cujo operador elítico correspondente possui coeficientes descontínuos. Além disso, problemas de transmissão também podem ser interpretados como um problema acoplado em dois domínios com uma fronteira em comum, em que os termos de acoplamento aparecem, exatamente, nessa fronteira. Estes termos são chamados de condições de transmissão e sua importância está no fato de estabelecer o modo como os meios se misturam.

Nosso trabalho tem como objetivo o estudo de um problema de transmissão de ondas com uma componente viscoelástica, em outras palavras, estamos interessados em estudar a propagação de ondas em um domínio composto de dois materiais distintos: no primeiro temos uma componente viscoelástica com história passada conjuntamente com uma componente elástica localizada e a segunda componente consiste de material elástico. Nessa direção, temos dois elementos que caracterizam o nosso problema: o modelo de transmissão e o termo de memória com história passada.

No que se refere à problemas de transmissão de ondas, Lions [33] trata da existência de soluções do seguinte problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - a_1\Delta u = 0 \ \text{ em } \Omega_1 \times (0,\infty), \\ v_{tt} - a_2\Delta v = 0 \ \text{ em } \Omega_2 \times (0,\infty), \\ u = 0 \ \text{ sobre } \Gamma_1 \times (0,\infty), \end{cases}$$

sujeito as condições de transmissão

$$\begin{cases} u = v \ \text{ sobre } \Gamma_2 \times (0,\infty), \\ a_2\dfrac{\partial v}{\partial \nu} = a_1\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \text{ sobre } \Gamma_2 \times (0,\infty), \end{cases}$$

e condições iniciais

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x); \ u_t(x,0) = u_1(x), \ x \in \Omega_1, \\ v(x,0) = v_0(x); v_t(x,0) = v_1(x), x \in \Omega_2, \end{cases}$$

em que $\Omega_1 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_2$ e Ω, Ω_2 são subconjuntos abertos, limitados e conexos de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ de fronteiras suaves Γ_1 e Γ_2, respectivamente, tais que $\Omega_2 \subset\subset \Omega$. Os resultados apresentados por Lions foram generalizados por Lagnese em [31], visto que, nesse trabalho, o autor considera problemas de transmissão para um sistema hiperbólico linear de segunda ordem, com coeficientes constantes por partes e prova a controlabilidade exata pela fronteira para tais problemas. Mais tarde, Liu [37] complementa os resultados de Lions, provando que o sistema pode ser controlável introduzindo um controle ao longo da fronteira exterior, no caso em Γ_1, e numa vizinhança da zona de transmissão. Ainda, Liu e Williams em [39], provaram que o problema de transmissão de ondas com termos de ordem inferior é exponencialmente estável utilizando o clássico método da energia e a técnica dos multiplicadores.

Um problema de transmissão de ondas com viscoelasticidade em um domínio unidimensional foi estudado por Muñoz Rivera e Oquendo em [42]. Neste trabalho os autores tratam da existência e estabilização exponencial do seguinte problema:

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - \alpha_1 u_{xx} = 0 \ \text{ em } (0, L_0) \times (0, \infty), \\ \rho_2 v_{tt} - \alpha_2 v_{xx} + \displaystyle\int_0^t g(t-s) v_{xx}(s) ds = 0 \ \text{ em } (L_0, L) \times (0, \infty), \\ u(0,t) = 0 = v(L,t), t > 0 \\ u(L_0, t) = v(L_0, t), t > 0, \\ \alpha_1 u_x(L_0, t) = \alpha_2 v_x(L_0, t) - \displaystyle\int_0^t g(t-s) v_x(L_0, s) ds, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x); \ u_t(x,0) = u_1(x), \ x \in (0, L_0), \\ v(x,0) = v_0(x); v_t(x,0) = v_1(x), x \in (L_0, L). \end{cases}$$

e provam que a dissipação produzida pelo termo viscoelástico é suficiente para estabilizar todo o sistema. Observamos que os autores não consideram a história passada do termo de memória.

Ainda no contexto viscoelástico unidimensional, temos o trabalho de Andrade et al [3] em que é considerado um problema de transmissão no qual o termo viscoelástico produz um efeito viscoelástico na fronteira de transmissão. Neste trabalho os autores provam a estabilidade exponencial do problema quando o núcleo da memória decai exponencialmente.

No contexto de problemas de transmissão com dissipação do tipo Kelvin-Voigt localizada citamos os trabalhos de Alves et al [1, 2] e, relativo a problemas de transmissão termoelásticos, citamos os trabalhos de Muñoz Rivera e Naso [41] e Fernandéz Sare e Muñoz Rivera [22].

Considerando a existência de uma longa lista de trabalhos nessa direção, finalizamos citando o trabalho de Cardoso e Vodev [10] em que os autores estudam problemas de transmissão em domínios limitados com dissipação na fronteira. Nele, os autores provam a limitação uniforme do operador resolvente no eixo real sujeito à alta frequência.

Agora, no que diz respeito ao comportamento de soluções de problemas com termos viscoelásticos do tipo memória com história destacamos o trabalho pioneiro de Dafermos [17]. Nele, o autor trata da estabilização para a seguinte equação

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau)d\tau, x \in (0,1), t \in [0,\infty).$$

e introduz uma mudança de variáveis que transforma a equação acima numa equação autônoma além de definir, para esta nova variável, um espaço de Hilbert apropriado. Ainda sobre estabilização de equações viscoelásticas com história passada, citamos o trabalho de Liu e Liu [38], em que neste foi considerado o modelo de Kelvin-Voigt com funções de coeficientes regulares e o modelo de Boltzmann com descontinuidade na interface das propriedades do material . Ambos os modelos foram estudados em um domínio unidimensional e os autores provaram o decaimento exponencial da energia associada a cada problema. Ademais, citamos os trabalhos de Appleby et al. [4], Pata [44] e vários trabalhos que tratam de problemas viscoelásticos com memória com história, tais como [13–16, 18, 21, 26, 28, 29] e outros. Finalmente, no contexto de equações de onda viscoelásticas não autônomas gostaríamos de mencionar o trabalho de Lasiecka et al. [32].

Conforme explanado, o objetivo do nosso trabalho é estudar a existência, unicidade e estabilidade exponencial das soluções do problema (1). Usamos a Teoria de Semigrupos Lineares para a obtenção do resultado de existência e unicidade de soluções. Porém, observando que o problema (1) é não-autônomo usamos a mudança de variáveis introduzida por Dafermos [17], à saber,

$$\eta^t(x,s) = \eta(x,t,s) = u(x,t) - u(x,t-s).$$

de modo a transformar o problema (1) no seguinte problema autônomo equivalente:

$$\begin{cases} u_{tt} - \tilde{k}\Delta u - k_1\displaystyle\int_0^\infty g(s)\Delta\eta^t(s)\,ds + b(x)u_t = 0 \ \text{ em } \Omega_1 \times (0,\infty), \\ \eta^t_t + \eta^t_s = u_t \ \text{ em } \Omega_1 \times (0,\infty), \\ v_{tt} - k_2\Delta v + b(x)v_t = 0 \ \text{ em } \Omega_2 \times (0,\infty), \end{cases} \tag{2}$$

sujeito às condições de fronteira e transmissão

$$\begin{cases} u = 0 \ \text{ sobre } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ \eta = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \times (0,\infty) \times (0,\infty) \\ u = v \ \text{ sobre } \Gamma_2 \times (0,\infty), \\ k_2 \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \tilde{k} \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + k_1 \displaystyle\int_0^\infty g(s) \dfrac{\partial \eta}{\partial \nu}(s)\, ds \ \text{ sobre } \Gamma_2 \times (0,\infty), \end{cases}$$

e condições iniciais

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x); \ u_t(x,0) = u_1(x), \ x \in \Omega_1, \\ v(x,0) = v_0(x); \ v_t(x,0) = v_1(x), \ x \in \Omega_2, \\ \eta^t(x,0) = 0; \ \eta^0(x,s) = \eta_0(x,s), \ x \in \Omega_1, s \geq 0, t \geq 0 \end{cases}$$

em que

$$\begin{cases} u_0(x) = u_0(x,0), \ x \in \Omega_1, \\ u_1(x) = \partial_t u_0(x,t)|_{t=0} \ x \in \Omega_1, \\ \eta_0(x,s) = u_0(x,0) - u_0(x,-s), \ x \in \Omega_1. \end{cases}$$

No que concerne ao decaimento exponencial do funcional de energia associado ao problema proposto, nossa primeira abordagem foi a utilização da técnica dos multiplicadores. No entanto, o método não se mostrou satisfatório para a obtenção da estabilidade exponencial desejada. Em seguida, por se tratar de um problema linear, decidimos por utilizar resultados de estabilização de semigrupos, como em Gearhart [23] e Prüss [46]; porém, essa técnica também não se mostrou eficiente. Sendo assim, motivados pelo trabalho de Dehman et al. [20], obtemos o resultado de estabilização desejado utilizando estimativas de energia e resultados da teoria de medida de defeito microlocal. Tal teoria foi introduzida por Gérard em [24] e foi utilizada por Burq e Gérard [8, 9] para a equação de onda. Com essa abordagem, o intuito é provar que existem $T_0 > 0$ tais que, se

$$E(0) \leq R$$

então, para todo $T > T_0$, existe $C = C(T, R) > 0$, verificando

$$\begin{aligned} E(0) \ &\leq \ C \left(\frac{k_1}{2} \int_0^T \int_0^\infty (-g'(s)) \int_{\Omega_1} |\nabla \eta^t(s)|^2 dx ds dt + \int_0^T \int_{\Omega_1} b(x) |u_t(t)|^2 dx dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \int_{\Omega_2} b(x) |v_t(t)|^2 dx dt \right), \end{aligned}$$

em que $E(t)$ é o funcional de energia associado ao problema proposto dado por

$$E(t) = \frac{1}{2}\left\{\int_{\Omega_1}(|u_t|^2 + \tilde{k}|\nabla u|^2)dx + k_1\int_0^\infty g(s)\int_{\Omega_1}|\nabla\eta^t(s)|^2dxds\right.$$
$$\left.\int_{\Omega_2}(|v_t|^2 + k_2|\nabla v|^2)dx\right\}$$

onde $\tilde{k} = k_1(1-k_0)$ e $k_0 = \int_0^\infty g(s)ds$.

Usando argumentos de contradição, a teoria de medida de defeito microlocal, juntamente com resultados de continuidade única, provamos a estabilização do sistema.

O presente trabalho encontra-se organizado da seguinte forma: O primeiro capítulo trata de resultados preliminares, ou seja, nele estão apresentados os principais resultados, notações e definições utilizados nos capítulos seguintes. No segundo capítulo apresentamos os resultados de existência e unicidade de soluções para o problema proposto, via teoria de Semigrupos e, no terceiro e último capítulo, provamos que as soluções dadas no segundo capítulo são exponencialmente estáveis.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

O capítulo que se inicia tem por objetivo apresentar os principais resultados que são necessários ao desenvolvimento deste texto, a fim de deixá-lo autossuficiente, além de introduzir importantes notações que serão utilizadas nos próximos capítulos. Salientamos que as demonstrações de resultados clássicos das Teorias de Análise Funcional, Espaços de Sobolev, Semigrupos Lineares, entre outros, serão omitidas mas, indicaremos referências bibliográficas para os interessados. Entretanto, como trabalharemos, mais a frente, com Espaços Vetoriais não usuais, sempre que possível, faremos a prova de propriedades relativas a eles.

1.1 Espaços Funcionais

Recordemos que, se Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das (classes de) funções reais f definidas em Ω cuja p-ésima potência é integrável no sentido de Lebesgue e por $L^\infty(\Omega)$ o conjuntos das (classes de) funções mensuráveis e essencialmente limitadas em Ω. Nesse contexto, o espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} ess |f(x)|_{\mathbb{R}}$$

é um espaço de Banach.

No caso em que $p = 2$, o espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, denotamos o espaço das (classes de) funções reais definidas em Ω, cuja p-ésima potência é integrável à Lebesgue sobre qualquer subconjunto compacto do $\mathbb{R}^n$ contido em Ω e por $L^\infty_{loc}(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções mensuráveis e essencialmente limitadas em qualquer subconjunto compacto do $\mathbb{R}^n$ contido em Ω.

Com relação aos espaços $L^p(\Omega)$, temos o seguinte:

- $L^p(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$,
- $L^p(\Omega)$ é separável para $1 \leq p < \infty$,
- Se Ω é limitado e $1 \leq p \leq q \leq \infty$ então

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

onde o símbolo $\hookrightarrow$ denota imersão contínua.

Com o intuito de introduzirmos os Espaços de Sobolev, relembremos que uma n-upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é denominada *multi-índice* e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$. Representamos por D^α o operador derivação de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}_{x_1}\partial^{\alpha_2}_{x_2}\ldots\partial^{\alpha_n}_{x_n}}.$$

Se $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$ definimos $D^0 u$ como o operador identidade.

Ainda, denotamos por $C^\infty_0(\Omega)$ o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto, ou seja, o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$ é um subconjunto compacto do $\mathbb{R}^n$. Dizemos que uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C^\infty_0(\Omega)$ converge para φ em $C^\infty_0(\Omega)$, quando existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que:

i) $supp(\varphi), supp(\varphi_n) \subset K,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

ii) Para todo *multi-índice* $\alpha \in \mathbb{N}^n$, tem-se $D^\alpha(\varphi_n - \varphi) \to 0$ uniformemente em K.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido dessa noção de convergência, é chamado de *Espaço das Funções Teste sobre* Ω e é representado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Além disso, definimos uma distribuição sobre um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ como sendo um funcional linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ contínuo no sentido da convergência em $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, se φ_n converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $T(\varphi_n)$ converge para $T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

O espaço das distribuições sobre Ω é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, representamos o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi\rangle$. Com isso, dizemos que

$$T_n \to T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega),$$

quando,

$$\langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle \text{ em } \mathbb{R}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Por fim, se T é uma distribuição sobre Ω e α é um multi-índice. A derivada $D^\alpha T$ de ordem $|\alpha|$ de T é um funcional $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^n \langle T, D^\alpha \varphi\rangle.$$

Além disso, $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω.

Consideremos, agora, Ω um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$. Dado um número inteiro $m > 0$, representamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções u pertencentes a $L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, temos que a derivada de u no sentido das distribuições $D^\alpha u$, pertence a $L^p(\Omega)$. Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$, definimos a norma de u pondo

$$\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, \text{ quando } p = \infty.$$

Observação 1.1 *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach. Quando $p = 2$, representamos $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$, e este é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno*

$$((u, v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

O fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$ e por $H^{-m}(\Omega)$ o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$.

Outra classe importante de espaços a serem considerados são os Espaços Funcionais a Valores Vetoriais, que serão introduzidos a partir de agora.

Seja X um espaço de Banach. O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(0,T,X)$, isto é, $T \in \mathcal{D}'(0,T,X)$, quando $T : \mathcal{D}(0,T) \to X$ é linear e se $\theta_n \to \theta$ em $\mathcal{D}(0,T)$ então $\langle T, \theta_n \rangle \to \langle T, \theta \rangle$ em X. Diremos que $T_n \to T$ em $\mathcal{D}'(0,T,X)$ se $\langle T_n, \theta \rangle \to \langle T, \theta \rangle$ em X, $\forall \theta \in \mathcal{D}(0,T)$. O espaço $\mathcal{D}'(0,T,X)$ munido da convergência acima é denominado *Espaço das distribuições vetorias de* $(0,T)$ *com valores em* X.

Observação 1.2 *O conjunto* $\{\theta\xi, \theta \in \mathcal{D}(0,T), \xi \in X\}$ *é total em* $\mathcal{D}'(0,T,X)$. *Além disso, mostra-se que o conjunto* $\{\theta\xi, \theta \in \mathcal{D}(0,T), \xi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$ *é denso em* $\mathcal{D}(\Omega \times (0,T)) = \mathcal{D}(Q)$.

Definição 1.3 *Dizemos que* $u : (0,T) \to X$ *é fortemente mensurável quando existir uma sequência de funções simples* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\varphi_n : (0,T) \to X$ *tal que*

$$|\varphi_n(t) - u(t)|_X \to 0, \ \textit{quase sempre em } (0,T).$$

Denotaremos por $L^p(0,T,X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das (classes de) funções u, definidas em $(0,T)$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X^p$ é integrável a Lebesgue. Neste espaço definimos a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T,X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^\infty(0,T,X)$ representamos o espaço das (classes de) funções u, definidas em $(0,T)$ com valores em X, que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ possui supremo essencial finito em $(0,T)$, a norma neste espaço é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T,X)} = \sup_{0<t<T} ess \|u(t)\|_X. \tag{1.1.1}$$

Os espaços $L^p(0,T,X)$ e $L^\infty(0,T,X)$ são espaços de Banach com suas respectivas normas.

Proposição 1.4 *O espaço* $L^p(0,T;X)$ *é denso em* $\mathcal{D}'(0,T;X)$.

Prova. Ver [7]. ∎

Observação 1.5 *Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, temos que $L^2(0, T, X)$ também é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por*

$$(u, v)_{L^2(0,T,X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

Se X é reflexivo, podemos identificar

$$[L^p(0, T; X)]' = L^q(0, T; X'),$$

onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. E, no caso em que $p = 1$, identificamos

$$[L^1(0, T; X)]' = L^\infty(0, T; X')$$

Definição 1.6 *Dada $T \in \mathcal{D}'(0, T, X)$, definimos a derivada de ordem n de T como sendo a distribuição vetorial sobre $(0, T)$ com valores em X dada por:*

$$\left\langle \frac{d^n T}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Representamos por $C([0, T], X)$ o espaço de Banach das funções contínuas u, definidas em $[0, T]$ com valores em X, cuja norma é dada por

$$\|u\|_{C([0,T],X)} = \sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X.$$

Denotaremos por $H_0^1(0, T, X)$ o espaço de Hilbert

$$H_0^1(0, T, X) = \{u \in L^2(0, T, X); u' \in L^2(0, T, X), u(0) = u(T) = 0\},$$

munido do produto interno

$$((u, v))_{H_0^1(0,T,X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt + \int_0^T (u'(t), v'(t))_X dt.$$

Identificando $L^2(0, T, X)$ com o seu dual $(L^2(0, T, X))'$, via Teorema de Riesz, obtemos a seguinte cadeia

$$\mathcal{D}(0, T, X) \hookrightarrow H_0^1(0, T, X) \hookrightarrow L^2(0, T, X) \equiv L^2(0, T, X) \hookrightarrow H^{-1}(0, T, X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0, T, X),$$

onde

$$(H_0^1(0, T, X))' = H^{-1}(0, T, X).$$

Nos próximos Capítulos estudamos um problema em que um dos componentes do Espaço de Fase é um Espaço Funcional com peso, à saber $L_g^2(0, \infty; V)$, nessa direção, vamos introduzir aqui esse tipo de espaço.

Seja $g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ uma função tal que

$$g \in C^1 \cap L^1,$$

que representará o peso do espaço e seja X um espaço de Banach. Definimos, para $1 \leq p < \infty$, o espaço

$$L^p_g(0, \infty; X) := \left\{ \eta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X; \int_0^\infty g(s) \|\eta(s)\|^p_X ds < \infty \right\}$$

que é um Espaço de Banach, quando munido da norma

$$\|\eta\|_{p,g} = \left(\int_0^\infty g(s) \|\eta(s)\|^p_X ds \right)^{1/p}.$$

Em particular, quando $p = 2$ e X é um Espaço de Hilbert, $L^2(0, \infty; X)$ é, também, um Espaço de Hilbert munido do produto interno

$$(\eta, \xi)_{2,g} = \int_0^\infty g(s)(\eta(s), \xi(s))_X ds.$$

1.1.1 O espaço $\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$

No segundo capítulo, utilizaremos um importante espaço vetorial, denotado por $\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$, que é caracterizado como um subespaço de um cartesiano de Espaços de Sobolev. Como esse espaço não é usual, trataremos, aqui, de apresentá-lo.

Sejam Ω e Ω_2 domínios limitados do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteiras suaves Γ_1 e Γ_2, respectivamente, tais que $\Omega_2 \subset\subset \Omega$ e $\Omega_1 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_2$. Definimos

$$\mathbb{H}^1_{\Gamma_1} = \{(u, v) \in \mathbb{H}^1; u = v \text{ sobre } \Gamma_2 \text{ e } u = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\},$$

onde $\mathbb{H}^1 = H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$, que é um Espaço de Hilbert quando munido do seguinte produto interno

$$((u_1, v_1), (u_2, v_2))_{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}} = \tilde{k}(\nabla u_1, \nabla u_2)_1 + k_2(\nabla v_1, \nabla v_2)_2. \tag{1.1.2}$$

Afirmamos que a norma proveniente do produto interno acima é equivalente a norma usual de $\mathbb{H}^1$. Quando nos deparamos com essa afirmação, a primeira impressão, é de que podemos usar a desigualdade de Poincaré. Mas, em verdade, o que acontece é que podemos identificar o espaço $\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$ com um subespaço fechado de $H^1_0(\Omega)$. Esse fato é o que pretendemos mostrar a seguir.

Seja $(u,v) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$. Devemos provar que

$$\theta = \begin{cases} u & \text{em } \Omega_1 \\ v & \text{em } \Omega_2 \end{cases}$$

é um elemento de $H^1_0(\Omega)$.

Como $(u,v) \in \mathbb{H}^1$, em particular, $(u,v) \in \mathbb{L}^2 = L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ e, portanto, $\theta \in L^2(\Omega)$. Precisamos mostrar, então, que $\frac{\partial \theta}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$ para $j = 1, \ldots, n$. Para tal, consideremos $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Daí,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle &= -\left\langle \theta, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= -\left(\theta, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)_{L^2(\Omega)} \\ &= -\int_{\Omega_1} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx - \int_{\Omega_2} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

onde $\langle .,. \rangle = \langle .,. \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}$.

Da fórmula de Green temos que

$$\int_{\Omega_1} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_{\Omega_1} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx + \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} u \varphi \nu^j d\sigma$$

onde $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ denota o vetor unitário, normal à $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ exterior à Ω_1. Como $u = 0$ sobre Γ_1, segue que

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} u \varphi \nu^j d\sigma = \int_{\Gamma_2} u \varphi \nu^j d\sigma,$$

logo,

$$\int_{\Omega_1} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_{\Omega_1} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx + \int_{\Gamma_2} u \varphi \nu^j d\sigma.$$

Analogamente,

$$\int_{\Omega_2} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_{\Omega_2} \frac{\partial v}{\partial x_j} \varphi dx - \int_{\Gamma_2} v \varphi \nu^j d\sigma,$$

nesse caso, o sinal negativo na integral sobre Γ_2 vem do fato de o vetor ν ser tomado na direção exterior a Ω_1 e, portanto, interior a Ω_2. Assim, tomamos o vetor $-\nu$ como sendo exterior a Ω_2.

Substituindo as igualdades acima em (1.1.3), obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle &= \int_{\Omega_1} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx - \int_{\Gamma_2} u \varphi \nu^j d\sigma + \int_{\Omega_2} \frac{\partial v}{\partial x_j} \varphi dx + \int_{\Gamma_2} v \varphi \nu^j d\sigma \\ &= \int_{\Omega_1} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx + \int_{\Omega_2} \frac{\partial v}{\partial x_j} \varphi dx, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato de $u = v$ sobre Γ_2. Defina, então

$$\psi_j = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_j} & \text{em } \Omega_1 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x_j} & \text{em } \Omega_2, \end{cases} \in L^2(\Omega)$$

portanto,

$$\left\langle \frac{\partial \theta}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = \int_\Omega \psi_j \varphi dx = \langle \psi_j, \varphi \rangle ,$$

donde

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_j} = \psi_j \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega)$$

e, como $\psi_j \in L^2(\Omega)$ para cada $j = 1, \ldots, n$, segue que, para cada $j = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_j} \in L^2(\Omega),$$

ou seja,

$$\theta \in H^1(\Omega).$$

Ainda, sobre Γ_1 temos que $\theta = u = 0$. Consequentemente, $\theta \in H_0^1(\Omega)$, o que prova que $\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$ pode ser identificado com um subspaço de $H_0^1(\Omega)$. Resta mostrar que esse subespaço é fechado.

De fato, sejam $\{(u_n, v_n)\} \subset \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$ e $\theta \in H_0^1(\Omega)$ tais que, escrevendo

$$\theta_n = \begin{cases} u_n \text{ em } \Omega_1 \\ v_n \text{ em } \Omega_2 \end{cases}$$

temos

$$\theta_n \longrightarrow \theta \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Devemos mostrar que $(\theta|_{\Omega_1}, \theta|_{\Omega_2}) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$. Mas, isso é verdade, visto que a convergência acima e a equivalência das normas $\|\nabla(.)\|_{L^2(\Omega)}$ e $\|.\|_{H^1(\Omega)}$ em $H_0^1(\Omega)$, implicam em

$$u_n \longrightarrow u \text{ e } v_n \longrightarrow v$$

em $H^1(\Omega_1)$ e $H^1(\Omega_2)$, respectivamente, quando $n \to \infty$.

Assim, das continuidades dos traços em $H^1(\Omega_1)$ e $H^1(\Omega_2)$, obtemos que

$$u_n \longrightarrow \theta|_{\Omega_1} \text{ e } v_n \longrightarrow \theta|_{\Omega_2}$$

em $H^{1/2}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ e $H^{1/2}(\Gamma_2)$, respectivamente.

Em particular, sobre Γ_2 temos $u_n = v_n$ e, portanto, por unicidade do limite, temos $\theta|_{\Omega_1} = \theta|_{\Omega_2}$ sobre Γ_2 e, consequentemente, $\theta = (\theta|_{\Omega_1}, \theta|_{\Omega_2}) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$, como queríamos.

Com essa identificação, (de $\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$ com um subespaço fechado de $H^1_0(\Omega)$) temos que, para $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$, a aplicação

$$((u_1, v_1), (u_2, v_2))_I = (\nabla u_1, \nabla u_2)_1 + (\nabla v_1, \nabla v_2)_2, \tag{1.1.4}$$

define um produto interno, cuja norma proveniente

$$\|(u_1, v_1)\|_I^2 = \|\nabla u_1\|_1^2 + \|\nabla v_1\|_2^2$$

é equivalente a norma usual de $\mathbb{H}^1$.

De fato, que (1.1.4) define um produto interno, é imediato. Sabemos que, se $\theta \in H^1_0(\Omega)$, então, existem constantes positivas C_1, C_2 tais que

$$C_1\|\theta\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\theta\|_{H^1_0(\Omega)} = \|\nabla\theta\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2\|\theta\|_{H^1(\Omega)}. \tag{1.1.5}$$

Assim, se $(u, v) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$, temos

$$\theta = \begin{cases} u & \text{em } \Omega_1 \\ v & \text{em } \Omega_2 \end{cases} \in H^1_0(\Omega),$$

$$\|\theta\|^2_{H^1(\Omega)} = \|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|_1^2 + \|v\|_2^2 + \|\nabla u\|_1^2 + \|\nabla v\|_2^2 = \|(u, v)\|^2_{\mathbb{H}^1}$$

e

$$\|\theta\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\nabla u\|_1^2 + \|\nabla v\|_2^2 = \|(u, v)\|_I^2.$$

Logo, de (1.1.5), temos

$$C_1\|(u, v)\|_{\mathbb{H}^1} \leq \|(u, v)\|_I \leq C_2\|(u, v)\|_{\mathbb{H}^1}$$

o que garante a equivalência da norma $\|\cdot\|_I$ com a norma usual de $\|.\|_{\mathbb{H}^1}$ para elementos de $\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$.

Ainda, como $H^1_0(\Omega)$ é completo com a norma $\|\nabla\cdot\|_{H^1_0(\Omega)}$ segue que $(\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}, \|\cdot\|_I)$ é também completo. Da compacidade da imersão $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ segue a compacidade da imersão $\mathbb{H}^1_{\Gamma_1} \hookrightarrow \mathbb{L}^2$ e, por fim, a equivalência entre a norma $\|\cdot\|_I$ e a norma proveniente de (1.1.2) é imediata.

1.1.2 Espaços de Sobolev sobre Γ

Aqui trataremos de Espaços de Sobolev sobre Γ onde $\Gamma = \partial\Omega$ e Ω é um subconjunto aberto, limitado e bem regular de $\mathbb{R}^n$, antes disso, porém, recordemos os espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$ com $s \in \mathbb{R}$.

Consideremos

$$\mathcal{S} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \lim_{\|x\|\to\infty} \|x\|^k D^\alpha \varphi(x) = 0, \text{ para quaisquer } k \in \mathbb{N} \text{ e } \alpha \in \mathbb{N}^n\}$$

o espaço das funções rapidamente decrescentes no infinito (ou Espaço de Schwartz), $\mathcal{S}'$ o dual topológico de $\mathcal{S}$ e, para cada função $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a transformada de Fourier de u que é dada por

$$\hat{u}(x) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)} u(y) dy$$

onde, (x, y) denota o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$, ou seja, $(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$.

Dito isto, definimos para $s \in \mathbb{R}$,

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'; (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Observação 1.7 *Se $s \geq 0$, temos que $(H^s(\mathbb{R}^n))' = H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ e $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.*

Com isso, podemos introduzir os espaços $H^s(\Gamma)$, onde Γ é a fronteira de Ω.

Consideremos $\{(U_1, \varphi_1), \ldots, (U_k, \varphi_k)\}$ um sistema de cartas locais para Γ. A cobertura aberta $\Omega, U_1, \ldots, U_k$ de $\overline{\Omega}$ determina uma partição C^∞ da unidade subordinada à mesma. Mais precisamente, existem $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que

(i) $supp(\theta_0) \subset \Omega$; $supp(\theta_i) \subset U_i$ para $i = 1, \ldots, k$;

(ii) $\sum_{i=0}^k \theta_i(x) = 1$; para todo $x \in \overline{\Omega}$;

(iii) $0 \leq \theta_i \leq 1$ para $i = 1, \ldots, k$.

Se u é uma função definida sobre Γ, temos por (ii) que

$$u(x) = \sum_{i=1}^n (\theta_i u)(x) \qquad \text{q.t.p. em } \Gamma.$$

Definimos, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$:

$$u_i(y) = (\theta_i u)(\varphi_i^{-1}(y))$$

onde $y \in \Sigma = (0,1)^{n-1}$.

Notemos que

$$S(u\theta_i) = \overline{\{x \in \Gamma; (u\theta_i)(x) \neq 0\}} \subset supp(\theta_i) \cap \Gamma \subset U_i \cap \Gamma$$

o que mostra que $S(u\theta_i)$ é um compacto do $\mathbb{R}^n$ contido em $U_i \cap \Gamma$. Segue daí que o conjunto:

$$S(u_i) = \overline{\{x \in (0,1)^{n-1}; u_i(x) \neq 0\}}$$

é um compacto de $\mathbb{R}^{n-1}$ contido no aberto Σ, pois como φ_i é contínua e $S(u\theta_i)$ é compacto, temos

$$\varphi_i(S(u\theta_i)) = S(u_i).$$

Além disso, como,

$$supp(u_i) \subset S(u_i) \subset \Sigma$$

podemos estender u_i a uma função $\tilde{u}_i$ pondo-se zero fora de Σ, ou seja,

$$\tilde{u}_i(y) = \begin{cases} (u\theta_i)(\varphi_i^{-1}(y)) & \text{se} \quad y \in \Sigma \\ 0 & \text{se} \quad y \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \Sigma. \end{cases}$$

Com isso, temos que $\tilde{u}_i$ herda as mesmas características de u_i. Daí, se u é integrável, então $\tilde{u}_i$ também o é. E ainda,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{u}_i(y)dy = \int_{U_i \cap \Gamma} u(x)\theta_i(x)J_i(x)d\Gamma$$

onde $J_i(x)$ é uma aplicação infinitamente diferenciável sobre $\Gamma_i = U_i \cap \Gamma$. Por outro lado, se $\tilde{u}_i$ for integrável em $\mathbb{R}^{n-1}$ para todo $i = 1, 2 \ldots, k$, temos que u também será e

$$\int_\Gamma u(x)d\Gamma = \sum_{i=1}^n \int_\Gamma (u\theta_i)(x)d\Gamma = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{u}_i(y)\overline{J}(y)dy$$

onde, $\overline{J}(y)$ é uma aplicação infinitamente diferenciável sobre $\mathbb{R}^{n-1}$.

Denotando por $d\Gamma$ a medida superficial sobre Γ induzida pela medida de Lebesgue, designaremos por $L^p(\Gamma)$, $1 \leq p \leq \infty$, o espaço das funções integráveis sobre Γ para a medida superficial $d\Gamma$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Gamma)} = \|u\|_{p,\Gamma} = \left(\int_\Gamma |u(x)|^p d\Gamma \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.1.6}$$

se $1 \leq p < \infty$ e,

$$\|u\|_{\infty,\Gamma} = \sup_{x \in \Gamma} ess|u(x)|.$$

Usando a partição da unidade $\{\theta_i\}_{0\leq i\leq k}$ introduzida anteriormente, temos

$$L^p(\Gamma) = \{u : \Gamma \to \mathbb{R}; \widetilde{u\theta_i \circ \varphi_i^{-1}} = \tilde{u}_i \in L^p(\mathbb{R}^{n-1}), i = 1, \ldots, k\},$$

além disso, a norma

$$u \in L^p(\Gamma) \mapsto \|u\|_{p,\Gamma} = \left(\sum_{i=1}^{k} \|\tilde{u}_i\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}\right)^{\frac{1}{p}}$$

é equivalente a norma dada em (1.1.6).

Seja $m \in \mathbb{N}$, representamos por $C^m(\Gamma)$ o espaço das funções $u : \Gamma \to \mathbb{R}$ de classe C^m e por $\mathcal{D}(\Gamma)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis sobre Γ, isto é,

$$C^m(\Gamma) = \{u : \Gamma \to \mathbb{R}; \widetilde{u\theta_i \circ \varphi_i^{-1}} = \tilde{u}_i \in C^m(\mathbb{R}^{n-1}), i = 1, \ldots, k\}$$

$$\mathcal{D}(\Gamma) = \{u : \Gamma \to \mathbb{R}; \widetilde{u\theta_i \circ \varphi_i^{-1}} = \tilde{u}_i \in C^m(\mathbb{R}^{n-1}), \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \text{e } i = 1, \ldots, k\}.$$

Considereremos a aplicação:

$$\begin{array}{rcl} \phi_i : \mathcal{D}(\Gamma) & \to & \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ u & \mapsto & \phi_i(u) = \tilde{u}_i = \widetilde{u\theta_i \circ \varphi_i^{-1}} \end{array} \tag{1.1.7}$$

assim, se $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, temos que

$$\begin{aligned} \langle \phi_i(u), v\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})} &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{u}_i(y)v(y)dy \\ &= \int_{U_i\cap\Gamma} u(x)\theta_i(x)v(\varphi_i(x))J_i(x)d\Gamma \end{aligned}$$

onde $J_i(x)$ é uma aplicação infinitamente diferenciável sobre $\Gamma_i = U_i \cap \Gamma$.

Definindo

$$\psi_i(v) = \begin{cases} \theta_i(x)v(\varphi_i(x))J_i(x) & \text{se} \quad x \in U_i \cap \Gamma \\ 0 & \text{se} \quad x \in \Gamma \setminus U_i \cap \Gamma \end{cases}$$

então, podemos escrever

$$\langle \phi_i(u), v\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})} = \int_\Gamma u(x)\psi_i(v)(x)d\Gamma$$

ou ainda, como $\psi \in \mathcal{D}(\Gamma)$, temos

$$\langle \phi_i(u), v\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})} = \langle u, \psi_i(v)\rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma)\times\mathcal{D}(\Gamma)}$$

daí, e do fato de $\mathcal{D}(\Gamma)$ ser denso em $\mathcal{D}'(\Gamma)$, resulta que a aplicação definida em (1.1.7) se prolonga, por continuidade a uma aplicação que ainda denotaremos por ϕ_i de $\mathcal{D}'(\Gamma)$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$. E, com isso, definimos para $s \in \mathbb{R}$,

$$H^s(\Gamma) = \{u; \phi_i(u) \in H^s(\mathbb{R}^{n-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, k\}$$

dotado da norma

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} = \left(\sum_{j=1}^{k} \|\phi_i(u)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

É possível mostrar, como feito em [43], que as definições acima, não dependem do sistema de cartas locais de Γ. E, com isso, temos a boa definição do espaço $H^s(\Gamma)$ e da norma da qual é munido esse espaço.
Além disso, vale o seguinte:

- $\mathcal{D}(\Gamma)$ é denso em $H^s(\Gamma)$, para todo $s \in \mathbb{R}$.
- O espaço $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$.

As provas dos resultados acima, podem ser encontrados em [36].

1.1.3 O espaço $H^{1/2}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$

No decorrer deste tese, trataremos de um Problema de Transmissão e, para o seu desenvolvimento precisamos de algumas informações adicionais acerca de integração sobre a fronteira $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, conforme segue:

Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ com fronteira suave $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, onde Γ_1 e Γ_2 são fechadas e disjuntas e seja ν o vetor normal unitário exterior à Γ.

Dadas as condições sobre Γ_1 e Γ_2 podemos considerar sistemas de cartas locais $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1,\ldots,\bar{k}}$ e $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=\bar{k}+1,\ldots,k}$ para Γ_1 e Γ_2, respectivamente, que são disjuntas entre si. Nesse caso, $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1,\ldots,k}$ é um sistema de cartas locais para Γ. Sejam $\{\theta_i; i = 1, \ldots, \bar{k}\}$ e $\{\theta_j; j = \bar{k}+1, \ldots, k\}$ partições da unidade de classe C^∞ subordinadas a $\cup_{i=1}^{\bar{k}} U_i$ e $\cup_{i=\bar{k}+1}^{k} U_i$, respectivamente, tais que $supp\theta_i \subset U_i$, para $i = 1, \ldots, k$, $\sum_{i=1}^{\bar{k}} \theta_i(x) = 1$, para todo $x \in \Gamma_1$ e $\sum_{i=\bar{k}+1}^{k} \theta_i(x) = 1$ para todo $x \in \Gamma_2$. Assim, $\{\frac{1}{2}\theta_i; i = 1, \ldots, k\}$ constitui uma partição da unidade para Γ.

De posse dessas considerações, nosso intuito, aqui, é mostar que podemos fazer a seguinte identificação

$$H^{1/2}(\Gamma) \equiv H^{1/2}(\Gamma_1) \times H^{1/2}(\Gamma_2).$$

Para tal, considere a apliação

$$\begin{array}{rccc} \psi: & H^{1/2}(\Gamma) & \longrightarrow & H^{1/2}(\Gamma_1)\times H^{1/2}(\Gamma_2) \\ & u & \mapsto & (u_1,u_2)=(u|_{\Gamma_1},u|_{\Gamma_2}) \end{array}.$$

Afirmamos que ψ é uma isometria linear.

De fato, observe que ψ está bem definida. Nesse caso, devemos mostrar que

$$\phi_j(u_1)\in H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}), j=1,\ldots,\bar{k} \text{ e } \phi_j(u_2)\in H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}), j=\bar{k}+1,\ldots,k,$$

onde

$$\phi_j(u_1)=u_1\widetilde{\theta_j\circ\varphi_j^{-1}} \text{ para } j=1,\ldots,\bar{k}$$

e

$$\phi_j(u_2)=u_2\widetilde{\theta_j\circ\varphi_j^{-1}} \text{ para } j=\bar{k}+1,\ldots,k.$$

Mas, $u\in H^{1/2}(\Gamma)$, logo

$$\bar{\phi}_j(u)\in H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}), j=1,\ldots,k$$

onde,

$$\bar{\phi}_j(u)=u\widetilde{\frac{1}{2}\theta_j\circ\varphi_j^{-1}}=\frac{1}{2}u\widetilde{\theta_j\circ\varphi_j^{-1}}=\frac{1}{2}\phi_j(u).$$

Portanto, para $j=1,\ldots,\bar{k}$, temos

$$\begin{array}{rcl} \phi_j(u_1) & = & u_1\widetilde{\theta_j\circ\varphi_j^{-1}} \\ & = & u\widetilde{\theta_j\circ\varphi_j^{-1}} \\ & = & 2\bar{\phi}_j(u)\in H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}), \end{array}$$

donde $u_1\in H^{1/2}(\Gamma_1)$. Analogamente, temos $u_2\in H^{1/2}(\Gamma_2)$. De onde segue, que ψ está bem posta.

Temos, ainda, que ψ é uma bijeção linear. A linearidade é imediata. Mostremos, então, a bijetividade.

Seja $u\in ker(\psi)$, temos que

$$(0,0)=\psi(u)=(u|_{\Gamma_1},u|_{\Gamma_2})$$

logo,

$$u|_{\Gamma_1}=0 \text{ e } u|_{\Gamma_2}=0,$$

donde $u=0$ e, assim, ψ é injetora.

Agora, seja $(u_1,u_2)\in H^{1/2}(\Gamma_1)\times H^{1/2}(\Gamma_2)$ e defina

$$u=\begin{cases} u_1 \text{ sobre } \Gamma_1 \\ u_2 \text{ sobre } \Gamma_2 \end{cases}$$

e, por argumentos análogos aos utilizados para provar a boa definição de ψ, temos $u\in H^{1/2}(\Gamma)$. Donde, ψ é bijeção.

Além disso, ψ é uma isometria, pois,

$$\begin{aligned}
\|\psi(u)\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_1)\times H^{1/2}(\Gamma_2)} &= \|u|_{\Gamma_1}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_1)}+\|u|_{\Gamma_2}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_2)} \\
&= \|u_1\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_1)}+\|u_2\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_2)} \\
&= \sum_{i=1}^{\bar{k}}\|\phi_i(u_1)\|^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}+\sum_{i=\bar{k}+1}^{k}\|\phi_i(u_2)\|^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \\
&= \sum_{i=1}^{k}\|\phi_i(u)\|^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \\
&= \|u\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}.
\end{aligned}$$

Portanto, ψ é um isomorfismo isométrico. Com isso, a aplicação

$$\begin{array}{rccc}
\Psi: & H^{-1/2}(\Gamma_1)\times H^{-1/2}(\Gamma_2) & \longrightarrow & H^{-1/2}(\Gamma_1\cup\Gamma_2) \\
& (f,g) & \mapsto & \Psi(f,g)
\end{array},$$

onde

$$\Psi(f,g)(u)=(f,g)(\psi(u))$$

é também um isomorfismo isométrico.

Assim, por muitas vezes, usaremos a seguinte identificação

$$H^{-1/2}(\Gamma_1)\times H^{-1/2}(\Gamma_2)\equiv H^{-1/2}(\Gamma_1\cup\Gamma_2)$$

para tratar separadamente dos funcionais agindo sobre Γ_2 e Γ_1.

1.1.4 Teoria do Traço

Consideremos $\Omega=\mathbb{R}^n_+$ ou Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $\mathcal{D}(\Gamma)$ o espaço das funções reais definidas em Γ que possuem derivadas parciais de todas as ordens e por $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ o conjunto de todas as funções $\rho : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que são restrições de funções de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, ou seja,

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = \{\phi \mid_{\overline{\Omega}} = \rho, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}.$$

Dada uma função u definida em $\overline{\Omega}$, representaremos por $\gamma_0 u$ a restrição de u a Γ.

Proposição 1.8 *Existe uma constante positiva C, tal que*

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

para toda $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$.

Prova. Para a prova, ver [43].

Desde que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $H^1(\Omega)$ e de posse da proposição anterior, podemos estender a aplicação

$$\gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

a uma única aplicação linear e contínua, que ainda vamos representar por γ_0,

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

a qual chamamos de *aplicação traço de ordem zero.*

Além destes, consideremos o espaço $\mathcal{H}$ definido abaixo:

Definição 1.9 *Denotamos por $\mathbf{H}$ o seguinte conjunto*

$$\mathbf{H} = H(\Omega, \Delta) = \{u \in L^2(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

o qual, munido do produto interno,

$$((u, v))_{\mathbf{H}} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}, \ \forall u, v \in \mathcal{H}$$

e norma

$$u \mapsto [\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}]^{1/2}$$

é um espaço de Hilbert.

Lema 1.1 *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) *$\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $\mathbf{H}$;*

(b) *Existe uma aplicação linear e contínua definida em $\mathbf{H}$ tal que*

$$\begin{array}{rcl} \gamma : \mathbf{H} & \to & H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-3/2}(\Gamma) \\ u & \mapsto & (\gamma_0(u), \gamma_1(u)) \end{array}$$

e ainda,a aplicação γ acima coincide com a aplicação traço de ordem 2.

(c) *Se* $u \in \mathbf{H} \cap H^1(\Omega)$, *então* $\gamma_1 u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. *E, ainda, a aplicação* γ_1 *é contínua de* $\mathbf{H} \cap H^1(\Omega)$ *em* $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Prova. Ver [12]. ∎

1.1.5 Resultados Auxiliares

Lema 1.2 (Du Bois Raymond) *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto e* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Então, $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

Prova. Para a prova ver [43].

Teorema 1.10 (Aubin-Lions) *Sejam* B_0, B, B_1 *três espaços de Banach, tais que* $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$, *com* B_0 *e* B_1 *reflexivos. Definamos*

$$W = \left\{ v; v \in L^{p_0}(0,T;B_0), v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0,T,B_1) \right\}$$

onde $1 < p_0, p_1 < \infty$,*o qual munido da norma*

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T,B_1)}$$

é um espaço de Banach. Então, a imersão de W *em* $L^{p_0}(0,T;B)$ *é compacta.*

Prova. A demonstração encontra-se em [34].

Proposição 1.11 *Sejam* E *um espaço vetorial normado e* F *um subspaço vetorial de* E. *Se, para toda forma* $f \in E'$ *tal que* $\langle f, x\rangle = 0$, *para todo* $x \in F$ *se tem* $f \equiv 0$, *então* F *é denso em* E.

Prova. Ver [6]. ∎

Teorema 1.12 *Seja* A *um operador linear definido em um espaço de Banach* X. *São equivalentes:*

(i) A *é bijetivo e* A^{-1} *é limitado;*

(ii) $Im(A) = X$ *e existe* $\delta > 0$ *tal que* $\|Ax\|_X \geq \delta\|x\|_X$ *para todo* $x \in X$;

(iii) A *é fechado,* $Im(A) = X$ *e* $Ker(A) = \{0\}$.

Prova. Ver [5]. ∎

1.2 Semigrupos Lineares em Espaços de Banach

Nesta seção apresentamos um breve resumo sobre a Teoria de Semigrupos Lineares. Para mais detalhes, recomendamos [27] ou [45].

Definição 1.13 *Seja X um espaço de Banach. Uma família de operadores lineares limitados, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sobre X é chamado de Semigrupo de Operadores Lineares e Limitados em X (ou, simplesmente, Semigrupo em X) se*

- *$S(0) = Id$, onde Id é o operador identidade de X;*
- *$S(t+s) = S(t)S(s)$, para todo $t, s \geq 0$.*

Ainda, quando $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ satisfaz

- *$\lim_{t\to 0^+} S(t)x = x$, para todo $x \in X$,*

dizemos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo fortemente contínuo ou C_0-semigrupo.

Definição 1.14 *Sejam X um espaço de Banach e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um Semigrupo em X. O operador linear, A, definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

e

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in D(A)$$

é o Gerador Infinitesimal do Semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Neste caso, escrevemos $S(t) = e^{At}$.

Definição 1.15 *Um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ em um espaço de Banach X é chamado de uniformemente limitado se existe uma constante $M \geq 1$ tal que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

Quando $M = 1$ o semigrupo é dito de contrações.

Definição 1.16 *Seja A um operador definido sobre um espaço de Hilbert H com domínio $D(A) \subset H$. Dizemos que A é dissipativo se*

$$Re((Ax, x)_H) \leq 0 \ \forall x \in D(A).$$

Teorema 1.17 (Lumer-Phillips) *Seja A um operador linear definido num espaço de Hilbert H, com domínio $D(A) \subset H$. A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações se, e somente se, A é dissipativo e $Im(I - A) = H$.*

Prova. Para a prova, ver [45]

Definição 1.18 *Seja A um operador linear de um espaço de Banach X. O conjunto formado pelos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador $\lambda I - A$ é inversível, seu inverso é limitado e densamente definido é dito conjunto resolvente de A e é representado por $\rho(A)$.*

Corolário 1.19 *Seja A um operador linear com domínio $\mathcal{D}(A)$ denso em um espaço de Hilbert H. Se A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$, então A é o Gerador Infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em H.*

Prova. Ver [40]. ■

Definição 1.20 *Dizemos que um C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de um espaço de Banach X é exponencialmente estável se, existem constantes $C, \gamma > 0$ tais que*

$$\|S(t)\|_X \leq Ce^{-t\gamma}, \quad \textit{para todo } t \geq 0.$$

Teorema 1.21 *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo S de classe C_0, então, para cada $u_0 \in D(A)$, existe uma única função*

$$u \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X),$$

dita solução regular do Problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t = Au \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.2.8}$$

Nessas condições,

$$u(t) = S(t)u_0, \ \textit{para todo } t \geq 0.$$

Prova. Para a prova, ver [45].

Definição 1.22 *Dizemos que a solução de (1.2.8) decai a uma taxa de $f(t)$, se $f(t)$ é uma função positiva, tal que*

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$$

e

$$\|u(t)\|_X \leq f(t)\|u_0\|_{D(A)}, \ \ \forall t > 0, \tag{1.2.9}$$

para todo $u_0 \in \mathcal{D}(A)$.

Observação 1.23 *Quando a norma do lado direito de (1.2.9) coincide com a norma de X, o semigrupo é exponencialmente estável.*

De fato, suponhamos que, para todo $u_0 \in \mathcal{D}(A)$,

$$\|S(t)u_0\|_X = \|u(t)\|_X \leq f(t)\|u_0\|_X, \ \ \forall t > 0, \tag{1.2.10}$$

logo

$$\lim_{t\to\infty} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0,$$

assim, existe $t_0 \in \mathbb{N}$*, tal que*

$$\|S(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)} < 1.$$

Definamos $\alpha = \|S(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ *e seja* $t \in \mathbb{R}_+$*. Nesse caso, podemos escrever*

$$t = qt_0 + r$$

em que $q \in \mathbb{Z}$*,* $q \geq 0$ *e* $r \in \mathbb{R}$ *com* $0 \leq r < t_0$*. Daí,*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|S(t_0)^q S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \alpha^q C_1$$

aqui, $C_1 = \sup_{s\in[0,t_0]}\{\|S(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\}$*, logo,*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_1 \alpha^{\frac{t}{t_0}} \alpha^{-\frac{r}{t_0}} \leq C\alpha^{\theta t}$$

com $C = C_1\alpha^{-1}$ *e* $\theta = \frac{1}{t_0}$*. Ainda, como* $\alpha < 1$*, então* $\ln \alpha = -\beta$*,* $\beta > 0$*, donde*

$$\alpha^{\theta t} = (\alpha^\theta)^t = (e^{\theta \ln \alpha})^t = (e^{\theta(-\beta)})^t = e^{-\gamma t}$$

em que $\gamma = \theta\beta > 0$*, portanto,*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ce^{-\gamma t}$$

como queríamos.

1.2.1 O Espaço $\mathcal{M}$ e o operador T

Como dito anteriormente, um espaço com peso, em especial, será muito importante nos capítulos que se seguem, por isso, vamos apresentá-lo aqui, além de tratar de um operador definido nesse espaço que, também, será de grande utilidade mais a frente.

Consideremos Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira suave $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, onde Γ_1, Γ_2 são fechados e disjuntos.

Definamos

$$V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ em } \Gamma_1\}$$

temos que V, munido do produto interno induzido por $H^1(\Omega)$, é um espaço de Hilbert e, ainda, considerando em V a norma

$$\|u\|_V = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in V$$

segue que

$$\|.\|_V \text{ e } \|.\|_{H^1(\Omega)}$$

são equivalentes. Assim, tomando o produto interno

$$(u,v)_V = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx, \qquad \forall u,v \in V$$

concluímos que $(V,(\cdot,\cdot)_V)$ é um espaço de Hilbert.

Ainda, considerando $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}_+$ de classe $C^1\cap L^1$ e decrescente, portanto, $g'(s)\leq 0$ para todo $s\geq 0$, temos que o espaço $\mathcal{M}:=L^2_g(0,\infty;V)$ é, também, um espaço de Hilbert, com o seguinte produto interno

$$(\eta,\xi)_{\mathcal{M}} = \int_0^\infty g(s)\int_\Omega \nabla\eta(s)\cdot\nabla\xi(s)dxds.$$

Em $\mathcal{M}$, podemos definir o seguinte operador

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{D}(T)\subset\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ & \eta & \longmapsto & T\eta = -\partial_s\eta \end{array}$$

sendo essa derivada no sentido das distribuições e

$$\mathcal{D}(T) = \{\eta\in\mathcal{M}; \partial_s\eta\in\mathcal{M} \text{ e } \eta(0)=0\}.$$

Afirmamos que T é o gerador infinitesimal de um semigrupo em $\mathcal{M}$. De fato, vamos provar que T satisfaz o Teorema de Lummer -Phillips (Teorema 1.17).

Seja $\eta\in\mathcal{M}$, temos que

$$\begin{aligned} (T\eta,\eta)_{\mathcal{M}} &= \int_0^\infty g(s)(-\eta_s(s),\eta(s))_V ds \\ &= -\int_0^\infty g(s)\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|\eta(s)\|_V^2 ds \\ &= \frac{1}{2}\left(-\lim_{s\to\infty} g(s)\|\eta(s)\|_V^2 + g(0)\|\eta(0)\|_V^2 + \int_0^\infty g'(s)\|\eta(s)\|_V^2 ds\right) \end{aligned}$$

como $g(s)\to 0$, quando $s\to\infty$ e $\eta(0)=0$, temos

$$(T\eta,\eta)_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\eta(s)\|_V^2 ds \leq 0.$$

Agora, seja $\xi\in\mathcal{M}$, devemos encontrar $\eta\in\mathcal{D}(T)$ tal que

$$(I-T)\eta = \xi,$$

ou seja,

$$\eta + \eta_s = \xi.$$

Formalmente, multiplicando a igualdade acima por e^s obtemos

$$\frac{d}{ds}(e^s \eta(s)) = e^s \xi,$$

assim,

$$e^s \eta(s) - e^0 \eta(0) = \int_0^s e^\tau \xi(\tau) d\tau$$

e, como queremos $\eta(0) = 0$, devemos ter

$$\eta(s) = \int_0^s e^{\tau - s} \xi(\tau) d\tau.$$

Mostremos, então, que η com essa configuração é um elemento de $\mathcal{D}(T)$.

Já temos que $\eta(0) = 0$. Se provarmos que $\eta \in \mathcal{M}$, então temos o resultado pois, $\eta_s = -\eta + \xi \in \mathcal{M}$. Observe que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty g(s) \|\eta(s)\|_V^2 ds &= \int_0^\infty g(s) \left\| \int_0^s e^{\tau - s} \xi(\tau) d\tau \right\|_V^2 ds \\
&= \int_0^\infty g(s) \left(\int_0^s e^{\tau - s} \xi(\tau) d\tau, \int_0^s e^{t-s} \xi(t) dt \right)_V ds \\
&= \int_0^\infty g(s) \int_0^s \int_0^s e^{\tau - s} e^{t-s} \left(\xi(\tau), \xi(t) \right)_V dt d\tau ds \\
&\leq \int_0^\infty g(s) \int_0^s \int_0^s e^{\tau - s} e^{t-s} \frac{1}{2} \left(\|\xi(\tau)\|_V^2 + \|\xi(t)\|_V^2 \right) dt d\tau ds \\
&= \int_0^\infty g(s) \int_0^s \int_0^s e^{\tau - s} e^{t-s} \|\xi(\tau)\|_V^2 dt d\tau ds \\
&= \int_0^\infty g(s) \int_0^s e^{\tau - s} \|\xi(\tau)\|_V^2 d\tau ds - \int_0^\infty g(s) \int_0^s e^{\tau - 2s} \|\xi(\tau)\|_V^2 d\tau ds.
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty g(s) \int_0^s e^{\tau - s} \|\xi(\tau)\|_V^2 d\tau ds &= \int_0^\infty e^\tau \|\xi(\tau)\|_V^2 \int_\tau^\infty g(s) e^{-s} ds d\tau \\
&\leq \int_0^\infty e^\tau \|\xi(\tau)\|_V^2 \int_\tau^\infty g(\tau) e^{-s} ds d\tau \\
&= \int_0^\infty g(\tau) \|\xi(\tau)\|_V^2 d\tau,
\end{aligned}$$

analogamente,

$$\int_0^\infty g(s) \int_0^s e^{\tau - 2s} \|\xi(\tau)\|_V^2 d\tau ds \leq \int_0^\infty g(\tau) \|\xi(\tau)\|_V^2 d\tau$$

portanto,

$$\int_0^\infty g(s)\|\eta(s)\|_V^2 ds \leq 2\int_0^\infty g(\tau)\|\xi(\tau)\|_V^2 d\tau < \infty$$

e $\eta \in \mathcal{M}$, como queríamos. Assim, T é o gerador de um C_0-semigrupo em $\mathcal{M}$ e, portanto, é fechado e $\mathcal{D}(T)$ é denso em $\mathcal{M}$.

1.3 Apresentando o Problema de Transmissão

Um problema de transmissão pode ser interpretado como um problema acoplado em dois domínios distintos com uma fronteira em comum, sendo o acoplamento nessa fronteira. Nesta seção, apresentamos resultados de existência e unicidade de soluções para o problema de transmissão de ondas, pois o mesmo será utilizado como ferramenta no Capítulo III deste trabalho. Para mais detalhes sobre o referido problema, indicamos Lions [33] e Dautray e Lions [19].

Sejam Ω e Ω_2 domínios limitados do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteiras suaves Γ_1 e Γ_2, respectivamente, tais que $\Omega_2 \subset\subset \Omega$ e $\Omega_1 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_2$. Nesse caso, $\partial\Omega_1 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Sendo $\tilde{k}$ e k_2 constantes distintas e positivas, estamos interessados em estudar o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \tilde{k}\Delta u = 0 \text{ em } \Omega_1 \times (0,T) \\ v_{tt} - k_2\Delta v = 0 \text{ em } \Omega_2 \times (0,T) \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \times (0,T) \\ u = v \text{ sobre } \Gamma_2 \times (0,T) \\ k_2\dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \tilde{k}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \text{ sobre } \Gamma_2 \times (0,T), \end{cases} \tag{1.3.11}$$

sujeita as condições iniciais

$$\begin{cases} u(0) = u_0, u'(0) = u_1 \\ v(0) = v_0, v'(0) = v_1 \end{cases}$$

As identidades

$$u = v \text{ sobre } \Gamma_2 \times (0,T) \text{ e } k_2\frac{\partial v}{\partial \nu} = \tilde{k}\frac{\partial u}{\partial \nu} \text{ sobre } \Gamma_2 \times (0,T)$$

são ditas condições de transmissão e representam o acoplamento do problema.

Para provar os resultados de existência de solução desejados, decidimos por utilizar resultados que relacionam Teoria de Semigrupos e Formas Sesquilineares, pois algumas das ferramentas utilizadas serão necessárias no decorrer no texto, por isso, começamos por estudar:

1.3.1 A terna $\left\{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}, \mathbb{L}^2, (.,.)_{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}}\right\}$

Nas condições apresentadas acima, definimos, na Seção 1.1.1, o Espaço $\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$ e vimos que $\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$ e $\mathbb{L}^2$ são espaços de Hilbert satisfazendo

$$\mathbb{H}^1_{\Gamma_1} \hookrightarrow \mathbb{L}^2 \text{ e } \mathbb{H}^1_{\Gamma_1} \text{ é denso em } \mathbb{L}^2.$$

Além disso, aplicação $a : \mathbb{H}^1_{\Gamma_1} \times \mathbb{H}^1_{\Gamma_1} \longrightarrow \mathbb{R}$ em que

$$a((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = ((u_1, v_1), (u_2, v_2))_{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}}, \;\; \forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$$

é uma forma bilinear, contínua e coerciva sobre $\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$.

Assim, podemos definir $\mathbf{A} : \mathcal{D}(\mathbf{A}) \subset \mathbb{H}^1_{\Gamma_1} \longrightarrow \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$ pondo

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}) = \Big\{(u, v) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}; \exists (f, g) \in \mathbb{L}^2, \text{tal que } ((u, v), (w, z))_{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}} = ((f, g), (w, z))_{\mathbb{L}^2}, \\ \forall (w, z) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}\Big\}$$

e, se $(u, v) \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$, então

$$\mathbf{A}(u, v) = (f, g).$$

Em verdade,

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}) = \left\{(u, v) \in \mathbb{H}^2 \cap \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}; \tilde{k}\frac{\partial u}{\partial \nu} = k_2 \frac{\partial v}{\partial \nu} \text{ sobre } \Gamma_2\right\}$$

e, para todo $(u, v) \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$

$$\mathbf{A}(u, v) = (-\tilde{k}\Delta u, -k_2 \Delta v). \tag{1.3.12}$$

De fato, sejam $(u, v) \in \left\{(u, v) \in \mathbb{H}^2 \cap \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}; \tilde{k}\frac{\partial u}{\partial \nu} = k_2 \frac{\partial v}{\partial \nu} \text{ sobre } \Gamma_2\right\}$ e $(w, z) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$, então

$$\begin{aligned} ((u, v), (w, z))_{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}} &= \tilde{k}(\nabla u, \nabla w)_1 + k_2(\nabla v, \nabla z)_2 \\ &= -\tilde{k}(\Delta u, w)_1 - k_2(\Delta v, z)_2 + \left(\tilde{k}\frac{\partial u}{\partial \nu}, w\right)_{\Gamma_2} - \left(k_2 \frac{\partial v}{\partial \nu}, z\right)_{\Gamma_2} \end{aligned}$$

onde, a última igualdade decorre da Fórmula de Green e da orientação considerada em $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. .

Como $\tilde{k}\frac{\partial u}{\partial \nu} = k_2 \frac{\partial v}{\partial \nu}$ e $w = z$ sobre Γ_2, temos

$$\left(\tilde{k}\frac{\partial u}{\partial \nu}, w\right)_{\Gamma_2} - \left(k_2 \frac{\partial v}{\partial \nu}, z\right)_{\Gamma_2} = 0,$$

portanto,

$$((u,v),(w,z))_{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}} = -\tilde{k}(\Delta u, w)_1 - k_2(\Delta v, z)_2 = ((-\tilde{k}\Delta u, -k_2\Delta v),(w,z))_{\mathbb{L}^2}.$$

O que prova que $\left\{(u,v) \in \mathbb{H}^2 \cap \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}; \tilde{k}\frac{\partial u}{\partial \nu} = k_2\frac{\partial v}{\partial \nu} \text{ sobre } \Gamma_2\right\} \subset \mathcal{D}(\mathbf{A})$ e (1.3.12) é válida para elementos desse espaço.

Agora, seja $(u,v) \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$. Assim, existe $(f,g) \in \mathbb{L}^2$ tal que

$$((u,v),(w,z))_{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}} = ((f,g),(w,z))_{\mathbb{L}^2} \text{ para todo } (w,z) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1},$$

ou seja,

$$\tilde{k}(\nabla u, \nabla w)_1 + k_2(\nabla v, \nabla z)_2 = (f,w)_1 + (g,z)_2 \text{ para todo } (w,z) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}. \tag{1.3.13}$$

Em particular, se $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ então, $(\varphi, 0) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$ e, portanto,

$$\tilde{k}(\nabla u, \nabla \varphi)_1 = (f,\varphi)_1 \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1).$$

Consequentemente,

$$-\tilde{k}\Delta u = f \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega_1).$$

Como $f \in L^2(\Omega_1)$, temos

$$-\tilde{k}\Delta u = f \text{ em } L^2(\Omega_1).$$

Analogamente, se $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$, então $(0,\psi) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$ e, portanto,

$$-k_2\Delta v = g \text{ em } L^2(\Omega_2).$$

Substituindo as expressões encontradas, para f e g, em (1.3.13), temos

$$\tilde{k}(\nabla u, \nabla w)_1 + k_2(\nabla v, \nabla z)_2 = -\tilde{k}(\Delta u, w)_1 - k_2(\Delta v, z)_2 \text{ para todo } (w,z) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}.$$

Novamente, pela Fórmula de Green, do fato que $w = 0$ sobre Γ_1 e $w = z$ sobre Γ_2 e da orientação positiva de Γ_1 e Γ_2, obtemos

$$\begin{aligned} -\tilde{k}(\Delta u, w)_1 - k_2(\Delta v, z)_2 &= \tilde{k}(\nabla u, \nabla w)_1 + k_2(\nabla v, \nabla z)_2 \\ &\quad - \left\langle \tilde{k}\frac{\partial u}{\partial \nu} - k_2\frac{\partial v}{\partial \nu}, w \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2)\times H^{1/2}(\Gamma_2)}. \end{aligned}$$

Logo, comparando as duas expressões acima, temos

$$\left\langle \tilde{k}\frac{\partial u}{\partial \nu} - k_2\frac{\partial v}{\partial \nu}, w \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2)\times H^{1/2}(\Gamma_2)} = 0 \text{ para todo } (w,z) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}.$$

Procedendo como feito para mostrar a identidade (2.4.33), temos que

$$\tilde{k}\frac{\partial u}{\partial \nu} = k_2 \frac{\partial v}{\partial \nu} \text{ em } H^{-1/2}(\Gamma_2)$$

e, por regularidade elíptica, temos $(u, v) \in \mathbb{H}^2$. Logo,

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}) \subset \left\{ (u, v) \in \mathbb{H}^2 \cap \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}; \tilde{k}\frac{\partial u}{\partial \nu} = k_2 \frac{\partial v}{\partial \nu} \text{ sobre } \Gamma_2 \right\}.$$

Portanto,

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}) = \left\{ (u, v) \in \mathbb{H}^2 \cap \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}; \tilde{k}\frac{\partial u}{\partial \nu} = k_2 \frac{\partial v}{\partial \nu} \text{ sobre } \Gamma_2 \right\}$$

e

$$\mathbf{A}(u, v) = (-\tilde{k}\Delta u, -k_2 \Delta v), \text{ para todo } (u, v) \in \mathcal{D}(\mathbf{A}),$$

como queríamos.

1.3.2 Existência e Unicidade de Soluções

De posse dos resultados da seção anterior, podemos reescrever o problema (1.3.11), da forma

$$\begin{cases} U_t - \mathcal{B}U = 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{1.3.14}$$

em que $U(t) = ((u(t), v(t)), (u_t(t), v_t(t)))$, para $t \geq 0$ e

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{B}: & \mathcal{D}(\mathbf{A}) \times \mathbb{H}^1_{\Gamma_1} & \longrightarrow & \mathbb{H}^1_{\Gamma_1} \times \mathbb{L}^2 \\ & U = ((u_1, v_1), (u_2, v_2)) & \mapsto & \mathcal{B}U = \begin{bmatrix} (u_2, v_2) \\ -\mathbf{A}(u_1, v_1) \end{bmatrix} \end{array}$$

ou ainda,

$$\mathcal{B}U = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\mathbf{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (u_1, v_1) \\ (u_2, v_2) \end{bmatrix}.$$

Observemos que $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ é denso em $H = \mathbb{H}^1_{\Gamma_1} \times \mathbb{L}^2$, visto que cada um dos termos do produto cartesiano é denso no espaço correspondente. Ainda, se $U = ((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$, então

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}U, U)_H &= ((u_2, v_2), (-\mathbf{A}(u_1, v_1)), ((u_1, v_1), (u_2, v_2)))_{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1} \times \mathbb{L}^2} \\ &= ((u_2, v_2), (u_1, v_1))_{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}} - (\mathbf{A}(u_1, v_1), (u_2, v_2))_{\mathbb{L}^2} \end{aligned}$$

do exposto na seção anterior, temos que

$$(\mathbf{A}(u_1, v_1), (u_2, v_2))_{\mathbb{L}^2} = ((u_2, v_2), (u_1, v_1))_{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}},$$

portanto,

$$(\mathcal{B}U, U)_H = 0, \text{ para todo } U \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$$

e $\mathcal{B}$ é dissipativo. Pelo Corolário 1.19, nos resta provar que $0 \in \rho(\mathcal{B})$, para isso, de acordo com o Teorema 1.12, devemos mostrar que $-\mathcal{B}$ é bijetivo e fechado.

Seja $F = ((f_1, g_1), (f_2, g_2)) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1} \times \mathbb{L}^2$. Devemos encontrar $U = ((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \in \mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{D}(\mathbf{A}) \times \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$, tal que

$$-\mathcal{B}U = F,$$

isto é,

$$\begin{aligned} -(u_2, v_2) &= (f_1, g_1) \\ \mathbf{A}(u_1, v_1) &= (f_2, g_2). \end{aligned}$$

Assim,podemos tomar $(u_2, v_2) = (-f_1, -g_1) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$ e como $\mathbf{A}$ é definido por terna e $(f_2, g_2) \in \mathbb{L}^2$, temos que existe $(u_1, v_1) \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$, tal que $\mathbf{A}(u_1, v_1) = (f_2, g_2)$. Portanto, $-\mathcal{B}$ é sobrejetor. Ainda, se

$$-\mathcal{B}U = 0,$$

então,

$$\begin{aligned} -(u_2, v_2) &= (0, 0) \\ \mathbf{A}(u_1, v_1) &= (0, 0). \end{aligned}$$

nesse caso, $(u_2, v_2) = (0, 0)$ e

$$a((u_1, v_1), (u_1, v_1)) = (\mathbf{A}(u_1, v_1), (u_1, v_1))_{\mathbb{L}^2} = ((0, 0), (u_1, v_1))_{\mathbb{L}^2},$$

ou seja,

$$\|(u_1, v_1)\|^2_{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}} = 0,$$

donde

$$(u_1, v_1) = (0, 0)$$

e $-\mathcal{B}$ é injetivo, consequentemente, $-\mathcal{B}$ é bijetor. Como $\mathbf{A}$ é definido pela terna $\{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}, \mathbb{L}^2, (\,,\,)_{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}}\}$, segue que $\mathbf{A}$ é fechado, o que garante que $-\mathcal{B}$ também o é. Portanto, $0 \in \rho(\mathcal{B})$ e $\mathcal{B}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações. O Teorema 1.21 garante a existência e unicidade de solução para o problema (1.3.14) e consequentemente para (1.3.11).

1.4 Tópicos de Medida de Defeito Microlocal

No terceiro capítulo deste texto tratamos da estabilização do problema de transmissão proposto e, para tal, lançamos mão de argumentos de Medida de Defeito Microlocal devidos a Gérard [24]. Nesta seção, faremos um breve resumo dessa teoria, citando os resultados que utilizaremos mais a frente e omitindo as respectivas provas as quais podem ser encontradas em Gèrard [24] ou Burq e Gérard [8]. As mesmas referências são recomendadas para uma leitura completa do tema.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Um operador diferencial sobre Ω é uma aplicação linear $P : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ da forma

$$Pu(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) \tag{1.4.15}$$

em que $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$. A função $p : \Omega \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \tag{1.4.16}$$

é chamada símbolo de P e

$$\sigma_m(P)(x,\xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

é o símbolo principal do operador P.

Nessas condições, utilizando a Transformada de Fourier, o operador diferencial P pode ser reescrito como

$$Pu(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i x \cdot \xi} p(x,\xi) \hat{u}(\xi) d\xi$$

e, isso, nos leva as seguintes definições:

Definição 1.24 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $m \in \mathbb{R}$. Definimos a classe de símbolos de ordem m, por*

$$\mathcal{S}^m(\Omega) = \Big\{ a \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N);\ \textit{para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N \textit{ e para todo compacto } K \subset \Omega, \\ \textit{existe } C = C_{\alpha,\beta,K} \textit{ tal que } \sup_{x \in K} |D_x^\beta D_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \Big\}.$$

em que $D^\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^\alpha}\partial^\alpha$, para $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Ainda, definimos

$$\mathcal{S}_c^m(\Omega) = \left\{ a \in \mathcal{S}^m(\Omega);\ \textit{supp } p \subset K \times \mathbb{R}^N,\ \textit{para algum compacto } K \subset \mathbb{R}^N \right\}.$$

Ademais, para $a \in \mathcal{S}^m(\Omega)$, definimos o Operador Pseudo-Diferencial de ordem m sobre Ω associado a a , como sendo a aplicação linear $A : C_0^\infty(\Omega) \mapsto C^\infty(\Omega)$ da forma

$$Au(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i \langle x,\xi \rangle} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\, d\xi. \tag{1.4.17}$$

Observação 1.25 *Quando P é um operador diferencial, como em (1.4.15), então o símbolo p em (1.4.16), é tal que $p \in \mathcal{S}^m(\Omega)$.*

No que diz respeito ao símbolo principal para um operador pseudo-diferencial, a definição não é tão direta quanto quando pensamos num operador diferencial, pois ela está relacionada a seguinte proposição

Proposição 1.26 *Seja A um operador pseudo-diferencial de símbolo $a \in \mathcal{S}^m(\Omega)$ e sejam $a_m \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^N \backslash \{0\}))$ uma função homogênea de ordem m e $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ em que χ é nula numa vizinhança de 0 e tende a 1 no infinito, satisfazendo*

$$a(x,\xi) = a_m(x,\xi)\chi(\xi) + r(x,\xi), \tag{1.4.18}$$

para algum $r \in \mathcal{S}^{m-1}(\Omega)$.

Então, para todo $u \in C_0^\infty(\Omega)$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ e para todo $x \in \Omega$,

$$t^{-m}e^{-itx\cdot\xi}A(ue_{t\xi})(x) \to a_m(x,\xi)u(x), \quad \textit{quando } t \to +\infty, \tag{1.4.19}$$

em que $e_{t\xi} = e^{2\pi i\langle tx,\xi\rangle}$.

Definição 1.27 *Nas condições da proposição anterior, dizemos que A admite um símbolo principal de ordem m. A função a_m é dita símbolo principal de A de ordem m e é denotado por $\sigma_m(A)$.*

Dito isto, temos os seguintes resultados:

Teorema 1.28 *Seja $\{u_n\}$ uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$ que converge fraco para zero em $L^2_{loc}(\Omega)$. Então, existe uma subsequência $\{u_{\varphi(n)}\}$ e uma medida de Radon positiva μ sobre $T^1\Omega := \Omega \times S^{N-1}$ ($S^{N-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^N; \|\xi\| = 1\}$) tais que, para todo operador pseudo-diferencial A de ordem 0 em Ω o qual admite um símbolo principal $\sigma_0(A) \geq 0$, tal que $\chi\sigma_0(A) = \sigma_0(A)$, temos*

$$\big(A(\chi u_{\varphi(n)}), \chi u_{\varphi(n)}\big)_{L^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega\times S^{n-1}} \sigma_0(A)(x,\xi)\, d\mu(x,\xi). \tag{1.4.20}$$

Definição 1.29 *Nas hipóteses do Teorema 1.28, μ é chamada Medida de Defeito Microlocal da sequência $\{u_{\varphi(n)}\}$.*

Observação 1.30 *O Teorema 1.28 assegura que para toda sequência limtada $\{u_n\} \subset L^2_{loc}(\Omega)$ que converge fracamente para zero em $L^2_{loc}(\Omega)$, existe uma subsequência $\{u_{\varphi(n)}\}$ que admite uma medida de defeito microlocal. Observamos que de (1.4.20), no caso particular quando $A = f \in C_0^\infty(\Omega)$, segue que*

$$\int_{\Omega\times S^{N-1}} f(x)|u_{\varphi_n}(x)|^2\, dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega\times S^{N-1}} f(x)\, d\mu(x,\xi). \tag{1.4.21}$$

Então, u_{φ_n} converge para zero se, e somente se, $\mu = 0$.

Teorema 1.31 *Seja P um operador diferencial de ordem m sobre Ω e seja $\{u_n\}$ uma sequência limitada de $L^2_{loc}(\Omega)$ o qual converge fracamente para zero e admite uma m.d.m. μ. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $Pu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ forte em $H^{-m}_{loc}(\Omega)$, onde $m > 0$;

(ii) supp(μ) $\subset \{(x,\xi) \in \Omega \times S^{N-1}; \sigma_m(P)(x,\xi) = 0\}$.

O Teorema 1.31 nos fornece uma caracterização para o suporte da medida μ, sob certas condições acerca do operador P e da sequência $\{u_n\}$, no entanto, estamos interessados numa localização para esse suporte um pouco melhor e, para tal, faremos uso de propriedades do Hamiltoniano, o qual é definido como segue:

Definição 1.32 *Seja $p \in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ uma função com valores reais. Dizemos que H_p é um campo Hamiltoniano de p, quando este é o campo de vetores em $\Omega\times(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ dado por*

$$H_p(x,\xi) = \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_1}(x,\xi), \cdots, \frac{\partial p}{\partial \xi_n}(x,\xi), -\frac{\partial p}{\partial x_1}(x,\xi), \cdots, -\frac{\partial p}{\partial x_n}(x,\xi)\right).$$

A derivada de Lie de uma função f com respeito ao campo Hamiltoniano H_p é dada por $H_p(f) = \{p, f\}$, em que

$$\{p,f\}(x,\xi) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j}(x,\xi)\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,\xi) - \frac{\partial p}{\partial x_j}(x,\xi)\frac{\partial f}{\partial \xi_j}(x,\xi)\right).$$

Uma curva Hamiltoniana de p é uma curva integral do campo de vetores H_p, isto é, uma solução maximal $s \in I \mapsto (x(s),\ \xi(s))$ para as equações de Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} \dot{x} = p_\xi(x,\xi) = \dfrac{\partial p}{\partial \xi}(x,\xi), \quad \dot{\xi} = -p_x(x,\xi) = -\dfrac{\partial p}{\partial x}(x,\xi), \end{cases} \tag{1.4.22}$$

onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

Desde que $H_p(p) = 0$ a função p mantém um valor constante sobre cada uma de suas curvas Hamiltonianas. De fato, seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \Omega \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ uma curva Hamiltoniana de p, com $\gamma(t) = (x(t), \xi(t))$, então

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt} = H_p(p) = 0.$$

Dizemos que uma curva Hamiltoniana de p é uma bicaracterística de p se $p(x(t), \xi(t)) = 0$

Observação 1.33 *Sejam λ uma função C^∞ sobre $\Omega \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ com valores reais diferente de zero. Desde que*

$$H_{\lambda p} = \lambda H_p + p H_\lambda = \lambda H_p \quad se\ p = 0,$$

resulta que as bicaracteristicas de λp e p coincidem (modulo uma reparametrização).

Teorema 1.34 *Seja P um operador diferencial de ordem m em Ω verificando $P^* = P$, ou seja, P é auto-adjunto, e seja $\{u_n\}$ uma sequência limtada em $L^2_{loc}(\Omega)$ o qual converge fracamente para zero e admite uma m.d.m. μ. Vamos assumir que $Pu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ forte em $H^{1-m}_{loc}(\Omega)$. Então, para toda função $a \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\}))$ homogênea de grau $1-m$ na segunda variável e com suporte compacto na primeira variável,*

$$\int_{\Omega \times S^{n-1}} \{a, p\}(x,\xi)\, d\mu(x,\xi) = 0. \tag{1.4.23}$$

O próximo resultado nos dá uma caracterização para o suporte da medida μ, melhorando a caracterização dada pelo Teorema 1.31, dadas as devidas hipóteses adicionais.

Teorema 1.35 *Seja P um operador diferencial auto-adjunto de ordem m em Ω que admite um símbolo principal $\sigma_m(P)$. Seja $\{u_n\}$ uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$ o qual converge fracamente para zero, com uma medida de defeito microlocal μ. Assumindo que Pu_n converge para zero em $H^{-(m-1)}_{loc}(\Omega)$, então o suporte de μ, $supp(\mu)$, é a união das curvas do tipo $s \in I \mapsto \left(x(s), \frac{\xi(s)}{|\xi(s)|}\right)$, em que $s \in I \mapsto (x(s), \xi(s))$ é uma bicaracterística de p.*

No Terceiro Capítulo, utilizaremos a caracterização dada pelo Teorema anterior para garantir resultados de convergência para uma sequência de soluções do problema considerado, sendo assim, na próxima seção tratamos de descrever as bicaracterísticas do Operador Onda para que possamos utilizá-las mais a frente.

1.4.1 Descrição das bicaracterísticas do Operador Onda

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um aberto, limitado, bem regular. Consideraremos o operador onda $P : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$,

$$P = \partial_t^2 - \sum_{j=1}^{N} a(x)\partial_{x_j}^2,$$

em que $a \in C^\infty(\Omega)$, cujo símbolo principal $p(t,x,\tau,\xi)$ é dado por

$$p(t,x,\tau,\xi) = \tau^2 - a(x)\,\xi\cdot\xi, \quad \xi = (\xi_1,\cdots,\xi_N), \tag{1.4.24}$$

com $t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $(\tau,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$.

Vamos descrever as bicaracterísticas de p. Pela Observação 1.33, elas não mudam se multiplicarmos p por uma função suave que é sempre diferente de zero. Assim, considerando $\lambda = -\dfrac{1}{2}$, vamos descrever as bicaracterísticas de

$$\tilde{p}(t,x,\tau,\xi) = \frac{1}{2}\left(a(x)\,\xi\cdot\xi - \tau^2\right). \tag{1.4.25}$$

Temos

$$\begin{cases} \dot{t} = \dfrac{\partial\tilde{p}}{\partial\tau} = -\tau, \\ \dot{x} = \dfrac{\partial\tilde{p}}{\partial\xi} = a(x)\xi, \\ \dot{\tau} = -\dfrac{\partial\tilde{p}}{\partial t} = 0, \\ \dot{\xi} = -\dfrac{\partial\tilde{p}}{\partial x} = -\dfrac{1}{2}\nabla a(x)(\xi\cdot\xi). \end{cases} \tag{1.4.26}$$

Introduzindo a função $G(x) := (a(x))^{-1}$, de $(1.4.26)_2$ temos

$$\xi = G(x)\dot{x}, \tag{1.4.27}$$

o que implica em

$$\dot{\xi} = \frac{1}{2}\nabla G(x)\,\dot{x}\cdot\dot{x}. \tag{1.4.28}$$

Uma vez que $\tilde{p}$ é nulo sobre cada curva bicaracterística de (1.4.25), deduzimos que

$$a(x)\,\xi\cdot\xi=\tau^2= \text{ constante sobre a curva.} \tag{1.4.29}$$

Por outro lado, por (1.4.26) e (1.4.27) obtemos

$$G(x)\dot{x}\cdot\dot{x} \;\;=\;\; a(x)\,\xi\cdot\xi. \tag{1.4.30}$$

Combinando (1.4.29) e (1.4.30) deduzimos

$$G(x)\dot{x}\cdot\dot{x}=a(x)\,\xi\cdot\xi=\tau^2= \text{ constante sobre a curva,} \tag{1.4.31}$$

isto é, a quantidade $G(x)\,\dot{x}\cdot\dot{x}$ é preservada sob o fluxo.

Por (1.4.28) e (1.4.31), temos

$$\frac{d}{ds}\frac{G(x)\dot{x}}{\sqrt{G(x)\,\dot{x}\cdot\dot{x}}}=\frac{1}{2}\frac{\nabla G(x)\,\dot{x}\cdot\dot{x}}{\sqrt{G(x)\,\dot{x}\cdot\dot{x}}}. \tag{1.4.32}$$

Considerando

$$L(x,\dot{x}):=\sqrt{G(x)\,\dot{x}\cdot\dot{x}},$$

temos

$$\frac{\partial}{\partial\dot{x}_j}L(x,\dot{x})=\frac{G(x)\dot{x}_j}{\sqrt{G(x)\dot{x}\cdot\dot{x}}}\ \text{ e }\ \frac{\partial}{\partial x_j}L(x,\dot{x})=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}G(x)\right]\frac{\dot{x}\cdot\dot{x}}{\sqrt{G(x)\dot{x}\cdot\dot{x}}},$$

e com (1.4.32) resulta

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial\dot{x}}L(x,\dot{x})=\frac{\partial}{\partial x}L(x,\dot{x}),$$

o qual é a equação de Euler-Lagrange associada a L, a saber, a equação geodésica para a métrica G de Ω.

Reciprocamente, seja

$$\alpha\in I\mapsto x(\alpha)\in\Omega,$$

uma geodésica para a métrica G em Ω. Vamos parametrizar a curva x pela abscissa curvilinear σ definida por

$$\sigma(\alpha)=\int_{\alpha_0}^{\alpha}\sqrt{G(x(r))\,\dot{x}(r)\cdot\dot{x}(r)}dr=\int_{\alpha_0}^{\alpha}\|\dot{x}(r)\|dr,\quad \forall\alpha\in I. \tag{1.4.33}$$

Temos

$$\left.\frac{d\sigma}{d\alpha}\right|_{\alpha=\beta} = \sqrt{G(x(\beta))\,\dot{x}(\beta)\cdot\dot{x}(\beta)} = \|\dot{x}(\beta)\| = c, \quad \forall \beta \in I, \tag{1.4.34}$$

para alguma constante $c > 0$, pois x é uma geodésica .

Como $\dfrac{d\sigma}{ds}(s) = \|\dot{x}(s)\| = c > 0$, para todo $s \in I$, então $\sigma^{-1} : J \to I$ existe e possui derivada dada por

$$\frac{d}{d\sigma}(\sigma^{-1})(\sigma(s)) = \left(\frac{d\sigma}{ds}(s)\right)^{-1} = \frac{1}{\|\dot{x}(s)\|}.$$

Assim, considerando a reparametrização $y = x \circ \sigma^{-1} : J \to \Omega$ de x, com $J = \sigma(I)$, temos que y é uma curva diferenciável e $y(J) = x(I)$.

Agora, pela regra da cadeia,

$$\frac{dy}{ds}(s_0) = \frac{dx}{d\sigma}(\sigma^{-1}(s_0))\frac{d\sigma^{-1}}{ds}(s_0)$$

portanto,

$$\left\|\frac{dy}{ds}(s_0)\right\| = 1,$$

o que mostra que y é, de fato, uma reparametrização por comprimento de arco de x.

Também, como anteriormente, obtemos como em (1.4.32) a igualdade

$$\frac{d}{d\sigma}\left(G(x\circ\sigma^{-1})\frac{d}{d\sigma}(x\circ\sigma^{-1})\right) = \frac{1}{2}\nabla G(x\circ\sigma^{-1})\,\frac{d}{d\sigma}(x\circ\sigma^{-1})\cdot\frac{d}{d\sigma}(x\circ\sigma^{-1}). \tag{1.4.35}$$

Se considerarmos, por exemplo, $s = -\dfrac{\sigma(\alpha)}{\tau}$, obtemos (1.4.26), (1.4.27) e (1.4.28). Temos $\dfrac{dt}{ds} = -\tau$ e $\dfrac{ds}{d\sigma} = -\dfrac{1}{\tau}$, donde, pela regra da cadeia, resulta $\dfrac{dt}{d\sigma} = 1$. Além disso, sendo

$$\begin{aligned}
\xi &:= -\tau G(x)\frac{dx}{d\tau}\\
&= -\tau G(x)\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}\\
&= -\tau G(x)\frac{dx}{ds}\frac{ds}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt} = G(x)\frac{dx}{ds},
\end{aligned}$$

donde segue

$$\frac{dx}{ds} = a(x)\xi.$$

Além disso, $\dot{\tau} = 0$, e a última equação de (1.4.26) é recuperada usando a Equação de Euler-Lagrange. Assim, temos provado o seguinte resultado:

Proposição 1.36 *A menos de mudança de variáveis, as bicaracterísticas de (1.4.24) são curvas da forma*

$$t \mapsto \left(t, x(t), \tau, -\tau \left(a(x)x(t)\right)^{-1} \dot{x}(t)\right),$$

onde $t \mapsto x(t)$ *é uma geodésica da métrica* $G = a^{-1}$ *em* Ω*, parametrizada pela abscissa curvilinear.*

Capítulo 2

Problema de Transmissão Viscoelástico - Existência e Unicidade de Solução

2.1 Introdução

Sejam Ω e Ω_2 domínios limitados do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, com fronteiras suaves Γ_1 e Γ_2, respectivamente, e tais que $\Omega_2 \subset\subset \Omega$. Definamos Ω_1 como sendo $\Omega_1 = \Omega \setminus \overline{\Omega_2}$, assim, sua fronteira possui a seguinte configuração $\partial\Omega_1 = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. E, consideremos ν o vetor normal exterior à Γ, como visto na figura abaixo.

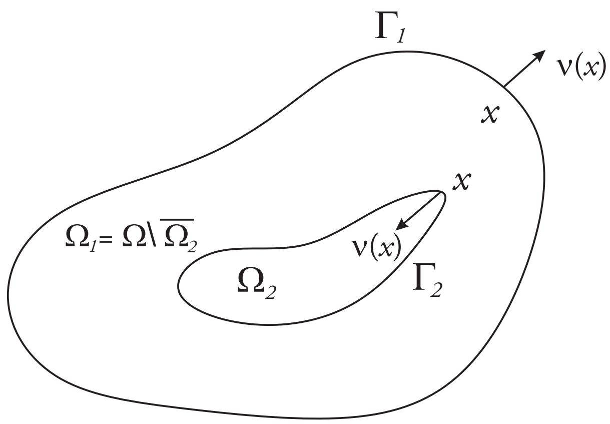

Figura 2.1: The transmission problem.

Neste capítulo, estamos interessados em estudar a existência e unicidade de soluções do seguinte problema

$$\begin{cases} u_{tt} - k_1\Delta u + k_1\displaystyle\int_{-\infty}^{t} g(t-s)\Delta u(s)\,ds + b(x)u_t = 0 \ \text{ em } \Omega_1 \times (0,\infty), \\ v_{tt} - k_2\Delta v + b(x)v_t = 0 \ \text{ em } \Omega_2 \times (0,\infty), \\ u = 0 \ \text{ sobre } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ u = v \ \text{ sobre } \Gamma_2 \times (0,\infty), \\ k_2\dfrac{\partial v}{\partial \nu} = k_1\dfrac{\partial u}{\partial \nu} - k_1\displaystyle\int_{-\infty}^{t} g(t-s)\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(s)\,ds \ \text{ sobre } \Gamma_2 \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x); \ u_t(x,0) = u_1(x), \ x \in \Omega_1, \\ v(x,0) = v_0(x); v_t(x,0) = v_1(x), x \in \Omega_2, \\ u(x,t) = u_0(x,t), \ u_t(x,t) = \partial_t u_0(x,t), \ t < 0. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

2.2 O Problema Equivalente

De modo a obter o resultado de existência de solução para o problema (2.1.1), devemos transformá-lo num problema equivalente, autônomo, posto que nosso intuito é utilizar a Teoria de Semigrupos Lineares mas, com a configuração proposta, isso não se faz possível, visto que (2.1.1) é não autônomo. Para contornar essa dificuldade, faremos uma mudança de variáveis, apresentada no trabalho pioneiro de Dafermos [17], dada por

$$\eta^t(x,s) = \eta(x,t,s) = u(x,t) - u(x,t-s). \tag{2.2.2}$$

Calculando as derivadas de η com respeito a t e s, respectivamente, deduzimos que

$$\eta^t_t(x,s) = u_t(x,t) - u_s(x,t-s) \text{ e } \eta^t_s(x,s) = u_s(x,t-s), \tag{2.2.3}$$

pois,

$$\begin{aligned} \eta^t_s(x,s) &= \frac{d}{ds}(u(x,t) - u(x,t-s)) \\ &= u_s(x,t-s) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \eta^t_t(x,s) &= \frac{d}{dt}(u(x,t) - u(x,t-s)) \\ &= u_t(x,t) - u_t(x,t-s) \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$u_t(x,t-s) = u_s(x,t-s).$$

De fato, observemos que se $h \in \mathbb{R}$, então

$$\frac{u(x,t+h-s)-u(x,t-s)}{h} = \frac{u(x,t-(s-h))-u(x,t-s)}{h}$$

logo, se $h \to 0^+$, então $-h \to 0^-$, e assim, no limite, obtemos

$$\frac{d}{dt^+}(u(t-s)) = \frac{d}{ds^-}(u(t-s)).$$

Portanto, se u é derivável, então

$$\frac{d}{dt}(u(t-s)) = \frac{d}{dt^+}(u(t-s)) = \frac{d}{ds^-}(u(t-s)) = \frac{d}{ds}(u(t-s))$$

o que prova a afirmação e, consequentemente, (2.2.3). Logo,

$$\eta_t^t(x,s) + \eta_s^t(x,s) = u_t(x,t). \tag{2.2.4}$$

De posse dessa nova variável, reescrevemos o termo de memória da primeira equação de (2.1.1), como segue

$$\begin{aligned} k_1 \int_{-\infty}^{t} g(t-s)\Delta u(s)\, ds &= k_1 \int_0^{\infty} g(\tau)\Delta u(t-\tau)\, d\tau \\ &= k_1 \int_0^{\infty} g(\tau)\Delta[u(t)-\eta^t(\tau)]\, d\tau \qquad (2.2.5) \\ &= k_1 k_0 \Delta u(t) - k_1 \int_0^{\infty} g(\tau)\Delta\eta^t(\tau)\, d\tau, \end{aligned}$$

em que a primeira igualdade vem da mudança de variáveis $\tau = t-s$ e $k_0 = \int_0^\infty g(s)ds < \infty$.

Combinando a igualdade acima com a primeira equação de (2.1.1), obtemos

$$u_{tt} - \tilde{k}\Delta u - k_1 \int_0^{\infty} g(s)\Delta\eta(s)\, ds = 0 \ \text{ em } \Omega_1 \times (0,\infty), \tag{2.2.6}$$

em que $\tilde{k} = k_1(1-k_0)$.

Analogamente, considerando a mudança de variáveis (2.2.2) nas condições de fronteira de (2.1.1), inferimos a nova condição de transmissão sobre Γ_2

$$k_2 \frac{\partial v}{\partial \nu} = \tilde{k}\frac{\partial u}{\partial \nu} + k_1 \int_0^{\infty} g(s)\frac{\partial \eta}{\partial \nu}(s)\, ds \ \text{ sobre } \Gamma_2 \times (0,\infty). \tag{2.2.7}$$

Assim, de (2.2.4), (2.2.6) e (2.2.7), transformamos o problema (2.1.1) no seguinte problema equivalente

$$\begin{cases} u_{tt} - \tilde{k}\Delta u - k_1 \displaystyle\int_0^\infty g(s)\Delta\eta^t(s)\,ds + b(x)u_t = 0 \ \text{ em } \Omega_1 \times (0,\infty), \\ \eta_t^t + \eta_s^t = u_t \ \text{ em } \Omega_1 \times (0,\infty), \\ v_{tt} - k_2\Delta v + b(x)v_t = 0 \ \text{ em } \Omega_2 \times (0,\infty), \\ u = 0 \ \text{ sobre } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ \eta^t = 0 \ \text{ sobre } \Gamma_1 \times (0,\infty) \times (0,\infty), \\ u = v \ \text{ sobre } \Gamma_2 \times (0,\infty), \\ k_2 \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \tilde{k}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + k_1 \displaystyle\int_0^\infty g(s)\dfrac{\partial \eta}{\partial \nu}(s)\,ds \ \text{ sobre } \Gamma_2 \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x);\ u_t(x,0) = u_1(x),\ x \in \Omega_1, \\ v(x,0) = v_0(x);\ v_t(x,0) = v_1(x),\ x \in \Omega_2, \\ \eta^t(x,0) = 0;\ \eta^0(x,s) = \eta_0(x,s),\ x \in \Omega_1, \end{cases} \tag{2.2.8}$$

em que

$$\begin{cases} u_0(x) = u_0(x,0),\ x \in \Omega_1, \\ u_1(x) = \partial_t u_0(x,t)|_{t=0}\ x \in \Omega_1, \\ \eta_0(x,s) = u_0(x,0) - u_0(x,-s),\ x \in \Omega_1, s \in (0.\infty), t \in (0,\infty). \end{cases}$$

2.3 Notações e Hipóteses

Nesta seção, apresentaremos as hipóteses consideradas acerca das funções g e b envolvidas no problema e, em seguida, introduziremos algumas notações que serão utilizadas no decorrer do capítulo.

H1- Assumimos que a função $g : [0,\infty[\to \mathbb{R}_+$ é decrescente, de classe $C^1([0,\infty)) \cap W^{1,1}(0,\infty)$ e satisfaz

$$g(0) > 0 \ \text{ e } \ k_0 := \int_0^\infty g(s)\,ds < 1. \tag{2.3.9}$$

Ainda, consideramos que existe $c > 0$ tal que

$$g'(t) \leq -cg(t), \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{2.3.10}$$

H2- A aplicação $b = b(x) \in L^\infty(\Omega)$ é uma função real não negativa

Com respeito as notações, denotaremos os produtos internos em $L^2(\Omega_1)$ e $L^2(\Omega_2)$, respectivamente, por

$$(u_1, u_2)_1 = \int_{\Omega_1} u_1(x)u_2(x)dx \text{ e } (v_1, v_2)_2 = \int_{\Omega_2} v_1(x)v_2(x)dx$$

e o produto interno em $L^2(\Gamma_2)$ será dado por

$$(u, v)_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma_2} u(x)v(x)dx.$$

A partir destes, definimos os seguintes Espaços de Hilbert

$$\mathbb{L}^2 := L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2) \text{ e } \mathbb{H}^m := H^m(\Omega_1) \times H^m(\Omega_1)$$

munidos, respectivamente, dos produtos internos usuais

$$((u_1, v_1), (u_2, v_2))_{\mathbb{L}^2} = (u_1, u_2)_1 + (v_1, v_2)_2, \quad \forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbb{L}^2$$

e, para $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbb{H}^m$,

$$((u_1, v_1), (u_2, v_2))_{\mathbb{H}^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \left[(D^\alpha u_1, D^\alpha u_2)_1 + (D^\alpha v_1, D^\alpha v_2)_2\right].$$

Consideremos, também, o espaço

$$\mathbb{H}^1_{\Gamma_1} := \{(u, v) \in \mathbb{H}^1; u = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \text{ e } u = v \text{ sobre } \Gamma_2\}$$

dotado da topologia

$$((u_1, v_1), (u_2, v_2))_{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}} = \tilde{k}(\nabla u_1, \nabla u_2)_1 + k_2(\nabla v_1, \nabla v_2)_2$$

para $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$, onde $\tilde{k} = k_1(1 - k_0)$.

O espaço $\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$, munido do produto interno acima, é um Espaço de Hilbert cuja norma proveniente é equivalente a norma usual de $\mathbb{H}^1$, como visto na Seção 1.1.1.

Com relação à variável η, definimos o seguinte espaço, como feito em [21], [25], [26] e [28],

$$\mathcal{M} := L^2_g(\mathbb{R}^+; V) = \left\{\eta; \int_0^\infty g(s)||\eta(s)||^2_V \, ds < +\infty\right\},$$

em que

$$V = \{w \in L^2(\Omega_1); \nabla w \in (L^2(\Omega_1))^N \text{ e } w = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\},$$

munido da topologia

$$(\eta, \xi)_{\mathcal{M}} = k_1 \int_0^\infty g(s) \int_{\Omega_1} \nabla \eta \cdot \nabla \xi \, dxds, \quad \text{para todo } \eta, \xi \in \mathcal{M}.$$

Além disso, seja T o operador introduzido na Seção 1.2.1, ou seja,

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{M} & \longmapsto & \mathcal{M} \\ & \eta & \rightarrow & T(\eta) = -\eta_s, \end{array}$$

e

$$\mathcal{D}(T) = \{\eta \in \mathcal{M}; \eta_s \in \mathcal{M} \text{ e } \eta(0) = 0\},$$

nessas condições, T é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações e, portanto, $\mathcal{D}(T)$ é denso em $\mathcal{M}$.

Finalmente, consideremos o espaço fase $\mathcal{H} = \mathbb{H}^1_{\Gamma_1} \times \mathbb{L}^2 \times \mathcal{M}$ e definamos o operador linear

$$\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

pondo

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{L}) = \Big\{ u = ((u_1, v_1), (u_2, v_2), \eta) \in \mathcal{H}; (u_2, v_2) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}, \eta \in D(T), \\ (\tilde{k}\Delta[u_1 + \tfrac{1}{1-k_0} \textstyle\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds], k_2 \Delta v_2) \in \mathbb{L}^2 \\ \text{e } k_2 \tfrac{\partial v_1}{\partial \nu} = \tilde{k} \tfrac{\partial u_1}{\partial \nu} + k_1 \textstyle\int_0^\infty g(s) \tfrac{\partial \eta}{\partial \nu}(s) ds \text{ em } H^{-1/2}(\Gamma_2) \Big\} \end{aligned}$$

onde, para $U = ((u_1, v_1), (u_2, v_2), \eta)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$,

$$\mathcal{L}U = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \tilde{k}\Delta \left[u_1 + \dfrac{1}{1-k_0} \displaystyle\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds \right] - b(x)u_2 \\ k_2 \Delta v_1 - b(x) v_2 \\ u_2 - \eta_s \end{bmatrix}.$$

Assim, o problema (2.2.8) é equivalente ao problema de Cauchy

$$\frac{dU}{dt} = \mathcal{L}U \tag{2.3.11}$$

com dado inicial $U_0 = ((u_0, v_0), (u_1, v_1), \eta_0)$.

2.4 Teorema de Existência

Antes de tratarmos do principal resultado desta seção, que versa sobre a Boa Colocação do problema (2.2.8), apresentaremos o que entendemos como Solução Fraca do problema em questão.

Definição 2.1 *Dado $U_0 = ((u_0, v_0), (u_1, v_1), \eta_0) \in \mathcal{H}$, dizemos que uma função $U = ((u, v), (u_t, v_t), \eta) \in C([0, \infty); \mathcal{H})$ é uma solução fraca para o problema* (2.2.8), *se $U(0) = U_0$ e*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u_t, w)_1 + \tilde{k}(\nabla u, \nabla w)_1 + k_1 \int_0^\infty g(s)(\nabla\eta(s), \nabla w)_1 ds + (b(x)u_t, w)_1 \\ + \frac{d}{dt}(v_t, z)_2 + k_2(\nabla v, \nabla z)_2 + (b(x)v_t, z)_2 = 0, \\ (\eta_t + \eta_s, \xi)_{\mathcal{M}} = (u_t, \xi)_{\mathcal{M}}, \end{aligned}$$

para quase todo $t \in (0, \infty)$ e para todo $((w, z), \xi) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1} \times \mathcal{M}$.

Para mostrar que o problema é bem posto, temos o seguinte resultado

Teorema 2.2 *Se $((u_0, u_1), (v_0, v_1), \eta_0) \in \mathcal{H} = \mathbb{H}^1_{\Gamma_1} \times \mathbb{L}^2 \times \mathcal{M}$, então existe uma única solução fraca do problema (2.2.8) na classe*

$$(u, v) \in C\left([0, \infty); \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}\right) \cap C^1\left([0, \infty); \mathbb{L}^2\right), \eta^t \in C([0, \infty); \mathcal{M}). \tag{2.4.12}$$

Ainda, se $((u_0, u_1), (v_0, v_1), \eta_0) \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ então a solução é regular, ou seja,

$$((u, v), \eta) \in C([0, \infty); \mathcal{D}(\mathcal{L})), \ (u, v) \in C^1\left([0, \infty); \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}\right) \text{ e } \eta \in C^1([0, \infty); \mathcal{M}).$$

O Teorema 2.2 é consequência do Teorema 1.21 e da seguinte Proposição

Proposição 2.3 *O operador $\mathcal{L}$ é o gerador infinitesimal de um Semigrupo de Contrações $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.*

Prova. Para mostrar esse fato, utilizaremos o Corolário 1.19. Assim, devemos provar que

- $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ é denso em $\mathcal{H}$;
- $\mathcal{L}$ é dissipativo;
- $0 \in \rho(\mathcal{L})$.

Justificaremos que $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ é denso em $\mathcal{H}$ usando a Proposição 1.11.

Seja $F \in \mathcal{H}'$ tal que $F \equiv 0$ em $\mathcal{D}(\mathcal{L})$. Do Teorema de Representação de Riesz, existe $((u_1, v_1), (u_2, v_2), \eta) \in \mathcal{H}$ tal que

$$\langle F, U\rangle = (((u_1, v_1), (u_2, v_2), \eta), ((w_1, z_1), (w_2, z_2), \xi))_{\mathcal{H}},\ \forall\, U = ((w_1, z_1), (w_2, z_2), \xi) \in \mathcal{H},$$

assim, se $U = ((w_1, z_1), (w_2, z_2), \xi) \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, então

$$\tilde{k}(\nabla u_1, \nabla w_1)_1 + k_2(\nabla v_1, \nabla z_1)_2 + (u_2, w_2)_1 + (v_2, z_2)_2 + (\eta, \xi)_{\mathcal{M}} = \langle F, U\rangle = 0. \tag{2.4.13}$$

Tomemos $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$. Então, $U_\varphi = ((0, 0), (\varphi, 0), 0) \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ logo, de (2.4.13), em particular para U_φ, temos que

$$(u_2, \varphi)_1 = 0,$$

donde concluímos que

$$(u_2, \varphi)_1 = 0,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$$

e, portanto, $u_2 = 0$ em $L^2(\Omega_1)$.

Analogamente, tomando $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$, temos $((0, 0), (0, \psi), 0) \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ e, como antes, concluímos que $v_2 = 0$ em $L^2(\Omega_2)$. Assim,

$$(u_2, v_2) = 0 \text{ em } \mathbb{L}^2. \tag{2.4.14}$$

Consideremos, agora, o operador $\mathbf{A} : \mathcal{D}(\mathbf{A}) \subset \mathbb{L}^2 \longrightarrow \mathbb{L}^2$ definido pela terna $\{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}, \mathbb{L}^2, (.,.)_{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}}\}$. Nessas condições, $\mathcal{D}(\mathbf{A}) = \{(u, v) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1} \cap \mathbb{H}^2; \tilde{k}\frac{\partial u}{\partial \nu} = k_2\frac{\partial v}{\partial \nu} \text{ sobre } \Gamma_2\}$, como visto na Seção 1.3.1 . Como a forma $(.,.)_{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}}$ é coerciva, das propriedades de operador definido por terna, temos que $\mathcal{D}(\mathbf{A})$ é denso em $\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$. Ainda, observemos que, se $(w, z) \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$ então, $((w, z), (0, 0), 0) \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, donde segue de (2.4.13) que

$$\tilde{k}(\nabla u_1, \nabla w)_1 + k_2(\nabla v_1, \nabla z)_2 = 0,\ \forall\ (w, z) \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$$

e, da densidade de $\mathcal{D}(\mathbf{A})$ em $\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$, temos

$$\tilde{k}(\nabla u_1, \nabla w)_1 + k_2(\nabla v_1, \nabla z)_2 = 0,\ \forall\ (w, z) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}.$$

Portanto,

$$(u_1, v_1) = 0 \text{ em } \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}. \tag{2.4.15}$$

Por fim, sejam $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$. Temos $\theta\varphi \in \mathcal{M}$ e $((0,0),(0,0),\theta\varphi) \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. Assim, de (2.4.13),

$$(\eta, \theta\varphi)_{\mathcal{M}} = 0,$$

ou seja,

$$0 = k_1 \int_0^\infty g(s)(\nabla\eta(s), \theta(s)\nabla\varphi)_1 ds = k_1 \int_0^\infty g(s)(\nabla\eta(s), \nabla\varphi)_1 \theta(s) ds.$$

Da totalidade de $\theta\varphi$ em $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+ \times \Omega_1)$, temos, pelo Lema de Du Bois Raymond (Lema 1.2), que

$$g(s)\eta(s) = 0 \text{ quase sempre em } \Omega_1 \times (0,\infty).$$

Como $g(s) > 0$, para todo $s > 0$, segue que $\eta = 0$ quase sempre em $\Omega_1 \times (0, +\infty)$ e, assim,

$$\eta = 0 \text{ em } \mathcal{M}. \tag{2.4.16}$$

De (2.4.14), (2.4.15) e (2.4.16), temos $((u_1, v_1), (u_2, v_2), \eta) = 0$ em $\mathcal{H}$ e, portanto, $F \equiv 0$, consequentemente $D(\mathcal{L})$ é denso em $\mathcal{H}$, como queríamos provar.

Para mostrar a segunda parte, ou seja, que $\mathcal{L}$ é dissipativo, consideremos $U = ((u_1, v_1), (u_2, v_2), \eta) \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. Daí,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}U, U)_{\mathcal{H}} &= ((u_2, v_2), (u_1, v_1))_{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}} + (u_2 - \eta_s, \eta)_{\mathcal{M}} \\
&\quad + \left(\left(\tilde{k}\Delta\left[u_1 + \frac{1}{1-k_0}\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right] - b(x)u_2, k_2\Delta v_1 - b(x)v_2\right), (u_2, v_2)\right)_{\mathbb{L}^2} \\
&= \tilde{k}\int_{\Omega_1} \nabla u_2 \nabla u_1 dx + k_2 \int_{\Omega_2} \nabla v_2 \nabla v_1 dx \\
&\quad + k_1 \overbrace{\int_0^\infty g(s) \int_{\Omega_1} \nabla[u_2 - \eta_s(s)]\nabla\eta(s) dx ds}^{(1)} \\
&\quad + \overbrace{\tilde{k}\int_{\Omega_1} \Delta\left[u_1 + \frac{1}{1-k_0}\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right] u_2 dx}^{(2)} - \int_{\Omega_1} b(x)|u_2|^2 dx \\
&\quad + k_2 \overbrace{\int_{\Omega_2} \Delta v_1 v_2 dx}^{(3)} - \int_{\Omega_2} b(x)|v_2|^2 dx.
\end{aligned}$$

Analisemos os termos (1), (2) e (3).

(1) $\displaystyle \int_0^\infty g(s) \int_{\Omega_1} \nabla[u_2 - \eta_s(s)]\nabla\eta(s) dx ds.$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty g(s)\int_{\Omega_1}\nabla[u_2-\eta_s(s)]\nabla\eta(s)dxds &= \int_0^\infty g(s)\int_{\Omega_1}\nabla u_2\nabla\eta(s)dxds \\
&\quad -\int_0^\infty g(s)\int_{\Omega_1}\nabla\eta_s(s)\nabla\eta(s)dxds \\
&= \int_0^\infty g(s)\int_{\Omega_1}\nabla u_2\nabla\eta(s)dxds - \int_0^\infty g(s)\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|\nabla\eta(s)\|_1^2 ds \\
&= \int_0^\infty g(s)\int_{\Omega_1}\nabla u_2\nabla\eta(s)dxds + \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\nabla\eta(s)\|_1^2 ds
\end{aligned}
$$

onde a última igualdade segue usando integração por partes, $\eta(0)=0$ e do fato que $\lim_{s\to\infty} g(s)=0$.

(2) $\tilde{k}\int_{\Omega_1}\Delta\left[u_1+\frac{1}{1-k_0}\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right]u_2dx$

Aqui, temos que

$$
\begin{aligned}
&\tilde{k}\int_{\Omega_1}\Delta\left[u_1+\frac{1}{1-k_0}\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right]u_2dx = \\
&\quad -\int_{\Omega_1}\left[\tilde{k}\nabla u_1+k_1\int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)ds\right]\nabla u_2dx \\
&\quad +\left\langle \tilde{k}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[u_1+\frac{1}{1-k_0}\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right],u_2\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_1\cup\Gamma_2)\times H^{1/2}(\Gamma_1\cup\Gamma_2)}.
\end{aligned}
$$

No entanto, $u_2=0$ sobre Γ_1 e, portanto, de acordo com a Seção 1.1.3, do Capítulo 1, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\tilde{k}\int_{\Omega_1}\Delta\left[u_1+\frac{1}{1-k_0}\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right]u_2dx = \\
&\quad -\int_{\Omega_1}\left[\tilde{k}\nabla u_1+k_1\int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)ds\right]\nabla u_2dx \\
&\quad +\left\langle \tilde{k}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[u_1+\frac{1}{1-k_0}\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right],u_2\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2)\times H^{1/2}(\Gamma_2)}
\end{aligned}
$$

(3) $\int_{\Omega_2}\Delta v_1 v_2 dx$

Por fim,

$$
\int_{\Omega_2}\Delta v_2 v_1 dx = -\int_{\Omega_2}\nabla v_2\nabla v_1 dx - \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial\nu}, v_2\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2)\times H^{1/2}(\Gamma_2)}.
$$

Notemos que o sinal negativo da integral sobre a fronteira Γ_2 decorre da orientação do vetor ν, que foi tomado na direção exterior a Ω_1 e, portanto, interior a Ω_2.

Assim, de $(1),(2)$ e (3), temos

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}U,U)_{\mathcal{H}} &= \tilde{k}\int_{\Omega_1}\nabla u_2\nabla u_1 dx + k_2\int_{\Omega_2}\nabla v_2\nabla v_1 dx + k_1\int_0^\infty g(s)\int_{\Omega_1}\nabla u_2\nabla\eta(s)dxds \\
&\quad +\frac{k_1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\nabla\eta(s)\|_1^2 ds - k_1\int_0^\infty g(s)\int_{\Omega_1}\nabla\eta(s)ds\nabla u_2 dx \\
&\quad -\int_{\Omega_1} b(x)|u_2|^2dx - \tilde{k}\int_{\Omega_1}\nabla u_1\nabla u_2 dx - k_2\int_{\Omega_2}\nabla v_2\nabla v_1 dx \\
&\quad +\left\langle \tilde{k}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[u_1 + \frac{1}{1-k_0}\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right], u_2\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2)\times H^{1/2}(\Gamma_2)} \\
&\quad -k_2\left\langle\frac{\partial v_1}{\partial\nu}, v_2\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2)\times H^{1/2}(\Gamma_2)} - \int_{\Omega_2} b(x)|v_2|^2dx \\
&= \left\langle \tilde{k}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[u_1 + \frac{1}{1-k_0}\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right], u_2\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2)\times H^{1/2}(\Gamma_2)} \\
&\quad -k_2\left\langle\frac{\partial v_1}{\partial\nu}, v_2\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2)\times H^{1/2}(\Gamma_2)} + \frac{k_1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\nabla\eta(s)\|_1^2 ds \\
&\quad -\int_{\Omega_1} b(x)|u_2|^2dx - \int_{\Omega_2} b(x)|v_2|^2dx
\end{aligned}
$$

ainda, como $u_2 = v_2$ e $k_2\dfrac{\partial v_1}{\partial\nu} = \tilde{k}\dfrac{\partial u_1}{\partial\nu} + k_1\displaystyle\int_0^\infty g(s)\frac{\partial\eta}{\partial\nu}(s)ds$ sobre Γ_2, resta que

$$
(\mathcal{L}U,U)_{\mathcal{H}} = \frac{k_1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\nabla\eta(s)\|_1^2 ds - \int_{\Omega_1} b(x)|u_2|^2dx - \int_{\Omega_2} b(x)|v_2|^2dx \le 0,
$$

donde segue que $\mathcal{L}$ é dissipativo.

Resta-nos provar que $0\in\rho(\mathcal{L})$. Para tal, faremos uso do Teorema 1.12 mostrando o item (iii), ou seja, provaremos que $-\mathcal{L}$ é um operador fechado e bijetivo.

Para mostrar que $-\mathcal{L}$ é fechado, consideremos $\{U_n\}\subset\mathcal{D}(\mathcal{L})$ e U e $F\in\mathcal{H}$ tais que

$$
U_n \longrightarrow U \text{ e } -\mathcal{L}U_n \longrightarrow F \text{ em } \mathcal{H}, \text{ quando } n\to\infty.
$$

Devemos provar que $U\in\mathcal{D}(\mathcal{L})$ e $-\mathcal{L}U = F$. Denotemos $U_n = ((u_1^n, v_1^n),(u_2^n, v_2^n),\eta_n)$ para cada $n\in\mathbb{N}$, $U = ((u_1,v_1),(u_2,v_2),\eta)$ e $F = ((f_1,g_1),(f_2,g_2),\xi)$. Logo, das convergências acima temos, quando $n\to\infty$, que

$$
(u_1^n, v_1^n) \longrightarrow (u_1,v_1) \text{ em } \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}, \tag{2.4.17}
$$

$$
(u_2^n, v_2^n) \longrightarrow (u_2,v_2) \text{ em } \mathbb{L}^2, \tag{2.4.18}
$$

$$
\eta_n \longrightarrow \eta \text{ em } \mathcal{M}, \tag{2.4.19}
$$

$$
-(u_2^n, v_2^n) \longrightarrow (f_1,g_1) \text{ em } \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}, \tag{2.4.20}
$$

$$\left(-\tilde{k}\Delta\left[u_1^n+\frac{1}{1-k_0}\int_0^\infty g(s)\eta_n(s)ds\right]+b(x)u_2^n,-k_2\Delta v_1^n+b(x)v_2^n\right)\\ \longrightarrow (f_2,g_2) \text{ em } \mathbb{L}^2 \tag{2.4.21}$$

e

$$\eta_{n,s}-u_2^n\longrightarrow \xi \text{ em } \mathcal{M}. \tag{2.4.22}$$

De (2.4.18), (2.4.20) e da unicidade do limite em $\mathbb{L}^2$, temos que $(f_1,g_1)=-(u_2,v_2)$, donde $(u_2,v_2)\in\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$.

De (2.4.17) - (2.4.19), temos que

$$\left(-\tilde{k}\Delta\left[u_1^n+\frac{1}{1-k_0}\int_0^\infty g(s)\eta_n(s)ds\right]+b(x)u_2^n,-k_2\Delta v_1^n+b(x)v_2^n\right)\longrightarrow\\ \left(-\tilde{k}\Delta\left[u_1+\frac{1}{1-k_0}\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right]+b(x)u_2,-k_2\Delta v_1+b(x)v_2\right)\\ \text{em } \mathcal{D}'(\Omega_1)\times\mathcal{D}'(\Omega_2), \text{ quando } n\to\infty.$$

Assim, da convergência acima e de (2.4.21), temos

$$\left(-\tilde{k}\Delta\left[u_1+\frac{1}{1-k_0}\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right]+b(x)u_2,-k_2\Delta v_1+b(x)v_2\right)=(f_2,g_2) \text{ em } \mathbb{L}^2.$$

Portanto,

$$\left(-\tilde{k}\Delta\left[u_1+\frac{1}{1-k_0}\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right],-k_2\Delta v_1\right)=\left(f_2-b(x)u_2,g_2-b(x)v_2\right) \text{ em } \mathbb{L}^2.$$

Nesse caso, pelo Lema 1.1, olhando separadamente para Ω_1 e Ω_2,temos que

$$\left(\tilde{k}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[u_1^n+\frac{1}{1-k_0}\int_0^\infty g(s)\eta_n(s)ds\right],\frac{\partial v_1^n}{\partial\nu}\right)\longrightarrow\\ \left(\tilde{k}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[u_1+\frac{1}{1-k_0}\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right],\frac{\partial v_1}{\partial\nu}\right)$$

em $\left(H^{-1/2}(\Gamma_2)\right)^2$, quando $n\to\infty$ e, como, para todo $n\in\mathbb{N}$, temos

$$k_2\frac{\partial v_1^n}{\partial\nu}=\tilde{k}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[u_1^n+\frac{1}{1-k_0}\int_0^\infty g(s)\eta_n(s)ds\right] \text{ sobre } \Gamma_2,$$

segue que

$$k_2\frac{\partial v_1}{\partial\nu}=\tilde{k}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[u_1+\frac{1}{1-k_0}\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right] \text{ em } H^{-1/2}(\Gamma_2).$$

Por fim, como $u_2^n\to u_2$ em V, pois $(u_2^n,v_2^n)\to(u_2,v_2)$ em $\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$, segue de (2.4.22) que

$$\eta_{n,s}\longrightarrow \xi+u_2 \text{ em } \mathcal{M}, \text{ quando } n\to\infty,$$

sendo assim, temos

$$\eta_n \longrightarrow \eta \text{ e } T\eta_n \longrightarrow -u_2 - \xi \text{ em } \mathcal{M}, \text{ quando } n \to \infty.$$

Como T é o gerador infinitesimal de um C_0-Semigrupo, segue que T é fechado e, portanto,

$$\eta \in \mathcal{D}(T) \quad \text{e} \quad -\eta_s = T\eta = -\xi - u_2.$$

Logo, $U = ((u_1, v_1), (u_2, v_2), \eta) \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ e

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}U &= \left(-(u_2, v_2), \left(-\tilde{k}\Delta\left[u_1 + \frac{1}{1-k_0}\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right] + b(x)u_2, -k_2\Delta v_1 + b(x)v_2\right), \eta_s - u_2\right) \\ &= ((f_1, g_1), (f_2, g_2), \xi) = F, \end{aligned}$$

como queríamos, isto é, $-\mathcal{L}$ é fechado.

Provemos que $-\mathcal{L}$ é bijeção. Primeiramente, mostremos que $Ker(-\mathcal{L}) = \{0\}$. Seja $U = ((u_1, v_1), (u_2, v_2), \eta) \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ tal que $-\mathcal{L}U = 0$, ou seja,

$$\begin{gathered} -(u_2, v_2) = (0,0) \text{ em } \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}, \\ \left(-\tilde{k}\Delta\left[u_1 + \frac{1}{1-k_0}\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right] + b(x)u_2, -k_2\Delta v_1 + b(x)v_2\right) = (0,0) \text{ em } \mathbb{L}^2, \\ \eta_s - u_2 = 0 \text{ em } \mathcal{M}. \end{gathered} \tag{2.4.23}$$

Da primeira igualdade acima, temos $u_2 = 0$ em V e, consequentemente, em $\mathcal{M}$. Deste fato e da última igualdade temos $\eta_s = 0$ em $\mathcal{M}$. Assim, η é constante na variável s, mas como, $\eta(0) = 0$, visto que $\eta \in D(T)$, então $\eta = 0$ em $\mathcal{M}$.

Substituindo $\eta = 0$ na segunda identidade de (2.4.23) e, como $(u_2, v_2) = (0,0) = 0$ pela primeira igualdade, temos que

$$\left(-\tilde{k}\Delta u_1, -k_2\Delta v_1\right) = (0,0) \text{ em } \mathbb{L}^2.$$

Assim, calculando o produto interno em $\mathbb{L}^2$ da igualdade acima com (u_1, v_1), obtemos, graças a Fórmula de Green, a direção considerada do vetor ν e o fato de $u_1 = 0$ sobre Γ_1 e $u_1 = u_2$ sobre Γ_2, resultando em

$$\begin{aligned} 0 &= \left((-\tilde{k}\Delta u_1, -k_2\Delta v_1), (u_1, v_1)\right)_{\mathbb{L}^2} \\ &= \tilde{k}\|\nabla u_1\|_1^2 + k_2\|\nabla v_1\|_2^2 - \tilde{k}\left\langle \frac{\partial u_1}{\partial \nu}, u_1 \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2)\times H^{1/2}(\Gamma_2)} \\ &\quad + k_2\left\langle \frac{\partial v_1}{\partial \nu}, v_1 \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2)\times H^{1/2}(\Gamma_2)}. \end{aligned}$$

Como $((u_1,v_1),(u_2,v_2),\eta) \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ temos $u_1 = v_1$ sobre Γ_2 e como $\eta = 0$, temos $\tilde{k}\dfrac{\partial u_1}{\partial \nu} = k_2\dfrac{\partial v_1}{\partial \nu}$ também sobre Γ_2. Portanto, da igualdade acima obtemos

$$\tilde{k}\|\nabla u_1\|_1^2 + k_2\|\nabla v_1\|_2^2 = 0,$$

donde $(u_1,v_1) = 0$ em $\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$, o que prova que $U = 0$ e, com isso, provamos que $Ker(-\mathcal{L}) = \{0\}$.

Finalmente, seja $F = ((f_1,g_1),(f_2,g_2),\xi) \in \mathcal{H}$.

Devemos encontrar $U = ((u_1,v_1),(u_2,v_2),\eta) \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ tal que $-\mathcal{L}U = F$, ou seja,

$$-(u_2,v_2) = (f_1,g_1) \text{ em } \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}, \tag{2.4.24}$$

$$\left(-\tilde{k}\Delta\left[u_1 + \frac{1}{1-k_0}\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right] + b(x)u_2, -k_2\Delta v_1 + b(x)v_2\right) = (f_2,g_2) \text{ em } \mathbb{L}^2, \tag{2.4.25}$$

$$\eta_s - u_2 = \xi \text{ em } \mathcal{M}. \tag{2.4.26}$$

De modo a satisfazer (2.4.24) - (2.4.26) o elemento η desejado deve satisfazer $\eta_s = \xi - f_1$, ou seja,

$$\eta(s) = \int_0^s \xi(\tau)d\tau - sf_1.$$

Temos que η acima é tal que $\eta \in \mathcal{D}(T)$. De fato, $\eta_s = \xi - f_1 \in \mathcal{M}$ e $\eta(0) = 0$. Para concluir que $\eta \in \mathcal{D}(T)$ devemos verificar se, com essa configuração, $\eta \in \mathcal{M}$.

Para tal, seja $T > 0$. Pela definição de η temos que a integral $\int_0^T g(s)\|\nabla\eta(s)\|_1^2 ds$ está bem posta, pois

$$\begin{aligned}
\int_0^T g(s)\|\nabla\eta(s)\|_1^2 ds &= \int_0^T g(s)\left\|\int_0^s \nabla\xi(\tau)d\tau - s\nabla f_1\right\|_1^2 ds \\
&\leq 2\int_0^T g(s)\left[\left\|\int_0^s \nabla\xi(\tau)d\tau\right\|_1^2 + \|s\nabla f_1\|_1^2\right] ds,
\end{aligned}$$

ainda, das desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Young, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T g(s)\left\|\int_0^s \nabla\xi(\tau)d\tau\right\|_1^2 ds &= \int_0^T g(s)\int_0^s\int_0^s (\nabla\xi(\tau),\nabla\xi(t))_1\, d\tau dt ds \\
&\leq \int_0^T g(s)\int_0^s\int_0^s \|\nabla\xi(\tau)\|_1\|\nabla\xi(t)\|_1 d\tau dt ds \\
&\leq \int_0^T g(s)\int_0^s\int_0^s \frac{1}{2}\left[\|\nabla\xi(\tau)\|_1^2 + \|\nabla\xi(t)\|_1^2\right] d\tau dt ds
\end{aligned}$$

e, como, g é decrescente

$$\begin{aligned}
\int_0^T g(s)\int_0^s\int_0^s \|\nabla\xi(\tau)\|_1^2 d\tau dt ds &= \int_0^T g(s)\int_0^s \|\nabla\xi(\tau)\|_1^2 d\tau \int_0^s dt ds\\
&\leq \int_0^T s\int_0^s g(\tau)\|\nabla\xi(\tau)\|_1^2 d\tau ds\\
&\leq T\int_0^T\int_0^T g(\tau)\|\nabla\xi(\tau)\|_1^2 d\tau ds\\
&\leq T^2\int_0^T g(\tau)\|\nabla\xi(\tau)\|_1^2 d\tau\\
&\leq T^2\int_0^\infty g(\tau)\|\nabla\xi(\tau)\|_1^2 d\tau < \infty
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^T g(s)\int_0^s\int_0^s \frac{1}{2}\left[\|\nabla\xi(\tau)\|_1^2 + \|\nabla\xi(t)\|_1^2\right] d\tau dt ds &= \int_0^T g(s)\int_0^s\int_0^s \|\nabla\xi(\tau)\|_1^2 d\tau dt ds\\
&\leq T^2\int_0^\infty g(\tau)\|\nabla\xi(\tau)\|_1^2 d\tau < \infty,
\end{aligned}$$

donde segue que

$$\int_0^T g(s)\left\|\int_0^s \nabla\xi(\tau)d\tau\right\|_1^2 ds \leq T^2\int_0^\infty g(\tau)\|\nabla\xi(\tau)\|_1^2 d\tau < \infty.$$

Agora,

$$\int_0^T g(s)\|s\nabla f_1\|_1^2 ds = \|\nabla f_1\|_1^2\int_0^T g(s)s^2 ds \leq T^2\int_0^\infty g(s)ds = T^2 k_0 < \infty$$

portanto,

$$\int_0^T g(s)\|\nabla\eta(s)\|_1^2 ds \leq 2T^2\left[\int_0^\infty g(\tau)\|\nabla\xi(\tau)\|_1^2 d\tau + k_0\right] < \infty$$

como queríamos.

Agora, pela hipótese (2.3.10),

$$\begin{aligned}
\int_0^T g(s)\|\nabla\eta(s)\|_1^2 ds &\leq -\frac{1}{c}\int_0^T g'(s)\|\nabla\eta(s)\|_1^2 ds\\
&= -\frac{1}{c}\int_0^T g'(s)(\nabla\eta(s),\nabla\eta(s))_1 ds \qquad (2.4.27)\\
&= \frac{1}{c}\left[g(0)\|\nabla\eta(0)\|_1^2 - g(T)\|\nabla\eta(T)\|_1^2\right] + \frac{2}{c}\int_0^T g(s)(\nabla\eta_s(s),\nabla\eta(s))_1 ds
\end{aligned}$$

onde, a última igualdade segue por integração por partes.

Agora, pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Young, temos

$$\begin{aligned}
\frac{2}{c}\int_0^T g(s)(\nabla\eta_s(s),\nabla\eta(s))_1 ds &= \int_0^T g(s)\frac{2}{c}(\nabla\eta_s(s),\nabla\eta(s))_1 ds\\
&\leq \int_0^T g(s)\frac{2}{c}\|\nabla\eta_s(s)\|_1\|\nabla\eta(s)\|_1 ds\\
&\leq \int_0^T g(s)\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{c}\|\nabla\eta_s(s)\|_1\right)^2+\|\nabla\eta(s)\|_1^2\right]ds\\
&= \frac{2}{c^2}\int_0^T g(s)\|\nabla\eta_s(s)\|_1^2 ds+\frac{1}{2}\int_0^T g(s)\|\nabla\eta(s)\|_1^2 ds
\end{aligned}$$

daí, do fato de $g(T)>0$, ou seja, $-g(T)\|\nabla\eta(T)\|_1^2<0$ e de $\eta(0)=0$ donde $g(0)\|\nabla\eta(0)\|_1^2=0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}g(0)\|\nabla\eta(0)\|_1^2 \quad & -\frac{1}{c}g(T)\|\nabla\eta(T)\|_1^2+\frac{2}{c}\int_0^T g(s)(\nabla\eta_s(s),\nabla\eta(s))_1 ds\\
&\leq \frac{2}{c^2}\int_0^T g(s)\|\nabla\eta_s(s)\|_1^2 ds+\frac{1}{2}\int_0^T g(s)\|\nabla\eta(s)\|_1^2 ds.
\end{aligned}$$

Comparando a desigualdade acima com (2.4.27), obtemos

$$\int_0^T g(s)\|\nabla\eta(s)\|_1^2 ds\leq\frac{2}{c^2}\int_0^T g(s)\|\nabla\eta_s(s)\|_1^2 ds+\frac{1}{2}\int_0^T g(s)\|\nabla\eta\|_1^2 ds,$$

portanto,

$$\int_0^T g(s)\|\nabla\eta(s)\|_1^2 ds\leq\frac{4}{c^2}\int_0^T g(s)\|\nabla\eta_s(s)\|_1^2 ds\leq\frac{4}{c^2}\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta_s(s)\|_1^2 ds$$

daí, fazendo $T\to\infty$, temos

$$\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|_1^2 ds\leq\frac{4}{c^2}\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta_s(s)\|_1^2 ds$$

ou seja,

$$\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|_1^2 ds<\infty,$$

o que prova o desejado, ou seja, $\eta\in\mathcal{M}$.

Escolhendo η como descrito anteriormente e $(u_2,v_2)=(-f_1,-g_1)$, temos que as igualdades (2.4.24) e (2.4.26) são satisfeitas. Resta então, encontrarmos (u_1,v_1) verificando (2.4.25) nas condições desejadas e a prova da proposição estará completa. Visando esse objetivo, definamos em $\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$ o seguinte operador

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}:\quad \mathbb{H}^1_{\Gamma_1} &\longrightarrow \mathbb{R}\\
(w,z) &\mapsto \langle\mathcal{A},(w,z)\rangle
\end{aligned}$$

onde,

$$\langle \mathcal{A},(w,z)\rangle = ((f_2-b(x)u_2, g_2-b(x)v_2),(w,z))_{\mathbb{L}^2} - k_1\int_0^\infty g(s)(\nabla\eta(s).\nabla w)_1 ds.$$

Observe que $\mathcal{A}$ está bem definido, como operador linear, e é contínuo. De fato,

$$\begin{aligned}|\langle \mathcal{A},(w,z)\rangle| &\le \|(f_2-b(x)u_2, g_2-b(x)v_2)\|_{\mathbb{L}^2}\|(w,z)\|_{\mathbb{L}^2} + k_1\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|_1\|\nabla w\|_1 ds\\ &= \|(f_2-b(x)u_2, g_2-b(x)v_2)\|_{\mathbb{L}^2}\|(w,z)\|_{\mathbb{L}^2} + \|\nabla w\|_1 k_1\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|_1 ds\end{aligned}$$

ainda,

$$\begin{aligned}k_1\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|_1 ds &\le k_1\left(\int_0^\infty g(s)ds\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|_1^2 ds\right)^{1/2}\\ &= k_0^{1/2}\|\eta\|_{\mathcal{M}},\end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned}|\langle \mathcal{A},(w,z)\rangle| &\le \|(f_2-b(x)u_2, g_2-b(x)v_2)\|_{\mathbb{L}^2}\|(w,z)\|_{\mathbb{L}^2} + \frac{k_0^{1/2}}{\tilde{k}}\|\eta\|_{\mathcal{M}}\tilde{k}\|\nabla w\|_1\\ &\le \|(f_2-b(x)u_2, g_2-b(x)v_2)\|_{\mathbb{L}^2}\|(w,z)\|_{\mathbb{L}^2} + \frac{k_0^{1/2}}{\tilde{k}}\|\eta\|_{\mathcal{M}}\|(w,z)\|_{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}}\end{aligned}$$

e da continuidade da imersão de $\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$ em $\mathbb{L}^2$, segue o desejado.

Assim, pelo Teorema de Lax-Milgran, considerando a forma $(.,.)_{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}}$, existe um único $(u_1,v_1)\in\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$, tal que

$$((u_1,v_1),(w,z))_{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}} = \langle \mathcal{A},(w,z)\rangle,\ \text{para todo } (w,z)\in\mathbb{H}^1_{\Gamma_1},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\tilde{k}\int_{\Omega_1}\nabla u_1\nabla w dx + k_2\int_{\Omega_2}\nabla v_1\nabla z dx &= \int_{\Omega_1} f_2 w dx - \int_{\Omega_1} b(x)u_2 w dx + \int_{\Omega_2} g_2 z dx\\ &-\textstyle\int_{\Omega_2} b(x)v_2 z dx - k_1\displaystyle\int_0^\infty g(s)\int_{\Omega_1}\nabla\eta(s)\nabla w dx ds,\ \text{para todo } (w,z)\in\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}.\end{aligned} \tag{2.4.28}$$

Em particular, se $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega_1)$, então $(\varphi,0)\in\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$, logo

$$\tilde{k}\int_{\Omega_1}\nabla u_1\nabla\varphi dx = \int_{\Omega_1} f_2\varphi dx - \int_{\Omega_1} b(x)u_2\varphi dx - k_1\int_0^\infty g(s)\int_{\Omega_1}\nabla\eta(s)\nabla\varphi dx ds,$$

para todo $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega_1)$, assim

$$-\Delta\left[\tilde{k}u_1 + k_1\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right] = f_2 - b(x)u_2 \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega_1)$$

e, como f_2 e $b(x)u_2 \in L^2(\Omega_1)$, temos que

$$-\Delta\left[\tilde{k}u_1 + k_1\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right] = f_2 - b(x)u_2 \text{ quase sempre em } \Omega_1,$$

ou ainda,

$$-\Delta\left[\tilde{k}u_1 + k_1\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right] + b(x)u_2 = f_2 \text{ quase sempre em } \Omega_1.$$

Analogamente, se $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$, temos $(0,\psi) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$ e, assim,

$$k_2\int_{\Omega_2}\nabla v_1\nabla\psi dx = \int_{\Omega_2} g_2\psi dx - \int_{\Omega_2} b(x)v_2\psi dx, \text{ para todo } \psi \in \mathcal{D}(\Omega_2)\ .$$

Consequentemente,

$$-k_2\Delta v_1 = g_2 - b(x)v_2 \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega_2)$$

e, como $g_2 - b(x)v_2 \in L^2(\Omega_2)$, segue que,

$$-k_2\Delta v_1 = g_2 - b(x)v_2 \text{ quase sempre em } \Omega_2,$$

ou ainda,

$$-k_2\Delta v_1 + b(x)v_2 = g_2 \text{ quase sempre em } \Omega_2.$$

Substituindo as expressões encontradas para f_2 e g_2 na identidade (2.4.28), obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{k}\int_{\Omega_1}\nabla u_1\nabla w dx + k_2\int_{\Omega_2}\nabla v_1\nabla z dx = -\int_{\Omega_1}\Delta\left[\tilde{k}u_1 + k_1\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right]w dx\\ -k_2\int_{\Omega_2}\Delta v_1 z dx - k_1\int_0^\infty g(s)\int_{\Omega_1}\nabla\eta(s)\nabla w dx ds, \text{ para todo } (w,z) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}.\end{aligned} \tag{2.4.29}$$

Da fórmula de Green generalizada, obtemos

$$\begin{aligned}-\int_{\Omega_1}\Delta\left[\tilde{k}u_1 + k_1\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right]w dx = \tilde{k}\int_{\Omega_1}\nabla u_1\nabla w dx\\ +k_1\int_0^\infty g(s)\int_{\Omega_1}\nabla\eta(s)\nabla w dx ds - \left\langle\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\tilde{k}u_1 + k_1\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right], w\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2)\times H^{1/2}(\Gamma_2)},\end{aligned} \tag{2.4.30}$$

observemos que a dualidade fica restrita a Γ_2 graças ao discutido na Seção 1.1.3.

De maneira análoga e considerando a direção de ν, obtemos

$$-k_2\int_{\Omega_2}\Delta v_1 z dx = k_2\int_{\Omega_2}\nabla v_1\nabla z dx + k_2\left\langle\frac{\partial v_1}{\partial\nu}, z\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2)\times H^{1/2}(\Gamma_2)}. \tag{2.4.31}$$

Comparando (2.4.30) e (2.4.31) com (2.4.29), obtemos

$$0 = k_2 \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial \nu}, z \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2)\times H^{1/2}(\Gamma_2)} - \left\langle \frac{\partial}{\partial \nu}\left[\tilde{k}u_1 + k_1 \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right], w \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2)\times H^{1/2}(\Gamma_2)} \tag{2.4.32}$$

para todo $(w, z) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$.

Seja $\tilde{z} \in H^{1/2}(\Gamma_2)$. Como a aplicação traço

$$\gamma_0 : H^1(\Omega_2) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma_2)$$

possui inversa à direita, existe $z_1 \in H^1(\Omega_2)$ tal que

$$\gamma_0(z_1) = \tilde{z}.$$

Ainda, a aplicação traço

$$\gamma_0 : H^1(\Omega_1) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \equiv H^{1/2}(\Gamma_1) \times H^{1/2}(\Gamma_2)$$

também possui inversa à direita, logo, existe $w_1 \in H^1(\Omega_1)$ tal que

$$\gamma_0(w_1) = (0, \tilde{z}).$$

Nesse caso, $w_1 \in V$ e o par $(w_1, z_1) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$ com $w_1 = z_1 = \tilde{z}$ sobre Γ_2. Portanto, como (2.4.32) é válido para todo $(w, z) \in \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}$, então, é válido para todo $\tilde{z} \in H^{1/2}(\Gamma_2)$, donde segue que

$$k_2 \frac{\partial v_1}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \nu}\left[\tilde{k}u_1 + k_1 \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right] \text{ em } H^{-1/2}(\Gamma_2). \tag{2.4.33}$$

Assim,

$$U = ((u_1, v_1), (u_2, v_2), \eta) \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$$

e satisfaz $-\mathcal{L}U = F$, como queríamos.

Com isso, concluímos que $0 \in \rho(\mathcal{L})$ e portanto $\mathcal{L}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações em $\mathcal{H}$, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

■

Capítulo 3

Decaimento Exponencial da Energia

O presente capítulo que tem por objetivo provar que o funcional de energia associado ao problema (2.2.8),

$$\begin{aligned} E_U(t) &= \frac{1}{2}\left[\int_{\Omega_1} |u_t(t)|^2 dx + \int_{\Omega_2} |v_t(t)|^2 dx + k_1 \int_0^\infty g(s) \int_{\Omega_1} |\nabla \eta^t|^2 dx ds \right. \\ &\quad \left. + \tilde{k} \int_{\Omega_1} |\nabla u(t)|^2 dx + k_2 \int_{\Omega_2} |\nabla v(t)|^2 dx \right] \end{aligned} \tag{3.0.1}$$

decai exponencialmente a zero quando t tende ao infinito, em que $U(t) = ((u(t), v(t)), \eta^t)$.

Nosso objetivo é provar o Teorema 3.3, que é o resultado central de todo o trabalho.

3.1 Hipótese Adicional

De modo a obter o resultado de estabilidade consideremos a seguinte hipótese adicional:

H3- Denotamos por ω uma vizinhança de $\Gamma_2 = \partial\Omega_2$ em $\mathbb{R}^N$ e consideramos que a aplicação $b = b(x) \in L^\infty(\Omega)$, é uma função real não negativa satisfazendo

$$b(x) \geq b_0 > 0 \text{ em } \omega. \tag{3.1.2}$$

Por fim, assumimos que $\omega_2 = \omega \cap \Omega_2$ controla geometricamente Ω_2, ou seja, existe $T_0 > 0$ tal que toda geodésica de Ω_2 partindo do ponto $t = 0$ e com velocidade 1, atinge ω_2 num tempo $t < T_0$.

3.2 Estabilidade Exponencial

Antes de apresentarmos o principal resultado do nosso trabalho, faremos uma observação, que nos será útil no decorrer do capítulo, e trata da derivada do funcional energia dado em (3.0.1).

Observação 3.1 *A derivada de primeira ordem de E_U satisfaz a seguinte identidade:*

$$\frac{d}{dt}E_U(t) = \frac{k_1}{2}\int_0^\infty g'(s)\int_{\Omega_1}|\nabla\eta^t(s)|^2 dxds - \int_{\Omega_1} b(x)|u_t(t)|^2 dx - \int_{\Omega_2} b(x)|v_t(t)|^2 dx. \tag{3.2.3}$$

De fato, a identidade será provada para soluções regulares e o resultado geral é obtido para soluções fracas utilizando o procedimento usual de densidade.

Notemos que, para cada $t > 0$, multiplicando a primeira e terceira linhas de (2.2.8) por (u_t, v_t) em $\mathbb{L}^2$, obtemos

$$\begin{aligned}(u_{tt}, u_t)_1 \quad - \quad & \left(\Delta\left[\tilde{k}u + k_1\int_0^\infty g(s)\eta^t(s)ds\right], u_t\right)_1 + (b(x)u_t, u_t)_1 \\ & +(v_{tt}, v_t)_2 - k_2(\Delta v, v_t)_2 + (b(x)v_t, v_t)_2 = 0.\end{aligned}$$

Agora, pela Fórmula de Green generalizada e de $u_t = 0$ sobre Γ_1, temos que

$$\begin{aligned}-k_2(\Delta v, v_t)_2 \quad - \quad & \left(\Delta\left[\tilde{k}u + k_1\int_0^\infty g(s)\eta^t(s)ds\right], u_t\right)_1 = \tilde{k}(\nabla u, \nabla u_t)_1 + k_2(\nabla v, \nabla v_t)_2 \\ & +(\eta^t, u_t)_{\mathcal{M}} - \left\langle \tilde{k}\frac{\partial u}{\partial \nu} + k_1\int_0^\infty g(s)\frac{\partial \eta^t}{\partial \nu}(s)ds, u_t\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2)\times H^{1/2}(\Gamma_2)} \\ & + \left\langle k_2\frac{\partial v}{\partial \nu}, v_t\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2)\times H^{1/2}(\Gamma_2)}.\end{aligned}$$

Como $u_t = v_t$ e $\tilde{k}\frac{\partial u}{\partial \nu} + k_1\int_0^\infty g(s)\frac{\partial \eta^t}{\partial \nu}(s)ds = k_2\frac{\partial v}{\partial \nu}$ sobre Γ_2, segue que

$$\begin{aligned}-k_2(\Delta v, v_t)_2 \quad - \quad & \left(\Delta\left[\tilde{k}u + k_1\int_0^\infty g(s)\eta^t(s)ds\right], u_t\right)_1 = \tilde{k}(\nabla u, \nabla u_t)_1 \\ & +k_2(\nabla v, \nabla v_t)_2 + (\eta^t, u_t)_{\mathcal{M}}\end{aligned}$$

e, portanto,

$$(u_{tt}, u_t)_1 + \tilde{k}(\nabla u, \nabla u_t)_1 + k_2(\nabla v, \nabla v_t)_2 + (\eta^t, u_t)_{\mathcal{M}} + (b(x)u_t, u_t)_1 + (v_{tt}, v_t)_2 + (b(x)v_t, v_t)_2 = 0.$$

Considerando as identidades $(u_{tt}, u_t)_1 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|_1^2$, $(v_{tt}, v_t)_2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_t\|_2^2$, $\tilde{k}(\nabla u, \nabla u_t)_1 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_1^2$, $k_2(\nabla v, \nabla v_t)_2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla v\|_2^2$ e, $\eta_t + \eta_s = u_t$ em $\Omega_1 \times (0,\infty)$, obtemos que

$$(\eta^t, u_t)_{\mathcal{M}} = (\eta^t, \eta^t_t + \eta^t_s)_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\eta^t\|^2_{\mathcal{M}} - \frac{k_1}{2}\int_0^\infty g'(s)\int_{\Omega_1}|\nabla\eta^t(s)|^2 dxds,$$

e, consequentemente,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u_t\|_1^2+\|v_t\|_2^2+\tilde{k}\|\nabla u\|_1^2+k_2\|\nabla v\|_2^2+\|\eta^t\|_{\mathcal{M}}^2\right]-\frac{k_1}{2}\int_0^\infty g'(s)\int_{\Omega_1}|\nabla\eta^t(s)|^2dxds$$
$$+\int_{\Omega_1}b(x)|u_t(t)|^2dx+\int_{\Omega_2}b(x)|v_t(t)|^2dx=0,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}E_U(t)=\frac{k_1}{2}\int_0^\infty g'(s)\int_{\Omega_1}|\nabla\eta^t(s)|^2dxds-\int_{\Omega_1}b(x)|u_t(t)|^2dx-\int_{\Omega_2}b(x)|v_t(t)|^2dx$$

como queríamos.

Da identidade (3.2.3), temos que $E_U(t)$ é uma função não crescente e, para $0\leq t_1<t_2$,

$$\begin{aligned}E_U(t_2)-E_U(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}E_U(t)dt \\ &= \frac{k_1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^\infty g'(s)\int_{\Omega_1}|\nabla\eta^t(s)|^2dxdsdt-\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega_1}b(x)|u_t(t)|^2dxdt \\ &\quad -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega_2}b(x)|v_t(t)|^2dxdt\end{aligned}\tag{3.2.4}$$

Observação 3.2 *Nosso objetivo é provar que o funcional de energia decai exponencialmente, ou seja, que existem C, $\gamma>0$, tais que*

$$E_U(t)\leq Ce^{-\gamma t}E_U(0),\forall t>0.$$

Note que, para provar a desigualdade acima é suficiente mostrarmos que existem $T^*,R>0$ e $C\equiv C(T^*,R)$, tais que $E_U(0)\leq R$, implica em

$$\begin{aligned}E_U(0)\leq \quad & C\left(\frac{k_1}{2}\int_0^T\int_0^\infty(-g'(s))\int_{\Omega_1}|\nabla\eta^t(s)|^2dxdsdt+\int_0^T\int_{\Omega_1}b(x)|u_t(t)|^2dxdt\right. \\ &\left.+\int_0^T\int_{\Omega_2}b(x)|v_t(t)|^2dxdt\right)\end{aligned}\tag{3.2.5}$$

para todo $T>T^*$.

De fato, suponhamos que (3.2.5) é válida. Definindo

$$D(t)=\frac{k_1}{2}\int_0^\infty(-g'(s))\int_{\Omega_1}|\nabla\eta^t(s)|^2dxds+\int_{\Omega_1}b(x)|u_t(t)|^2dx\int_{\Omega_2}b(x)|v_t(t)|^2dx$$

temos, de (3.2.4), do fato de $E_U(t)$ ser uma função não crescente e da hipótese (3.2.5), para $T>T^*$, que

$$E_U(T)\leq E_U(0)\leq C\int_0^T D(t)dt$$

e, de (3.2.4),

$$E_U(T) + \int_0^T D(t)dt = E_U(0).$$

Logo,

$$E_U(T) + \frac{1}{C}E_U(T) \leq E_U(T) + \int_0^T D(t)dt = E_U(0),$$

ou seja,

$$\frac{C+1}{C}E_U(T) \leq E_U(0),$$

ou ainda,

$$E_U(T) \leq \frac{C}{1+C}E_U(0).$$

E, da Observação 1.23, temos o desejado.

Teorema 3.3 *Suponhamos que as hipóteses (**H1**) - (**H3**) sejam válidas. Seja $R > 0$, tal que $E_U(0) \leq R$. Então, existem T_0 (de acordo com a hipótese **H3**) e constantes $C_0, \gamma > 0$, verificando*

$$E_U(t) \leq C_0 e^{-\gamma t} E_U(0), t > T_0. \tag{3.2.6}$$

Prova. Faremos a prova para soluções regulares de (2.2.8) e o resultado para soluções fracas segue por densidade.

Pela Observação 3.2, é suficiente provar que existem T_0 e $C \equiv C(T_0, R)$, tais que $E_U(0) \leq R$, implica em

$$\begin{aligned} E_U(0) \;\; &\leq \;\; C\left(\frac{k_1}{2}\int_0^T\int_0^\infty(-g'(s))\int_{\Omega_1}|\nabla\eta^t(s)|^2dxdsdt + \int_0^T\int_{\Omega_1}b(x)|u_t(t)|^2dxdt\right. \\ &\quad \left. + \int_0^T\int_{\Omega_2}b(x)|v_t(t)|^2dxdt\right) \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

para todo $T > T_0$ e o faremos argumentando por contradição.

Para simplificar a notação, no que segue, indicaremos as derivadas u_t e v_t por u' e v', respectivamente.

Suponhamos que (3.2.7) não se verifica. Então, o argumento de contradição nos fornece a existência de $T > T_0 > 0$ e uma sequência de soluções $((u_n, v_n), \eta_n) = U_n$ de (2.2.8), tais que

$$E_{U_n}(0) \leq R, \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.2.8}$$

e

$$\frac{E_{U_n}(0)}{\frac{k_1}{2}\int_0^T\int_0^\infty -g'(s)\int_{\Omega_1}|\nabla\eta_n^t(s)|^2dxdsdt + \int_0^T\int_{\Omega_2}b(x)|v_n'(t)|^2dxdt + \int_0^T\int_{\Omega_1}b(x)|u_n'(t)|^2dxdt} \longrightarrow \infty, \tag{3.2.9}$$

em que E_{U_n} é a energia definida em (3.0.1) associada ao problema (2.2.8). A convergência (3.2.9), implica em

$$\frac{\frac{k_1}{2}\int_0^T\int_0^\infty(-g'(s))\int_{\Omega_1}|\nabla\eta_n^t(s)|^2dxdsdt+\int_0^T\int_{\Omega_2}b(x)|v_n'(t)|^2dxdt+\int_0^T\int_{\Omega_1}b(x)|u_n'(t)|^2dxdt}{E_{U_n}(0)}\longrightarrow 0. \tag{3.2.10}$$

Da convergência (3.2.10) e da limitação (3.2.8), concluímos
$E_{U_n}(0)\frac{\frac{k_1}{2}\int_0^T\int_0^\infty(-g'(s))\int_{\Omega_1}|\nabla\eta_n^t(s)|^2dxdsdt+\int_0^T\int_{\Omega_1}b(x)|u_n'(t)|^2dxdt+\int_0^T\int_{\Omega_2}b(x)|v_n'(t)|^2dxdt}{E_{U_n}(0)}\longrightarrow 0,$
ou seja,

$$\frac{k_1}{2}\int_0^T\int_0^\infty(-g'(s))\int_{\Omega_1}|\nabla\eta_n^t(s)|^2dxdsdt+\int_0^T\int_{\Omega_1}b(x)|u_n'(t)|^2dxdt+ \\ \int_0^T\int_{\Omega_2}b(x)|v_n'(t)|^2dxdt\longrightarrow 0, \tag{3.2.11}$$

quando $n\to\infty$. Da hipótese **H2**, temos

$$g'(s)\leq -cg(s),\ \ \forall s\geq 0.$$

Logo,

$$\frac{k_1}{2}\int_0^T\int_0^\infty g(s)\int_{\Omega_1}|\nabla\eta_n^t(s)|^2dxdsdt\leq\frac{1}{c}\frac{k_1}{2}\int_0^T\int_0^\infty(-g'(s))\int_{\Omega_1}|\nabla\eta_n^t(s)|^2dxdsdt\longrightarrow 0,$$

donde,

$$\eta_n\longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0,T;\mathcal{M}). \tag{3.2.12}$$

Por outro lado, do fato que a energia é não crescente e da limitação (3.2.8), obtemos $E_{U_n}(t)\leq E_{U_n}(0)\leq R$, $\forall t>0$ e, portanto,

$$\frac{1}{2}\left[\int_{\Omega_1}|u_n'(t)|^2dx+\int_{\Omega_2}|v_n'(t)|^2dx+k_1\int_0^\infty g(s)\int_{\Omega_1}|\nabla\eta_n^t(s)|^2dxds\right. \\ \left.+\tilde{k}\int_{\Omega_1}|\nabla u_n(t)|^2dx+k_2\int_{\Omega_2}|\nabla v_n(t)|^2dx\right]=E_{U_n}(t)\leq R.$$

Donde,

$$\|(u_n'(t),v_n'(t))\|_{\mathbb{L}^2}^2\leq R \text{ e } \|(u_n(t),v_n(t))\|_{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}}^2\leq R,\ \ \forall t\geq 0.$$

Logo, existe uma subsequência de $\{(u_n,v_n)\}_n$, que continuaremos denotando por $\{(u_n,v_n)\}_n$, e $(u,v)\in L^\infty(0,T;\mathbb{H}^1_{\Gamma_1})$, tais que

$$(u_n',v_n')\overset{*}{\rightharpoonup}(u',v') \text{ fraco-estrela em } L^\infty(0,T;\mathbb{L}^2) \tag{3.2.13}$$

$$(u_n, v_n) \overset{*}{\rightharpoonup} (u, v) \text{ fraco-estrela em } L^\infty(0, T; \mathbb{H}^1_{\Gamma_1}) \tag{3.2.14}$$

e, do Teorema de Aubin-Lions (Teorema 1.10),

$$(u_n, v_n) \longrightarrow (u, v) \text{ forte em } L^2(0, T; \mathbb{L}^2). \tag{3.2.15}$$

Temos duas possibilidades a considerar para (u, v), sendo elas:$(u, v) \neq 0$ ou $(u, v) = 0$. Analisemos ambos os casos.

Caso I: Suponhamos que $(u, v) \neq 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $U_n = ((u_n, v_n), \eta_n)$ é a solução regular do seguinte problema

$$\begin{cases} u_n'' - \tilde{k}\Delta u_n - k_1 \displaystyle\int_0^\infty g(s)\Delta\eta_n(s)\, ds + b(x)u_n' = 0 \ \text{ em } \Omega_1 \times (0, \infty), \\ \eta_{n,t} + \eta_{n,s} = u_n' \ \text{ em } \Omega_1 \times (0, \infty), \\ v_n'' - k_2\Delta v_n + b(x)v_n' = 0 \ \text{ em } \Omega_2 \times (0, \infty), \\ u_n = 0 \ \text{ sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \eta_n = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \times (0, \infty) \\ u_n = v_n \ \text{ sobre } \Gamma_2 \times (0, \infty) \\ k_2 \dfrac{\partial v_n}{\partial \nu} = \tilde{k}\dfrac{\partial u_n}{\partial \nu}(t) + k_1 \displaystyle\int_0^\infty g(s)\dfrac{\partial \eta_n}{\partial \nu}(s)\, ds \ \text{ sobre } \Gamma_2 \times (0, \infty), \\ u_n(0) = u_0^n \text{ e } u_n'(0) = u_1^n \text{ em } \Omega_1 \\ v_n(0)) = v_0^n \text{ e } v_n'(0) = v_1^n \text{ em } \Omega_1 \\ \eta_n^0(s) = \eta_0(s) \text{ em } \Omega_1, s \in (0, \infty) \text{ e } \eta_n^t(0) = 0 \text{ em } \Omega_1, t \in (0, \infty). \end{cases} \tag{3.2.16}$$

Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Então, φ pode ser reescrita como

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1 = \varphi|_{\Omega_1} \text{ em } \Omega_1 \\ \varphi_2 = \varphi|_{\Omega_2} \text{ em } \Omega_2 \end{cases} = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{L}^2.$$

Multiplicando a segunda e a terceira equações de (3.2.16) por $\theta\varphi$, em que $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e $(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, integrando em $L^2(0, T; \mathbb{L}^2)$, utilizando integração por partes e usando a condição de transmissão sobre Γ_2 da sexta equação de (3.2.16), obtemos

$$\begin{aligned} -\int_0^T \int_{\Omega_1} u_n'\theta'\varphi_1 dxdt + \tilde{k}\int_0^T \int_{\Omega_1} \nabla u_n \nabla(\theta\varphi_1) dxdt + \int_0^T \int_{\Omega_1} b(x)u_n'\theta\varphi_1 dxdt \\ + k_1 \int_0^T \int_0^\infty g(s) \int_{\Omega_1} \nabla\eta_n(s)\nabla(\theta\varphi_1) dxdsdt - \int_0^T \int_{\Omega_2} v_n'\theta'\varphi_2 dxdt \\ + k_2 \int_0^T \int_{\Omega_2} \nabla v_n \nabla(\theta\varphi_2) dxdt + \int_0^T \int_{\Omega_2} b(x)v_n'\theta\varphi_2 dxdt = 0. \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

Agora, de (3.2.13) e (3.2.14), temos que

$$-\int_0^T ((u_n', v_n'), (\varphi_1, \varphi_2))_{\mathbb{L}^2}\theta' dt \longrightarrow -\int_0^T ((u', v'), (\varphi_1, \varphi_2))_{\mathbb{L}^2}\theta' dt$$

e

$$\int_0^T ((u_n, v_n), (\varphi_1, \varphi_2))_{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}}\theta dt \longrightarrow -\int_0^T ((u, v), (\varphi_1, \varphi_2))_{\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}}\theta dt.$$

Mais além, de (3.2.11) e de (3.2.12) , temos que

$$\int_0^T \int_0^\infty g(s) \int_{\Omega_1} \nabla\eta_n(s)\nabla(\theta\varphi_1) dxdsdt \longrightarrow 0,$$

e

$$\int_0^T \int_{\Omega_1} b(x)u_n'\theta\varphi_2 dxdt, \quad \int_0^T \int_{\Omega_2} b(x)v_n'\theta\varphi_2 dxdt \longrightarrow 0.$$

Portanto, para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} -\int_0^T \int_{\Omega_1} u'\theta'\varphi_1 dxdt + \tilde{k}\int_0^T \int_{\Omega_1} \nabla u\nabla(\theta\varphi_1) dxdt \\ -\int_0^T \int_{\Omega_2} v'\theta'\varphi_2 dxdt + k_2\int_0^T \int_{\Omega_2} \nabla v\nabla(\theta\varphi_2) dxdt = 0. \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Por outro lado, considerando $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $\varphi \equiv (0, \varphi_2)$, onde $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_2)$. Segue de (3.2.18), em particular, que

$$-\int_0^T \int_{\Omega_2} v'\theta'\varphi_2 dxdt + k_2\int_0^T \int_{\Omega_2} \nabla v\nabla(\theta\varphi_2) dxdt = 0,$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_2)$. Logo,

$$v'' - k_2\Delta v = 0 \text{ em } L^2(0,T; H^{-1}(\Omega_2)). \tag{3.2.19}$$

Analogamente, considerando $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $\varphi = (\varphi_1, 0)$ com $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, obtemos

$$u'' - \tilde{k}\Delta u = 0 \text{ em } L^2(0,T; H^{-1}(\Omega_1)). \tag{3.2.20}$$

Ainda, como $b(x) \geq b_0 > 0$ em ω, temos, de (3.2.11), que

$$v_n' \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0,T; L^2(\omega_2)), \tag{3.2.21}$$

em que $\omega_2 = \omega \cap \Omega_2$ e então $v' = 0$ quase sempre em $\omega_2 \times (0, \infty)$.

Agora, definindo para cada $t \geq 0$,

$$w_n(t) = (1 - k_0)u_n(t) + \int_0^\infty g(s)\eta_n^t(s) ds \in L^2(\Omega_1), \tag{3.2.22}$$

temos

$$w_n'(t) = (1-k_0)u_n'(t) + \int_0^\infty g(s)\eta_{n,t}^t(s)ds$$

e, da segunda equação de (3.2.16), segue que

$$\begin{aligned} w_n'(t) &= (1-k_0)u_n'(t) + \int_0^\infty g(s)(u_n'(t) - \eta_{n,s}^t(s))ds \\ &= u_n'(t) - \int_0^\infty g(s)\eta_{n,s}^t(s)ds \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

uma vez que $k_0 = \int_0^\infty g(s)ds$. Como,

$$\int_0^\infty g(s)\eta_{n,s}^t(s)ds = -\int_0^\infty g'(s)\eta_n^t(s)ds$$

e, pela desigualdade de Poincaré, existe $C > 0$ tal que

$$\|\eta_n^t(s)\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C\|\eta_n^t(s)\|_V, \ \forall s, t \geq 0$$

obtemos, da desigualdade acima e de (3.2.11), que

$$\int_0^\infty (-g'(s))\|\eta_n^t(s)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 ds \leq C\int_0^\infty (-g'(s))\|\eta_n^t(s)\|_V^2 ds \longrightarrow 0.$$

Portanto,

$$\int_0^\infty g(s)\eta_{n,s}^t(s)ds \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega_1)). \tag{3.2.24}$$

Consequentemente, de (3.2.23) decorre que

$$w_n' \rightharpoonup u' \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega_1)) \tag{3.2.25}$$

e, de (3.2.22), obtemos

$$w_n \longrightarrow (1-k_0)u \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega_1)). \tag{3.2.26}$$

Das convergências (3.2.25) e (3.2.26), segue que

$$w_n' \longrightarrow (1-k_0)u' \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega_1)). \tag{3.2.27}$$

Logo, de (3.2.25) e (3.2.27), e da unicidade do limite em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega_1))$, concluímos que

$$u' = (1-k_0)u' \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega_1)),$$

ou seja,

$$k_0 u' = 0 \text{ quase sempre em } (0,T)\times\Omega_1.$$

Como $k_0 \neq 0$, segue que

$$u' = 0 \text{ quase sempre em}(0,T) \times \Omega_1. \tag{3.2.28}$$

Agora, derivando a expressão (3.2.19) com respeito a t e denotando $z = v'$, obtemos

$$z'' - k_2 \Delta z = 0 \text{ em } H^{-1}(0,T; H^{-1}(\Omega_2)).$$

Considerando a convergência (3.2.21) e usando que $v = u = 0$ sobre Γ_2, obtemos

$$\begin{cases} z'' - k_2 \Delta z = 0 \text{ em } (0,T) \times \Omega_2, \\ z = 0 \text{ em } (0,T) \times \omega_2, \\ z = 0 \text{ sobre } (0,T) \times \Gamma_2. \end{cases} \tag{3.2.29}$$

O Teorema de Unicidade de Holmgreen [Para detalhes, ver [30], pág. 83] garante que a única solução para o problema acima é $z \equiv 0$, ou seja,

$$v' \equiv 0 \text{ quase sempre em } (0,T) \times \Omega_2. \tag{3.2.30}$$

De (3.2.19), (3.2.20), (3.2.28) e (3.2.30), obtemos

$$-\tilde{k}\Delta u = 0 \text{ em } \Omega_1 \times (0,T) \qquad \text{e} \qquad -k_2 \Delta v = 0 \text{ em } \Omega_2 \times (0,T).$$

Logo, o par (u,v) possui regularidade suficiente para considerar o seguinte

$$\begin{aligned} 0 &= ((-\tilde{k}\Delta u, -k_2 \Delta v), (u,v))_{\mathbb{L}^2} \\ &= \tilde{k}\|\nabla u(t)\|_1^2 + k_2 \|\nabla v(t)\|_2^2 + \left\langle k_2 \frac{\partial v}{\partial \nu}(t) - \tilde{k}\frac{\partial u}{\partial \nu}(t), u(t) \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2) \times H^{1/2}(\Gamma_2)} \end{aligned} \tag{3.2.31}$$

em que a última igualdade decorre da fórmula de Green.

Porém, (u,v) é a única solução fraca do problema (conforme Seção 1.3 - Capítulo 1)

$$\begin{cases} u'' - \tilde{k}\Delta u = 0 \text{ em } \Omega_1 \times (0,T) \\ v'' - k_2 \Delta v = 0 \text{ em } \Omega_2 \times (0,T) \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \times (0,T) \\ u = v \text{ sobre } \Gamma_2 \times (0,T) \\ k_2 \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \tilde{k}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \text{ sobre } \Gamma_2 \times (0,T). \end{cases}$$

Portanto, de (3.2.31), segue que

$$0 = \tilde{k}\|\nabla u(t)\|_1^2 + k_2 \|\nabla v(t)\|_2^2$$

para quase todo $t > 0$, donde $(u, v) = 0$. E a contradição é obtida.

Caso II: $(u, v) = 0$.

Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_n = (E_{U_n}(0))^{1/2}, \ \ (w_n, z_n) = \frac{1}{\alpha_n}(u_n, v_n) \text{ e } \xi_n = \frac{1}{\alpha_n}\eta_n.$$

Nesse caso, $W_n = ((w_n, z_n), \xi_n^t)$ é solução do problema

$$\begin{cases} w_n'' - \tilde{k}\Delta w_n - k_1 \displaystyle\int_0^\infty g(s)\Delta\xi_n^t(s)\, ds + b(x)w_n' = 0 \ \text{ em } \Omega_1 \times (0,\infty), \\ \xi_{n,t} + \xi_{n,s} = w_n' \ \text{ em } \Omega_1 \times (0,\infty), \\ z_n'' - k_2\Delta z_n + b(x)z_n' = 0 \ \text{ em } \Omega_2 \times (0,\infty), \end{cases} \tag{3.2.32}$$

com condições de fronteira

$$\begin{cases} w_n = 0 \ \text{ sobre } \Gamma_1 \times (0,\infty) \\ \xi_n^t = 0 \ \text{ sobre } \Gamma_1 \times (0,\infty) \times (0,\infty) \\ w_n = z_n \ \text{ sobre } \Gamma_2 \times (0,\infty) \\ k_2 \dfrac{\partial z_n}{\partial \nu} = \tilde{k}\dfrac{\partial w_n}{\partial \nu} + k_1 \displaystyle\int_0^\infty g(s)\dfrac{\partial \xi_n}{\partial \nu}(s)\, ds \ \text{ sobre } \Gamma_2 \times (0,\infty), \end{cases}$$

e condições iniciais

$$\begin{cases} w_n(0) = \dfrac{1}{\alpha_n}u_0^n, w_n'(0) = \dfrac{1}{\alpha_n}u_1^n \text{ em } \Omega_1, \\ z_n(0) = \dfrac{1}{\alpha_n}v_0^n, z_n'(0) = \dfrac{1}{\alpha_n}v_1^n \text{ em } \Omega_2, \\ \xi_n^0(s) = \dfrac{1}{\alpha_n}\eta_0^n(s) \text{ em } \Omega_1, s \in (0,\infty), \\ \xi_n^t(0) = 0 \text{ em } \Omega_1, t \in (0,\infty). \end{cases}$$

Observe que

$$E_{W_n}(0) = 1, \ \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{3.2.33}$$

De fato, para $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} E_{W_n}(t) &= \frac{1}{2}\left[\int_{\Omega_1} |w_n'(t)|^2 dx + \int_{\Omega_2} |z_n'(t)|^2 dx + k_1 \int_0^\infty g(s) \int_{\Omega_1} |\nabla \xi_n^t|^2 dx ds \right. \\ &\quad \left. + \tilde{k} \int_{\Omega_1} |\nabla w_n(t)|^2 dx + k_2 \int_{\Omega_2} |\nabla z_n(t)|^2 dx \right] \\ &= \frac{1}{\alpha_n^2}\left\{\frac{1}{2}\left[\int_{\Omega_1} |u_n'(t)|^2 dx + \int_{\Omega_2} |v_n'(t)|^2 dx + k_1 \int_0^\infty g(s) \int_{\Omega_1} |\nabla \eta_n^t|^2 dx ds \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \tilde{k} \int_{\Omega_1} |\nabla u_n(t)|^2 dx + k_2 \int_{\Omega_2} |\nabla v_n(t)|^2 dx \right]\right\} \\ &= \frac{1}{\alpha_n^2} E_{U_n}(t). \end{aligned} \tag{3.2.34}$$

Portanto, em $t=0$,

$$E_{W_n}(0)=\frac{1}{\alpha_n^2}E_{U_n}(0)=1,\ \text{para todo } n\in\mathbb{N}. \tag{3.2.35}$$

Ainda, como $E_{W_n}(t)\le E_{W_n}(0)=1$ para $t\ge 0$, temos

$$(w_n',z_n')\overset{*}{\rightharpoonup}(w',z') \text{ fraco-estrela em } L^\infty(0,T;\mathbb{L}^2) \tag{3.2.36}$$

$$(w_n,z_n)\overset{*}{\rightharpoonup}(w,z) \text{ fraco-estrela em } L^\infty(0,T;\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}). \tag{3.2.37}$$

Logo, do Teorema de Aubin-Lions (Teorema 1.10), obtemos

$$(w_n,z_n)\longrightarrow(w,z) \text{ forte em } L^2(0,T;\mathbb{L}^2). \tag{3.2.38}$$

Observemos que, de (3.2.10), temos

$$\frac{1}{\alpha_n^2}\Bigg(\int_0^T\int_0^\infty(-g'(s))\int_{\Omega_1}|\nabla\eta_n^t(s)|^2dxdsdt+\int_0^T\int_{\Omega_1}b(x)|u_n'|^2dxdt \\ +\int_0^T\int_{\Omega_2}b(x)|v_n'|^2dxdt\Bigg)\longrightarrow 0$$

ou seja,

$$\int_0^T\int_0^\infty(-g'(s))\int_{\Omega_1}|\nabla\xi_n^t(s)|^2dxdsdt+\int_0^T\int_{\Omega_1}b(x)|w_n'|^2dxdt \\ +\int_0^T\int_{\Omega_2}b(x)|z_n'|^2dxdt\longrightarrow 0, \tag{3.2.39}$$

o que implica em

$$\xi_n^t\longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0,T;\mathcal{M}) \text{ e } z_n'\to 0 \text{ em } L^2(0,T;L^2(\omega_2)). \tag{3.2.40}$$

Definamos

$$\overline{w}_n(t)=(1-k_0)w_n(t)+\int_0^\infty g(s)\xi_n^t(s)ds$$

e, procedendo de forma análoga a (3.2.22) - (3.2.30), concluímos que

$$w'\equiv 0 \text{ quase sempre em } (0,T)\times\Omega_1 \text{ e } z'\equiv 0 \text{ quase sempre em } (0,T)\times\Omega_2$$

e, similarmente, concluímos que $(w,z)=0$ q.s. em $\Omega\times(0,T)$.

De (3.2.36) - (3.2.38), decorre que

$$(w_n,z_n)\longrightarrow(0,0) \text{ forte em } L^2(0,T;\mathbb{L}^2) \tag{3.2.41}$$

$$(w_n, z_n) \overset{*}{\rightharpoonup} (0,0) \text{ fraco-estrela em } L^\infty(0,T;\mathbb{H}^1_{\Gamma_1}) \tag{3.2.42}$$

$$(w'_n, z'_n) \overset{*}{\rightharpoonup} (0,0) \text{ fraco-estrela em } L^\infty(0,T;\mathbb{L}^2) \tag{3.2.43}$$

Agora, sejam $\phi_n(x,t) = \int_0^\infty g(s)\xi_n^t(x,s)ds \in L^2(0,T;V)$, $\theta \in C_0^\infty(0,T)$ tal que

$$0 \leq \theta(t) \leq 1, \theta(t) = 1 \text{ em } (\varepsilon, T-\varepsilon) \text{ e } supp\theta \subset (0,T) \tag{3.2.44}$$

e $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega_1})$ tal que

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1, \varphi(x) = 1 \text{ em } \Omega_1 \setminus \omega_1, \omega_1 = \Omega_1 \cap \omega \text{ e } \varphi(x) = 0 \text{ em } V(\omega_1), \tag{3.2.45}$$

em que $V(\omega_1)$ é uma vizinhança de Γ_2 tal que $V(\omega_1) \subset \Omega_1$.

Multiplicando a primeira equação de (3.2.32) por $\theta\varphi\phi_n$, usando integração por partes e a fórmula de Green, obtemos

$$-\underbrace{\int_0^T\int_{\Omega_1} w'_n\theta\phi'_n\varphi dxdt}_{J_{1n}} - \underbrace{\int_0^T\int_{\Omega_1} w'_n\theta'\phi_n\varphi dxdt}_{J_{2n}} + \underbrace{\tilde{k}\int_0^T\int_{\Omega_1} \nabla w_n\nabla\varphi\phi_n\theta dxdt}_{J_{3n}}$$
$$+\underbrace{\tilde{k}\int_0^T\int_{\Omega_1} \nabla w_n\nabla\phi_n\varphi\theta dxdt}_{J_{4n}} + \underbrace{\int_0^T\int_{\Omega_1} b(x)w'_n\theta\varphi\phi_n dxdt}_{J_{5n}}$$
$$\underbrace{+k_1\int_0^T\int_0^\infty g(s)\int_{\Omega_1}\nabla\xi_n\nabla\varphi\phi_n\theta dxdsdt}_{J_{6n}} + \underbrace{k_1\int_0^T\int_0^\infty g(s)\int_{\Omega_1}\nabla\xi_n\nabla\phi_n\varphi\theta dxdsdt}_{J_{7n}} = 0.$$

Observe que, de (3.2.40), temos que $\phi_n \to 0$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega_1))$ daí e de (3.2.43), temos que

$$J_{2n} \longrightarrow 0.$$

Ainda, de (3.2.42), (3.2.40) e (3.2.39), obtemos

$$J_{3n}, J_{4n} \text{ e } J_{5_n} \longrightarrow 0.$$

Também,

$$|J_{6n}| \leq k_1\int_0^T\int_0^\infty g(s)\int_0^\infty g(\tau)\left|\int_{\Omega_1}\nabla\xi_n(s)\cdot\nabla\varphi\xi_n(\tau)dx\right||\theta|d\tau dsdt. \tag{3.2.46}$$

No entanto, temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Omega_1} \nabla\xi_n(s)\cdot\nabla\varphi\xi_n^t(\tau)dx\right| &= \left|\sum_j\int_{\Omega_1}\frac{\partial\xi_n^t}{\partial x_j}(s)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\xi_n^t(\tau)dx\right| \\
&= \left|\sum_j\int_{\Omega_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\xi_n^t}{\partial x_j}(s)\xi_n^t(\tau)dx\right| \\
&\leq \sum_j\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right|\left|\frac{\partial\xi_n^t}{\partial x_j}(s)\xi_n^t(\tau)\right|dx \qquad (3.2.47) \\
&\leq C_\varphi\sum_j\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\xi_n^t}{\partial x_j}(s)\xi_n^t(\tau)\right|dx
\end{aligned}$$

onde, a última desigualdade segue do fato que $\varphi\in C^\infty(\overline{\Omega}_1)$.

E, da desigualdade de Young, segue que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Omega_1}\nabla\xi_n^t(s)\cdot\nabla\varphi\xi_n^t(\tau)dx\right| &\leq \frac{C_\varphi}{2}\sum_j\left[\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\xi_n^t}{\partial x_j}(s)\right|^2+|\xi_n^t(\tau)|^2\right]dx \qquad (3.2.48) \\
&= \frac{C_\varphi}{2}\|\nabla\xi_n^t(s)\|^2_{L^2(\Omega_1)}+NC_\varphi\|\xi_n^t(\tau)\|^2_{L^2(\Omega_1)}.
\end{aligned}$$

De (3.2.46) - (3.2.48) obtemos

$$\begin{aligned}
|J_{6n}| &\leq k_1\int_0^T\int_0^\infty g(s)\int_0^\infty g(\tau)\left[\frac{C_\varphi}{2}\|\nabla\xi_n^t(s)\|^2_{L^2(\Omega_1)}+NC_\varphi\|\xi_n^t(\tau)\|^2_{L^2(\Omega_1)}\right]|\theta|d\tau dsdt \\
&= k_1k_0C_\varphi\left[\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^\infty g(s)\|\nabla\xi_n^t(s)\|^2_{L^2(\Omega_1)}|\theta|dsdt+N\int_0^T\int_0^\infty g(\tau)\|\xi_n^t(\tau)\|^2_{L^2(\Omega_1)}|\theta|d\tau dt\right] \\
&\longrightarrow 0
\end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$|J_{7n}|\leq k_1Nk_0C_\varphi\int_0^T\int_0^\infty g(s)\int_{\Omega_1}|\nabla\xi_n^t(s)|^2|\theta|dxdsdt\longrightarrow 0.$$

Assim, concluímos que

$$J_{in}\longrightarrow 0,\ \text{para } i=2,...,7.$$

Consequentemente,

$$\lim_{n\to\infty}J_{1n}=0.$$

Contudo, da segunda equação de (3.2.32) temos que

$$\xi_{n,t}^t+\xi_{n,s}^t=w_n'.$$

Logo,

$$\begin{aligned} J_{1n} &= \int_0^T \int_{\Omega_1} w_n' \theta \phi_n' \varphi dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^\infty g(s) \int_{\Omega_1} w_n' \theta \xi_{n,t}^t \varphi dx ds dt \\ &= \int_0^T \int_0^\infty g(s) \int_{\Omega_1} |w_n'|^2 \theta \varphi dx ds dt - \int_0^T \int_0^\infty g(s) \int_{\Omega_1} w_n' \theta \xi_{n,s}^t \varphi dx ds dt \\ &= k_0 \int_0^T \int_{\Omega_1} |w_n'|^2 \theta \varphi dx dt - \int_0^T \int_0^\infty g(s) \int_{\Omega_1} w_n' \theta \xi_{n,s}^t \varphi dx ds dt. \end{aligned}$$

Procedendo como na prova de (3.2.24), obtemos que

$$\int_0^\infty g(s) \xi_{n,s}^t ds \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega_1)).$$

Da convergência acima e de (3.2.43) temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_0^\infty g(s) \int_{\Omega_1} w_n' \theta \xi_{n,s} \varphi dx ds dt = 0,$$

donde

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_{\Omega_1} |w_n'|^2 \theta \varphi dx dt = 0. \tag{3.2.49}$$

Assim, das hipóteses (3.2.44) e (3.2.45), sobre θ e φ, respectivamente, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \int_{\Omega_1 \setminus \omega_1} |w_n'|^2 dx dt = 0. \tag{3.2.50}$$

Da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_{\Omega_1 \setminus \omega_1} |w_n'|^2 dx dt = 0. \tag{3.2.51}$$

Da convergência (3.2.51), de (3.2.39) e da hipótese (3.1.2), concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_{\Omega_1} |w_n'|^2 dx dt = 0. \tag{3.2.52}$$

A fim de conseguirmos a contradição desejada, no que segue, vamos provar que

$$z_n' \longrightarrow 0 \text{ forte em } L^2((0,T)\times\Omega_2). \tag{3.2.53}$$

Para obter a convergência (3.2.53) utilizaremos resultados devidos a Gérard [24] sobre medida de defeito microlocal, os quais foram apresentados na seção 1.4.

Notemos que, de (3.2.39), segue que

$$z_n' \longrightarrow 0 \text{ forte em } L^2((0,T)\times\omega_2) \tag{3.2.54}$$

Seja μ_2 a medida de defeito associada a $\{z'_n\}$ em $L^2((0,T)\times\Omega_2)$, garantida pelo Teorema 1.28. A convergência forte de $\{z'_n\}_n$ em $L^2((0,T)\times\omega_2)$, implica em $\mu_2 = 0$ em $(0,T)\times\omega_2$, ou seja,

$$supp\mu_2 \subset \Omega_2 \setminus \omega_2.$$

De fato, da Observação 1.30, considerando $\Omega = \omega_2 \times (0,T)$, segue que existe uma subsequência de $\{z'_n\}_n$, ainda denotada por $\{z'_n\}_n$, tal que

$$\int_0^T \int_{\omega_2} \zeta(x,t)|z'_n|^2 dxdt \longrightarrow \int_{\omega_2\times(0,T)\times S^{N-1}} \zeta(x,t)d\mu_2(x,t,\delta)$$

para toda $\zeta \in C_0^\infty(\omega_2 \times (0,T))$, o que acarreta, graças a (3.2.54), em $\mu_2 = 0$ em $\omega_2 \times (0,T)$.

Por outro lado, de (3.2.32) e (3.2.39), concluímos que

$$\Box z_n = z''_n - k_2\Delta z_n = -b(x)z'_n \longrightarrow 0 \text{ em } L^2((0,T) \times \Omega_2). \tag{3.2.55}$$

Portanto,

$$\partial_t \Box z_n = \Box z'_n \longrightarrow 0 \text{ forte em } H^{-1}_{loc}((0,T) \times \Omega_2). \tag{3.2.56}$$

A convergencia (3.2.56) é equivalente, pelo Teorema 1.31, a condição

$$supp(\mu_2) \subset \{(t,x,\tau,\xi); \tau^2 = k_2\|\xi\|^2\},$$

e, com isso, podemos concluir que o $supp(\mu_2)$ é a união de curvas que são as curvas bicaracterísticas do símbolo principal $p(\tau,\xi) = \tau^2 - k_2\|\xi\|^2$ associado ao operador

$$Pu = \Box u = \partial_{tt}u - k_2\Delta u, \ \forall u \in \mathcal{D}(\Omega_2).$$

Assim, μ_2 se propaga ao longo das bicaracterísticas deste operador, isso significa, em particular, que se $w_0 = (t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) \notin supp(\mu_2)$, então toda bicaracterística que sai de w_0 está fora de $supp(\mu_2)$. Agora, como ω_2 controla Ω_2, então, para todo $T > T_0$, todo raio bicaracterístico em Ω_2 entra na região de ω_2 antes do tempo T_0 e como $\mu_2 \equiv 0$ em $\omega_2 \times (0,T)$, segue, então que, $\mu_2 \equiv 0$ em $\Omega_2 \times (0,T)$. Isso nos leva a concluir, por propagação da medida, que

$$z'_n \longrightarrow 0 \text{ forte em } L^2((0,T) \times \Omega_2). \tag{3.2.57}$$

Finalmente, tomando $\theta \in C_0^\infty(0,T)$ como em (3.2.44) e multiplicando a primeira e a terceira equações de (3.2.32) por θw_n e θz_n, respectivamente, integrando por partes, utilizando a fórmula de Green e as igualdades em Γ_2, obtemos

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \theta'(t)\int_{\Omega_1} w_n w_n'\,dxdt - \int_0^T \theta(t)\int_{\Omega_1} |w_n'|^2\,dxdt\\
&+\tilde{k}\int_0^T \theta(t)\int_{\Omega_1} |\nabla w_n|^2\,dxdt + k_1\int_0^T \theta(t)\int_0^\infty g(s)\int_{\Omega_1}\nabla\zeta_n^t\cdot\nabla w_n\,dxdsdt\\
&+\int_0^T \theta(t)\int_{\Omega_1} b(x)w_n' w_n\,dxdt - \int_0^T \theta'(t)\int_{\Omega_2} z_n z_n'\,dxdt - \int_0^T \theta(t)\int_{\Omega_2} |z_n'|^2\,dxdt\\
&+\int_0^T \theta(t)\int_{\Omega_2} b(x)z_n' z_n\,dxdt + k_2\int_0^T \theta(t)\int_{\Omega_2} |\nabla z_n|^2\,dxdt\\
&= N_{1,n} + \cdots + N_{9,n} = 0.
\end{aligned}$$

Observe que, pelas convergências em (3.2.36) - (3.2.38), de (3.2.52) e (3.2.57), concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} N_{1,n} = \lim_{n\to\infty} N_{2,n} = \lim_{n\to\infty} N_{4,n} = \cdots = \lim_{n\to\infty} N_{8,n} = 0,$$

logo,

$$\lim_{n\to\infty}(N_{3,n} + N_{9,n}) = 0.$$

Consequentemente,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_\varepsilon^{T-\varepsilon}\int_{\Omega_1}|\nabla w_n|^2 dt + \int_\varepsilon^{T-\varepsilon}\int_{\Omega_2}|\nabla z_n|^2 dt\right] = 0.$$

Portanto, da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^T\int_{\Omega_1}|\nabla w_n|^2 dt + \int_0^T\int_{\Omega_2}|\nabla z_n|^2 dt\right] = 0,$$

ou ainda,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\int_{\Omega_1}|\nabla w_n|^2 dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^T\int_{\Omega_2}|\nabla z_n|^2 dt = 0. \tag{3.2.58}$$

Agora, considerando E_{W_n} definido em (3.2.35), integrando E_{W_n} em $(0,T)$ e considerando as convergências (3.2.39), (3.2.53), (3.2.52) e (3.2.58), obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T E_{W_n}(t)dt = 0.$$

No entanto, a energia associada a (3.2.32) é não crescente, logo

$$\int_0^T E_{W_n}(t)dt \geq \int_0^T E_{W_n}(T)dt = TE_{W_n}(T).$$

Portanto,

$$0=\lim_{n\to\infty}\int_0^T E_{W_n}(t)dt\geq \lim_{n\to\infty} TE_{W_n}(T)\geq 0,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} E_{W_n}(T)=0.$$

De (3.2.4), temos que

$$\begin{aligned}E_{W_n}(T)-E_{W_n}(0) &= \frac{k_1}{2}\int_0^T\int_0^\infty g'(s)\int_{\Omega_1}|\nabla\xi_n^t(s)|^2dxdsdt-\int_0^T\int_{\Omega_1}b(x)|w_n'(t)|^2dxdt\\ &\quad -\int_0^T\int_{\Omega_2}b(x)|z_n'(t)|^2dxdt,\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}0=\lim_{n\to\infty}E_{W_n}(T) &= \lim_{n\to\infty}E_{W_n}(0)+\lim_{n\to\infty}\frac{k_1}{2}\int_0^T\int_0^\infty g'(s)\int_{\Omega_1}|\nabla\xi_n^t(s)|^2dxdsdt\\ &\quad -\lim_{n\to\infty}\int_0^T\int_{\Omega_1}b(x)|w_n'(t)|^2dxdt-\lim_{n\to\infty}\int_0^T\int_{\Omega_2}b(x)|z_n'(t)|^2dxdt.\end{aligned}$$

Como, por (3.2.39),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k_1}{2}\int_0^T\int_0^\infty g'(s)\int_{\Omega_1}|\nabla\xi_n^t(s)|^2dxdsdt=0=\lim_{n\to\infty}\int_0^T\int_{\Omega_1}b(x)|w_n'(t)|^2dxdt$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\int_{\Omega_2}b(x)|z_n'(t)|^2dxdt=0$$

e de (3.2.35)

$$\lim_{n\to\infty}E_{W_n}(0)=1,$$

temos

$$0=\lim_{n\to\infty}E_{W_n}(T)=1,$$

e a contradição é obtida.

Logo, (3.2.7) é verdade para a energia associada ao problema (2.2.8) sempre que tivermos dados regulares e, consequentemente,

$$E_U(t)\leq Ce^{-\gamma t}E_U(0),\forall t>T_0,$$

para toda solução regular de (2.2.8) com $E_U(0)<R$.

Agora, se $U_0\in\mathcal{H}$ e $U(t)$ é a solução de (2.2.8) com dado inicial U_0 tal que $E_U(0)<R$, então da densidade de $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ em $\mathcal{H}$, existe uma sequência de dados iniciais $U_0^n\in\mathcal{D}(\mathcal{L})$, tal que

$$U_0^n\longrightarrow U_0 \text{ em } \mathcal{H} \tag{3.2.59}$$

e a sequência correspondente de soluções de

$$\begin{cases} U_t^n(t) = \mathcal{L}U^n(t) \\ U^n(0) = U_0^n \end{cases}$$

é tal que $E_{U^n}(0) < R$. Mas,

$$U^n(t) = S(t)U_0^n, \text{ para todo } t \geq 0, n \in \mathbb{N}$$

em que $S(t)$ é o semigrupo associado a $\mathcal{L}$ e como $S(t)$ é fortemente contínuo, temos que

$$S(t)U_n^0 \longrightarrow S(t)U_0 \text{ em } \mathcal{H}, \text{ para todo } t \geq 0 \tag{3.2.60}$$

e $U(t) = S(t)U_0$ é a solução fraca do problema (2.2.8) com dado inicial U_0.

Ainda, temos, pela primeira parte, que

$$\|S(t)U_0^n\|_{\mathcal{H}}^2 = E_{U^n}(t) \leq Ce^{-\gamma t}E_{U^n}(0) = Ce^{-\gamma t}\|U_0^n\|_{\mathcal{H}}^2,$$

para todo $t > T_0$. Logo, pelas convergências (3.2.59) e (3.2.60), obtemos

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}}^2 \leq Ce^{-\gamma t}\|U_0\|_{\mathcal{H}}^2,$$

isto é,

$$E_U(t) \leq Ce^{-\gamma t}E_U(0),$$

para todo $t > T_0$.

Portanto, a energia associada ao problema (2.2.8) com dado inicial U_0 decai exponencialmente quando $t \to \infty$ e, consequentemente, o Teorema 3.3 é válido.

Bibliografia

[1] ALVES, M. S., MUÑOZ RIVERA, J.E., SEPÚLVEDA, O., VERA VILLAGRÁN.: The lack of exponential stability in certain transmission problems with localized Kelvin-Voigt dissipation. SIAM J. Appl. Math. 74 (2014), no. 2, 345-365.

[2] ALVES, M. S., MUÑOZ RIVERA, J.E., SEPÚLVEDA, O., VERA VILLAGRÁN., ZEGARRA GARAY, M. : The asymptotic behavior of the linear transmission problem in viscoelasticity, Math. Nachr., 287, No. 5-6 (2014), 483-497.

[3] ANDRADE, D.,FATORI, L.H., MUÑOZ RIVERA, J.E.: Nonlinear transmission problem with a dissipative boundary condition of memory type. Electron. J. Differ. Equ. 2006(53), 1-16 (2006)

[4] APPLEBY, J.A.D., FABRIZIO, M., LAZZARI, B., REYNOLDS, D.W.: On exponencial asymptotic stability in linear viscoelasticity. Math. Models Methods Appl. Sci. 16(10), 1677-1694 (2006)

[5] ARENDT, W.; BATTY, C.;HIEBER, M.; NEUBRANDER, F.,Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems. Monographs in Mathematics, v.96.Springer Basel AG , Washington D.C., 2001.

[6] BREZIS, H., Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations,1.ed, Springer, New York, 2011.

[7] BREZIS, H.; CAZENAVE, T., Nonlinear Evolution Equations. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1994.

[8] BURQ, G.; GÉRARD,P.,Contrôle Optimal des équations aux dérivées partielles, 2002. Disponível em: https://www.math.u-psud.fr/ nb/articles/coursX.pdf.

Acessado em: 19/09/2018

[9] BURQ, N., GÉRARD, P.: Condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte des ondes. (French) [a necessary and sufficient condition for the exact controllability of the wave equation]. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 325(7), 749-752 (1997)

[10] CARDOSO, F., VODEV, G.: Boundary stabilization of transmission problems. J. Math. Phys. 51, 023512 (2010)

[11] CAVALCANTI, M.M., COELHO, E. R. S., DOMINGOS CAVALCANTI, V.N.: Exponential Stability for a Transmission Problem of a Viscoelastic Wave Equation. V.N. Appl Math Optim (2018). https://doi.org/10.1007/s00245-018-9514-9

[12] CAVALCANTI, M.M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V.N., Iniciação à Teoria das distribuições e aos Espaços de Sobolev. Volume II, DMA/UEM, Maringá, 2000.

[13] CAVALCANTI, M., FATORI, L., MA TO , FU: Attractors for wave equations with degenerate memory. J. Differ. Equ. 260(1), 56-83 (2016)

[14] CONTI, M., MARCHINI, E.M., PATA, V.: A well posedness result for nonlinear viscoelastic equations with memory. Nonlinear Anal. 94, 206-216 (2004)

[15] CONTI, M., MARCHINI, E.M., PATA, V.: Global attractors for nonlinear viscoelastic equations with memory. Commun. Pure Appl. Anal. 15(5), 1893-1913 (2016)

[16] CONTI, M., MARCHINI, E.M., PATA, V.: Non classical diffusion with memory. Math. Meth. Appl. Sci. 38, 948-958 (2015)

[17] DAFERMOS, C. M. , Asymptotic stability in viscoelasticity. Arch. Rational Mech. Anal. v. 37, p. 297-308, 1970.

[18] DANESE, V., GEREDELI P., PATA, V.: Exponential attractors for abstract equations with memory and applications to viscoelasticity. Discret. Contin. Dyn. Syst. 35(7), 2881-2904 (2015)

[19] DAUTRAY, R.; LIONS, J. -L.,Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vol.2. Paris: Springer-Verlag, 1988.

[20] DEHMAN, B., LEBEAU, G., ZUAZUA, E.: Stabilization and control for the subcritical semilinear wave equation. Anna. Sci. Ec. Norm. Super. 36, 525-551 (2003)

[21] FABRIZIO, M.; GIORGI, C.; PATA, V., A new approach to equations with memory. Arch. Ration. Mech. Anal. v. 198, no. 1, p. 189-232, 2010.

[22] FERNANDÉZ SARE, H. D., MUÑOZ RIVERA, J. E. : Analyticity of transmission problem to thermoelastic plates, Quart. Appl. Math., 69 (2011), No. 1, 1-13.

[23] GEARHART, L.,Espectral theory for contraction semigroups on Hilbert Space . Trans. of the American Mathematical Society. v.236, p. 385-395, 1978.

[24] GÉRARD, P., Microlocal defect measures, Comm. Partial Differential Equations, v. 16, p. 1761-1794, 1991.

[25] GIORGI, C.; MARZOCCHI, A.; PATA, V., Asymptotic behavior of a semilinear problem in heat conduction with memory, NoDEA, v. 5, p. 333-354, 1998.

[26] GIORGI, C.; MUÑOZ RIVERA, J. E.; PATA, V., Global attractors for a semilinear hyperbolic equation in viscoelasticity, J. Math. Anal. Appl., v.260, p. 83-99, 2001.

[27] GOMES, A. M., Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução, 2 ed., Rio de Janeiro, IM-UFRJ, 2012.

[28] GRASSELLI, M.; PATA, V., Uniform attractors of nonautonomous systems with memory, in: A. Lorenzi, B. Ruf (Eds.), Evolution Equations, Semigroups and Functional Analysis, in: Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., v. 50, Birkhauser, Boston, 2002, pp. 155-178.

[29] GUESMIA, A.,MESSAUODI, S.A.: A general decay result for a viscoelastic equation in the presence of past and finite history memories. Nonlinear Anal. Real World Appl. 13, 476-485 (2012)

[30] JOHN, F., Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, 4. ed., Vol 1.New York: Springer, 1986.

[31] LAGNESE, J.E., Boundary controllability in problems of transmission for a class of second order hyperbolic systems. ESAIM: Control Optim. Calc. Var. 2, 343-357 (1997).

[32] LASIECKA, I.,MESSAOUDI, S.A., MUSTAFA, M.I.: Note on intrinsic decay rates for abstract wave equations with memory. J. Math. Phys. 54(3), 031504 (2013)

[33] LIONS, J.-L., Contrôlabilité excte Perturbations et Stabilisation de Systémes Distribués, Tome 1. Paris: Massom, 1988.

[34] LIONS, J.L., Équations aux dérivées partiel les interpolation, Volume I Euvres choisies de Jacques-Louis Lions. SMAI, EDP Sciences, Paris, 2003.

[35] LIONS, J. L., Quelques Méthodes de Résolution des Problémes aux Limites Non Linéaires. Paris: Dunod, 1969.

[36] LIONS, J.L.; MAGENES. E., Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications, Vol.1, Dunod, Paris,1968.

[37] LIU, W.: Stabilization and controllability for the transmission wave equation. IEEE Trans. Autom. Control 46(12), 1900-1907 (2001)

[38] LIU, K., LIU, Z.: Exponential decay of energy of vibrating strings with local viscoelasticity. ZAMP 53, 265-280 (2002)

[39] LIU, W., WILLIAMS, G.: The exponential stability of the problem of transmission of the wave equation. Bull. Austral. Math. Soc. 57(2), 305-327 (1998)

[40] LIU, Z.; ZHENG, S., Semigroups Associated with Dissipative Systems. Chapman & Hall/CRC, London, 1999.

[41] MUÑOZ RIVERA, J.E., NASO, M. G.: About asymptotic behavior for a transmission problem in hyperbolic thermoelasticity, Acta Appl. Math., (2007) 99, 1-27.

[42] MUÑOZ RIVERA, J.E., OQUENDO, H.P.: The transmission problem of viscoelastic waves. Acta Appl. Math. 62, 1-21 (2000)

[43] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA,M. M ., Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Eliticos Não Homogêneos), Editora IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

[44] PATA, V.: Stability and exponential stability in linear viscoelasticity. Milan J. Math. 77, 333-360 (2009)

[45] PAZY, A., Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1983.

[46] PRÜSS, J. , On the spectrum of C_0-semigroups. Transactions of the American Mathematical Society. v. 284(2), p. 847- 857, 1984.