UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

EWERTON DA SILVA LEMES

# Identidades Polinomiais com Involução de Álgebras de Incidência

Maringá-PR
2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Identidades Polinomiais com Involução de Álgebras de Incidência

Ewerton da Silva Lemes

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito para obtenção do título de Doutor em Matemática.
Área de concentração: Algébra.

Orientador: Prof. Dr. Ednei Aparecido Santulo Junior.

Maringá-PR, 26 de fevereiro de 2016

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela benção da vida, pelas oportunidades, pelo ânimo, pela força que me fizeram chegar até aqui.

Agradeço aos meu pais, Onésimo e Maria Odete, que desde quando iniciei a graduação, há 11 anos atrás, sempre estiveram ao meu lado, me ajudando nos momentos difíceis, se alegrando com cada passo dado, com cada conquista, me incentivando, me apoiando e me dando todo suporte necessário pra sempre seguir em frente.

Agradeço à minha noiva Larissa, uma pessoa maravilhosa que Deus permitiu que eu conhecesse nesse período do doutorado. Agradeço por todo seu apoio, sua motivação, sua amizade, seu amor, demonstrado em cada gesto e em cada palavra.

Agradeço aos amigos e irmãos da Igreja Evangélica Batista em Moradias Cabo Frio pelas orações e pelo ensino da palavra de Deus.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Ednei Aparecido Santulo Jr., que sempre me mostrou o caminho a seguir para que este trabalho fosse feito, compartilhando sempre seu conhecimento, com paciência e dedicação.

Agradeço aos professores da banca, Prof. Dr. Plamen, Prof. Dr. Dimas, Profa. Dra. Érica e Profa Dra. Rosali, pois contrubuíram com suas valiosas sugestões e correções nesta tese.

Agradeço aos professores do PMA-UEM que, com dedicação e comprometimento com o ensino, contribuíram muito para minha formação.

Agradeço aos meus amigos do curso de doutorado em Matemática. Não vou citar nomes para não ser injusto e me esquecer de alguém. Mas nesses 4 anos de curso a amizade de vocês foi muito importante. Guardarei sempre comigo a nossa amizade. Sempre vou lembrar de nossas conversas, das muitas risadas e dos momentos em que estudamos juntos.

Agradeço à Capes pelo apoio financeiro.

*"Os homens se tornaram cientistas por que esperavam haver leis na natureza, e esperavam haver leis na natureza, por que acreditavam num legislador."*

*C. S. Lewis*

# Resumo

Neste trabalho estudamos as identidades polinomiais com involução sobre uma álgebra de incidência $I(P, F)$ onde $P$ é um poset conexo localmente finito cuja maior cadeia tem, no máximo, 3 elementos e que possui uma involução $\lambda$ e $F$ é um corpo de característica zero. Determinamos as involuções e os automorfismos da coroa $C_{2n}$, bem como suas involuções equivalentes e, a partir disso, classificamos as involuções em $I(C_{2n}, F)$, determinando suas classes de equivalência. Sendo $\hat{\lambda}$ e $\sigma_\lambda$ as involuções $\lambda$-ortogonal e $\lambda$-simplética de $I(P, F)$, respectivamente, mostramos que, tanto as $\hat{\lambda}$-identidades, como as $\sigma_\lambda$-identidades de $I(P, F)$ seguem da identidade ordinária $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ se a maior cadeia de $P$ possui dois elementos e $|P| \geq 4$. Dentro desse contexto, passando ao caso particular $I(C_{2n}, F)$ e usando a classificação das involuções em $I(C_{2n}, F)$, mostramos que, para toda involução $\rho$ em $I(C_{2n}, F)$, toda $\rho$-identidade também segue da identidade ordinária $[x_1, x_2][x_3, x_4]$. Considerando $P$ finito cuja maior cadeia possui três elementos, $|P| \geq 4$ e com uma involução $\lambda$, determinamos os geradores do $T(\hat{\lambda})$-ideal $Id^{\hat{\lambda}}(I(P, F))$ quando todo elemento que não é maximal nem minimal de $P$ é fixado por $\lambda$ e existe um único elemento minimal de $P$ comparável com ele. Nesse caso mostramos que o conjunto de geradores de $Id^{\hat{\lambda}}(I(P, F))$ é o mesmo determinado em [10] onde $P$ é considerado uma cadeia com 3 elementos.

# Abstract

In this work we study polynomial identities with an involution in an incidence algebra $I(P,F)$ where $P$ is a connected locally finite poset with an involution $\lambda$ whose largest chain has, at most, 3 elements, and $F$ is a field of characteristic zero. We determine the involutions and automorphisms of the crown $C_{2n}$, its equivalent involutions as well and, from that, we classify the involutions on $I(C_{2n},F)$ by determining its equivalence classes. Let $\hat{\lambda}$ and $\sigma_\lambda$ denote, respectively, the $\lambda$-orthogonal and the $\lambda$-simplectic involutions of $I(P,F)$, we show that the $\hat{\lambda}$-identities and the $\sigma_\lambda$-identities of $I(P,F)$ follow from the ordinary identity $[x_1,x_2][x_3,x_4]$ if the largest chain of $P$ has 2 elements and $|P|\geq 4$. In this context, passing to the particular case $I(C_{2n},F)$ and using the classification of the involutions on $I(C_{2n},F)$, we show that, for all involution $\rho$ on $I(C_{2n},F)$, every $\rho$-identity also follow from the ordinary identity $[x_1,x_2][x_3,x_4]$. Considering $P$ finite, whose largest chain has three elements and satisfying $|P|\geq 4$, having an involution $\lambda$, we determine the generators of the $T(\hat{\lambda})$-ideal $Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F))$ when every element of $P$ that is not minimal nor maximal is fixed by $\lambda$ and there exists a unique minimal element of $P$ that is comparable with it. In this case we show that the generators of $Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F))$ are the same determined in [10], where $P$ is considered to be a chain of three elements.

# Sumário

# Introdução

Neste trabalho foram estudadas as identidades polinomiais com involução satisfeitas por algumas famílias de álgebras de incidência.

As álgebras de incidência foram introduzidas formalmente e consideradas como objetos de estudo em 1964 por Rota ([17]), no entanto, ele próprio admite em seu artigo que a ideia de funções sobre intervalos não era nova e vinha sendo utilizada em diferentes contextos, a maioria deles relacionados a problemas de combinatória, desde, pelo menos, a década de 30 do século passado. Tais álgebras têm sido estudadas sistematicamente desde então por diversos matemáticos em diferentes contextos.

Convém observar que as álgebras de incidência constituem uma generalização bem comportada das álgebras de matrizes triangulares superiores, além disso, também possuem forte relação com quocientes de álgebras de caminhos.

Já o estudo das identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra associativa apareceu pela primeira vez em [9], com motivação geométrica e apareceram esporadicamente na pesquisa matemática até 1948 quando Kaplansky, em [14], provou que qualquer álgebra primitiva satisfazendo uma identidade polinomial é uma álgebra simples de dimensão finita, sugerindo que uma álgebra que satisfaz uma identidade polinomial deve ter alguma característica de finitude. Desde então seu estudo se intensificou, sendo, hoje em dia, um assunto de pesquisa de grande relevância dentro da álgebra. Em 1950, usando essencialmente argumentos combinatórios, Amitsur e Levitzki provaram em [1] que a identidade polinomial de menor grau satisfeita pela álgebra de matrizes $n \times n$ é o polinômio *standard* de grau $2n$. Esse resultado marcou o início de uma nova abordagem na teoria das álgebras com identidades polinomiais (ou simplesmente PI-álgebras), a saber, determinar um conjunto gerador mínimo para todas as identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra dada.

Uma ferramenta bastante útil no estudo das identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra, e que veio a se tornar objeto independente de estudo, é o estudo de tipos mais fracos de identidades polinomiais de uma álgebra, como as identidades graduadas, as identidades com involução, as identidades-traço, etc. As identidades graduadas, por exemplo, foram fundamentais para a solução positiva do Problema de Specht que perguntava se todas as identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra associativa sobre um corpo de característica zero seriam consequência de um conjunto finito de identidades satisfeitas por essa álgebra. Este problema foi resolvido por Kemer em [15].

A partir do $T$-ideal de identidades polinomiais satisfeitas pelas álgebras de matrizes triangulares superiores é possível determinar facilmente o $T$-ideal de identidades satisfeitas por uma álgebra de incidência de um conjunto parcialmente ordenado (poset) finito. Em [10] foram estudadas as identidades com involução satisfeitas por álgebras de matrizes triangulares superiores de ordens 2 e 3 e, ao contrário do que ocorre no caso de identidades ordinárias, não é fácil inferir, a partir desses dois casos, um conjunto gerador para as identidades polinomiais com involução para as matrizes triangulares superiores de ordem superior. Um conjunto gerador para as identidades com involução das matrizes triangulares superiores de ordem 4 permanece um mistério.

É interessante notar que o conjunto de identidades ordinárias satisfeitas por uma álgebra de incidência de um poset finito coincide com aquele obtido da álgebra de matrizes triangulares superiores cuja ordem coincide com o número de elementos na maior cadeia do poset. O mesmo não ocorre quando consideramos identidades com involução. Neste trabalho consideramos álgebras de incidência sobre posets conexos cujas maiores cadeias possuem dois ou três elementos. Na maior parte dos casos, quando a álgebra de incidência não é isomorfa a uma álgebra de matrizes triangulares superiores, as identidades com involução da álgebra de incidência coincidem com as identidades ordinárias da álgebra. É necessário considerar tipos bem particulares de posets cuja maior cadeia possui três elementos a fim de obter uma álgebra de incidência na qual o conjunto de identidades com involução não provêm das identidades ordinárias e é um subconjunto próprio das identidades com involução da álgebra de matrizes triangulares superiores de ordem 3.

A tese está organizada da seguinte forma. No primeiro capítulo são apresentados os conceitos e resultados básicos de álgebra utilizados ao longo do restante da tese. Neste capítulo são também apresentadas as álgebras de incidência, resultados básicos sobre elas e um estudo de seus automorfismos e involuções. No capítulo 2 são apresentadas a teoria básica de identidades polinomiais de álgebras, bem como identidades graduadas, $G$-identidades e identidades com involução. Os principais resultados e as contribuições desta tese se encontram a partir do capítulo 3. Neste capítulo é feita a classificação das involuções das álgebras de incidência de coroas, que são tipos particulares de posets possuindo a maior cadeia com dois elementos. Convém ressaltar que ligeiras alterações no poset podem provocar grandes alterações na álgebra de incidência desse poset e que não há métodos eficientes para obter a classificação das involuções para as álgebras de incidência de uma família mais geral de posets. No capítulo 4 são estudadas as identidades com involução das álgebras de incidência de coroas quaisquer e as identidades com respeito às involuções análogas às involuções ortogonal e simplética de álgebras de incidência de posets conexos cuja maior cadeia possui dois elementos. Por fim, no último capítulo, são estudadas as identidades com relação às involuções ortogonal de álgebras de incidência de posets conexos cuja maior cadeia possui três elementos.

Capítulo 1

# Álgebras, Conjuntos Parcialmente Ordenados e Álgebras de Incidência

Neste capítulo apresentaremos conceitos básicos que estarão presentes em todo o trabalho. São eles: álgebras, conjuntos parcialmente ordenados, automorfismos e involuções sobre conjuntos parcialmente ordenados, a álgebra de incidência de um conjunto parcialmente ordenado localmente finito sobre um anel comutativo com unidade e os automorfismos e involuções sobre tais álgebras de incidência. Mostraremos também resultados sobre estes assuntos que são de fundamental importância para este trabalho. As informações contidas neste capítulo podem ser encontradas em [4], [6], [19], [21] e [22].

## 1.1 Álgebras

Nessa primeira seção abordaremos algumas definições básicas sobre álgebras.

**Definição 1.1.** *Uma* álgebra associativa $A$ *sobre um anel comutativo com unidade* $R$*, também chamada de* $R$-álgebra*, é um módulo à esquerda sobre o anel* $R$ *munido da operação* $\cdot : A \times A \to A$ *chamada de multiplicação, tal que, para qualquer* $\alpha \in R$ *e quaisquer* $a, b, c \in A$*,*

1. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

2. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;

3. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;

4. $\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b)$.

Se o item *1* na definição anterior não é satisfeito, dizemos que $A$ é uma *álgebra não associativa*. Na definição anterior usamos o símbolo $\cdot$ para denotar a multiplicação dos elementos de $A$ diferenciando-a da multiplicação por escalar, mas para facilitar a escrita ao longo do texto, denotaremos as duas multiplicações da mesma forma, sem utilizar o símbolo "$\cdot$".

A definição de álgebra possui, ao mesmo tempo, duas estruturas, isto é, as estruturas de módulo à esquerda sobre o anel $R$ e de anel. Quando estiver claro sobre qual anel a álgebra $A$ está definida, nos referiremos a ela somente como a álgebra $A$ ao invés de escrevermos a álgebra $A$ sobre o anel $R$ ou a $R$-álgebra $A$. Se a álgebra $A$, vista como um anel, é um anel comutativo, dizemos que $A$ é uma *álgebra comutativa* e se $A$ é um anel com unidade, dizemos que $A$ é uma *álgebra com unidade*. Se a álgebra $A$ possui unidade, ela contém uma cópia do anel $R$, o conjunto $\{\alpha 1 : \alpha \in R\}$, o qual também denotaremos por $R$.

Um subconjunto $C$ da álgebra $A$ é chamado uma *subálgebra de* $A$ se também é uma álgebra, ou seja, $C$ deve ser fechado com respeito à adição, multiplicação e multiplicação por escalar de $A$. Se $A$ possuir unidade, $C$ também deve possuir a mesma unidade. Uma interseção de qualquer família de subálgebras de uma álgebra é também uma subálgebra desta álgebra. Assim, a *subálgebra gerada por um subconjunto* $S$ de uma álgebra $A$, denotada por $[S]$, é a menor subálgebra que contém o conjunto $S$, isto é, $[S]$ é a interseção de todas as subálgebras de $A$ que contêm $S$.

Um subconjunto $I$ de $A$ é um *ideal da álgebra* $A$ se $I$ é simultaneamente, um ideal de $A$ como anel e um submódulo de $A$ como um módulo. No caso em que a álgebra $A$ possui unidade, se $I$ é um ideal de $A$ como anel, temos automaticamente que $I$ é um submódulo de $A$. A interseção de ideais de uma álgebra $A$ também é um ideal de $A$. Assim, dado um subconjunto $S$ da álgebra $A$, também podemos definir o *ideal gerado pelo subconjunto* $S$, que é a interseção de todos os ideais de $A$ que contêm $S$ e que denotaremos por $\langle S \rangle$. De maneira análoga à que fazemos para anéis, definimos o *quociente de uma álgebra* $A$ *por um ideal* $I$ *de* $A$ estendendo as operações de $A$ às classes de equivalência de $\dfrac{A}{I}$. As operações estão bem definidas já que $I$ é, ao mesmo tempo, ideal e submódulo de $A$.

**Definição 1.2.** *O* centro de uma $R$-álgebra $A$*, denotado por* $Cen(A)$*, é o conjunto*

$$Cen(A) := \{a \in A : ab = ba \text{ para todo } b \in A\}.$$

Notemos que $Cen(A)$ é uma subálgebra de $A$. Se a álgebra $A$ possui unidade, então $R \subset Cen(A)$. Se $Cen(A) = R$, dizemos que $A$ é uma *álgebra central.*

**Definição 1.3.** *Seja $R$ um anel comutativo com unidade e sejam $A_1$ e $A_2$ duas $R$-álgebras. A aplicação $\varphi : A_1 \to A_2$ é um* homomorfismo de $R$-álgebras *se é um homomorfismo de módulos sobre o anel $R$ e um homomorfismo de anéis.*

O *núcleo do homomorfismo* $\varphi : A_1 \to A_2$ é o conjunto

$$\ker(\varphi) := \{a \in A_1 : \varphi(a) = 0\}$$

e a *imagem do homomorfismo* $\varphi : A_1 \to A_2$ é o conjunto

$$Im(\varphi) := \{b \in A_2 : b = \varphi(a) \text{ para algum } a \in A_1\}.$$

Facilmente podemos ver que o núcleo de $\varphi$ é um ideal de $A_1$ e a imagem de $\varphi$ é uma subálgebra de $A_2$.

Um homomorfismo é chamado de *isomorfismo* se é bijetor. Um homomorfismo de álgebras $\varphi : A \to A$ é chamado *endomorfismo da álgebra $A$*. Quando um endomorfismo de álgebras é bijetor o chamamos de *automorfismo.*

O próximo teorema é um resultado clássico sobre isomorfismo de álgebras.

**Teorema 1.4.** *(Teorema do Isomorfismo para Álgebras) Sejam $A_1$ e $A_2$ álgebras sobre um anel comutativo com unidade $R$ e seja $\varphi : A_1 \to A_2$ um homomorfismo. Então $\dfrac{A_1}{\ker(\varphi)}$ é isomorfo a $Im(\varphi)$.*

Para finalizar essa seção apresentaremos algumas definições e notações a respeito das álgebras de Lie.

**Definição 1.5.** *Uma* álgebra de Lie *sobre um corpo $F$ é uma álgebra não associativa $A$ sobre $F$ com a operação de multiplicação $\star : A \times A \to A$, chamada de* produto de Lie *que, para todos $a, b, c \in A$ satisfaz,*

1. *$a \star a = 0$ (anticomutatividade);*

2. *$(a \star b) \star c + (b \star c) \star a + (c \star a) \star b = 0$ (identidade de Jacobi).*

Em uma álgebra de Lie $A$, pela anticomutatividade do produto de Lie, dados $a, b \in A$ temos,

$$\begin{aligned} 0 = (a+b) \star (a+b) &= a \star a + a \star b + b \star a + b \star b \\ &= a \star b + b \star a. \end{aligned}$$

Sendo assim, $a \star b = -b \star a$ para todo $a, b \in A$.

Um subespaço $C$ de uma álgebra de Lie $A$ é uma subálgebra (de Lie) de $A$ se $C$ é fechado em relação ao produto de Lie de $A$.

**Definição 1.6.** *Sejam $A_1$ e $A_2$ álgebras de Lie sobre um corpo $F$ munidas com os produtos de Lie $\star$ e $\diamond$, respectivamente. Uma transformação linear $\varphi : A_1 \to A_2$ é um* homomorfismo de álgebras de Lie *se satisfaz a propriedade*

$$\varphi(a_1 \star a_2) = \varphi(a_1) \diamond \varphi(a_2) \text{ para todos } a_1, a_2 \in A_1.$$

Dada uma álgebra associativa $A$ sobre um corpo $F$, denotaremos por $A^{(-)}$ a álgebra de Lie, sobre o mesmo conjunto subjacente $A$, com a mesma soma, com o mesmo produto por escalar de $A$ e com o produto de Lie sendo $a_1 \star a_2 = [a_1, a_2] = a_1a_2 - a_2a_1$ para todos $a_1, a_2 \in A$, ao qual chamamos de *colchete de Lie*. Definimos também o *colchete de Lie de comprimento* $n$, com $n > 1$, indutivamente por

$$[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1;$$

$$[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n] \text{ com } n > 2.$$

## 1.2 Conjuntos Parcialmente Ordenados

Nesta seção apresentaremos o conceito de conjunto parcialmente ordenado juntamente com algumas definições básicas e exemplos. Abordaremos também funções entre conjuntos parcialmente ordenados, enfatizando as funções que preservam e invertem a ordem apresentando alguns resultados e propriedades.

**Definição 1.7.** *Um conjunto $P$ com uma relação binária $\leq$ é um* conjunto parcialmente ordenado *(que chamaremos abreviadamente de* poset*) se $\leq$ é reflexiva, transitiva e antissimétrica. Denotamos tal conjunto por $(P, \leq)$.*

Os elementos de $(P, \leq)$ são chamados de *pontos* do conjunto ordenado. Quando não houver possibilidade de confusão à respeito da ordem de $P$, escreveremos simplesmente $P$ no lugar de $(P, \leq)$. Dados $p, q \in P$, usaremos a notação $q \geq p$ para indicar que $p \leq q$. Dizemos que $p, q \in P$ são *comparáveis* se $p \leq q$ ou $q \leq p$. Escrevemos $p < q$ quando $p \leq q$ e $p \neq q$. Denotaremos a cardinalidade de $P$ por $|P|$.

Vejamos alguns exemplos de conjuntos parcialmente ordenados.

**Exemplo 1.8.** *Os números naturais $\mathbb{N}$, os números inteiros $\mathbb{Z}$, os números racionais $\mathbb{Q}$ e os números reais $\mathbb{R}$ são posets com a ordem usual.*

**Exemplo 1.9.** *O conjunto das partes de um dado conjunto $S$ com a ordem dada pela inclusão, ou seja, $A \leq C$ se $A \subset C$, é um poset.*

**Exemplo 1.10.** *O conjunto dos números naturais com a ordem, $a \leq b$ se $a$ divide $b$ é um poset.*

**Exemplo 1.11.** *Dado um inteiro positivo $n$, o conjunto $\mathbb{N}^n$ com a ordem lexicográfica é um poset.*

**Definição 1.12.** *Um elemento $p$ de um poset $P$ é um* elemento maximal *se sempre que $p \leq q$, com $q \in P$, então $p = q$. Se $P$ possui um elemento $p$ tal que $q \leq p$ para todo $q \in P$, então $p$ é o* elemento máximo *de $P$.*

De maneira análoga podemos definir *elemento minimal* e *elemento mínimo* de um poset $P$.

A partir do poset $P$ podemos construir um outro poset que denotamos por $(P^{op}, \leq^{op})$, com a ordem parcial $p \leq^{op} q$ se, e somente se, $q \leq p$. Tal poset é chamado de *conjunto parciamente ordenado dual* de $(P, \leq)$.

Dados os conjuntos parcialmente ordenados $(P, \leq_P)$ e $(Q, \leq_Q)$, dizemos que $Q$ é um *subconjunto parcialmente ordenado* de $P$ se $Q \subseteq P$ e para $q_1, q_2 \in Q$, a relação $q_1 \leq_Q q_2$ vale se, e somente se, $q_1 \leq_P q_2$. Em particular, se $P$ é um poset e $Q \subseteq P$, o conjunto $Q$ pode ser considerado um subconjunto parcialmente ordenado de $P$ com a relação de ordem induzida de $P$.

**Definição 1.13.** *Um subconjunto $\mathcal{C}$ de um poset é uma* cadeia *se, para quaisquer $p, q \in \mathcal{C}$, ou $p \leq q$ ou $q \leq p$. Um subconjunto $\mathcal{D}$ de um poset é uma* anticadeia *se qualquer par de* *elementos distintos de $\mathcal{D}$ é formado por elementos não comparáveis entre si. Uma cadeia $\mathcal{C}$ possui* comprimento *$n$ se $\mathcal{C}$ possui $n$ elementos.*

**Definição 1.14.** *Seja $P$ um poset. O ponto $p \in P$ é* coberto *por $q \in P$ (e $q$* cobre *$p$) se $p < q$ e, para todo $r \in P$, $p \leq r \leq q$ implica em $r \in \{p, q\}$. Nesse caso escrevemos $p \prec q$ e também podemos dizer que $q$ é* cobertura *de $p$. Elementos $p$ e $q$ que satisfazem $p \prec q$ ou $q \prec p$ são chamados* adjacentes *.*

Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 1.15.** *No conjunto das partes de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ com a ordem dada pela inclusão, o conjunto $\{1, 3\}$ é coberto por $\{1, 3, 5\}$ mas não é coberto por $\{1, 2, 3, 4\}$.*

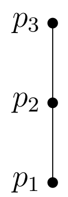
**Exemplo 1.16.** *O fato de um elemento cobrir outro elemento, depende do poset onde eles estão inseridos. O número 2 não cobre 0 em $\mathbb{Z}$ com a ordem usual, mas cobre zero no conjunto dos números pares com a ordem usual.*

**Exemplo 1.17.** *Num conjunto ordenado infinito, os elementos podem, ou não, ter coberturas. Considerando $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$, ambos com a ordem usual, quaisquer dois elementos não são cobertura um do outro.*

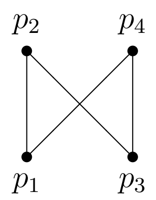
Podemos representar um poset usando o seu *diagrama de Hasse.* Tal diagrama é formado por pontos, chamados de vértices, que representam os elementos do poset e por linhas, chamadas de arestas, que determinam as relações entre os elementos. A linha é desenhada de $p$ até $q$ se $q$ cobre $p$ onde o ponto que representa $p$ é desenhado abaixo do ponto que representa $q$. O diagrama de Hasse é uma ferramenta útil para determinar certas estruturas sobre os posets.

A seguir mostraremos alguns exemplos de diagramas de Hasse.

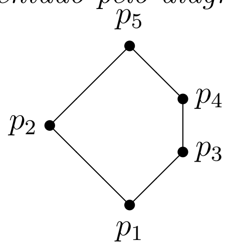
**Exemplo 1.18.** *A cadeia $\mathcal{C} = \{p_1, p_2, p_3\}$ com $p_1 < p_2 < p_3$ pode ser representada pelo diagrama de Hasse*



**Exemplo 1.19.** *O poset* $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ *com as relações* $p_1 < p_2$, $p_1 < p_4$, $p_3 < p_2$ *e* $p_3 < p_4$ *pode ser representado pelo diagrama de Hasse*




**Exemplo 1.20.** *O poset* $Q = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ *com as relações* $p_1 < p_2$, $p_1 < p_3 < p_4 < p_5$ *e* $p_2 < p_5$ *pode ser representado pelo diagrama de Hasse*




Desenhar um diagrama de Hasse pode não ser tão simples. O mesmo conjunto ordenado pode ser desenhado de diferentes formas de acordo com preferências ou necessidades.

**Definição 1.21.** *Dados* $p, q$ *pertencentes a um poset* $P$*, o* intervalo *ou o* segmento de $p$ a $q$ *é o conjunto* $\{r \in P : p \leq r \leq q\}$ *e é denotado por* $[p, q]$*. Um poset* $P$ *é chamado* localmente finito *se todo intervalo de* $P$ *é finito. Denotaremos o número de elementos do intervalo* $[p, q]$ *por* $|[p, q]|$.

Um intervalo $[p, q]$ contido num poset $P$ possui *comprimento* $n$ se existe uma cadeia de comprimento $n$ em $[p, q]$ e qualquer outra cadeia em $[p, q]$ possui comprimento menor ou igual a $n$.

Dizemos que um poset $P$ é *limitado* se existe um inteiro positivo $n$ tal que cada intervalo $[p, q]$ de $P$ possui comprimento no máximo $n$. Se tal $n$ não existe, dizemos que $P$ *não é limitado.*

**Definição 1.22.** *O poset* $P$ *é* conexo *se, para todos* $p, q$ *em* $P$*, existem elementos* $p = p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n = q$ *em* $P$ *tais que* $p_i \leq p_{i+1}$ *ou* $p_i \geq p_{i+1}$ *para* $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

A definição acima é equivalente a dizer que o diagrama de Hasse de $P$ é conexo, ou seja, dados $p, q \in P$, existe um caminho no diagrama ligando estes pontos.

Podemos definir uma relação de equivalência em um poset $P$ da seguinte forma, $p$ está relacionado com $q$ se existem elementos $p = p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n = q$ em $P$ tais que

$p_i \leq p_{i+1}$ ou $p_i \geq p_{i+1}$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1$. As classes de equivalência dessa relação são chamadas *componentes conexas de* $P$. Desse modo, o poset $P$ pode ser escrito como uma união disjunta de suas componentes conexas.

Dadas as definições e exemplos relacionados aos posets, seguiremos agora com as funções entre eles. Começaremos com as funções que preservam a ordem.

**Definição 1.23.** *Consideremos* $(P, \leq_P)$ *e* $(Q, \leq_Q)$ *dois posets. Dizemos que a função* $\varphi : P \to Q$ *é uma* função que preserva a ordem *se, para todos* $p_1, p_2 \in P$*, temos que*

$$p_1 \leq_P p_2 \textit{ implica em } \varphi(p_1) \leq_Q \varphi(p_2).$$

Para simplificar as notações, se não houver risco de confusão, dados dois posets distintos $P$ e $Q$, usaremos o mesmo símbolo $\leq$ para denotar tanto a ordem de $P$ quanto a ordem de $Q$. Prosseguimos com alguns exemplos.

**Exemplo 1.24.** *A função* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definida por* $\varphi(x) = 5x$ *preserva a ordem se no domínio e contradomínio de* $\varphi$ *forem considerados a ordem usual.*

**Exemplo 1.25.** *Sejam* $S$ *um conjunto qualquer e* $P(S)$ *o conjunto das partes de* $S$ *ordenado por inclusão. A função* $T : P(S) \to P(S)^{op}$ *definida por* $T(X) = S \backslash X$ *para todo* $X \in P(S)$ *é uma função que preserva a ordem de* $P(S)$ *no seu dual.*

**Exemplo 1.26.** *A função* $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definida por* $\psi(x) = x + 1$ *não preserva a ordem se o domínio e o contradomínio de* $\psi$ *tiverem a ordem do Exemplo 1.10. De fato,* 3 *divide* 6 *porém* 4 *não divide* 7.

A seguinte proposição pode ser facilmente verificada.

**Proposição 1.27.** *Sejam* $P, Q, R$ *posets e* $\varphi : P \to Q$ *e* $\psi : Q \to R$ *funções que preservam a ordem. Então a função* $\psi \circ \varphi : P \to R$ *também preserva a ordem.*

**Definição 1.28.** *Sejam* $P$ *e* $Q$ *posets. A função* $\varphi : P \to Q$ *é um* isomorfismo *(de posets) se preserva a ordem e possui inversa que também preserva a ordem. Os posets* $P$ *e* $Q$ *são chamados* isomorfos *se existe um isomorfismo* $\varphi : P \to Q$.

Consideremos os posets $P$, $Q$ e $R$. Para que uma função $\varphi : P \to Q$ seja um isomorfismo é necessário e suficiente que $\varphi$ seja bijetora e, para todos $p_1, p_2 \in P$, tenhamos $p_1 \leq p_2$ se, e somente se, $\varphi(p_1) \leq \varphi(p_2)$. Se $\varphi : P \to Q$ e $\psi : Q \to R$ são isomorfismos, então $\psi \circ \varphi : P \to R$ também é um isomorfismo. A função $\varphi : P \to P$ é chamada *automorfismo* (de poset) se $\varphi$ é um isomorfismo.

Como assunto final desta seção, trataremos agora das funções entre posets que invertem a ordem.

**Definição 1.29.** *Consideremos $(P, \leq_P)$ e $(Q, \leq_Q)$ dois posets. Dizemos que $\phi : P \to Q$ é uma* função que inverte a ordem *se, para todos $p_1, p_2 \in P$, temos que*

$$p_1 \leq_P p_2 \text{ implica em } \phi(p_2) \leq_Q \phi(p_1).$$

Para visualizar essa definição, temos os seguintes dois exemplos.

**Exemplo 1.30.** *Consideremos $P$ um poset e $P^{op}$ o seu dual. A função $I : P \to P^{op}$ dada por $I(p) = p$ é uma função que inverte a ordem.*

**Exemplo 1.31.** *Sejam $(P, \leq_P)$ e $(Q, \leq_Q)$ posets e consideremos $q \in Q$. A função $\phi : P \to Q$ dada por $\phi(p) = q$ para todo $p \in P$, isto é, a função constante, inverte a ordem. De fato, para $p_1 \leq_P p_2$ em $P$, temos $\phi(p_2) = q \leq_Q q = \phi(p_1)$.*

**Definição 1.32.** *Sejam $P$ um poset e $\phi : P \to P$ uma função que inverte a ordem. Dizemos que $\phi$ é um* antiautomorfismo do poset *$P$ se $\phi$ é bijetora e sua inversa também inverte a ordem.*

**Definição 1.33.** *Sejam $P$ um poset e $\phi : P \to P$ um antiautomorfismo. Dizemos que $\phi$ é uma* involução sobre *$P$ se $\phi$ possui ordem 2, isto é, se $\phi(\phi(p)) = p$ para todo $p \in P$.*

A seguinte definição une os conceitos de automorfismos e involuções sobre posets.

**Definição 1.34.** *Dizemos que as involuções $\lambda_1$ e $\lambda_2$ sobre $P$ são* equivalentes *se existe um automorfismo $\alpha$ de $P$ tal que $\lambda_1 \circ \alpha = \alpha \circ \lambda_2$.*

Considerando $P$ um poset e $\varphi : P \to P$ uma função que preserva a ordem (que inverte a ordem), um elemento $p \in P$ é chamado de *ponto fixo de* $\varphi$ se $\varphi(p) = p$. Se $\varphi$ não possui pontos fixos, dizemos que $\varphi$ é *livre de pontos fixos* . Dizemos que o poset $P$ tem a *propriedade do ponto fixo* se, para toda função $\varphi : P \to P$ que preserva a ordem, $\varphi$ possui um ponto fixo.

Para qualquer poset $P$ e qualquer função $\varphi : P \to P$ que preserva a ordem (inverte a ordem), o conjunto dos pontos fixos de $\varphi$ é denotado por

$$Fix(\varphi) = \{p \in P : \varphi(p) = p\}.$$

## 1.3 Álgebra de Incidência

Nesta seção introduziremos o conceito de álgebra de incidência com alguns resultados e caracterizaremos o centro e o radical de Jacobson de uma álgebra de incidência. Começaremos pela definição de álgebra de incidência.

**Definição 1.35.** *A* álgebra de incidência $I(P,R)$ *de um poset localmente finito $P$ sobre o anel comutativo com unidade $R$ é dada por*

$$I(P,R) = \{f : P \times P \to R \ : \ f(p,q) = 0 \text{ se } p \nleq q\}$$

*com as operações*

$$\begin{aligned} (f+g)(p,q) &= f(p,q) + g(p,q); \\ (f \cdot g)(p,q) &= \sum_{p \leq r \leq q} f(p,r)g(r,q); \\ (af)(p,q) &= af(p,q) \end{aligned}$$

*onde $f, g \in I(P,R)$, $a \in R$ e $p, q, r \in P$.*

Observemos que a multiplicação em $I(P,R)$ está bem definida, pois $P$ é localmente finito, ou seja, dados $p, q \in P$, temos que $[p,q]$ possui uma quantidade finito de elementos e, desse modo, a soma $\displaystyle\sum_{p \leq r \leq q} f(p,r)g(r,q)$ possui um número finito de termos.

Vamos definir agora algumas funções importantes em $I(P,R)$. Se $Q$ é um subconjunto de $P$, então a função $\delta_Q \in I(P,R)$ é definida por,

$$\delta_Q(p,q) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad p = q \text{ e } p, q \in Q \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para todos $p, q \in P$ e é chamada *função característica de $Q$*. Se $Q = P$, escrevemos $\delta_P = \delta$. Definimos também $e_{pq} \in I(P,R)$ por

$$e_{pq}(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad s = p \text{ e } t = q \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para todos $p, q, s, t \in P$. Quando $p = q$ escrevemos $e_{pp} = e_p$.

Dada $f \in I(P,R)$, notemos que,

$$(f \cdot \delta)(p,q) = \sum_{p \leq r \leq q} f(p,r)\delta(r,q) = f(p,q) \text{ e } (\delta \cdot f)(p,q) = \sum_{p \leq r \leq q} \delta(p,r)f(r,q) = f(p,q),$$

isto é, $\delta$ é a identidade da álgebra de incidência $I(P, R)$.

Quando consideramos a álgebra de incidência $I(P, F)$ onde $F$ é um corpo é $P$ é finito, o conjunto $\{e_{pq} : p \leq q \text{ em } P\}$ forma uma base para o $F$-espaço vetorial $I(P, F)$. Chamamos tal base de *base canônica de* $I(P, F)$.

Um elemento de uma álgebra associativa $A$ que possui inversos à esquerda e à direita é invertível. Tal fato será usado no teorema a seguir, o qual caracteriza os elementos invertíveis da álgebra de incidência $I(P, R)$ de forma semelhante ao que ocorre com as matrizes triangulares superiores com entradas em $R$, onde uma matriz triangular superior é invertível se, e somente se, os elementos de sua diagonal principal são invertíveis.

**Teorema 1.36.** *Sejam $P$ um poset localmente finito e $R$ um anel comutativo com unidade. Para $f \in I(P, R)$, são equivalentes:*

*(i) $f$ possui inversa à direita;*

*(ii) $f$ possui inversa à esquerda;*

*(iii) $f(p, p)$ é invertível em $R$ para cada $p \in P$.*

*Demonstração.* Mostraremos a equivalência de *(i)* e *(iii)*. A equivalência de *(ii)* e *(iii)* segue de maneira análoga. Teremos então que *(iii)* implica *(i)* e *(ii)*, ou seja, $f$ será invertível em $I(P, R)$ e o teorema estará provado.

Suponhamos que $g$ seja a inversa à direita de $f$, então para cada $p \in P$ temos

$$(f \cdot g)(p, p) = f(p, p)g(p, p) = \delta(p, p) = 1,$$

assim $f(p, p)$ é invertível em $R$ e *(i)* implica *(iii)*.

Suponhamos agora que $f(p, p)$ é invertível em $R$ para cada $p \in P$. Definimos $g$, a inversa à direita de $f$, indutivamente sobre o comprimento dos invervalos de $P$. Se $|[p, q]| = 0$, então $p \not\leq q$ e definimos $g(p, q) = 0$. Se $|[p, q]| = 1$, então $p = q$ e definimos $g(p, p) = (f(p, p))^{-1}$. Seja $n > 1$ inteiro e suponhamos que para cada intervalo com comprimento menor que $n$ a função $g$ esteja definida sobre este intervalo. Seja $[p, q]$ um intervalo de comprimento $n$. Queremos que aconteça o seguinte:

$$\begin{aligned} 0 &= (f \cdot g)(p, q) \\ &= \sum_{p \leq r \leq q} f(p, r) g(r, q) \\ &= f(p, p) g(p, q) + \sum_{p < r \leq q} f(p, r) g(r, q). \end{aligned}$$

Como $f(p, p)$ é invertível e $g(r, q)$ está definido, definindo

$$g(p, q) = \left[ - \sum_{p < r \leq q} f(p, r) g(r, q) \right] (f(p, p))^{-1},$$

temos $f \cdot g = \delta$ e *(iii)* implica *(i)*. □

Podemos relacionar a álgebra de incidência $I(P, R)$ com as álgebras de matrizes. Para tanto, vamos fixar algumas notações. Considerando $R$ um anel comutativo com unidade, denotaremos por $M_n(R)$ o conjunto das matrizes de ordem $n \times n$ com entradas em $R$. Usaremos a notação $UT_n(R)$ para denotar o conjunto das matrizes triangulares superiores de ordem $n \times n$ com entradas em $R$. Tais conjuntos de matrizes possuem uma estrutura de $R$-álgebra com a soma de matrizes, multiplicação de matrizes e a multiplicação de uma matriz por um escalar usuais.

Consideremos agora um poset $P$. Podemos associar a $P$ um conjunto de matrizes de ordem igual à $|P|$, que será denotado por $M_{|P|}(R)$, da seguinte forma: indexemos $P$ em um conjunto $J$ e indexemos as entradas das matrizes em $M_{|P|}(R)$ na forma $a_{jk}$ com $(j, k) \in J \times J$. Se $|P| < \infty$, temos que $M_{|P|}(R) = M_n(R)$ para algum $n \in \mathbb{N}$. No caso em que $P$ é infinito, o conjunto $M_{|P|}(R)$ possui somente uma estrutura de $R$-módulo. Para que um submódulo de $M_{|P|}(R)$ seja também uma $R$-álgebra, devemos ter que as somas envolvidas na multiplicação das matrizes nesse submódulo tenham somente um número finito de termos.

A multiplicação de elementos em uma álgebra de incidência e a multiplicação de matrizes estão proximamente relacionadas. Usando este fato, a próxima proposição mostra que a álgebra de incidência $I(P, R)$ pode ser vista como uma $R$-álgebra contida em $M_{|P|}(R)$.

**Proposição 1.37.** *Sejam $P$ um poset localmente finito e $R$ um anel comutativo com unidade. Então $I(P, R)$ é isomorfa a uma $R$-álgebra contida em $M_{|P|}(R)$.*

*Demonstração.* Escrevamos $P$ na forma $P = \{p_j : j \in J\}$ onde $J$ é um conjunto de índices. As entradas das matrizes em $M_{|P|}(R)$ estão indexadas em $J \times J$. Seja $\Psi : I(P,R) \to M_{|P|}(R)$ a função dada por $\Psi(f)(j_1, j_2) = f(p_{j_1}, p_{j_2})$, onde $f \in I(P,R)$, $j_1, j_2 \in J$, $p_{j_1}, p_{j_2} \in P$ e $\Psi(f)(j_1, j_2)$ denota a entrada na posição $(j_1, j_2)$ da matriz $\Psi(f)$. Se $P$ é finito, facilmente podemos ver que $\Psi$ é um isomorfismo de $R$-álgebras, de $I(P,R)$ sobre sua imagem por $\Psi$. Para o caso em que $P$ é infinito, devemos observar que $\Psi(I(P,R))$ é uma álgebra contida em $M_{|P|}(R)$. Para isso, basta verificar que a multiplicação dos elementos $\Psi(f), \Psi(g) \in M_{|P|}(R)$, com $f, g \in I(P,R)$, está bem definida. De fato,

$$(\Psi(f)\Psi(g))(j_1, j_2) = \sum_{p_{j_1} \leq q \leq p_{j_2}} f(p_{j_1}, q)g(q, p_{j_2})$$

e, como $[p_{j_1}, p_{j_2}]$ é finito para todos $p_{j_1}, p_{j_2} \in P$, o somatório acima possui um número finito de termos. Logo a multiplicação em $\Psi(I(P,R))$ está bem definida. Desse modo, o isomorfismo segue como no caso finito. Portanto $I(P,R)$ é isomorfo à $R$-álgebra $\Psi(I(P,R))$ contida em $M_{|P|}(R)$. Isso prova a proposição. $\square$

Dentro desse contexto, se $P$ é finito, podemos indexá-lo na forma $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ de modo que $p_i \leq p_j$ implique em $i \leq j$. Este fato pode ser observado usando indução sobre a cardinalidade de $P$. Se $|P| = 1$ a afirmação é óbvia. Dado $n > 1$, suponhamos que todo poset tendo menos do que $n$ elementos possa ser indexado como na afirmação e seja $P$ um poset com $n$ elementos. Como $P$ é finito, $P$ possui elementos maximais. Seja $q$ um elemento maximal de $P$. Chamaremos $q$ de $p_n$. O subconjunto parcialmente ordenado $P \backslash \{p_n\}$ possui menos de $n$ elementos e assim pode ser indexado como acima. Claramente, indexando $P$ dessa forma, segue que a afirmação é verdadeira.

Usando a Proposição 1.37 e a observação acima temos a seguinte proposição.

**Proposição 1.38.** *Seja $P$ um poset finito. Então existe um isomorfismo de $R$-álgebras $\Psi$ entre $I(P,R)$ e uma subálgebra contida em $UT_n(R)$ onde $n = |P|$.*

A proposição acima nos mostra que, dado um poset finito $P$ com $|P| = n$, a álgebra de incidência $I(P,R)$ pode ser mergulhada na álgebra $UT_n(R)$.

Dados dois elementos de $I(P,R)$, podemos definir um produto diferente entre eles. Consideremos $f, g \in I(P,R)$. Definimos o *produto de Hadamard de $f$ e $g$*, denotado por

$f * g$, como sendo

$$(f * g)(p, q) = f(p, q)g(p, q) \text{ para todos } p, q \in P.$$

Este produto será importante na seção 1.5, onde faremos um estudo sobre automorfirmos e involuções de $I(P, R)$.

Vamos, a partir de agora, determinar o centro da álgebra de incidência $I(P, R)$. A seguinte definição nos auxiliará na caracterização do centro de $I(P, R)$.

**Definição 1.39.** *Uma função $f \in I(P, R)$ é chamada* diagonal *se $f(p, q) = 0$ sempre que $p \neq q$. Dizemos que uma função diagonal é* constante sobre um conjunto *$Q \subseteq P$ se para todos $p, q \in Q$ temos $f(p, p) = f(q, q)$.*

Para calcular o centro de $I(P, R)$, observemos que, se $|P| = 1$, segue que $I(P, R) \cong R$ e $Cen(I(P, R)) = I(P, R)$. Desse modo, no próximo teorema vamos assumir que $|P| > 1$.

**Teorema 1.40.** *Sejam $P = \bigcup_{j \in J} P_j$ um poset escrito como a união disjunta de suas componentes conexas e $R$ um anel comutativo com unidade. O subanel $Cen(I(P, R))$ é o conjunto de todas as funções diagonais que são constantes sobre cada componente conexa de $P$.*

*Demonstração.* Consideremos $f, g \in I(P, R)$ onde $f$ é uma função diagonal constante em cada componente conexa de $P$. Se $p, q \in P$ com $p \leq q$, então $p$ e $q$ estão na mesma componente conexa de $P$ e $f(p, p) = f(q, q)$. Assim,

$$(f \cdot g)(p, q) = f(p, p)g(p, q) \text{ e } (g \cdot f)(p, q) = g(p, q)f(q, q).$$

Portanto, $f \in Cen(I(P, R))$.

Para mostrarmos que cada elemento do $Cen(I(P, R))$ é uma função diagonal constante em cada componente conexa de $P$, podemos assumir que $P$ não é uma anticadeia. Consideremos $h \in Cen(I(P, R))$ e sejam $p, q \in P$ com $p < q$. Como

$$h(p, q) = (e_p \cdot h)(p, q) = (h \cdot e_p)(p, q) = 0,$$

vemos que $h$ é uma função diagonal. Suponhamos que $p, q$ sejam elementos distintos em uma mesma componente conexa de $P$. Então existe uma sequência

$$p = p_0, p_1, \ldots, p_n = q$$

tal que, para $i = 1, 2, \ldots n$, $p_{i-1}$ e $p_i$ são comparáveis. Devemos mostrar que $h(p,p) = h(q,q)$. Usaremos indução sobre $n$. Se $n = 1$, trocando os papéis de $p$ e $q$ se necessário, assumimos que $p < q$. Então,

$$h(p,p) = (h \cdot e_{pq})(p,q) = (e_{pq} \cdot h)(p,q) = h(q,q).$$

Prosseguindo com a indução, suponhamos que $n \geq 2$ e que o resultado valha para valores menores que $n$. Pela hipótese de indução, sabemos que $h(p,p) = h(p_{n-1}, p_{n-1})$ e pelo caso $n = 1$, $h(p_{n-1}, p_{n-1}) = h(q,q)$. Então $h(p,p) = h(q,q)$ e o teorema está provado. $\square$

Como consequência imediata desse resultado temos os seguintes corolários.

**Corolário 1.41.** *Sejam $R$ um anel comutativo com unidade e $P = \bigcup_{j \in J} P_j$ um poset localmente finito escrito como a união disjunta de suas componentes conexas. Então $Cen(I(P,R)) \cong \prod_{j \in J} R$.*

**Corolário 1.42.** *Sejam $P$ um poset localmente finito conexo e $R$ um anel comutativo com unidade. Então $Cen(I(P,R)) = \{r\delta : r \in R\} = R$.*

Dados um anel comutativo com unidade $R$ e uma $R$-álgebra $A$, denotaremos o radical de Jacobson de $A$ por $J(A)$. A seguir determinaremos o radical de Jacobson de $I(P,R)$ a partir de $J(R)$.

**Teorema 1.43.** *Sejam $P$ um poset localmente finito e $R$ um anel comutativo com unidade. O radical de Jacobson de $I(P,R)$ é o conjunto de todas as funções $f \in I(P,R)$ tais que $f(p,p) \in J(R)$ para todo $p \in P$.*

*Demonstração.* A função $f \in I(P,R)$ está no radical de Jacobson de $I(P,R)$ se, e somente se, $\delta - f \cdot g$ é invertível para todo $g \in I(P,R)$. Isso vale se, e somente se, $1 - f(p,p)g(p,p)$ é invertível em $R$ para todo $p \in P$ e todo $g \in I(P,R)$ conforme o Teorema 1.36. Este último fato ocorre se, e somente se, $f(p,p) \in J(R)$ para todo $p \in P$. Assim segue o teorema. $\square$

**Corolário 1.44.** *Sejam $P$ um poset localmente finito e $R$ um anel comutativo com unidade. Então $\dfrac{I(P,R)}{J(I(P,R))}$ é isomorfo a $\prod_{p \in P} \dfrac{R}{J(R)}$.*

*Demonstração.* Consideremos a função

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \dfrac{I(P,R)}{J(I(P,R))} & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{p\in P}\frac{R}{J(R)} \\ & f+J(I(P,R)) & \longmapsto & (\overline{f(p,p)})_{p\in P} \end{array}$$

onde $\overline{f(p,p)}$ é a classe de $f(p,p)$ em $\dfrac{R}{J(R)}$.

Sejam $f+J(I(P,R)), g+J(I(P,R)) \in \dfrac{I(P,R)}{J(I(P,R))}$ e $r \in R$. Se $f+J(I(P,R)) = g+J(I(P,R))$, teremos $f-g \in J(I(P,R))$. Pelo Teorema 1.43 seguirá que $(f-g)(p,p) \in J(R)$ para todo $p \in P$, isto é, $\overline{f(p,p)} = \overline{g(p,p)}$ para todo $p \in P$. Assim $(\overline{f(p,p)})_{p\in P} = (\overline{g(p,p)})_{p\in P}$. Logo, a função $\phi$ está bem definida. A função $\phi$ é um homomorfismo. De fato,

$$\begin{aligned} \phi((f+J(I(P,R)))+(g+J(I(P,R)))) &= \phi((f+g)+J(P,R)) \\ &= (\overline{(f+g)(p,p)})_{p\in P} \\ &= (\overline{f(p,p)}+\overline{g(p,p)})_{p\in P} \\ &= (\overline{f(p,p)})_{p\in P}+(\overline{g(p,p)})_{p\in P} \\ &= \phi(f+J(I(P,R)))+\phi(g+J(I(P,R))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi((f+J(I(P,R)))(g+J(I(P,R)))) &= \phi((f\cdot g)+J(P,R)) \\ &= (\overline{(f\cdot g)(p,p)})_{p\in P} \\ &= (\overline{f(p,p)g(p,p)})_{p\in P} \\ &= (\overline{f(p,p)})_{p\in P}(\overline{g(p,p)})_{p\in P} \\ &= \phi(f+J(I(P,R)))\phi(g+J(I(P,R))) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \phi(r(f+J(I(P,R)))) &= \phi((rf)+J(P,R)) \\ &= (\overline{(rf)(p,p)})_{p\in P} \\ &= (r\overline{f(p,p)})_{p\in P} \\ &= r(\overline{f(p,p)})_{p\in P} \\ &= r\phi(f+J(I(P,R))). \end{aligned}$$

Dado $(\overline{r_p})_{p\in P} \in \displaystyle\prod_{p\in P}\frac{R}{J(R)}$, tomando $f \in I(P,R)$ de modo que $f(p,p) = r_p$, teremos $\phi(f+J(I(P,R))) = (\overline{r_p})_{p\in P}$. Desse modo a função $\phi$ é sobrejetora. Se tivermos

$(\overline{f(p,p)})_{p\in P} = (\overline{g(p,p)})_{p\in P}$, então teremos $\overline{f(p,p)} = \overline{g(p,p)}$ para todo $p \in P$, ou ainda, $(f-g)(p,p) \in J(R)$ para todo $p \in P$. Do Teorema 1.43 seguirá que $f - g \in J(I(P,R))$, isto é, $f + J(I(P,R)) = g + J(I(P,R))$. Logo, a função $\phi$ é injetora. Portanto $\phi$ é um isomorfismo. □

Se $I$ é um ideal à direita de $I(P,R)$ que contém $J(I(P,R))$, a comutatividade de $\prod_{p\in P} \frac{R}{J(R)}$ juntamente com o corolário anterior nos mostra que $I$ é um ideal bilateral. Em particular, temos o seguinte corolário.

**Corolário 1.45.** *Sejam $P$ um poset localmente finito e $R$ um anel comutativo com unidade. Então o conjunto dos ideais maximais de $I(P,R)$ e o conjunto dos ideais à direita maximais de $I(P,R)$ coincidem.*

## 1.4 O Problema do Isomorfismo

Esta seção será dedicada a mostrar o teorema do isomorfismo para álgebras de incidência sobre um corpo $F$, isto é, dados $P$, $Q$ posets localmente finitos, se $I(P,F)$ é isomorfo a $I(Q,F)$ então $P$ é isomorfo a $Q$. Para mostrar este resultado, precisaremos dar algumas definições e mostrar alguns lemas.

**Definição 1.46.** *Seja $R$ um anel. Dizemos que um elemento não nulo $e \in R$ é um* idempotente *se $e^2 = e$. Dizemos também que dois elementos idempotentes $e, f \in R$ são* ortogonais *se $e \cdot f = f \cdot e = 0$. Se um idempotente $e$ de $R$ não pode ser escrito como $e = e' + e''$, onde $e'$ e $e''$ são idempotentes ortogonais de $R$, dizemos que $e$ é um* idempotente primitivo *de $R$.*

**Lema 1.47.** *Sejam $R$ um anel e $I$ um ideal de $R$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = \{0\}$. Suponhamos que $e, e', f, f'$ sejam idempotentes em $R$ tais que $e - e'$ e $f - f'$ sejam elementos de $I$. Então $eRf = \{0\}$ se, e somente se $e'Rf' = \{0\}$.*

*Demonstração.* Mostraremos que $eRf = \{0\}$ implica em $e'Rf' = \{0\}$. A recíproca segue por um argumento simétrico. Seja $a \in R$ e façamos $b = e' - e$ e $c = f' - f$. É suficiente mostrarmos que, para cada $n > 0$ inteiro, o elemento $e'af' \in I^n$. Usaremos indução sobre

$n$. Como

$$\begin{aligned} e'af' &= (e+b)a(f+c) = (ea+ba)(f+c) \\ &= eaf + baf + eac + bac \\ &= 0 + baf + eac + bac, \end{aligned}$$

segue que $e'af' \in I$, pois $b, c \in I$. Assumamos que $e'af' = d \in I^n$. Como $e'$ e $f'$ são idempotentes, temos

$$\begin{aligned} e'af' &= (e')^2 a (f')^2 = e'(e'af')f' \\ &= e'df' = (e+b)d(f+c) = (ed+bd)(f+c) \\ &= edf + bdf + edc + bdc \\ &= 0 + bdf + edc + bdc \in I^{n+1}. \end{aligned}$$

Segue então o resultado. □

**Lema 1.48.** *Sejam $P$ um poset localmente finito e $F$ um corpo. O conjunto $E = \{e_p : p \in P\}$ é um conjunto maximal de idempotentes primitivos dois a dois ortogonais de $I(P, F)$. Mais ainda, o conjunto $\bar{E} = \{e_p + J(I(P, F))\}$ é um conjunto maximal de idempotentes primitivos dois a dois ortogonais de $\dfrac{I(P,F)}{J(I(P,F))}$.*

*Demonstração.* Para todo $p \in P$, temos $e_p \neq 0$. Facilmente podemos ver que $e_p^2 = e_p$ e que, para $q \neq p$ em $P$, $e_p \cdot e_q = 0$. Assim $E$ é um conjunto formado por idempotentes dois a dois ortogonais. Notemos que o elemento $e_p$ é um idempotente primitivo para todo $p \in P$.

Suponhamos que exista um conjunto $E'$ com $E \subsetneq E'$ onde os elementos de $E'$ possuem as mesmas propriedades dos elementos de $E$. Desse modo, existe $f \neq 0$ em $E'$ tal que $f \notin E$. Para todo $p \in P$ temos que $f \cdot e_p = e_p \cdot f = 0$, ou seja, $f$ é ortogonal aos elementos de $E$. Com isso, para $p \leq q$ em $P$, segue que $0 = (e_p \cdot f)(p, q) = f(p, q)$, ou seja, $f$ é identicamente nula, um absurdo. Logo $E$ é maximal.

Notemos que $e_p \notin J(I(P, F))$, o que implica que $\bar{E}$ não possui elemento nulo. O fato de $E$ ser um conjunto de elementos idempotentes primitivos implica que $\bar{E}$ também o é.

Suponhamos que exista um conjunto $\bar{E}' \supsetneq \bar{E}$ onde os elementos de $\bar{E}'$ possuem as mesmas propriedades dos elementos de $\bar{E}$. Consideremos $f + J(I(P, F)) \in \bar{E}'$ não nulo tal que $f+J(I(P,F)) \notin \bar{E}$. Para todo $p \in P$, temos que $(f \cdot e_p)+J(I(P,F)) = 0+J(I(P,F))$. Assim, $(f \cdot e_p) \in J(I(P,F))$ e $(f \cdot e_p)(p,p) \in J(F) = \{0\}$, ou seja, $f(p,p) = 0$ para todo $p \in P$. Logo $f \in J(I(P,F))$, que implica em $f + J(I(P,F)) = 0 + J(I(P,F))$, o que é um absurdo. Portanto $\bar{E}$ é maximal. □

**Lema 1.49.** *Sejam $P$ um poset localmente finito e $F$ um corpo. Então*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (J(I(P,F)))^n = \{0\}.$$

*Demonstração.* Usaremos indução sobre $n$ para mostrar primeiramente que, se $f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_n$ com cada $f_i \in J(I(P,F))$, então $f(p,q) = 0$ sempre que $|[p,q]| \leq n$ com $p,q \in P$.

Para $n = 1$ temos dois casos a serem analisados. Se $|[p,q]| = 0$, segue que $p \nleq q$ e consequentemente $f(p,q) = 0$. Agora, se $|[p,q]| = 1$ temos que $p = q$ e, como $f = f_1 \in J(I(P,F))$, segue que $f(p,q) = 0$.

Consideremos agora $n > 1$ e que o resultado seja verdadeiro para todo inteiro positivo menor ou igual a $n$. Sejam $f = f_1 \cdots f_n \cdot f_{n+1}$ e $p,q \in P$ tais que $|[p,q]| \leq n+1$. Assim,

$$\begin{aligned} f(p,q) &= \sum_{p \leq r \leq q} (f_1 \cdots f_n)(p,r) f_{n+1}(r,q) \\ &= \sum_{p \leq r < q} (f_1 \cdots f_n)(p,r) f_{n+1}(r,q) + (f_1 \cdots f_n)(p,q) f_{n+1}(q,q). \end{aligned}$$

Como $f_{n+1} \in J(I(P,F))$, segue que $f_{n+1}(q,q) = 0$ e, assim

$$f(p,q) = \sum_{p \leq r < q} (f_1 \cdots f_n)(p,r) f_{n+1}(r,q).$$

Observemos que o número de elementos do conjunto $\{r \in P : p \leq r < q\}$ é menor ou igual a $n$ e, sendo assim, pela hipótese de indução $(f_1 \cdots f_n)(p,r) = 0$ para todo $p \leq r < q$. Logo $f(p,q) = 0$.

Seja $f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (J(I(P,R)))^n$. Dados $p,q \in P$, sendo $P$ localmente finito, temos que $|[p,q]| \leq k$ para algum inteiro não negativo $k$. Em particular $f \in (J(I(P,F)))^k$ e, desse modo, existem $f_1^i, \ldots, f_k^i \in J(I(P,F))$ com $i = 1, \ldots, m$, para algum inteiro não negativo $m$, tais que $f = \sum_{i=1}^{m} f_1^i \cdots f_k^i$. Pelo que provamos anteriormente segue que $f(p,q) = 0$. □

**Lema 1.50.** *Sejam $P$ um poset localmente finito, $F$ um corpo e $p_1, p_2 \in P$. Então $p_1 \leq p_2$ se, e somente se, $e_{p_1} I(P,F) e_{p_2} \neq \{0\}$.*

*Demonstração.* Se $p_1 \leq p_2$, tomando a função $e_{p_1p_2}$ segue que $e_{p_1} \cdot e_{p_1p_2} \cdot e_{p_2} = e_{p_1p_2} \neq 0$ e portanto $e_{p_1}I(P,F)e_{p_2} \neq \{0\}$.

Reciprocamente, consideremos agora $e_{p_1} \cdot I(P,F) \cdot e_{p_2} \neq \{0\}$. Então existe $g \in I(P,F)$ tal que $(e_{p_1} \cdot g \cdot e_{p_2})(p,q) \neq 0$ para algum par $p,q$ com $p \leq q$ em $P$. Mas, notemos que para todo $f \in I(P,F)$ temos

$$e_{p_1} \cdot f \cdot e_{p_2}(p,q) = \begin{cases} f(p_1,p_2) & \text{se } p = p_1 \text{ e } q = p_2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, devemos ter $g(p_1,p_2) \neq 0$ o que implica em $p_1 \leq p_2$. □

Agora, usando os lemas provados nesta seção, podemos enunciar e demonstrar o teorema do isomorfismo de posets ([21, Teorema 7.2.2]), o último resultado desta seção.

**Teorema 1.51.** *Sejam $F$ um corpo, $P$ e $Q$ posets localmente finitos e suponha que as álgebras de incidência $I(P,F)$ e $I(Q,F)$ sejam isomorfas como $F$-álgebras. Então $P$ e $Q$ são isomorfos como posets.*

*Demonstração.* Consideremos $\psi$ um isomorfismo entre $I(P,F)$ e $I(Q,F)$. Se $e$ é um idempotente não nulo de $I(P,F)$, temos que $e(p,p) = 1$ para algum $p \in P$.

Pelo Lema 1.48, os conjuntos $E = \{e_p : p \in P\}$ e $\bar{E} = \{e_p + J(I(P,F)) : p \in P\}$ são conjuntos maximais de elementos idempotentes primitivos dois a dois ortogonais de $I(P,R)$ e $\dfrac{I(P,F)}{J(I(P,F))}$, respectivamente. Como $\psi$ é um isomorfismo, os conjuntos $E' = \{\psi(e_p) : p \in P\}$ e $\bar{E}' = \{\psi(e_p) + J(I(Q,F)) : p \in P\}$ são conjuntos de elementos idempotentes primitivos dois a dois ortogonais de $I(Q,F)$ e $\dfrac{I(Q,F)}{J(I(Q,F))}$, respectivamente.

Pelo Corolário 1.44 temos o isomorfismo $\phi : \dfrac{I(Q,F)}{J(I(Q,F))} \to \prod_{r \in Q} F$ que leva o idempotente $\psi(e_p) + J(I(Q,F))$ no idempotente $(\psi(e_p)(r,r))_{r\in Q}$ para todo $p \in P$. Notemos que, para $p_1 \neq p_2$ em $P$, os elementos $(\psi(e_{p_1})(r,r))_{r\in Q}$ e $(\psi(e_{p_2})(r,r))_{r\in Q}$ são ortogonais.

Como os idempotentes primitivos dois a dois ortogonais de $\prod_{r\in Q} F$ são da forma $f_q = (a_r)_{r\in Q}$ onde $a_q = 1$ e $a_r = 0$ para todo $r \in Q$ e $r \neq q$, segue que para cada $p \in P$, existe um único $q = q(p) \in Q$ tal que $(\psi(e_p))(q,q) = 1$.

Assim sendo, $(\psi(e_p) - e_q)(r,r) = \psi(e_p)(r,r) - e_q(r,r) = 0$ se $r \neq q$ e $(\psi(e_p) - e_q)(q,q) = \psi(e_p)(q,q) - e_q(q,q) = 0$, ou seja, $(\psi(e_p) - e_q)(r,r) = 0$ para todo $r \in Q$. Desse modo, para cada $p \in P$ existe um único $q \in Q$ tal que $\psi(e_p) - e_q \in J(I(Q, F))$. Definimos então a função $\theta : P \to Q$ por $\theta(p) = q(p)$.

Vamos mostrar que $\theta$ é um isomorfismo de posets. Suponhamos que exista $q \in Q$ tal que $q \neq q(p)$ para todo $p \in P$. Desse modo $f_q \notin \phi(\bar{E}')$. Mas, $\phi^{-1}(f_q)$ é um idempotente primitivo e ortogonal a todos os elementos de $\bar{E}'$, contrariando a maximalidade de $\bar{E}'$. Assim, $\theta$ é sobrejetora.

Sejam agora $p_1, p_2 \in P$ tais que $\theta(p_1) = \theta(p_2) = q$. Desse modo, $\psi(e_{p_1})(q, q)$ e $\psi(e_{p_2})(q, q)$ são iguais a 1. Assim $(\psi(e_{p_1}) - \psi(e_{p_2}))(r, r) = 0$ para todo $r \in Q$, isto é, $\psi(e_{p_1} - e_{p_2}) \in J(I(Q, F))$. Como $\psi$ preserva o radical de Jacobson, temos que $e_{p_1} - e_{p_2} \in J(I(P, F))$, ou melhor, $(e_{p_1} - e_{p_2})(r, r) = 0$ para todo $r \in P$. Logo $p_1 = p_2$ e $\theta$ é injetora.

Consideremos agora $p_1 \leq p_2$ em $P$. Pelo Lema 1.50, temos que $p_1 \leq p_2$ se, e somente se, $e_{p_1} I(P, F) e_{p_2} \neq \{0\}$. Sendo $\psi$ um isomorfismo, $e_{p_1} I(P, F) e_{p_2} \neq \{0\}$ se, e somente se $\psi(e_{p_1}) I(Q, F) \psi(e_{p_2}) \neq \{0\}$. Como $\psi(e_{p_1}) - e_{\theta(p_1)}, \psi(e_{p_2}) - e_{\theta(p_2)} \in J(I(Q, F))$ e, pelo Lema 1.49, $\bigcap_{n=1}^{\infty} (J(I(Q, F)))^n = 0$, usando o Lema 1.47 segue que $\psi(e_{p_1}) I(Q, F) \psi(e_{p_2}) \neq \{0\}$ se, e somente se, $e_{\theta(p_1)} I(Q, F) e_{\theta(p_2)} \neq \{0\}$. Pelo Lema 1.50, $e_{\theta(p_1)} I(Q, F) e_{\theta(p_2)} \neq \{0\}$ se, e somente se, $\theta(p_1) \leq \theta(p_2)$. Logo, temos $p_1 \leq p_2$ se, e somente se, $\theta(p_1) \leq \theta(p_2)$. Portanto $\theta$ é um isomorfismo de posets e o resultado segue. $\square$

## 1.5 Automorfismos e Involuções em $I(P, R)$

Nesta seção apresentaremos definições e resultados sobre automorfismos e involuções em $I(P, R)$.

Dada uma $R$-álgebra $A$, o grupo formado por seus automorfismos com a operação de composição será denotado por $Aut(A)$. Em particular $Aut(I(P, R))$ é o grupo dos automorfismos da $R$-álgebra $I(P, R)$ com a operação de composição. Se $u \in I(P, R)$ é invertível, então $u$ determina um automorfismo $\psi_u$, dado por $\psi_u(f) = u \cdot f \cdot u^{-1}$ para todo $f \in I(P, R)$. Tal automorfismo é chamado de *automorfismo interno*. Notemos que $\psi_{u^{-1}} = (\psi_u)^{-1}$ e, se $u_1, u_2 \in I(P, R)$ são invertíveis, temos que $\psi_{u_1 u_2} = \psi_{u_1} \circ \psi_{u_2}$. Desse modo, o conjunto

$$Inn(I(P, R)) = \{\psi_u : u \text{ é invertível em } I(P, R)\}$$

é um subgrupo de $Aut(I(P, R))$.

Se $\alpha$ é um automorfismo de $P$, então $\alpha$ induz um automorfismo $\hat{\alpha}$ de $I(P,R)$ dado por $(\hat{\alpha}(f))(p,q) = f(\alpha^{-1}(p), \alpha^{-1}(q))$ para todo $f \in I(P,R)$ e todo par de elementos $p, q \in P$. Tal automorfismo é chamado de *automorfismo induzido* por $\alpha$. Da definição de $\hat{\alpha}$ segue que $\widehat{\alpha \circ \beta} = \hat{\alpha} \circ \hat{\beta}$ e que $\hat{\alpha}^{-1} = \widehat{\alpha^{-1}}$. Sendo assim, o conjunto

$$Aut(P) = \{\hat{\alpha} : \alpha \text{ é um automorfismo de } P\}$$

é um subgrupo de $Aut(I(P,R))$. Notemos que, de uma forma natural, $Aut(P)$ é isomorfo ao grupo dos automorfismos de $P$.

**Definição 1.52.** *Um elemento $\sigma \in I(P,R)$ é chamado* multiplicativo *se, sempre que $p \leq r \leq q$ são elementos de $P$, temos que $\sigma(p,q)$ é invertível em $R$ e $\sigma(p,q) = \sigma(p,r)\sigma(r,q)$.*

Como consequência da definição anterior, se $\sigma$ é multiplicativo, então $\sigma(p,p) = 1$ para todo $p \in P$. Em particular, $\sigma$ é invertível. Se $\sigma$ é multiplicativo, definimos o *automorfismo multiplicativo* $M_\sigma : I(P,R) \to I(P,R)$ por $M_\sigma(f) = \sigma * f$ (produto de Hadamard) para todo $f \in I(P,R)$.

Para cada $\sigma$ multiplicativo, definimos $\bar{\sigma} \in I(P,R)$, para $p, q \in P$, por

$$\bar{\sigma}(p,q) = \begin{cases} (\sigma(p,q))^{-1} & \text{se} \quad p \leq q \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Notemos que $\bar{\sigma}$ é multiplicativo e $M_{\bar{\sigma}} = (M_\sigma)^{-1}$. Mais ainda, se $\sigma$ e $\tau$ são multiplicativos, então $\sigma * \tau$ é multiplicativo e $M_{\sigma * \tau} = M_\sigma \circ M_\tau$. Portanto, denotamos por

$$Mult(I(P,R)) = \{M_\sigma : \sigma \text{ é multiplicativo}\}$$

o conjunto dos automorfismos multiplicativos de $I(P,R)$, que é um subgrupo de $Aut(I(P,R))$.

A próxima proposição nos dá uma caracterização dos automorfismos multiplicativos.

**Proposição 1.53.** *Sejam $P$ um poset localmente finito, $R$ um anel comutativo com unidade e $\psi \in Aut(I(P,R))$. Então $\psi \in Mult(I(P,R))$ se, e somente se, $\psi(e_p) = e_p$ para todo $p \in P$.*

*Demonstração.* Se $\sigma$ é multiplicativo, segue que $\sigma(p,p) = 1$ para todo $p \in P$. Assim,

$$(M_\sigma(e_p))(s,t) = \sigma(s,t)e_p(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad s = t = p \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

com $s,t \in P$. Logo, $(M_\sigma(e_p)) = e_p$ para todo $p \in P$.

Reciprocamente, suponhamos que $\psi$ seja um automorfismo de $I(P,R)$ tal que $\psi(e_p) = e_p$ para todo $p \in P$. Notemos que $e_{pq} = e_p \cdot e_{pq} \cdot e_q$ e, assim,

$$\psi(e_{pq}) = \psi(e_p \cdot e_{pq} \cdot e_q) = e_p \cdot \psi(e_{pq}) \cdot e_q = r(p,q)e_{pq}$$

para algum $r(p,q) \in R$. Desse modo, observando que para $f \in I(P,R)$ e $p,q \in P$ temos $e_p \cdot f \cdot e_q = f(p,q)e_{pq}$, segue que

$$\psi(f)(p,q) = (e_p \cdot \psi(f) \cdot e_q)(p,q) = \psi(e_p \cdot f \cdot e_q)(p,q) = \psi(f(p,q)e_{pq})(p,q) = r(p,q)f(p,q).$$

Como $\psi$ é sobrejetora, dados $p \leq q$, existe $g \in I(P,R)$ tal que $\psi(g) = e_{pq}$. Assim,

$$1 = e_{pq}(p,q) = \psi(g)(p,q) = r(p,q)g(p,q)$$

e, portanto, $r(p,q)$ é invertível. Além disso, quando $p \leq s \leq q$, temos $e_{pq} = e_{ps} \cdot e_{sq}$ e

$$r(p,q)e_{pq} = \psi(e_{pq}) = \psi(e_{ps} \cdot e_{sq}) = \psi(e_{ps}) \cdot \psi(e_{sq}) = r(p,s)r(s,q)e_{ps} \cdot e_{sq} = r(p,s)r(s,q)e_{pq}.$$

Logo $\sigma \in I(P,R)$, dada por

$$\sigma(p,q) = \begin{cases} r(p,q) & \text{se} \quad p \leq q \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é um elemento multiplicativo e $\psi = M_\sigma$. □

Alguns automorfismos multiplicativos podem ser descritos mais especificamente. Sejam $R^*$ o grupo dos elementos invertíveis de $R$ e $h$ uma função qualquer de $P$ em $R^*$. Então a função $\tau_h : P \times P \to R^*$ dada por

$$\tau_h(p,q) = \begin{cases} \frac{h(p)}{h(q)} & \text{se} \quad p \leq q \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é um elemento multiplicativo de $I(P,R)$. Tal função é chamada de *função fracionária.* Se $h_1$ e $h_2$ são duas funções de $P$ em $R^*$, definindo a multiplicação $(h_1 \cdot h_2)(p) = h_1(p)h_2(p)$ para todo $p \in P$, segue que $\tau_{h_1 \cdot h_2} = \tau_{h_1} * \tau_{h_2}$ e assim o conjunto

$$Frac(I(P,R)) = \{M_{\tau_h} : \tau_h \text{ é uma função fracionária}\}$$

é um subgrupo de $Mult(I(P,R))$. Tais automorfismos multiplicativos são chamados *automorfismos fracionários.*

**Proposição 1.54.** *Se $P$ é um poset localmente finito e $R$ é um anel comutativo com unidade, então*

$$Frac(I(P,R)) = Mult(I(P,R)) \cap Inn(I(P,R)).$$

*Demonstração.* Para mostrarmos que $Frac(I(P,R)) \subseteq Mult(I(P,R)) \cap Inn(I(P,R))$ é suficiente mostrarmos que $Frac(I(P,R)) \subseteq Inn(I(P,R))$. Seja $M_{\tau_h}$ um automorfismo fracionário de $I(P,R)$ com $h$ e $\tau_h$ definidos anteriormente. Definamos $u \in I(P,R)$ por

$$u(p,q) = \begin{cases} h(p) & \text{se} \quad p = q \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, $u$ é invertível e $\psi_u(f) = u \cdot f \cdot u^{-1}$ para cada $f \in I(P,R)$. Portanto,

$$\begin{aligned} (\psi_u(f))(p,q) &= u(p,p)f(p,q)u^{-1}(q,q) \\ &= \frac{h(p)}{h(q)} f(p,q) \\ &= M_{\tau_h}(f)(p,q). \end{aligned}$$

Isso nos dá a inclusão desejada.

Seja $\rho \in Mult(I(P,R)) \cap Inn(I(P,R))$. Então existe $u, \tau \in I(P,R)$ com $u$ invertível e $\tau$ multiplicativo tais que, para cada $f \in I(P,R)$ e cada par $p, q \in P$, temos

$$(\rho(f))(p,q) = (u \cdot f \cdot u^{-1})(p,q) = \tau(p,q)f(p,q).$$

Em particular, se $f = e_{pq}$, então

$$u(p,p)u^{-1}(q,q) = \tau(p,q).$$

Seja $h : P \to R^*$ dada por $h(p) = u(p,p)$, assim $\tau(p,q) = \tau_h(p,q)$ e $\rho = M_{\tau_h}$. Temos então o resultado provado. □

No início da seção 1.5 vimos que um automorfismo $\alpha$ de um poset $P$ induz um automorfismo $\hat{\alpha}$ em $I(P,F)$ onde $F$ é um corpo. Podemos também fazer o caminho inverso, ou seja, todo automorfismo sobre $I(P,F)$ induz um automorfismo sobre $P$.

**Proposição 1.55.** *Seja $\phi$ um automorfismo sobre $I(P,F)$. Para cada $p \in P$ existe um único $q_p \in P$ tal que $\phi(e_p) - e_{q_p} \in J(I(P,F))$. Mais ainda, $\alpha_\phi : P \to P$ definida por $\alpha_\phi(p) = q_p$ é um automorfismo de $P$.*

*Demonstração.* A demonstração é parte da demonstração do Teorema 1.51. $\square$

Consideremos o automorfismo $\alpha$ de $P$ e seu automorfismo induzido $\hat{\alpha}$ de $I(P,F)$. Seguindo a demonstração do Teorema 1.51, temos que para cada $p \in P$, existe um único elemento $q_p \in P$ tal que $\hat{\alpha}(e_p)(q_p,q_p) = 1$, ou seja, $e_p(\alpha^{-1}(q_p), \alpha^{-1}(q_p)) = 1$. Desse modo, devemos ter $q_p = \alpha(p)$ e, assim, o automorfismo induzido por $\hat{\alpha}$ em $P$ é o automorfismo $\alpha$. Considerando um elemento invertível $u$ em $I(P,F)$ e o automorfismo interno $\psi_u$ de $I(P,F)$, usando o mesmo raciocínio anterior, temos que para cada $p \in P$, existe um único elemento $q_p \in P$ tal que $\psi_u(e_p)(q_p,q_p) = 1$, ou ainda, $u(q_p,q_p)e_p(q_p,q_p)u^{-1}(q_p,q_p) = 1$. Assim, $e_p(q_p,q_p) = 1$, o que implica em $q_p = p$, ou seja, o automorfismo $\psi_u$ induz o automorfismo identidade em $P$. Usando novamente o Teorema 1.51 e observando o fato que, para um automorfismo multiplicativo $M_\sigma$, $M_\sigma(e_p) = e_p$ para todo $p \in P$, segue que $M_\sigma$ também induz o automorfismo identidade em $P$.

O próximo resultado ([21, Teorema 7.3.5]) é uma ferramenta muito importante no estudo dos automorfismos de $I(P,F)$, pois ele nos permite decompor um automorfismo de $I(P,F)$ numa composição de outros três automorfismos bem conhecidos.

**Teorema 1.56.** *Sejam $P$ um poset localmente finito e $F$ um corpo. Se $\rho \in Aut(I(P,F))$, então existem $\psi_u \in Inn(I(P,F))$, $\hat{\alpha} \in Aut(P)$ e $M_\sigma \in Mult(I(P,F))$ tais que $\rho = \psi_u \circ M_\sigma \circ \hat{\alpha}$.*

*Demonstração.* Como vimos no Lema 1.48, $\{e_p : p \in P\}$ é um conjunto maximal de idempotentes primitivos dois a dois ortogonais de $I(P,F)$. Como $\rho \in Aut(I(P,F))$, o conjunto $\{\rho(e_p) : p \in P\}$ também é um conjunto maximal de idempotentes dois a dois ortogonais de $I(P,F)$. Da Proposição 1.55 existe um isomorfismo $\beta : P \to P$ tal que $\rho(e_p)(\beta^{-1}(p), \beta^{-1}(p)) = 1$. Para obter o formato da decomposição de $\rho$ dada no enunciado, prosseguiremos na demonstração fazendo $\alpha = \beta^{-1}$. Assim, para todo $r \in P$, temos

$$[\rho(\widehat{\alpha^{-1}})(e_q) - e_q](r,r) = 0.$$

Desse modo, $[\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}}(e_q) - e_q] \in J(I(P,F))$ para cada $q \in P$.

Definamos agora

$$u(s,t) = \sum_{q \in P} [(\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_q) \cdot e_q](s,t).$$

Observemos que o único somando diferente de zero da equação acima ocorre quando $q = t$, ou seja, $u(s,t) = [(\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_t)](s,t)$ e em particular $u(s,s) = 1$ para cada $s \in P$. Logo $u$ é invertível.

Para cada $r \in P$ temos

$$u \cdot e_r = (\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_r) \cdot e_r,$$

enquanto que

$$(\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_r) \cdot u = (\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_r) \cdot e_r.$$

Sendo assim, temos que $u \cdot e_r = (\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_r) \cdot u$ e, consequentemente, $u \cdot e_r \cdot u^{-1} = (\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_r)$, ou seja, $\psi_u(e_r) = (\rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_r)$. Logo, $((\psi_u)^{-1} \circ \rho \circ \widehat{\alpha^{-1}})(e_r) = e_r$. Pela Proposição 1.53, $(\psi_u)^{-1} \circ \rho \circ \widehat{\alpha^{-1}}$ é um automorfismo multiplicativo de $I(P,F)$, isto é, existe um elemento multiplicativo $\sigma \in I(P,R)$ tal que $M_\sigma = (\psi_u)^{-1} \circ \rho(\widehat{\alpha^{-1}})$. Portanto $\rho = \psi_u \circ M_\sigma \circ \hat{\alpha}$ e segue o resultado. □

Visto que o automorfismo $\hat{\alpha}$ de $I(P,F)$ induz o automorfismo $\alpha$ em $P$ e que os automorfismos interno $\psi_u$ e multiplicativo $M_\sigma$ induzem o automorfismo identidade em $P$, segue que os automorfismos $\psi_u \circ M_\sigma \circ \hat{\alpha}$, $\psi_u \circ \hat{\alpha}$ e $M_\sigma \circ \hat{\alpha}$ induzem o automorfismo $\alpha$ em $P$.

Abordaremos a partir de agora as involuções sobre $I(P,R)$.

**Definição 1.57.** *Seja $A$ uma álgebra sobre um anel comutativo com unidade $R$. Um* antiautomorfismo *de $A$ é uma função bijetora $\phi : A \to A$ que é um homomorfismo de $R$-módulos e que satisfaz*

$$\phi(ab) = \phi(b)\phi(a)$$

*para todos $a, b \in A$.*

Denotaremos por $Aut^*(A)$ o conjunto formado por todos os automorfismos e todos os antiautomorfismos da álgebra $A$. É fácil ver que $Aut(A)$ e $Aut^*(A)$ são grupos com a composição de funções e que $Aut(A)$ é um subgrupo de $Aut^*(A)$.

**Definição 1.58.** *Uma* involução *sobre uma $R$-álgebra $A$ é um antiautomorfismo de ordem 2.*

A seguir temos a definição de álgebra oposta. Essa definição é importante para determinarmos quando $I(P,F)$ possui um antiautomorfismo.

**Definição 1.59.** *Dada uma $R$-álgebra $A$, a $R$-*álgebra oposta *de $A$, denotada por $A^{op}$, é formada pelos elementos de $A$ com a mesma adição e mesmo produto por escalar de $A$ mas com a multiplicação dada por*

$$a \cdot b = ba$$

*para todos $a, b \in A^{op}$ onde $ba$ é o produto de $b$ por $a$ em $A$.*

Antes de mostrarmos uma condição para que $I(P, F)$ tenha um antiautomorfismo, mostraremos o seguinte lema ([22, Lema 1]) envolvendo a álgebra oposta de $I(P, F)$.

**Lema 1.60.** *Sejam $P$ um poset localmente finito e $F$ um corpo. Então*

$$I(P, F)^{op} \cong I(P^{op}, F).$$

*Demonstração.* Seja $\phi : I(P, F)^{op} \to I(P^{op}, F)$ dada por $\phi(f) = \bar{f}$ onde $\bar{f}(p, q) = f(q, p)$. Aqui $\bar{f} \in I(P^{op}, F)$, $p, q \in P^{op}$ e $f(q, p)$ é o valor de $f$ quando considerada como um elemento de $I(P, F)$ e calculada no par $q, p$. Claramente, $\phi$ é uma função bijetora $F$-linear. Vamos mostrar que $\phi(f \cdot g) = \phi(f) \cdot \phi(g)$. Consideremos $p \leq q$ em $P^{op}$. Temos que $\phi(f \cdot g)(p, q)$ é o elemento $f \cdot g \in I(P, F)^{op}$ considerado como um elemento em $I(P, F)$ e calculado em $(q, p)$. Mas $f \cdot g$ em $I(P, F)^{op}$ coincide com $g \cdot f$ em $I(P, F)$. Assim,

$$\phi(f \cdot g)(p, q) = \sum_{q \leq r \leq p \text{ em } P} g(q, r) f(r, p).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \phi(f)\phi(g)(p, q) &= \sum_{p \leq r \leq q \text{ em } P^{op}} \bar{f}(p, r)\bar{g}(r, q) \\ &= \sum_{q \leq r \leq p \text{ em } P} f(r, p) g(q, r) \\ &= \sum_{q \leq r \leq p \text{ em } P} g(q, r) f(r, p). \end{aligned}$$

Portanto $\phi(f \cdot g) = \phi(f) \cdot \phi(g)$ e o resultado segue. □

O seguinte teorema ([22, Teorema 1]) nos dá uma condição para que $I(P, F)$ possua um antiautomorfismo.

**Teorema 1.61.** *Seja $P$ um poset localmente finito e seja $F$ um corpo. Então $I(P, F)$ possui um antiautomorfismo se, e somente se, $P$ é isomorfo a $P^{op}$.*

*Demonstração.* Suponhamos primeiramente que $P$ é isomorfo a $P^{op}$. Sendo assim, temos que $I(P, F) \cong I(P^{op}, F)$. Pelo Lema 1.60, $I(P, F)^{op} \cong I(P^{op}, F)$ e assim $I(P, F)$ é isomorfa a $I(P, F)^{op}$. Logo $I(P, F)$ possui um antiautomorfismo.

Reciprocamente, suponhamos que $I(P, F)$ possui um antiautomorfismo. Sendo assim, $I(P, F)$ e $I(P, F)^{op}$ são isomorfas. Novamente pelo Lema 1.60, temos que $I(P, F)^{op} \cong I(P^{op}, F)$ e assim $I(P, F)$ e $I(P^{op}, F)$ são isomorfas. Pelo Teorema 1.51 segue que $P$ é isomorfo a $P^{op}$. Portanto, temos o resultado. □

De maneira análoga ao que fizemos para os automorfismos de $P$, toda involução $\lambda$ sobre $P$ induz uma involução $\hat{\lambda}$ sobre $I(P, F)$ definida por $\hat{\lambda}(f)(p, q) = f(\lambda(q), \lambda(p))$ para todo $f \in I(P, F)$ e todos $p, q \in P$. Tal involução é chamada de *involução induzida por* $\lambda$. O teorema seguinte nos mostra que de fato $\hat{\lambda}$ é uma involução sobre $I(P, F)$ e que o teorema anterior também é verdadeiro para involuções.

**Teorema 1.62.** *Consideremos $P$ um poset localmente finito e $F$ um corpo. A álgebra de incidência $I(P, F)$ possui uma involução se, e somente se, $P$ possui uma involução.*

*Demonstração.* Suponhamos que $P$ possua uma involução $\lambda$. Definamos $\rho : I(P, F) \to I(P, F)$ por $\rho(f)(p, q) = f(\lambda(q), \lambda(p))$ (a involução induzida por $\lambda$ em $I(P, F)$), para todo $f \in I(P, F)$ e todo par $p, q \in P$. É fácil ver que $\rho$ é uma função $F$-linear bijetora. Sejam $f, g \in I(P, F)$ e $p \leq q$ em $P$. Então,

$$\rho(f \cdot g)(p, q) = (f \cdot g)(\lambda(q), \lambda(p)) = \sum_{\lambda(q) \leq r \leq \lambda(p)} f(\lambda(q), r) g(r, \lambda(p)).$$

Como $\lambda$ é uma involução de $P$, a restrição de $\lambda$ pode ser considerada como um isomorfismo dos intervalos $[p, q]$ e $[\lambda(q), \lambda(p)]$ onde esse último intervalo está em $P^{op} = \lambda(P)$. Fazendo $r = \lambda(t)$, temos

$$\rho(f \cdot g)(p, q) = \sum_{\lambda(q) \leq \lambda(t) \leq \lambda(p)} f(\lambda(q), \lambda(t)) g(\lambda(t), \lambda(p)).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (\rho(g) \cdot \rho(f))(p, q) &= \sum_{p \leq s \leq q} \rho(g)(p, s) \rho(f)(s, q) \\ &= \sum_{\lambda(q) \leq \lambda(s) \leq \lambda(p)} g(\lambda(s), \lambda(p)) f(\lambda(q), \lambda(s)) \\ &= \sum_{\lambda(q) \leq \lambda(s) \leq \lambda(p)} f(\lambda(q), \lambda(s)) g(\lambda(s), \lambda(p)). \end{aligned}$$

Logo, $\rho$ é um antiautomorfismo. Como

$$\begin{aligned}\rho^2(f)(p,q) &= \rho(\rho(f))(p,q) \\ &= \rho(f)(\lambda(q),\lambda(p)) \\ &= f(\lambda^2(p),\lambda^2(q)) \\ &= f(p,q)\end{aligned}$$

segue que $\rho$ é uma involução de $I(P, F)$.

Reciprocamente, suponhamos que $I(P, F)$ possua uma involução $\rho$. Pelo Teorema 1.61, $P$ é isomorfo a $P^{op}$. Mais ainda, podemos visualizar $\rho$ como um isomorfismo entre $I(P, F)$ e $I(P^{op}, F)$. Prosseguindo de maneira análoga ao que foi feito no Teorema 1.51, segue que para cada $p \in P$, existe um único $q = q(p) \in P^{op}$ tal que $\rho(e_p)(q, q) = 1$. Fazendo $\varphi(p) = q(p)$, a função $\varphi : P \to P^{op}$ é um isomorfismo de posets. Portanto, $P$ possui uma involução e o resultado segue. □

De maneira análoga à definição de involuções equivalentes no poset $P$, temos a seguinte definição.

**Definição 1.63.** *Duas involuções $\rho_1$ e $\rho_2$ sobre $I(P, F)$ são* equivalentes *se existe um automorfismo $\Phi$ de $I(P, F)$ tal que $\rho_1 \circ \Phi = \Phi \circ \rho_2$.*

A partir de uma involução $\lambda$ é possível definirmos uma outra involução sobre $I(P, F)$, que é diferente de $\hat{\lambda}$, se $\lambda$ não possui pontos fixos. Mas, antes de definirmos esta involução sobre $I(P, F)$, vamos decompor o conjunto $P$ usando os seus elementos maximais e minimais. O seguinte lema pode ser encontrado em [6, Lema 7].

**Lema 1.64.** *Seja $\lambda$ uma involução sobre $P$ onde $P$ é um poset finito. Se $p \in P$ é um elemento minimal (maximal), então $\lambda(p)$ é maximal (minimal).*

*Demonstração.* É suficiente mostrarmos que, se $p$ é minimal, então $\lambda(p)$ é maximal. O outro caso segue do fato que $\lambda$ é bijetora e $\lambda = \lambda^{-1}$. Suponhamos que $\lambda(p) \leq q$ para algum $q \in P$. Então $\lambda(q) \leq \lambda(\lambda(p))$ e assim $\lambda(q) \leq p$. Como $p$ é minimal, temos que $\lambda(q) = p$, e então $q = \lambda(p)$. □

Podemos encontrar a seguinte proposição em ([6, Proposição 8]).

**Proposição 1.65.** *Seja $\lambda$ uma involução sobre $P$. Então $P$ pode ser decomposto como $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3$, com $P_i$, $i = 1, 2, 3$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

*(i)* $P_1$, $P_2$ *e* $P_3$ *são dois a dois disjuntos;*

*(ii)* $P_3 = \{p \in P : \lambda(p) = p\}$*;*

*(iii) Se* $p \in P_1$*, então* $\lambda(p) \in P_2$*;*

*(iv) Se* $p \leq q$ *e* $q \in P_1$ $(p \in P_2)$*, então* $p \in P_1$ $(q \in P_2)$*.*

*Demonstração.* Denotemos por $Min(Q)$ e $Max(Q)$ o conjunto dos elementos minimais e o conjunto dos elementos maximais de um poset finito $Q$ qualquer, respectivamente. Definamos indutivamente a sequência $P^{(k)}$ de subconjuntos de $P$ tais que

$$P = P^{(0)} \supset P^{(1)} \supset \cdots \supset P^{(t)} = \emptyset,$$

do seguinte modo: façamos $P^{(0)} = P$ e $P^{(k+1)} = P^{(k)} \backslash (Min(P^{(k)}) \cup Max(P^{(k)}))$. Segue dessa definição que $P^{(k)} \supset P^{(k+1)}$. Agora, como $P^{(k)}$ é finito, $P^{(k)} \neq \emptyset$ implica em $Min(P^{(k)}) \cup Max(P^{(k)}) \neq \emptyset$. Assim, $P^{(t)} = \emptyset$ para algum inteiro positivo $t$.

Construímos os conjuntos $P_1$, $P_2$ e $P_3$ como segue:

Se $p \in Min(P^{(k)}) \backslash Max(P^{(k)})$ para algum inteiro não negativo $k$, então $p \in P_1$;

Se $p \in Max(P^{(k)}) \backslash Min(P^{(k)})$ para algum inteiro não negativo $k$, então $p \in P_2$;

Se $p \in Min(P^{(k)}) \cap Max(P^{(k)})$ para algum inteiro não negativo $k$ e $p \neq \lambda(p)$, então podemos escolher em qual conjunto ($P_1$ ou $P_2$) $p$ pertencerá, e o elemento $\lambda(p)$ pertencerá ao outro. Finalmente, se $p \in Min(P^{(k)}) \cap Max(P^{(k)})$ e $p = \lambda(p)$, então $p \in P_3$.

Verificaremos agora que $P_1$, $P_2$ e $P_3$, definidos acima, satisfazem as propriedades desejadas.

A primeira propriedade segue imediatamente das construções de $P_1$, $P_2$ e $P_3$. Para a segunda propriedade, devemos provar que, se $\lambda(p) = p$, então $p$ é simultaneamente um elemento maximal e um elemento minimal de $P^{(k)}$. Pelo Lema 1.64, $\lambda(P^{(n)}) = P^{(n)}$, para todo inteiro não negativo $n$, por que quando descartamos $p$, também descartamos $\lambda(p)$. Mais ainda, se $p$ é um elemento minimal (maximal) de $P^{(k)}$, então $\lambda(p)$ é um elemento maximal (minimal) de $P^{(k)}$. Como $\lambda(p) = p$, ele é maximal e minimal em $P^{(k)}$ simultaneamente.

A terceira propriedade segue do Lema 1.64 e da construção dos conjuntos $P_1$ e $P_2$.

Para a quarta propriedade, sejam $p < q$ com $q \in P_1$. Como $p \in P_1$, $p \in Min(P^{(k)})$, para algum inteiro não negativo $k$. Portanto, $p \in P^{(m)}$ para todo $m \leq k$. Como $p < q$ e $q \in Min(P^{(k)})$, então $p \notin P^{(n)}$ se $n \geq k$. Assim, $p \in Min(P^{(l)}) \cap Max(P^{(l)})$ para algum $l < k$. Mas $q \in P^{(l)}$ para este $l$ e, desse modo, $p$ não é maximal em $P^{(l)}$. Então $p$ é minimal e pertence à $P_1$. Finalmente, se $p \leq q$ e $p \in P_2$, então $\lambda(q) \leq \lambda(p)$ e $\lambda(p) \in P_1$. Portanto, $q = \lambda(\lambda(q)) \in P_2$. □

Seja $P$ um poset com uma involução $\lambda$ e decomponhamos $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ conforme a proposição acima. Se $P_3 = \emptyset$, ou seja, se $\lambda(p) \neq p$ para todo $p \in P$, consideremos $w \in I(P,F)$ definido por $w(p,q) = \delta_{pq}$ se $p \in P_1$ e $w(p,q) = -\delta_{pq}$ se $p \in P_2$, onde $\delta_{pq}$ é o delta de Kronecker. Observemos que $\hat{\lambda}(w) = -w$. Definamos $\sigma_\lambda : I(P,F) \to I(P,F)$ como sendo $\sigma_\lambda = \psi_w \hat{\lambda}$. Então, $\sigma_\lambda$ é uma involução e, para $f \in I(P,F)$, temos

$$\sigma_\lambda(f)(p,q) = \begin{cases} -f(\lambda(q),\lambda(p)) & \text{se } p < q \text{ e } p \in P_1, q \in P_2 \\ f(\lambda(q),\lambda(p)) & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Agora, se $P_3 \neq \emptyset$, não podemos definir a involução $\sigma_\lambda$ em $I(P,F)$ no caso em que $charF \neq 2$. Isso é uma consequência do seguinte lema ([6, Lema 18]).

**Lema 1.66.** *Dados um poset $P$ com uma involução $\lambda$ e um corpo $F$ tal que $char(F) \neq 2$, se $P_3 \neq \emptyset$ na decomposição $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3$, então não existe $u \in I(P,F)$ invertível tal que $\hat{\lambda}(u) = -u$.*

*Demonstração.* Seja $p_0$ um elemento de $P_3$. Se $u \in I(P,F)$ é tal que $\hat{\lambda}(u) = -u$, segue que $-u(p_0,p_0) = \hat{\lambda}(u)(p_0,p_0) = u(\lambda(p_0),\lambda(p_0)) = u(p_0,p_0)$. Como $charF \neq 2$, isso implica que $u(p_0,p_0) = 0$ e portanto $u$ não é invertível. □

A próxima proposição mostra que toda involução sobre $I(P,F)$ induz uma involução sobre $P$.

**Proposição 1.67.** *Seja $\rho$ uma involução sobre $I(P,F)$. Para cada $p \in P$, existe um único $q_p \in P$ tal que $\rho(e_p) - e_{q_p} \in J(I(P,F))$. Mais ainda, $\lambda_\rho : P \to P$ definida por $\lambda_\rho(p) = q_p$ é uma involução sobre $P$.*

*Demonstração.* Segue da demonstração do Teorema 1.62. □

Seja $\lambda$ uma involução sobre $P$ e consideremos a involução $\hat{\lambda}$ em $I(P, F)$. Da demonstração do Teorema 1.62 segue que para cada $p \in P$, existe um único elemento $q_p \in P$ tal que $1 = \hat{\lambda}(e_p)(q_p, q_p) = e_p(\lambda(q_p), \lambda(q_p))$. Assim, temos que $q_p = \lambda(p)$, isto é, a involução $\hat{\lambda}$ induz a involução $\lambda$ em $P$. Considerando agora a involução $\sigma_\lambda$ em $I(P, F)$, quando for possível definí-la, usando novamente a demonstração do Teorema 1.62, temos que para cada $p \in P$, existe um único elemento $q_p \in P$ tal que $1 = \sigma_\lambda(e_p)(q_p, q_p) = e_p(\lambda(q_p), \lambda(q_p))$. Desse modo, segue que $q_p = \lambda(p)$ e a involução induzida por $\sigma_\lambda$ em $P$ é a involução $\lambda$.

Encerraremos a última seção deste capítulo enunciando o teorema a respeito da decomposição de uma involução sobre $I(P, F)$ ([4, Teorema 15]). Sua demonstração segue de maneira análoga à demonstração do Teorema 1.56.

**Teorema 1.68.** *Sejam $P$ um poset localmente finito e $F$ um corpo. Se $\rho$ é uma involução sobre $I(P, F)$ então $\rho = \psi_u \circ M_\sigma \circ \hat{\lambda}$ onde $\psi_u$ é um automorfismo interno, $M_\sigma$ é um automorfismo multiplicativo e $\hat{\lambda}$ é a involução induzida pela involução $\lambda$ de $P$.*

Dada uma involução $\lambda$ sobre $P$, como a involução $\hat{\lambda}$ induz a involução $\lambda$ em $P$ e os automorfismos interno $\psi_u$ e multiplicativo $M_\sigma$ induzem o automorfismo identidade em $P$, segue que as involuções $\psi_u \circ \hat{\lambda}$, $M_\sigma \circ \hat{\lambda}$ e $\psi_u \circ M_\sigma \circ \hat{\lambda}$ induzem a involução $\lambda$ em $P$.

No caso em que o poset $P$ é uma cadeia finita e, portanto, sua álgebra de incidência sobre um anel comutativo com unidade é isomorfa à algebra das matrizes triangulares superiores, $\hat{\lambda}$ é a involução ortogonal e, no caso em que a cadeia possui uma quantia par de elementos, $\sigma_\lambda$ é a involução simplética. Por isso, optamos por chamar $\hat{\lambda}$ também de involução $\lambda$-*ortogonal* e $\sigma_\lambda$ de involução $\lambda$-*simplética*.

Capítulo 2

# Álgebras Livres e Identidades Polinomiais

No capítulo anterior abordamos assuntos básicos para o desenvolvimento deste trabalho, agora, neste segundo capítulo, trataremos de um dos assuntos mais relevantes desse trabalho, as identidades com involução. Começaremos definindo e apresentando alguns resultados sobre álgebras livres, identidades polinomiais ordinárias e sobre os geradores dos $T$-ideais das identidades ordinárias em suas respectivas seções. Essas três primeiras seções, tratando as identidades ordinárias, são de fundamental importância para um melhor entendimento das identidades polinomiais com involução, pois alguns resultados que valem para as identidades polinomiais ordinárias podem ser estendidos às identidades polinomiais com involução. Nas duas últimas seções trataremos de $G$-ação e $G$-graduação com o objetivo de apresentar a álgebra livre com involução $F\langle Y, Z\rangle$, a qual será detalhada na última seção desse capítulo e que será o objeto de estudos dos capítulos 4 e 5.

## 2.1 Álgebras Livres

Nesta seção definiremos álgebras livres, álgebra envolvente e álgebra envolvente universal. Também enunciaremos um resultado muito importante, o teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt. Para um maior aprofundamento no assunto, ver [12, Capítulo 1].

**Definição 2.1.** *Seja $\mathcal{B}$ uma classe de álgebras à qual pertence $A$ gerada, como uma álgebra, por um conjunto $X$. Dizemos que $A$ é* livre na classe $\mathcal{B}$ livremente gerada por $X$ *se, para qualquer álgebra $B \in \mathcal{B}$ e qualquer função $f : X \to B$, existir um homomorfismo $\varphi : A \to B$ que estende $f$. A cardinalidade do conjunto $X$ é chamada de* posto *da álgebra $A$. Temos o diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & B \\ A \arrow[ur, dotted, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

*onde $i$ denota a função inclusão de $X$ em $A$.*

Seja $F$ um corpo e seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ um conjunto enumerável, possivelmente finito. Denotamos por $F\langle X\rangle$ a $F$-álgebra dos polinômios nas variáveis $x_i$. Uma base para $F\langle X\rangle$ é o conjunto formado por 1 e todos os monômios da forma $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$ com $k \in \mathbb{N}$ e cada $i_j$, $j = 1, 2, \ldots k$, um inteiro positivo menor ou igual a $|X|$ podendo haver repetições de índices. Nesta álgebra, a adição e o produto por escalar são a adição e o produto por escalar usuais de monômios e a multiplicação é dada pela justaposição dos monômios, ou seja, a multiplicação entre os dois monômios $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$ e $x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_l}$ é o monômio $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_l}$ e estendida por linearidade a todos os elementos de $F\langle X\rangle$. Assim, a multiplicação de $F\langle X\rangle$ é associativa mas não comutativa. Os elementos de $F\langle X\rangle$ são chamados de *polinômios*.

Com essas definições e observações podemos mostrar a seguinte proposição.

**Proposição 2.2.** *A álgebra $F\langle X\rangle$ é livre, livremente gerada por $X$ na classe de todas as álgebras associativas com unidade.*

*Demonstração.* Seja $A$ uma álgebra associativa com unidade e $f : X \to A$ uma função qualquer. Para cada $x_i \in X$ podemos escrever $f(x_i) = a_i \in A$. Definindo $\varphi : F\langle X\rangle \to A$ por $\varphi(x_{i_1}\cdots x_{i_k}) = a_{i_1}\cdots a_{i_k}$ para cada monômio $x_{i_1}\cdots x_{i_k}$ de $F\langle X\rangle$ e estendendo por linearidade a todo elemento de $F\langle X\rangle$, segue que $\varphi$ é um homomorfismo que estende $f$ e o resultado segue. $\square$

A álgebra livre $F\langle X\rangle$ possui a seguinte propriedade universal: dada uma $F$-álgebra associativa com unidade $A$, qualquer função $f : X \to A$ pode ser unicamente estendida a um homomorfismo de álgebras $\varphi : F\langle X\rangle \to A$.

Apresentaremos agora a definição de álgebra envolvente e álgebra envolvente universal. Essa última definição, juntamente com o teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, que será enunciado a seguir, são ferramentas muito importantes para determinarmos uma base de $F\langle X\rangle$ que nos auxiliará da obtenção dos geradores dos $T$-ideais das identidades polinomiais com involução na álgebra de incidência que estudaremos nos capítulos 4 e 5.

**Definição 2.3.** *Se $A$ é uma álgebra associativa e a álgebra de Lie $L$ é isomorfa a uma subálgebra de $A^{(-)}$, dizemos que $A$ é uma* álgebra envolvente de $L$. *A álgebra associativa $U = U(L)$ é a* álgebra envolvente universal *de $L$, se $L$ é uma subálgebra de $U^{(-)}$ e $U$ possui a seguinte propriedade universal: para toda álgebra associativa $A$ e qualquer homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : L \to A^{(-)}$ existe um único homomorfismo de álgebras associativas $\psi : U \to A$ que estende $\phi$, isto é, $\psi$ é igual a $\phi$ sobre $L$.*

**Teorema 2.4.** *(Poincaré - Birkhoff - Witt) Toda álgebra de Lie $L$ possui uma única (a menos de isomorfismo) álgebra envolvente universal $U(L)$. Se $L$ possui uma base $\{v_i : i \in I\}$ e o conjunto de índices $I$ é ordenado, então $U(L)$ possui uma base*

$$v_{i_1} \cdots v_{i_n},\ i_1 \leq \cdots \leq i_n,\ i_k \in I \ e\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Não faremos a demonstração desse teorema, mas vamos dar uma ideia de uma maneira de demonstrá-lo. Escrevamos a multiplicação em $L$ na forma $v_i \times v_j = \sum\limits_{k \in I} \alpha_{ij}^k v_k$, com $i, j \in I$. Consideremos a álgebra associativa livre $F\langle X \rangle$, onde $X = \{x_i : i \in I\}$, e seu ideal $J$ gerado por todos os elementos na forma

$$[x_i, x_j] - \sum_{k \in I} \alpha_{ij}^k x_k \text{ com } i, j \in I.$$

Definamos $U = \dfrac{F\langle X \rangle}{J}$ e façamos $y_i = x_i + J$ com $i \in I$. Consideremos também a função $\tau : L \to U^{(-)}$ dada por $\tau(\sum\limits_{i \in I} \beta_i v_i) = \sum\limits_{i \in I} \beta_i y_i$ com $\beta_i \in F$. A função $\tau$ é um homomorfismo de espaços vetoriais e também de álgebras de Lie.

Dados uma álgebra associativa $A$ e um homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : L \to A^{(-)}$, escrevendo $\phi(e_i) = a_i \in A$, $i \in I$, o homomorfismo $\theta : F\langle X \rangle \to A$ dado por $\theta(x_i) = a_i \in A$, $i \in I$, nos permite encontrar um homomorfismo $\psi : \dfrac{F\langle X \rangle}{J} \to A$ tal que $\phi = \psi \circ \tau$ de modo único. Resta mostrar que $\tau$ é um mergulho de $L$ em $U$. Observemos que cada monômio $y_{j_1} \cdots y_{j_q}$ em $U$ pode ser escrito como uma combinação linear de monômios $y_{i_1} \cdots y_{i_p}$ com $i_1 \leq \cdots \leq i_p$ e $p \leq q$ usando a relação $y_j y_i = y_i y_j + \sum_{k \in I} \alpha_{ji}^k y_k$. Consideremos agora o espaço vetorial $F\langle Z \rangle$, com $Z = \{z_i : i \in I\}$, e definimos nele operadores chamados *reduções* da seguinte forma: para um monômio fixado $u = a z_j z_i b = z_{i_1} \cdots z_{i_s} z_j z_i z_{j_1} \cdots z_{j_t}$, com $j > i$, a redução substitui o monômio $u$ por $a(z_i z_j + \sum_{k \in I} \alpha_{ji} z_k)b$ e sobre os outros monômios atua identicamente. Claramente, para qualquer $f \in F\langle Z \rangle$, existe uma sequência finita de reduções que torna $f$ uma combinação linear dos monômios $z_{k_1}\cdots z_{k_p}$, com $k_1 \leq \cdots \leq k_p$ e chamamos essa combinação linear de *forma reduzida* de $f$. Podemos mostrar que forma reduzida de $f$ é única.

Desse modo, a álgebra $W$ que possui por base $\{z_{i_1}\cdots z_{i_p} : i_1 \leq \cdots \leq i_p, p \geq 0\}$ e multiplicação dada por

$$(z_{i_1}\cdots z_{i_p})(z_{j_1}\cdots z_{j_q}) = \text{ a forma reduzida de } z_{i_1}\cdots z_{i_p}z_{j_1}\cdots z_{j_q}$$

é uma álgebra associativa. A partir do homomorfismo $\pi : F\langle X\rangle \to W$ definido por $\pi(x_i) = z_i$, $i \in I$, concluímos que $W$ é imagem de $U$ por um homomorfismo, o que implica que os monômios $y_{i_1}\cdots y_{i_p}$ com $i_1 \leq \cdots \leq i_p$ são linearmente independentes em $U$. Assim sendo, $J = \ker(\pi)$ e, portanto, $U \cong W$. Isso mostra o mergulho. Mais detalhes dessa demonstração podem ser encontrados em [12, Teorema 1.3.2].

O teorema a seguir determina a álgebra envolvente universal dá algebra livre $F\langle X\rangle$.

**Teorema 2.5.** *(Witt) A subálgebra de Lie $L(X)$ de $F\langle X\rangle^{(-)}$ gerada por $X$ é isomorfa à álgebra de Lie livre tendo $X$ como um cojunto de geradores livres. Mais ainda, $U(L(X)) = F\langle X\rangle$.*

*Demonstração.* Seja $A$ qualquer álgebra associativa e seja $\phi : L(X) \to A^{(-)}$ um homomorfismo. A função $\phi_0 : X \to A$ definida por $\phi_0(x_i) = \phi(x_i)$ para todo $x_i \in X$ induz um único homomorfismo $\psi : F\langle X\rangle \to A$. Como $\phi(x_i) = \psi(x_i)$, obtemos que a restrição de $\psi$ sobre $L(X)$ é igual a $\phi$. Assim $U(L(X)) = F\langle X\rangle$. Se $T$ é uma álgebra de Lie e $A$ é sua álgebra envolvente, então qualquer função de $X$ em $T \subset A$ induz um homomorfismo de $F\langle X\rangle$ em $A$ que, restringido a $L(X)$, é um homomorfismo de $L(X)$ em $A^{(-)}$ que leva os geradores de $L(X)$ para $T$. Portanto a imagem de $L(X)$ está em $T$ e isso nos dá que $L(X)$ é livre na classe de todas as álgebras de Lie. □

## 2.2 Identidades Polinomiais Ordinárias

Nesta seção falaremos um pouco sobre as identidades polinomiais ordinárias. Isso nos ajudará a ter uma melhor compreensão do que veremos nas seções seguintes sobre identidades polinomiais com involução. Para maiores detalhes sobre este assunto, ver [12, Capítulo 2].

A menos que seja dito algo contrário, ao longo desta seção, $X$ denotará o conjunto infinito $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Seja $u$ um monômio em $F\langle X\rangle$. Chamamos de *comprimento* ou *grau* do monômio $u$, denotado por $\deg u$, o número de variáveis em $u$ contando-as com as possíveis repetições. Definimos também $\deg_{x_i} u$ como sendo o número de vezes que a variável $x_i$ aparece em $u$. O grau do polinômio $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, denotado por $\deg f$, é o maior grau entre os graus dos monômios de $f$. O grau de $f$ em $x_i$, denotado por $\deg_{x_i} f$, é o maior dos $\deg_{x_i} u$ com $u$ monômio de $f$.

Um polinômio $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X\rangle$ é chamado de *homogêneo* se o grau de cada um dos seus monômios é constante. Dizemos que $f$ é *homogêneo com respeito à variável* $x_i$ se, em todo monômio de $f$, $x_i$ possui o mesmo grau. O polinômio $f$ é chamado de *multi-homogêneo de multigrau* $(k_1, \dots, k_n)$ se, em todos os monômios que constituem $f$ e para todo $j$ entre 1 e $n$, a variável $x_j$ tem grau $k_j$. Um polinômio multi-homogêneo de multigrau $(1, \dots, 1)$ é chamado de *multilinear*. Denotaremos por $P_n$ o espaço vetorial de todos os polinômios em $F\langle X\rangle$ que são multilineares de grau $n$.

**Definição 2.6.** *Sejam $A$ uma $F$-álgebra e $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X\rangle$. Dizemos que $f$ é uma* identidade polinomial *de $A$ se $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ para todos $a_1, \dots, a_n \in A$. Escreveremos $f \equiv 0$ sobre $A$ para dizer que $f$ é uma identidade polinomial sobre $A$.*

Se $\Psi$ é o conjunto de todos os homomorfismos $\varphi : F\langle X\rangle \to A$, como $F\langle X\rangle$ é livre, gerada por $X$, na classe de todas as álgebras associativas com unidade, vemos que $f$ é uma identidade polinomial de $A$ se, e somente se, $f \in \bigcap_{\varphi\in\Psi} \ker(\varphi)$.

**Definição 2.7.** *Se $A$ satisfaz uma identidade polinomial não trivial, dizemos que $A$ é uma* álgebra com identidade polinomial*, ou resumidamente, $A$ é uma* PI-álgebra*.*

Vejamos alguns exemplos de PI-álgebras.

**Exemplo 2.8.** *Se $A$ é uma álgebra comutativa, $A$ é uma PI-álgebra pois satisfaz a identidade polinomial $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$.*

**Exemplo 2.9.** *Qualquer álgebra nilpotente $A$ é uma PI-álgebra. De fato, se $A^n = \{0\}$ para algum $n \geq 1$ natural, então $x_1 \cdots x_n$ é uma identidade polinomial de $A$.*

**Exemplo 2.10.** *A álgebra $UT_n(F)$ é uma PI-álgebra pois satisfaz a identidade polinomial*

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}].$$

*Para ver que isso é verdade, basta notarmos que o colchete de Lie de quaisquer duas matrizes triangulares superiores é uma matriz triangular superior que possui todas as entradas da diagonal principal iguais a zero. O conjunto de tais matrizes forma um ideal $I$ bilateral nilpotente de $UT_n(F)$ tal que $I^n = \{0\}$.*

**Exemplo 2.11.** *Toda $F$-álgebra $A$ de dimensão finita $n$ satisfaz o polinômio* standard

$$s_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n+1)}.$$

**Definição 2.12.** *Dada uma álgebra $A$, definimos*

$$Id(A) = \{f \in F\langle X \rangle : f \equiv 0 \textit{ sobre } A\}$$

*o conjunto das identidades polinomiais de $A$.*

Claramente $Id(A)$ é um ideal bilateral de $F\langle X \rangle$.

**Definição 2.13.** *Um ideal $I$ de uma álgebra $A$ é um $T$*-ideal de *$A$ se, para qualquer endomorfismo $\varphi : A \to A$, temos que $\varphi(I) \subseteq I$.*

Tal como ocorre com os ideais, a interseção de qualquer família de $T$-ideais de uma álgebra $A$ é também um $T$-ideal e, portanto, definimos o *$T$-ideal gerado por um subconjunto $S \subseteq A$* como sendo a interseção de todos os $T$-ideais de $A$ que contém $S$, o qual será denotado por $\langle S \rangle^T$.

Se $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é uma identidade polinomial para uma álgebra $A$, dados $g_1, \ldots, g_n \in F\langle X \rangle$, então $f(g_1, \ldots, g_n) \in Id(A)$. Como qualquer endomorfismo de $F\langle X \rangle$ é determinado por funções que levam $x_i \in X$ para algum $g_i \in F\langle X \rangle$, segue que o ideal $Id(A)$ é invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle X \rangle$. Concluímos então que o ideal $Id(A)$ é um $T$-ideal de $F\langle X \rangle$.

Podemos mostrar que, se $S \subseteq F\langle X \rangle$, então o $T$-ideal gerado por $S$ é o espaço vetorial gerado pelos elementos $g_0 f(g_1, \ldots, g_n) g_{n+1}$ com $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$ e $g_0, \ldots, g_{n+1} \in F\langle X \rangle$.

**Definição 2.14.** *Dado um conjunto não vazio $S \subseteq F\langle X \rangle$, a classe de todas as álgebras $A$ tal que $f \equiv 0$ sobre $A$ para todo $f \in S$ é chamada* variedade $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$ determinada *por $S$.*

Uma variedade $\mathcal{V}$ é chamada *não trivial* se $S \neq \{0\}$ e $\mathcal{V}$ é *própria* se é não trivial e contém uma álgebra não nula. Por exemplo, a classe de todas as álgebras comutativas forma uma variedade própria com $S = \{[x_1, x_2]\}$.

Notemos que, se $\mathcal{V}$ é a variedade determinada pelo conjunto $S$ e $\langle S \rangle^T$ é o $T$-ideal gerado por $S$, então $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\langle S \rangle^T)$ e $\langle S \rangle^T = \bigcap_{A \in \mathcal{V}} Id(A)$. Sendo assim, escrevemos $\langle S \rangle^T = Id(\mathcal{V})$ e, para cada variedade corresponde um $T$-ideal de $F\langle X \rangle$.

**Definição 2.15.** *Sejam $\mathcal{V}$ uma variedade, $A \in \mathcal{V}$ uma álgebra e $Y \subseteq A$ um subconjunto de $A$. Dizemos que $A$ é* relativamente livre sobre $Y$ na variedade $\mathcal{V}$ *se, para qualquer álgebra $B \in \mathcal{V}$ e para toda função $f : Y \to B$, existe um único homomorfismo $\varphi : A \to B$ estendendo $f$.*

Quando $\mathcal{V}$ é a variedade de todas as álgebras associativas com unidade, a definição acima coincide com a definição de álgebra livre sobre $Y$. A cardinalidade de $Y$ é chamada de *posto de $A$*.

**Teorema 2.16.** *Sejam $F\langle X \rangle$ a álgebra livre sobre $X$ e $\mathcal{V}$ uma variedade com $Id(\mathcal{V}) \subseteq F\langle X \rangle$. Então $\dfrac{F\langle X \rangle}{Id(\mathcal{V})}$ é uma álgebra relativamente livre sobre o conjunto $\overline{X} = \{x_i + Id(\mathcal{V}) : x_i \in X\}$. Mais ainda, quaisquer duas álgebras relativamente livres com respeito a $\mathcal{V}$ e de mesmo posto são isomorfas.*

*Demonstração.* Sejam $A \in \mathcal{V}$ e $f : \overline{X} \to A$ uma função. Definamos a função $g : X \to B$ dada por $g(x) = f(x + Id(\mathcal{V}))$. Como $F\langle X \rangle$ é uma álgebra livre sobre $X$, $g$ pode ser estendida a um homomorfismo $\overline{g} : F\langle X \rangle \to A$. Agora, se $h \in Id(\mathcal{V})$, então $h$ é uma identidade de $A$, assim $\overline{g}(h) = 0$. Isso mostra que $Id(\mathcal{V}) \subseteq \ker(\overline{g})$ e $f$ pode ser estendida a um homomorfismo $\varphi : \dfrac{F\langle X \rangle}{Id(\mathcal{V})} \to A$. Assim $\dfrac{F\langle X \rangle}{Id(\mathcal{V})}$ é uma álgebra relativamente livre sobre $\overline{X}$.

Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{V}$ álgebras relativamente livres de mesmo posto sobre $X = \{x_i : i \in I\}$ e $Y = \{y_i : i \in I\}$, respectivamente. Como $A_1$ e $A_2$ são álgebras relativamente livres com respeito a $\mathcal{V}$, existem homomorfismos $\varphi_1 : A_1 \to A_2$ e $\varphi_2 : A_2 \to A_1$ tais que $\varphi_1(x_i) = y_i$ e $\varphi_2(y_i) = x_i$ para todo $i \in I$. Claramente que $\varphi_1 \circ \varphi_2$ e $\varphi_2 \circ \varphi_1$ são funções identidades sobre $Y$ e $X$ respectivamente. Portanto $A_1$ e $A_2$ são isomorfas. $\square$

## 2.3 Os Geradores do $T$-ideal

Na seção anterior discorremos sobre as PI-álgebras e seus $T$-ideais. Agora, veremos como podemos determinar os geradores dos $T$-ideais sob algumas hipóteses para o corpo $F$. Para um melhor entendimento sobre este assunto, ver [12, Capítulos 4 e 5].

**Definição 2.17.** *Sejam $S$ um conjunto de polinômios em $F\langle X\rangle$ e $f \in F\langle X\rangle$. Dizemos que $f$ é uma* consequência dos polinômios em $S$ *ou, que $f$* segue de $S$, *se $f \in \langle S\rangle^T$. Dada uma álgebra $A$, dizemos que o conjunto $S \subseteq Id(A)$ é uma* base das identidades polinomiais de $A$ *se $Id(A) = \langle S\rangle^T$.*

**Definição 2.18.** *Dois conjuntos de polinômios são* equivalentes *se eles geram o mesmo $T$-ideal.*

**Lema 2.19.** *Seja $F$ um corpo infinito e seja $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ um polinômio escrito como $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_k$, onde cada parcela $f_j$ é homogênea com respeito à variável $x_1$ com grau $j$ (consideramos que o polinômio nulo é homogêneo em $x_1$ de qualquer grau). Se $f \in J$, sendo $J$ um $T$-ideal de $F\langle X\rangle$, então cada $f_j \in J$.*

*Demonstração.* Como $F$ é infinito, existem $\zeta_0, \ldots, \zeta_k \in F$ dois a dois distintos e não nulos. Para cada inteiro $j$ entre 0 e $k$, denotamos por $\varphi_j$ o endomorfismo de $F\langle X\rangle$ obtido a partir da aplicação $g_j : X \to F\langle X\rangle$ tal que $x_1 \mapsto \zeta_j x_1$ e $x_m \mapsto x_m$ se $m > 1$. Como $J$ é um $T$-ideal, $\varphi_j(f) \in J$ para cada $j$, ou seja, $\overline{\varphi_j(f)} = \overline{0}$ em $\dfrac{F\langle X\rangle}{J}$. Por outro lado, notemos que $\overline{\varphi_j(f)} = \overline{f_0} + \zeta_j\overline{f_1} + \cdots + \zeta_j^k\overline{f_k}$. Isso nos fornece que $(\overline{f_0}, \ldots, \overline{f_k})$ é solução do sistema linear homogêneo seguinte nas variáveis $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_k$ assumindo valores em $\dfrac{F\langle X\rangle}{J}$,

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \eta_0 & + & \zeta_0\eta_1 & + & \cdots & + & \zeta_0^k\eta_k & = & \overline{0} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \eta_0 & + & \zeta_k\eta_1 & + & \cdots & + & \zeta_k^k\eta_k & = & \overline{0}. \end{array}\right.$$

Mas a matriz reduzida desse sistema é a matriz de Vandermonde nos escalares $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_k$ cujo determinante é $\displaystyle\prod_{i<j}(\zeta_j - \zeta_i)$. Uma vez que tomamos os $\zeta_j$ dois a dois distintos, tal determinante não é nulo e, portanto, tal sistema só admite a solução trivial, de onde segue que $\overline{f_j} = \overline{0}$ para todo $j$ entre 0 e $k$, ou seja, cada $f_j \in J$. □

Dado um polinômio $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$, podemos escrever $f$ na forma $f = f_{k_1} + f_{k_2} + \cdots + f_{k_t}$ onde $f_{k_j}$ é um polinômio multi-homogêneo de multigrau $k_j =$

$(k_{1j}, k_{2j}, \ldots, k_{nj})$ com cada $k_{ij}$ inteiro não negativo, $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq t$. Chamamos cada $f_{k_j}$ de *componente multi-homogênea* de $f$.

O corolário seguinte segue diretamente do lema anterior.

**Corolário 2.20.** *Consideremos $F$ um corpo infinito e $J$ um $T$-ideal de $F\langle X\rangle$. O polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in J$ se, e somente se, cada uma de suas componentes multi-homogêneas pertence a $J$.*

Também, como consequência do lema anterior e de seu corolário temos:

**Teorema 2.21.** *O $T$-ideal de identidades polinomiais satisfeitas por uma PI-álgebra $A$ sobre um corpo infinito é gerado pelas identidades multi-homogêneas de $A$.*

Na próxima proposição descreveremos um processo muito útil para determinarmos os geradores de um $T$-ideal em $F\langle X\rangle$ quando $F$ tem característica zero.

**Proposição 2.22.** *Seja $A$ uma $F$-álgebra que satisfaz um polinômio $f \in F\langle X\rangle$ de grau $d$. Então existe $g \in Id(A)$ multilinear e de grau menor ou igual a $d$, e ainda $g \in \langle f\rangle^T$.*

*Demonstração.* Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in Id(A)$. Se cada variável $x_i$ aparece em $f$ com grau menor ou igual a 1, em cada monômio de $f$, escolhemos um monômio $\alpha x_1 x_2 \cdots x_m$ de grau mínimo em $f$ onde $\alpha$ é um coeficiente não nulo e substituimos por zero as variáveis restantes, obtendo assim uma identidade multilinear não nula $f(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ de grau menor ou igual ao grau de $f$. Desse modo, vamos assumir que exista uma variável, digamos, $x_1$ tal que $deg_{x_1} f = d > 1$. Seja $g(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n)$ dado por

$$g(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1 + y_2, x_2 \ldots, x_n) - f(y_1, x_2, \ldots, x_n) - f(y_2, x_2, \ldots, x_n),$$

onde $y_1, y_2 \in X$. Notemos que $g$ pertence a $Id(A)$. Vamos mostrar que $g$ é um polinômio não nulo. Suponhamos $g = 0$. Como qualquer função $h : X \to X$ pode ser estendida à um homomorfismo de $F\langle X\rangle$, substituindo $y_1$ e $y_2$ por $x_1$ em $g$, também obtemos um polinômio nulo, isto é,

$$g(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(2x_1, x_2 \ldots, x_n) - 2f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Se decompormos $f$ numa soma $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d$ onde $f_k$ é a soma dos monômios de grau $k$ em $x_1$, então a igualdade anterior implica em

$$-f_0 + (2^2 - 2)f_2 + \cdots + (2^d - 2)f_d = 0$$

o que contradiz o fato de $d$ ser maior que 1.

Como o $deg_{y_1} g = d - 1 < deg_{x_1} f$, por um argumento indutivo obtemos um polinômio multilinear como uma identidade sobre $A$. □

O processo descrito na proposição acima é chamado *processo de linearização* de um polinômio $f$.

**Teorema 2.23.** *Sejam $F$ um corpo de característica zero e $f(x_1, \ldots, x_m) \in F\langle X\rangle$. O $T$-ideal $\langle f\rangle^T$ de $F\langle X\rangle$ é gerado pelos polinômios multilineares de $F\langle X\rangle$ obtidos no processo de linearização de cada uma das componentes multi-homogêneas de $f$.*

*Demonstração.* Seja $f(x_1, \ldots, x_m)$ tal como no enunciado do teorema. Como $F$ possui característica zero e é infinito, pelo Teorema 2.21, $\langle f\rangle^T = \langle f_1, \ldots, f_k\rangle^T$ onde os $f_j$ são as componentes multi-homogêneas de $f$. Então podemos nos ater ao caso em que $f(x_1, \ldots, x_m)$ é multi-homogêneo. Supondo $deg_{x_1} f = d > 1$, vamos aplicar o processo de linearização em $f$ obtendo

$$g(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1 + y_2, x_2 \ldots, x_n) - f(y_1, x_2, \ldots, x_n) - f(y_2, x_2, \ldots, x_n).$$

Escrevendo $g$ como

$$g(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{d-1} g_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n),$$

onde $g_i$ é a componente homogênea de grau $i$ em $y_i$, obtemos que cada polinômio $g_i$, com $1 \leq i \leq d-1$ são conseguências de $f$.

Notemos que, para todo $i$,

$$g_i(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} d \\ i \end{pmatrix} f(y_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Como $charF = 0$ e $\begin{pmatrix} d \\ i \end{pmatrix} \neq 0$, o polinômio $f$ é consequência de qualquer $g_i$ com $1 \leq i \leq d-1$. Agora, podemos completar a prova usando o mesmo argumento indutivamente em $x_1$ e também nas outras variáveis de $f$. □

Apresentaremos agora o conceito de polinômios próprios. Esses polinômios são muito importantes para determinar os geradores de um $T$-ideal de identidades polinomiais de uma $PI$-álgebra.

**Definição 2.24.** *Um polinômio $f \in F\langle X\rangle$ é chamado* polinômio próprio*, se ele é uma combinação linear de produtos de comutadores*

$$f(x_1,\ldots,x_m) = \sum \alpha_{i,\ldots,j}[x_{i_1},\ldots,x_{i_k}]\cdots[x_{j_1},\ldots,x_{j_l}]$$

*com $\alpha_{i,\ldots,j} \in F$ (assumimos que 1 é um produto de um conjunto vazio de comutadores). Denotamos por $B$ o conjunto de todos os polinômios próprios em $F\langle X\rangle$ e definimos*

$$B_m = B \cap F\langle x_1,\ldots,x_m\rangle, m = 1,2,\ldots \text{ e } \Gamma_n = B \cap P_n, n = 0,1,2,\ldots$$

*isto é, $B_m$ é o conjunto dos polinômios próprios em $m$ variáveis e $\Gamma_n$ é o conjunto de todos os polinômios próprios multilineares de grau $n$.*

O próximo teorema, devido a Spiegel ([20, Teorema 1]), nos mostra que, se o poset $P$ é localmente finito e possui cadeias de comprimento no máximo $n$, então a álgebra de incidência $I(P,F)$, onde $F$ é um corpo infinito, possui uma identidade polinomial própria.

**Teorema 2.25.** *Sejam $P$ um poset localmente finito e $F$ um corpo infinito. Então $I(P,F)$ é uma PI-álgebra se, e somente se, $P$ é limitado. Se $P$ possui cadeias de comprimento no máximo $n$, então*

$$p(x_1,x_2,\ldots,x_{2n}) = \prod_{i=1}^{n}[x_{2i-1},x_{2i}]$$

*é uma identidade polinomial de grau $2n$ para $I(P,F)$ e nenhum outro polinômio de grau menor é uma identidade polinomial de $I(P,F)$.*

*Demonstração.* Suponhamos que $p_1 < p_2 < \cdots < p_m$ é uma cadeia em $P$ e que existe um identidade polinomial de $I(P,F)$ de grau $k$ com $k < 2m$. Pela Proposição 2.22, $I(P,F)$ possui uma identidade polinomial multilinear de grau no máximo $k$ e, portanto, um identidade multilinear de grau $2m-1$. Se $q(x_1,x_2,\ldots,x_{2m-1})$ denota tal identidade, podemos assumir que

$$q(x_1,x_2,\ldots,x_{2m-1}) = x_1x_2\cdots x_{2m-1} + \bar{q}(x_1,x_2,\ldots,x_{2m-1}),$$

onde $\bar{q}(x_1,x_2,\ldots,x_{2m-1})$ é um polinômio multilinear de grau $2m-1$ que não contém como parcela um monômio na forma $ax_1x_2\cdots x_{2m-1}$ para algum $a \in F$ e $a \neq 0$. Desse modo,

$$\begin{aligned} q(e_{p_1p_1},e_{p_1p_2},e_{p_2p_2},\ldots,e_{p_{m-1}p_m},e_{p_mp_m}) &= e_{p_1p_1}e_{p_1p_2}e_{p_2p_2}\cdots e_{p_{m-1}p_m}e_{p_mp_m} \\ &+ \bar{q}(e_{p_1p_1},e_{p_1p_2},e_{p_2p_2},\ldots,e_{p_{m-1}p_m},e_{p_mp_m}). \end{aligned}$$

Como $e_{ij}e_{rs} = e_{is}$ se $j = r$ e é zero se $j \neq s$, segue que

$$\bar{q}(e_{p_1p_1}, e_{p_1p_2}, e_{p_2p_2}, \ldots, e_{p_{m-1}p_m}, e_{p_mp_m}) = 0,$$

ou seja, $q(e_{p_1p_1}, e_{p_1p_2}, e_{p_2p_2}, \ldots, e_{p_{m-1}p_m}, e_{p_mp_m})(p_1, p_m) = 1$, o que contradiz o fato de $q$ ser uma identidade polinomial de grau $2m-1$. Concluímos então que, se $P$ possui uma cadeia de comprimento $m$, qualquer identidade polinomial de $I(P,F)$ deve ter grau no mínimo igual a $2m$. Em particular, se $P$ não é limitado, então $I(P,F)$ não é uma PI-álgebra.

Para completar a prova, é suficiente mostrar que, se $P$ possui cadeias de comprimento no máximo $n$, então $p(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ é uma identidade polinomial de $I(P,F)$. Definamos,

$$Z(I(P,F)) = \{f \in I(P,F) : f(p,p) = 0 \text{ para todo } p \in P\}.$$

Então $Z(I(P,F))$ é um ideal de $I(P,F)$. Mais que isso, como $P$ possui cadeias de comprimento no máximo $n$, qualquer produto na forma $g_1g_1 \cdots g_n$, com $g_i \in Z(I(P,F))$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, é nulo, assim $Z(I(P,F))$ é um ideal nilpotente com $(Z(I(P,F)))^n = \{0\}$. Se $f, g \in I(P,F)$ então $[f,g] \in Z(I(P,F))$ e,

$$p(f_1, f_2, \ldots, f_{2n}) = \prod_{i=1}^{n} [f_{2n-1}, f_{2i}]$$

é um produto de $n$ elementos de $Z(I(P,F))$, portanto, igual a zero, para todos $f_1, f_2, \ldots, f_{2n} \in I(P,F)$. Logo, o resultado segue. $\square$

O espaço vetorial $L(X)$, com $X = \{x_i : i \in I\}$ e $I$ um conjunto ordenado de índices, possui uma base formada por alguns dos elementos

$$x_1, x_2, \ldots, [x_{i_1}, x_{i_2}], [x_{j_1}, x_{j_2}], \ldots, [x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}], \ldots.$$

Na proposição a seguir usaremos esta base ordenada de $L(X)$ e veremos a relação dos polinômios próprios com as identidades polinomiais de uma PI-álgebra.

**Proposição 2.26.** *(i) Consideremos a álgebra de Lie livre $L(X)$ com a base ordenada*

$$x_1, x_2, \ldots, [x_{i_1}, x_{i_2}], [x_{j_1}, x_{j_2}], \ldots, [x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}], \ldots.$$

*O espaço vetorial $F\langle X\rangle$ possui uma base*

$$x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m} [x_{i_1}, x_{i_2}]^b \cdots [x_{l_1}, \ldots, x_{l_t}]^c$$

*onde,* $a_1, \dots, a_m, b, \dots, c \geq 0$ *e* $[x_{i_1}, x_{i_2}] < \cdots < [x_{l_1}, \dots, x_{l_t}]$*. Os elementos da base de* $F\langle X\rangle$ *com* $a_1 = \cdots = a_m = 0$ *formam uma base para o espaço vetorial* $B$ *dos polinômios próprios.*

*(ii) Se* $A$ *é uma PI-álgebra com unidade sobre um corpo infinito* $F$*, então toda identidade polinomial de* $A$ *segue das identidades próprias (isto é, pelas que estão em* $Id(A) \cap B$*). Se* $\operatorname{char} F = 0$*, então as identidades polinomiais de* $A$ *seguem das identidades multilineares próprias (isto é, das que estão em* $Id(A) \cap \Gamma_n$*,* $n = 2, 3, \dots$*).*

*Demonstração. (i)* A primeira afirmação sobre a base de $F\langle X\rangle$ segue do Teorema 2.5 e do Teorema 2.4. A afirmação da base de $B$ também segue do Teorema 2.4. Se expressarmos o produto dos comutadores

$$[x_{i_1}, \dots, x_{i_s}] \cdots [x_{j_1}, \dots, x_{j_t}]$$

como uma combinação linear dos elementos da base de $F\langle X\rangle$, o ponto chave é que, para quaisquer dois comutadores consecutivos (ambos da base de $L(X)$) que estão em uma ordem "errada",

$$\cdots [x_{b_1}, \dots, x_{b_l}][x_{a_1}, \dots, x_{a_k}] \cdots, \text{ com } [x_{b_1}, \dots, x_{b_l}] > [x_{a_1}, \dots, x_{a_k}],$$

trocamos o produto $[x_{b_1}, \dots, x_{b_l}][x_{a_1}, \dots, x_{a_k}]$ pela soma

$$[x_{a_1}, \dots, x_{a_k}][x_{b_1}, \dots, x_{b_l}] + [[x_{b_1}, \dots, x_{b_l}], [x_{a_1}, \dots, x_{a_k}]].$$

Como a segunda parcela pertence a $L(X)$ e é uma combinação de comutadores da base de $L(X)$, podemos aplicar argumentos indutivos e ver que os elementos de $B$ são combinações lineares de

$$[x_{i_1}, x_{i_2}]^b \cdots [x_{l_1}, \dots, x_{l_t}]^c$$

como desejado.

*(ii)* Seja $f(x_1, \dots, x_m)$ uma identidade polinomial. Pelo Teorema 2.21, podemos assumir que $f$ é homogênea em cada uma das suas variáveis. Escrevemos $f$ na forma

$$f = \sum \alpha_a x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m} w_a(x_1, \dots, x_m), \alpha_a \in F$$

onde $w_a(x_1, \dots, x_m)$ é uma combinação linear de

$$[x_{i_1}, x_{i_2}]^b \cdots [x_{l_1}, \dots, x_{l_t}]^c.$$

Claramente, se trocarmos por 1 uma das variáveis em um comutador $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}]$, o comutador se anula. Como $f(1+x_1, x_2, \ldots, x_m)$ é também uma identidade polinomial de $A$, obtemos que

$$f(1+x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum \alpha_a \sum_{i=0}^{a_1} \begin{pmatrix} a_1 \\ i \end{pmatrix} x_1^i x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m} w_a(x_1, \ldots, x_m) \in Id(A).$$

A componente homogênea de grau mínimo com respeito a $x_1$ é obtida das parcelas com $a_1$ maximal entre aqueles $\alpha_a \neq 0$. Pelo Lema 2.19, obtemos que

$$\sum_{a_1 max} \alpha_a x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m} w_a(x_1, \ldots, x_m) \in Id(A).$$

Multiplicando à esquerda essa identidade polinomial por $x_1^{a_1}$ e subtraindo esse produto de $f(x_1, \ldots, x_m)$, obtemos uma identidade que é semelhante a $f(x_1, \ldots, x_m)$ mas envolvendo valores menores de $a_1$. Por indução, temos que

$$\sum_{a_1 fixo} \alpha_a x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m} w_a(x_1, \ldots, x_m) \in Id(A).$$

Continuando esse processo nas variáveis restantes, obtemos que

$$w_a(x_1, \ldots, x_m) \in Id(A),$$

para todo $a$, e isso completa a prova. A parte “multilinear”da afirmação é também clara. Começando com qualquer identidade polinomial multilinear para $A$ (Teorema 2.23) e fazendo exatamente o mesmo processo como acima, obtemos que a identidade segue de algumas identidades próprias que também são multilineares. □

**Teorema 2.27.** *Seja $A$ uma PI-álgebra com unidade sobre um corpo infinito $F$. Seja $\{w_j(x_1, \ldots, x_m) : j = 1, 2, \ldots\}$ uma base de $B_m(A) = \dfrac{F\langle x_1, \ldots, x_m\rangle \cap B}{Id(A) \cap F\langle x_1, \ldots, x_m\rangle \cap B}$, o espaço vetorial das identidades polinomiais da àlgebra relativamente livre $F_m(A) = \dfrac{F\langle x_1, \ldots, x_m\rangle}{Id(A)}$. Então $F_m(A)$ possui uma base*

$$\{x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m} w_j(x_1, \ldots, x_m) : a_i \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots\}.$$

*Demonstração.* Consideremos o polinômio homogêneo $w_j'(x_1, \ldots, x_m) \in F_m = F\langle x_1, \ldots, x_m\rangle \cap B$ de modo que $\pi(w_j'(x_1, \ldots, x_m)) = w_j(x_1, \ldots, x_m)$ onde $\pi$ é o homomorfismo canônico $\pi : F_m \to F_m(A)$. Escolhemos uma base homogênea arbitrária $\{v_k : k = 1, 2, \ldots\}$ de $B_m \cap Id(A)$. Então,

$$\{w_j(x_1, \ldots, x_m), v_k : j = 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots\}$$

é uma base formada polinômios homogêneos de $B_m$. Usando a Proposição 2.26, temos que $F_m(A)$ é gerada pelos polinômios na forma

$$x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m} w_j(x_1, \ldots, x_m) \text{ com } a_i \geq 0 \text{ e } j = 1, 2, \ldots,$$

e esses polinômios formam um conjunto linearmente independente. □

O próximo teorema nos dará uma maneira de determinarmos uma base para a álgebra relativamente livre $\dfrac{F\langle X\rangle}{Id(UT_n(F))}$. A maneira como determinaremos tal base nos será muito útil nos capítulos 4 e 5 onde estudaremos os $T$-ideais com involuções sobre as álgebras de incidência de posets que satisfazem determinadas hipóteses.

**Teorema 2.28.** *Seja $F$ qualquer corpo infinito e seja $UT_n(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem $n$.*

*(i) A identidade polinomial*

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}]$$

*forma uma base das identidades polinomiais de $UT_n(F)$.*

*(ii) A álgebra relativamente livre $\dfrac{F\langle X\rangle}{Id(UT_n(F))}$ possui uma base constituída de todos os produtos*

$$x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m} [x_{i_{11}}, x_{i_{21}}, \ldots, x_{i_{p_1 1}}] \cdots [x_{i_{1r}}, x_{i_{2r}}, \ldots, x_{i_{p_r r}}]$$

*onde o número $r$ de comutadores envolvidos é menor ou igual a $n-1$ e os índices em cada comutador $[x_{i_{1s}}, x_{i_{2s}}, \ldots, x_{i_{p_s s}}]$ satisfazem $i_{1s} > i_{2s} \leq \cdots \leq i_{p_s s}$.*

*Demonstração.* Do Exemplo 2.10 temos que $[x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}]$ é uma identidade polinomial de $UT_n(F)$. Mostraremos que todas as outras identidades polinomiais de $UT_n(F)$ seguem dessa identidade. Veremos que, módulo essa identidade, todo elemento de $F\langle X\rangle$ é uma combinação linear de elementos da parte *(ii)* do teorema e que qualquer combinação linear desses elementos não se anula sobre a álgebra $UT_n(F)$. Por *(ii)* da Proposição 2.26 podemos trabalhar com identidades polinomiais próprias somente. É conveniente trabalharmos também com a álgebra relativamente livre $\dfrac{F\langle X\rangle}{\langle [x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}]\rangle^T}$, em outras palavras, trabalharemos módulo o $T$-ideal $\langle [x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}]\rangle^T$.

Por simplicidade e para melhor visualizarmos como a demonstração é feita, faremos a demonstração para os casos $n = 2$ e $n = 3$. O caso geral segue de maneira análoga.

Seja $n = 2$. Então, em $\dfrac{F\langle X\rangle}{\langle [x_1,x_2][x_3,x_4]\rangle^T}$ temos que $[x_1,x_2][x_3,x_4] = 0$. Desse modo, por *(i)* da Proposição 2.26, o subespaço dos polinômios próprios em $\dfrac{F\langle X\rangle}{\langle [x_1,x_2][x_3,x_4]\rangle^T}$ é gerado por 1 e todos os comutadores na forma

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}] \text{ com } k \geq 2. \tag{2.1}$$

Usando a identidade,

$$\begin{aligned} 0 &= [x_1,x_2][x_3,x_4] - [x_3,x_4][x_1,x_2] = [[x_1,x_2],[x_3,x_4]] \\ &= [x_1,x_2,x_3,x_4] - [x_1,x_2,x_4,x_3], \end{aligned}$$

segue que, em $\dfrac{F\langle X\rangle}{\langle [x_1,x_2][x_3,x_4]\rangle^T}$ temos,

$$[x_{j_1}, x_{j_2}, x_{\sigma(i_1)}, \ldots, x_{\sigma(i_p)}] = [x_{j_1}, x_{j_2}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}]$$

onde $\sigma$ é uma permutação de $S_p$. Mais que isso, a identidade de Jacobi e a anticomutatividade,

$$[x_3,x_2,x_1] = [x_3,x_1,x_2] - [x_2,x_1,x_3], \ [x_1,x_2] = -[x_2,x_1],$$

permitem mudar de lugar as variáveis nas três primeiras posições do colchete em (2.1).

Desse modo, podemos assumir que $\dfrac{B}{\langle [x_1,x_2][x_3,x_4]\rangle^T}$ é gerado por 1 e pelos comutadores

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_k}] \text{ com } i_1 > i_2 \leq i_3 \leq \cdots \leq i_k.$$

Mostraremos que esses elementos são linearmente independentes módulo o $T$-ideal $Id(UT_2(F))$. Seja

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_i \alpha_i [x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}] \text{ com } i_1 > i_2 \leq \cdots \leq i_k \text{ e } \alpha_i \in F,$$

uma identidade polinomial de $UT_2(F)$. Consideremos $i_1$ como sendo o maior índice onde ocorre $\alpha_i \neq 0$. Fazendo as substituições,

$$\phi(x_{i_1}) = e_{12} + \zeta_{i_1} e_{22} \text{ e } \phi(x_j) = \zeta_j e_{22},$$

onde $j \neq i_1$ e $\zeta_{i_1}, \zeta_j \in F$, depois de álguns cálculos, podemos escolher os $\zeta_j$ de modo que

$$f(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_m)) = \left( \sum_{i_1 fixo} \alpha_i \zeta_{i_2} \cdots \zeta_{i_n} \right) e_{12} \neq 0.$$

Portanto todos os coeficientes $\alpha_i$ são nulos. Usando o Teorema 2.27 segue que a prova está completa para o caso $n = 2$.

Consideremos agora $n = 3$. Assim, em $\dfrac{F\langle X\rangle}{\langle [x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6]\rangle^T}$ temos

$$[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6] = 0$$

e o subespaço dos polinômios próprios em $\dfrac{F\langle X\rangle}{\langle [x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6]\rangle^T}$, pela Proposição 2.26 item *(i)*, é gerado por 1, por todos os comutadores da forma $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}]$ com $k \geq 2$ e todos os produtos de dois comutadores $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}][x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_t}]$.

Aplicando a identidade

$$[[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5] = [[x_1, x_2, x_5], [x_3, x_4]] + [[x_1, x_2], [x_3, x_4, x_5]]$$

vemos que $[[x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}], [x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}], x_{k_1}, \ldots, x_{k_t}]$ é uma combinação linear de produtos de dois comutadores. Como no caso $n = 2$, vemos que $\dfrac{B}{\langle [x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6]\rangle^T}$ é gerado por 1, pelos comutadores

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}] \text{ com } i_1 > i_2 \leq \cdots \leq i_k$$

e pelos produtos de comutadores

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}][x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_t}] \text{ com } i_1 > i_2 \leq \cdots \leq i_s \text{ e } j_1 > j_2 \leq \cdots \leq j_t.$$

É suficiente mostrar que esses elementos são linearmente independentes. Considerando uma combinação linear dos elementos acima e trocando $x_1, x_2, \ldots$ por matrizes triangulares superiores de ordem 2 (consideradas como matrizes triangulares superiores de ordem 3 com zero nas entradas da terceira linha e terceira coluna) podemos assumir que

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum \alpha_{ij}[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}][x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_t}] \text{ com } \alpha_{ij} \in F.$$

Agora, consideremos o par $(i_1, j_1)$ como sendo o maior par onde $\alpha_{ij} \neq 0$ (primeiro escolhemos o maior $i_1$ e, entre tais pares, escolhemos o que possui maior $j_1$). Seja a substituição,

$$\varphi(x_{i_1}) = e_{12} + \zeta_{i_1}e_{22} + \eta_{i_1}e_{33}, \ \varphi(x_{j_1}) = e_{13} + \zeta_{j_1}e_{22} + \eta_{j_1}e_{33},$$

$$\varphi(x_l) = \zeta_l e_{22} + \eta_l e_{33}, \text{ com } l \neq i_1, j_1 \text{ e } \zeta_{i_1}, \eta_{i_1}, \zeta_{j_1}, \eta_{j_1}, \zeta_l, \eta_l \in F$$

e, caso seja $i_1 = j_1$, façamos

$$\varphi(x_{i_1}) = e_{12} + e_{23} + \zeta_{i_1} e_{22} + \eta_{i_1} e_{33}.$$

Novamente, depois de alguns cálculos, podemos escolher os $\zeta_l$ e $\eta_l$ de modo que

$$f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_m)) = \left( \sum \alpha_{ij} \zeta_{i_2} \cdots \zeta_{i_s} (\eta_{j_2} - \zeta_{j_2}) \cdots (\eta_{j_t} - \zeta_{j_t}) \right) e_{13} \neq 0.$$

Portanto os produtos de dois comutadores formam um conjunto linearmente independentes módulo as identidades polinomiais de $UT_3(F)$. Do Teorema 2.27 temos a prova completa para o caso $n = 3$.

$\square$

## 2.4 $G$-ação, $G$-graduação e Álgebras Livres

Nesta seção passaremos a tratar de um dos assuntos que é objeto de estudo deste trabalho, a álgebra livre com involução. Começaremos a seção definindo álgebra livre sobre $X$ com $G$-ação. O assunto tratado aqui foi extraído de [13, Seções 3.1 e 3.3].

Sejam $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ um conjunto de variáveis e $G$ um grupo finito com um subgrupo $H$ de índice menor ou igual a 2. Construímos $F\langle X|G\rangle$, a *álgebra livre sobre $X$ com $G$-ação* da seguinte forma: a álgebra $F\langle X|G\rangle$ é a álgebra livremente gerada pelo conjunto $\{x^g = g(x) : x \in X, g \in G\}$. O grupo $G$ age sobre $F\langle X|G\rangle$ de uma maneira natural. Para $g_1, g_2 \in G$, temos que $(x^{g_1})^{g_2} = x^{g_2 g_1}$ e estendemos essa ação a todos os monômios de $F\langle X|G\rangle$ como segue: se $v$ e $w$ são monômios e $g \in G$, definimos $(vw)^g = v^g w^g$ se $g \in H$ e $(vw)^g = w^g v^g$ se $g \in G \backslash H$. Essa ação é estendida por linearidade a todo $F\langle X|G\rangle$. Assim, $G$ age sobre $F\langle X|G\rangle$ com $H$ sendo os automorfismos e $G\backslash H$ sendo os antiautomorfismos. Os elementos de $F\langle X|G\rangle$ são chamados de *$G$-polinômios*.

Sejam agora $A$ uma $F$-álgebra e $G$ um subgrupo finito de $Aut^*(A)$, o grupo dos automorfismos e antiautomorfismos de $A$, agindo sobre $A$, ou seja, $A$ é uma álgebra com $G$-ação. Notemos que $H = G \cap Aut(A)$, é um subgrupo de índice no máximo 2. Podemos então construir a $F$-álgebra $F\langle X|G\rangle$ com este $G$ e este $H$ subgrupo de $G$. A $F$-álgebra $F\langle X|G\rangle$ possui a seguinte propriedade universal: qualquer função $\varphi : X \to A$ pode ser estendida unicamente a um homomorfismo $\psi : F\langle X|G\rangle \to A$ tal que $\psi(f^g) = \psi(f)^g$ para todo $f \in F\langle X|G\rangle$ e todo $g \in G$.

Um $G$-polinômio $f(x_1^{g_1}, \ldots, x_n^{g_n})$ é uma *$G$-identidade* de $A$ se $f(a_1^{g_1}, \ldots, a_n^{g_n}) = 0$ para todo $a_1, \ldots, a_n \in A$. O conjunto formado por todas as $G$-identidades de $A$ é um ideal de $F\langle X|G\rangle$. Temos então a seguinte definição.

**Definição 2.29.** *O ideal $Id^G(A) = \{f \in F\langle X|G\rangle : f \equiv 0$ sobre $A\}$ é o ideal das $G$-identidades polinomiais de $A$.*

Se considerarmos $\Psi$ como sendo o conjunto de todos os homomorfismos de $F\langle X|G\rangle$ em $A$ que comutam com a ação de $G$, citados acima na propriedade universal de $F\langle X|G\rangle$, então $Id^G(A) = \bigcap_{\psi \in \Psi} \ker(\psi)$. Chamamos um ideal $I$ de uma álgebra com $G$-ação $A$ de *$T(G)$-ideal de $A$* se $I$ é invariante por todo endomorfismo de $A$ que comuta com a ação de $G$. Desse modo, $Id^G(A)$ é um $T(G)$-ideal de $F\langle X|G\rangle$. O $T(G)$-ideal de $A$ gerado por $S \subset A$ é a interseção de todos os $T(G)$-ideais de $A$ que contêm $S$.

Estendendo o caso ordinário ($G$ trivial), o grau de um monômio $w$ em uma variável $x_i \in X$ é o número de vezes que a variável $x_i^g$ aparece em $w$ sem considerar o expoente $g \in G$.

A partir de agora introduziremos o conceito de álgebra livre $G$-graduada.

**Definição 2.30.** *Consideremos $A$ uma álgebra sobre um corpo $F$ e $G$ um grupo qualquer. A álgebra $A$ é* $G$-graduada *se $A$ pode ser escrita como uma soma direta de subespaços $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$ tal que para todos $g, h \in G$, $A^{(g)}A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}$.*

Da definição é claro que qualquer $a \in A$ pode ser unicamente escrito como uma soma finita $a = \sum_{g \in G} a_g$ com $a_g \in A^{(g)}$. Os subespaços $A^{(g)}$ são chamados de *componentes homogêneas de $A$*. O elemento $a \in A$ é chamado *homogêneo de grau $g$* se $a \in A^{(g)}$. Um subespaço $C$ é *graduado* ou *homogêneo* se $C = \bigoplus_{g \in G} (C \cap A^{(g)})$. Em outras palavras, $C$ é graduado se, para qualquer $c \in C$, temos que $c = \sum_{g \in G} c_g$ implica que $c_g \in C$ para todo $g \in G$. De maneira análoga podemos definir subálgebras graduadas e ideais graduados. Se $H$ é um subgrupo de $G$, claramente $C = \bigoplus_{h \in H} A^{(h)}$ é uma subálgebra graduada de $A$. Em particular, se $e$ é a unidade de $G$, $A^{(e)}$ é uma subálgebra de $A$. Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 2.31.** *Qualquer $F$-álgebra $A$ pode ser graduada por qualquer grupo $G$ fazendo $A = A^{(e)}$, onde $e$ é o elemento neutro de $G$, e $A^{(g)} = \{0\}$ para qualquer $g \neq e$. Essa graduação é chamada* graduação trivial.

Para dizer que um espaço vetorial $V$ sobre um corpo $F$ é gerado por um conjunto $W \subset V$ usaremos a notação $V = span_F W$.

**Exemplo 2.32.** *A álgebra de grupo $A = FG$ para um dado grupo $G$ e um corpo $F$ é naturalmente graduada por $G$ fazendo $A^{(g)} = span_F\{g\}$.*

**Exemplo 2.33.** *Sejam $A = M_k(F)$ a álgebra das matrizes de ordem $k$ sobre o corpo $F$ e $G$ um grupo arbitrário. Dada uma $k$-upla $(g_1, \ldots, g_k) \in G^k$, podemos definir uma $G$-graduação de $A$ fazendo*

$$A^{(g)} = span_F\{e_{ij} : g_i^{-1} g_j = g\},$$

*onde $e_{ij}$ é a matriz com 1 na entrada $(i, j)$ e zero nas outras entradas.*

Dadas $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ e $C = \bigoplus_{g \in G} C_g$ duas álgebras $G$-graduadas, uma aplicação $\psi : A \to C$ é um *homomorfismo $G$-graduado* se $\psi$ é um homomorfismo que satisfaz $\psi(A_g) \subseteq C_g$ para todo $g \in G$. No caso em que $A = C$, chamamos $\psi$ de *endomorfismo $G$-graduado.*

Sejam $F\langle X\rangle$ a álgebra livre e $G$ um grupo finito. Escreveremos $X$ na forma $X = \bigcup_{g \in G} X_g$ onde $X_g = \{x_1^{(g)}, x_2^{(g)}, \ldots\}$ são conjuntos infinitos enumeráveis disjuntos. As variáveis de $X_g$ são chamadas *homogêneas de grau $g$*. O *grau homogêneo* de um monômio $x_{i_1}^{g_1} \cdots x_{i_t}^{g_t} \in F\langle X\rangle$ é definido como sendo $g_1 g_2 \cdots g_t$ e o seu grau total é definido como sendo $t$. Denotemos por $F\langle X\rangle^{(g)}$ o subspaço da álgebra $F\langle X\rangle$ gerado por todos os monômios com grau homogêneo $g$. Notemos que $F\langle X\rangle^{(g)} F\langle X\rangle^{(h)} \subseteq F\langle X\rangle^{(gh)}$ para todo $g, h \in G$. Assim,

$$F\langle X\rangle = \bigoplus_{g \in G} F\langle X\rangle^{(g)}$$

é $G$-graduada. Denotamos por $F\langle X\rangle_G^{gr}$ a álgebra $F\langle X\rangle$ com essa graduação. A $F$-álgebra $F\langle X\rangle_G^{gr}$ é chamada *álgebra livre $G$-graduada de posto enumerável sobre $F$.*

A álgebra $F\langle X\rangle_G^{gr}$ possui a seguinte propriedade universal: dada uma álgebra $G$-graduada $A$, qualquer função $\phi : X \to A$ tal que $\phi(X_g) \subseteq A_g$ pode ser estendida unicamente a um homomorfismo $G$-graduado $\psi : F\langle X\rangle_G^{gr} \to A$. Um *polinômio graduado* $f(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_n^{(g_n)}) \in F\langle X\rangle_G^{gr}$ é uma *identidade graduada* para a álgebra $A$ se $f(a_1^{(g_1)}, \ldots, a_n^{(g_n)}) = 0$ para todo $a_1^{(g_1)} \in A^{(g_1)}, \ldots, a_n^{(g_n)} \in A^{(g_n)}$. O conjunto de todas as identidades $G$-graduadas forma um ideal de $F\langle X\rangle_G^{gr}$.

Se definirmos $\Psi$ como o conjunto de todos homomorfismos $G$-graduados de $F\langle X\rangle_G^{gr}$ em $A$ segue que $Id_G^{gr}(A) = \bigcap_{\psi\in\Psi} \ker\psi$. Analogamente ao que ocorre no caso das identidades ordinárias, $Id_G^{gr}(A)$ é um $T$-ideal $G$-graduado de $F\langle X\rangle_G^{gr}$, isto é, $Id_G^{gr}(A)$ é invariante por endomorfismos $G$-graduados de $F\langle X\rangle_G^{gr}$.

## 2.5 Graduação Abeliana e Ação de Grupos

Nesta seção abordaremos a relação existente entre graduação abeliana e ação de grupos. Trataremos este assunto nos baseando nas seções 3.2 e 3.3 de [13] e também usaremos [7].

Seja $G$ um grupo abeliano finito com $|G| = k$. Seja $A$ uma álgebra sobre um corpo $F$, onde $F$ contém as raízes $k$-ésimas da unidade e possui característica zero.

Vamos começar assumindo $G \subseteq Aut(A)$ e mostrar a relação que existe entre $G$-ação e $G$-graduação. Usaremos a notação $g(a) = a^g$ para $a \in A$ e $g \in G$. Por conveniência estenderemos a ação de $G$ a uma ação da álgebra de grupo $FG$ fazendo

$$a^{\alpha_1 g_1+\cdots+\alpha_k g_k} = \alpha_1 a^{g_1} + \cdots + \alpha_k a^{g_k}$$

onde $g_1, \ldots, g_k \in G$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$.

Seja $V$ um espaço vetorial sobre $F$ de dimensão finita de com base $B$. Denotemos por $Aut_F(V)$ o conjunto dos $F$-automorfismos de $V$. Seja $\rho : G \to Aut_F(V)$ uma representação de $G$. O espaço vetorial $V$ possui uma estrutura de $G$-módulo onde $gv = \rho(g)(v)$ para todo $v \in V$ e todo $g \in G$. Definimos o *caráter* de $\rho$ como sendo a aplicação $\chi_\rho : G \to F$ dada por $\chi_\rho = tr([\rho(g)]_B)$ para todo $g \in G$. O valor de $\chi_\rho$ não depende da base $B$ e dizemos que $\chi_\rho$ é irredutível se o $G$-módulo $V$ é irredutível. A dimensão do caráter $\chi_\rho$ é igual à dimensão de $V$ sobre $F$. Duas representações $\rho : G \to Aut_F(V)$ e $\rho' : G \to Aut_F(W)$ são equivalentes se $V$ e $W$ são isomorfos como $G$-módulos. Todo caráter é uma função de classe, ou seja, os elementos pertencentes a uma mesma classe de conjugação possuem a mesma imagem. Podemos mostrar que se $F$ é um corpo de raízes para $G$, o número de representações irredutíveis não equivalentes de $G$ é igual ao número de classes de conjugação de $G$. Cada representação irredutível de $G$ fornece um caráter irredutível para $G$.

Seja $\widehat{G} = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$ o conjunto de todos os caracteres irredutíveis de $G$. Notemos que, como $G$ é abeliano, cada elemento de $G$ é uma classe de conjugação, por isso temos

$k$ caracteres irredutíveis de dimensão 1 para $G$. Sendo assim, $\chi_i(1) = 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$ e cada $\chi_i : G \to F\backslash\{0\}$ é um homomorfismo de grupos.

Antes de continuarmos, vamos mostrar que para qualquer grupo abeliano $G$, temos $G \cong \widehat{G}$ onde $\widehat{G}$ possui estrutura de grupo com o produto $(\chi_i \cdot \chi_j)(g) = \chi_i(g)\chi_j(g)$. O elemento neutro de $\widehat{G}$ é o homomorfismo $\chi_k$ e o inverso de $\chi_i$ é o homomorfismo dado por $\overline{\chi_i}(g) = \chi_i(g^{-1})$. Consideremos primeiramente o caso em que $G$ é um grupo cíclico com gerador $g$. Sabemos que $\widehat{G} = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$ são homomorfismos de grupo de $G$ em $F\backslash\{0\}$. Afirmamos que não existem outros homomorfismos de $G$ em $F$ além desses. De fato,

$$(\chi_i(g))^k = \chi_i(g^k) = \chi_i(1) = 1,$$

o que implica que $\chi_i(g)$ tem que ser uma $k$-ésima raiz da unidade. Sendo assim, podemos renomear os elementos de $\widehat{G}$, se necessário, de modo que

$$\chi_1(g) = \omega, \chi_2(g) = \omega^2, \ldots, \chi_{k-1}(g) = \omega^{k-1}, \chi_k(g) = 1$$

onde $\omega$ é uma $k$-ésima raiz da unidade, já que os valores de $\chi_i$ só dependem do seu valor em $g$. Desse modo $\chi_i \neq \chi_j$ para todo $i \neq j$ em $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Como $G$ é cíclico temos um isomorfismo de $G$ em $\widehat{G}$ dado por: a cada elemento $g^r \in G$ com $1 \leq r \leq k$ associamos o elemento $\chi_r$ de $\widehat{G}$. Chamando essa função de $\theta : G \to \widehat{G}$, vemos que $\theta$ é bijetora e, para $1 \leq r_1, r_2 \leq k$, temos $\theta(g^{r_1}g^{r_2}) = \theta(g^{r_1+r_2})$ e

$$\chi_{r_1+r_2}(g) = \omega^{r_1+r_2} = \omega^{r_1}\omega^{r_2} = \chi_{r_1}(g)\chi_{r_2}(g) = (\chi_{r_1}\chi_{r_2})(g).$$

Desse modo, $\theta(g^{r_1}g^{r_2}) = \chi_{r_1}\chi_{r_2} = \theta(g^{r_1})\theta(g^{r_2})$ e provamos que de fato $\theta$ é isomorfismo de grupos.

Agora, considerando $G$ como um grupo finito abeliano qualquer, usando o teorema de estrutura para grupos abelianos, segue que, $G$ é isomorfo a um produto direto de grupos cíclicos $G = C_{n_1} \times C_{n_2} \times \cdots \times C_{n_t}$ onde $C_{n_j}$ tem ordem $n_j$ com $j = 1, 2, \ldots, t$. Vamos descrever como são os homomorfismos de grupos de $G$ em $F\backslash\{0\}$. Seja $\phi : G \to F\backslash\{0\}$ um homomorfismo de grupos e consideremos $g_j$ um gerador de $C_{n_j}$, então $\phi(1, \ldots, 1, g_j, 1, \ldots, 1) = \omega_j \in F$. Desse modo, $\omega_j^{n_j} = 1$ e $\omega_j$ é uma $n_j$-ésima raiz da unidade. Assim, os valores $(\omega_1, \ldots, \omega_t)$ determinam $\phi$ pois $\phi(g_1^{l_1}, \ldots, g_t^{l_t}) = \omega_1^{l_1} \cdots \omega_t^{l_t}$. Com essa descrição de $\phi \in Hom(G, F\backslash\{0\})$ e usando o isomorfismo $\phi : Hom(G, F\backslash\{0\}) \to$

$Hom(C_{n_1}, F\backslash\{0\})\times\cdots\times Hom(C_{n_t}, F\backslash\{0\})$ dado por $\phi(\xi) = (\xi|_{C_{n_1}}, \ldots, \xi|_{C_{n_t}})$, concluímos que

$$\begin{aligned} \widehat{G} &= Hom(G, F\backslash\{0\}) \cong Hom(C_{n_1}, F\backslash\{0\}) \times \cdots \times Hom(C_{n_t}, F\backslash\{0\}) \\ &= \widehat{C_{n_1}} \times \cdots \times \widehat{C_{n_t}} \\ &\cong C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_t} \\ &= G \end{aligned}$$

Portanto $G \cong \widehat{G}$.

Para prosseguirmos, consideremos a álgebra de grupo $FG$ e $f_1, \ldots, f_k$ os idempotentes minimais de $FG$. Da teoria de representações de grupos, para todo $i = 1, \ldots, k$, temos

$$f_i = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \chi_i(g_j^{-1})g_j.$$

Um cálculo fácil mostra que para qualquer $g \in G$, temos que $gf_i = \chi_i(g)f_i$. Temos também que $\chi_i(f_j) = \delta_{ij}$, onde $\delta_{ij}$ é o delta de Kronecker.

Então, definimos

$$A^{(\chi_i)} = \{a \in A : a^g = \chi_i(g)a \text{ para todo } g \in G\}.$$

Afirmamos que $A^{(\chi_i)}$ é o subespaço de $A$ gerado pelos elementos da forma $a^{f_i}$ com $a \in A$. De fato, como $1 = f_1 + \cdots + f_k$, para todo $a \in A$, podemos escrever $a = a^{f_1} + \cdots + a^{f_k}$. Então

$$\begin{aligned} a^g &= a^{f_1 g} + \cdots + a^{f_k g} \\ &= a^{g f_1} + \cdots + a^{g f_k} \\ &= \chi_1(g)a^{f_1} + \cdots + \chi_k(g)a^{f_k} \end{aligned}$$

e, se $a \in A^{(\chi_i)}$, $a^g = \chi_i(g)a$ implica que $(\chi_j(g) - \chi_i(g))a^{f_i} = 0$ para todo $j = 1, \ldots, k$ e todo $g \in G$. Claramente isso nos dá $a^{f_j} = 0$ para todo $j \neq i$ e assim $a = a^{f_i}$. Isso prova a afirmação. Também, como $a = a^{f_1} + \cdots + a^{f_k}$ para todo $a \in A$, segue que

$$A = \bigoplus_{i=1}^{k} A^{(\chi_i)}. \tag{2.2}$$

Agora, seja $a \in A^{(\chi_i)}$ e $b \in A^{(\chi_j)}$ com $1 \leq i, j \leq k$. Então $a^g = \chi_i(g)a$ e $b^g = \chi_j(g)b$. Assim,

$$(ab)^g = a^g b^g = (\chi_i\chi_j)(g)ab.$$

Isso implica que $A^{(\chi_i)}A^{(\chi_j)} \subseteq A^{(\chi_i\chi_j)}$ e (2.2) é uma $\widehat{G}$-graduação sobre $A$.

Provamos que qualquer álgebra $A$ com $G$-ação pode ser considerada como uma álgebra $G$-graduada, pois $\widehat{G} \cong G$.

Consideremos agora $G \subseteq Aut^*(A)$ um grupo abeliano finito agindo sobre $A$ e sejam $f_1, \ldots, f_k$ os idempotentes minimais da álgebra de grupo $FG$. Observemos que, mesmo com $G \subseteq Aut^*(A)$, podemos definir a ação de $FG$ sobre $A$ como feito no início da seção e também temos o isomorfismo $\widehat{G} \cong G$. Analogamente ao que fizemos anteriormente, neste caso também podemos escrever a álgebra $A$ como em (2.2), porém esta graduação será somente uma graduação de $A$ como espaço vetorial e não como álgebra.

Consideremos agora o conjunto de variáveis $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Para qualquer $x_i \in X$, assim como fizemos anteriormente, podemos escrever $x_i = x_i^1 = x_i^{f_1+\cdots+f_k} = x_i^{f_1} + \cdots + x_i^{f_k}$. Desse modo, para $g \in G$

$$\begin{aligned} x_i^g &= x_i^{g(f_1+\cdots+f_k)} \\ &= x_i^{gf_1} + \cdots + x_i^{gf_k} \\ &= \chi_1(g)x_i^{f_1} + \cdots + \chi_k(g)x_i^{f_k}. \end{aligned}$$

Isso nos mostra que

$$span_F\{x_i^g : g \in G\} = span_F\{x_i^{f_1}, \ldots, x_i^{f_k}\}.$$

Agora, o espaço $W = span\{x_i^g : g \in G, x_i \in X\}$ pode ser decomposto como

$$W = W^{(\chi_1)} \oplus \cdots \oplus W^{(\chi_k)},$$

onde $W^{(\chi_j)} = span_F\{x_i^{f_j} : x_i \in X\}$ com $1 \leq j \leq k$. Isso induz na álgebra livre $F\langle X|G\rangle$ a seguinte graduação como espaço vetorial

$$F\langle X|G\rangle = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G}} F\langle X|G\rangle^{(\chi)}. \tag{2.3}$$

Notemos que se $G \subseteq Aut(A)$ age como um grupo de automorfismos de $A$, então (2.3) é uma $G$-graduação de $F\langle X|G\rangle$ como uma álgebra da maneira que foi feita anteriormente. Segue que, nesse caso $F\langle X|G\rangle$ é a álgebra livre $G$-graduada sobre

$$\widetilde{X} = \{x_i^{f_j} : x_i \in X \text{ e } j = 1, \ldots, k\}.$$

Consideremos agora uma álgebra $A$ sobre $F$ com um automorfismo ou um antiautomorfismo $\rho$ de ordem 2 e assuma que $F$ é um corpo de característica diferente de 2. Considerando $G = \langle \rho \rangle$, o grupo gerado por $\rho$, temos que $\frac{1+\rho}{2}$ e $\frac{1-\rho}{2}$ são os idempotentes minimais da álgebra de grupo $FG$. Aplicando o que vimos anteriormente, vemos que a álgebra livre com $G$-ação é livremente gerada pelos elementos $x_i + x_i^\rho$ e $x_i - x_i^\rho$ com $i = 1, 2, \ldots$.

Por conveniência, para todo $i$, escrevemos $x_i + x_i^\rho = y_i$ e $x_i - x_i^\rho = z_i$. Então $F\langle X|G\rangle = F\langle Y, Z\rangle$ é a álgebra associativa livre sobre os dois conjuntos $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ e $Z = \{z_1, z_2, \cdots\}$.

Quando $\rho$ é um automorfismo, $F\langle Y, Z\rangle$ possui uma estrutura de álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada, onde as variáveis em $Y$ são homogêneas de grau 0 e as variáveis de $Z$ são homogêneas de grau 1.

Se $\rho$ é uma involução, $F\langle Y, Z\rangle$ possui uma estrutura de álgebra com involução onde as variáveis de $Y$ são simétricas, isto é, $\rho(y_i) = y_i$ e as variáveis de $Z$ são antissimétricas, isto é, $\rho(z_i) = -z_i$ para $i = 1, 2, \ldots$. A álgebra $F\langle Y, Z\rangle$ é chamada *álgebra livre com involução.* Para este caso, denotaremos o $T(G)$-ideal $Id^G(A)$ por $Id^\rho(A)$ e o chamaremos de $T(\rho)$-ideal. Chamaremos os $G$-polinômios de $\rho$-polinômios e as $G$-identidades de $\rho$-identidades.

Capítulo 3

# Álgebra de Incidência sobre Coroas

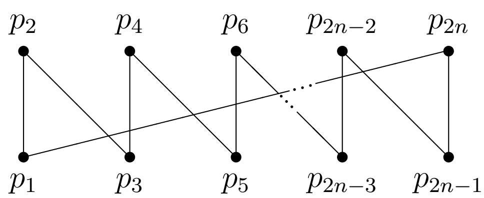
Neste capítulo determinaremos as classes de equivalência das involuções sobre a álgebra de incidência $I(C_{2n}, F)$, onde $F$ é um corpo de característica zero e $C_{2n}$ é uma coroa. Para isto, primeiramente caracterizaremos as involuções e automorfismos sobre $C_{2n}$ e determinaremos quais involuções são equivalente sobre $C_{2n}$. Em seguida, dada uma involução $\lambda$ sobre $C_{2n}$, faremos um estudo sobre o antiautomorfismo $\rho = \psi_u M_\mu \hat{\lambda}$ e apresentaremos quais condições devem ser satisfeitas pelo elemento multiplicativo $\mu$ e pelo elemento invertível $u$ de modo que $\rho = \psi_u M_\mu \hat{\lambda}$ seja uma involução. E por fim, classificaremos as involuções sobre $I(C_{2n}, F)$.

## 3.1 Involuções Sobre Uma Coroa

Nesta seção apresentaremos o poset chamado *coroa com* $2n$ *elementos* mostrando quais são suas involuções e automorfismos. Também, determinaremos quais são as involuções equivalentes sobre a coroa $C_{2n}$.

**Definição 3.1.** *Uma* coroa *é um poset* $(P, <)$*, onde* $P$ *possui um número par (maior ou igual a 4) de elementos, os quais podem ser nomeados como sendo* $p_1, p_2, \ldots, p_{2n-1}, p_{2n}$ *para satisfazer* $p_i < p_j$ *se, e somente se,* $i$ *é ímpar e* $j - i \equiv \pm 1 \pmod{2n}$*.*

O diagrama de Hasse desse poset é apresentado abaixo.



Denotamos a coroa com $2n$ elementos por $C_{2n}$.

Nesta seção consideraremos os elementos de $C_{2n}$ indexados como no diagrama de Hasse dado anteriormente e, para evitar o uso excessivo de congruências, os índices dos elementos da coroa são considerados como pertencentes ao anel $\mathbb{Z}_{2n}$.

A próxima proposição caracteriza as involuções em $C_{2n}$.

**Proposição 3.2.** *A coroa $C_{2n}$ possui $n$ involuções na forma $\lambda(p_j) = p_{2i+1-j}$, uma para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Quando $n$ é ímpar, além dessa involuções, $C_{2n}$ também possui uma involução na forma $\lambda(p_j) = p_{n+j}$.*

*Demonstração.* Seja $\lambda$ uma involução em $C_{2n}$. Como involuções invertem a ordem, a involução $\lambda$ deve levar $p_1$ para algum $p_{2i}$ e assim temos duas possibilidades para $p_2$: ele pode ser levado a $p_{2i-1}$ ou a $p_{2i+1}$. Na primeira possibilidade, temos $\lambda_1(p_j) = p_{2i+1-j}$ para todo $j \in \mathbb{Z}_{2n}$, e $\lambda$ é de fato uma involução pois possui ordem 2 independentemente de $i$. Para a segunda possibilidade, analisando apenas a propriedade de inverter a ordem, temos $\lambda_2(p_j) = p_{2i-1+j}$ para todo $j \in \mathbb{Z}_{2n}$. No entanto, para que seja uma involução, $\lambda_2$ deve ter ordem 2, o que implica $4i - 2 + j = j$ (igualdade em $\mathbb{Z}_{2n}$) para qualquer $j \in \mathbb{Z}_{2n}$. Esta última igualdade implica $n$ ímpar e $i = \frac{n+1}{2}$, portanto, $\lambda(p_j) = p_{n+j}$, para todo $j \in \mathbb{Z}_{2n}$. Assim $C_{2n}$ admite sempre $n$ reflexões - uma para cada escolha possível de $i$ - e, quando $n$ é ímpar, também admite uma rotação. Essas são todas as possíveis involuções da coroa $C_{2n}$. □

**Definição 3.3.** *Na Proposição 3.2, chamamos cada involução na forma de $\lambda_1$ de* reflexão de $C_{2n}$ *e chamamos $\lambda_2$ de* rotação sobre $C_{2n}$.

**Observação 3.4.** *Notemos que, para qualquer reflexão $\lambda$, existem dois pares distintos de elementos comparáveis em $C_{2n}$ que são* $\lambda$-invariantes*, são eles $\{p_i, p_{i+1}\}$ e $\{p_{n+i}, p_{n+i+1}\}$ onde $\lambda(p_1) = p_{2i}$.*

Nosso objetivo neste capítulo é determinar as classes de equivalência das involuções sobre a álgebra de incidência de $C_{2n}$. Para tanto, é necessário determinar as classes de equivalência das involuções sobre $C_{2n}$ e quais automorfismos comutam com uma dada involução.

A seguinte proposição caracteriza os automorfismos em $C_{2n}$.

**Proposição 3.5.** *A coroa $C_{2n}$ possui $n$ automorfismos na forma $\alpha(p_j) = p_{2i-2+j}$, um para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, e possui $n$ automorfismos na forma $\beta(p_j) = p_{2i-j}$, um para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.*

*Demonstração.* Basta proceder de maneira análoga ao que fizemos para as involuções na Proposição 3.2 observando que aqui $\alpha_i$, $i = 1, 2$, não precisa ter ordem 2. Assim $C_{2n}$ possui $2n$ automorfismos ($n$ de cada tipo). □

O próximo resultado estabelece as classes de equivalência das involuções sobre $C_{2n}$.

**Proposição 3.6.** *Quaisquer duas reflexões sobre $C_{2n}$ são equivalentes e nenhuma reflexão é equivalente a uma rotação de $C_{2n}$ quando esta existe. Se $\lambda$ é uma reflexão, ela comuta exatamente com dois automorfismos de $C_{2n}$; se $\lambda$ é uma rotação, ela comuta com todo automorfismo de $C_{2n}$.*

*Demonstração.* Sejam $\lambda_1$ e $\lambda_2$ duas reflexões sobre $C_{2n}$ e sejam $i_1$ e $i_2$ inteiros com $1 \leq i_1, i_2 \leq n$ tais que $\lambda_j(p_1) = p_{2i_j}$ e $j = 1, 2$. Vamos supor também $i_2 > i_1$. Se $i_1$ e $i_2$ possuem a mesma paridade (ambos pares ou ambos ímpares), consideremos o automorfismo $\alpha$ de $C_{2n}$ dado por $\alpha(p_j) = p_{2k-2+j}$, onde $k = \frac{i_2-i_1+2}{2}$. Assim temos

$$\alpha\lambda_1\alpha^{-1}(p_j) = \alpha\lambda_1(p_{i_2-i_1+j}) = \alpha(p_{i_1+i_2+1-j}) = p_{2i_2+1-j} = \lambda_2(p_j)$$

para todo $j \in \mathbb{Z}_{2n}$.

Se $i_1$ e $i_2$ possuem paridades opostas, consideremos o automorfismo $\beta$ de $C_{2n}$ definido por $\beta(p_j) = p_{2l-j}$ onde $l = \frac{i_1+i_2+1}{2}$. Assim,

$$\beta\lambda_1\beta^{-1}(p_j) = \beta\lambda_1(p_{i_1+i_2+1-j}) = \beta(p_{i_1-i_2+j}) = p_{2i_2-j+1} = \lambda_2(p_j)$$

para todo $j \in \mathbb{Z}_{2n}$.

Vamos considerar agora uma reflexão $\lambda(p_j) = p_{2i+1-j}$ de $C_{2n}$ com $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Temos que,

$$\alpha\lambda\alpha^{-1}(p_j) = \alpha\lambda_1(p_{-2k+2+j}) = \alpha(p_{2i+2k-1-j}) = p_{2(2k+i-2)+1-j} \text{ e}$$

$$\beta\lambda\beta^{-1}(p_j) = \beta\lambda(p_{2l-j}) = \beta(p_{2i-2l+1+j}) = p_{2(2l-i-1)+1-j}.$$

Isso mostra que reflexões são equivalentes somente a reflexões e, portanto, uma rotação não pode ser equivalente a uma reflexão. Assim, o grupo $G$ dos automorfismos de $C_{2n}$

age por conjugação sobre o conjunto $\mathcal{R}$ de todas as reflexões de $C_{2n}$ e $\mathcal{R}$ é a órbita de qualquer elemento. Por outro lado, denotando por $\lambda^G$ a órbita de uma reflexão $\lambda$ e por $G_\lambda$ o subgrupo de isotropia de $\lambda$, sabemos que $|\lambda^G| = (G : G_\lambda)$ e, de $|\mathcal{R}| = n$ e $|G| = 2n$, obtemos $|G_\lambda| = 2$ para qualquer $\lambda \in \mathcal{R}$. Notemos que $G_\lambda$ é o conjunto de todos os automorfismos de $C_{2n}$ que comutam com $\lambda$.

Como rotações são equivalentes somente a rotações, qualquer rotação comuta com todo automorfismo de $C_{2n}$, já que $C_{2n}$ admite, no máximo, uma rotação. $\square$

Denotaremos por $\alpha_\lambda$ o único automorfismo de $C_{2n}$ diferente da identidade que comuta com a reflexão $\lambda$. Notemos que $\alpha_\lambda$ possui ordem 2 (pois $\alpha_\lambda^{-1}$ também comuta com $\lambda$).

## 3.2 Involuções Sobre $I(C_{2n}, F)$

Nesta seção daremos condições necessárias e suficientes sobre o elemento multiplicativo $\mu$ e o elemento invertível $u$ para que o antiautomorfismo $\rho = M_\mu \psi_u \hat{\lambda}$ seja uma involução, onde $\lambda$ é uma involução sobre $P$.

Consideremos um corpo de característica zero $F$ e um poset $P$ localmente finito. Antes de tratarmos do caso particular $I(C_{2n}, F)$, apresentaremos alguns resultados mais gerais em $I(P, F)$, começando com a seguinte proposição que pode ser encontrada em [6, Proposição 26]).

**Proposição 3.7.** *Sejam $\rho$ uma involução sobre $I(P, F)$, $\lambda$ a involução sobre $P$ induzida por $\rho$ e $\alpha$ um automorfismo de $P$. A involução sobre $P$ induzida por $\hat{\alpha}\rho\hat{\alpha}^{-1}$ é $\alpha\lambda\alpha^{-1}$.*

*Demonstração.* Como $\lambda$ é uma involução sobre $P$ induzida por $\rho$, então para cada $p \in P$, $\rho(e_p) = e_{\lambda(p)} + g$ para algum $g \in J(I(P, F))$. Assim,

$$\hat{\alpha}\rho\hat{\alpha}^{-1}(e_p) = \hat{\alpha}\rho(e_{\alpha^{-1}(p)}) = \hat{\alpha}(e_{\lambda\alpha^{-1}(p)} + f) = e_{\alpha\lambda\alpha^{-1}(p)} + \hat{\alpha}(f),$$

para algum $f \in J(I(P, F))$. Logo, para cada $p \in P$, $\hat{\alpha}\rho\hat{\alpha}^{-1}(e_p) - e_{\alpha\lambda\alpha^{-1}(p)} \in J(I(P, F))$, e portanto $\hat{\alpha}\rho\hat{\alpha}^{-1}$ induz a involução $\alpha\lambda\alpha^{-1}$ sobre $P$. $\square$

A seguinte proposição pode ser demonstrada de maneira análoga à proposição anterior.

**Proposição 3.8.** *Consideremos $\rho$ e $\Phi$ uma involução e um automorfismo de $I(P, F)$ que induzem a involução $\lambda$ e o automorfismo $\alpha$ em $P$, respectivamente. A involução sobre $P$ induzida por $\Phi\rho\Phi^{-1}$ é $\alpha\lambda\alpha^{-1}$.*

Já vimos no Teorema 1.68 que qualquer involução $\rho$ sobre $I(P,F)$ pode ser escrita como $\rho = \psi_u M_\mu \hat{\lambda}$, onde $\psi_u$ denota o automorfismo interno de $I(P,F)$ dado pela conjugação do elemento invertível $u \in I(P,F)$, $M_\mu$ denota o automorfismo multiplicativo associado ao elemento multiplicativo $\mu \in I(P,F)$ e $\hat{\lambda}$ é a involução induzida pela involução $\lambda$ de $P$. As proposições seguintes mostram como podemos trabalhar com tais composições e que podemos assumir o invertível $u$ satisfazendo $u(p,p) = 1$ para todo $p \in P$ na decomposição anterior.

**Proposição 3.9.** *Para quaisquer automorfismos multiplicativos $M_\mu$ e $M_\nu$, para qualquer automorfismo interno $\psi_u$ e qualquer involução induzida $\hat{\lambda}$ de $I(P,F)$, as seguintes igualdades são verdadeiras:*

$$M_\mu M_\nu = M_{\mu*\nu}, M_\mu \psi_u = \psi_{\mu*u} M_\mu, \hat{\lambda} M_\mu = M_{\hat{\lambda}(\mu)} \hat{\lambda}, \hat{\lambda}\psi_u = \psi_{\hat{\lambda}(u^{-1})}\hat{\lambda}$$

*e elas permanecem verdadeiras se trocarmos a involução $\lambda$ por um automorfismo $\alpha$.*

*Demonstração.* Todas essas igualdades seguem de cálculos simples aplicando cada expressão a qualquer $f \in I(P,F)$. Assim, mostraremos somente a segunda e a última igualdades. Para mostrarmos a segunda igualdade, consideremos primeiramente $p, q \in P$ e $u, v \in I(P,F)$ e observemos que,

$$\begin{aligned}
[(\mu * u) \cdot (\mu * v)](p,q) &= \sum_{p \leq r \leq q} (\mu * u)(p,r)(\mu * v)(r,q) \\
&= \sum_{p \leq r \leq q} \mu(p,r)u(p,r)\mu(r,q)v(r,q) \\
&= \sum_{p \leq r \leq q} \mu(p,r)\mu(r,q)u(p,r)v(r,q) \\
&= \mu(p,q) \sum_{p \leq r \leq q} u(p,r)v(r,q) \\
&= [\mu * (u \cdot v)](p,q).
\end{aligned}$$

Desse modo, temos que $(\mu * u) \cdot (\mu * u^{-1}) = (\mu * u^{-1}) \cdot (\mu * u) = \delta$ considerando $v = u^{-1}$ na equação acima. Isso nos mostra que $(\mu * u)^{-1} = \mu * u^{-1}$. Agora, considerando

$f \in I(P, F)$ temos que,

$$\begin{aligned}
[M_\mu \psi_u(f)](p,q) &= M_\mu(\psi_u(f))(p,q) = \mu(p,q)\psi_u(f)(p,q) \\
&= \mu(p,q) \sum_{p \leq r \leq s \leq q} u(p,r) f(r,s) u^{-1}(s,q) \\
&= \sum_{p \leq r \leq s \leq q} \mu(p,r)u(p,r)\mu(r,s)f(r,s)\mu(s,q)u^{-1}(s,q) \\
&= \sum_{p \leq r \leq s \leq q} \mu * u(p,r)\mu * f(r,s)\mu * u^{-1}(s,q) \\
&= \sum_{p \leq r \leq s \leq q} \mu * u(p,r) M_\mu(f)(r,s)(\mu * u)^{-1}(s,q) \\
&= [\psi_{\mu * u} M_\mu(f)](p,q).
\end{aligned}$$

Portanto $M_\mu \psi_u = \psi_{\mu * u} M_\mu$. Mostraremos agora a última igualdade. De fato,

$$\begin{aligned}
[\hat{\lambda}(\psi_u(f))](p,q) &= [\psi_u(f)](\lambda(q), \lambda(p)) = (u \cdot f \cdot u^{-1})(\lambda(q), \lambda(p)) \\
&= \sum_{p \leq s \leq t \leq q} u(\lambda(q), \lambda(t)) f(\lambda(t), \lambda(s)) u^{-1}(\lambda(s), \lambda(p)) \\
&= \sum_{p \leq s \leq t \leq q} [\hat{\lambda}(u^{-1})](p,s)[\hat{\lambda}(f)](s,t)[\hat{\lambda}(u)](t,q) \\
&= [\hat{\lambda}(u^{-1}) \cdot \hat{\lambda}(f) \cdot \hat{\lambda}(u)](p,q) \\
&= [\psi_{\hat{\lambda}(u^{-1})}(\hat{\lambda}(f))](p,q).
\end{aligned}$$

De forma semelhante fazemos os cálculos para os automorfismos. □

Observemos que, pela proposição anterior,

$$M_\mu \psi_{\bar{\mu} * u} = \psi_{\mu * (\bar{\mu} * u)} M_\mu = \psi_{(\mu * \bar{\mu}) * u} M_\mu = \psi_u M_\mu,$$

onde $\bar{\mu}$ é o elemento obtido a partir de $\mu$, definido na seção 1.5 logo após a Definição 1.52. Desse modo, podemos escrever uma involução $\rho = \psi_u M_\mu \hat{\lambda}$ sobre $I(C_{2n}, F)$ na forma $\rho = M_\mu \psi_{\bar{\mu} * u} \hat{\lambda}$, ou ainda, fazendo $v = \bar{\mu} * u$, obtemos $\rho = M_\mu \psi_v \hat{\lambda}$. Daqui em diante, para facilitar os cálculos, sempre usaremos a decomposição na forma $\rho = M_\mu \psi_u \hat{\lambda}$.

De maneira análoga, podemos decompor um automorfismo $\Phi$ na forma $\Phi = M_\tau \psi_v \hat{\alpha}$.

**Proposição 3.10.** *O automorfismo interno $\psi_u$ de $I(P, F)$ é multiplicativo se, e somente se, $u$ é diagonal, isto é, $u(p,q) = 0$ se $p \neq q$. Em particular, se $\rho = M_\mu \psi_u \hat{\lambda}$, podemos assumir $u(p,p) = 1$, para qualquer $p \in P$.*

*Demonstração.* Suponhamos que $u$ seja diagonal. Para $p \leq q$ em $P$ temos,

$$\psi_u(f)(p,q) = u(p,p)u^{-1}(q,q)f(p,q).$$

Consideremos $\nu \in I(P,F)$ definida por

$$\nu(p,q) = \begin{cases} u(p,p)u^{-1}(q,q) & \text{se } p \leq q \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Claramente $\nu$ é multiplicativo e $\psi_u = M_\nu$.

Reciprocamente, assumamos que $\psi_u = M_\nu$ para algum multiplicativo $\nu \in I(P,F)$ e consideremos $p < q$ em $P$. Para $e_q \in I(P,F)$, temos $M_\nu(e_q)(p,q) = \nu(p,q)e_q(p,q) = 0$. Por outro lado, $\psi_u(e_q)(p,q) = u(p,q)u^{-1}(q,q)$. Portanto $u(p,q) = 0$.

Para um elemento invertível $u$ de $I(P,F)$, consideremos o elemento diagonal $u'$ onde $u'(p,p) = u(p,p)$ para todo $p \in P$. Então, $u = u' \cdot u''$, onde $u''(p,p) = 1$ e $u''(p,q) = (u(p,p))^{-1}u(p,q)$ para todos $p, q \in P$ com $p \neq q$. Assim, $\psi_u = \psi_{u'}\psi_{u''} = M_\nu \psi_{u''}$ e, pela primeira igualdade da Proposição 3.9, $\rho = M_{\mu * \nu}\psi_{u''}\hat{\lambda}$. □

Embora toda involução sobre $I(P,F)$ possa ser decomposta como anteriormente, não é verdade que para qualquer automorfismo multiplicativo $M_\mu$, qualquer automorfismo interno $\psi_u$ e qualquer involução induzida $\hat{\lambda}$, o antiautomorfismo $M_\mu\psi_u\hat{\lambda}$ é uma involução. Para que isso ocorra, é necessário (e suficiente) que esse antiautomorfismo tenha ordem 2. Para um $P$ arbitrário tal descrição não é fácil, pois os automorfismos multiplicativos dependem do conjunto $P$, desse modo analisaremos o que acontece quando $P = C_{2n}$.

O próximo lema nos dá condições necessárias e suficientes para que $\rho = M_\mu\psi_u\hat{\lambda}$ seja uma involução sobre $I(C_{2n}, F)$.

**Lema 3.11.** *Sejam $M_\mu$ um automorfismo multiplicativo, $\psi_u$ um automorfismo interno, onde $u(p,p) = 1$ para todo $p \in C_{2n}$, e $\hat{\lambda}$ uma involução induzida sobre $I(C_{2n}, F)$. O antiautomorfismo $\rho = M_\mu\psi_u\hat{\lambda}$ é uma involução se, e somente se, para todo $p < q$ em $C_{2n}$ as seguintes condições são satisfeitas,*

$$\mu(p,q)\mu(\lambda(q),\lambda(p)) = 1 \text{ e } u(p,q) = \mu(\lambda(q),\lambda(p))u(\lambda(q),\lambda(p)).$$

*Demonstração.* O antiautomorfismo $\rho$ é uma involução se, e somente se, $\rho^2$ é o automorfismo identidade. Assim, para todo $f \in I(C_{2n}, F)$ e para todo $p \leq q$ em $C_{2n}$ devemos ter

$$M_\mu \psi_u \hat{\lambda} M_\mu \psi_u \hat{\lambda}(f)(p,q) = f(p,q).$$

Aplicando a Proposição 3.9, obtemos

$$M_\mu \psi_u M_{\hat{\lambda}(\mu)} \psi_{\hat{\lambda}(u^{-1})}(f)(p,q) = f(p,q). \tag{3.1}$$

Como $p, q \in C_{2n}$, se $p < q$, não existe $r \in C_{2n}$ satisfazendo $p < r < q$. Assim, se $\rho$ é uma involução sobre $I(C_{2n}, F)$ e $p < q$, temos

$$\begin{aligned}
M_\mu \psi_u M_{\hat{\lambda}(\mu)} \psi_{\hat{\lambda}(u^{-1})}(f)(p,q) &= \mu(p,q)[[(M_{\hat{\lambda}(\mu)} \psi_{\hat{\lambda}(u^{-1})})(f)](p,p)u^{-1}(p,q) \\
&+ [(M_{\hat{\lambda}(\mu)} \psi_{\hat{\lambda}(u^{-1})})(f)](p,q) + u(p,q)[(M_{\hat{\lambda}(\mu)} \psi_{\hat{\lambda}(u^{-1})})(f)](q,q)] \\
&= \mu(p,q)[u^{-1}(p,q)[\psi_{\hat{\lambda}(u^{-1})}(f)](p,p) \qquad (3.2)\\
&+ \mu(\lambda(q),\lambda(p))[\psi_{\hat{\lambda}(u^{-1})}(f)](p,q) + u(p,q)[\psi_{\hat{\lambda}(u^{-1})}(f)](q,q)] \\
&= \mu(p,q)[u^{-1}(p,q)f(p,p) + \mu(\lambda(q),\lambda(p))[f(p,p)u(\lambda(q),\lambda(p)) \\
&+ f(p,q) + u^{-1}(\lambda(q),\lambda(p))f(q,q)] + u(p,q)f(q,q)].
\end{aligned}$$

Em particular, essa última igualdade deve ser verdadeira quando $f = e_{pq}$, o que nos dá $\mu(p,q)\mu(\lambda(q),\lambda(p)) = 1$ que é a primeira condição. Para $f = e_p$, temos $\mu(p,q)[u^{-1}(p,q) + \mu(\lambda(q),\lambda(p))u(\lambda(q),\lambda(p))] = 0$, mas $\mu$ é multiplicativo e assim $\mu(p,q) \neq 0$ e $u^{-1}(p,q) + \mu(\lambda(q),\lambda(p))u(\lambda(q),\lambda(p)) = 0$. Por outro lado, $(u \cdot u^{-1})(p,q) = 0$ e desse modo, $u(p,p)u^{-1}(p,q) = -u(p,q)u^{-1}(q,q)$. Como $u(p,p) = u(q,q) = 1$, temos que $u^{-1}(p,q) = -u(p,q)$ e assim obtemos a segunda condição.

Reciprocamente, suponhamos que

$$\mu(p,q)\mu(\lambda(q),\lambda(p)) = 1 \text{ e } u(p,q) = \mu(\lambda(q),\lambda(p))u(\lambda(q),\lambda(p)) \text{ para todo } p < q.$$

Como dito anteriormente, devemos checar que, para quaisquer $p \leq q$ em $C_{2n}$, $M_\mu \psi_u M_{\hat{\lambda}(\mu)} \psi_{\hat{\lambda}(u^{-1})}(f)(p,q) = f(p,q)$. Como $\{e_{sr} : s \leq r\}$ é uma base para $I(C_{2n}, F)$, é suficiente mostrarmos que isso ocorre sempre que $f = e_{sr}$. Se $\{s,r\} \cap \{p,q\} = \emptyset$ o resultado é trivial. Se $p = q$, o resultado é também trivial, pois para qualquer invertível $u$ e para qualquer elemento multiplicativo $\mu$, temos $[\psi_u(f)](p,p) = f(p,p) = [M_\mu(f)](p,p)$. Restam os casos quando $p < q$ com $f = e_{pq}$, $f = e_p$ ou $f = e_q$. Como $[\rho^2(f)](p,q) = f(p,q)$ é equivalente à equação (3.2), o caso $f = e_{pq}$ segue de $\mu(p,q)\mu(\lambda(q),\lambda(p)) = 1$; e ambos os casos $f = e_p$ e $f = e_q$ seguem de $u(p,q) = \mu(\lambda(q),\lambda(p))u(\lambda(q),\lambda(p))$. $\square$

Se $u$ é a identidade, a segunda condição do lema anterior é vazia e temos o seguinte corolário.

**Corolário 3.12.** *O antiautomorfismo $M_\mu\hat{\lambda}$ é uma involução sobre $I(C_{2n}, F)$ se, e somente se, $\mu(p, q)\mu(\lambda(q), \lambda(p)) = 1$, para quaisquer $p \leq q$ em $C_{2n}$.*

Notemos que, no lema anterior, usamos o fato de que uma involução $\rho$ sobre $I(C_{2n}, F)$ pode ser escrita na forma $\rho = M_\mu\psi_u\hat{\lambda}$ com $u(p, p) = 1$ para todo $p \in C_{2n}$. Porém, isso não vale somente para o poset $C_{2n}$, ou seja, dado um poset qualquer finito e conexo $P$, uma involução $\rho$ sobre $I(P, F)$ também pode ser escrita na forma $\rho = M_\mu\psi_u\hat{\lambda}$ com $u(p, p) = 1$ para todo $p \in P$. Na igualdade (3.1) usamos as igualdades $\hat{\lambda}M_\mu = M_{\hat{\lambda}(\mu)}$ e $\hat{\lambda}\psi_u = \psi_{\hat{\lambda}(u^{-1})}\hat{\lambda}$ que também são verdadeiras para qualquer poset localmente finito $P$. No decorrer da demonstração do lema anterior, o único fato que usamos sobre $C_{2n}$ é que ele possui cadeias de comprimento no máximo 2, assim, feitas estas observações, concluímos que o lema anterior também é válido se trocarmos $C_{2n}$ por um poset $P$ finito, conexo e com cadeias de comprimento no máximo 2. No caso em que $\rho = M_\mu\hat{\lambda}$, $\rho$ é uma involução sobre $I(P, F)$ se, e somente se, $\mu(p, q)\mu(\lambda(q), \lambda(p)) = 1$.

**Observação 3.13.** *Quando $\lambda$ é uma reflexão, consideremos $p_i$, $p_{i+1}$, $p_{n+i}$ e $p_{n+i+1}$ como na Observação 3.4. Denotemos por $a_1$ o menor entre $p_i$ e $p_{i+1}$ e por $b_1$ o maior deles, denotemos por $a_2$ o menor entre $p_{n+i}$ e $p_{n+i+1}$ e por $b_2$ o maior deles. A condição $\mu(p, q)\mu(\lambda(q), \lambda(p)) = 1$ implica em $\mu(a_1, b_1) = \pm 1$ e $\mu(a_2, b_2) = \pm 1$. Se $\mu(a_1, b_1) = -1$, a condição $u(p, q) = \mu(\lambda(q), \lambda(p))u(\lambda(q), \lambda(p))$ implica que $u(a_1, b_1) = 0$ e o mesmo acontece com $u(a_2, b_2)$.*

## 3.3 Equivalência Entre as Involuções de $I(C_{2n}, F)$

Tendo posse dos resultados provados nas duas seções anteriores, determinaremos as classes de equivalência das involuções sobre $I(C_{2n}, F)$.

Começaremos estudando a equivalência entre involuções de $I(C_{2n}, F)$ que induzem a mesma reflexão $\lambda$ em $C_{2n}$.

**Lema 3.14.** *Seja $\lambda$ uma reflexão de $C_{2n}$ e seja $\rho = M_\mu\psi_u\hat{\lambda}$ uma involução sobre $I(C_{2n}, F)$, onde $u(p, p) = 1$ para todo $p \in C_{2n}$. Se $\mu(a_1, b_1) = \mu(a_2, b_2) = 1$, então $\rho$ é equivalente a $\hat{\lambda}$.*

*Demonstração.* Consideremos os elementos $p_1, p_2, \ldots, p_{2n}$ de $C_{2n}$ indexados como no diagrama de Hasse feito no início da seção 3.1. Encontraremos um elemento multiplicativo $\tau$ e um invertível $v$ pertencentes a $I(C_{2n}, F)$ tais que $M_\tau \psi_v \rho = \hat{\lambda} M_\tau \psi_v$.

Fazendo $\mathcal{P} = \{(p,q) \in C_{2n} \times C_{2n} : p < q\}$, notemos que qualquer função $\omega : \mathcal{P} \to F^*$, onde $F^*$ denota o grupo multiplicativo $F \backslash \{0\}$, pode ser unicamente estendida a um elemento multiplicativo $\tau \in I(C_{2n}, F)$ fazendo

$$\tau(p,q) = \begin{cases} \omega(p,q) & \text{se } p < q \\ 1 & \text{se } p = q \\ 0 & \text{se } p \nleq q. \end{cases}$$

De fato $\tau$ é multiplicativo, pois, para $p, q, r \in C_{2n}$ com $p \leq r \leq q$ e $p < q$, devemos ter $p = r$ ou $q = r$ e, para qualquer um desses casos, vamos ter

$$\tau(p,q) = \omega(p,q) = \omega(p,r)\omega(r,q) = \tau(p,r)\tau(r,q).$$

Lembremos que $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ é o inteiro que satisfaz $\lambda(p_1) = p_{2i}$ e consideremos $I = \{i+1, i+2, \ldots, i+n-1\}$. Sejam $Q_1, Q_2 \subset \mathcal{P}$ definidos por

$$Q_1 = \{(p_j, p_{j+1}) : p_j < p_{j+1} \text{ e } j \in I\} \text{ e } Q_2 = \{(p_{j+1}, p_j) : p_{j+1} < p_j \text{ e } j \in I\}.$$

Decompomos $\mathcal{P}$ como $\mathcal{P} = Q \cup Q'$, onde $Q = \{(a_1, b_1)\} \cup \{(a_2, b_2)\} \cup Q_1 \cup Q_2$ e $Q' = \lambda(Q_1) \cup \lambda(Q_2)$ onde $\lambda(Q_j) = \{(\lambda(q), \lambda(p)) : (p,q) \in Q_j\}$. Observemos que todas essas uniões são disjuntas.

Definamos $\omega : \mathcal{P} \to F^*$ como segue:

$$\omega(p,q) = \begin{cases} 1 & \text{se } (p,q) \in Q \\ \mu(\lambda(q), \lambda(p)) & \text{se } (p,q) \in Q'. \end{cases}$$

A função $\omega$ é definida sobre todo $\mathcal{P}$ e escolhendo $\tau$ como sendo o único elemento multiplicativo de $I(C_{2n}, F)$ que restrito a $\mathcal{P}$ é $\omega$, pela primeira condição do Lema 3.11, temos

$$\tau(p,q)\mu(p,q) = \tau(\lambda(q), \lambda(p)) \tag{3.3}$$

para todo $(p,q) \in \mathcal{P}$, pois, se $(p,q) \in Q$ e $(p,q) \notin \{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$, temos que $(\lambda(q), \lambda(p)) \in Q'$ e

$$\tau(\lambda(q), \lambda(p)) = \mu(\lambda\lambda(p), \lambda\lambda(q)) = \mu(p,q) = \tau(p,q)\mu(p,q).$$

Se $(p, q) \in Q'$, então $(p, q) \in Q$ e

$$\tau(\lambda(q), \lambda(p)) = 1 = \mu(p, q)\mu(\lambda(q), \lambda(p)) = \tau(p, q)\mu(p, q).$$

Agora, se $(p, q) = (a_i, b_i)$ com $i = 1, 2$, temos que,

$$\tau(\lambda(b_i), \lambda(a_i)) = \tau(a_i, b_i) = \tau(a_i, b_i)\mu(a_i, b_i),$$

visto que $(a_i, b_i) \in Q$ e $\mu(a_1, b_1) = \mu(a_2, b_2) = 1$.

Consideremos o invertível $v \in I(C_{2n}, F)$ definido por

$$v(p, q) = \begin{cases} 1 & \text{se } p = q \\ -\frac{u(\lambda(q),\lambda(p))}{2} & \text{se } (p, q) \in Q \\ -\frac{u(p,q)\mu(p,q)}{2} & \text{se } (p, q) \in Q'. \end{cases}$$

Usando o Lema 3.11 e a equação (3.3), temos que

$$\begin{aligned} \tau(p, q)[u(p, q)\mu(p, q) + v(p, q)] &= -\tau(\lambda(q), \lambda(p))v(\lambda(q), \lambda(p)) \\ &= \frac{\tau(\lambda(q), \lambda(p))u(p, q)}{2}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Usando as equações (3.3) e (3.4), temos

$$\begin{aligned} &\tau(p, q)[f(\lambda(p), \lambda(p))[-v(p, q) - \mu(p, q)u(p, q)] + f(\lambda(q), \lambda(q))[v(p, q) \\ +\ &\mu(p, q)u(p, q)] + f(\lambda(q), \lambda(p))\mu(p, q)] = \tau(\lambda(q), \lambda(p))[f(\lambda(p), \lambda(p))v(\lambda(q), \lambda(p)) \\ +\ &f(\lambda(q), \lambda(q))[-v(\lambda(q), \lambda(p))] + f(\lambda(q), \lambda(p)) \end{aligned} \tag{3.5}$$

para todo $f \in I(C_{2n}, F)$ e todo $(p, q) \in P$.

Como $u(p, p) = v(p, p) = 1$ para todo $p \in C_{2n}$, temos que $u^{-1}(p, q) = -u(p, q)$ e $v^{-1}(p, q) = -v(p, q)$, assim, trocando os termos $u(p, q)$ e $v(p, q)$ negativos que aparecem na equação (3.5) por $u^{-1}(p, q)$ e $v^{-1}(p, q)$ respectivamente, obtemos

$$M_\tau \psi_v M_\mu \psi_u \hat{\lambda}(f)(p, q) = \hat{\lambda} M_\tau \psi_v(f)(p, q)$$

para todo $f \in I(C_{2n}, F)$ e todo $(p, q) \in \mathcal{P}$. Como $M_\nu(f)(p, p) = \psi_w(f)(p, p) = f(p, p)$, para qualquer $p \in C_{2n}$ e quaisquer $f, w, \nu \in I(C_{2n}, F)$ com $\nu$ multiplicativo e $w$ invertível, a mesma relação é verdadeira quando $p = q$ e, portanto, $M_\tau \psi_v M_\mu \psi_u \hat{\lambda}(f) = \hat{\lambda} M_\tau \psi_v(f)$ para todo $f \in I(C_{2n}, F)$ e a equivalência está mostrada. $\square$

No próximo lema usaremos a involução $\sigma_\lambda$ em $I(P, F)$ que está definida em (1.1).

**Lema 3.15.** *Sejam $\lambda$ uma reflexão de $C_{2n}$ e $\rho = M_\mu \psi_u \hat{\lambda}$ uma involução sobre $I(C_{2n}, F)$, onde $u(p,p) = 1$ para todo $p \in C_{2n}$. Se $\mu(a_1, b_1) = \mu(a_2, b_2) = -1$, então $\rho$ é equivalente a $\sigma_\lambda$.*

*Demonstração.* Como a prova deste lema é bastante parecida com a prova do lema anterior, descreveremos aqui somente as adaptações necessárias. Definimos $\tau$ como o único elemento multiplicativo que estende a função $\omega : \mathcal{P} \to F^*$ definida como segue,

$$\omega(p,q) = \begin{cases} 1 & \text{se } (p,q) \in Q \\ -\mu(\lambda(q), \lambda(p)) & \text{se } (p,q) \in Q'. \end{cases}$$

Assim, semelhantemente à equação (3.3), temos $\tau(p,q)\mu(p,q) = \tau(\lambda(q), \lambda(p))$ para qualquer $(p,q) \in \mathcal{P}$ (aqui usamos implicitamente que $\mu(a_1, b_1) = \mu(a_2, b_2) = -1$). Considerando $v$ como definido na prova do lema anterior (isso não significa que esse $v$ é o mesmo da prova anterior, pois ele depende de $\mu$, e esse não é o mesmo), a seguinte equação é verdadeira

$$\tau(p,q)[u(p,q)\mu(p,q) + v(p,q)] = \tau(\lambda(q), \lambda(p))v(\lambda(q), \lambda(p)) = -\frac{\tau(\lambda(q), \lambda(p))u(p,q)}{2}.$$

Novamente obtemos uma equação semelhante à equação (3.5) com $-1$ multiplicando o seu lado direito. Fazendo as mesmas substituições, obtemos

$$M_\tau \psi_v M_\mu \psi_u \hat{\lambda}(f)(p,q) = \sigma_\lambda M_\tau \psi_v(f)(p,q),$$

para todo $f \in I(C_{2n}, F)$ e todo $(p,q) \in \mathcal{P}$. Usando o mesmo argumento final da prova anterior, obtemos a equivalência desejada. □

Vamos considerar agora o caso $\mu(a_1, b_1) = -\mu(a_2, b_2) = \pm 1$.

**Lema 3.16.** *Sejam $\lambda$ uma reflexão de $C_{2n}$ e $\rho = M_\mu \psi_u \hat{\lambda}$ uma involução sobre $I(C_{2n}, F)$. Se $\mu(a_1, b_1) = -\mu(a_2, b_2) = \pm 1$ e $\mu'$ é um elemento multiplicativo em $I(C_{2n}, F)$ onde $\mu'(a_1, b_1) = \mu(a_2, b_2)$ e $\mu'(a_2, b_2) = \mu(a_1, b_1)$, então $\rho$ é equivalente a $M_\mu \hat{\lambda}$ e a $M_{\mu'} \hat{\lambda}$.*

*Demonstração.* Notemos que $\mu(a_1, b_1) = -\mu'(a_1, b_1) = \mu'(a_2, b_2) = -\mu(a_2, b_2) = \pm 1$. Encontraremos um invertível $v \in I(C_{2n}, F)$ tal que $\psi_v M_\mu \psi_u \hat{\lambda} = M_\mu \hat{\lambda} \psi_v$. É suficiente considerarmos $v$ como definido na prova do lema anterior para obtermos

$$v(p,q) + \mu(p,q)u(p,q) = -\mu(p,q)v(\lambda(q), \lambda(p)),$$

para todo $p < q$ em $C_{2n}$. Então temos,

$$\begin{aligned} & \mu(p,q)[-v(\lambda(q),\lambda(p))f(\lambda(q),\lambda(q)) + f(\lambda(q),\lambda(p)) \\ + \; & v(\lambda(q),\lambda(p))f(\lambda(p),\lambda(p))] = [v(p,q) + \mu(p,q)u(p,q)]f(\lambda(q),\lambda(q)) \\ + \; & \mu(p,q)f(\lambda(q),\lambda(p)) + [-v(p,q) - \mu(p,q)u(p,q)]f(\lambda(p,\lambda(p)) \end{aligned}$$

para todo $p < q$ em $C_{2n}$ e todo $f \in I(C_{2n}, F)$. Usando que $-u(s,r) = u^{-1}(s,r)$ se $s < r$ em $C_{2n}$ e que o mesmo vale para $v$, temos

$$M_\mu \hat{\lambda} \psi_v(f)(p,q) = \psi_v M_\mu \psi_u \hat{\lambda}(f)(p,q)$$

para todo $f \in I(C_{2n}, F)$ e todo $p < q$ em $C_{2n}$. O caso $p = q$ é imediato e assim obtemos a equivalência.

Mostraremos agora que $M_\mu \hat{\lambda}$ e $M_{\mu'} \hat{\lambda}$ são equivalentes. Para tanto, exibiremos $\tau$ multiplicativo em $I(C_{2n}, F)$ tal que $M_\tau \hat{\alpha_\lambda} M_\mu \hat{\lambda} = M_{\mu'} \hat{\lambda} M_\tau \hat{\alpha_\lambda}$ onde $\alpha_\lambda$ é o único automorfismo não trivial de $C_{2n}$ que comuta com a reflexão $\lambda$ e $\hat{\alpha_\lambda}$ é o automorfismo de $I(C_{2n}, F)$ induzido por $\alpha_\lambda$. Como $\alpha_\lambda$ não é a identidade sobre $C_{2n}$, para qualquer par de elementos $p < q$ em $C_{2n}$, as igualdades $\alpha_\lambda(p) = p$ e $\alpha_\lambda(q) = q$ não podem ocorrer simultaneamente. Por outro lado, como $\alpha_\lambda$ comuta com $\lambda$, a imagem do par $a_1, b_1$ por $\alpha_\lambda$ deve ser esse próprio par ou o par $a_2, b_2$. Isso implica que $\alpha_\lambda(a_1) = a_2$ e $\alpha_\lambda(b_1) = b_2$ e vice-versa.

Consideremos $\tau \in I(C_{2n}, F)$ definido como segue,

$$\tau(p,q) = \begin{cases} 1 & \text{se } p = q \text{ ou } (p,q) \in Q \\ \mu(\alpha_\lambda\lambda(q), \alpha_\lambda\lambda(p))\mu'(p,q) & \text{se } (p,q) \in Q' \end{cases}$$

onde $Q$ e $Q'$ são subconjuntos de $\mathcal{P}$ definidos na prova do Lema 3.14. Quando $(p,q) \in \mathcal{P} \backslash \{(a_1,b_1),(a_2,b_2)\}$, $(p,q) \in Q$ se, e somente se, $(\lambda(q),\lambda(p)) \in Q'$ e assim, para todos estes pares temos

$$\tau(p,q)\mu(\alpha_\lambda(p),\alpha_\lambda(q)) = \mu'(p,q)\tau(\lambda(q),\lambda(p)) \tag{3.6}$$

(lembremos que, para todo $s < r$, $\mu(s,r)\mu(\lambda(r),\lambda(s)) = 1$). Para $(p,q) = (a_1,b_1)$ ou $(p,q) = (a_2,b_2)$, a equação (3.6) também é verdadeira pois $\mu(a_1,b_1) = \mu'(a_2,b_2)$, $\mu(a_2,b_2) = \mu'(a_1,b_1)$ e $\alpha_\lambda(a_1) = a_2$, $\alpha_\lambda(b_1) = b_2$. Desse modo,

$$\tau(p,q)\mu(\alpha_\lambda(p),\alpha_\lambda(q))f(\lambda\alpha_\lambda(q),\lambda\alpha_\lambda(p)) = \mu'(p,q)\tau(\lambda(q),\lambda(p))f(\alpha_\lambda\lambda(q),\alpha_\lambda\lambda(p))$$

para todo $p < q$ em $C_{2n}$ e todo $f \in I(C_{2n}, F)$. Assim, para todo $f \in I(C_{2n}, F)$ e todo $p < q$ em $C_{2n}$ temos que $M_\tau \hat{\alpha_\lambda} M_\mu \hat{\lambda} f(p,q) = M_{\mu'} \hat{\lambda} M_\tau \hat{\alpha_\lambda} f(p,q)$ e o mesmo vale se $p = q$. Portanto, para todo $f \in I(C_{2n}, F)$, $M_\tau \hat{\alpha_\lambda} M_\mu \hat{\lambda}(f) = M_{\mu'} \hat{\lambda} M_\tau \hat{\alpha_\lambda}(f)$. □

Mostraremos que as três classes de equivalência em cada um dos lemas anteriores são, de fato, distintas.

**Lema 3.17.** *Sejam $\lambda$ uma reflexão de $C_{2n}$ e $\mu$ um elemento multiplicativo de $I(C_{2n}, F)$ tal que $M_\mu \hat{\lambda}$ é uma involução e $\mu(a_1, b_1) = -\mu(a_2, b_2)$. Então $\hat{\lambda}$, $\sigma_\lambda$ e $M_\mu \hat{\lambda}$ são duas a duas não equivalentes.*

*Demonstração.* Temos que provar que não existe automorfismo $\Phi$ de $I(C_{2n}, F)$ tal que $\Phi \hat{\lambda} = \sigma_\lambda \Phi$ e o mesmo para os pares $\sigma_\lambda$, $M_\mu \hat{\lambda}$ e $\hat{\lambda}$, $M_\mu \hat{\lambda}$.

Usaremos o fato que todo automorfismo $\Phi$ de $I(C_{2n}, F)$ pode ser decomposto como $\Phi = M_\tau \psi_v \hat{\alpha}$ para algum elemento multiplicativo $\tau$, algum invertível $v$ e algum automorfismo $\alpha$ de $C_{2n}$. Como as relações da Proposição 3.9 também valem quando trocamos a involução $\hat{\lambda}$ por um automorfismo $\hat{\alpha}$, notemos que, em qualquer caso, se $\Phi$ é um automorfismo que realiza a equivalência e $\alpha$ é o automorfismo induzido por $\Phi$ em $C_{2n}$, devemos ter $\hat{\lambda}\hat{\alpha} = \hat{\alpha}\hat{\lambda}$, ou seja, $\alpha$ comuta com $\lambda$. Desse modo pela Proposição 3.6, temos $\alpha = \iota$, a identidade de $C_{2n}$, ou $\alpha = \alpha_\lambda$ (veja página 67).

Como ressaltado anteriormente, podemos assumir $v(p,p) = 1$ para todo $p \in C_{2n}$, e portanto $v^{-1}(p,q) = -v(p,q)$ se $p < q$. Suponhamos que $\Phi \hat{\lambda} = \sigma_\lambda \Phi$. Em particular,

$$[\Phi \hat{\lambda}(e_{\alpha(a_1)\alpha(b_1)})](a_1, b_1) = [\sigma_\lambda \Phi(e_{\alpha(a_1)\alpha(b_1)})](a_1, b_1).$$

Escrevendo $\Phi$ como $M_\tau \psi_v \hat{\alpha}$ e eliminando os termos nulos, obtemos

$$\tau(a_1, b_1)[e_{\alpha(a_1)\alpha(a_2)}(\alpha(a_1), \alpha(b_1))] = -\tau(a_1, b_1)[e_{\alpha(a_1)\alpha(b_1)}(\alpha(a_1), \alpha(b_1))],$$

o que não pode ocorrer, pois $\tau(a_1, b_1) \neq 0$. Para os casos restantes, o cálculo é bastante semelhante: obtemos $M_\mu \hat{\lambda} \Phi(e_{\alpha(a_j)\alpha(b_j)})(a_j, b_j) = \mu(a_j, b_j)\tau(a_j, b_j)$, para $j = 1, 2$. Usando $j \in \{1, 2\}$ tal que $\mu(a_j, b_j) = 1$, obtemos que $M_\mu \hat{\lambda}$ não é equivalente a $\sigma_\lambda$ e usando o outro $j$, obtemos que $M_\mu \hat{\lambda}$ não é equivalente a $\hat{\lambda}$. □

Notemos que, a razão para a existência de mais do que uma classe de equivalência quando $\lambda$ é uma reflexão é a existência de pontos $p < q$ em $C_{2n}$ tais que $p = \lambda(q)$ e

$q = \lambda(p)$ (exatamente os elementos $a_1, b_1, a_2, b_2$). Quando trabalhamos com uma rotação não existem tais pares de elementos, assim todas involuções que induzem uma rotação são equivalentes.

**Lema 3.18.** *Seja $\lambda$ uma rotação da coroa $C_{2n}$ (estamos assumindo $n$ ímpar). Então, toda involução $\rho$ de $I(C_{2n}, F)$ que induz $\lambda$ é equivalente a $\hat{\lambda}$.*

*Demonstração.* Consideremos o conjunto $\mathcal{P}$ como no Lema 3.14 e sejam

$$R_1 = \{(p_j, p_{j+1}) \in \mathcal{P} : j = 1, 3, 5, \ldots, n\} \text{ e } R_2 = \{(p_{j+1}, p_j) \in \mathcal{P} : j = 2, 3, 4, \ldots, n-1\}.$$

Quebramos $\mathcal{P}$ em $\mathcal{P} = R \cup R'$, onde $R = R_1 \cup R_2$ e $R' = \lambda(R_1) \cup \lambda(R_2)$. Todas essas uniões são disjuntas e definimos,

$$\tau(p,q) = \begin{cases} 1 & \text{se } p = q \text{ ou } (p,q) \in R \\ \mu(\lambda(q), \lambda(p)) & \text{se } (p,q) \in R'. \end{cases}$$

A função $\tau$ satisfaz $\tau(\lambda(q), \lambda(p)) = \tau(p,q)\mu(p,q)$ para todo $p < q$ em $C_{2n}$. Definimos também um invertível $v \in I(C_{2n}, F)$ por

$$v(p,q) = \begin{cases} 1 & \text{se } p = q \\ -\frac{\mu(\lambda(q),\lambda(p))}{2} & \text{se } (p,q) \in R \\ -\frac{u(p,q)\mu(p,q)}{2} & \text{se } (p,q) \in R'. \end{cases}$$

Assim, temos $\tau(p,q)[u(p,q)\mu(p,q)+v(p,q)] = -\tau(\lambda(q), \lambda(p))v(\lambda(q), \lambda(p))$, para todo $p < q$ em $C_{2n}$ e seguindo os mesmo passos da prova do Lema 3.14, obtemos a equivalência desejada. □

Apresentamos agora o resultado final desse capítulo.

**Teorema 3.19.** *Existem três classes de equivalência distintas de involuções sobre $I(C_{2n}, F)$ se $n$ é par e existem quatro classes de equivalência se $n$ é ímpar.*

*Demonstração.* A prova seguirá em duas partes. Primeiramente, mostraremos que, se $\lambda$ e $\lambda'$ são reflexões de $C_{2n}$, então $\hat{\lambda}$ é equivalente a $\hat{\lambda}'$, $\sigma_\lambda$ é equivalente a $\sigma_{\lambda'}$ e $M_\mu\hat{\lambda}$ é equivalente a $M_\nu\hat{\lambda}'$ se $\mu$ e $\nu$ satisfazem a hipótese do Lema 3.16. Em segundo lugar, mostraremos que se $\lambda$ é uma rotação de $C_{2n}$, quando $n$ é ímpar, então $\hat{\lambda}$ não é equivalente a nenhuma outra involução de $C_{2n}$ que induz uma reflexão sobre $C_{2n}$.

Sejam $\lambda$ e $\lambda'$ duas reflexões de $C_{2n}$. Pela Proposição 3.6, existe um automorfismo $\alpha$ de $C_{2n}$ tal que $\alpha\lambda = \lambda'\alpha$, assim $\hat{\alpha}\hat{\lambda} = \widehat{\alpha\lambda} = \widehat{\lambda'\alpha} = \hat{\lambda}'\hat{\alpha}$ e, consequentemente, $\hat{\lambda}$ e $\hat{\lambda}'$ são equivalentes. Para caso o de $\sigma_\lambda$ e $\sigma_{\lambda'}$, considerando $f \in I(C_{2n}, F)$ e $p < q$ em $C_{2n}$, temos que,

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}\sigma_{\lambda'}(f)(p,q) &= \hat{\alpha}(\sigma_{\lambda'}(f))(p,q) = \sigma_{\lambda'}(f)(\alpha(p), \alpha(q)) \\
&= -f(\lambda'\alpha(q), \lambda'\alpha(p)) = -f(\alpha\lambda(q), \alpha\lambda(p)) \\
&= -\hat{\alpha}(f)(\lambda(q), \lambda(p)) = \sigma_\lambda\hat{\alpha}(f)(p,q).
\end{aligned}$$

De maneira análoga, podemos mostrar que $\hat{\alpha}\sigma_{\lambda'}(f)(p,p) = \sigma_\lambda\hat{\alpha}(f)(p,p)$ e, assim, temos a igualdade $\hat{\alpha}\sigma_{\lambda'} = \sigma_\lambda\hat{\alpha}$.

Para o caso restante, consideremos $a_1 < b_1 = \lambda(a_1)$, $a_2 < b_2 = \lambda(a_2)$, $a_1' < b_1' = \lambda'(a_1')$ e $a_2' < b_2' = \lambda'(a_2)$ os elementos de $C_{2n}$ como na Observação 3.4 para $\lambda$ e $\lambda'$ respectivamente. Como $\alpha\lambda = \lambda'\alpha$, temos que $\lambda'\alpha(a_1) = \alpha\lambda(a_1) = \alpha(b_1) > \alpha(a_1)$ e o mesmo acontece para $a_2$, assim $\alpha(a_1) = a_1'$ ou $a_2'$. Portanto, renomeando os elementos se necessário, podemos assumir que $\alpha(a_1) = a_1'$, $\alpha(b_1) = b_1'$, $\alpha(a_2) = a_2'$ e $\alpha(b_2) = b_2'$.

Estamos assumindo que $\mu(a_1, b_1) = -\mu(a_2, b_2) = \pm 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}(\mu)(a_1', b_1') &= \mu(\alpha^{-1}(a_1'), \alpha^{-1}(b_1')) = \mu(a_1, b_1) \\
&= -\mu(a_2, b_2) = -\mu(\alpha^{-1}(a_2'), \alpha^{-1}(b_2')) = -\hat{\alpha}(\mu)(a_2', b_2').
\end{aligned}$$

Pela Proposição 3.9 e por $\alpha\lambda = \lambda'\alpha$, considerando $f \in I(C_{2n}, F)$ e $p \leq q$ em $C_{2n}$ temos

$$\begin{aligned}
M_{\hat{\alpha}(\mu)}\hat{\lambda}'\hat{\alpha}(f)(p,q) &= M_{\hat{\alpha}(\mu)}\hat{\alpha}\hat{\lambda}(f)(p,q) = \mu(\alpha(p), \alpha(q))\hat{\lambda}(f)(\alpha(p), \alpha(q)) \\
&= M_\mu\hat{\lambda}(f)(\alpha(p), \alpha(q)) = \hat{\alpha}M_\mu\hat{\lambda}(f)(p,q).
\end{aligned}$$

Logo, $M_\mu\hat{\lambda}$ é equivalente a $M_{\hat{\alpha}(\mu)}\hat{\lambda}'$. Por hipótese, também temos $\nu(a_1', b_1') = -\nu(a_2', b_2') = \pm 1$ e, assim, pelo Lema 3.16, $M_{\hat{\alpha}(\mu)}\hat{\lambda}'$ e $M_\nu\hat{\lambda}'$ são equivalentes e segue o caso $n$ par.

Para o caso $n$ ímpar, é suficiente mostrarmos que, quando $\lambda$ é uma rotação, a involução $\hat{\lambda}$ não é equivalente a nenhuma involução que induz uma reflexão sobre $C_{2n}$. Pela Proposição 3.6, para qualquer automorfismo $\alpha$ de $C_{2n}$, $\alpha\lambda\alpha^{-1} = \lambda$. Seja $\rho$ uma involução sobre $I(C_{2n}, F)$ que induz uma involução $\lambda'$ sobre $C_{2n}$. Se $\rho$ é equivalente a $\hat{\lambda}$, existe um automorfismo $\Phi$ de $I(C_{2n}, F)$ tal que $\Phi\hat{\lambda}\Phi^{-1} = \rho$. Consideremos $\alpha$ o automorfismo de $C_{2n}$ induzido por $\Phi$. Então, usando o Corolário 3.8, $\Phi\hat{\lambda}\Phi^{-1}$ induz a involução $\alpha\lambda\alpha^{-1}$ sobre

$C_{2n}$. Pela unicidade da involução induzida sobre $C_{2n}$, devemos ter $\alpha\lambda\alpha^{-1} = \lambda'$ e, pela Proposição 3.6, segue que $\lambda = \lambda'$ e o teorema está demonstrado. $\square$

Capítulo 4

# Identidades com Involução em $I(P, F)$ com $P$ Conexo Possuindo Cadeias de Comprimento no Máximo $2$

Em todo este capítulo consideraremos um corpo $F$ infinito de característica zero e um poset $P$ finito com $|P| \geq 4$, conexo, com cadeias de comprimento no máximo 2 e com uma involução $\lambda$. Mostraremos que as $\hat{\lambda}$-identidades e as $\sigma_\lambda$-identidades de $I(P, F)$ seguem da identidade ordinária $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ e, em seguida, analisaremos o caso particular $P = C_{2n}$. Usando os resultados obtidos no capítulo 3, mostraremos que para qualquer involução $\rho$ sobre $I(C_{2n}, F)$, as $\rho$-identidades em $I(C_{2n}, F)$, $n \geq 2$, também seguem da identidade ordinária $[x_1, x_2][x_3, x_4]$.

## 4.1 $\hat{\lambda}$-identidades e $\sigma_\lambda$-identidades em $I(P, F)$

Nesta primeira seção mostraremos que toda $\hat{\lambda}$-identidade e toda $\sigma_\lambda$-identidade em $I(P, F)$ segue da identidade ordinária $[x_1, x_2][x_3, x_4]$.

Observemos que, considerando $P$ sob as condições descritas no início do capítulo, sempre podemos definir em $I(P, F)$ a involução $\sigma_\lambda$, pois como $P$ possui cadeias de comprimento no máximo 2 e é conexo, segue que, dado $p \in P$, temos que $p$ é maximal ou minimal e assim $\lambda(p)$ é maximal se $p$ for minimal e é minimal se $p$ for maximal. Logo $\lambda(p) \neq p$ para todo $p \in P$, ou seja, $P$ não possui pontos fixos. Desse modo, conforme a Proposição 1.65 temos $P_1$ o subconjunto dos elementos minimais de $P$, $P_2$ o subconjunto dos elementos maximais de $P$ e $P_3 = \emptyset$. Temos então, para $p, q \in P$ e $f \in I(P,F)$,

$$\sigma_\lambda(f)(p,q) = \begin{cases} -f(\lambda(q),\lambda(p)) & \text{se } p < q \\ f(\lambda(q),\lambda(p)) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como estamos interessados nas $\hat{\lambda}$-identidades e $\sigma_\lambda$-identidades em $I(P,F)$, trabalharemos com a álgebra livre com involução $F\langle Y, Z\rangle$ onde $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ é o conjunto das variáveis simétricas e $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$ é o conjunto das variáveis antissimétricas, ora com respeito à involução $\hat{\lambda}$ e ora com respeito à involução $\sigma_\lambda$, dependendo de qual dessas involuções estaremos considerando sobre $I(P,F)$. Dentro desse contexto, denotaremos por $x_i$ uma variável de um polinômio em $F\langle Y, Z\rangle$ que pode ser tanto simétrica como antissimétrica.

Dado $f = f(y_1, \dots, y_s, z_1, \dots, z_t) \in F\langle Y, Z\rangle$, como consequência do Teorema de Poincaré - Birkhoff - Witt (Teorema 2.4), o polinômio $f$ pode ser escrito como uma combinação linear de polinômios do tipo

$$y_1^{\alpha_1} \cdots y_s^{\alpha_s} z_1^{\beta_1} \cdots z_t^{\beta_t} u_1^{\gamma_1} \cdots u_k^{\gamma_k}$$

que formam uma base para $F\langle Y, Z\rangle$, onde $u_i$ são comutadores de grau maior ou igual a 2 nas variáveis $y_i$ e $z_i$ e $u_1 < u_2 < \cdots$. As constantes $\alpha_i$, $\beta_i$ e $\gamma_i$ são inteiros não negativos.

O polinômio $f$ é dito ser $Y$-próprio se $\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0$ em toda parcela da combinação linear. Denotemos por $B$ a subálgebra de $F\langle Y, Z\rangle$ gerada por todos os polinômios $Y$-próprios. Consideremos o conjunto $\Gamma_{m,n} = P_{m,n} \cap B$, com $m, n \geq 0$ o espaço de todos os polinômios multilineares $Y$-próprios nas variáveis $y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n$ na álgebra livre $F\langle Y, Z\rangle$.

**Definição 4.1.** *Seja $f$ um polinômio multi-homogêneo em $F\langle Y, Z\rangle$. Escrevendo*

$$f = \sum_a \alpha_a y_1^{a_1} y_2^{a_2} \cdots y_m^{a_m} g_a$$

*onde $g_a$ é um polinômio $Y$-próprio, definimos o* posto de $f$, *denotado por $r(f)$ como sendo a maior $m$-upla $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ na ordem lexicográfica.*

Como $f$ possui uma única expressão no formato acima, temos que $r(f)$ está bem definido. Notemos que, pela Definição 4.1 , dizer que $f$ é $Y$-próprio equivale a dizer que $r(f) = (0, 0, \dots, 0)$. Podemos ordenar o conjunto formado pelos postos dos polinômios $f \in F\langle Y, Z\rangle$ com a ordem lexicográfica.

Consideremos o polinômio multi-homogêneo

$$f(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n)=\alpha y_1^{b_1}\cdots y_m^{b_m}g+\sum_a \alpha_a y_1^{a_1}\cdots y_m^{a_m}g_a \tag{4.1}$$

onde $\alpha,\alpha_a\in F\backslash\{0\}$, $g,g_a$ são polinômios $Y$-próprios e

$$a=(a_1,\ldots,a_m)<(b_1,\ldots,b_m)=r(f).$$

Observemos que, quanto maior a entrada $a_1$ na $m$-upla $a$, menor será o grau de $y_1$ em $g_a$.

Como em $g$ e em $g_a$ não aparecem variáveis simétricas fora dos comutadores, a substituição de $y_i$ por $y_i+1$ não altera estes polinômios. Logo, tomando o polinômio $f=f(y_1+1,y_2,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n)$ teremos

$$f=\alpha(y_1+1)^{b_1}y_2^{b_2}\cdots y_m^{b_m}g+\sum_a \alpha_a(y_1+1)^{a_1}y_2^{a_2}\cdots y_m^{a_m}g_a.$$

Notemos que a componente de menor grau em $y_1$ deste polinômio é

$$f_1=\alpha y_2^{b_2}\cdots y_m^{b_m}g+\sum_a \alpha_a y_2^{a_2}\cdots y_m^{a_m}g_a,$$

onde o somatório é sobre todos os $a$'s tais que $a_1=b_1$. Observemos que para $a_1=b_1$, temos $(a_2,\ldots,a_m)<(b_2,\ldots,b_m)$.

Consideremos agora o polinômio $f_1(y_1,y_2+1,y_3,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n)$ e tomemos sua componente de menor grau em $y_2$, que é,

$$f_2=\alpha y_3^{b_3}\cdots y_m^{b_m}g+\sum_a \alpha_a y_3^{a_3}\cdots y_m^{a_m}g_a,$$

onde o somatório é sobre todos os $a$'s tais que $a_1=b_1$ e $a_2=b_2$. Temos que para $a_1=b_1$ e $a_2=b_2$ vale $(a_3,\ldots,a_m)<(b_3,\ldots,b_m)$. Continuando com esse processo, vamos chegar ao polinômio $f_m=\alpha g$.

Os resultados acerca dos geradores dos $T$-ideais de identidades ordinárias e o processo de linearização obtidos na seção 2.3 também são verdadeiros para identidades com involução, ou seja, dados uma $F$-álgebra $A$ com uma involução $\rho$ e $J$ um $T(\rho)$-ideal de $F\langle Y,Z\rangle$, se $F$ é infinito, sempre podemos considerar $f\in J$ como sendo multi-homogêneo e, se $F$ possui característica zero, $f\in J$ pode ser considerado multilinear.

Usando estes resultados e o processo descrito acima, temos a seguinte proposição.

**Proposição 4.2.** *Se $A$ é uma álgebra com involução sobre um corpo infinito $F$ e $J$ é um $T(\hat{\lambda})$-ideal de $\hat{\lambda}$-identidades de $A$, então $B \cap J$ gera $J$ como $T(\hat{\lambda})$-ideal. Se $char(F) = 0$, então $J$ é gerado pelos espaços $\Gamma_{m,n} \cap J$ como $T(\hat{\lambda})$-ideal.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.4, sabemos que o conjunto

$$\{y_1^{a_1} \cdots y_m^{a_m} z_1^{b_1} \cdots z_n^{b_n} u_1^{k_1} \cdots u_t^{k_t} : a_i, b_j, k_l \geq 0\}$$

é uma base para $F\langle Y, Z\rangle$, onde $u_1, u_2, \ldots$ são comutadores com as variáveis em $Y \cup Z$ tais que $u_1 < u_2 < \cdots$. Como $F$ é um corpo infinito, suponhamos, sem perda de generalidade, que o polinômio $f = f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in F\langle Y, Z\rangle$ seja multi-homogêneo.

Desse modo,

$$f(y_1 + 1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) = \sum \alpha_{a,b,c}(y_1 + 1)^{a_1} y_2^{a_2} \cdots y_m^{a_m} z_1^{b_1} \cdots z_n^{b_n} g_c$$

com $a = (a_1, \ldots, a_m)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ e $g_c = u_1^{k_1} \cdots u_t^{k_t}$. Consideremos $d = (d_1, \ldots, d_m) > (a_1, \ldots, a_m)$ para toda $m$-upla $(a_1, \ldots, a_m)$ onde $a_i$ é expoente de $y_i$. Notemos que $r(f) = (d_1, \ldots, d_m)$. Escrevendo

$$\begin{aligned} f(y_1 + 1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) &= \alpha_d (y_1 + 1)^{d_1} \cdots y_m^{d_m} \sum_{h,l} z_1^{h_1} \cdots z_n^{h_n} g_l \\ &+ \sum \alpha_{a,b,c}(y_1 + 1)^{a_1} \cdots y_m^{a_m} z_1^{b_1} \cdots z_n^{b_n} g_c \end{aligned}$$

e usando o comentário feito antes da proposição, segue que,

$$f_1 = \alpha_d y_2^{d_2} \cdots y_m^{d_m} \sum_{h,l} z_1^{h_1} \cdots z_n^{h_n} g_l + \sum \alpha_{a,b,c} y_2^{a_2} \cdots y_m^{a_m} z_1^{b_1} \cdots z_n^{b_n} g_c \in J.$$

Aplicando esse processo nas variáveis $y_2, \ldots, y_m$, nessa ordem, vamos obter que

$$f_m = \sum_{h,l} \alpha_{h,l} z_1^{h_1} \cdots z_n^{h_m} g_l \in J \text{ com } \alpha_{h,l} \in F.$$

Logo $f_m \in B \cap J$. Continuando esse processo no polinômio

$$\sum_{a \neq d, b \neq h, c \neq l} \alpha_{a,b,c} y_1^{a_1} \cdots y_m^{a_m} z_1^{b_1} \cdots z_n^{b_n} g_c$$

segue que $B \cap J$ gera $J$. Para o caso em que $char(F) = 0$ podemos supor $f$ multilinear e o resultado segue. $\square$

### 4.1.1 $\hat{\lambda}$-identidades em $I(P,F)$

Nesta subseção, vamos considerar a álgebra de incidência $I(P,F)$ com a involução $\hat{\lambda}$ e determinaremos o geradores do $T(\hat{\lambda})$-ideal $Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F))$. Lembremos que em todo este capítulo estamos considerando $P$ finito, $|P| \geq 4$, conexo e com cadeias de comprimento no máximo 2. Pelo Teorema 2.25, o polinômio $[x_1,x_2][x_3,x_4]$ é uma identidade polinomial ordinária de $I(P,F)$, assim, podemos considerar o $T(\hat{\lambda})$-ideal $I_{\hat{\lambda}}$ gerado por $[x_1,x_2][x_3,x_4]$. Aqui a variável $x_i$, $i = 1,2,3,4$, pode ser tanto simétrica como antissimétrica com relação à $\hat{\lambda}$. Denotemos por $\Gamma_{m,n}(I_{\hat{\lambda}})$ o subespaço dos polinômios multilineares $Y$-próprios nas variáveis $y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n$ da álgebra relativamente livre $\dfrac{F\langle Y,Z\rangle}{I_{\hat{\lambda}}}$.

Usando a demonstração do Teorema 2.28, obtemos um conjunto de geradores dos espaços $\Gamma_{m,n}(I_{\hat{\lambda}})$ é dado pelos polinômios $Y$-próprios

$$z_{i_1}\cdots z_{i_l}[x_{j_1},\ldots,x_{j_s}] \tag{4.2}$$

onde $l,s \geq 0$, $z_{i_1} < \cdots < z_{i_l}$ e $x_{j_1} > x_{j_2} < \cdots < x_{j_s}$.

Para determinarmos os geradores de $Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F))$, utilizaremos matrizes genéricas. A seguir veremos algumas definições e resultados sobre matrizes genéricas.

Para um inteiro $n > 0$, consideremos a $F$-álgebra dos polinômios em infinitas variáveis comutativas,

$$\Omega_n = F[x^i_{jk}; 1 \leq j,k \leq n \text{ e } i \geq 1].$$

Na próxima definição consideraremos $e_{jk}$, com $1 \leq j,k \leq n$, uma matriz de ordem $n$ com 1 na entrada $(j,k)$ e 0 nas entradas restantes.

**Definição 4.3.** *As matrizes $n \times n$ com entradas em $\Omega_n$*

$$[x_i] = \sum_{j,k=1}^{n} x^i_{jk} e_{jk}$$

*são chamadas* matrizes genéricas $n \times n$.

Antes de continuarmos, vamos escrever uma base de $I(P,F)$ formada por elementos $\hat{\lambda}$-simétricos e elementos $\hat{\lambda}$-antissimétricos. Como estamos assumindo $P$ com cadeias de comprimento no máximo 2, temos que a involução $\lambda$ não pode ter pontos fixos em $P$, ou seja, $\lambda(p) \neq p$ para todo $p \in P$. Isso ocorre pois uma involução sobre um poset inverte a ordem, isto é, considerando $p$ um elemento minimal em $P$, segue que $\lambda(p)$ é um elemento maximal em $P$ e, considerando $p$ um elemento maximal em $P$, temos que $\lambda(p)$ é um elemento minimal em $P$, assim, $\lambda(p)$ não pode ser igual a $p$. Podemos escrever a álgebra de incidência $I(P,F)$, como um espaço vetorial, da seguinte forma, conforme o que foi feito na seção 2.5 do capítulo 2,

$$I(P,F) = I(P,F)^{(0)}_{\hat{\lambda}} \oplus I(P,F)^{(1)}_{\hat{\lambda}}$$

onde $I(P,F)^{(0)}_{\hat{\lambda}}$ é o subespaço vetorial dos elementos $\hat{\lambda}$-simétricos de $I(P,F)$ e $I(P,F)^{(1)}_{\hat{\lambda}}$ é o subespaço vetorial dos elementos $\hat{\lambda}$-antissimétricos de $I(P,F)$. Consideremos o conjunto

$$\mathcal{P} = \{(p,q) \in P \times P : p < q \text{ em } P\}. \tag{4.3}$$

Vamos definir sobre $\mathcal{P}$ a seguinte relação de equivalência:

$$(p,q) \sim (u,v) \Leftrightarrow p = u \text{ e } q = v \text{ ou } p = \lambda(v) \text{ e } q = \lambda(u). \tag{4.4}$$

Denotaremos por $\bar{\mathcal{P}}$ o conjunto quociente de $\mathcal{P}$ pela relação de equivalência $\sim$. Feitas estas observações, podemos agora escrever a base de $I(P,F)^{(0)}_{\hat{\lambda}}$ como sendo

$$B_0^{\hat{\lambda}} = \{e_{pp} + e_{\lambda(p)\lambda(p)}, e_{p\lambda(p)} : p \in P \text{ com } p \neq \lambda(p)\} \cup \{e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)} : (p,q) \in \bar{\mathcal{P}}\}$$

e a base de $I(P,F)^{(1)}_{\hat{\lambda}}$ como sendo

$$B_1^{\hat{\lambda}} = \{e_{pp} - e_{\lambda(p)\lambda(p)} : p \in P \text{ com } p \neq \lambda(p)\} \cup \{e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)} : (p,q) \in \bar{\mathcal{P}}\}.$$

Notemos que as uniões acima, nas definições das bases $B_0^{\hat{\lambda}}$ e $B_1^{\hat{\lambda}}$, são disjuntas. Considerando $\mathbb{B}^{\hat{\lambda}} = B_0^{\hat{\lambda}} \cup B_1^{\hat{\lambda}}$ segue que $\mathbb{B}^{\hat{\lambda}}$ é uma base de $I(P,F)$.

Observemos que, pela Proposição 1.38, temos que $I(P,F)$ é isomorfa a uma subálgebra contida em $UT_n(F)$ com $|P| = n$. Desse modo, o elemento $e_{pq} \in I(P,F)$ pode ser visto como uma matriz com 1 na entrada $(p,q)$ e 0 nas entradas restantes, para quaisquer $p,q \in P$, ou seja, a matriz $e_{pq} \in UT_n(F)$. Com estas observações, sejam $y_{lt}^k$ e $z_{lt}^k$ variáveis que comutam e consideremos as matrizes genéricas,

$$[y_k] = \sum_{p\in P} y_{pp}^k (e_{pp} + e_{\lambda(p)\lambda(p)}) + \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} y_{pq}^k (e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)}) + \sum_{p\in P} y_{p\lambda(p)}^k e_{p\lambda(p)}$$

e

$$[z_k] = \sum_{p\in P} z_{pp}^k (e_{pp} - e_{\lambda(p)\lambda(p)}) + \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} z_{pq}^k (e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)})$$

com $k = 1, 2, \ldots$.

Seja $D^{\hat{\lambda}}$ a $F$-subálgebra de $UT_{|P|}(F[y_{lt}^k, z_{lt}^k])$ gerada pelas matrizes acima. Podemos definir sobre $D^{\hat{\lambda}}$ a involução $\hat{\lambda}$, as matrizes $[y_k]$ são simétricas enquanto as matrizes $[z_k]$ são antissimétricas com respeito à $\hat{\lambda}$.

Temos o seguinte resultado:

**Teorema 4.4.** *A álgebra $D^{\hat{\lambda}}$ é isomorfa à álgebra relativamente livre na variedade das álgebras com involução gerada por $I(P,F)$, ou seja,*

$$D^{\hat{\lambda}} \cong \frac{F\langle Y, Z\rangle}{Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F))}.$$

*Demonstração.* Pela propriedade universal da álgebra livre $F\langle Y, Z\rangle$, a aplicação

$$\begin{array}{ccc} F\langle Y, Z\rangle & \longrightarrow & \dfrac{F\langle Y, Z\rangle}{Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F))} \\ y_i & \longmapsto & y_i + Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F)) \\ z_j & \longmapsto & z_j + Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F)) \end{array}$$

induz um único homomorfismo de álgebras $\varphi$, definido por

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & F\langle Y, Z\rangle & \longrightarrow & \dfrac{F\langle Y, Z\rangle}{Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F))} \\ & f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_{m'}) & \longmapsto & f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_{m'}) + Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F)). \end{array}$$

De maneira análoga, como $D^{\hat{\lambda}}$ é gerada pelas matrizes $[y_k]$ e $[z_k]$ com $k = 1, 2, \ldots$, novamente usando a propriedade universal da álgebra livre $F\langle Y, Z\rangle$, a aplicação que associa cada $y_i \in Y$ a um elemento $[y_i]$ e cada $z_j \in Z$ a um elemento $[z_j]$ induz um único homomorfismo sobrejetor de álgebras

$$\begin{array}{cccc} \psi : & F\langle Y, Z\rangle & \longrightarrow & D^{\hat{\lambda}} \\ & f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_{m'}) & \longmapsto & f([y_1], \ldots, [y_m], [z_1], \ldots, [z_{m'}]). \end{array}$$

A fim de provar o teorema é suficiente mostrarmos que $\ker(\varphi) = \ker(\psi)$, pois desse modo, pelo teorema do isomorfismo de álgebras (Teorema 1.4) teremos que

$$\frac{F\langle Y, Z\rangle}{Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F))} \cong \frac{F\langle Y, Z\rangle}{\ker(\varphi)} = \frac{F\langle Y, Z\rangle}{\ker(\psi)} \cong D^{\hat{\lambda}}.$$

Consideremos $f = f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_{m'}) \in \ker(\psi)$ e, com isso, $f([y_1], \ldots, [y_m], [z_1], \ldots, [z_{m'}]) = 0$. Dados quaisquer $a_1, \ldots, a_m \in I(P,F)^{(0)}$ e quaisquer

$b_1,\ldots,b_{m'} \in I(P,F)^{(1)}$, como $f([y_1],\ldots,[y_m],[z_1],\ldots,[z_{m'}]) = 0$, segue que $f(a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_{m'}) = 0$ e $f \in \ker(\varphi)$.

Por outro lado, seja $f(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_{m'})$ uma $\hat{\lambda}$-identidade para $I(P,F)$ e suponhamos que $f([y_1],\ldots,[y_m],[z_1],\ldots,[z_{m'}]) \neq 0$. As entradas $f_{ij}$ de $f([y_1],\ldots,[y_m],[z_1],\ldots,[z_{m'}])$ são polinômios nas variáveis comutativas $y_{pq}^k, z_{pq}^s$ onde $p \leq q$ em $P$. Como $F$ é um corpo infinito e algum $f_{ij} = f_{ij}(y_{pq}^k, z_{pq}^s)$ é um polinômio não nulo, com $k = 1,\ldots,m$ e $s = 1,\ldots,m'$, podemos encontrar elementos $c_{pq}^k, d_{pq}^s \in F$ tais que $f_{ij}(c_{pq}^k, d_{pq}^s) \neq 0$. Isso significa que, para os elementos de $I(P,F)$

$$a_k = \sum_{p\in P} c_{pp}^k(e_{pp} + e_{\lambda(p)\lambda(p)}) + \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} c_{pq}^k(e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)}) + \sum_{p\in P} c_{p\lambda(p)}^k e_{p\lambda(p)}$$

e

$$b_s = \sum_{p\in P} d_{pp}^s(e_{pp} - e_{\lambda(p)\lambda(p)}) + \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} d_{pq}^s(e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)})$$

com $k = 1,\ldots,m$ e $s = 1,\ldots,m'$, segue que $f(a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_{m'}) \neq 0$, o que é um absurdo. Portanto $\ker(\varphi) \subseteq \ker(\psi)$ e o teorema está demonstrado. □

Usando o teorema anterior, calculamos os seguintes colchetes nas matrizes genéricas,

$$[[z_{j_1}],[z_{j_2}]] = \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} ((z_{pp}^{j_1} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1})z_{pq}^{j_2} - z_{pq}^{j_1}(z_{pp}^{j_2} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_2}))(e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)}) \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}[[y_{i_1}],[z_{j_1}]] &= \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} ((y_{pp}^{i_1} - y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_1})z_{pq}^{j_1} - y_{pq}^{i_1}(z_{pp}^{j_1} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1}))(e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)}) \\ &- 2\sum_{p\in P} y_{p\lambda(p)}^{i_1} z_{pp}^{j_1} e_{p\lambda(p)},\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$[[y_{i_1}],[y_{i_2}]] = \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} ((y_{pp}^{i_1} - y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_1})y_{pq}^{i_2} - y_{pq}^{i_1}(y_{pp}^{i_2} - y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_2}))(e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)}). \tag{4.7}$$

A partir daqui, usando os cálculos dos colchetes acima, provaremos alguns lemas que serão fundamentais para determinarmos os geradores de $Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F))$.

**Lema 4.5.** *Os geradores de $\Gamma_{m,0}(I_{\hat{\lambda}})$, vistos como elementos de $\Gamma_{m,0}$, são linearmente independentes módulo as $\hat{\lambda}$-identidades.*

*Demonstração.* De (4.2) temos que os geradores de $\Gamma_{m,0}(I_{\hat{\lambda}})$ são os polinômios na forma $[y_{j_1}, y_{j_2},\ldots,y_{j_m}]$ onde $j_1 > j_2 < \cdots < j_m$. Como $D^{\hat{\lambda}} \cong \dfrac{F\langle Y,Z\rangle}{I_{\hat{\lambda}}}$, faremos os cálculos em $D^{\hat{\lambda}}$ e, a fim de simplificar a notação, consideraremos $y_i \in D^{\hat{\lambda}}$ sem usar os colchetes.

Suponhamos que $f$ seja uma combinação linear dos geradores de $\Gamma_{m,0}(I_{\hat{\lambda}})$, vistos como elementos de $\Gamma_{m,0}$, que se anula quando calculada nas matrizes genéricas. Fazendo $v = [y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_m}]$ e calculando $v$ na matrizes genéricas, temos,

$$v = (-1)^m \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} ((y_{pp}^{j_1} - y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1})y_{pq}^{j_2} - y_{pq}^{j_1}(y_{pp}^{j_2} - y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_2})) \prod_{t=3}^{m} (y_{pp}^{j_t} - y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t})(e_{pq} + (-1)^{m+1} e_{\lambda(q)\lambda(p)}).$$

Para $p < q$ em $P$ fixos, o coeficiente de $e_{pq}$ é o polinômio,

$$((y_{pp}^{j_1} - y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1})y_{pq}^{j_2} - y_{pq}^{j_1}(y_{pp}^{j_2} - y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_2})) \prod_{t=3}^{m} (y_{pp}^{j_t} - y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t}). \tag{4.8}$$

Do polinômio (4.8) podemos obter os índices $j_1$ e $j_2$, pois estão nas únicas variáveis na forma $y_{pq}^j$ que aparecem nele. Como $v$ é determinado completamente por $j_1$ e $j_2$, ou seja, a partir desses índices determinamos de maneira única a ordem das variáveis restantes em $v$, segue que temos uma correspondência biunívoca entre os geradores de $\Gamma_{m,0}(I_{\hat{\lambda}})$ e os polinômios de $F[y_{pp}^k, y_{\lambda(q)\lambda(q)}^k, y_{pq}^k, y_{\lambda(q)\lambda(p)}^k]$ que são entradas na posição $(p,q)$ desses comutadores em $D^{\hat{\lambda}}$.

Como o conjunto desses polinômios é um conjunto linearmente independente, segue que os geradores de $\Gamma_{m,0}(I_{\hat{\lambda}})$, vistos como elementos de $\Gamma_{m,0}$, são linearmente independentes módulo as $\hat{\lambda}$-identidades. □

Nos próximos lemas, onde mostraremos que os polinômios que geram $\Gamma_{0,n}(I_{\hat{\lambda}})$, $\Gamma_{1,n}(I_{\hat{\lambda}})$ e $\Gamma_{m,n}(I_{\hat{\lambda}})$ com $m > 1$, $n > 0$, vistos como elementos de $\Gamma_{0,n}$, $\Gamma_{1,n}$ e $\Gamma_{m,n}$, respectivamente, são linearmente independentes módulo as $\hat{\lambda}$-identidades de $I(P,F)$, faremos uso da mesma ideia usada no Lema 4.5, ou seja, associaremos de maneira única cada gerador de um $\Gamma_{m,n}(I_{\hat{\lambda}})$ citado acima a um polinômio, que é uma entrada de uma matriz em $D^{\hat{\lambda}}$, onde tais polinômios formam um conjunto linearmente independente.

**Lema 4.6.** *Os geradores de $\Gamma_{0,n}(I_{\hat{\lambda}})$, vistos como elementos de $\Gamma_{0,n}$, são linearmente independentes módulo as $\hat{\lambda}$-identidades.*

*Demonstração.* De (4.2) obtemos que o espaço vetorial $\Gamma_{0,n}(I)$ é gerado pelos poliômios

$$z_1 \cdots z_n, \; z_{i_1} \cdots z_{i_r}[z_{j_1}, z_{j_2}, \; \ldots, z_{j_s}] \text{ e } [z_{k_1}, z_{k_2}, \ldots, z_{k_n}],$$

onde $i_1 < \cdots < i_r$, $j_1 > j_2 < \cdots < j_s$ e $k_1 > k_2 < \cdots < k_n$.

Como no lema anterior, faremos os cálculos em $D^{\hat{\lambda}}$. Denotando por $v = [z_{k_1}, z_{k_2}, \ldots, z_{k_n}]$, $w = [z_{j_1}, z_{j_2}, \ \ldots, z_{j_s}]$ e aplicando os geradores de $\Gamma_{0,n}(I_{\hat{\lambda}})$ nas matrizes genéricas, temos

$$z_1 \cdots z_n = \sum_{p\in P} \prod_{l=1}^{n} z_{pp}^{l}(e_{pp} + (-1)^n e_{\lambda(p)\lambda(p)}) + \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} A_{pq}e_{pq} + \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} B_{pq}e_{\lambda(q)\lambda(p)}$$

onde $A_{pq}$ e $B_{pq}$ são polinômios não nulos,

$$v = (-1)^n \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} ((z_{pp}^{k_1} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_1})z_{pq}^{k_2} - z_{pq}^{k_1}(z_{pp}^{k_2} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_2})) \prod_{t=3}^{n}(z_{pp}^{k_t} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_t})(e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)})$$

e

$$\begin{aligned} z_{i_1}\cdots z_{i_r} w \ = \ & (-1)^s \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} \prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}((z_{pp}^{j_1} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1})z_{pq}^{j_2} - z_{pq}^{j_1}(z_{pp}^{j_2} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_2})) \\ & \prod_{t=3}^{s}(z_{pp}^{j_t} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t})e_{pq} - (-1)^s \sum_{p<q} \prod_{l=1}^{r} z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_l} \\ & ((z_{pp}^{j_1} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1})z_{pq}^{j_2} - z_{pq}^{j_1}(z_{pp}^{j_2} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_2})) \prod_{t=3}^{s}(z_{pp}^{j_t} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t})e_{\lambda(q)\lambda(p)}. \end{aligned}$$

Considerando $p < q$ fixos em $P$, como o coeficiente de $e_{pp}$ é não nulo somente em $z_1 \cdots z_n$, o único gerador dessa forma, podemos trabalhar com os geradores $z_{i_1} \cdots z_{i_r} w$ e $v$ separadamente de $z_1 \cdots z_n$. Os coeficientes de $e_{pq}$ em $z_{i_1} \cdots z_{i_r} w$ e $v$ são, respectivamente,

$$(-1)^s \prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}((z_{pp}^{j_1} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1})z_{pq}^{j_2} - z_{pq}^{j_1}(z_{pp}^{j_2} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_2})) \prod_{t=3}^{s}(z_{pp}^{j_t} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t}) \tag{4.9}$$

e

$$(-1)^n((z_{pp}^{k_1} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_1})z_{pq}^{k_2} - z_{pq}^{k_1}(z_{pp}^{k_2} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_2})) \prod_{t=3}^{n}(z_{pp}^{k_t} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_t}). \tag{4.10}$$

Os polinômios em (4.9) e (4.10) são produtos de polinômios irredutíveis e somente em (4.9) aparece o produtório $\prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}$. Desse modo, podemos diferenciar os polinômios (4.9) e (4.10) e identificar qual deles é coeficiente de $e_{pq}$ em $z_{i_1} \cdots z_{i_r} w$ e qual deles é coeficiente de $e_{pq}$ em $v$. Mais que isso, de (4.9) podemos determinar quais são os índices $i_1, \ldots, i_r$ a partir do produtório $\prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}$. Também, de (4.9) podemos determinar os índices $j_1$ e $j_2$, pois aparecem nas únicas variáveis na forma $z_{pq}^{j}$ em (4.9) e de (4.10) podemos determinar os índices $k_1$ e $k_2$, pois aparecem nas únicas variáveis na forma $z_{pq}^{k}$ em (4.10). Sendo assim, podemos determinar a ordem das variáveis restantes nos geradores $z_{i_1} \cdots z_{i_r} w$ e $v$ de maneira única e, desse modo, temos uma correspondência biunívoca entre os geradores $z_{i_1} \cdots z_{i_r} w$ e $v$ e os polinômios em $F[y_{pp}^{k}, y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k}, y_{pq}^{k}, y_{\lambda(q)\lambda(p)}^{k}]$ que são entradas na posição $(p,q)$ desses geradores aplicados nas matrizes em $D^{\hat{\lambda}}$. Como temos somente um gerador na forma $z_1\cdots z_n$ e o conjunto formado pelos polinômios em (4.9) e (4.10) é linearmente independente, segue que geradores de $\Gamma_{0,n}(I)$, vistos como elementos de $\Gamma_{0,n}$, são linearmente independentes módulo as $\hat{\lambda}$-identidades. □

**Lema 4.7.** *Os geradores de $\Gamma_{1,n}(I_{\hat{\lambda}})$, vistos como elementos de $\Gamma_{1,n}$, são linearmente independentes módulo as $\hat{\lambda}$-identidades.*

*Demonstração.* De (4.2), os geradores de $\Gamma_{1,n}(I_{\hat{\lambda}})$ são os polinômios na forma,

$$z_{i_1}\cdots z_{i_r}[y,z_{j_1},\ldots,z_{j_s}],\ \ z_{i_1}\cdots z_{i_r}[z_{k_1},z_{k_2},\ldots,z_{k_s},y],\ \ [y,z_1,\ldots,z_n],\ \ [z_{t_1},z_{t_2}\ldots,z_{t_n},y],$$

onde $i_1<\cdots<i_r$, $j_1<\cdots<j_s$, $k_1>k_2<\cdots<k_s$ e $t_1>t_2<\cdots<t_n$. Denotando por $v$ os comutadores que possuem $y$ na primeira posição e por $w$ os comutadores que possuem $y$ na última posição e, aplicando os geradores de $\Gamma_{1,n}(I_{\hat{\lambda}})$ na matrizes genéricas, temos, nos dois primeiros tipos de geradores,

$$\begin{aligned}
z_{i_1}\cdots z_{i_r}v &= (-1)^{s+1}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}\prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}((y_{pp}-y_{\lambda(q)\lambda(q)})z_{pq}^{j_1}-y_{pq}(z_{pp}^{j_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1}))\\
&\quad \prod_{t=2}^{s}(z_{pp}^{j_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t})e_{pq}+(-1)^{s+1}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}\prod_{l=1}^{r} z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_l}\\
&\quad ((y_{pp}-y_{\lambda(q)\lambda(q)})z_{pq}^{j_1}-y_{pq}(z_{pp}^{j_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1}))\prod_{t=2}^{s}(z_{pp}^{j_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t})e_{\lambda(q)\lambda(p)}\\
&+ \sum_{p\in P} C_p e_{p\lambda(p)}
\end{aligned}$$

onde $C_p$ é um polinômio não nulo e

$$\begin{aligned}
z_{i_1}\cdots z_{i_r}w &= (-1)^{s+1}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}\prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}((z_{pp}^{k_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_1})z_{pq}^{k_2}-z_{pq}^{k_1}(z_{pp}^{k_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_2}))\\
&\quad \prod_{t=3}^{s}(z_{pp}^{k_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_t})(y_{pp}-y_{\lambda(q)\lambda(q)})e_{pq}+(-1)^{n+1}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}\prod_{l=1}^{r} z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_l}\\
&\quad ((z_{pp}^{k_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_1})z_{pq}^{k_2}-z_{pq}^{k_1}(z_{pp}^{k_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_2}))\prod_{t=3}^{s}(z_{pp}^{k_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_t})\\
&\quad (y_{pp}-y_{\lambda(q)\lambda(q)})e_{\lambda(q)\lambda(p)}.
\end{aligned}$$

No terceiro e quarto tipos de geradores temos,

$$\begin{aligned}
v &= (-1)^{n+1}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}((y_{pp}-y_{\lambda(q)\lambda(q)})z_{pq}^{1}-y_{pq}(z_{pp}^{1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{1}))\prod_{t=2}^{n}(z_{pp}^{t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t})(e_{pq}+e_{\lambda(q)\lambda(p)})\\
&+ \sum_{p\in P} D_p e_{p\lambda(p)}
\end{aligned}$$

onde $D_p$ é um polinômio não nulo e

$$\begin{aligned} w &= (-1)^{n+1} \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} ((z_{pp}^{t_1} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t_1})z_{pq}^{t_2} - z_{pq}^{t_1}(z_{pp}^{t_2} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t_2})) \\ & \prod_{l=3}^{n}(z_{pp}^{t_l} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t_l})(y_{pp} - y_{\lambda(q)\lambda(p)})(e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)}). \end{aligned}$$

Fixados $p < q$ em $P$, os coeficientes de $e_{pq}$ nos geradores $z_{i_1}\cdots z_{i_r}v$, $z_{i_1}\cdots z_{i_r}w$, $v$, e $w$ são, respectivamente,

$$(-1)^{s+1}\prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}((y_{pp} - y_{\lambda(q)\lambda(q)})z_{pq}^{j_1} - y_{pq}(z_{pp}^{j_1} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1}))\prod_{t=3}^{s}(z_{pp}^{j_t} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t}); \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} &(-1)^{n+1}\prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}((z_{pp}^{k_1} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_1})z_{pq}^{k_2} - z_{pq}^{k_1}(z_{pp}^{k_2} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_2})) \\ &\prod_{t=3}^{s}(z_{pp}^{k_t} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_t})(y_{pp} - y_{\lambda(q)\lambda(q)}); \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$(-1)^{n+1}((y_{pp} - y_{\lambda(q)\lambda(q)})z_{pq}^{1} - y_{pq}(z_{pp}^{1} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{1}))\prod_{t=2}^{n}(z_{pp}^{t} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t}); \tag{4.13}$$

e

$$(-1)^{n+1}((z_{pp}^{t_1} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t_1})z_{pq}^{t_2} - z_{pq}^{t_1}(z_{pp}^{j_2} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t_2}))\prod_{l=3}^{n}(z_{pp}^{t_l} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t_l})(y_{pp} - y_{\lambda(q)\lambda(p)}). \tag{4.14}$$

Os polinômios em (4.11), (4.12), (4.13) e (4.14) são produtos de polinômios irredutíveis. Observemos que, nos polinômios (4.11) e (4.12) temos o produtório $\prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}$, enquanto que em (4.13) e (4.14) tal produtório não aparece. Assim, podemos diferenciar os polinômios (4.11) e (4.12) dos polinômios (4.13) e (4.14), ou seja, podemos identificar quais deles são coeficientes de $e_{pq}$ nos geradores $z_{i_1}\cdots z_{i_r}v$ e $z_{i_1}\cdots z_{i_r}w$ e quais são os coeficientes de $e_{pq}$ nos geradores $v$ e $w$. Considerando os geradores $z_{i_1}\cdots z_{i_r}v$ e $z_{i_1}\cdots z_{i_r}w$, podemos identificar qual dos polinômios (4.11) e (4.12) é coeficiente de $e_{pq}$ em $z_{i_1}\cdots z_{i_r}v$ e qual é coeficiente de $e_{pq}$ em $z_{i_1}\cdots z_{i_r}w$, observando que a variável $y_{pq}$ aparece somente em (4.11), ou seja, (4.11) é coeficiente de $e_{pq}$ no gerador $z_{i_1}\cdots z_{i_r}v$ e podemos recuperar, os índices $i_1,\ldots,i_r$ a partir do produtório $\prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}$. Também, podemos recuperar dos polinômios (4.11) e (4.12) o índice $j_1$ e o par de índices $k_1, k_2$, respectivamente, da única variável na forma $z_{pq}^{j_1}$ que aparece em (4.11) e da únicas variáveis $z_{pq}^{j_1}$ e $z_{pq}^{j_2}$ que aparecem em (4.12). Assim determinamos a ordem das variáveis restantes nos geradores $z_{i_1}\cdots z_{i_r}v$ e

$z_{i_1}\cdots z_{i_r}w$. Logo, os geradores $z_{i_1}\cdots z_{i_r}v$ e $z_{i_1}\cdots z_{i_r}w$ estão em correspondência biunívoca com os polinômios das formas (4.11) e (4.12), respectivamente.

Considerando agora os geradores $v$ e $w$, observando que a variável $y_{pq}$ aparece somente em (4.13) e que existe somente um gerador desta forma, sabemos que (4.13) é coeficiente de $e_{pq}$ em $v$ e que (4.14) é coeficiente de $e_{pq}$ em $w$. De (4.14) recuperamos de modo único o par de índices $t_1, t_2$, das únicas variáveis $z_{pq}^{t_1}$ e $z_{pq}^{t_2}$ que aparecem em (4.14). Como, a partir destes índices, podemos determinar a ordem das outras variáveis em $w$, segue que os geradores $v$ e $w$ estão em correspondência biunívoca com os polinômios das formas (4.13) e (4.14), respectivamente. Como o conjunto dos polinômios dados em (4.11), (4.12), (4.13) e (4.14) é um conjunto linearmente independente, temos que os geradores de $\Gamma_{1,n}(I_{\hat{\lambda}})$, vistos como elementos de $\Gamma_{1,n}$, são linearmente independentes módulo as $\hat{\lambda}$-identidades. $\square$

**Lema 4.8.** *Os geradores de $\Gamma_{m,n}(I_{\hat{\lambda}})$, vistos como elementos de $\Gamma_{m,n}$, com $m>1$ e $n>0$, são linearmente independentes módulo as $\hat{\lambda}$-identidades.*

*Demonstração.* De (4.2) obtemos os polinômios que são os geradores do espaço vetorial $\Gamma_{m,n}(I_{\hat{\lambda}})$,

$$z_{i_1}\cdots z_{i_r}[y_{k_1}, z_{j_1}, \ldots, z_{j_s}, y_{k_2}, \ldots, y_{k_m}],\ \ z_{i_1}\cdots z_{i_r}[z_{l_1}, z_{l_2}, \ldots, z_{l_s}, y_1, \ldots, y_m],$$

$$z_1\cdots z_n[y_{a_1}, y_{a_2}, \ldots, y_{a_m}],\ \ [y_{b_1}, z_1, \ldots, z_n, y_{b_2}, \ldots, y_{b_m}],\ \ [z_{d_1}, z_{d_2}, \ldots, z_{d_n}, y_1, \ldots, y_m],$$

onde $i_1<\cdots<i_r$, $y_{k_1}>z_{j_1}<\cdots<z_{j_s}<y_{k_2}<\cdots<y_{k_m}$, $z_{l_1}>z_{l_2}<\cdots<z_{l_s}$, $a_1>a_2<\cdots<a_m$, $y_{b_1}>z_1<\cdots<z_n<y_{b_2}<\cdots<y_{b_m}$ e $z_{d_1}>z_{d_2}<\cdots<z_{d_s}$.

Vamos denotar por $v$ o colchete que possui $y$ na primeira posição e $z$ na segunda, $w$ o colchete que possui $z$ na primeira posição e por $u$ o colchete que possui $y$ em todas as suas posições. Aplicando os geradores de $\Gamma_{m,n}(I_{\hat{\lambda}})$ nas matrizes genéricas, temos, nos três primeiros tipos de geradores,

$$\begin{aligned} z_{i_1}\cdots z_{i_r}v \;=\;& (-1)^{s+m}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}\prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}((y_{pp}^{k_1}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_1})z_{pq}^{j_1}-y_{pq}^{k_1}(z_{pp}^{j_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1}))\\ & \prod_{t=2}^{s}(z_{pp}^{j_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t})\prod_{t=2}^{m}(y_{pp}^{k_t}-z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_t})e_{pq}+(-1)^{s+m}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}\prod_{l=1}^{r} z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_l}\\ & ((y_{pp}^{k_1}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_1})z_{pq}^{j_1}-y_{pq}^{k_1}(z_{pp}^{j_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1}))\prod_{t=2}^{s}(z_{pp}^{j_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t})\\ & \prod_{t=2}^{m}(y_{pp}^{k_t}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_t})e_{\lambda(q)\lambda(p)}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_{i_1}\cdots z_{i_r}w &= (-1)^{s+m}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}\prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}((z_{pp}^{j_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1})z_{pq}^{j_2}-z_{pq}^{j_1}(z_{pp}^{j_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_2}))\\
&\prod_{t=3}^{s}(z_{pp}^{j_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t})\prod_{t=1}^{m}(y_{pp}^{t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t})e_{pq}+(-1)^{s+m}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}\prod_{l=1}^{r} z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_l}\\
&((z_{pp}^{j_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1})z_{pq}^{j_2}-z_{pq}^{j_1}(z_{pp}^{j_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_2}))\\
&\prod_{t=3}^{s}(z_{pp}^{j_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t})\prod_{t=1}^{m}(y_{pp}^{t}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t})e_{\lambda(q)\lambda(p)}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
z_1\cdots z_n u &= (-1)^{m}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}\prod_{l=1}^{n} z_{pp}^{l}((y_{pp}^{a_1}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{a_1})y_{pq}^{a_2}-y_{pq}^{a_1}(y_{pp}^{a_2}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{a_2}))\\
&\prod_{t=3}^{m}(y_{pp}^{a_t}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{a_t})e_{pq}-\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}\prod_{l=1}^{r} z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{l}\\
&((y_{pp}^{a_1}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{a_1})y_{pq}^{a_2}-y_{pq}^{a_1}(y_{pp}^{a_2}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{a_2}))\\
&\prod_{t=3}^{m}(y_{pp}^{a_t}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{a_t})e_{\lambda(q)\lambda(p)}.
\end{aligned}
$$

Nos dois últimos tipos de geradores, temos,

$$
\begin{aligned}
v &= (-1)^{n+m}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}((y_{pp}^{b_1}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{b_1})z_{pq}^{1}-y_{pq}^{b_1}(z_{pp}^{1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{1}))\\
&\prod_{t=2}^{s}(z_{pp}^{t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t})\prod_{t=2}^{m}(y_{pp}^{b_t}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{b_t})(e_{pq}+(-1)^{m+n+1}e_{\lambda(q)\lambda(p)})
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
w &= (-1)^{n+m}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}((z_{pp}^{d_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{d_1})z_{pq}^{d_2}-z_{pq}^{d_1}(z_{pp}^{d_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_2}))\\
&\prod_{t=3}^{s}(z_{pp}^{d_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{d_t})\prod_{t=1}^{m}(y_{pp}^{t}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t})(e_{pq}+(-1)^{m+n+1}e_{\lambda(q)\lambda(p)}).
\end{aligned}
$$

Considerando $p<q$ fixos em $P$, os coeficientes de $e_{pq}$ nos geradores $z_{i_1}\cdots z_{i_r}v$, $z_{i_1}\cdots z_{i_r}w$, $z_1\cdots z_n u$, $v$ e $w$ são, respectivamente,

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{s+m}\prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}((y_{pp}^{k_1}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_1})z_{pq}^{j_1}-y_{pq}^{k_1}(z_{pp}^{j_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1}))\prod_{t=2}^{s}(z_{pp}^{j_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t}) \quad (4.15)\\
&\prod_{t=2}^{m}(y_{pp}^{k_t}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_t});
\end{aligned}
$$

$$(-1)^{s+m}\prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}((z_{pp}^{j_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1})z_{pq}^{j_2}-z_{pq}^{j_1}(z_{pp}^{j_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_2}))\prod_{t=3}^{s}(z_{pp}^{j_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t}) \quad (4.16)$$
$$\prod_{l=1}^{m}(y_{pp}^{l}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{l});$$

$$(-1)^{m}\prod_{l=1}^{n} z_{pp}^{l}((y_{pp}^{a_1}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{a_1})y_{pq}^{a_2}-y_{pq}^{k_1}(y_{pp}^{a_2}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{a_2}))\prod_{t=3}^{m}(y_{pp}^{a_t}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{a_t}); \quad (4.17)$$

$$(-1)^{n+m}((y_{pp}^{b_1}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{b_1})z_{pq}^{1}-y_{pq}^{b_1}(z_{pp}^{1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{1}))\prod_{t=2}^{s}(z_{pp}^{t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t}) \quad (4.18)$$
$$\prod_{t=2}^{m}(y_{pp}^{b_t}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{b_t});$$

e

$$(-1)^{r+m}((z_{pp}^{d_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{d_1})z_{pq}^{d_2}-z_{pq}^{d_1}(z_{pp}^{d_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{d_2}))\prod_{t=3}^{s}(z_{pp}^{d_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{d_t}) \quad (4.19)$$
$$\prod_{t=1}^{m}(y_{pp}^{t}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t}).$$

Os polinômios em (4.15), (4.16), (4.17), (4.18) e (4.19) são produtos de polinômios irredutíveis. Observemos que, nos polinômios (4.15), (4.16) e (4.17) temos o produtório $\prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}$, enquanto que em (4.18) e (4.19) tal produtório não aparece. Desse modo, podemos diferenciar os polinômios (4.15), (4.16) e (4.17) dos polinômios (4.18) e (4.19), isto é, podemos identificar quais deles são coeficientes de $e_{pq}$ nos geradores $z_{i_1}\cdots z_{i_r}v$, $z_{i_1}\cdots z_{i_r}w$ e $z_{i_1}\cdots z_{i_r}u$ e quais são os coeficientes de $e_{pq}$ nos geradores $v$ e $w$. Considerando os geradores $z_{i_1}\cdots z_{i_r}v$, $z_{i_1}\cdots z_{i_r}w$ e $z_{i_1}\cdots z_{i_r}u$, podemos identificar o polinômio (4.15) como sendo coeficiente de $e_{pq}$ em $z_{i_1}\cdots z_{i_r}v$, observando que neste polinômio aparecem as únicas variáveis na forma $z_{pq}^{j_1}$ e $y_{pq}^{k_1}$, podemos identificar o polinômio (4.16) como sendo o coeficiente de $e_{pq}$ em $z_{i_1}\cdots z_{i_r}w$ observando que neste polinômio aparecem as únicas variáveis na forma $z_{pq}^{j_1}$ e $z_{pq}^{j_2}$ e podemos indentificar o polinômio (4.17) como sendo o coeficiente de $e_{pq}$ em $z_{i_1}\cdots z_{i_r}u$ pois nele aparecem as únicas variáveis na forma $y_{pq}^{a_1}$ e $y_{pq}^{a_2}$. De cada um desses geradores podemos recuperar os índices $i_1,\ldots,i_r$ a partir do produtório $\prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}$. Também, podemos recuperar dos polinômios (4.15), (4.16) e (4.17) os índices $k_1$, $j_1$ das únicas variáveis na forma $z_{pq}^{j_1}$ e $y_{pq}^{k_1}$ que aparecem em (4.15), os índices $j_1$, $j_2$ das únicas variáveis na forma $z_{pq}^{j_1}$ e $z_{pq}^{j_2}$ que aparecem em (4.16) e os índices $a_1,a_2$ que aparecem nas únicas variáveis na forma $y_{pq}^{a_1}$ e $y_{pq}^{a_2}$ que aparecem em (4.17). Logo, podemos determinar de maneira única a ordem das variáveis restantes nos os geradores $z_{i_1}\cdots z_{i_r}v$, $z_{i_1}\cdots z_{i_r}w$ e $z_{i_1}\cdots z_{i_r}u$ e, assim, tais geradores estão em correspondência biunívoca com os polinômios em (4.15), (4.16) e (4.17), respectivamente.

Considerando agora os geradores $v$ e $w$, observando que a variável $y_{pq}^{b_1}$ aparece somente em (4.18), sabemos que (4.18) é coeficiente de $e_{pq}$ em $v$ e que (4.19) é coeficiente de $e_{pq}$ em $w$. De (4.18) e (4.19) recuperamos de modo único o índice $b_1$ e o par de índices $d_1, d_2$, respectivamente. Como, a partir destes índices, podemos determinar a ordem das outras variáveis em $v$ e $w$, segue que os geradores $v$ e $w$ estão em correspondência biunívoca com os polinômios em (4.18) e (4.19), respectivamente. Como o conjunto dos polinômios dados em (4.15), (4.16), (4.17), (4.18) e (4.19) é um conjunto linearmente independente, temos que os geradores de $\Gamma_{m,n}(I_{\hat{\lambda}})$, visto como elementos de $\Gamma_{m,n}$, com $m > 1$ e $n > 0$, são linearmente independentes módulo as $\hat{\lambda}$-identidades. $\square$

Usando os lemas anteriores, determinamos os geradores do $T(\hat{\lambda})$-ideal $Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F))$.

**Teorema 4.9.** *Sejam $P$ um poset finito, com cadeias de comprimento no máximo 2, conexo, com uma involução $\lambda$ e $F$ um corpo infinito de característica zero. Consideremos a álgebra de incidência $I(P,F)$ com a involução $\hat{\lambda}$. O $T(\hat{\lambda})$-ideal $Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F))$ é gerado pela identidade ordinária $[x_1,x_2][x_3,x_4]$.*

*Demonstração.* Dos lemas 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8 segue que os geradores de $\Gamma_{m,n}(I_{\hat{\lambda}})$, vistos como elementos de $\Gamma_{m,n}$ são linearmente indepedentes módulo as $\hat{\lambda}$-identidades de $I(P,F)$. Como consequência disso, segue que $\Gamma_{m,n} \cap I_{\hat{\lambda}} = \Gamma_{m,n} \cap Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F))$ para todo par de inteiros não negativos $m, n$ e, portanto, $I_{\hat{\lambda}} = Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F))$. $\square$

### 4.1.2 $\sigma_\lambda$-identidades de $I(P,F)$

Nesta segunda subseção de 4.1 vamos considerar a álgebra de incidência $I(P,F)$ com a involução $\sigma_\lambda$ e determinaremos os geradores do $T(\sigma_\lambda)$-ideal $Id^{\sigma_\lambda}(I(P,F))$. Observemos que, considerando $P$ sob as condições descritas no início do capítulo, sempre podemos definir em $I(P,F)$ a involução $\sigma_\lambda$, pois como observado no início da subseção 4.1.1, o poset $P$ não pode ter pontos fixos. Desse modo, conforme a Proposição 1.65, temos $P_1$ o subconjunto dos elementos minimais de $P$, $P_2$ o subconjunto dos elementos maximais de

$P$ e $P_3 = \emptyset$. Temos então, para $p, q \in P$ e $f \in I(P,F)$,

$$\sigma_\lambda(f)(p,q) = \begin{cases} -f(\lambda(q), \lambda(p)) & \text{se } p < q \\ f(\lambda(q), \lambda(p)) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pelo Teorema 2.25, o polinômio $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ é uma identidade polinomial ordinária de $I(P,F)$, assim, podemos considerar o $T(\sigma_\lambda)$-ideal $I_{\sigma_\lambda}$ gerado por $[x_1, x_2][x_3, x_4]$. Denotemos por $\Gamma_{m,n}(I_{\sigma_\lambda})$ o subespaço dos polinômios multilineares $Y$-próprios nas variáveis $y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n$ da álgebra relativamente livre $\dfrac{F\langle Y, Z\rangle}{I_{\sigma_\lambda}}$.

De maneira análoga ao que foi feito na subseção anterior, temos que os polinômios em (4.2) também geram os espaços vetoriais $\Gamma_{m,n}(I_{\sigma_\lambda})$.

Para determinarmos os geradores de $Id^{\sigma_\lambda}(I(P,F))$ também usaremos as matrizes genéricas e escreveremos uma base de $I(P,F)$ formada por elementos $\sigma_\lambda$-simétricos e elementos $\sigma_\lambda$-antissimétricos. Do mesmo modo que fizemos anteriormente, podemos escrever a álgebra de incidência $I(P,F)$, como um espaço vetorial, da seguinte forma,

$$I(P,F) = I(P,F)^{(0)}_{\sigma_\lambda} \oplus I(P,F)^{(1)}_{\sigma_\lambda}$$

onde $I(P,F)^{(0)}_{\sigma_\lambda}$ é o subespaço vetorial dos elementos $\sigma_\lambda$-simétricos de $I(P,F)$ e $I(P,F)^{(1)}_{\sigma_\lambda}$ é o subespaço vetorial dos elementos $\sigma_\lambda$-antissimétricos de $I(P,F)$. Considerando o mesmo $\mathcal{P}$ em (4.3) com a mesma relação de equivalência dada em (4.4), consideraremos novamente $\bar{\mathcal{P}}$ como sendo o conjunto quociente de $\mathcal{P}$ pela relação de equivalência $\sim$. Podemos escrever a base de $I(P,F)^{(0)}_{\sigma_\lambda}$ como sendo

$$B_0^{\sigma_\lambda} = \{e_{pp} + e_{\lambda(p)\lambda(p)} : p \in P \text{ com } p \neq \lambda(p)\} \cup \{e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)} : (p,q) \in \bar{\mathcal{P}}\}$$

e a base de $I(P,F)^{(1)}_{\sigma_\lambda}$ como sendo

$$B_1^{\sigma_\lambda} = \{e_{pp} - e_{\lambda(p)\lambda(p)}, e_{p\lambda(p)} : p \in P \text{ com } p \neq \lambda(p)\} \cup \{e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)} : (p,q) \in \bar{\mathcal{P}}\}.$$

Observemos que as uniões nas definições de $B_0^{\sigma_\lambda}$ e $B_1^{\sigma_\lambda}$ são disjuntas. Fazendo $\mathbb{B}^{\sigma_\lambda} = B_0^{\sigma_\lambda} \cup B_1^{\sigma_\lambda}$, temos que $\mathbb{B}^{\sigma_\lambda}$ é uma base de $I(P,F)$.

Sejam $y_{lt}^k$ e $z_{lt}^k$ variáveis que comutam e consideremos as matrizes genéricas,

$$[y_k] = \sum_{p \in P} y_{pp}^k (e_{pp} + e_{\lambda(p)\lambda(p)}) + \sum_{(p,q) \in \bar{\mathcal{P}}} y_{pq}^k (e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)})$$

e

$$[z_k] = \sum_{p\in P} z^k_{pp}(e_{pp} - e_{\lambda(p)\lambda(p)}) + \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} z^k_{pq}(e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)}) + \sum_{p\in P} z^k_{p\lambda(p)} e_{p\lambda(p)}$$

com $k = 1, 2, \ldots$.

Seja $D^{\sigma_\lambda}$ a $F$-subálgebra de $UT_{|P|}(F[y^k_{lt}, z^k_{lt}])$ gerada pelas matrizes acima. Podemos definir sobre $D^{\sigma_\lambda}$ a involução $\sigma_\lambda$, as matrizes $[y_k]$ são simétricas enquanto as matrizes $[z_k]$ são antissimétricas com respeito à $\sigma_\lambda$.

O seguinte teorema pode ser demonstrado de maneira análoga ao Teorema 4.4.

**Teorema 4.10.** *A álgebra $D^{\sigma_\lambda}$ é isomorfa à álgebra relativamente livre na variedade das álgebras com involução gerada por $I(P,F)$, ou seja,*

$$D^{\sigma_\lambda} \cong \frac{F\langle Y, Z\rangle}{Id^{\sigma_\lambda}(I(P,F))}.$$

Usando o teorema acima, vamos calcular os seguintes colchetes nas matrizes genéricas,

$$\begin{aligned}[][z_{j_1}],[z_{j_2}]] &= \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} ((z^{j_1}_{pp} + z^{j_1}_{\lambda(q)\lambda(q)})z^{j_2}_{pq} - z^{j_1}_{pq}(z^{j_2}_{pp} + z^{j_2}_{\lambda(q)\lambda(q)}))(e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)})\\ &+ 2\sum_{p\in P}(z^{j_1}_{pp} z^{j_2}_{p\lambda(p)} - z^{j_1}_{p\lambda(p)} z^{j_2}_{pp}) e_{p\lambda(p)},\end{aligned}$$

$$[[y_{i_1}],[z_{j_1}]] = \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} ((y^{i_1}_{pp} - y^{i_1}_{\lambda(q)\lambda(q)})z^{j_1}_{pq} - y^{i_1}_{pq}(z^{j_1}_{pp} + z^{j_1}_{\lambda(q)\lambda(q)}))(e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)}),$$

$$[[y_{i_1}],[y_{i_2}]] = \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} ((y^{i_1}_{pp} - y^{i_1}_{\lambda(q)\lambda(q)})y^{i_2}_{pq} - y^{i_1}_{pq}(y^{i_2}_{pp} - y^{i_2}_{\lambda(q)\lambda(q)}))(e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)}).$$

Agora, provaremos alguns lemas que serão usados para se obter os geradores de $Id^{\sigma_\lambda}(I(P,F))$. Tais lemas são demonstrados de maneira análoga aos lemas (4.5), (4.6), (4.7) e (4.8), assim em cada lema que vamos enunciar a seguir, em suas respectivas demonstrações, colocaremos somente os cálculos, pois as argumentações serão as mesmas feitas nos lemas citados acima.

**Lema 4.11.** *Os geradores de $\Gamma_{m,0}(I_{\sigma_\lambda})$, vistos como elementos de $\Gamma_{m,0}$, são linearmente independentes módulo as $\sigma_\lambda$-identidades.*

*Demonstração.* De (4.2) temos que os geradores de $\Gamma_{m,0}(I_{\sigma_\lambda})$ são os polinômios na forma $[y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_m}]$ onde $j_1 > j_2 < \cdots < j_m$. Semelhantemente ao Lema 4.5, aqui usaremos o isomorfismo $D^{\sigma_\lambda} \cong \dfrac{F\langle Y, Z\rangle}{I_{\sigma_\lambda}}$ e faremos os cálculos assumindo $y_i \in D^{\sigma_\lambda}$. Fazendo $v = [y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_m}]$ e calculando $v$ na matrizes genéricas, temos,

$$v = (-1)^m \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} ((y_{pp}^{j_1} - y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1}) y_{pq}^{j_2} - y_{pq}^{j_1}(y_{pp}^{j_2} - y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_2})) \prod_{t=3}^{m} (y_{pp}^{j_t} - y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t})(e_{pq} + (-1)^m e_{\lambda(q)\lambda(p)})$$

Para $p < q$ em $P$ fixos, o coeficiente de $e_{pq}$ e $v$ é o polinômio

$$(-1)^m((y_{pp}^{j_1} - y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1}) y_{pq}^{j_2} - y_{pq}^{j_1}(y_{pp}^{j_2} - y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_2})) \prod_{t=3}^{m} (y_{pp}^{j_t} - y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t}). \tag{4.20}$$

Observemos que o polinômio em (4.20) é o igual ao polinômio (4.8). Logo, repetindo a argumentação feita no Lema 4.5, segue que os geradores de $\Gamma_{m,0}(I_{\sigma_\lambda})$, vistos como elementos de $\Gamma_{m,0}$, são linearmente independentes módulo as $\sigma_\lambda$-identidades. □

**Lema 4.12.** *Os geradores de $\Gamma_{0,n}(I_{\sigma_\lambda})$, vistos como elementos de $\Gamma_{0,n}$, são linearmente independentes módulo as $\sigma_\lambda$-identidades.*

*Demonstração.* De (4.2) obtemos que o espaço vetorial $\Gamma_{0,n}(I_{\sigma_\lambda})$ é gerado pelos polinômios

$$z_1 \cdots z_n,\ \ z_{i_1} \cdots z_{i_r}[z_{j_1}, z_{j_2},\ \ \ldots, z_{j_s}] \text{ e } [z_{k_1}, z_{k_2}, \ldots, z_{k_n}]$$

onde $i_1 < \cdots < i_r$, $j_1 > j_2 < \cdots < j_s$ e $k_1 > k_2 < \cdots < k_n$.

Como no lema anterior, faremos os cálculos em $D^{\sigma_\lambda}$. Denotando por $v = [z_{k_1}, z_{k_2}, \ldots, z_{k_n}]$, $w = [z_{j_1}, z_{j_2},\ \ldots, z_{j_s}]$ e aplicando os geradores de $\Gamma_{0,n}(I_{\sigma_\lambda})$ nas matrizes genéricas, temos

$$z_1 \cdots z_n = \sum_{p\in P} \prod_{l=1}^{n} z_{pp}^{l}(e_{pp} + (-1)^n e_{\lambda(p)\lambda(p)}) + \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} A_{pq} e_{pq} + \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} B_{pq} e_{\lambda(q)\lambda(p)} + \sum_{p\in P} C_p e_{p\lambda(p)}$$

onde $A_{pq}$, $B_{pq}$ e $C_p$ são polinômios não nulos,

$$\begin{aligned} v &= (-1)^n \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} ((z_{pp}^{k_1} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_1}) z_{pq}^{k_2} - z_{pq}^{k_1}(z_{pp}^{k_2} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_2})) \prod_{t=3}^{n} (z_{pp}^{k_t} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_t})(e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)}) \\ &+ (-2)^n \sum_{p\in P} (z_{pp}^{k_1} z_{p\lambda(p)}^{k_2} - z_{p\lambda(p)}^{k_1} z_{pp}^{k_2}) \prod_{t=3}^{n} z_{pp}^{k_t} e_{p\lambda(p)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z_{i_1}\cdots z_{i_r}w &= (-1)^s \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}\prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}((z_{pp}^{j_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1})z_{pq}^{j_2}-z_{pq}^{j_1}(z_{pp}^{j_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_2}))\\ &\prod_{t=3}^{s}(z_{pp}^{j_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t})e_{pq}+(-1)^s\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}\prod_{l=1}^{r} z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_l}\\ &((z_{pp}^{j_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1})z_{pq}^{j_2}-z_{pq}^{j_1}(z_{pp}^{j_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_2}))\prod_{t=3}^{s}(z_{pp}^{j_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t})e_{\lambda(q)\lambda(p)}\\ &+ (-2)^n\sum_{p\in P}\prod_{t=1}^{r} z_{pp}^{i_t}(z_{pp}^{j_1}z_{p\lambda(p)}^{j_2}-z_{p\lambda(p)}^{j_1}z_{pp}^{j_2})\prod_{t=3}^{s} z_{pp}^{j_t}e_{p\lambda(p)}. \end{aligned}$$

Considerando $p<q$ fixos em $P$, como o coeficiente de $e_{pp}$ é não nulo somente em $z_1\cdots z_n$, o único gerador dessa forma, podemos trabalhar com os geradores $z_{i_1}\cdots z_{i_r}w$ e $v$ separadamente de $z_1\cdots z_n$. Os coeficientes de $e_{pq}$ em $z_{i_1}\cdots z_{i_r}w$ e $v$ são, respectivamente,

$$(-1)^n((z_{pp}^{k_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_1})z_{pq}^{k_2}-z_{pq}^{k_1}(z_{pp}^{k_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_2}))\prod_{t=3}^{n}(z_{pp}^{k_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_t}) \tag{4.21}$$

e

$$(-1)^s\sum_{p<q}\prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}((z_{pp}^{j_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1})z_{pq}^{j_2}-z_{pq}^{j_1}(z_{pp}^{j_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_2}))\prod_{t=3}^{s}(z_{pp}^{j_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t}). \tag{4.22}$$

Observemos que o polinômio (4.21) é igual ao polinômio (4.9) e que o polinômio (4.22) é igual ao polinômio (4.10). Assim, usando a mesma argumentação feita no Lema 4.6 segue que os geradores de $\Gamma_{0,n}(I_{\sigma_\lambda})$, vistos como elementos de $\Gamma_{0,n}$, são linearmente independentes módulo as $\sigma_\lambda$-identidades. $\square$

**Lema 4.13.** *Os geradores de $\Gamma_{1,n}(I_{\sigma_\lambda})$, vistos como elementos de $\Gamma_{1,n}$, são linearmente independentes módulo as $\sigma_\lambda$-identidades.*

*Demonstração.* De (4.2), os geradores de $\Gamma_{1,n}(I_{\sigma_\lambda})$ são os polinômios na forma,

$$z_{i_1}\cdots z_{i_r}[y,z_{j_1},\ldots,z_{j_s}],\ z_{i_1}\cdots z_{i_r}[z_{k_1},z_{k_2},\ldots,z_{k_s},y],\ [y,z_1,\ldots,z_n],\ [z_{t_1},z_{t_2}\ldots,z_{t_n},y],$$

onde $i_1<\cdots<i_r$, $j_1<\cdots<j_s$, $k_1>k_2<\cdots<k_s$ e $t_1>t_2<\cdots<t_s$. Denotando por $v$ os comutadores que possuem $y$ na primeira posição e por $w$ os comutadores que possuem $y$ na última posição e, aplicando os geradores de $\Gamma_{1,n}(I_{\sigma_\lambda})$ na matrizes genéricas,

temos, nos dois primeiros tipos de geradores,

$$\begin{aligned}
z_{i_1}\cdots z_{i_r}v &= (-1)^{s+1}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}\prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}((y_{pp}-y_{\lambda(q)\lambda(q)})z_{pq}^{j_1}-y_{pq}(z_{pp}^{j_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1}))\\
&\quad \prod_{t=2}^{s}(z_{pp}^{j_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t})e_{pq}-(-1)^{s+1}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}\prod_{l=1}^{r} z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_l}\\
&\quad ((y_{pp}-y_{\lambda(q)\lambda(q)})z_{pq}^{j_1}-y_{pq}(z_{pp}^{j_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1}))\prod_{t=2}^{s}(z_{pp}^{j_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t})e_{\lambda(q)\lambda(p)}\\
&+ \sum_{p\in P} C_p e_{p\lambda(p)}
\end{aligned}$$

onde $C_p$ é um polinômio não nulo e

$$\begin{aligned}
z_{i_1}\cdots z_{i_r}w &= (-1)^{s+1}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}\prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}((z_{pp}^{k_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_1})z_{pq}^{k_2}-z_{pq}^{k_1}(z_{pp}^{k_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_2}))\\
&\quad \prod_{t=3}^{s}(z_{pp}^{k_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_t})(y_{pp}-y_{\lambda(q)\lambda(q)})e_{pq}-(-1)^{s+1}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}\prod_{l=1}^{r} z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_l}\\
&\quad ((z_{pp}^{k_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_1})z_{pq}^{j_2}-z_{pq}^{k_1}(z_{pp}^{k_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_2}))\prod_{t=3}^{s}(z_{pp}^{k_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_t})\\
&\quad (y_{pp}-y_{\lambda(q)\lambda(q)})e_{\lambda(q)\lambda(p)}.
\end{aligned}$$

No terceiro e quarto tipos de geradores temos,

$$\begin{aligned}
v &= (-1)^{n+1}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}((y_{pp}-y_{\lambda(q)\lambda(q)})z_{pq}^{1}-y_{pq}(z_{pp}^{1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{1}))\\
&\quad \prod_{t=2}^{n}(z_{pp}^{t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t})(e_{pq}-e_{\lambda(q)\lambda(p)})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
w &= (-1)^{n+1}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}((z_{pp}^{t_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t_1})z_{pq}^{t_2}-z_{pq}^{t_1}(z_{pp}^{t_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t_2}))\\
&\quad \prod_{l=3}^{n}(z_{pp}^{t_l}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t_l})(y_{pp}-y_{\lambda(q)\lambda(p)})(e_{pq}-e_{\lambda(q)\lambda(p)}).
\end{aligned}$$

Fixados $p<q$ em $P$, os coeficientes de $e_{pq}$ nos geradores $z_{i_1}\cdots z_{i_r}v$, $z_{i_1}\cdots z_{i_r}w$, $v$, e $w$ são, respectivamente,

$$(-1)^{s+1}\prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}((y_{pp}-y_{\lambda(q)\lambda(q)})z_{pq}^{j_1}-y_{pq}(z_{pp}^{j_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1}))\prod_{t=2}^{s}(z_{pp}^{j_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t}); \tag{4.23}$$

$$(-1)^{s+1}\prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}((z_{pp}^{k_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_1})z_{pq}^{k_2}-z_{pq}^{k_1}(z_{pp}^{k_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_2})) \tag{4.24}$$
$$\prod_{t=3}^{s}(z_{pp}^{k_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_t})(y_{pp}-y_{\lambda(q)\lambda(q)});$$

$$(-1)^{n+1}((y_{pp}-y_{\lambda(q)\lambda(q)})z_{pq}^{1}-y_{pq}(z_{pp}^{1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{1}))\prod_{t=2}^{n}(z_{pp}^{t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t}) \tag{4.25}$$

e

$$(-1)^{n+1}\sum_{p<q}((z_{pp}^{t_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t_1})z_{pq}^{j_2}-z_{pq}^{t_1}(z_{pp}^{t_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t_2}))\prod_{l=3}^{n}(z_{pp}^{t_l}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t_l})(y_{pp}-y_{\lambda(q)\lambda(p)}). \tag{4.26}$$

Notemos que o polinômio (4.23) é igual ao polinômio (4.11), o polinômio (4.24) é igual ao polinômio (4.12), o polinômio (4.25) é igual ao polinômio (4.13) e o polinômio (4.26) é igual ao polinômio (4.14). Logo, seguindo a demonstração do Lema 4.7 segue que os geradores de $\Gamma_{1,n}(I_{\sigma_\lambda})$, vistos como elementos de $\Gamma_{1,n}$, são linearmente independentes módulo as $\sigma_\lambda$-identidades. □

**Lema 4.14.** *Os geradores de $\Gamma_{m,n}(I_{\sigma_\lambda})$, vistos como elementos de $\Gamma_{m,n}$, com $m>1$ e $n>0$, são linearmente independentes módulo as $\sigma_\lambda$-identidades.*

*Demonstração.* De (4.2) obtemos os polinômios que são os geradores do espaço vetorial $\Gamma_{m,n}(I_{\sigma_\lambda})$,

$$z_{i_1}\cdots z_{i_r}[y_{k_1},z_{j_1},\dots,z_{j_s},y_{k_2},\dots,y_{k_m}],\ z_{i_1}\cdots z_{i_r}[z_{l_1},z_{l_2},\dots,z_{l_s},y_1,\dots,y_m],$$

$$z_1\cdots z_n[y_{a_1},y_{a_2},\dots,y_{a_m}],\ [y_{b_1},z_1,\dots,z_n,y_{b_2},\dots,y_{b_m}],\ [z_{d_1},z_{d_2},\dots,z_{d_s},y_1,\dots,y_m],$$

onde $i_1<\cdots<i_r$, $y_{k_1}>z_{j_1}<\cdots<z_{j_s}<y_{k_2}<\cdots<y_{k_m}$, $z_{l_1}>z_{l_2}<\cdots<z_{l_s}$, $a_1>a_2<\cdots<a_m$, $y_{b_1}>z_1<\cdots<z_n<y_{b_2}<\cdots<y_{b_m}$ e $z_{d_1}>z_{d_2}<\cdots<z_{d_s}$.

Vamos denotar por $v$ o colchete que possui $y$ na primeira posição e $z$ na segunda, $w$ o colchete que possui $z$ na primeira posição e por $u$ o colchete que possui $y$ em todas as suas posições. Aplicando os geradores de $\Gamma_{m,n}(I_{\sigma_\lambda})$ nas matrizes genéricas, temos, nos três primeiros tipos de geradores,

$$\begin{aligned}
z_{i_1}\cdots z_{i_r}v &= (-1)^{s+m}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}\prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}((y_{pp}^{k_1}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_1})z_{pq}^{j_1}-y_{pq}^{k_1}(z_{pp}^{j_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1}))\\
&\quad \prod_{t=2}^{s}(z_{pp}^{j_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t})\prod_{t=2}^{m}(y_{pp}^{k_t}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_t})e_{pq}+(-1)^{s+m}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}\prod_{l=1}^{r} z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_l}\\
&\quad ((y_{pp}^{k_1}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_1})z_{pq}^{j_1}-y_{pq}^{k_1}(z_{pp}^{j_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1}))\\
&\quad \prod_{t=2}^{s}(z_{pp}^{j_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t})\prod_{t=2}^{m}(y_{pp}^{k_t}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_t})e_{\lambda(q)\lambda(p)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{i_1}\cdots z_{i_r}w &= (-1)^{s+m}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}\prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}((z_{pp}^{j_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1})z_{pq}^{j_2}-z_{pq}^{j_1}(z_{pp}^{j_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_2}))\\
&\quad \prod_{t=3}^{s}(z_{pp}^{j_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t})\prod_{l=1}^{m}(y_{pp}^{l}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{l})e_{pq}+(-1)^{s+m}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}\prod_{l=1}^{r} z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_l}\\
&\quad ((z_{pp}^{j_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1})z_{pq}^{j_2}-z_{pq}^{j_1}(z_{pp}^{j_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_2}))\\
&\quad \prod_{t=3}^{s}(z_{pp}^{j_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t})\prod_{l=1}^{m}(y_{pp}^{l}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{l})e_{\lambda(q)\lambda(p)}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
z_1\cdots z_n u &= (-1)^{m}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}\prod_{l=1}^{n} z_{pp}^{l}((y_{pp}^{a_1}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{a_1})y_{pq}^{a_2}-y_{pq}^{a_1}(y_{pp}^{a_2}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{a_2}))\\
&\quad \prod_{t=3}^{m}(y_{pp}^{a_t}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{a_t})e_{pq}+\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}\prod_{l=1}^{r} z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{l}\\
&\quad ((y_{pp}^{a_1}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{a_1})y_{pq}^{a_2}-y_{pq}^{a_1}(y_{pp}^{a_2}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{a_2}))\\
&\quad \prod_{t=3}^{m}(y_{pp}^{a_t}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{a_t})e_{\lambda(q)\lambda(p)}.
\end{aligned}$$

Nos dois últimos tipos de geradores temos,

$$\begin{aligned}
v &= (-1)^{n+m}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}((y_{pp}^{b_1}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{b_1})z_{pq}^{1}-y_{pq}^{b_1}(z_{pp}^{1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{1}))\\
&\quad \prod_{t=2}^{s}(z_{pp}^{t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t})\prod_{t=2}^{m}(y_{pp}^{b_t}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{b_t})(e_{pq}+(-1)^m e_{\lambda(q)\lambda(p)})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
w &= (-1)^{n+m}\sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}}((z_{pp}^{d_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{d_1})z_{pq}^{d_2}-z_{pq}^{d_1}(z_{pp}^{d_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{d_2}))\\
&\quad \prod_{t=3}^{n}(z_{pp}^{d_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{d_t})\prod_{t=1}^{m}(y_{pp}^{t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t})(e_{pq}+(-1)^m e_{\lambda(q)\lambda(p)}).
\end{aligned}$$

Considerando $p < q$ fixos em $P$, os coeficientes de $e_{pq}$ nos geradores $z_{i_1}\cdots z_{i_r}v$, $z_{i_1}\cdots z_{i_r}w$, $z_1\cdots z_n u$, $v$ e $w$ são, respectivamente,

$$(-1)^{s+m}\prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}((y_{pp}^{k_1}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_1})z_{pq}^{j_1}-y_{pq}^{k_1}(z_{pp}^{j_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1}))\prod_{t=2}^{s}(z_{pp}^{j_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t}) \tag{4.27}$$
$$\prod_{t=2}^{m}(y_{pp}^{k_t}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{k_t}),$$

$$(-1)^{s+m}\prod_{l=1}^{r} z_{pp}^{i_l}((z_{pp}^{j_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1})z_{pq}^{j_2}-z_{pq}^{j_1}(z_{pp}^{j_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_2}))\prod_{t=3}^{s}(z_{pp}^{j_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_t}) \tag{4.28}$$
$$\prod_{l=1}^{m}(y_{pp}^{l}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{l}),$$

$$(-1)^{m}\prod_{l=1}^{n} z_{pp}^{l}((y_{pp}^{a_1}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{a_1})y_{pq}^{a_2}-y_{pq}^{a_1}(y_{pp}^{a_2}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{a_2}))\prod_{t=3}^{m}(y_{pp}^{a_t}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{a_t}), \tag{4.29}$$

$$(-1)^{n+m}((y_{pp}^{b_1}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{b_1})z_{pq}^{1}-y_{pq}^{b_1}(z_{pp}^{1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{1}))\prod_{t=2}^{s}(z_{pp}^{t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t}) \tag{4.30}$$
$$\prod_{t=2}^{m}(y_{pp}^{b_t}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{b_t}),$$

$$(-1)^{n+m}((z_{pp}^{d_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{d_1})z_{pq}^{d_2}-z_{pq}^{d_1}(z_{pp}^{d_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{d_2}))\prod_{t=3}^{n}(z_{pp}^{d_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{d_t})\prod_{t=1}^{m}(y_{pp}^{t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{t}). \tag{4.31}$$

Notemos que o polinômio (4.27) é igual ao polinômio (4.15), o polinômio (4.28) é igual ao polinômio (4.16), o polinômio (4.29) é igual ao polinômio (4.17), o polinômio (4.30) é igual ao polinômio (4.18) e o polinômio (4.31) é igual ao polinômio (4.19). Desse modo, podemos seguir a argumentação feita no Lema 4.8 e, portanto, os geradores de $\Gamma_{m,n}(I_{\sigma_\lambda})$, vistos como elementos de $\Gamma_{m,n}$, com $m > 1$ e $n > 0$ são linearmente independentes módulo as $\sigma_\lambda$-identidades. □

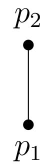
Usando os lemas anteriores, determinamos os geradores do $T(\sigma_\lambda)$-ideal $Id^{\sigma_\lambda}(I(P,F))$.

**Teorema 4.15.** *Sejam $P$ um poset finito, com cadeias de comprimento no máximo 2, conexo, com uma involução $\lambda$ e $F$ um corpo infinito de característica zero. Consideremos a álgebra de incidência $I(P,F)$ com a involução $\sigma_\lambda$. O $T(\sigma_\lambda)$-ideal $Id^{\sigma_\lambda}(I(P,F))$ é gerado pela identidade ordinária $[x_1,x_2][x_3,x_4]$.*

*Demonstração.* Dos lemas 4.11, 4.12, 4.13 e 4.14 segue que os geradores de $\Gamma_{m,n}(I_{\sigma_\lambda})$, vistos como elementos de $\Gamma_{m,n}$ são linearmente indepedentes módulo as $\sigma_\lambda$-identidades de $I(P, F)$. Como consequência disso, segue que $\Gamma_{m,n} \cap I_{\sigma_\lambda} = \Gamma_{m,n} \cap Id^{\sigma_\lambda}(I(P, F))$ para todo par de inteiros não negativos $m, n$ e, portanto, $I_{\sigma_\lambda} = Id^{\sigma_\lambda}(I(P, F))$. □

**Observação 4.16.** *Se $P$ é um poset conexo com involução e com cadeias de comprimento no máximo 2, $P$ deve possuir um número par de elementos, pois $P$ deve ter sempre um mesmo número de elementos maximais e minimais.*

**Observação 4.17.** *Se $P$ é conexo e possui dois elementos, $P$ é da forma*




*Neste caso, $P$ possui somente uma involução $\lambda$ com $\lambda(p_1) = p_2$. Temos que $I(P, F) \cong UT_2(F)$, o conjunto das matrizes triangulares superiores de ordem 2. Definindo em $I(P, F)$ as involuções $\hat{\lambda}$ e $\sigma_\lambda$, por [10], existem em $I(P, F)$ $\hat{\lambda}$-identidades e $\sigma_\lambda$-identidades que não são ordinárias. Denotando por $I$ e $J$ o $T(\hat{\lambda})$-ideal $Id^{\hat{\lambda}}(I(P, F))$ e o $T(\sigma_\lambda)$-ideal $Id^{\sigma_\lambda}(I(P, F))$ de $F\langle Y, Z\rangle$, respectivamente, temos*

$$I = \langle [y_1, y_2], [z_1, z_2], [y_1, z_1][y_2, z_2], z_1y_1z_2 - z_2y_1z_1 \rangle \quad e$$

$$J = \langle [y_1, y_2], [z_1, y_1], [z_1, z_2][z_3, z_4], z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1 \rangle \,.$$

## 4.2 Identidades Polinomiais com Involução em $I(C_{2n}, F)$

Na seção anterior mostramos que, com certas hipóteses sobre $P$, todas as $\hat{\lambda}$-identidades e todas as $\sigma_\lambda$-identidades da álgebra de incidência $I(P, F)$ seguem da identidade ordinária $[x_1, x_2][x_3, x_4]$. Nesta seção provaremos que, se $P = C_{2n}$, esse resultado pode ser melhorado, ou seja, provaremos que para toda involução $\rho$ sobre $I(C_{2n}, F)$, as $\rho$-identidades também seguem da identidade ordinária $[x_1, x_2][x_3, x_4]$.

**Proposição 4.18.** *Seja $A$ uma $F$-álgebra com $F$ um corpo de característica zero. Suponhamos que $A$ possua duas involuções $\rho_1$ e $\rho_2$. Se $\rho_1$ e $\rho_2$ são equivalentes, então $Id^{\rho_1}(A) = Id^{\rho_2}(A)$.*

*Demonstração.* Como $\rho_1$ e $\rho_2$ são equivalentes, existe um automorfismo $\psi$ de $A$ tal que $\psi^{-1} \circ \rho_2 \circ \psi = \rho_1$. Consideremos $B^+$ uma base do subespaço vetorial formado pelos elementos de $A$ que são $\rho_1$-simétricos e $B^-$ como sendo a base do subespaço vetorial formado pelos elementos de $A$ que são $\rho_1$-antissimétricos. Desse modo, $\mathbb{B} = B^+ \cup B^-$ é uma base de $A$. Sejam $a \in B^+$ e $b \in B^-$. Para estes elementos temos,

$$(\psi^{-1} \circ \rho_2 \circ \psi)(a) = \rho_1(a) = a, \text{ que implica em } \rho_2(\psi(a)) = \psi(a) \text{ e}$$

$$(\psi^{-1} \circ \rho_2 \circ \psi)(b) = \rho_1(b) = -b \text{ que implica em } \rho_2(\psi(b)) = -\psi(b).$$

Assim, obtemos uma outra base para $A$, a saber, o conjunto

$$\psi(\mathbb{B}) = \psi(B^+) \cup \psi(B^-),$$

onde $\psi(B^+)$ é base do subespaço vetorial formado pelos elementos de $A$ que são $\rho_2$-simétricos e $\psi(B^-)$ é base do subespaço vetorial formado pelos elementos de $A$ que são $\rho_2$-antissimétricos, pois $\psi$ é um automorfismo de $A$.

Seja agora $f = f(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots z_m) \in Id^{\rho_1}(A)$ multilinear. Podemos assumir $f$ multilinear pois $char F = 0$. Façamos a seguinte substituição nas variáveis de $f$: substituímos $y_i$ por $\psi(a_i)$ com $a_i \in B^+$ e $z_i$ por $\psi(b_j)$ com $b_j \in B^-$. Assim,

$$f(\psi(a_1), \ldots, \psi(a_n), \psi(b_1), \ldots, \psi(b_m)) = \psi(f(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)) = \psi(0) = 0.$$

Logo, $f \in Id^{\rho_2}(A)$ e $Id^{\rho_1}(A) \subseteq Id^{\rho_2}(A)$. Usando de maneira inversa o mesmo argumento, obtemos a inclusão contrária. Portanto $Id^{\rho_1}(A) = Id^{\rho_2}(A)$. □

Pelos Teoremas 4.9 e 4.15 temos que o polinômio $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ gera o $T(\hat{\lambda})$-ideal $Id^{\hat{\lambda}}(I(C_{2n}, F))$ e o $T(\sigma_\lambda)$-ideal $Id^{\sigma_\lambda}(I(C_{2n}, F))$ onde $\lambda$ é uma involução em $C_{2n}$. Sendo assim, vamos considerar as involuções na forma $M_\mu\hat{\lambda}$ em $I(C_{2n}, F)$ onde $\lambda$ é uma reflexão de $C_{2n}$ e o elemento $\mu$ satisfaz $\mu(a_1, b_1) = -\mu(a_2, b_2) = \pm 1$. Nosso objetivo nesta seção é determinar os geradores do $T(M_\mu\hat{\lambda})$-ideal $Id^{M_\mu\hat{\lambda}}(I(C_{2n}, F))$ para qualquer que seja a involução $M_\mu\hat{\lambda}$. Pelo Teorema 3.19 temos que qualquer outra involução na forma $M_\tau\hat{\lambda}'$ com $\lambda'$ reflexão de $C_{2n}$ e $\tau$ um elemento multiplicativo tal que $\tau(a_1, b_1) = -\tau(a_2, b_2) = \pm 1$ é equivalente a $M_\mu\hat{\lambda}$. Desse modo, pela Proposição 4.18 segue que $Id^{M_\mu\hat{\lambda}}(I(C_{2n}, F)) = Id^{M_\tau\hat{\lambda}'}(I(C_{2n}, F))$. Logo, para determinarmos os geradores de $T(M_\mu\hat{\lambda})$-ideal $Id^{M_\mu\hat{\lambda}}(I(C_{2n}, F))$

basta determinarmos os geradores deste ideal para um representante da classe de equivalência de $M_\mu\hat{\lambda}$. Para $p, q \in C_{2n}$, vamos tomar tal representante com $\mu$ multiplicativo definido da seguinte forma, com $p, q \in C_{2n}$,

$$\mu(p,q) = \begin{cases} 1 & \text{se } p = q \\ 1 & \text{se } p < q \text{ e } \lambda(p) \neq q \\ 1 & \text{se } p = a_1 \text{ e } q = b_1 \\ -1 & \text{se } p = a_2 \text{ e } q = b_2. \end{cases} \tag{4.32}$$

Sendo assim, para $p < q$ em $C_{2n}$, temos,

$$\begin{aligned} M_\mu\hat{\lambda}(e_{pp} + e_{\lambda(p)\lambda(p)})(t,s) &= M_\mu(e_{pp} + e_{\lambda(p)\lambda(p)})(t,s) = \mu(t,s)(e_{pp} + e_{\lambda(p)\lambda(p)})(t,s) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } t = s = p \\ 1 & \text{se } t = s = \lambda(p) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= (e_{pp} + e_{\lambda(p)\lambda(p)})(t,s) \end{aligned}$$

e, considerando $\lambda(p) \neq q$,

$$\begin{aligned} M_\mu\hat{\lambda}(e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)})(t,s) &= M_\mu(e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)})(t,s) = \mu(t,s)(e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)})(t,s) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } t = p \text{ e } s = q \\ 1 & \text{se } t = \lambda(q) \text{ e } s = \lambda(p) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= (e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)})(t,s). \end{aligned}$$

Para os pares de elementos $\lambda$-invariantes $(a_1, b_1)$ e $(a_2, b_2)$ temos,

$$\begin{aligned} M_\mu\hat{\lambda}(e_{a_1b_1})(t,s) &= M_\mu(e_{a_1b_1})(t,s) = \mu(t,s)(e_{a_1b_1})(t,s) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } t = a_1 \text{ e } s = b_1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= e_{a_1b_1}(t,s) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} M_\mu\hat{\lambda}(e_{a_2b_2})(t,s) &= M_\mu(e_{a_2b_2})(t,s) = \mu(t,s)(e_{a_2b_2})(t,s) \\ &= \begin{cases} -1 & \text{se } t = a_2 \text{ e } s = b_2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= -e_{a_2b_2}(t,s). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.25, o polinômio $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ é uma identidade polinomial ordinária de $I(C_{2n}, F)$, assim, podemos considerar o $T(M_\mu\hat{\lambda})$-ideal $I_{M_\mu\hat{\lambda}}$ gerado por $[x_1, x_2][x_3, x_4]$. Denotemos por $\Gamma_{m,n}(I_{M_\mu\hat{\lambda}})$ o subespaço dos polinômios multilineares $Y$-próprios nas variáveis $y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n$ da álgebra relativamente livre $\dfrac{F\langle Y, Z\rangle}{I_{M_\mu\hat{\lambda}}}$.

De maneira análoga ao que foi feito na seção anterior, temos que os polinômios dados em (4.2) também geram os espaços vetoriais $\Gamma_{m,n}(I_{M_\mu\hat{\lambda}})$.

Para determinarmos os geradores de $Id^{M_\mu\hat{\lambda}}(I(C_{2n}, F))$ usaremos novamente as matrizes genéricas. Podemos escrever a álgebra de incidência $I(C_{2n}, F)$, como um espaço vetorial, da seguinte forma,

$$I(C_{2n}, F) = I(C_{2n}, F)^{(0)}_{M_\mu\hat{\lambda}} \oplus I(C_{2n}, F)^{(1)}_{M_\mu\hat{\lambda}}$$

onde $I(C_{2n}, F)^{(0)}_{M_\mu\hat{\lambda}}$ é o subespaço vetorial dos elementos $M_\mu\hat{\lambda}$-simétricos de $I(C_{2n}, F)$ e $I(C_{2n}, F)^{(1)}_{M_\mu\hat{\lambda}}$ é o subespaço vetorial dos elementos $M_\mu\hat{\lambda}$-antissimétricos de $I(C_{2n}, F)$. Lembremos que $\lambda$ não pode ter pontos fixos e, como estamos considerando o a coroa $C_{2n}$, aqui o conjunto $\mathcal{P}$ definido em (4.3) tem a forma $\mathcal{P} = \{(p, q) \in C_{2n} \times C_{2n} : p < q \text{ em } C_{2n}\}$. Consideremos esse caso particular de $\mathcal{P}$ com a mesma relação de equivalência dada em (4.4). Desse modo, temos como base de $I(C_{2n}, F)^{(0)}_{M_\mu\hat{\lambda}}$ o conjunto,

$$B_0^{M_\mu\hat{\lambda}} = \{e_{pp} + e_{\lambda(p)\lambda(p)}, e_{a_1b_1} : p \in P \text{ com } p \neq \lambda(p)\} \cup \{e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)} : (p, q) \in \bar{\mathcal{P}}\}$$

e como base de $I(P, F)^{(1)}_{M_\mu\hat{\lambda}}$ o conjunto,

$$B_1^{M_\mu\hat{\lambda}} = \{e_{pp} - e_{\lambda(p)\lambda(p)}, e_{a_2b_2} : p \in P \text{ com } p \neq \lambda(p)\} \cup \{e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)} : (p, q) \in \bar{\mathcal{P}}\}.$$

A uniões nas definições de $B_0^{M_\mu\hat{\lambda}}$ e $B_1^{M_\mu\hat{\lambda}}$ são disjuntas. Sejam $y_{lt}^k$ e $z_{lt}^k$ variáveis que comutam e consideremos as matrizes genéricas,

$$[y_k] = \sum_{p\in P} y_{pp}^k(e_{pp} + e_{\lambda(p)\lambda(p)}) + \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} y_{pq}^k(e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)}) + y_{a_1b_1}^k e_{a_1b_1}$$

e

$$[z_k] = \sum_{p\in P} z_{pp}^k(e_{pp} - e_{\lambda(p)\lambda(p)}) + \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} z_{pq}^k(e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)}) + z_{a_2b_2}^k e_{a_2b_2}$$

com $k = 1, 2, \ldots$.

Seja $D^{M_\mu\hat{\lambda}}$ a $F$-subálgebra de $UT_{|P|}(F[y_{lt}^k, z_{lt}^k])$ gerada pelas matrizes acima. Podemos definir sobre $D^{M_\mu\hat{\lambda}}$ a involução $M_\mu\hat{\lambda}$, as matrizes $[y_k]$ são simétricas enquanto as matrizes $[z_k]$ são antissimétricas com respeito à $M_\mu\hat{\lambda}$.

De maneira análoga a demonstração do Teorema 4.4, podemos demonstrar o seguinte teorema.

**Teorema 4.19.** *A álgebra $D^{M_\mu\hat{\lambda}}$ é isomorfa à álgebra relativamente livre na variedade das álgebras com involução gerada por $I(C_{2n}, F)$, ou seja,*

$$D^{M_\mu\hat{\lambda}} \cong \frac{F\langle Y, Z\rangle}{Id^{M_\mu\hat{\lambda}}(I(C_{2n}, F))}.$$

Usando o teorema acima, vamos calcular os seguintes colchetes nas matrizes genéricas,

$$\begin{aligned}[][z_{j_1}],[z_{j_2}]] &= \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} ((z_{pp}^{j_1} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1})z_{pq}^{j_2} - z_{pq}^{j_1}(z_{pp}^{j_2} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_2}))(e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)}) \\ &+ 2(z_{a_2a_2}^{j_1} z_{a_2b_2}^{j_1} - z_{a_2b_2}^{j_1} z_{a_2a_2}^{j_2})e_{a_2b_2},\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}[][y_{i_1}],[z_{j_1}]] &= \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} ((y_{pp}^{i_1} - y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_1})z_{pq}^{j_1} - y_{pq}^{i_1}(z_{pp}^{j_1} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1}))(e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)}) \\ &- 2y_{a_1b_1}^{i_1} z_{a_1a_1}^{j_1} e_{a_1b_1},\end{aligned} \tag{4.34}$$

$$[[y_{i_1}],[y_{i_2}]] = \sum_{(p,q)\in\bar{\mathcal{P}}} ((y_{pp}^{i_1} - y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_1})y_{pq}^{i_2} - y_{pq}^{i_1}(y_{pp}^{i_2} - y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_2}))(e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)}). \tag{4.35}$$

Notemos que, neste caso particular de $I(C_{2n}, F)$ com a involução $M_\mu\hat{\lambda}$, temos que os coeficientes de $e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(q)}$ em (4.33), (4.34) e (4.35) são iguais aos coeficientes de (4.5), (4.6) e (4.7), respectivamente. Desse modo, usando os mesmos cálculos e as mesmas argumentações dos lemas 4.6, 4.5, 4.7 e 4.8, respectivamente, podemos provar os seguintes lemas:

**Lema 4.20.** *Os geradores de $\Gamma_{m,0}(I_{M_\mu\hat{\lambda}})$, vistos como elementos de $\Gamma_{m,0}$, são linearmente independentes módulo as $M_\mu\hat{\lambda}$-identidades.*

**Lema 4.21.** *Os geradores de $\Gamma_{0,n}(I_{M_\mu\hat{\lambda}})$, vistos como elementos de $\Gamma_{0,n}$, são linearmente independentes módulo as $M_\mu\hat{\lambda}$-identidades.*

**Lema 4.22.** *Os geradores de $\Gamma_{1,n}(I_{M_\mu\hat{\lambda}})$, vistos como elementos de $\Gamma_{1,n}$, são linearmente independentes módulo as $M_\mu\hat{\lambda}$-identidades.*

**Lema 4.23.** *Os geradores de $\Gamma_{m,0}(I_{M_\mu\hat{\lambda}})$, vistos como elementos de $\Gamma_{m,n}$, com $m > 1$ e $n > 0$ são linearmente independentes módulo as $M_\mu\hat{\lambda}$-identidades.*

Com esses lemas, podemos provar o seguinte teorema.

**Teorema 4.24.** *Consideremos $C_{2n}$ com uma reflexão $\lambda$ e $F$ um corpo infinito de característica zero. Consideremos a álgebra de incidência $I(C_{2n}, F)$ com a involução $M_\mu\hat{\lambda}$ com $\mu$ definido em (4.32). O $T(M_\mu\hat{\lambda})$-ideal $Id^{M_\mu\hat{\lambda}}(I(P, F))$ é gerado pela identidade ordinária $[x_1, x_2][x_3, x_4]$.*

*Demonstração.* Dos lemas 4.20, 4.21, 4.22 e 4.23 segue que os geradores de $\Gamma_{m,n}(I_{M_\mu\hat{\lambda}})$, vistos como elementos de $\Gamma_{m,n}$ são linearmente indepedentes módulo as $M_\mu\hat{\lambda}$-identidades de $I(C_{2n}, F)$. Como consequência disso, segue que $\Gamma_{m,n} \cap I_{M_\mu\hat{\lambda}} = \Gamma_{m,n} \cap Id^{M_\mu\hat{\lambda}}(I(C_{2n}, F))$ para todo par de inteiros não negativos $m, n$ e, portanto, $I_{M_\mu\hat{\lambda}} = Id^{M_\mu\hat{\lambda}}(I(C_{2n}, F))$. □

Finalmente, temos o último resultado.

**Teorema 4.25.** *Para qualquer involução $\rho$ sobre $I(C_{2n}, F)$, $n \geq 2$, toda $\rho$-identidade segue da identidade ordinária $[x_1, x_2][x_3, x_4]$.*

*Demonstração.* Pela Proposição 4.18, segue que só precisamos mostrar o resultado para os representantes das classes de equivalência das involuções sobre $I(C_{2n}, F)$. Quando $n$ é par, dada uma involução $\lambda$ de $C_{2n}$, temos três classes de equivalência que podem ser representadas por $\hat{\lambda}$, $\sigma_\lambda$ e $M_\mu\hat{\lambda}$ com $\mu(a_1, b_1) = -\mu(a_2, b_2) = \pm 1$ onde $(a_1, b_1)$ e $(a_2, b_2)$ são os pares de pontos $\lambda$-invariantes em $C_{2n}$ conforme a Observação 3.13. Pelos Teoremas 4.9 e 4.15 segue que as $\hat{\lambda}$-identidades e $\sigma_\lambda$-identidades em $I(C_{2n}, F)$ seguem da identidade ordinária $[x_1, x_2][x_3, x_4]$. Para a involução $M_\mu\hat{\lambda}$, tomando o representante de sua classe com $\mu$ definido em (4.32), pelo Teorema 4.24, segue que todas $M_\mu\hat{\lambda}$-identidades em $I(C_{2n}, F)$ seguem da identidade ordinária $[x_1, x_2][x_3, x_4]$.

Quando $n$ é ímpar temos uma classe a mais, a saber, a classe de $\hat{\lambda}$ quando $\lambda$ é uma rotação. Nesse caso podemos novamente usar o Teorema 4.9 e toda $\hat{\lambda}$-identidade segue da identidade ordinária $[x_1, x_2][x_3, x_4]$. Portanto, segue o resultado. □

Capítulo 5

# Identidades com Involução em $I(P,F)$ com $P$ Conexo Possuindo Cadeias de Comprimento no Máximo $3$

Em todo esse capítulo vamos considerar $P$ um poset finito, conexo, com cadeias de comprimento no máximo 3, com uma involução $\lambda$ e também um corpo $F$ infinito de característica zero e algebricamente fechado. Quando dizemos que $P$ possui cadeias de comprimento no máximo 3, estamos assumindo que $P$ possui pelo menos uma cadeia de comprimento 3, pois do contrário, $P$ teria cadeias de comprimento no máximo 2, caso que já foi analisado no capítulo anterior. Em [10, Teorema 6.6] temos determinados os geradores do $T(*)$-ideal das $*$-identidades de $UT_3(F)$ onde $*$ é a involução canônica sobre $UT_3(F)$ que é dada por $e_{ij}^* = e_{4-j,4-i}$. A álgebra $UT_3(F)$ pode ser vista como a álgebra de incidência de $P$ sobre o corpo $F$, sendo $P$ uma cadeia de comprimento 3 com uma involução $\lambda$, a única que pode ser definida sobre $P$, e $\hat{\lambda} = *$ a involução induzida por $\lambda$ em $UT_3(F) \cong I(P,F)$. Assim, também consideraremos nesse capítulo $|P| \geq 4$. O objetivo deste capítulo é determinar os geradores do $T(\hat{\lambda})$-ideal $Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F))$ onde $\lambda$ satisfaz algumas condições que serão apresentadas nesse capítulo, mostrando que $Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F)) = Id^*(UT_3(F))$.

## 5.1 $\hat{\lambda}$-identidades em $I(P,F)$

Como estamos interessados nas $\hat{\lambda}$-identidades, trabalharemos com a álgebra livre com involução $F\langle Y,Z\rangle$ onde $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ é o conjunto das variáveis simétricas e $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$ é o conjunto das variáveis antissimétricas com respeito à involução $\hat{\lambda}$. Mas antes de tratarmos das $\hat{\lambda}$-identidades, para facilitar o que será feito daqui em diante, vamos definir três subconjuntos de $P$. São eles:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &:= \text{ conjunto dos elementos maximais de } P;\\
\mathcal{I} &:= \text{ conjunto dos elementos que não são maximais e nem minimais em } P;\\
\mathbf{m} &:= \text{ conjunto dos elementos minimais de } P.
\end{aligned}$$

Notemos que $P = \mathcal{M} \cup \mathcal{I} \cup \mathbf{m}$ é uma união disjunta e que $\mathcal{I} \neq \emptyset$ pois $P$ possui pelo menos uma cadeia de comprimento 3. Escrevendo $P$ dessa forma, daqui para frente vamos denotar por $p$ os elementos de $\mathbf{m}$, por $r$ os elementos de $\mathcal{I}$ e por $q$ os elementos de $\mathcal{M}$ para simplificar a notação que usaremos. Observemos que, como $\lambda$ é uma involução, se $p \in \mathbf{m}$ então $\lambda(p) \in \mathcal{M}$, se $q \in \mathcal{M}$ então $\lambda(q) \in \mathbf{m}$ e, se $r \in \mathcal{I}$ então $\lambda(r) \in \mathcal{I}$. Também, observemos que, se $r \in \mathcal{I}$, existem $p \in \mathbf{m}$ e $q \in \mathcal{M}$ tais que $p < r < q$. Note que se $p < q$, então $\lambda(q) < \lambda(p)$. A fim de fornecer uma base para a álgebra de incidência formada por elementos $\hat{\lambda}$-simétricos e $\hat{\lambda}$-antissimétricos, no conjunto $\mathcal{C} = \{(p,q) \in \mathbf{m} \times \mathcal{M} : \ p < q\}$, convém introduzir a relação de equivalência $\sim$ dada por

$$(p_1,q_1) \sim (p_2,q_2) \text{ se } (p_2,q_2) = (p_1,q_1) \text{ ou } (p_2,q_2) = (\lambda(q_1),\lambda(p_1)).$$

Repare que $e_{p_1,q_1} + e_{\lambda(q_1),\lambda(p_1)}$ é múltiplo de $e_{p_2,q_2} + e_{\lambda(q_2),\lambda(p_2)}$ se e somente se $(p_1,q_1) \sim (p_2,q_2)$ (o mesmo ocorre com $e_{p_1,q_1} - e_{\lambda(q_1),\lambda(p_1)}$). Vamos denotar por $\bar{\mathcal{C}}$ o quociente de $\mathcal{C}$ por $\sim$.

Antes da próxima proposição, vamos escrever uma base de $I(P,F)$ formada por elementos $\hat{\lambda}$-simétricos e elementos $\hat{\lambda}$-antissimétricos supondo que $\lambda$ fixa todos os elementos de $\mathcal{I}$. Podemos escrever a álgebra de incidência $I(P,F)$, como um espaço vetorial, da seguinte forma, conforme o que foi feito na seção 2.5 do capítulo 2,

$$I(P,F) = I(P,F)^{(0)} \oplus I(P,F)^{(1)}$$

onde $I(P,F)^{(0)}$ é o subespaço vetorial dos elementos $\hat{\lambda}$-simétricos de $I(P,F)$ e $I(P,F)^{(1)}$ é o subespaço vetorial dos elementos $\hat{\lambda}$-antissimétricos de $I(P,F)$. Com a definição e as notações dadas acima, podemos escrever a base de $I(P,F)^{(0)}$ como sendo $B_0 = B_{0,1} \cup B_{0,2} \cup B_{0,3} \cup B_{0,4} \cup B_{0,5}$, onde

$$\begin{aligned}
B_{0,1} &= \{e_{pp}+e_{\lambda(p)\lambda(p)} : p\in \mathbf{m}\},\\
B_{0,2} &= \{e_{pr}+e_{r\lambda(p)} :\ p<r;\, p\in \mathbf{m},\, r\in \mathcal{I}\},\\
B_{0,3} &= \{e_{pq}+e_{\lambda(q)\lambda(p)} :\ (p,q)\in \bar{\mathcal{C}}, q\neq \lambda(p)\},\\
B_{0,4} &= \{e_{p,\lambda(p)} :\ p\in \mathbf{m}, p<\lambda(p)\}\\
B_{0,5} &= \{e_{rr} :\ r\in \mathcal{I}\}.
\end{aligned}$$

Analogamente, a base de $I(P,F)^{(1)}$ será denotada por $B_1 = B_{1,1}\cup B_{1,2}\cup B_{1,3}$, onde

$$\begin{aligned}
B_{1,1} &= \{e_{pp}-e_{\lambda(p)\lambda(p)} : p\in \mathbf{m}\},\\
B_{1,2} &= \{e_{pr}-e_{r\lambda(p)} :\ p<r;\, p\in \mathbf{m},\, r\in \mathcal{I}\},\\
B_{1,3} &= \{e_{pq}-e_{\lambda(q)\lambda(p)} :\ (p,q)\in \bar{\mathcal{C}}, q\neq \lambda(p)\}.
\end{aligned}$$

Observemos que, nas bases $B_0$ e $B_1$, quando escrevemos $e_{ij}$ estamos assumindo $i\leq j$ e, no caso de $e_{pq}\pm e_{\lambda(q)\lambda(p)}$, estamos assumindo $\lambda(p)\neq q$.

Facilmente podemos verificar que os elementos em $B_0$ e $B_1$ são linearmente independentes. Para mostrarmos que $B_0$ gera $I(P,F)^{(0)}$ e que $B_1$ gera $I(P,F)^{(1)}$, consideraremos a base canônica de $I(P,F)$. Se $a\in I(P,F)^{(0)}$, segue que

$$\sum_{i,j}\alpha_{ij}e_{ij} = a = \hat{\lambda}(a) = \sum_{ij}\alpha_{ij}e_{\lambda(j)\lambda(i)}$$

o que implica $\sum\limits_{i,j}(\alpha_{ij}-\alpha_{\lambda(j)\lambda(i)})e_{ij} = 0$. Desse modo $\alpha_{ij} = \alpha_{\lambda(j)\lambda(i)}$ para todo $i,j$ e podemos escrever

$$a = \sum_{\substack{i,j\\ \lambda(i)\neq i,j}}\alpha_{ij}(e_{ij}+e_{\lambda(j)\lambda(i)}) + \sum_{\substack{l,k\\ \lambda(l)=k}}\alpha_{lk}e_{lk} + \sum_{\substack{t\\ \lambda(t)=t}}\alpha_{tt}e_{tt}.$$

Agora, se $a\in I(P,F)^{(1)}$, segue que

$$\sum_{i,j}\alpha_{ij}e_{ij} = a = -\hat{\lambda}(a) = -\sum_{ij}\alpha_{ij}e_{\lambda(j)\lambda(i)},$$

o que implica $\sum\limits_{i,j}(\alpha_{ij}+\alpha_{\lambda(j)\lambda(i)})e_{ij} = 0$. Assim $\alpha_{ij} = -\alpha_{\lambda(j)\lambda(i)}$ para todo $i,j$. Mas nesse caso, observemos que, se $\lambda(i) = j$ temos $\alpha_{ij} = -\alpha_{ij}$ o que nos dá $\alpha_{ij} = 0$ e, se $\lambda(i) = i$, temos $\alpha_{ii} = -\alpha_{ii}$ de onde segue que $\alpha_{ii} = 0$. Logo, podemos escrever $a\in I(P,F)^{(1)}$ na forma

$$a = \sum_{\substack{i,j\\ \lambda(i)\neq i,j}}\alpha_{ij}(e_{ij}-e_{\lambda(j)\lambda(i)}).$$

Portanto, $B_0$ e $B_1$ são bases de $I(P,F)^{(0)}$ e $I(P,F)^{(1)}$, respectivamente, e $\mathbb{B} = B_0 \cup B_1$ é uma base de $I(P,F)$.

Feitas essas observaçoes, temos o seguinte resultado.

**Proposição 5.1.** *Se a involução $\lambda$ fixa todos os pontos de $\mathcal{I}$, então o polinômio $[x_1,x_2]z_1[x_3,x_4]$ é uma $\hat{\lambda}$-identidade de $I(P,F)$ que não é uma identidade ordinária.*

*Demonstração.* Para quaisquer $a_1, a_2 \in I(P,F)$ temos

$$[a_1, a_2] \in span\{e_{ij} : i < j\}.$$

Fazendo o produto $e_{ij}a_3$, onde $i < j$ e $a_3 \in B_1$, temos que

$$[a_1, a_2]a_3 \in span\{e_{ij} : i < j \text{ e } j \in \mathcal{M}\},$$

onde $a_1, a_2 \in I(P,F)$. Logo,

$$[a_1, a_2]a_3[a_4, a_5] = 0$$

para todo $a_1, a_2, a_4, a_5 \in I(P,F)$ e $a_3 \in B_1$. Em particular,

$$[x_1, x_2]z_1[x_3, x_4] \text{ é uma } \hat{\lambda}\text{-identidade.}$$

Consideremos agora $p < r < q$ em $P$ (eles existem pois $P$ admite uma cadeia com 3 elementos). Fazendo

$$[e_{pp}, e_{pr}]e_{rr}[e_{rq}, e_{qq}] = e_{pq},$$

temos que $[x_1, x_2]z_1[x_3, x_4]$ não é identidade ordinária para $I(P,F)$. □

Para determinarmos os geradores do $T(\hat{\lambda})(I(P,F))$-ideal $Id^{\hat{\lambda}}$ também vamos usar as matrizes genéricas. Assim, sejam $y^k_{lt}$ e $z^k_{lt}$ variáveis que comutam e consideremos as matrizes genéricas,

$$\begin{aligned}[y_k] &= \sum_{p\in\mathbf{m}} y^k_{pp}(e_{pp} + e_{\lambda(p)\lambda(p)}) + \sum_{p<r} y^k_{pr}(e_{pr} + e_{r\lambda(p)}) + \sum_{\substack{(p,q)\in\bar{\mathcal{C}} \\ q\neq\lambda(p)}} y^k_{pq}(e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)}) \\ &+ \sum_{\substack{p\in\mathbf{m} \\ p<\lambda(p)}} y^k_{p\lambda(p)}e_{p\lambda(p)} + \sum_{r\in\mathcal{I}} y^k_{rr}e_{rr}\end{aligned}$$

e

$$[z_k] = \sum_{p\in\mathbf{m}} z^k_{pp}(e_{pp} - e_{\lambda(p)\lambda(p)}) + \sum_{p<r} z^k_{pr}(e_{pr} - e_{r\lambda(p)}) + \sum_{\substack{(p,q)\in\mathcal{C} \\ q\neq\lambda(p)}} z^k_{pq}(e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)})$$

com $k = 1, 2, \ldots$ e $p, q, r \in P$.

Seja $D$ a $F$-subálgebra de $UT_{|P|}(F[y_{lt}^k, z_{lt}^k])$ gerada pelas matrizes acima. Podemos definir sobre $D$ a involução $\hat{\lambda}$, as matrizes $[y_k]$ são simétricas enquanto as matrizes $[z_k]$ são antissimétricas com respeito à $\hat{\lambda}$.

A demonstração do próximo teorema segue de maneira análoga à demonstração do Teorema 4.4.

**Teorema 5.2.** *A álgebra $D$ é isomorfa à álgebra relativamente livre na variedade das álgebras com involução gerada por $I(P,F)$, ou seja,*

$$D \cong \frac{F\langle Y, Z\rangle}{Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F))}.$$

## 5.2 Os geradores do $T(\hat{\lambda})$-ideal $Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F))$

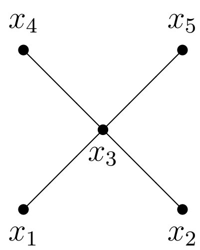
Na seção anterior vimos que $I(P,F)$ possui uma $\hat{\lambda}$-identidade não ordinária se a involução $\lambda$ sobre $P$ fixa todos os elementos de $\mathcal{I}$ (Proposição 5.1) onde $P = \mathcal{M} \cup \mathcal{I} \cup \mathbf{m}$ de acordo com o que foi feito na seção 5.1. Motivados por isso, vamos assumir daqui em diante que $\lambda$ fixa todos elementos de $I$. Pelo Lema 1.66, não podemos definir a involução $\sigma_\lambda$ sobre $I(P,F)$ neste caso. Assim, trataremos apenas das $\hat{\lambda}$-identidades.

Observemos ainda que, na decomposição de $P$ citada acima, o conjunto $\mathcal{I}$ possui somente uma das duas seguintes propriedades:

(i) Existe $r \in \mathcal{I}$ para o qual existem $p_1, p_2 \in \mathbf{m}$ distintos tais que $p_1 < r$ e $p_2 < r$;

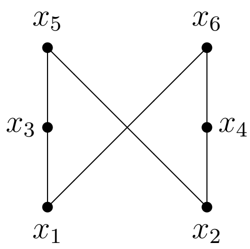
(ii) Para cada $r \in \mathcal{I}$ existe um único $p \in \mathbf{m}$ tal que $p < r$.

Por exemplo, o poset




possui $\mathbf{m} = \{x_1, x_2\}$, $\mathcal{I} = \{x_3\}$ e $\mathcal{M} = \{x_4, x_5\}$ com $x_1 < x_3$ e $x_2 < x_3$. Assim $\mathcal{I}$ satisfaz a propriedade (i).

Agora, o poset




possui $\mathbf{m} = \{x_1, x_2\}$, $\mathcal{I} = \{x_3, x_4\}$ e $\mathcal{M} = \{x_5, x_6\}$ com $x_1 < x_3$ e $x_2 < x_4$, ou seja, nesse caso $\mathcal{I}$ satisfaz a propriedade (ii).

Com isso, podemos classificar $P$ em dois tipos diferentes de acordo com as propriedades de $\mathcal{I}$. Se $\mathcal{I}$ satisfaz a propriedade (i) dizemos que $P$ é do *tipo um* e se $\mathcal{I}$ satisfaz a propriedade (ii) dizemos que $P$ é do *tipo dois*.

Daqui em diante nos restringiremos a estudar o caso em que $P$ é do tipo dois. Mostraremos quais são os geradores do $T(\hat{\lambda})$-ideal $Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F))$ nos baseando fortemente em [10]. Para facilitar a escrita das identidades com as quais trabalharemos a seguir, continuaremos denotando por $x_i$ a variável de um polinômio em $F\langle Y, Z\rangle$ que pode ser tanto simétrica como antissimétrica e vamos definir as seguintes notaçoes: se $x_i = z_i$ definimos $|x_i| = 0$ e se $x_i = y_i$ definimos $|x_i| = 1$. Observando que $[y_i, y_j]$ e $[z_i, z_j]$ são elementos antissimétricos e que $[y_i, z_j]$ é um elemento simétrico, vamos denotar $|[x_i, x_j]|$ por $|x_i x_j|$. Assim, $|x_i x_j| = 0$ quando o comutador é antissimétrico e $|x_i x_j| = 1$ quando o comutador é simétrico.

Enunciamos então o primeiro resultado desta seção.

**Proposição 5.3.** *A álgebra de incidência $I(P,F)$ possui as seguintes $\hat{\lambda}$-identidades:*

*(i)* $z_1[z_2, z_3] - z_2[z_1, z_3] + z_3[z_1, z_2]$;

*(ii)* $(-1)^{|x_1x_2|}[x_1, x_2][x_3, x_4] - (-1)^{|x_3x_4|}[x_3, x_4][x_1, x_2]$;

*(iii)* $(-1)^{|x_1x_2|}[x_1, x_2][x_3, x_4] - (-1)^{|x_1x_3|}[x_1, x_3][x_2, x_4] + (-1)^{|x_1x_4|}[x_1, x_4][x_2, x_3]$;

*(iv)* $z_1[x_3, x_4]z_2 + (-1)^{|x_3x_4|}z_2[x_3, x_4]z_1$;

*(v)* $[x_1, x_2]z_5[x_3, x_4]$;

*(vi)* $z_1[x_4, x_5]z_2x_3 + (-1)^{|x_3|}x_3z_1[x_4, x_5]z_2$;

*Demonstração.* Os polinômios da Proposição 5.3 são multilineares, assim podemos avaliar estes polinômios somente nos elementos da base $\mathbb{B}$ de $I(P,F)$. Mostraremos que o polinômio *(*i) é uma $\hat{\lambda}$-identidade.

Vamos denotar por $a_i \in \mathbb{B}$ uma substituição de $z_i$, $i = 1,\ldots,3$ e por $b_i \in \mathbb{B}$ uma substituição de $x_i$, $i = 1,\ldots,5$. Notemos primeiramente que, se $a_i = a_j$ e $i \neq j$, vamos ter $a_1[a_2,a_3] - a_2[a_1,a_3] + a_3[a_1,a_2] = 0$. Logo, vamos nos restringir aos casos em que acontece $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_1$.

Sejam $p_1,p_2,r_1,r_2,q_1,q_2 \in P$ com $p_1 \neq p_2$, $r_1 \neq r_2$ e $q_1 \neq q_2$. Também, consideremos $p_1 < q_1$ e $p_2 < q_2$. Observemos que, considerando $p_1 \neq \lambda(q_2)$, temos

$$(e_{p_1p_1} - e_{\lambda(p_1)\lambda(p_1)})(e_{p_2p_2} - e_{\lambda(p_2)\lambda(p_2)}) = (e_{p_2p_2} - e_{\lambda(p_2)\lambda(p_2)})(e_{p_1p_1} - e_{\lambda(p_1)\lambda(p_1)}) = 0;$$

$$(e_{p_1r_1} - e_{r_1\lambda(p_1)})(e_{p_2p_2} - e_{\lambda(p_2)\lambda(p_2)}) = (e_{p_2p_2} - e_{\lambda(p_2)\lambda(p_2)})(e_{p_1r_1} - e_{r_1\lambda(p_1)}) = 0$$

$$(e_{p_1p_1} - e_{\lambda(p_1)\lambda(p_1)})(e_{p_2q_2} - e_{\lambda(q_2)\lambda(p_2)}) = (e_{p_2q_2} - e_{\lambda(q_2)\lambda(p_2)})(e_{p_1p_1} - e_{\lambda(p_1)\lambda(p_1)}) = 0;$$

$$(e_{p_1r_1} - e_{r_1\lambda(p_1)})(e_{p_2q_2} - e_{\lambda(q_2)\lambda(p_2)}) = (e_{p_2q_2} - e_{\lambda(q_2)\lambda(p_2)})(e_{p_1r_1} - e_{r_1\lambda(p_1)}) = 0;$$

$$(e_{p_1r_1} - e_{r_1\lambda(p_1)})(e_{p_2r_2} - e_{r_2\lambda(p_2)}) = 0; (e_{p_1q_1} - e_{\lambda(q_1)\lambda(p_1)})(e_{p_2q_2} - e_{\lambda(q_2)\lambda(p_2)}) = 0.$$

Assim, podemos considerar $a_i$ com $i = 1,2,3$ como sendo $e_{pk_i} - e_{\lambda(k_i),\lambda(p)}$, sendo $p$ o mesmo para todos os $a_i$, pois, do contrário, o polinômio em *(i)* se anula.

Desse modo, temos as possibilidades:

- $a_1 = e_{pp} - e_{\lambda(p)\lambda(p)}$, $a_2 = e_{pr} - e_{r\lambda(p)}$ e $a_3 = e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)}$.

  Temos,

$$[a_2,a_3] = [e_{pr} - e_{r\lambda(p)}, e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)}] = 0;$$

$$[a_1,a_3] = [e_{pp} - e_{\lambda(p)\lambda(p)}, e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)}] = e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)};$$

$$[a_1,a_2] = [e_{pp} - e_{\lambda(p)\lambda(p)}, e_{pr} - e_{r\lambda(p)}] = e_{pr} - e_{r\lambda(p)}.$$

  Logo,

$$(e_{pp} - e_{\lambda(p)\lambda(p)})0 - (e_{pr} - e_{r\lambda(p)})(e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)}) + (e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)})(e_{pr} - e_{r\lambda(p)}) = 0.$$

- $a_1 = e_{pr} - e_{r\lambda(p)}$, $a_2 = e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)}$ e $a_3 = e_{pp} - e_{\lambda(p)\lambda(p)}$.

  Temos,

$$[a_2,a_3] = [e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)}, e_{pp} - e_{\lambda(p)\lambda(p)}] = -e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)};$$

$$[z_1, z_3] = [e_{pr} - e_{r\lambda(p)}, e_{pp} - e_{\lambda(p)\lambda(p)}] = -e_{pr} + e_{r\lambda(p)};$$

$$[a_1, a_2] = [e_{pr} - e_{r\lambda(p)}, e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)}] = 0.$$

Logo,

$$(e_{pr} - e_{r\lambda(p)})(-e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)}) - (e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)})(-e_{pr} + e_{r\lambda(p)}) + (e_{pp} - e_{\lambda(p)\lambda(p)})0 = 0.$$

- $a_1 = e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)}$, $a_2 = e_{pp} - e_{\lambda(p)\lambda(p)}$ e $a_3 = e_{pr} - e_{r\lambda(p)}$.

  Temos,

$$[a_2, a_3] = [e_{pp} - e_{\lambda(p)\lambda(p)}, e_{pr} - e_{r\lambda(p)}] = e_{pr} - e_{r\lambda(p)};$$

$$[a_1, a_3] = [e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)}, e_{pr} - e_{r\lambda(p)}] = 0;$$

$$[a_1, a_2] = [e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)}, e_{pp} - e_{\lambda(p)\lambda(p)}] = -e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)}.$$

  Logo,

$$(e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)})(e_{pr} - e_{r\lambda(p)}) - (e_{pp} - e_{\lambda(p)\lambda(p)})0 + (e_{pr} - e_{r\lambda(p)})(-e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)}) = 0.$$

Ainda temos mais três casos a serem considerados, a saber:

$$a_1 = e_{pp} - e_{\lambda(p)\lambda(p)}, a_2 = e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)} \text{ e } a_3 = e_{pr} - e_{r\lambda(p)};$$

$$a_1 = e_{pr} - e_{r\lambda(p)}, a_2 = e_{pp} - e_{\lambda(p)\lambda(p)} \text{ e } a_3 = e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)};$$

$$a_1 = e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)}, a_2 = e_{pr} - e_{r\lambda(p)} \text{ e } a_3 = e_{pp} - e_{\lambda(p)\lambda(p)}.$$

Esses casos seguem de maneira análoga aos três casos anteriores. Portanto, o polinômio *(i)* é uma $\hat{\lambda}$-identidade.

Para as outras $\hat{\lambda}$-identidades da proposição, daremos uma ideia da demonstração. Como estamos considerando o poset $P$ possuindo cadeias de comprimento no máximo 3, para cada cadeia $p < r < \lambda(p)$ em $P$, os polinômios de *(ii)* a *(vi)* na Proposição 5.3 se anulam quando substituímos suas variáveis por elementos de $\mathbb{B}$ que possuem $p, r$ e $\lambda(p)$ como índices [10, Proposição 5.1]. Se substituirmos nestes polinômios elementos de $\mathbb{B}$ que vêm de cadeias diferentes em $P$, os polinômios também se anulam, pois o produto de elementos de $\mathbb{B}$ que vem de cadeias diferentes é igual a zero. Como $P$ é conexo, vamos ter em $\mathbb{B}$ elementos da forma $e_{pq} \pm e_{\lambda(q)\lambda(p)}$, onde $p < q$, podendo ser, ou uma cadeia de comprimento 2 em $P$ ou $p$ um elemento mínimo e $q$ um elemento máximo de cadeias com

3 elementos. Para estes elementos, temos que $[e_{pq} \pm e_{\lambda(q)\lambda(p)}, b_1]$ e $[b_2, e_{pq} \pm e_{\lambda(q)\lambda(p)}]$ são iguais a zero ou são múltiplos de $e_{pq} \pm e_{\lambda(q)\lambda(p)}$ para todos $b_1, b_2 \in \mathbb{B}$. Como $[b_1, b_2] \in \{\pm e_{pq} \pm e_{\lambda(q)\lambda(p)}, \pm e_{pr} \pm e_{r\lambda(p)}, \pm 2e_{p\lambda(p)}\}$, obtemos que $(e_{pq} \pm e_{\lambda(q)\lambda(p)})[b_1, b_2] = [b_1, b_2](e_{pq} \pm e_{\lambda(q)\lambda(p)}) = 0$ para todos $b_1, b_2 \in \mathbb{B}$ e, assim, os polinômios de $(ii)$ a $(iv)$ na Proposição 5.3 se anulam em $I(P,F)$.

□

Vale observamos aqui que o fato de $P$ ser do tipo dois é essencial para que esses polinômios sejam $\hat{\lambda}$-identidades. Se $P$ for do tipo um, os polinômios *(i)*, *(ii)*, *(iii)*, *(iv)* e *(vi)* não são $\hat{\lambda}$-identidades em $I(P,F)$, somente *(v)* o será.

Lembremos que, dado $f = f(y_1, \ldots, y_s, z_1, \ldots, z_t) \in F\langle Y, Z\rangle$, como consequência do Teorema de Poincaré - Birkhoff - Witt (Teorema 2.4), o polinômio $f$ pode ser escrito como uma combinação linear de polinômios do tipo

$$y_1^{\alpha_1} \cdots y_s^{\alpha_s} z_1^{\beta_1} \cdots z_t^{\beta_t} u_1^{\gamma_1} \cdots u_k^{\gamma_k}$$

que formam uma base para $F\langle Y, Z\rangle$, onde $u_i$ são comutadores de grau maior ou igual a 2 nas variáveis $y_i$ e $z_i$ e $u_1 < u_2 < \ldots$. As constantes $\alpha_i$, $\beta_i$ e $\gamma_i$ são inteiros não negativos.

Lembremos também que o polinômio $f$ é dito ser $Y$-próprio se $\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0$ em toda parcela da combinação linear. Denotemos por $B$ a subálgebra de $F\langle Y, Z\rangle$ gerada por todos os polinômios $Y$-próprios. Consideremos o conjunto $\Gamma_{m,n} = P_{m,n} \cap B$, com $m, n \geq 0$ o espaço de todos os polinômios multilineares $Y$-próprios nas variáveis $y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n$ na álgebra livre $F\langle Y, Z\rangle$.

Denotemos por $I$ o $T(\hat{\lambda})$-ideal gerado pelas identidades da Proposição 5.3 e por $\Gamma_{m,n}(I)$ o subespaço dos polinômios multilineares $Y$-próprios nas variáveis $y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n$ da álgebra relativamente livre $\dfrac{F\langle Y, Z\rangle}{I}$.

**Lema 5.4.** *O polinômio $[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6]$ é um elemento de $I$.*

*Demonstração.* Veja o Lema 5.2 de [10]. □

Usando o Lema 5.4 juntamente com a demonstração do Teorema 2.28, obtemos que um conjunto de geradores do espaço $\Gamma_{m,n}(I)$ é dado pelos polinômios $Y$-próprios

$$z_{i_1} \cdots z_{i_l} [x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}][x_{k_1}, \ldots, x_{k_t}]$$

onde $l, s, t \geq 0$, $s \neq 1$, $t \neq 1$, $z_{i_1} < \cdots < z_{i_l}$, $x_{j_1} > x_{j_2} < \cdots < x_{j_s}$ e $x_{k_1} > x_{k_2} < \cdots < x_{k_t}$. Denotaremos esse conjunto por $S_1$ e chamaremos seus elementos de *polinômios $S_1$-standard*. Como tais polinômios estão em correspondência biunívoca com os monômios

$$z_{i_1} \cdots z_{i_l} x_{j_1} \cdots x_{j_s} x_{k_1} \cdots x_{k_t}$$

podemos ordenar $S_1$ com a ordem lexicográfica a partir da ordem $z_1 < z_2 < \cdots < y_1 < y_2 < \cdots$ .

Daqui em diante apresentaremos algumas definiçoes e resultados que utilizaremos para determinar os geradores do $T(\hat{\lambda})$-ideal $Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F))$.

**Definição 5.5.** *Um polinômio $S_1$-standard é dito um polinômio $S_2$-*standard *se $s > 0$ implica que $t = 0$ ou $2$ e, quando $t = 2$ temos que $x_{j_1} > x_{k_1}$ e $x_{j_2} > x_{k_2}$. O conjunto de polinômios $S_2$-standard será denotado por $S_2 \subset S_1$.*

**Proposição 5.6.** *Os polinômios $S_2$-standard geram o espaço vetorial $\Gamma_{m,n}(I)$.*

*Demonstração.* Veja Proposição 5.8 em [10]. □

Notemos que os polinômios $S_2$-standard que contêm somente variáveis $y$, ou são do tipo $[y_{j_1}, \ldots, y_{j_m}]$ ou do tipo $[y_{j_1}, \ldots, y_{j_{m-2}}][y_{k_1}, y_{k_2}]$ onde os índices satisfazem as condiçoes para ser um polinômio $S_2$-standard. Nesse caso, isto é, para $\Gamma_{m,0}(I)$, chamamos esses polinômios de *$S_3$-standard*.

Agora vamos definir os polinômios $S_3$-standard em $\Gamma_{0,n}(I)$.

**Definição 5.7.** *Um polinômio $f \in \Gamma_{0,n}(I)$ é dito $S_3$-standard e pertence a $S_3 \subset S_2$ se $f = z_1 \cdots z_n$ ou $f = [z_{j_1}, z_{j_2}, \ldots, z_{j_n}]$, ou ainda, $f = z_{i_1}[z_{j_1}, \ldots, z_{j_{n-1}}]$ com $i_1 < j_1$. Nos dois últimos casos temos $j_1 > j_2 < j_3 < \cdots$.*

**Proposição 5.8.** *Os polinômios $S_3$-standard geram o espaço vetorial $\Gamma_{0,n}(I)$.*

*Demonstração.* Veja a Proposição 5.12 de [10]. □

Vamos considerar agora o caso $\Gamma_{m,n}(I)$ com $m > 1$ e $n > 0$.

**Definição 5.9.** *Um polinômio $f \in \Gamma_{m,n}(I)$ com $m > 1$ e $n > 0$ é dito $S_3$-*standard *e pertence ao subconjunto $S_3 \subset S_2$ se é de um dos seguintes tipos:*

*(a)* $[x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_d}]$;

*(b)* $z_i[x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{d-1}}]$ *onde* $z_i < x_{j_1}$;

*(c)* $[x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{d-2}}][y_{k_1}, z_1]$.

Nos polinômios acima, as variáveis nos colchetes de grau maior que 2 satisfazem $x_{j_1} > x_{j_2} < x_{j_3} < \cdots$ e em $(c)$ temos $x_{j_1} > y_{k_1}$ e $x_{j_2} > z_1$.

**Proposição 5.10.** *O espaço vetorial* $\Gamma_{m,n}(I)$ *com* $m > 1$ *e* $n > 0$ *é gerado pelos polinômios* $S_3$*-standard.*

*Demonstração.* Veja Proposição 5.17 em [10]. □

Finalmente, consideremos o espaço vetorial $\Gamma_{1,n}(I)$ dos polinômios $Y$-próprios que contêm somente uma única variável simétrica $y$. Para facilitar as contas nesse caso, vamos tomar um caminho diferente. Usando recursivamente a identidade de Jacobi, podemos ver que todo polinômio $Y$-próprio multilinear em $\Gamma_{1,n}(I)$ pode ser escrito como uma combinação linear de polinômios do tipo

$$z_{i_1} \cdots z_{i_l}[y, z_j]z_{k_1} \cdots z_{k_s}$$

com $l, s \geq 0$. Chamaremos tais geradores de polinômios $T_1$-*standard* e denotaremos por $T_1$ o conjunto formado por eles.

**Definição 5.11.** *Um polinômio* $T_1$*-standard é chamado* $T_2$-standard *se é de um dos seguintes tipos:*

*(a)* $z_1 \cdots \widehat{z_j} \cdots z_n[y, z_j]$, $j = 1, 2, \ldots, n$;

*(b)* $[y, z_j]z_1 \cdots \widehat{z_j} \cdots z_n$, $j = 1, 2, \ldots, n$;

*(c)* $z_1 \cdots \widehat{z_j} \cdots z_{n-1}[y, z_j]z_n$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$;

*(d)* $z_1 \cdots \widehat{z_i} \cdots \widehat{z_j} \cdots z_n z_i[y, z_j]$, $1 \leq i < j \leq n-1$.

Nessa definição, o "chapéu"sobre a variável significa que a correspondente variável é retirada da expressão. Denotamos por $T_2 \subset T_1$ o subconjunto desses polinômios.

**Proposição 5.12.** *Os polinômios* $T_2$*-standard geram o espaço vetorial* $\Gamma_{1,n}(I)$.

*Demonstração.* Veja a Proposição 5.20 em [10]. □

Antes do resultado final acerca dos geradores de $Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F))$, precisamos provar alguns lemas. No Teorema 4.4, provamos que $D \cong \dfrac{F\langle Y,Z\rangle}{Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F))}$ e, usando esse isomorfismo, calculamos os seguintes colchetes nas matrizes genéricas

$$
\begin{aligned}
[[z_{i_1}],[z_{i_2}]] &= \left[\sum_{p\in\mathbf{m}} z_{pp}^{i_1}(e_{pp}-e_{\lambda(p)\lambda(p)}) + \sum_{p<r} z_{pr}^{i_1}(e_{pr}-e_{r\lambda(p)}) + \sum_{\substack{(p,q)\in\bar{\mathcal{C}}\\ q\neq\lambda(p)}} z_{pq}^{i_1}(e_{pq}-e_{\lambda(q)\lambda(p)}),\right.\\
&\qquad \left.\sum_{p\in\mathbf{m}} z_{pp}^{i_2}(e_{pp}-e_{\lambda(p)\lambda(p)}) + \sum_{p<r} z_{pr}^{i_2}(e_{pr}-e_{r\lambda(p)}) + \sum_{\substack{(p,q)\in\bar{\mathcal{C}}\\ q\neq\lambda(p)}} z_{pq}^{i_2}(e_{pq}-e_{\lambda(q)\lambda(p)})\right]\\
&= \left[\sum_{p\in\mathbf{m}} z_{pp}^{i_1}(e_{pp}-e_{\lambda(p)\lambda(p)}), \sum_{p<r} z_{pr}^{i_2}(e_{pr}-e_{r\lambda(p)})\right]\\
&+ \left[\sum_{p\in\mathbf{m}} z_{pp}^{i_1}(e_{pp}-e_{\lambda(p)\lambda(p)}), \sum_{\substack{(p,q)\in\bar{\mathcal{C}}\\ q\neq\lambda(p)}} z_{pq}^{i_2}(e_{pq}-e_{\lambda(q)\lambda(p)})\right]\\
&+ \left[\sum_{p<r} z_{pr}^{i_1}(e_{pr}-e_{r\lambda(p)}), \sum_{p\in\mathbf{m}} z_{pp}^{i_2}(e_{pp}-e_{\lambda(p)\lambda(p)})\right]\\
&+ \left[\sum_{\substack{(p,q)\in\bar{\mathcal{C}}\\ q\neq\lambda(p)}} z_{pq}^{i_1}(e_{pq}-e_{\lambda(q)\lambda(p)}), \sum_{p\in\mathbf{m}} z_{pp}^{i_2}(e_{pp}-e_{\lambda(p)\lambda(p)})\right]\\
&= \sum_{p<r} z_{pp}^{i_1}z_{pr}^{i_2}(e_{pr}-e_{r\lambda(p)}) + \sum_{\substack{(p,q)\in\bar{\mathcal{C}}\\ q\neq\lambda(p)}} (z_{pp}^{i_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_1})z_{pq}^{i_2}(e_{pq}-e_{\lambda(q)\lambda(p)})\\
&+ \sum_{p<r} z_{pr}^{i_1}z_{pp}^{i_2}(e_{r\lambda(p)}-e_{pr}) + \sum_{\substack{(p,q)\in\bar{\mathcal{C}}\\ q\neq\lambda(p)}} z_{pq}^{i_1}(z_{pp}^{i_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_2})(-e_{pq}+e_{\lambda(q)\lambda(p)})\\
&= \sum_{p<r}(z_{pp}^{i_1}z_{pr}^{i_2}-z_{pr}^{i_1}z_{pp}^{i_2})(e_{pr}-e_{r\lambda(p)})\\
&+ \sum_{\substack{(p,q)\in\bar{\mathcal{C}}\\ q\neq\lambda(p)}} ((z_{pp}^{i_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_1})z_{pq}^{i_2} - z_{pq}^{i_1}(z_{pp}^{i_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_2}))(e_{pq}-e_{\lambda(q)\lambda(p)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[[y_{i_1}],[z_{i_2}]] &= \Bigg[\sum_{p\in\mathbf{m}} y_{pp}^{i_1}(e_{pp}+e_{\lambda(p)\lambda(p)}) + \sum_{p<r} y_{pr}^{i_1}(e_{pr}+e_{r\lambda(p)}) + \sum_{\substack{(p,q)\in\bar{\mathcal{C}}\\ q\neq\lambda(p)}} y_{pq}^{i_1}(e_{pq}+e_{\lambda(q)\lambda(p)}) \\
&+ \sum_{p<\lambda(p)} y_{p\lambda(p)}^{i_1} e_{p\lambda(p)} + \sum_{r\in\mathcal{I}} y_{rr}^{i_1} e_{rr}, \sum_{p\in\mathbf{m}} z_{pp}^{i_2}(e_{pp}-e_{\lambda(p)\lambda(p)}) \\
&+ \sum_{p<r} z_{pr}^{i_2}(e_{pr}-e_{r\lambda(p)}) + \sum_{\substack{(p,q)\in\bar{\mathcal{C}}\\ q\neq\lambda(p)}} z_{pq}^{i_2}(e_{pq}-e_{\lambda(q)\lambda(p)})\Bigg] \\
&= \left[\sum_{p\in\mathbf{m}} y_{pp}^{i_1}(e_{pp}+e_{\lambda(p)\lambda(p)}), \sum_{p<r} z_{pr}^{i_2}(e_{pr}-e_{r\lambda(p)})\right] \\
&+ \left[\sum_{p\in\mathbf{m}} y_{pp}^{i_1}(e_{pp}+e_{\lambda(p)\lambda(p)}), \sum_{\substack{(p,q)\in\bar{\mathcal{C}}\\ q\neq\lambda(p)}} z_{pq}^{i_2}(e_{pq}-e_{\lambda(q)\lambda(p)})\right] \\
&+ \left[\sum_{p<r} y_{pr}^{i_1}(e_{pr}+e_{r\lambda(p)}), \sum_{p\in\mathbf{m}} z_{pp}^{i_2}(e_{pp}-e_{\lambda(p)\lambda(p)})\right] \\
&+ \left[\sum_{p<r} y_{pr}^{i_1}(e_{pr}+e_{r\lambda(p)}), \sum_{p<r} z_{pr}^{i_2}(e_{pr}-e_{r\lambda(p)})\right] \\
&+ \left[\sum_{\substack{(p,q)\in\bar{\mathcal{C}}\\ q\neq\lambda(p)}} y_{pq}^{i_1}(e_{pq}+e_{\lambda(q)\lambda(p)}), \sum_{p\in\mathbf{m}} z_{pp}^{i_2}(e_{pp}-e_{\lambda(p)\lambda(p)})\right] \\
&+ \left[\sum_{p<\lambda(p)} y_{p\lambda(p)}^{i_1} e_{p\lambda(p)}, \sum_{p\in\mathbf{m}} z_{pp}^{i_2}(e_{pp}-e_{\lambda(p)\lambda(p)})\right] \\
&+ \left[\sum_{r\in\mathcal{I}} y_{rr}^{i_1} e_{rr}, \sum_{p<r} z_{pr}^{i_2}(e_{pr}-e_{r\lambda(p)}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{p<r} y_{pp}^{i_1} z_{pr}^{i_2}(e_{pr} + e_{r\lambda(p)}) + \sum_{\substack{(p,q)\in\bar{\mathcal{C}}\\ q\neq\lambda(p)}} (y_{pp}^{i_1} - y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_1}) z_{pq}^{i_2}(e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)})\\
&+ \sum_{p<r} y_{pr}^{i_1} z_{pp}^{i_2}(-e_{pr} - e_{r\lambda(p)}) - 2\sum_{p<r} y_{pr}^{i_1} z_{pr}^{i_2} e_{p\lambda(p)}\\
&- \sum_{\substack{(p,q)\in\bar{\mathcal{C}}\\ q\neq\lambda(p)}} y_{pq}^{i_1}(z_{pp}^{i_2} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_2})(e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)}) - 2\sum_{p<\lambda(p)} y_{p\lambda(p)}^{i_1} z_{pp}^{i_2} e_{p\lambda(p)}\\
&+ \sum_{p<r} y_{rr}^{i_1} z_{pr}^{i_2}(-e_{pr} - e_{r\lambda(p)})\\
&= \sum_{p<r}((y_{pp}^{i_1} - y_{rr}^{i_1}) z_{pr}^{i_2} - y_{pr}^{i_1} z_{pp}^{i_2})(e_{pr} + e_{r\lambda(p)})\\
&+ \sum_{\substack{(p,q)\in\bar{\mathcal{C}}\\ q\neq\lambda(p)}} ((y_{pp}^{i_1} - y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_1}) z_{pq}^{i_2} - y_{pq}^{i_1}(z_{pp}^{i_2} + z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_2}))(e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)})\\
&- 2\left(\sum_{p<r}(y_{pr}^{i_1} z_{pr}^{i_2} + y_{p\lambda(p)}^{i_1} z_{pp}^{i_2}) e_{p\lambda(p)} + \sum_{p\not<\mathcal{I}} y_{p\lambda(p)}^{i_1} z_{pp}^{i_2} e_{p\lambda(p)}\right)
\end{aligned}
$$

Na última parcela acima, $p \not< \mathcal{I}$ quer dizer que não existe $r \in \mathcal{I}$ com o qual o elemento minimal $p$ seja comparável.

$$
\begin{aligned}
[[y_{i_1}], [y_{i_2}]] &= \Bigg[\sum_{p\in\mathbf{m}} y_{pp}^{i_1}(e_{pp} + e_{\lambda(p)\lambda(p)}) + \sum_{p<r} y_{pr}^{i_1}(e_{pr} + e_{r\lambda(p)}) + \sum_{\substack{(p,q)\in\bar{\mathcal{C}}\\ q\neq\lambda(p)}} y_{pq}^{i_1}(e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)})\\
&+ \sum_{p<\lambda(p)} y_{p\lambda(p)}^{i_1} e_{p\lambda(p)} + \sum_{r\in\mathcal{I}} y_{rr}^{i_1} e_{rr}, \sum_{p\in\mathbf{m}} y_{pp}^{i_2}(e_{pp} + e_{\lambda(p)\lambda(p)}) + \sum_{p<r} y_{pr}^{i_2}(e_{pr} + e_{r\lambda(p)})\\
&+ \sum_{\substack{(p,q)\in\bar{\mathcal{C}}\\ q\neq\lambda(p)}} y_{pq}^{i_2}(e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)}) + \sum_{p<\lambda(p)} y_{p\lambda(p)}^{i_2} e_{p\lambda(p)} + \sum_{r\in\mathcal{I}} y_{rr}^{i_2} e_{rr}\Bigg]\\
&= \left[\sum_{p\in\mathbf{m}} y_{pp}^{i_1}(e_{pp} + e_{\lambda(p)\lambda(p)}), \sum_{p<r} y_{pr}^{i_2}(e_{pr} + e_{r\lambda(p)})\right]\\
&+ \left[\sum_{p\in\mathbf{m}} y_{pp}^{i_1}(e_{pp} + e_{\lambda(p)\lambda(p)}), \sum_{\substack{(p,q)\in\bar{\mathcal{C}}\\ q\neq\lambda(p)}} y_{pq}^{i_2}(e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)})\right]\\
&+ \left[\sum_{p<r} y_{pr}^{i_1}(e_{pr} + e_{r\lambda(p)}), \sum_{p\in\mathbf{m}} y_{pp}^{i_2}(e_{pp} + e_{\lambda(p)\lambda(p)})\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left[\sum_{p<r} y_{pr}^{i_1}(e_{pr}+e_{r\lambda(p)}), \sum_{r\in\mathcal{I}} y_{rr}^{i_2}e_{rr}\right] \\
&+ \left[\sum_{\substack{(p,q)\in\bar{\mathcal{C}}\\ q\neq\lambda(p)}} y_{pq}^{i_1}(e_{pq}+e_{\lambda(q)\lambda(p)}), \sum_{p\in\mathbf{m}} y_{pp}^{i_2}(e_{pp}+e_{\lambda(p)\lambda(p)})\right] \\
&+ \left[\sum_{r\in\mathcal{I}} y_{rr}^{i_1}e_{rr}, \sum_{p<r} y_{pr}^{i_2}(e_{pr}+e_{r\lambda(p)})\right] \\
&= \sum_{p<r} y_{pp}^{i_1}y_{pr}^{i_2}(e_{pr}-e_{r\lambda(p)}) + \sum_{\substack{(p,q)\in\bar{\mathcal{C}}\\ q\neq\lambda(p)}} (y_{pp}^{i_1}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_1})y_{pq}^{i_2}(e_{pq}-e_{\lambda(q)\lambda(p)}) \\
&+ \sum_{p<r} y_{pr}^{i_1}y_{pp}^{i_2}(-e_{pr}+e_{r\lambda(p)}) + \sum_{p<r} y_{pr}^{i_1}y_{rr}^{i_2}(e_{pr}-e_{r\lambda(p)}) \\
&+ \sum_{\substack{(p,q)\in\bar{\mathcal{C}}\\ q\neq\lambda(p)}} y_{pq}^{i_1}(y_{pp}^{i_2}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_2})(-e_{pq}+e_{\lambda(q)\lambda(p)}) + \sum_{p<r} y_{rr}^{i_1}y_{pr}^{i_2}(-e_{pr}+e_{r\lambda(p)}) \\
&= \sum_{p<r}((y_{pp}^{i_1}-y_{rr}^{i_1})y_{pr}^{i_2}-y_{pr}^{i_1}(y_{pp}^{i_2}-y_{rr}^{i_2}))(e_{pr}-e_{r\lambda(p)}) \\
&+ \sum_{\substack{(p,q)\in\bar{\mathcal{C}}\\ q\neq\lambda(p)}} ((y_{pp}^{i_1}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_1})y_{pq}^{i_2}-y_{pq}^{i_1}(y_{pp}^{i_2}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_2}))(e_{pq}-e_{\lambda(q)\lambda(p)}).
\end{aligned}
$$

**Lema 5.13.** *Os polinômios $S_3$-standard em $\Gamma_{m,0}$ são linearmente independentes módulo as $\hat{\lambda}$-identidades de $I(P,F)$.*

*Demonstração.* Primeiramente, lembremos que os polinômios $S_3$-standard em $\Gamma_{m,0}$ são da forma $[y_{j_1},\ldots,y_{j_m}]$ ou $[y_{j_1},\ldots,y_{j_{m-2}}][y_{k_1},y_{k_2}]$ com $y_{j_1}>y_{j_2}<y_{j_3}<\cdots$ na primeira forma e mais $y_{j_1}>y_{k_1}$ e $y_{j_2}>y_{k_2}$ na segunda forma. Como $D\cong\dfrac{F\langle Y,Z\rangle}{Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F))}$, faremos os cálculos em $D$ e, para simplificar, consideraremos $y_i$ como sendo elementos de $D$ sem usar os colchetes. Suponhamos que $f$ seja uma combinação linear de elementos $S_3$-standard que se anula quando calculada nas matrizes genéricas $y_i$. Consideremos o primeiro comutador $v=[y_{i_1},y_{i_2},\ldots,y_{i_k}]$. Quando $k$ é par, temos que

$$
\begin{aligned}
v &= \sum_{p<q}((y_{pp}^{i_1}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_1})y_{pq}^{i_2}-y_{pq}^{i_1}(y_{pp}^{i_2}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_2}))\prod_{t=3}^{k}(y_{pp}^{i_t}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_t})(e_{pq}-e_{\lambda(q)\lambda(p)}) \\
&+ \sum_{r}((y_{pp}^{i_1}-y_{rr}^{i_1})y_{pr}^{i_2}-y_{pr}^{i_1}(y_{pp}^{i_2}-y_{rr}^{i_2}))\prod_{t=3}^{k}(y_{rr}^{i_t}-y_{pp}^{i_t})(e_{pr}-e_{r\lambda(p)})
\end{aligned}
$$

e quando $k$ é ímpar

$$
\begin{aligned}
v &= -\sum_{p<q}((y_{pp}^{i_1} - y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_1})y_{pq}^{i_2} - y_{pq}^{i_1}(y_{pp}^{i_2} - y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_2}))\prod_{t=3}^{k}(y_{pp}^{i_t} - y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_t})(e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)}) \\
&+\sum_{r}((y_{pp}^{i_1} - y_{rr}^{i_1})y_{pr}^{i_2} - y_{pr}^{i_1}(y_{pp}^{i_2} - y_{rr}^{i_2}))\prod_{t=3}^{k-1}(y_{rr}^{i_t} - y_{pp}^{i_t})((y_{rr}^{i_k} - y_{pp}^{i_k})(e_{pr} + e_{r\lambda(p)}) + 2y_{pr}^{i_k}e_{p\lambda(p)}).
\end{aligned}
$$

Temos assumido que $P$ possui pelo menos uma cadeia de comprimento 3 e do tipo 2, assim podemos escolher em $P$ um elemento $r_1$ tal que $p_1 < r_1 < \lambda(p_1)$ para um único $p_1 \in P$. Observemos que, para este $r_1$, em ambos os casos aparecem coeficientes não nulos em $e_{p_1r_1}$. Se temos um produto de dois comutadores, temos um coeficiente não nulo em $e_{p_1\lambda(p_1)}$. Portanto podemos trabalhar com cada caso separadamente.

Se $v$ é um comutador $S_3$-standard, podemos associá-lo de maneira única ao coeficiente de $e_{p_1r_1}$, isto é, deste coeficiente podemos determinar as duas primeiras variáveis de $v$ e o restante das variáveis podem ser ordenadas unicamente pelo fato do colchete $v$ ser $S_3$-standard. Portanto, considerando o elemento $r_1 \in P$, temos uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos comutadores $S_3$-standard e os polinômios de $F[y_{p_1p_1}^s, y_{p_1r_1}^s, y_{r_1r_1}^s]$ que são as entradas na posição $(p_1, r_1)$ de comutadores em $D$.

Consideremos a entrada na posição $(p_1, r_1)$ de um comutador em $D$, isto é, o polinômio

$$
((y_{p_1p_1}^{i_1} - y_{r_1r_1}^{i_1})y_{p_1r_1}^{i_2} - y_{p_1r_1}^{i_1}(y_{p_1p_1}^{i_2} - y_{r_1r_1}^{i_2}))\prod_{t=3}^{k}(y_{r_1r_1}^{i_t} - y_{p_1p_1}^{i_t})((y_{r_1r_1}^{i_k} - y_{p_1p_1}^{i_k}), \tag{5.1}
$$

onde temos $i_1 > i_2 < i_3 < \cdots < i_k$. Observemos que, com estes índices, não podemos ter outra sequência dessa com $i_1$ na primeira posição e nem com $i_1$ na segunda posição. Desse modo, os outros polinômios que estão na entrada $(p_1, r_1)$ dos outros possíveis colchetes $[x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}]$ não possuem a variável $y_{p_1r_1}^{i_1}$. Logo, estes polinômios formam um conjunto linearmente independente. Como cada colchete $v$ está associado de maneira única a um polinômio dado em (5.1), segue que o conjunto formado pelos colchetes é linearmente independente.

Trabalhamos com o produto de dois comutadores de um modo semelhante. Vamos escrever

$$
v = \pm\sum_{p<q}\alpha_{pq}(e_{pq} \pm e_{\lambda(q)\lambda(p)}) + \sum_{r}\beta_r(e_{pr} \pm e_{r\lambda(p)}) + \sum_{r}\gamma_r e_{p\lambda(p)}
$$

com $\alpha_{pq}, \beta_r \neq 0$ para todo $p, q, r \in P$ e $\gamma_r$ podendo ser nulo para todo $r \in P$. Se

$w=[y_{j_1},y_{j_2}]$ e o produto $vw$ é $S_3$-standard, obtemos

$$vw=-\sum_r \beta_r((y_{pp}^{j_1}-y_{rr}^{j_1})y_{pr}^{j_2}-y_{pr}^{j_1}(y_{pp}^{j_2}-y_{rr}^{j_2}))e_{p\lambda(p)}.$$

Agora, utilizando os mesmos $p_1$ e $r_1$ que escolhemos anteriormente, vemos que o coeficiente de $e_{p_1\lambda(p_1)}$ é um polinômio de $F[y^s_{p_1p_1},y^s_{p_1r_1},y^s_{r_1r_1}]$ que é um produto de polinômios irredutíveis e o produto $vw$ está associado de maneira única ao polinômio

$$\beta_{r_1}((y_{r_1r_1}^{i_k}-y_{p_1p_1}^{i_k})((y_{p_1p_1}^{j_1}-y_{r_1r_1}^{j_1})y_{p_1r_1}^{j_2}-y_{p_1r_1}^{j_1}(y_{p_1p_1}^{j_2}-y_{r_1r_1}^{j_2})), \tag{5.2}$$

onde

$$\beta_{r_1}=((y_{p_1p_1}^{i_1}-y_{r_1r_1}^{i_1})y_{p_1r_1}^{i_2}-y_{p_1r_1}^{i_1}(y_{p_1p_1}^{i_2}-y_{r_1r_1}^{i_2}))\prod_{t=3}^{k}(y_{r_1r_1}^{i_t}-y_{p_1p_1}^{i_t}),$$

pois dele conseguimos determinar $i_1,i_2,j_1$ e $j_2$.

Sendo assim, para este tipo de produto de dois comutadores, temos uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos produtos de comutadores $S_3$-standard e o conjunto de polinômios em $F[y^s_{p_1p_1},y^s_{p_1r_1},y^s_{r_1r_1}]$ que são entradas na posição $(p_1,\lambda(p_1))$ desse tipo de produto de comutadores em $D$.

Observemos que, no polinômio em (5.2), temos $i_1>i_2<i_3<\cdots<i_k$, $j_1>j_2$, $i_1<j_1$ e $i_2>j_2$. Notemos que o termo $y_{p_1p_1}^{i_1}y_{p_1r_1}^{i_2}\prod_{t=3}^{k}(y_{r_1r_1}^{i_t}-y_{p_1p_1}^{i_t})y_{p_1p_1}^{j_1}y_{r_1r_1}^{j_2}$ faz parte do polinômio em (5.2) e, para que esse termo apareça numa possível combinação linear de outros polinômios nesse formato, devemos ter um produto de colchetes com uma permutação de $i_1$ com $j_1$ ou de $i_2$ com $j_2$, o que não é possível pois $i_1>j_1$ e $i_2>j_2$. Logo, os polinômios em (5.2) formam um conjunto linearmente independente. Novamente, como cada produto $vw$ está em correspondência com um único polinômio dado em (5.2), segue que o conjunto formado pelos produtos $vw$ é um conjunto linearmente independente. Portanto, os polinômios $S_3$-standard em $\Gamma_{m,0}$ formam um conjunto linearmente independente módulo as $\hat{\lambda}$-identidades de $I(P,F)$. $\square$

Nos próximos lemas, onde mostraremos que os polinômios $S_3$-standard em $\Gamma_{0,n}$, os polinômios $S_3$-standard em $\Gamma_{m,n}$ com $m>1$, $n>0$ e os polinômios $T_2$-standard em $\Gamma_{1,n}$ são linearmente independentes módulo as $\hat{\lambda}$-identidades de $I(P,F)$, faremos uso da mesma ideia usada no Lema 5.13, ou seja, associaremos de maneira única cada gerador de um $\Gamma_{m,n}$ citado acima a um polinômio, que é uma entrada de uma matriz em $D$, onde tais polinômios formam um conjunto linearmente independente.

**Lema 5.14.** *Os polinômios $S_3$-standard em $\Gamma_{0,n}$ são linearmente independentes módulo as $\hat{\lambda}$-identidades de $I(P,F)$.*

*Demonstração.* Os polinômios $S_3$-standard em $\Gamma_{0,n}$ são da forma

$$z_1 \cdots z_n,\ [z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_n}] \text{ ou } z_{i_1}[z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_{n-1}}],$$

onde $z_{j_1} > z_{j_2} < z_{j_3} < \cdots$ e $z_{i_1} < z_{j_1}$. Como no lema anterior, faremos os cálculos em $D$. Seja $r_1 \in P$ tal que existe um único $p_1 \in P$ com $p_1 < r_1 < \lambda(p_1)$. Notemos que existe um único produto na forma $z_1 z_2 \cdots z_n$ e ele possui um coeficiente não nulo em $e_{p_1 p_1}$. Consideremos agora $v = [z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_n}]$ um comutador contendo somente variáveis antissimétricas. Desse modo, temos em $D$ que

$$\begin{aligned} v &= (-1)^n \sum_r (z^{i_1}_{pp} z^{i_2}_{pr} - z^{i_1}_{pr} z^{i_2}_{pp}) \prod_{t=3}^{n} z^{i_t}_{pp} (e_{pr} - e_{r\lambda(p)}) \\ &+ (-1)^n \sum_{p<q} ((z^{i_1}_{pp} + z^{i_1}_{\lambda(q)\lambda(q)}) z^{i_2}_{pq} - z^{i_1}_{pq}(z^{i_2}_{pp} + z^{i_2}_{\lambda(q)\lambda(q)})) \prod_{t=3}^{n} (z^{i_t}_{pp} + z^{i_t}_{\lambda(q)\lambda(q)})(e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)}) \end{aligned}$$

Mais ainda, o elemento $w = z_{i_1}[z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_{n-1}}]$ é da seguinte forma em $D$,

$$\begin{aligned} w &= (-1)^{(n-1)} \sum_r z^{i_1}_{pp} (z^{j_1}_{pp} z^{j_2}_{pr} - z^{j_1}_{pr} z^{j_2}_{pp}) \prod_{t=3}^{n-1} z^{j_t}_{pp} e_{pr} + \sum_{p<q} B_{pq} e_{pq} \\ &- (-1)^{(n-1)} \sum_r z^{i_1}_{pr} (z^{j_1}_{pp} z^{j_2}_{pr} - z^{j_1}_{pr} z^{j_2}_{pp}) \prod_{t=3}^{n-1} z^{j_t}_{pp} e_{p\lambda(p)}. \end{aligned}$$

onde $B_{pq}$ é um polinômio não nulo.

Comparando os três casos anteriores, a entrada na posição $(p_1, p_1)$ é não nula somente em $z_1 z_2 \cdots z_n$ e a entrada $(r_1, \lambda(p_1))$ só é não nula em $v$. Como existe somente um único produto $z_1 z_2 \cdots z_n$, olhando para a entrada $(p_1, \lambda(p_1))$ de $w$, podemos trabalhar com estes três casos separadamente.

De maneira análoga ao lema anterior, o comutador $v$ está associado, de maneira única ao polinômio

$$(-1)^n (z^{i_1}_{p_1 p_1} z^{i_2}_{p_1 r_1} - z^{i_1}_{p_1 r_1} z^{i_2}_{p_1 p_1}) \prod_{t=3}^{n} z^{i_t}_{p_1 p_1},$$

que é o coeficiente de $e_{r_1 \lambda(p_1)}$, pois dele podemos determinar de maneira única $i_1, i_2$ e, pelo fato de $v$ ser $S_3$-standard, determinamos a ordem das variáveis restantes em $v$. Analogamente ao que foi feito no lema anterior, podemos mostrar que esses polinômios formam um conjunto linearmente independente.

Para o polinômio $w$, do coeficiente de $e_{p_1r_1}$ podemos identificar $j_1$ e $j_2$ pois estão nos únicos $y^j_{p_1r_1}$ que aparecem neste coeficiente. Conhecendo $j_1$ e $j_2$, podemos identificar $i_1$ no coeficiente de $e_{p_1\lambda(p_1)}$ e assim, temos uma correspondência biunívoca de $w$ com o polinômio

$$-(-1)^{n-1} z^{i_1}_{p_1r_1}(z^{j_1}_{p_1p_1} z^{j_2}_{p_1r_1} - z^{j_1}_{p_1r_1} z^{j_2}_{p_1p_1}) \prod_{t=3}^{n-1} z^{i_t}_{p_1p_1} \tag{5.3}$$

que é o coeficiente de $e_{p_1\lambda(p_1)}$ em $w$.

Observemos que, nas outras possibilidades de $z_{l_1}[z_{k_1}, z_{k_2}, \dots, z_{k_{n-1}}]$ não aparecerá o polinômio em (5.3). Desse modo, o polinômio em (5.3) não pode ser combinação linear de outros possíveis polinômios que aparecem na entrada $(p_1, \lambda(p_1))$ de outros produtos $z_{l_1}[z_{k_1}, z_{k_2}, \dots, z_{k_{n-1}}]$. Logo o conjunto formado por estes polinômios é linearmente independente. $\square$

**Lema 5.15.** *Os polinômios $S_3$-standard em $\Gamma_{m,n}$ com $m > 1$ e $n > 0$ são linearmente independentes módulo as $\hat{\lambda}$-identidades de $I(P,F)$.*

*Demonstração.* Primeiramente vamos lembrar quais são os tipos de polinômios $S_3$-standard em $\Gamma_{m,n}$ com $m > 1$ e $n > 0$. São eles,

$$[x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_d}],\ z_i[x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{d-1}}] \text{ onde } z_i < x_{j_1} \text{ e } [x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{d-2}}][y_{k_1}, z_1].$$

Nos comutadores acima temos que $x_{j_1} > x_{j_2} < x_{j_3} < \cdots$ e no terceiro comutador temos $x_{j_1} > y_{k_1}$ e $x_{j_2} > z_1$. Os cálculos são bastante semelhantes aos que foram feitos nos dois lemas anteriores, mas aqui temos alguns casos a considerar. Esses polinômios são, ou um simples comutador $v$, ou o produto $vw$ de dois comutadores ou ainda um produto $z_hv$ de uma variável antissimétrica e um comutador. Notemos que para $p_1 < r_1 < \lambda(p_1)$ em $P$, a entrada $e_{r_1\lambda(p_1)}$ do cálculo do comutador $v$ em $D$ é não nula e essa entrada é nula nos outros polinômios $S_3$-standard. Desse modo podemos trabalhar separadamente com o caso do comutador simples $v$.

Claramente $v$ é, ou da forma $v = [z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_n}, y_{j_1}, \dots, y_{j_m}]$ ou da forma

$v=[y_{j_1},z_{i_1},\ldots,z_{i_n},y_{j_2},\ldots,y_{j_m}]$. Calculando em $D$ o primeiro caso, para $m$ par, temos

$$\begin{aligned} v &= (-1)^n\sum_r(z_{pp}^{i_1}z_{pr}^{i_2}-z_{pr}^{i_1}z_{pp}^{i_2})\prod_{t=3}^{n}z_{pp}^{i_t}\prod_{s=1}^{m}(y_{rr}^{j_s}-y_{pp}^{j_s})(e_{pr}-e_{r\lambda(p)})\\ &+ (-1)^{n+m}\sum_{p<q}((z_{pp}^{i_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_1})z_{pq}^{i_2}-z_{pq}^{i_1}(z_{pp}^{i_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_2}))\prod_{t=3}^{n}(z_{pp}^{i_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_t})\\ &\prod_{s=1}^{m}(y_{pp}^{j_s}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_s})(e_{pq}-e_{\lambda(q)\lambda(p)})\end{aligned}$$

e, para $m$ ímpar,

$$\begin{aligned} v &= (-1)^n\sum_r(z_{pp}^{i_1}z_{pr}^{i_2}-z_{pr}^{i_1}z_{pp}^{i_2})\prod_{t=3}^{n}z_{pp}^{i_t}\prod_{s=1}^{m}(y_{rr}^{j_s}-y_{pp}^{j_s})(e_{pr}+e_{r\lambda(p)})\\ &+ (-1)^{n+m}\sum_{p<q}((z_{pp}^{i_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_1})z_{pq}^{i_2}-z_{pq}^{i_1}(z_{pp}^{i_2}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_2}))\prod_{t=3}^{n}(z_{pp}^{i_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_t})\\ &\prod_{s=1}^{m}(y_{pp}^{j_s}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_s})(e_{pq}+e_{\lambda(q)\lambda(p)})\\ &+ 2(-1)^n\sum_r(z_{pp}^{i_1}z_{pr}^{i_2}-z_{pr}^{i_1}z_{pp}^{i_2})\prod_{t=3}^{n}z_{pp}^{i_t}\prod_{s=1}^{m-1}(y_{rr}^{j_s}-y_{pp}^{j_s})y_{pr}^{j_m}e_{p\lambda(p)}.\end{aligned}$$

Analogamente, no segundo caso, quando $m$ é par, obtemos

$$\begin{aligned} v &= (-1)^{(n-1)}\sum_r((y_{pp}^{j_1}-y_{rr}^{j_1})z_{pr}^{i_1}-y_{pr}^{j_1}z_{pp}^{i_1})\prod_{t=2}^{n}z_{pp}^{i_t}\prod_{s=2}^{m}(y_{rr}^{j_s}-y_{pp}^{j_s})(e_{pr}-e_{r\lambda(p)})\\ &+ (-1)^{(n+m-2)}\sum_{p<q}((y_{pp}^{j_1}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1})z_{pq}^{i_1}-y_{pq}^{j_1}(z_{pp}^{i_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_1}))\prod_{t=2}^{n}(z_{pp}^{i_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_t})\\ &\prod_{s=2}^{n}(y_{pp}^{j_s}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_s})(e_{pq}-e_{\lambda(q)\lambda(p)})\end{aligned}$$

e, se $m$ é ímpar, temos

$$\begin{aligned} v &= (-1)^{(n-1)}\sum_r((y_{pp}^{j_1}-y_{rr}^{j_1})z_{pr}^{i_1}-y_{pr}^{j_1}z_{pp}^{i_1})\prod_{t=2}^{n}z_{pp}^{i_t}\prod_{s=2}^{m}(y_{rr}^{j_s}-y_{pp}^{j_s})(e_{pr}+e_{r\lambda(p)})\\ &+ (-1)^{(n+m-2)}\sum_{p<q}((y_{pp}^{j_1}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_1})z_{pq}^{i_1}-y_{pq}^{j_1}(z_{pp}^{i_1}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_1}))\prod_{t=2}^{n}(z_{pp}^{i_t}+z_{\lambda(q)\lambda(q)}^{i_t})\\ &\prod_{s=2}^{n}(y_{pp}^{j_s}-y_{\lambda(q)\lambda(q)}^{j_s})(e_{pq}+e_{\lambda(q)\lambda(p)})\\ &+ (-1)^{(n-1)}2\sum_r((y_{pp}^{j_1}-y_{rr}^{j_1})z_{pr}^{i_1}-y_{pr}^{j_1}z_{pp}^{i_1})\prod_{t=2}^{n}z_{pp}^{i_t}\prod_{s=2}^{m-1}(y_{rr}^{j_s}-y_{pp}^{j_s})y_{pr}^{j_m}e_{p\lambda(p)}.\end{aligned}$$

Quando $v$ é da primeira forma, independentemente de $m$ ser par ou ímpar, temos como coeficiente de $e_{r_1\lambda(p_1)}$ o polinômio

$$(-1)^n(z^{i_1}_{p_1p_1}z^{i_2}_{p_1r_1} - z^{i_1}_{p_1r_1}z^{i_2}_{p_1p_1})\prod_{t=3}^{n} z^{i_t}_{p_1p_1}\prod_{s=1}^{m}(y^{j_s}_{r_1r_1} - y^{j_s}_{p_1p_1}). \tag{5.4}$$

Nesse polinômio, as únicas variáveis na forma $z^{j}_{p_1r_1}$ são $z^{i_1}_{p_1r_1}$ e $z^{i_2}_{p_1r_1}$, ou seja, podemos identificar os valores de $i_1$ e $i_2$ neste polinômio. Como $v$ é totalmente determinado por $i_1$ e $i_2$, segue que $v$ está associado de maneira única ao polinômio em (5.4).

Agora, quando $v$ é da segunda forma, independentemente da paridade de $m$, o coeficiente de $e_{r_1\lambda(p_1)}$ é o polinômio

$$(-1)^{(n-1)}((y^{j_1}_{p_1p_1} - y^{j_1}_{r_1r_1})z^{i_1}_{p_1r_1} - y^{j_1}_{p_1r_1}z^{i_1}_{p_1p_1})\prod_{t=2}^{n} z^{i_t}_{p_1p_1}\prod_{s=2}^{m}(y^{j_s}_{r_1r_1} - y^{j_s}_{p_1p_1}). \tag{5.5}$$

Nesse polinômio identificamos $i_1$ e $j_1$ nas únicas variáveis $z^{i_1}_{p_1r_1}$ e $y^{j_1}_{p_1r_1}$, respectivamente, que aparecem no polinômio. Como $v$ é unicamente determinado por $i_1$ e $j_1$, temos uma correspondência biunívoca entre $v$ e o polinônomio em (5.5).

De maneira análoga ao que fizemos no Lema 5.13 para o colchete $v$, segue que os polinômios em (5.4) e (5.5) formam um conjunto linearmente independente.

Para o produto de dois comutadores $vw$, as únicas entradas não nulas são as posiçoes de $e_{p\lambda(p)}$. Como o produto $z_hv$ possui coeficientes não nulos nas entradas $e_{pr}$, podemos considerar cada um desses casos separadamente.

Vamos começar com o produto $z_h[x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_d}] = z_hv$. Aqui $v$ é de um dos quatro tipos de comutadores citados anteriormente ou $v$ é um comutador que só possui variáveis $y$.

Sejam $v = \sum_r \alpha_r(e_{pr} - e_{r\lambda(p)}) + \sum_{p<q}\beta_{pq}(e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)})$ um comutador do primeiro tipo e $v' = \sum_r \gamma_r(e_{pr} - e_{r\lambda(p)}) + \sum_{p<q}\delta_{pq}(e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)})$ um comutador do terceiro tipo com $\alpha_r$, $\gamma_r$, $\beta_{pq}$, $\delta_{pq}$ não nulos. Então,

$$z_hv = \sum_r z^h_{pp}\alpha_r e_{pr} + \sum_{p<q}\beta'_{pq}e_{pq} - \sum_r z^h_{pr}\alpha_r e_{p\lambda(p)}$$

$$z_hv' = \sum_r z^h_{pp}\gamma_r e_{pr} + \sum_{p<q}\delta'_{pq}e_{pq} - \sum_r z^h_{pr}\gamma_r e_{p\lambda(p)}$$

onde $\beta'_{pq}$ e $\delta'_{pq}$ são polinômios não nulos. Assim, em $z_hv$, o coeficiente de $e_{p_1r_1}$ é o polinômio

$$z^h_{p_1p_1}(z^{i_1}_{p_1p_1}z^{i_2}_{p_1r_1} - z^{i_1}_{p_1r_1}z^{i_2}_{p_1p_1})\prod_{t=3}^{n} z^{i_t}_{p_1p_1}\prod_{s=1}^{m}(y^{j_2}_{r_1r_1} - y^{j_2}_{p_1p_1}),$$

de onde identificamos $i_1$ e $i_2$, pois aparecem nas únicas variáveis na forma $z^i_{p_1r_1}$ que estão no polinômio. Tendo determinado $i_1$ e $i_2$, olhando para o coeficiente de $e_{p_1\lambda(p_1)}$, que é o polinômio

$$z^h_{p_1r_1}(z^{i_1}_{p_1p_1}z^{i_2}_{p_1r_1} - z^{i_1}_{p_1r_1}z^{i_2}_{p_1p_1})\prod_{t=3}^{n} z^{i_t}_{p_1p_1}\prod_{s=1}^{m}(y^{j_2}_{r_1r_1} - y^{j_2}_{p_1p_1}), \tag{5.6}$$

identificamos $h$. Como $z_hv$ é determinado pelos valores de $h, i_1$ e $i_2$, temos uma correspondência biunívoca entre os produtos na forma $z_hv$ e os polinômios em (5.6). Para o caso $z_hv'$ prosseguimos analogamente e obtemos uma correspondência biunívoca entre os produtos $z_hv'$ e os coeficientes de $e_{p_1\lambda(p_1)}$.

Para os casos em que $v$ e $v'$ são comutadores do segundo e quarto tipos respectivamente, prosseguimos da mesma maneira. Fazendo

$$v = \sum_r \alpha_r(e_{pr} + e_{r\lambda(p)}) + \sum_{p<q}\beta_{pq}(e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)}) + \sum_r \gamma_r e_{p\lambda(p)}$$

$$v' = \sum_r \delta_r(e_{pr} + e_{r\lambda(p)}) + \sum_{p<q}\varepsilon_{pq}(e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)}) + \sum_r \zeta_r e_{p\lambda(p)}$$

e calculando os produtos $z_hv$ e $z_hv'$ temos

$$z_hv = \sum_r z^h_{pp}\alpha_r e_{pr} + \sum_{p<q}\beta'_{pq}e_{pq} + \sum_r(z^h_{pp}\gamma_r + z^h_{pr}\alpha_r)e_{p\lambda(p)}$$

$$z_hv' = \sum_r z^h_{pp}\delta_r e_{pr} + \sum_{p<q}\varepsilon'_{pq}e_{pq} + \sum_r(z^h_{pp}\zeta_r + z^h_{pr}\delta_r)e_{p\lambda(p)}.$$

Mais uma vez, em $z_hv$, do coeficiente de $e_{p_1r_1}$ determinamos $i_1$ e $i_2$ e do coeficiente de $e_{p_1\lambda(p_1)}$ determinamos $h$. Em $z_hv'$, do coeficiente de $e_{p_1r_1}$ determinamos $j_1$ e $i_1$ e do coeficiente de $e_{p_1\lambda(p_1)}$ determinamos $h$.

O elemento $z_hv$ onde $v$ é um comutador com somente variáveis $y$ é tratado da mesma forma usando as fórmulas do Lema 5.13.

Para verificar que os produtos na forma $z_hv$ são linearmente independentes, vamos considerar as entradas nas posiçoes $(p_1, \lambda(p_1))$ dos polinômios

$$z_h[z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_n}, y_{j_1}, \ldots, y_{j_m}],\ z_h[y_{j_1}, z_{i_1}, \ldots, z_{i_n}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_m}] \text{ e } z_h[y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, z_{j_m}].$$

Observemos que, no primeiro tipo temos as variáveis $z^h_{p_1r_1}, z^{i_1}_{p_1r_1}$ e $z^{i_2}_{p_1r_1}$, no segundo tipo temos as variáveis $z^h_{p_1r_1}, y^{j_1}_{p_1r_1}$ e $z^{i_1}_{p_1r_1}$ e, no terceiro tipo, temos as variáveis $z^h_{p_1r_1}, y^{j_1}_{p_1r_1}$ e $z^{j_2}_{p_1r_1}$ nos polinômios acima na entrada $(p_1, \lambda(p_1))$. Logo, um tipo não pode ser combinação dos outros tipos. Dentro do mesmo tipo também não podemos escrever um polinômio como combinação linear dos outros, pois devemos trocar um dos três primeiros elementos de cada $z_h v$ para obter elementos diferentes.

O último caso a ser considerado é o produto de dois comutadores $vw$. Notemos que necessariamente $w = [y_{k_1}, z_{k_2}]$, pois se $w = [y_{k_1}, y_{k_2}]$, o fato de $vw$ ser $S_3$-standard implica que todas as variáveis de $v$ são $y$, o que já foi feito no Lema 5.13.

Seja $v = [y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_l}]$. Quando $l$ é par temos

$$v = \sum_r \alpha_r(e_{pr} - e_{r\lambda(p)}) + \sum_{p<q} \beta_{pq}(e_{pq} - e_{\lambda(q)\lambda(p)})$$

e assim,

$$vw = \sum_r \alpha_r((y_{pp}^{k_1} - y_{rr}^{k_1})z_{pr}^{k_2} - y_{pr}^{k_1} z_{pp}^{k_2})e_{p\lambda(p)}.$$

Se $l$ é ímpar temos

$$v = \sum_r \alpha_r(e_{pr} + e_{r\lambda(p)}) + \sum_{p<q} \beta_{pq}(e_{pq} + e_{\lambda(q)\lambda(p)}) + \sum_r \gamma_r e_{p\lambda(p)}$$

e

$$vw = \sum_r \alpha_r((y_{pp}^{k_1} - y_{rr}^{k_1})z_{pr}^{k_2} - y_{pr}^{k_1} z_{pp}^{k_2})e_{p\lambda(p)}.$$

Como no Lema 5.13, olhando para o coeficiente de $e_{p_1\lambda(p_1)}$, que é um produto de polinômios irredutíveis, identificamos $k_1$ e $k_2$ e, mais uma vez determinamos a ordem correta das variáveis em $v$.

Existe somente mais uma possibilidade para o produto $vw$, a saber $v = [y_{j_1}, z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_l}]$ e $w = [y_{t_1}, z_{t_2}]$. Assim, usando os resultados sobre $v$ obtidos no início da demonstração e procedendo da mesma maneira como acima, o resultado segue. Mais uma vez, como no Lema 5.13 obtemos que os produtos $vw$ são linearmente idependentes. □

**Lema 5.16.** *Os elementos $T_2$-standard em $\Gamma_{1,n}$ são linearmente independentes módulo as $\hat{\lambda}$-identidades de $I(P,F)$.*

*Demonstração.* Vamos calcular primeiramente o produto $z_1 z_2 \cdots z_k$. Temos

$$\begin{aligned} z_1 z_2 \cdots z_k &= \sum_p \prod_{t=1}^{k} z_{pp}^t (e_{pp} + (-1)^k e_{\lambda(p)\lambda(p)}) + \sum_r \prod_{t=1}^{k-1} z_{pp}^t z_{pr}^k e_{pr} \\ &+ (-1)^k \sum_r z_{pr}^1 \prod_{t=2}^{k} z_{pp}^t e_{r\lambda(p)} + \sum_{p<q} A_{pq} e_{pq} + \sum_{p<q} B_{\lambda(q)\lambda(p)} e_{\lambda(q)\lambda(p)} + \sum_r C_r e_{p\lambda(p)} \end{aligned}$$

onde $A_{pq}$, $B_{\lambda(q)\lambda(p)}$ e $C_r$ são polinômios não nulos.

Notemos que, para $p_1 < r_1 < \lambda(p_1)$ em $P$, os polinômios $z_1 \cdots \widehat{z_j} \cdots z_n[y, z_j]$ e $z_1 \cdots \widehat{z_i} \cdots \widehat{z_k} \cdots z_n z_i[y, z_k]$ possuem coeficiente nulo em $e_{r_1\lambda(p_1)}$. O polinômio $[y, z_j]z_1 \cdots \widehat{z_j} \cdots z_n$ possui coeficiente nulo em $e_{p_1r_1}$ e o polinômio $z_1 \cdots \widehat{z_j} \cdots z_{n-1}[y, z_j]z_n$ possui entrada não nula somente em $e_{p_1\lambda(p_1)}$. Assim podemos trabalhar com estes três casos separadamente.

Se $w = [y, z_j]z_1 \cdots \widehat{z_j} \cdots z_n$, então

$$\begin{aligned} w &= (-1)^n \sum_r ((y_{pp} - y_{rr})z^j_{pr} - y_{pr}z^j_{pp}) \prod_{t=1}^n z^t_{pp} e_{r\lambda(p)} + \sum_{p<q} D_{\lambda(q)\lambda(p)} e_{\lambda(q)\lambda(p)} \\ &+ (-1)^n \left( \sum_r (((y_{pp} - y_{rr})z^j_{pr} - y_{pr}z^j_{pp})z^1_{pr} \prod_{t=2}^n z^t_{pp} - 2(y_{pr}z^j_{pr} + y_{p\lambda(p)}z^j_{pp}) \prod_{s=1}^n z^s_{pp}) e_{p\lambda(p)} \right. \\ &- \left. 2 \sum_{p \not< r} y_{p\lambda(p)} z^j_{pp} \prod_{l=1}^n z^l_{pp} e_{p\lambda(p)} \right). \end{aligned}$$

Aqui, em todos os produtórios os índices $s, t$ e $l$ são diferentes de $j$. O coeficiente de $e_{r_1\lambda(p_1)}$ determina o índice $j$ pois a única entrada $z^t_{p_1r_1}$ que aparece nele é quando $t = j$. Podemos argumentar da mesma forma para o caso $j = n$. Assim, temos uma correspondência biunívoca de $w$ com o polinômio,

$$(-1)^n((y_{p_1p_1} - y_{r_1r_1})z^j_{p_1r_1} - y_{p_1r_1}z^j_{p_1p_1}) \prod_{t=1}^n z^t_{p_1p_1} \tag{5.7}$$

que é o coeficiente de $e_{r_1\lambda(p_1)}$. Os polinômios obtidos em (5.7) de cada $w$ formam um conjunto linearmente independente.

Consideremos agora $w = z_1 \cdots \widehat{z_j} \cdots z_{n-1}[y, z_j]z_n$, assim

$$\begin{aligned} w &= -\sum_r \left( \prod_{t=1}^{n-1} z^t_{pp}((y_{pp} - y_{rr})z^j_{pr} - y_{pr}z^j_{pp})z^n_{pr} + \left( \prod_{t=1}^{n-2} z^t_{pp} z^{(n-1)}_{pr}((y_{pp} - y_{rr})z^j_{pr} - y_{pr}z^j_{pp}) \right.\right. \\ &- \left.\left. 2\prod_{t=1}^{n-1} z^t_{pp}(y_{pr}z^j_{pr} + y_{p\lambda(p)}z^j_{pp}) \right) z^n_{pp} \right) e_{p\lambda(p)} + 2\sum_{p \not< r} \prod_{t=1}^{n-1} z^t_{pp} y_{p\lambda(p)} z^j_{pp} z^n_{pp} e_{p\lambda(p)}. \end{aligned}$$

Nos produtos acima temos $t \neq j$. Como para este caso $1 \leq j \leq n-1$ e podemos determinar $n$, pois é o maior $i$ em $z^i_{p_1r_1}$ que aparece no coeficiente de $e_{p_1\lambda(p_1)}$, segue que podemos determinar de maneira única o índice $j$. Assim, podemos associar a $w$, de maneira única, o polinômio que é coeficiente de $e_{p_1\lambda(p_1)}$

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{t=1}^{n-1} z_{pp}^t((y_{pp}-y_{rr})z_{pr}^j - y_{pr}z_{pp}^j)z_{pr}^n + \left(\prod_{t=1}^{n-2} z_{pp}^t z_{pr}^{(n-1)}((y_{pp}-y_{rr})z_{pr}^j - y_{pr}z_{pp}^j)\right.\right. \\ - & \left.\left. 2\prod_{t=1}^{n-1} z_{pp}^t(y_{pr}z_{pr}^j + y_{p\lambda(p)}z_{pp}^j)\right) z_{pp}^n\right). \end{aligned} \tag{5.8}$$

O conjunto formado por estes polinômios, obtidos de cada $w$ na posição $(p_1, \lambda(p_1))$ é um conjunto linearmente independente.

Consideremos agora $w = z_1 \cdots \widehat{z_j} \cdots z_n[y, z_j]$ e $w' = z_1 \cdots \widehat{z_i} \cdots \widehat{z_k} \cdots z_n z_i[y, z_k]$. Calculando esses polinômios em $D$ temos

$$\begin{aligned} w &= \sum_r \prod_{t=1}^{n} z_{pp}^t((y_{pp}-y_{rr})z_{pr}^j - y_{pr}z_{pp}^j)e_{pr} + \sum_{p<q} E_{pq}e_{pq} \\ &+ \sum_r \left(\prod_{t=1}^{n-1} z_{pp}^t z_{pr}^n((y_{pp}-y_{rr})z_{pr}^j - y_{pr}z_{pp}^j) - 2\prod_{t=1}^{n} z_{pp}^t(y_{pr}z_{pr}^j + y_{p\lambda(p)}z_{pp}^j)\right) e_{p\lambda(p)} \\ &- 2\sum_{p\not< r}\prod_{t=1}^{n} z_{pp}^t y_{p\lambda(p)} z_{pp}^j e_{p\lambda(p)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} w' &= \sum_r \prod_{t=1}^{n} z_{pp}^t z_{pp}^i((y_{pp}-y_{rr})z_{pr}^k - y_{pr}z_{pp}^k)e_{pr} + \sum_{p<q} F_{pq}e_{pq} \\ &+ \sum_r \left(\prod_{t=1}^{n-1} z_{pp}^t z_{pr}^i((y_{pp}-y_{rr})z_{pr}^k - y_{pr}z_{pp}^k) - 2\prod_{t=1}^{n} z_{pp}^t z_{pp}^i(y_{pr}z_{pr}^k + y_{p\lambda(p)}z_{pp}^k)\right) e_{p\lambda(p)} \\ &- 2\sum_{p\not< r}\prod_{t=1}^{n} z_{pp}^t z_{pp}^i y_{p\lambda(p)} z_{pp}^k e_{p\lambda(p)} \end{aligned}$$

onde $E_{pq}$ e $F_{pq}$ são polinômios não nulos. Na primeira fórmula o índice $t$ não assume o valor $j$ e na segunda fórmula $t$ não assume os valores $i$ e $k$. Do coeficiente de $e_{p_1r_1}$ determinamos $z_j$ em $w$ e $z_k$ no polinômios $w'$. Podemos também determinar $i$ olhando para o coeficiente de $e_{p_1\lambda(p_1)}$ de $w'$. Mais ainda, se $j = k$ (portanto $j \neq n$) podemos distinguir os polinômios $w$ e $w'$ considerando quais das variáveis $z_{p_1r_1}^n$ ou $z_{p_1r_1}^i$ ocorrem no coeficiente de $e_{p_1\lambda(p_1)}$. Assim, $w$ e $w'$ estão associados de maneira única a polinômios que formam um conjunto linearmente independente. Portanto o resultado segue. □

Finalmente chegamos ao resultado principal.

**Teorema 5.17.** *Sejam $P$ um poset do tipo dois, finito com cadeias de comprimento no máximo 3, conexo, com uma involução $\lambda$ que fixa todos os pontos de $\mathcal{I}$ e $F$ um corpo de* *característica zero. Consideremos a álgebra de incidência $I(P,F)$ com a involução $\hat{\lambda}$. O $T(\hat{\lambda})$-ideal $Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F))$ é gerado pelas $\hat{\lambda}$-identidades de (i) a (vi) da Proposição 5.3.*

*Demonstração.* Das proposiçoes 5.6, 5.8, 5.10 e 5.12 temos os geradores de $\Gamma_{m,n}(I)$ para quaisquer inteiros não negativos $m$ e $n$. Dos lemas 5.13, 5.14, 5.15 e 5.16 segue que os geradores de $\Gamma_{m,n}(I)$, vistos como elementos de $\Gamma_{m,n}$ são linearmente indepedentes módulo as $\hat{\lambda}$-identidades de $I(P,F)$. Como consequência disso, segue que $\Gamma_{m,n} \cap I = \Gamma_{m,n} \cap Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F))$ para todo par de inteiros não negativos $m, n$ e, portanto, $I = Id^{\hat{\lambda}}(I(P,F))$. □

**Observação 5.18.** *Podemos demonstrar o Teorema 5.17 da seguinte forma: Consideremos $p < r$ em $P$. Então $p < r < \lambda(p)$ é uma cadeia. Podemos fazer isso pois $P$ possui pelo menos uma cadeia de comprimento 3. A álgebra $UT_3(F)$ com a involução de [10] é uma subálgebra de $I(P,F)$, via a identificação*

$$1 \mapsto p, 2 \mapsto r, 3 \mapsto \lambda(p).$$

*Notemos que a involução em $UT_3(F)$ é a induzida por $\hat{\lambda}$. Assim, toda $\hat{\lambda}$-identidade de $I(P,F)$ é uma $\hat{\lambda}$-identidade de $UT_3(F)$. Reciprocamente, se $f$ é uma $\hat{\lambda}$-identidade de $UT_3(F)$, então por [10, Teorema 6.6] e pela Proposição 5.3 desta tese, temos que $f$ é uma $\hat{\lambda}$-identidade de $I(P,F)$. Mostramos então que $UT_3(F)$ e $I(P,F)$ tem as mesmas $\hat{\lambda}$-identidades. Por [10, Teorema 6.6] segue o resultado.*

# Referências Bibliográficas


[1] Amitsur, S. A., Levitzki, J.; *Minimal identities for algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. 1, 449–463, (1950).

[2] Bell, E. T.; *Exponential polynomials*. Ann. of Math., II Ser 35, 258–277, (1934).

[3] Berele, A.; *Incidence algebras, polynomial identities and an $A \otimes B$ counterexample*. Comm. Alg. 13, 181–246, (1984).

[4] Brusamarello, R., Fornaroli, E. Z., Santulo Jr., E. A.; *Anti-automorphisms and involutions on (finitary) incidence algebras*. Linear Multilinear Algebra, 60(2), 181-188, (2011).

[5] Brusamarello, R., Lewis, D. W.; *Automorphisms and involutions on incidence algebras*. Linear Multilinear Algebra, 59(11), 1247–1267, (2011).

[6] Brusamarello, R., Fornaroli, E. Z., Santulo Jr., E. A.; *Classification of involutions on incidence algebras*. Comm. Alg. 39, 1941–1955, (2011).

[7] Curtis, C. W., Reiner, I.; *Representation Theory Of Finite Groups And Associative Algebras*. John Wiley & Sons, New York, 2000.

[8] Dedeking, R.; *Gesammelte Mathematische Werk*. Vols. 1, 2, 3. Hamburgo: Deutsche Math. Verein., (1930).

[9] Dehn, M.; *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme*. Math. Ann. 85, 184–194, (1922).

[10] Di Vincenzo, O. M., Koshlukov, P., La Scala, R.; *Involutions for upper triangular matrix algebras*. Adv. App. Math. 37, 541–568, (2006).

[11] Drensky, V., Giambruno A.; *Cocharacters, codimensions and Hilbert series of the polynomial identities for* $2 \times 2$ *matrices with involution.* Canad. J. Math. 46, 718–733, (1994).

[12] Drensky, V.; *Free Algebras and PI-algebras: Graduate Course in Algebra.* Springer, Singapore, (1999).

[13] Giambruno, A., Zaicev, A. M.; *Polynomial Identities and Asymptotic Methods.* AMS Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 122, (2005).

[14] Kaplansky, I.; *Rings with a polynomial identity.* Bull. Amer. Math. Soc. 54, 496–500, (1948).

[15] Kemer, A. R.; *Ideals of identities of associative algebras.* Trans. Math. Monographs, 87, AMS, Providence, (1991).

[16] Parmanter, M. M., Schmerl, J., Spiegel, E.; *Isomorphic incidence algebras.* Adv. Math. 84, 226-236, (1990).

[17] Rota, G. C.; *On the foundations of combinatorial theory I - Theory of Möbius functions.* Z. Wahrseheinlichkeitstheorie 2, 340–368, (1964).

[18] Rotman, J. J.; *Advanced Modern Algebra.* Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, (2002).

[19] Schöder, B. S. W.; *Ordered Sets: An Introduction.* Birkhäuser, (2002).

[20] Spiegel, E.; *A note in PI incidence algebras.* Rocky Mountain J. Math. 29(2), 685–690, (1999).

[21] Spiegel, E., O'donnel, C. J.; *Incidence Algebras.* Marcel Dekker, New York, (1997).

[22] SPIEGEL, E.; *Involution in incidence algebras.* Linear Algebra Appl. 405, 155-162, (2005).

[23] Ward, M.; *The algebra of lattice functions.* Duke Math. J. 5, 357–371, (1939).

# Índice Remissivo