UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

MARCUS VINÍCIUS DE ANDRADE NEVES

Representações de Schur e de Schmidt de um Operador Bilinear Compacto

Maringá-PR
2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Representações de Schur e de Schmidt de um Operador Bilinear Compacto

Marcus Vinícius de Andrade Neves

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito para obtenção do título de Doutor em Matemática.
Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Brandani da Silva.

Maringá-PR, 5 de janeiro de 2019

Dados Internacionais de CatalogaçãonaPublicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Neves, Marcus Vinícius de Andrade
N518r Representações de Schur e de Schmidt de um operador bilinear compacto / Marcus Vinícius de Andrade Neves -- Maringá, 2018.
93 f. : il.

Orientador: Prof°. Drº. Eduardo Brandani da Silva.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas,Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2018.

1. Autovalor. 2. Valor singular. 3. Operador bilinear. 4. Representação de Schur. 5. Representação de Schmidt. 6. Espaço de Hilbert. 7. Eigenvalue. 8. Singular value. 9. Bilinear operator. 10. Schur representation. 11. Schmidt representation. 12. Hilbert space. I. Silva, Eduardo Brandani da, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 515.723

Edilson Damasio CRB9-1.123

AGRADECIMENTOS

À Marciane, Neto e Rudolf por ter estado ao meu lado durante todo o meu doutorado.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Eduardo Brandani da Silva por ter aceitado me orientar, antes mesmo de me conhecer, e pela confiança, sabedoria, disponibilidade e ensinamentos.

À secretária do Programa de Pós-graduação em Matemática Lúcia k. Kato pela atenção, disposição e simpatia.

A todos os meus amigos que sempre estiveram me apoiando e incentivando durante este período.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Mato Grosso (FAPEMAT) pelo apoio financeiro concedido durante o doutorado.

Não entre em pânico!

Adams, D.

RESUMO

J. R. Retherford em [12] definiu a Representação de Schur de um operador linear limitado $L : H \to H$, onde H é um espaço de Hilbert, e demonstrou que todo L compacto, autoadjunto e não nulo tem uma Representação de Schur. Seguindo este caminho, nesta tese definimos a Representação de Schur para um operador bilinear $T : H \times H \to H$ e mostramos que se T é compacto, autoadjunto, não nulo e os seus autovalores ordenados satisfazem certas propriedades, então T tem uma Representação de Schur, onde neste caso a hipótese dos autovalores serem ordenados é fundamental.

A. Pietsch em [10] definiu a representação de Schmidt de um operador linear limitado $L : H \to K$, onde H, K são espaços de Hilbert, e demonstrou que todo L compacto e não nulo tem uma Representação de Schmidt. Definimos a Representação de Schmidt para um operador bilinear $T : H_1 \times H_2 \to K$ e mostramos que se T é compacto, não nulo e os seus valores singulares ordenados satisfazem certas propriedades, então T tem uma representação de Schmidt.

PALAVRAS-CHAVE: Autovalor, Valor Singular, Operador Bilinear, Representação de Schur, Representação de Schmidt, Espaço de Hilbert.

ABSTRACT

J.R. Retherford in [12] defined the Schur Representation of a linear operator limited $L : H \to H$, where H is a Hilbert space, and demonstrated that all L compact, self-adjoint, and nonzero has a Schur Representation. Following this path, in this thesis we define the Schur Representation for a bilinear operator $T : H \times H \to H$ and show that if T is compact, self-adjoint, nonzero and its ordered eigenvalues satisfy certain properties, then T has a Schur Representation, where in this case the hypothesis of eigenvalues to be ordered is fundamental.

A. Pietsch in [10] defined the Schmidt representation of a bounded linear operator $L : H \to K$, where H, K are Hilbert spaces, and demonstrated that all L compact and nonzero has a Representation of Schmidt. We define the Schmidt Representation for a bilinear operator $T : H_1 \times H_2 \to K$ and show that if T is compact, nonzero, and its ordered singular values satisfy certain properties, then T has a representation of Schmidt.

KEYWORDS: Eigenvalue, Singular Value, Bilinear Operator, Schur Representation, Schmidt Representation, Hilbert Space.

Sumário

Introdução

Seja H um espaço de Hilbert separável sobre o corpo dos números reais. Denotaremos por $\mathfrak{L}(H)$ o espaço normado dos operadores lineares limitados de H. Se $\lambda \in \mathbb{R}$, então λ é um autovalor de $L \in \mathfrak{L}(H)$ se existir $x \in H$, $x \neq 0$, tal que $L(x) = \lambda x$. Sabemos que nem todo $L \in \mathfrak{L}(H)$ possui um autovalor. Mas se $L \in \mathfrak{L}(H)$ for um operador não nulo, compacto e autoadjunto, temos que $\lambda_1 = \|L\|_{\mathfrak{L}(H)}$ é um autovalor com um autovetor associado unitário x_0 e, neste caso, temos que $\|L\|_{\mathfrak{L}(H)} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq \ldots \geq 0$ é uma sequência contendo todos os autovalores de L com $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. Pode se mostrar que se $L \in \mathfrak{L}(H)$ for compacto, autoadjunto e não nulo, então, para todo $x \in H$

$$L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < x, x_n > x_n \ , \tag{0.0.1}$$

e neste caso, essa representação é chamada de Representação de Schur de L, ver [12] para mais detalhes. Se o operador L for de posto finito, a soma em (0.0.1) é finita. Não temos necessariamente que a sequência ortonormal de autovetores $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que aparece em (0.0.1) seja maximal, isto é, uma base ortonormal enumerável para H.

Seja $Q : H \to H$ o operador quadrático associado ao operador bilinear $T : H \times H \to H$, isto é, $Q(x) = T(x, x)$, para todo $x \in H$. Temos que Q é um operador não linear. Phillips, em [9], ao estabelecer os critérios e demonstrar quando que um operador quadrático $Q : H \to H$ pode ter uma soma do tipo (0.0.1), como no caso linear, ou seja,

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < x, x_n >^2 x_n \ , \tag{0.0.2}$$

para todo $x \in H$, alguns erros foram cometidos, como por exemplo, foi utilizado como hipótese que a sequência ortonormal $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de autovetores que aparece em (0.0.2), associados respectivamente a sequência de autovalores não nulos λ_n, é maximal. O Exemplo 2.3.11 nos mostra que essa hipótese de a sequência ortonormal $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de autovetores que aparece em (0.0.2) ser maximal é falsa. Motivado pela idéia de Phillips, em [9], de encontrar uma representação de um operador quadrático como em (0.0.2), e também pela representação de Schur de um operador linear como em (0.0.1), mostramos no Capítulo 2 desta tese quando um operador bilinear $T : H \times H \rightarrow H$ tem uma representação de Schur.

Nesta tese, trabalhamos com os operadores bilineares. Sejam H_1, H_2 e K espaços de Hilbert separáveis. Fazendo uma analogia com o caso linear, definimos, no Capítulo 1, os operadores bilineares compactos e exibimos suas propriedades básicas, como, ser compacto implica em ser limitado e todo operador compacto $T : H_1 \times H_2 \rightarrow K$ é limite de uma sequência de operadores de posto finito. Finalizamos o Capítulo 1 mostrando que todo operador bilinear que pertence à classe de Hilbert-Schmidt é compacto.

No Capítulo 2 definimos autovalor e autovetor de $T \in Bil(H)$, e mostramos que muitas propriedades do caso linear não valem quando o operador é bilinear, como por exemplo, se $T \in Bil(H)$ possui um autovalor $\lambda \neq 0$, então todo $0 \neq \gamma \in \mathbb{R}$ é também autovalor de T, e também veremos que o conjunto dos autovetores associados a um autovalor não é subespaço vetorial de H. Com o objetivo de obter uma Representação de Schur de um operador bilinear, definimos quando um operador bilinear $T \in Bil(H)$ é autoadjunto e vimos que dois autovetores distintos de T autoadjunto, associados a autovalores distintos, não são ortogonais. Mostramos que se $T \in Bil(H)$ é compacto, autoadjunto e não nulo, então $\lambda = \|T\|$ é um autovalor com um autovetor unitário associado x_0. Finalizamos o Capítulo 2 definindo a representação de Schur de um operador Bilinear $T \in Bil(H)$. Mostramos que se $T \in Bil(H)$ é compacto, autoadjunto e não nulo, não temos necessariamente uma representação de Schur para T. Veremos que isto acontece devido a seguinte observação.

Observação: Sabemos que se $L \in \mathfrak{L}(H)$ for autoadjunto e $N \subset H$, temos $L(N) \subset N \Leftrightarrow L(N^{\perp}) \subset N^{\perp}$. Tal propriedade não é herdada para os operadores bilineares. Mostramos que se $x \in H$ é um autovetor de T e $M =< x >$, temos que, mesmo se T for autoadjunto, $T(M, M) \subset M$ não implica que $T(M^{\perp}, M^{\perp}) \subset M^{\perp}$.

Para contornar tal situação, definimos **autovalores ordenados** de um operador $T \in Bil(H)$ e provamos que se $T \in Bil(H)$ é compacto, autoadjunto e não nulo, tal que T satisfaz o Método da Ordenação 2.3.27, então T tem uma Representação de Schur, isto é, para todo $x, y \in H$

$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < x, x_n >< y, x_n > x_n\,.$$

Pietsch demonstrou em [10] que se $L : H \to K$ é um operador compacto não nulo, então L tem uma representação de Schmidt, ou seja

$$L(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_i < x, x_i > y_n\,,$$

onde (τ_i) são os valores singulares de L com seus respectivos vetores singulares normalizados $(x_i) \in H$ e $(y_i) \in K$, isto é, $L(x_i) = \tau_i y_i$ e $L^*(y_i) = \tau_i x_i$. Temos também que $(x_i) \in H$ e $(y_i) \in K$ são sequências ortonormais.

No Capítulo 3 definimos valor singular de um operador bilinear $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$. Mostramos que se T for compacto e não nulo, então $\tau = \|T\|$ é um valor singular. Definimos a representação de Schmidt de um operador bilinear $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ e vemos que, mesmo se T for compacto, T pode não ter uma representação de Schmidt. Para contornar tal situação, definimos **valores singulares ordenados** para $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$, e mostramos que se T for compacto e satisfaz as hipóteses do Método da Ordenação 3.2.3, então $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ tem uma Representação de Schmidt, isto é, para todo $x \in H_1$, $y \in H_2$

$$T(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_i < x, x_i >< y, y_i > z_i\ .$$

Mostramos que se $T \in Bil(H)$ for compacto, autoadjunto e tem uma representação de Schmidt, então T tem uma representação de Schur. Encerramos a tese mostrando que se $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ tem uma representação de Schmidt e pertence a Classe de Schatten $S_2(H_1 \times H_2, K)$, então T é Hilbert-Schmidt.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Todos os espaços vetoriais que utilizamos neste trabalho terão os números reais como o corpo dos escalares. Na Observação 2.1.9 é dado o motivo de porque não utilizar os números complexos como o corpo dos escalares neste trabalho. Todos os espaços de Hilbert considerados nesta tese são separáveis.

Na primeira seção deste capítulo, mostramos que se X, Y e Z são espaços vetoriais de dimensão finita; α, β e γ bases ordenadas de X, Y e Z, respectivamente, e $T : X \times Y \to Z$ um operador bilinear, podemos representar o operador bilinear por uma única matriz e vice-versa.

Na segunda seção definimos Operador Bilinear contínuo e, como no caso linear, provamos que ser contínuo implica em ser limitado, e vice-versa. Em seguida fizemos um estudo das propriedades básicas dos chamados operadores bilineares compactos. Como no caso linear, mostramos que se H_1, H_2 e K são espaços de Hilbert e $T : H_1 \times H_2 \to K$ é um operador bilinear compacto, então T é limite de uma sequência de operadores bilineares de posto finito. Finalizamos o capítulo mostrando que os operadores bilineares que pertencem a Classe de Hilbert-Schmidt são compactos.

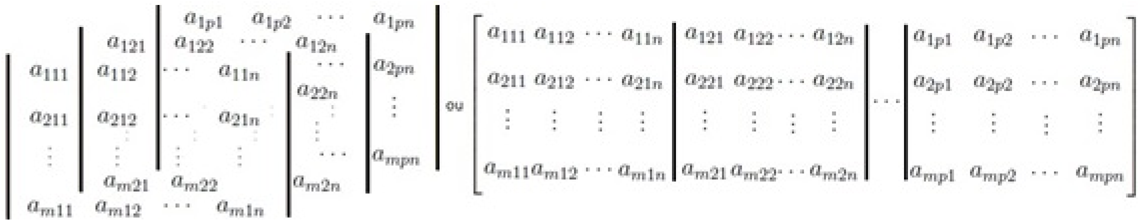
1.1 Matriz de um Operador Bilinear

Antes de iniciarmos nossos estudos sobre os operadores bilineares definiremos um objeto que será útil para a construção de exemplos e contra-exemplos.

Definição 1.1.1. *Seja $\mathbb{R}$ o corpo do números reais, m, p e n inteiros positivos e $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Uma 3d-matriz $m \times p \times n$ sobre $\mathbb{R}$ é uma função*

$$(i, s, j) \in I_m \times I_p \times I_n \mapsto a_{isj} \in \mathbb{R}\,.$$

Em geral os escalares a_{isj} são dispostos em m linhas, p camadas e n colunas, o primeiro índice indicando a linha, o segundo a camada e o terceiro a coluna ocupada por a_{isj}.



Os escalares a_{isj} são os elementos da 3d-matriz $A = (a_{isj})$. Observemos que duas 3d-matrizes, $A = (a_{isj})$ e $B = (b_{isj})$, ambas $m \times p \times n$, são iguais se, e somente se, $a_{isj} = b_{isj}$ para todo terno (i, s, j).

Uma 3d-matriz $A = (a_{isj})$ é cúbica quando o número de linhas, camadas e colunas forem iguais, isto é, quando ela é do tipo $n \times n \times n$, e neste caso, n é a ordem da 3d-matriz cúbica A. Numa matriz cúbica os elementos a_{iii}, que têm os índices iguais, formam a diagonal principal.

Seja $M_{m\times p\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das 3d-matrizes $m \times p \times n$ sobre $\mathbb{R}$. Podemos introduzir uma estrutura vetorial em $M_{m\times p\times n}(\mathbb{R})$. Para isto precisamos definir a adição de matrizes e o produto de uma matriz por um escalar.

Definição 1.1.2. *Sejam $A = (a_{isj})$ e $B = (b_{isj})$ 3d-matrizes $m\times p\times n$. A soma $C = A+B$ é a 3d-matriz $m \times p \times n$, $C = (c_{isj})$, tal que $c_{isj} = a_{isj} + b_{isj}$ para todo terno (i, s, j). A adição matricial goza das seguintes propriedades de verificação imediata:*

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + 0 = A$, *onde* 0 *é a 3d-matriz zero* $m \times p \times n$;
4. $A + (-A) = 0$, *onde* $(-A) = (-a_{isj})$.

Definição 1.1.3. *Sejam $c \in \mathbb{R}$ e $A = (a_{isj}) \in M_{m\times p\times n}(\mathbb{R})$. A 3d-matriz $B = (b_{isj})$, onde $b_{isj} = c \cdot a_{isj}$ para todo terno (i, s, j), é o produto de c por A, denotado por $B = c \cdot A$. É claro que $B \in M_{m\times p\times n}(\mathbb{R})$. A multiplicação de 3d-matriz por escalar tem as seguintes propriedades, de fácil verificação:*

1. $1 \cdot A = A$;

2. $c \cdot (A + B) = c \cdot A + c \cdot B$ *;*

3. $(c + d) \cdot A = c \cdot A + d \cdot A$ *;*

4. $c \cdot (d \cdot A) = (cd) \cdot A$ *.*

quaisquer que sejam $A, B \in M_{m\times p\times n}(\mathbb{R})$ *e* $c, d \in \mathbb{R}$*.*

Vemos assim que $M_{m\times p\times n}(\mathbb{R})$, munido das leis de adição e de multiplicação por escalar, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Quando $m = p = n$ escrevemos apenas $M_n(\mathbb{R})$ ou simplesmente M_n.

Sejam X, Y e Z espaços de Banach. Consideremos o produto cartesiano

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

que é também um espaço de Banach quando munido da norma

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} = \max(\|x\|_X , \|y\|_Y).$$

Definição 1.1.4. *Uma aplicação* $T : X \times Y \to Z$ *é chamada de operador bilinear se é linear em cada coordenada, isto é, para todos os escalares* $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$*,* $x_1, x_2 \in X$*,* $y_1, y_2 \in Y$*, temos:*

1. $T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y_1) = \alpha_1 T(x_1, y_1) + \alpha_2 T(x_2, y_1)$*;*

2. $T(x_1, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \beta_1 T(x_1, y_1) + \beta_2 T(x_1, y_2)$*.*

Seja $\mathscr{B}(X \times Y, Z)$ o conjunto dos operadores bilineares de $X \times Y$ em Z. Se $T, S \in \mathscr{B}(X \times Y, Z)$ e $a \in \mathbb{R}$, definimos $T + S$ e aT, aplicações de $X \times Y$ em Z, por

$$\begin{aligned}(T + S)(x, y) &= T(x, y) + S(x, y);\\ (aT)(x, y) &= aT(x, y),\end{aligned}$$

para todo $x \in X$ e $y \in Y$. É fácil verificar que $T + S$ e aT são operadores bilineares, isto é , elementos de $\mathscr{B}(X \times Y, Z)$. Concluímos que $\mathscr{B}(X \times Y, Z)$, munido das leis de adição $(T, S) \mapsto T + S$ e de multiplicação por escalar $(a, T) \mapsto aT$, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Sejam X, Y e Z espaços vetoriais de dimensão finita; $\alpha = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\beta = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ e $\gamma = \{z_1, z_2, \ldots, z_p\}$ bases ordenadas de X, Y e Z, respectivamente, e $T : X \times Y \to Z$ um operador bilinear. Fixada as bases, podemos representar o operador bilinear T por uma única 3d-matriz e vice-versa. Seja $x \in X$, $y \in Y$ tais que

$$x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \tag{1.1.1}$$

$$y = b_1 y_1 + \cdots + b_m y_m \ . \tag{1.1.2}$$

Temos

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T(a_1x_1+\cdots+a_nx_n, b_1y_1+\cdots+b_my_m)\\ &= a_1b_1T(x_1,y_1)+\cdots+a_1b_mT(x_1,y_m)+\cdots+\\ &\quad +a_nb_1T(x_n,y_1)+\cdots+a_nb_mT(x_n,y_m)\ . \end{aligned}$$

Concluímos que o operador bilinear T é univocamente determinado pelos valores de $T(x_i,y_j)$, $i=1,\dots,n$ e $j=1,\dots,m$. Cada um dos $n{\cdot}m$ vetores $T(x_i,y_j)$ pode ser expresso de modo único como combinação linear dos elementos da base $\gamma=\{z_1,z_2,\dots,z_p\}$ de Z, ou seja,

$$T(x_i,y_j)=A_{i1j}z_1+\cdots+A_{ipj}z_p=\sum_{s=1}^{p}A_{isj}z_s\ , \tag{1.1.3}$$

com $A_{isj}\in\mathbb{R}$, $s=1,\dots,p$, sendo as coordenadas de $T(x_i,y_j)$ fixada à base ordenada γ de Z. Temos então:

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T(a_1x_1+\ldots+a_nx_n, b_1y_1+\ldots+b_my_m)\\ &= a_1b_1\sum_{s=1}^{p}A_{1s1}z_s+\ldots+a_1b_m\sum_{s=1}^{p}A_{1sm}z_s+\ldots+\\ &\quad +a_nb_1\sum_{s=1}^{p}A_{ns1}z_s+\ldots+a_nb_m\sum_{s=1}^{p}A_{nsm}z_s\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_ib_jA_{i1j}z_1+\ldots+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_ib_jA_{ipj}z_p\ . \end{aligned}$$

Note que para cada $s=1,\dots,p$,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_ib_jA_{isj}=\begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{1s1} & \ldots & A_{1sm}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{ns1} & \ldots & b_{nsm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}\ .$$

Seja $[A]\in M_{n\times p\times m}(\mathbb{R})$ definida por $[A]=(A_{isj})$ em (1.1.3) ou seja

$$[A]=(A_{isj})=\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} A_{111} & \ldots & A_{11m} & & A_{1p1} & \ldots & A_{1pm}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots\\ A_{n11} & \ldots & A_{n1m} & & A_{np1} & \ldots & A_{npm}\end{array}\right]\ . \tag{1.1.4}$$

Definição 1.1.5. *Sejam $x \in X$, $y \in Y$ dados em* (1.1.1) *e* (1.1.2)*, respectivamente, e* $[A]$ *dada em* (1.1.4)*. Definimos o vetor* $[x][A][y] \in Z$ *como*

$$[x][A][y] = \left(\begin{bmatrix} a_1 \dots a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{111} \dots A_{11m} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ A_{n11} \dots A_{n1m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_1 \dots a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1p1} \dots A_{1pm} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ A_{np1} \dots A_{npm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \right).$$

Temos agora o seguinte resultado:

Teorema 1.1.6. *Sejam X, Y e Z espaços vetoriais de dimensão finita sobre os reais; $\alpha = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\beta = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ e $\gamma = \{z_1, z_2, \dots, z_p\}$ bases ordenadas de X, Y e Z, respectivamente, e $T : X \times Y \to Z$ um operador bilinear. Se*

$$T(x_i, y_j) = A_{i1j}z_1 + \dots + A_{ipj}z_p = \sum_{s=1}^{p} A_{isj}z_s \ , \tag{1.1.5}$$

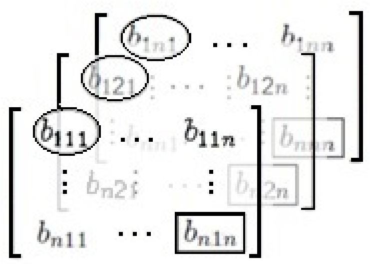
então $[A] \in M_{n\times p\times m}$, definida por $[A] = (A_{isj})$ em (1.1.5)*, é denominada a 3d-matriz associada ao operador bilinear $T : X \times Y \to Z$ fixada as bases ordenadas α, β e γ de X, Y e Z, respectivamente, e temos que $T(x, y) = [x][A][y]$ como na definição* (1.1.5).

Note que, se mudarmos as bases ordenadas dos espaços vetoriais X, Y e Z do Teorema 1.1.6, a 3d-matriz associada ao operador bilinear $T : X \times Y \to Z$ também irá mudar.

Observação 1.1.7. *Seja X um espaço vetorial de dimensão n, $T \in \mathscr{B}(X \times X, X)$ um operador bilinear, tal que $[B] = (b_{isj})$ é a sua 3d-matriz associada de ordem n, fixada uma base ordenada $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de X. Então*

$$T(v_i, v_j) = \sum_{k=1}^{n} b_{ikj}v_k \cong [b_{i1j} \ b_{i2j} \ \dots \ b_{inj}] \ .$$

Destacamos abaixo a imagem de $T(v_1, v_1)$(em círculo) e $T(v_n, v_n)$(em retângulo).



De agora em diante dado um operador bilinear $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ e a sua 3d-matriz associada $A \in M_{n\times p\times m}$, se não fixarmos as bases ordenadas, ficará subentendido que a base ordenada referida é a base canônica do $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^p$, respectivamente. Também iremos nos referir a uma 3d-matriz simplesmente por uma matriz.

Antes de prosseguir, vamos enunciar um teorema que nos fornecerá um resultado que será muito útil nos exemplos e nas demonstrações de alguns resultados que aparecerão na tese.

Teorema 1.1.8. *Dada a sequência dupla (x_{nk}) de números reais, suponhamos que cada linha determine uma série absolutamente convergente, isto é, $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk}| = a_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Admitamos ainda que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$. Então*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} \right)$$

Esta afirmação implica, em particular, que todas as séries contidas na igualdade acima são convergentes.

Demonstração: Para mais detalhes sobre convergências de Séries duplas e a demonstração deste teorema indicamos a consulta do livro ([6],Capítulo 10). ■

Exemplo 1.1.9. ***(3d-Matriz infinita)*** *Sejam $x = (x_n) \in l^2$, isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$, e $(e_n)_n$ a base canônica de l^2. Seja $T : l^2 \times l^2 \to l^2$ um operador bilinear. Temos*

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i, \sum_{j=1}^{\infty} y_j e_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j T(e_i, e_j) \ . \end{aligned}$$

Se $T(e_i, e_j) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{isj} e_s$, temos então que para cada i, j, $\sum_{s=1}^{\infty} |a_{isj}|^2 < \infty$. Logo, temos que

$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j a_{inj} \right) e_n \ .$$

ou seja, se $T(x,y) = (z_n) = z$, então

$$z_n = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j a_{inj} \ .$$

Queremos que $z_n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, temos que ter

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|x_i y_j a_{inj}| < \infty\,. \tag{1.1.6}$$

Temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|x_i y_j a_{inj}| &= \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|y_j a_{inj}|\right)\\
&\le \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|\left(\left[\sum_{j=1}^{\infty}|y_j|^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{j=1}^{\infty}|a_{inj}|^2\right]^{\frac{1}{2}}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|\left(\|y\|_{l^2}\left[\sum_{j=1}^{\infty}|a_{inj}|^2\right]^{\frac{1}{2}}\right)\,.
\end{aligned}$$

Para se ter (1.1.6), *temos que ter* $\sum_{j=1}^{\infty}|a_{inj}|^2 \ < \infty$ *e assim temos que*

$$\|a_{in\cdot}\| = \left[\sum_{j=1}^{\infty}|a_{inj}|^2\right]^{\frac{1}{2}} < \infty\,.$$

Continuando, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|x_i y_j a_{inj}| &\le \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|\|y\|_{l^2}\|a_{in\cdot}\|\\
&= \|y\|_{l^2}\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|\|a_{in\cdot}\|\\
&\le \|y\|_{l^2}\left[\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\|a_{in\cdot}\|^2\right]^{\frac{1}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Ou seja, temos que ter $\sum_{i=1}^{\infty}\|a_{in\cdot}\|^2 < \infty$. *Temos então que*

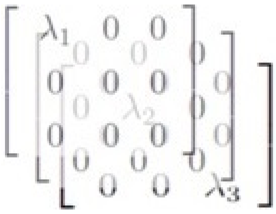
$$\begin{aligned}
\|a_{\cdot n\cdot}\|_{l^2} &= \left[\sum_{i=1}^{\infty}\|a_{in\cdot}\|^2\right]^{\frac{1}{2}}\\
&= \left[\sum_{i=1}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{\infty}|a_{inj}|^2\right]\right]^{\frac{1}{2}} < \infty\,.
\end{aligned}$$

Concluímos então que, para se obter (1.1.6), *temos que ter* $\sum_{i,n,j=1}^{\infty}|a_{inj}|^2 < \infty$. *Definimos a 3d-matriz infinita* $A = (a_{isj})$, *com* $i, s, j \in \mathbb{N}$, *tal que* $\sum_{i,s,j=1}^{\infty}|a_{isj}|^2 < \infty$, *como a 3d-matriz associada ao operador* T *fixada a base canônica do* l^2.

Definição 1.1.10. *Seja $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador bilinear. Dizemos que o operador bilinear T é diagonalizável se existir uma base ordenada β de $\mathbb{R}^n$ tal que a matriz $[B] = (b_{ikj})$ associada ao operador bilinear tem a seguinte propriedade*

$$b_{ikj} = 0, \ \ se \ \ i \neq k \neq j$$

onde $i, k, j = 1, \ldots, n$. Ou seja os elementos de $[B] = (b_{ikj})$ que estão fora da diagonal principal são nulos. Segue abaixo um exemplo para o caso $n = 3$.



$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{array}\right]$$

Observação 1.1.11. *Por definição, se o operador bilinear $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é diagonalizável, então existe uma base ordenada $X = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $T(u_i, u_i) = \lambda_i \cdot u_i$, $i = 1, \ldots, n$ e $T(u_i, u_j) = 0$ se $i \neq j$. Note que os λ_i não necessariamente precisam ser distintos.*

Será que todo operador bilinear $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é diagonalizável? Veremos em breve exemplos de operadores bilineares que são diagonalizáveis e também exemplos de operadores que não são diagonalizáveis.

1.2 Operadores Bilineares Limitados e Compactos

Na Seção 1.1 em 1.1.4 definimos um operador bilinear $T \in \mathscr{B}(X \times Y, Z)$ onde X, Y e Z são espaços de Banach. Seguindo a analogia com o caso linear, vamos mostrar que um operador bilinear $T \in \mathscr{B}(X \times Y, Z)$ é contínuo se, e somente se, é limitado.

Definição 1.2.1. *Um operador bilinear $T \in \mathscr{B}(X \times Y, Z)$ é contínuo se é contínuo como uma aplicação entre dois espaços normados.*

Como uma consequência desta definição, como no caso linear, temos o seguinte resultado que caracteriza os operadores bilineares contínuos.

Teorema 1.2.2. *Seja $T \in \mathscr{B}(X \times Y, Z)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *T é contínuo;*

2. *T é contínuo em $(0,0)$;*

3. *existe uma constante $c > 0$ tal que $\|T(x,y)\|_Z \leq c\|x\|_X \|y\|_Y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$.*

Demonstração: 1) $\Rightarrow$ 2) É evidente.

2 $\Rightarrow$ 3) Assuma que 3) é falso. Então para todo $c > 0$, existem $x_c \in X$, $y_c \in Y$ tal que $\|T(x_c, y_c)\|_Z > c\|x_c\|_X \|y_c\|_Y$. Particularmente, para $c = n \in \mathbb{N}$, existem $x_n \in X$, $y_n \in Y$ tal que

$$\|T(x_n, y_n)\|_Z > n\|x_n\|_X \|y_n\|_Y \ , \tag{1.2.7}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $T(x,0) = T(0,y) = 0$ para todo $x \in X$, $y \in Y$, logo por (1.2.7), temos que $x_n \neq 0$ e $y_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim podemos considerar as sequências $a_n = \dfrac{x_n}{\sqrt{n}\|x_n\|_X} \in X$ e $b_n = \dfrac{y_n}{\sqrt{n}\|y_n\|_Y} \in Y$. Temos que $\|a_n\|_X \to 0$ e $\|b_n\|_Y \to 0$, portanto $(a_n, b_n) \to (0,0)$ em $X \times Y$. Mas T é contínua em $(0,0)$, portanto

$$T(a_n, b_n) \to T(0,0) = 0 \ . \tag{1.2.8}$$

Mas $\|T(a_n, b_n)\|_Z = \dfrac{1}{n\|x_n\|_X \|y_n\|_Y} \|T(x_n, y_n)\|_Z > 1$ por (1.2.7), para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo por (1.2.8), temos uma contradição, portanto 3) é verdadeira.

3) $\Rightarrow$ 2) Seja $(x_n, y_n) \to (0,0)$ em $X \times Y$, isto é, $x_n \to 0$ em X e $y_n \to 0$ em Y. Temos

$$\|T(x_n, y_n)\|_Z \leq c\|x_n\|_X \|y_n\|_Y \ , \tag{1.2.9}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Visto que $\|x_n\|_X \to 0$ e $\|y_n\|_Y \to 0$, por (1.2.9), temos

$$T(x_n, y_n) \to 0 = T(0,0) \ ,$$

ou seja, T é contínua em $(0,0)$.

2) $\Rightarrow$ 1) Seja $x, x_0 \in X$ e $y, y_0 \in Y$. Temos

$$\begin{aligned} T(x,y) - T(x_0,y_0) &= T(x,y) - T(x_0,y) + T(x_0,y) - T(x_0,y_0) \\ &= T(x-x_0,y) + T(x_0,y-y_0) \ . \end{aligned}$$

Assim temos

$$\begin{aligned}\|T(x,y)-T(x_0,y_0)\|_Z &\leq \|T(x-x_0,y)\|_Z + \|T(x_0,y-y_0)\|_Z \\ &\leq c\cdot\left(\|x-x_0\|_X\|y\|_Y + \|x_0\|_X\|y-y_0\|_Y\right). \quad (**)\end{aligned}$$

Seja $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ em $X \times Y$, isto é, $x_n \to x_0$ em X e $y_n \to y_0$ em Y, ou seja, $\|x_n - x_0\|_X \to 0$ e $\|y_n - y_0\|_Y \to 0$, isto é, $\|x_n\|_X \to \|x_0\|_X$ e $\|y_n\|_Y \to \|y_0\|_Y$.

Portanto, temos que $(\|x_n\|_X)$ e $(\|y_n\|_Y)$ são sequências limitadas, isto é, $\|x_n\|_X \leq c_1$ e $\|y_n\|_Y \leq c_2$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De $(**)$ temos

$$\begin{aligned}\|T(x_n,y_n)-T(x_0,y_0)\|_Z &\leq c\cdot\left(\|x_n-x_0\|_X\|y_n\|_Y + \|x_0\|_X\|y_n-y_0\|_Y\right) \\ &\leq c\cdot\left(\|x_n-x_0\|_X c_2 + \|x_0\|_X\|y_n-y_0\|_Y\right).\end{aligned}$$

Portanto, se $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ então $T(x_n, y_n) \to T(x_0, y_0)$. Logo T é contínua em $(x_0, y_0) \in X \times Y$. ■

Denotaremos por $Bil(X \times Y, Z)$ o espaço vetorial de todos os operadores bilineares contínuos definidos no produto cartesiano $X \times Y$ com valores em Z. Se $T \in Bil(X \times Y, Z)$, temos como consequência do item 3 do Teorema 1.2.2 que

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1, \|y\|_Y \leq 1} \|T(x,y)\|_Z < \infty ,$$

e neste caso T será chamado de operador bilinear limitado. É simples verificar que $\|T\|$ é uma norma, e neste caso chamaremos de norma do operador. Se X, Y e Z são espaços de Banach, o espaço $Bil(X \times Y, Z)$ dotado da norma do operador também é um espaço de Banach.

Observação 1.2.3. *Como consequência direta da definição, se $T \in Bil(X \times Y, Z)$, então para todo $x \in X$ e $y \in Y$ temos $\|T(x,y)\|_Z \leq \|T\|\|x\|_X\|y\|_Y$.*

Definição 1.2.4. *Seja $T \in \mathscr{B}(X \times Y, Z)$. Para todo $x \in X$ e $y \in Y$ fixos, os operadores $T_x = T(x,\cdot) : Y \to Z$ e $T_y = T(\cdot, y) : X \to Z$ são lineares por definição e são chamados de operadores lineares associados ao operador bilinear T.*

Observação 1.2.5. *Se $T \in Bil(X \times Y, Z)$ então os operadores lineares T_x e T_y também são contínuos. A volta também vale nesse caso, pois X ou Y são espaços de Banach. Este fato é provado no livro de W. Rudin ([13], Teorema 2.17). A prova baseia-se no princípio de Banach-Steinhaus. No trabalho de A. Bényi e R. H. Torres [1] é dado um exemplo de um operador em que T_x e T_y são contínuos, mas T não é contínuo.*

Proposição 1.2.6. *Seja $T \in Bil(X \times Y, Z)$. Então*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1, \|y\|_Y \leq 1} \|T(x,y)\|_Z = \sup_{\|x\|_X = 1, \|y\|_Y = 1} \|T(x,y)\|_Z \ . \tag{1.2.10}$$

Demonstração: Seja

$$D = \{\|T(x,y)\|_Z \ : \ \|x\|_X = 1, \|y\|_Y = 1\} \text{ e } C = \{\|T(x,y)\|_Z \ : \ \|x\|_X \leq 1, \|y\|_Y \leq 1\} \ .$$

Temos $D \subset C$. Portanto

$$\sup_{\|x\|_X = 1, \|y\|_Y = 1} \|T(x,y)\|_Z = \sup D \leq \sup C = \sup_{\|x\|_X \leq 1, \|y\|_Y \leq 1} \|T(x,y)\|_Z \ . \tag{1.2.11}$$

Agora, seja $0 \neq x \in X$, $0 \neq y \in Y$, com $\|x\|_X \leq 1$ e $\|y\|_Y \leq 1$, então

$$\frac{\|T(x,y)\|_Z}{\|x\|_X \|y\|_Y} = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_X}, \frac{y}{\|y\|_Y} \right) \right\|_Z \leq \sup_{\|x'\|_X = 1, \|y'\|_Y = 1} \|T(x',y')\|_Z$$

e daí

$$\|T(x,y)\|_Z \leq \sup_{\|x'\|_X = 1, \|y'\|_Y = 1} \|T(x',y')\|_Z \|x\|_X \|y\|_Y \ .$$

Tomando o supremo, com $\|x\|_X \leq 1$ e $\|y\|_Y \leq 1$

$$\sup_{\|x\|_X \leq 1, \|y\|_Y \leq 1} \|T(x,y)\|_Z \leq \sup_{\|x'\|_X = 1, \|y'\|_Y = 1} \|T(x',y')\|_Z \ . \tag{1.2.12}$$

Portanto de (1.2.11) e (1.2.12) concluímos a demonstração. ■

A seguir vamos definir uma classe especial de operadores bilineares que será de grande importância nos capítulos posteriores do trabalho. No que segue, escreveremos

$$B_{r,X} = \{x \in X : \|x\|_X \leq r\}$$

para indicar a bola fechada de raio $r > 0$ com centro na origem de um espaço normado X. Quando estiver claro no contexto o espaço normado X, iremos indicar $B_{r,X}$ simplesmente por B_r, e no caso $r = 1$, denotamos $B_{1,X}$ por U_X.

Definição 1.2.7. *Sejam X, Y e Z espaços vetoriais normados. Um operador bilinear $T : X \times Y \to Z$ é chamado de operador bilinear compacto se $T(U_X \times U_Y)$ é pré-compacto em Z, ou seja, o fecho $\overline{T(U_X \times U_Y)}$ é compacto em Z.*

Proposição 1.2.8. *Sejam X, Y e Z espaços vetoriais normados e $T \in \mathscr{B}(X \times Y, Z)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *T é compacto;*

2. *$T(U_{X \times Y})$ é pré-compacto;*

3. *para todo* $r > 0$, $T(B_{r,X\times Y})$ *é pré-compacto;*

4. *para todo* $r_1, r_2 > 0$, $T(B_{r_1,X} \times B_{r_2,Y})$ *é pré-compacto;*

5. *para todo limitado* $M \subset X \times Y$, $T(M)$ *é pré-compacto;*

6. *para todo limitado* $A \subset X$, $B \subset Y$, $T(A \times B)$ *é pré-compacto;*

7. *para toda sequência limitada* $\{(x_n, y_n)\} \subset X\times Y$ *, a sequência* $\{T(x_n, y_n)\}$ *tem uma subsequência convergente em* Z.

Além disso, se Z *é um espaço de Banach, então* 1. *é também equivalente a:*

8. *para todo limitado* $M \subset X \times Y$, $T(M)$ *é totalmente limitado.*

Demonstração: Ver o apéndice do trabalho de A. Bényi e R. H. Torres [1]. ■

O conjunto de todos operadores bilineares compactos $T : X \times Y \to Z$ será denotado por $KBil(X \times Y, Z)$, onde X, Y e Z são espaços vetoriais normados. Com esta notação temos a seguinte proposição.

Proposição 1.2.9. *Sejam* X, Y *e* Z *espaços vetoriais normados. Se* Z *é um espaço de Banach, então* $KBil(X \times Y, Z)$ *é um subespaço fechado de* $Bil(X \times Y, Z)$.

Demonstração: Ver a Proposição 3 do trabalho de A. Bényi e R. H. Torres [1]. ■

Observação 1.2.10. *Sejam* X, Y *e* Z *espaços vetoriais normados e* $T \in Bil(X \times Y, Z)$. *Sejam* T_x, T_y *os operadores lineares definidos em 1.2.4. Se* $T \in KBil(X \times Y, Z)$ *então temos que os operadores lineares associados* T_x *e* T_y *também são compactos. Veremos no Exemplo 1.2.11 que se* T_x *e* T_y *forem compactos não temos necessariamente que* T *seja compacto, mesmo se* X, Y *e* Z *forem espaços de Banach. No trabalho de Ramanujan e Schock [11], temos na Proposição 2.1 uma condição necessária e suficiente que nos garante que se* T_x *e* T_y *forem compactos então* T *é compacto.*

Exemplo 1.2.11. *Sejam* $x, y \in l^2$ *tal que* $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ *e* $z = (z_n) \in l^1$. *Defina* $T : l^2 \times l^2 \to l^1$ *como*

$$T(x, y) = z \Leftrightarrow z_n = x_n y_n \ .$$

Temos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|z_n| &= \sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n| \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\ ,\end{aligned}$$

pois $x, y \in l^2$. Logo T é bilinear e está bem definido. Seja $x \in l^2$ fixo. Defina o operador linear $T_x^n : l^2 \to l^1$ como $T_x^n(y) = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n, 0, 0, \ldots)$. Temos que T_x^n é um operador de posto finito, logo compacto. Como $x \in l^2$, então $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, logo temos que, para todo $y \in l^2$ com $\|y\|_{l^2} = 1$

$$\|T_x^n(y) - T_x(y)\|_{l^1} = \sum_{i=n+1}^{\infty}|x_iy_i| \to 0\ ,\ \text{quando } n \to \infty$$

Logo T_x é compacto. O mesmo vale para o operador T_y, para todo $y \in l^2$ fixo.

Seja $(e_n)_n$ a base canônica de l^2. Temos que $(e_n, e_n)_n$ é uma sequência limitada em $l^2 \times l^2$ e $T(e_n, e_n) = e_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como

$$\|e_i - e_j\|_{l^1} = 2$$

para todo $i, j \in \mathbb{N}$ com $i \neq j$, então $(e_n)_n$ não tem subsequência convergente em l^1, logo T não é compacto.

Exemplo 1.2.12. *Seja $T \in Bil(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$. Temos que para todo limitado $B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $T(B)$ é pré-compacto em $\mathbb{R}^p$. Portanto $T \in KBil(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$.*

No que segue, $c_0 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ a_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \to 0\}$.

Exemplo 1.2.13. *Seja $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \subset l^\infty$. Defina $T : l^2 \times l^2 \to l^1$ como, se $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in l^2$ e $z = (z_n) \in l^1$,*

$$T(x, y) = z \Leftrightarrow z_n = a_nx_ny_n\ . \tag{1.2.13}$$

Note que o operador é bilinear e está bem definido, pois, devido a desigualdade de Hölder, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n| = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n||x_n||y_n| \leq \|a\|_{l^\infty}\|x\|_{l^2}\|y\|_{l^2}\ .$$

Além disso, se $z = (z_n)$ como em (1.2.13), podemos definir

$$T_n : l^2 \times l^2 \to l^1, T_n(x, y) = (z_1, z_2, \ldots, z_n, 0, 0, \ldots)\ .$$

Visto que $T_n(l^2 \times l^2)$ está contido em um subespaço n-dimensional de l^1, e que para qualquer *subconjunto limitado U de $l^2 \times l^2$, temos que $T_n(U)$ é um subconjunto limitado de um subespaço n-dimensional de l^1, concluímos que necessariamente $T_n(U)$ é pré-compacto. Assim, T_n é um operador bilinear compacto. Agora, para todo $x, y \in U_{l^2}$, temos*

$$\|T_n(x,y) - T(x,y)\|_{l^1} = \|(0,\ldots,0,z_{n+1},\ldots)\|_{l^1} = \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j||x_j||y_j|$$

implicando que $\|T_n - T\| \to 0$ quando $n \to \infty$, pois $a_j \to 0$. Logo pela Proposição 1.2.9 concluímos que T é compacto.

Sejam H_1, H_2 e K espaços de Hilbert sobre o corpo dos reais. Sabemos que $T : H_1 \to K$ é um operador linear compacto se, e somente se, é limite de uma sequência de operadores de posto finito. Vamos mostrar que este resultado também vale para operadores bilineares $T \in KBil(H_1 \times H_2, K)$.

Definição 1.2.14. *Seja $a_i \in Bil(H_1 \times H_2, \mathbb{R})$, $i \in \mathbb{N}$. Definimos*

$$a_i \otimes z_i(x,y) = a_i(x,y)z_i\,,$$

para todo $(x,y) \in H_1 \times H_2$ e $z_i \in K$. $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ é finito se

$$T = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes z_i\,.$$

Isto é,

$$T(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x,y)z_i\,.$$

Definição 1.2.15. *$T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ é aproximável se existe uma sequência de operadores finitos T_n tal que*

$$\lim_{n\to\infty} ||T - T_n|| = 0\,.$$

Sejam X, Y e Z espaços de Banach e $T \in Bil(X \times Y, Z)$, sabemos que em geral o conjunto

$$T(X \times Y) = \{T(x,y) : x \in X\,, y \in Y\}$$

não é um subespaço vetorial de Z, e será chamado de imagem do operador T. Em [3] temos uma definição de $Rank(T)$ de um operador T no contexto multilinear. Como um caso particular para o contexto bilinear, o posto de $T \in Bil(X \times Y, Z)$ é dado por

$$Rank(T) = dim_Z(< T(X \times Y) >)\,.$$

Isto quer dizer que $Rank(T)$ é a dimensão do subespaço vetorial de Z gerado por $T(X \times Y)$.

Definição 1.2.16. *$T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ é um operador de posto finito se*

$$Rank(T) < \infty\,.$$

Definição 1.2.17. *Seja X um espaço de Banach, e $E \subseteq X$.*

1. *E é compacto se toda cobertura aberta de E contém uma subcobertura finita.*
2. *E é sequencialmente compacto se toda sequência (x_n) de E contém uma subsequência convergente, cujo limite pertence a E.*
3. *E é totalmente limitado se, dado $\varepsilon > 0$, existem elementos $x_1, \ldots, x_N \in E$ tal que*
$$E \subset \bigcup_{k=1}^{N} B(x_k, \varepsilon)\,.$$

Onde $B(x_k, \varepsilon) = \{x \in X \,:\, \|x - x_k\|_X < \varepsilon\}$.

Teorema 1.2.18. *Se $E \subseteq X$, então são equivalentes:*

1. *E é compacto;*
2. *E é sequencialmente compacto;*
3. *E é fechado e totalmente limitado.*

Corolário 1.2.19. *Se $E \subseteq X$ é totalmente limitado, então $\overline{E}$ é compacto.*

Proposição 1.2.20. *Se $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ tem posto finito, então T é compacto.*

Demonstração: Visto que T é limitado, $T(U_{H_1 \times H_2})$ é um subconjunto limitado de $R(T) =< T(H_1 \times H_2) >$, onde $dim(R(T)) < \infty$. Como todo espaço vetorial de dimensão finita é fechado, então $\overline{T(U_{H_1 \times H_2})}$ é fechado e limitado, assim T é compacto. ■

Proposição 1.2.21. *Se $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ então são equivalentes:*

1. *T tem posto finito;*
2. *T é finito.*

Demonstração: 1) $\rightarrow$ 2). Visto que T tem posto finito, $R(T) =< T(H_1 \times H_2) >$ é um subespaço de dimensão finita de K, digamos $dim(R(T)) = N$. Então $R(T)$ é fechado e seja $z_1, \ldots, z_N$ uma base ortonormal de $R(T)$. Dado $(x, y) \in H_1 \times H_2$, temos $T(x, y) \in K$, e $T(x, y) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i z_i$. Visto que $\{z_i\}$ é uma base ortonormal,
$$< T(x, y), z_j >=< \sum_{i=1}^{N} \alpha_i z_i, z_j >= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i < z_i, z_j >= \alpha_j < z_j, z_j >= \alpha_j\,.$$

Assim, se $a_i(z_i) : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por $a_i(z_i)(x, y) =< T(x, y), z_i >$, temos que $a_i(z_i) \in Bil(H_1 \times H_2, \mathbb{R})$, logo

$$\begin{aligned} T(x,y) &= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i z_i = \sum_{i=1}^{N} < T(x,y), z_i > z_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} a_i(z_i)(x,y) z_i \,. \end{aligned}$$

Visto que $a_i(z_i) \in Bil(H_1 \times H_2, \mathbb{R})$, para todo $i = 1, \ldots, N$, T é finito.

2) $\rightarrow$ 1). Se $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ é finito, então $T(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x,y) z_i$, para todo $(x,y) \in H_1 \times H_2$. Seja $M =< z_1, \ldots, z_n >\subset K$. Então, $dim(M) < \infty$. Desde que $R(T) =< T(H_1 \times H_2) >\subset M$, temos $dim(R(T)) < \infty$. Isto implica que T é um operador de posto finito. ■

Corolário 1.2.22. *Se $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ é finito, então T é compacto.*

Corolário 1.2.23. *Se $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ é aproximável, então T é compacto.*

Proposição 1.2.24. *Se $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ é compacto, então $\overline{T(H_1 \times H_2)}$ é um subespaço separável de K.*

Demonstração: Como $\overline{T(U_{H_1 \times H_2})}$ é compacto, ele é totalmente limitado. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar um conjunto finito de bolas com raio $\frac{1}{n}$, com centros em $\overline{T(U_{H_1 \times H_2})}$, e que cobre $\overline{T(U_{H_1 \times H_2})}$. Considerando o conjunto de todas essas bolas, para cada n obtemos uma quantidade enumerável de bolas cobrindo $\overline{T(U_{H_1 \times H_2})}$. Isto implica que $\overline{T(U_{H_1 \times H_2})}$ contém um subconjunto denso enumerável. Podemos repetir esse processo para cada raio $k \in \mathbb{N}$. Portanto, obtemos um subconjunto denso enumerável para $\overline{T(H_1 \times H_2)}$. ■

Teorema 1.2.25. *Se $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$, então são equivalentes:*

1. *T é compacto;*
2. *existe uma sequência de operadores de posto finito $T_n \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ tal que $T_n \rightarrow T$.*

Demonstração: 2) $\rightarrow$ 1) Segue da Proposição 1.2.9.

1) $\rightarrow$ 2). Suponha que T é compacto. Seja $R =< \overline{T(H_1 \times H_2)} >$. Se $dim(R) < \infty$, então T tem posto finito. Vamos assumir que $dim(R) = \infty$. Pela Proposição 1.2.24, R

é separável, então existe uma base ortonormal enumerável $\{e_n\}$ para R. Dado $(x,y) \in H_1 \times H_2$, então $T(x,y) \in R$ e $T(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} < T(x,y), e_i > e_i$. Definimos

$$T_N(x,y) = \sum_{i=1}^{N} < T(x,y), e_i > e_i \,.$$

Temos que $T_N = P_N T$, onde P_N é a projeção ortogonal de K no subespaço fechado $< e_1, \ldots, e_N >$. Da definição, $T_N(x,y) \to T(x,y)$ para todo $(x,y) \in H_1 \times H_2$. Isto implica que $T_N \to T$ na topologia forte, mas queremos convergência na norma do operador, isto é, $\sup\limits_{\|(x)\|_{H_1}=1, \|y\|_{H_2}=1} \|T_N(x,y) - T(x,y)\|_K \to 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, desde que $T(U_{H_1 \times H_2})$ é totalmente limitado, ele é coberto por um número finito de bolas com raio $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ e centros em $T(U_{H_1 \times H_2})$. Assim, existem $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ pertencentes a $U_{H_1 \times H_2}$ tal que

$$T(U_{H_1 \times H_2}) \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(T(x_k, y_k), \varepsilon/3) \,.$$

Visto que $\lim\limits_{N \to \infty} \|T_N(x_k, y_k) - T(x_k, y_k)\|_K = 0$, $k = 1, \ldots, m$, podemos determinar $N_0 > 0$ tal que, para todo $N > N_0$,

$$\|T_N(x_k, y_k) - T(x_k, y_k)\|_K < \frac{\varepsilon}{3} \,, k = 1, 2, \ldots, m \,.$$

Dado qualquer $(x,y) \in H_1 \times H_2$, com $\|x\|_{H_1} = \|y\|_{H_2} = 1$ e $N > N_0$, então $T(x,y) \in B(T(x_k, y_k), \varepsilon/3)$ para algum k, isto é

$$\|T(x,y) - T(x_k, y_k)\|_K < \frac{\varepsilon}{3} \,.$$

Então, temos

$$\begin{aligned} \|T_N(x,y) - T_N(x_k, y_k)\|_K &= \|P_N T(x,y) - P_N T(x_k, y_k)\|_K \\ &< \|P_N\| \|T(x,y) - T(x_k, y_k)\|_K \\ &< \tfrac{\varepsilon}{3} \,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|T(x,y) - T_N(x,y)\|_K &\leq \|T(x,y) - T(x_k, y_k)\|_K + \|T(x_k, y_k) - T_N(x_k, y_k)\|_K \\ &\quad + \|T_N(x_k, y_k) - T_N(x,y)\|_K \\ &< \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \,. \end{aligned}$$

Desde que $\|x\|_{H_1} = \|y\|_{H_2} = 1$ é arbitrário, e $\|T - T_N\| \leq \varepsilon$ para todo $N > N_0$, obtemos a convergência na norma. ■

Sejam H, K espaços de Hilbert separáveis. Dizemos que um operador linear limitado $T : H \to K$ é Hilbert-Schmidt se existe uma base ortonormal (e_i) de H, $i \in \mathbb{N}$, tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} ||T(e_i)||_K^2 < \infty$$

Temos que todo operador linear Hilbert-Schmidt é compacto. Para mais detalhes sobre os operadores lineares Hilbert-Schmidt ver ([8], Capítulo 26).

M. Matos em [7] define uma aplicação de Hilbert-Schmidt no contexto multilinear. Como um caso particular, temos a seguir na Definição 1.2.26 a definição do contexto multilinear para o nosso caso bilinear, e em seguida mostraremos que os operadores bilineares Hilbert-Schmidt também são compactos.

Definição 1.2.26. *Sejam H_1, H_2, K espaços de Hilbert separáveis. $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ é dito ser Hilbert-Schmidt se existem bases ortonormais (x_i), (y_i), $i \in \mathbb{N}$, de H_1, H_2, respectivamente, tal que*

$$\|T\|_{HS} = \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} \|T(x_i, y_j)\|_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \,.$$

Denotamos por $HS(H_1 \times H_2, K)$ o espaço vetorial de todos operadores Hilbert-Schmidt. Pode-se mostrar que é um espaço de Hilbert com a norma $\| \cdot \|_{HS}$ definida pelo produto interno

$$< T, S >= \sum_{i,j=1}^{\infty} < T(x_i, y_j), S(x_i, y_j) > \ .$$

A Proposição 1.2.27 nos mostra que a Definição 1.2.26 não depende das bases ortonormais que escolhemos em H_1 e H_2, respectivamente. Este resultado aparece em [7], para o caso multilinear, com uma breve descrição da sua demonstração. Devido a sua importância, preferimos apresentar este resultado para o caso bilinear com uma demonstração completa.

Proposição 1.2.27. *Seja $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$, então a convergência $\sum_{i,j=1}^{\infty} \|T(x_i, y_j)\|_K^2$ não depende das bases ortonormais (x_i), (y_i), $i \in \mathbb{N}$, que escolhemos em H_1, H_2, respectivamente.*

Demonstração: Sejam (x_i), (y_j), $i, j \in \mathbb{N}$, bases ortonormais de H_1, H_2, respectivamente tal que $\sum_{i,j=1}^{\infty} \|T(x_i, y_j)\|_K^2 < +\infty$. Consideraremos agora $\alpha = (u_i)$, uma base ortonormal de H_1, e $\gamma = (w_j)$, uma base ortonormal de H_2. Seja (z_k), $k \in \mathbb{N}$, base ortonormal de K. No que segue, para cada $x \in H_1$ e $y \in H_2$ fixos, temos que $T_x(\cdot) = T(x, \cdot) : H_2 \to K$ e $T_y(\cdot) = T(\cdot, y) : H_1 \to K$ são operadores lineares limitados tendo como seus adjuntos de Hilbert dados por $T_x^*(\cdot) : K \to H_2$ e $T_y^*(\cdot) : K \to H_1$, respectivamente. Pela identidade de Parseval, temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{\infty} \|T(x_i, y_j)\|_K^2 &= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_i, y_j)\|_K^2\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |< T(x_i, y_j), z_k >|^2\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |< T_{x_i}(y_j), z_k >|^2\right)\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |< y_j, T_{x_i}^*(z_k) >|^2\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} |< T_{x_i}^*(z_k), y_j >|^2\right)\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|T_{x_i}^*(z_k)\|_{H_2}^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} |< T_{x_i}^*(z_k), w_j >|^2\right)\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} |< z_k, T_{x_i}(w_j) >|^2\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |< T(x_i, w_j), z_k >|^2\right)\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_i, w_j)\|_K^2\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|T(x_i, w_j)\|_K^2\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |< T(x_i, w_j), z_k >|^2\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |< T_{w_j}(x_i), z_k >|^2\right)\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |< x_i, T_{w_j}^*(z_k) >|^2\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} |< T_{w_j}^*(z_k), x_i >|^2\right)\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|T_{w_j}^*(z_k)\|_{H_1}^2\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} |< T_{w_j}^*(z_k), u_i >|^2\right)\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} |< T(u_i, w_j), z_k >|^2\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |< T(u_i, w_j), z_k >|^2\right)\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|T(u_i, w_j)\|^2\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{\infty} \|T(u_i, w_j)\|_K^2 .
\end{aligned}
$$

Portanto provamos o que queríamos. ∎

Teorema 1.2.28. *Seja $T \in HS(H_1 \times H_2, K)$, então T é compacto.*

Demonstração: Sejam (x_i), (y_i), $i \in \mathbb{N}$, bases ortonormais fixas de H_1, H_2, respectivamente. Para todo $x \in H_1$ e $y \in H_2$, temos, $x = \sum_{i=1}^{\infty} < x, x_i > x_i$ e $y = \sum_{j=1}^{\infty} < y, y_j > y_j$.
Pela identidade de Parseval temos

$$\|x\|_{H_1}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} | < x, x_i > |^2 \quad \text{e} \quad \|y\|_{H_2}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} | < y, y_j > |^2 .$$

Então,

$$T(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} < x, x_i >< y, y_j > T(x_i, y_j).$$

Seja $T_n : H_1 \times H_2 \to K$ dado por

$$T_n(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} < x, x_i >< y, y_j > T(x_i, y_j).$$

Note que T_n é de posto finito, logo compacto. Temos

$$\begin{aligned}
\|T(x,y) - T_n(x,y)\|_K &= \Big\| \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} < x, x_i >< y, y_j > T(x_i, y_j)\Big\|_K \\
&\leq \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} \| < x, x_i >< y, y_j > T(x_i, y_j)\|_K \\
&\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} | < x, x_i > | \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} | < y, y_j > |^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} \|T(x_i, y_j)\|_K^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|y\|_{H_2} \sum_{i=n+1}^{\infty} | < x, x_i > | \left[\sum_{j=n+1}^{\infty} \|T(x_i, y_j)\|_K^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|y\|_{H_2} \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} | < x, x_i > |^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} \|T(x_i, y_j)\|_K^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|y\|_{H_2}\|x\|_{H_1} \left[\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} \|T(x_i, y_j)\|_K^2\right]^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

Logo, se x e y forem unitários, temos

$$\|T(x,y) - T_n(x,y)\|_K \leq \left[\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} \|T(x_i, y_j)\|_K^2\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Como $T \in HS(H_1 \times H_2, K)$, então

$$\left[\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty} \|T(x_i, y_j)\|_K^2\right]^{\frac{1}{2}} \to 0\,,$$

quando $n \to \infty$. Logo, pelo Teorema 1.2.25, concluímos que T é compacto.

$\blacksquare$

Capítulo 2

Autovalores e Representação de Schur

Ao longo deste capítulo, H é um espaço de Hilbert separável sobre o corpo dos reais. Por simplicidade, denotamos o conjunto $Bil(H \times H, H)$ simplesmente por $Bil(H)$. Na primeira seção deste capítulo definimos quando um operador $T \in Bil(H)$ é autoadjunto, e em seguida mostramos algumas propriedades e exemplos. Após essa etapa definimos o que vem a ser um autovalor e autovetor de um operador bilinear $T \in Bil(H)$, e mostramos que algumas propriedades de autovalores e autovetores, que valem para operadores lineares, não valem para operadores bilineares.

Na segunda seção mostramos que um operador $T \in Bil(H)$, compacto, autoadjunto e não nulo possui um autovalor $\lambda = \|T\|$ e um correspondente autovetor unitário.

Na terceira seção damos uma nova definição de um autovalor de um operador $T \in Bil(H)$ e mostramos quando $T \in Bil(H)$, compacto, autoadjunto e não nulo tem uma Representação de Schur.

2.1 Operadores Bilineares Autoadjuntos e Autovalores

Seja $L : H \to H$ um operador linear limitado. Baseado no Teorema $VII.4$ de [12], temos a seguinte definição:

Definição 2.1.1. *Chamamos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \cdot, x_n > x_n \tag{2.1.1}$$

uma representação de Schur do operador linear limitado $L : H \to H$ *se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$;
2. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência ortonormal extendida de* H, *ou seja* $< x_i, x_j >= 0$ *se* $i \neq j$ *e cada* x_i *é unitário ou nulo para todo* $i \in \mathbb{N}$;
3. $L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < x, x_n > x_n$, *para todo* $x \in H$.

A representação de Schur é dita ser monótona se $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq 0$.

Observação 2.1.2. *Se o espaço de hilbert* H *na Definição 2.1.1 for de dimensão finita, digamos* $dim(H) = N$, *então podemos ter no máximo* N *vetores linearmente independentes. Em* (2.1.1), *se*

$$L(x) = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n < x, x_n > x_n \,,$$

para todo $x \in H$, $k \leq N$. *Colocamos* $\lambda_i = 0$ *e* $x_i = 0$ *para* $i \geq k$ *e assim temos*

$$L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < x, x_n > x_n \,,$$

para todo $x \in H$.

Um teorema clássico da Análise Funcional é o Teorema Espectral (Teorema 2.1.3) o qual estabelece condições para que um operador $L \in \mathfrak{L}(H)$ possua uma representação de Schur monótona.

Teorema 2.1.3. *Seja* $L : H \to H$ *um operador linear compacto, autoadjunto e não nulo. Então* L *tem uma representação de Schur monótona.*

Seja $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um conjunto ortonormal de H e $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$. É simples verificar que o operador $T : H \times H \to H$ definido como

$$T(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < x, x_n >< y, x_n > x_n \tag{2.1.2}$$

para todo $x, y \in H$ está bem definido e é bilinear. Temos então a seguinte definição.

Definição 2.1.4. *Seja $T \in \mathscr{B}(H \times H, H)$. Chamamos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \cdot, x_n >< \cdot, x_n > x_n \tag{2.1.3}$$

uma representação de Schur do operador bilinear T, se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$;
2. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência ortonormal extendida de H, ou seja $< x_i, x_j >= 0$ se $i \neq j$ e cada x_i é unitário ou nulo para todo $i \in \mathbb{N}$;*
3. $T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < x, x_n >< y, x_n > x_n$, *para todo $x, y \in H$.*

A representação de Schur é dita ser monótona se $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq 0$.

Se o espaço de hilbert H na Definição 2.1.4 for de dimensão finita, digamos $dim(H) = N$, de maneira análoga a Observação 2.1.2, obtemos a representação de Schur de $T \in \mathscr{B}(H \times H, H)$.

Nosso objetivo agora é mostrar quando um operador bilinear tem uma representação de Schur monótona. Para isso teremos primeiro que definir quando um operador $T \in Bil(H)$ é autoadjunto. Antes, vamos definir os operadores bilineares simétricos.

Seja $T \in Bil(H)$ e $x, y \in H$. Geralmente $T(x,y) \neq T(y,x)$, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 2.1.5. *Seja $T \in Bil(\mathbb{R}^3)$ dado pela matriz abaixo*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Se $x = (1,1,1)$ e $y = (3,2,2)$, temos $T(x,y) = (7,10,7)$ e $T(y,x) = (8,9,7)$.

Definição 2.1.6. *Um operador bilinear $T \in Bil(H)$ é dito ser simétrico se*

$$T(x,y) = T(y,x),$$

para todo $x, y \in H$.

No que segue, denotaremos por $\mathfrak{L}(H) = \{L : H \to H \,;\, L \text{ é linear e limitado } \}$ o espaço vetorial dos operadores lineares e limitados de H. Sejam $T \in Bil(H)$ e

$$\phi_1 : H \to \mathfrak{L}(H) \qquad ; \qquad \phi_2 : H \to \mathfrak{L}(H)$$

definidos como

$$\phi_1(x) : H \to H \quad \text{por} \quad y \mapsto \phi_1(x)(y) = T(x, y)$$
$$\phi_2(x) : H \to H \quad \text{por} \quad y \mapsto \phi_2(x)(y) = T(y, x)\,.$$

Como T é um operador bilinear qualquer, temos que em geral $\phi_1(x) \neq \phi_2(x)$. Mas se T for simétrico, temos $\phi_1(x) = \phi_2(x)$, para todo $x \in H$.

Do fato de $T \in Bil(H)$, temos que $\phi_1(x), \phi_2(x) \in \mathfrak{L}(H)$. Sejam $\phi_1^*(x), \phi_2^*(x)$ os operadores lineares adjuntos de $\phi_1(x), \phi_2(x)$, respectivamente, ou seja, para todos $x, y, z \in H$, temos

$$\begin{aligned} < \phi_1(x)(y), z > &= < y, \phi_1^*(x)(z) > \\ < \phi_2(x)(y), z > &= < y, \phi_2^*(x)(z) > \ . \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

A Definição 2.1.7 a seguir de um operador bilinear autoadjunto é devida a Phillips em [9].

Definição 2.1.7. *$T \in Bil(H)$ é autoadjunto se $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ forem operadores lineares autoadjuntos, ou seja, $\phi_1(x) = \phi_1^*(x)$ e $\phi_2(x) = \phi_2^*(x)$ para todo $x \in H$.*

Temos então como consequência que, se $T \in Bil(H)$ for autoadjunto, então temos as seguintes igualdades devido a (2.1.4):

$$\begin{aligned} < T(x, y), z > &= < y, T(x, z) > \\ < T(y, x), z > &= < y, T(z, x) > \ . \end{aligned}$$

Observação 2.1.8. *Seja $T \in Bil(H)$ não nulo e $(x, y) \in H \times H$ fixo. Sejam T_x e T_y os operadores lineares associados ao operador bilinear T de acordo com a Definição 1.2.4. É simples verificar que T é autoadjunto se, e somente se, T_x e T_y são operadores lineares autoadjuntos, para todo $x, y \in H$ fixos. Vamos analisar o operador $B \in Bil(\mathbb{R}^3)$ dado pela matriz*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Afirmamos que B não é simétrico, logo não é autoadjunto. Sejam $x = (x_1,\, x_2,\, x_3)$, $y = (y_1,\, y_2,\, y_3) \in \mathbb{R}^3$ fixos. É fácil de ver que as matrizes associadas aos operadores lineares $B_x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $B_y : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ são, respectivamentes,

$$[B_x] = \begin{bmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_2 + x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad [B_y] = \begin{bmatrix} 0 & y_3 & y_2 \\ y_3 & y_1 & y_1 \\ y_2 & y_1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Note que $B_y : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *é autoadjunto para todo* $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ *fixo e* $B_x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *é autoadjunto para todo* $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ *fixo tal que* $x_2 = 0$. *Temos então que é fundamental a hipótese de que os operadores lineares associados* T_x *e* T_y *sejam autoadjuntos para todo* $x, y \in H$.

Observação 2.1.9. *Seja* $T \in Bil(H)$ *autoadjunto. Se* H *for espaço de Hilbert sobre o corpo dos números complexos, temos o seguinte:*

$$\begin{aligned} i < T(x,y), z > &= < T(ix,y), z >=< y, T(ix,z) > \\ &= -i < y, T(x,z) >= -i < T(x,y), z > \\ &= -i < T(x,y), z > \ . \end{aligned}$$

Portanto, $T(x,y) = 0$ *para todo* $x, y \in H$. *Ou seja, o único operador* $T \in Bil(H)$ *autoadjunto de acordo com a Definição 2.1.7 é o operador nulo.*

Proposição 2.1.10. *Se* $T \in Bil(H)$ *é autoadjunto, então* T *é simétrico.*

Demonstração: Sejam $x, y, z \in H$ quaisquer. Então,

$$\begin{aligned} < T(x,y), z > &= < x, T(z,y) >=< T(z,x), y > \\ &= < z, T(y,x) >=< T(y,x), z > \\ &= < T(y,x), z >, \end{aligned}$$

para todo $z \in H$, logo $T(x,y) = T(y,x)$. ■

Uma pergunta natural surge. Será que se $T \in Bil(H)$ for simétrico então T é autoadjunto? A resposta é não, conforme os Exemplos 2.1.11 e 2.1.12.

Exemplo 2.1.11. *Seja* $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *um operador bilinear simétrico. O que podemos falar da matriz do operador bilinear* B*, dada uma base ordenada fixa* $X = \{u_1, \ldots, u_n\}$ *de* $\mathbb{R}^n$*?*

Sejam $x = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n$ *e* $y = y_1u_1 + \ldots + y_nu_n$ *elementos quaisquer de* $\mathbb{R}^n$. *Temos que*

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j B(u_i, u_j) \, .$$

Seja $B(u_i, u_j) = b_{i1j}u_1 + \ldots + b_{inj}u_n$. *Temos que* $B(u_i, u_j) = B(u_j, u_i) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_{jki}u_k$. *Mas* $B(u_i, u_j) = \sum_{k=1}^{n} b_{ikj}u_k$. *Como* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *é base, seus vetores são linearmente independentes, portanto temos que* $b_{ikj} = b_{jki}$. *Concluímos que, se* $[B]_X = (b_{ikj})$ *é a matriz associada ao operador bilinear simétrico* B*, fixada uma base ordenada* X*, então se* b_{ikj} *são seus elementos, temos* $b_{ikj} = b_{jki}$, $i, k, j = 1, \ldots, n$.

Se $T : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *é um operador bilinear simétrico e* $X = \{u_1, u_2, u_3\}$ *é uma base ordenada fixa de* $\mathbb{R}^3$*, a matriz* $[B]_X$ *associada ao operador bilinear* T *tem a seguinte forma:*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & c & g & h & i & o & p & q \\ b & d & e & h & j & m & p & r & s \\ c & e & f & i & m & n & q & s & t \end{array}\right].$$

Note que cada camada que compõe a matriz é uma matriz simétrica.

Exemplo 2.1.12. *Vamos agora estudar o comportamento da matriz de um operador bilinear autoadjunto* $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Seja $X = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *a base canônica de* $\mathbb{R}^n$ *e* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *tais que* $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ *e* $z = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k e_k$. *Seja* $[B]_X = (b_{ikj})$ *a matriz associada ao operador bilinear* T*, fixada a base canônica* X*, tal que* $B(e_i, e_j) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_{ikj}e_k$. *Note que*

$$< B(e_i, e_j), e_k >= b_{ikj}.$$

Temos:

$$B(x, y) = \sum_i \sum_j x_i y_j B(e_i, e_j) \qquad B(x, z) = \sum_i \sum_k x_i z_k B(e_i, e_k)$$

$$B(y, x) = \sum_j \sum_i y_j x_i B(e_j, e_i) \qquad B(z, x) = \sum_k \sum_i z_k x_i B(e_k, e_i)$$

$$(1) \quad < B(x, y), z >= \sum_k \sum_i \sum_j x_i y_j z_k < B(e_i, e_j), e_k >, \qquad < B(e_i, e_j), e_k >= b_{ikj}$$

$$(2) \quad < y, B(x, z) >= \sum_j \sum_i \sum_k y_j x_i z_k < e_j, B(e_i, e_k) >, \qquad < e_j, B(e_i, e_k) >= b_{ijk}$$

$$(3) \quad < B(y, x), z >= \sum_k \sum_j \sum_i y_j x_i z_k < B(e_j, e_i), e_k >, \qquad < B(e_j, e_i), e_k >= b_{jki}$$

$$(4) \quad < y, B(z, x) >= \sum_j \sum_k \sum_i y_j z_k x_i < e_j, B(e_k, e_i) >, \qquad < e_j, B(e_k, e_i) >= b_{kji}$$

Afirmação: $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é um operador bilinear autoadjunto se, e somente se,* $b_{ikj} = b_{ijk} = b_{jki} = b_{kji}$.
Se B *é autoadjunto, logo* $(1) = (2)$ *e* $(3) = (4)$*, portanto* $b_{ikj} = b_{ijk}$ *e* $b_{jki} = b_{kji}$*. Como* B *é simétrico, temos* $B(e_i, e_j) = B(e_j, e_i)$*, portanto* $b_{ikj} = b_{jki}$.
Por outro lado, se $b_{ikj} = b_{ijk} = b_{jki} = b_{kji}$*, temos* $(1) = (2)$ *e* $(3) = (4)$*, e por definição* B *é autoadjunto.*
Segue abaixo a matriz de um operador bilinear autoadjunto $T \in Bil(\mathbb{R}^3)$*, fixada a base canônica de* $\mathbb{R}^3$*.*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & c & b & d & e & c & e & f \\ b & d & e & d & r & g & e & g & h \\ c & e & f & e & g & h & f & h & s \end{array}\right].$$

Definição 2.1.13. *Seja* $Q : H \to H$ *operador definido por*

$$Q(x) = T(x, x)$$

para todo $x \in H$*, onde* $T \in \mathscr{B}(H \times H, H)$*. Neste caso dizemos que* Q *é o operador quadrático associado ao operador* $T \in \mathscr{B}(H \times H, H)$*. Dizemos que o operador quadrático* Q *é contínuo (compacto ou autoadjunto) se o operador bilinear* T *é contínuo (compacto ou autoadjunto, respectivamente).*

Afirmamos que o conjunto de todos os operadores quadráticos associados aos operadores bilineares $T \in Bil(H)$ é um espaço vetorial normado munido da norma

$$\|Q\| = \sup_{\|x\|_H = 1} \|Q(x)\|_H \,.$$

Note que o operador quadrático $Q : H \to H$ associado a $T \in \mathscr{B}(H \times H, H)$ não é linear, pois para todo $a \in \mathbb{R}$, temos

$$Q(ax) = T(ax, ax) = a^2 T(x, x) = a^2 Q(x)\,.$$

Phillips em [9] faz a seguinte definição de autovalor e autovetor para um operador bilinear $T \in Bil(H)$.

Definição 2.1.14. *Seja* $T \in Bil(H)$*. Dizemos que um número real* λ *é autovalor de* T *se o conjunto*

$$W(\lambda) = \{x \in H : T(x, x) = \lambda x \ , \ x \neq 0\}$$

é não vazio, ou seja, existe $x \in H$*,* $x \neq 0$*, tal que* $T(x, x) = \lambda x$*. Neste caso dizemos que* x *é um autovetor de* T *associado ao autovalor* λ*.*

Note que se Q for o operador quadrático do operador T, então $Q(x) = \lambda x$ e dizemos que λ é autovalor de Q com autovetor associado x.

Seja $L : H \to H$ um operador linear limitado e τ seu autovalor. Seja

$$V(\tau) = \{x \in H \ : \ L(x) = \tau x\}.$$

Sabemos que $V(\tau)$ é um subespaço de H. Temos também que $|\tau| \leq \|L\|_{\mathfrak{L}(H)}$. Esses mesmos resultados não valem mais para um autovalor λ de um operador bilinear $T \in Bil(H)$.

Proposição 2.1.15. *Seja $T \in Bil(H)$. Se T possui um autovalor $\lambda \neq 0$, então qualquer número real $\gamma \neq 0$ é autovalor de T. O conjunto dos autovetores associados ao autovalor λ, ou seja $W(\lambda)$, não é um subespaço vetorial de H .*

Demonstração: Seja $0 \neq \gamma \in \mathbb{R}$ qualquer e $y = \dfrac{\gamma}{\lambda}x \in H$. Temos

$$\begin{aligned} T(y,y) &= T(\frac{\gamma}{\lambda}x, \frac{\gamma}{\lambda}x) = \frac{\gamma^2}{\lambda^2}T(x,x) \\ &= \frac{\gamma^2}{\lambda^2}\lambda x = \gamma(\frac{\gamma x}{\lambda}) \\ &= \gamma y\,. \end{aligned}$$

Portanto $T(y,y) = \gamma y$. Logo γ é autovalor de T com um autovetor associado y.

Seja $x \in W(\lambda)$, ou seja, temos $T(x,x) = \lambda x$. Seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante não nula. Temos $T(cx,cx) = c^2T(x,x) = c^2\lambda x$. Logo $cx \notin W(\lambda)$. ∎

Observação 2.1.16. *De acordo com a Definição 2.1.14, se λ e γ forem autovalores de $T \in Bil(H)$, tal que $\lambda \neq \gamma$, então $W(\lambda) \cap W(\gamma) = \emptyset$.*

Seja $L \in \mathfrak{L}(H)$ compacto, autoadjunto e não nulo. De acordo com o Teorema 2.1.3, L tem uma representação de Schur monótona, ou seja,

$$L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < x, x_n > x_n \tag{2.1.5}$$

para todo $x \in H$. Sabemos que os λ_n que aparecem em (2.1.5) são os únicos autovalores do operador compacto L, e formam uma sequência decrescente limitada por $\lambda_1 = \|L\|_{\mathfrak{L}(H)}$ e que tende para 0. Os vetores (x_n) formam uma sequência ortonormal de autovetores associados, respectivamente, aos autovalores λ_n, isto é, $L(x_n) = \lambda_n x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Naturalmente, é de se esperar que na representação de Schur, caso exista, de um operador $T \in Bil(H)$, apareçam também autovalores e autovetores de T, e que os mesmos tenham propriedades análogas ao caso linear. Porém, mostramos na Proposição 2.1.15 que se o operador $T \in Bil(H)$ possui um autovalor $\lambda \neq 0$, então qualquer real $\gamma \neq 0$ também é um autovalor, ou seja, os autovalores de T, se existirem, não são enumeráveis.

Seja $T \in Bil(\mathbb{R}^n)$. De acordo com a Definição 1.1.10 e Observação 1.1.11, se T é diagonalizável existe uma base $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de T, tal que $T(x_i, x_j) = 0$ se $i \neq j$. É de se esperar que os autovetores de $T \in Bil(H)$ que apareçam na sua representação de Schur, caso exista, também tenham essa propriedade, ou seja, $T(x_i, x_j) = 0$ se $i \neq j$.

Seja M um subespaço de H, e defina $M^\perp = \{\, x \in H : < x, y >= 0 \text{ para todo } y \in M\}$, o subespaço ortogonal de M. Se $L \in \mathfrak{L}(H)$ for autoadjunto então

$$L(M) \subset M \Leftrightarrow L(M^\perp) \subset M^\perp . \tag{2.1.6}$$

De fato, seja $y \in M^\perp$, temos que se $x \in M$, então $< L(y), x >=< y, L(x) >$ e se $L(M) \subset M$, então $< y, L(x) >= 0$, logo $< L(y), x >= 0$, portanto, $L(M^\perp) \subset M^\perp$.
Por outro lado, se $L(M^\perp) \subset M^\perp$, então $< L(y), x >= 0$, logo $< y, L(x) >= 0$, e portanto $L(M) \subset M$.

Tal propriedade não vale para um operador $T \in Bil(H)$, mesmo T sendo autoadjunto. O Exemplo 2.1.17 mostra isso.

Exemplo 2.1.17. *Seja $T \in Bil(H)$ e $\lambda \neq 0$ um autovalor de T. Seja $x \in W(\lambda)$ e $M =< x >$, isto é, M é subespaço unidimensional de H gerado pelo autovetor x. Sejam $x_1, x_2 \in M$, ou seja, $x_1 = \alpha_1 x$ e $x_2 = \alpha_2 x$. Temos*

$$T(x_1, x_2) = T(\alpha_1 x, \alpha_2 x) = \alpha_1\alpha_2 T(x, x) = \alpha_1\alpha_2\lambda x \subset M$$

ou seja, $T(M \times M) \subset M$.

Agora, considere $T \in Bil(\mathbb{R}^2)$ cuja matriz associada é

$$[B] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] .$$

Note que T é autoadjunto. Verifica-se facilmente que $\lambda = 1$ é um autovalor e $x = (1, 0)$ é um autovetor associado. Consequentemente, se $M =< x >$, então $T(M \times M) \subset M$. Porém, se $y = (0, 1)$, temos $y \in M^\perp$ e $T(y, y) \notin M^\perp$. Ou seja $T(M^\perp \times M^\perp) \not\subset M^\perp$.

No que segue, se M é um subconjunto qualquer de H e $T \in Bil(H)$, então

$$T(M, M) := T(M \times M).$$

Na demonstração do Teorema 2.1.3, a propriedade em (2.1.6) é fundamental para mostrar que $L \in \mathfrak{L}(H)$, compacto, autoadjunto e não-nulo tem uma representação de Schur monótona. Sabemos pelo Exemplo 2.1.17 que tal propriedade não vale para $T \in Bil(H)$.

Teorema 2.1.18. *Seja $T \in Bil(H)$ autoadjunto com um autovalor λ, e $x \in W(\lambda)$. Seja $M =< x >$. Temos que*

$$T(M^\perp, M^\perp) \subset M^\perp \Leftrightarrow T(x,y) = \lambda \frac{< x, y >}{< x, x >} x \tag{2.1.7}$$

para todo $y \in H$.

Demonstração: $\Rightarrow$) Suponha $T(M^\perp, M^\perp) \subset M^\perp$. Temos $H = M \oplus M^\perp$. Seja $y \in H$, temos $y = \alpha x + m^\perp$, onde $\alpha x \in M$ e $m^\perp \in M^\perp$. Então,

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T(x, \alpha x + m^\perp) = \alpha T(x,x) + T(x, m^\perp) \\ &= \alpha \lambda x + T(x, m^\perp)\,. \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Afirmamos que $T(x, m^\perp) = 0$. De fato, seja $m \in M =< x >$, então, por T ser autoadjunto, temos que

$$< T(x, m^\perp), m >=< m^\perp, T(x,m) >= 0\,,$$

pois $T(x,m) \in M$, logo

$$T(x, m^\perp) \in M^\perp\,. \tag{2.1.9}$$

Seja $m_1^\perp \in M^\perp$, então $< T(x, m^\perp), m_1^\perp >=< x, T(m_1^\perp, m^\perp) >= 0$, pois $T(m_1^\perp, m^\perp) \in M^\perp$, logo

$$T(x, m^\perp) \in M\,. \tag{2.1.10}$$

De (2.1.9) e (2.1.10), e do fato de $M \cap M^\perp = \{0\}$, concluímos que $T(x, m^\perp) = 0$.

Portanto, em (2.1.8) temos que $T(x,y) = \alpha\lambda x$. Como $y = \alpha x + m^\perp$, temos que

$$< y, x >=< \alpha x + m^\perp, x >= \alpha < x, x >\,,$$

logo $\alpha = \dfrac{< x, y >}{< x, x >}$. Portanto, para todo $y \in H$ temos,

$$T(x,y) = \lambda \frac{< x, y >}{< x, x >} x\,.$$

$\Leftarrow$) Suponha que $T(x,y) = \lambda \dfrac{< x, y >}{< x, x >} x$. Temos $T(M, M) \subset M$. Seja $m_1^\perp, m_2^\perp \in M^\perp$

e $z \in M$. Logo $z = \beta x$ e

$$\begin{aligned} < T(m_1^\perp, m_2^\perp), z > &= < m_1^\perp, T(z, m_2^\perp) >=< m_1^\perp, T(\beta x, m_2^\perp) > \\ &= \beta < m_1^\perp, T(x, m_2^\perp) >= \beta < m_1^\perp, \lambda \tfrac{<x, m_2^\perp>}{<x,x>} x > \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Portanto $T(m_1^\perp, m_2^\perp) \subset M^\perp$, logo $T(M^\perp, M^\perp) \subset M^\perp$. ■

Sabemos que se λ_1 e λ_2 forem autovalores distintos de $L \in \mathfrak{L}(H)$ autoadjunto, então seus autovetores correspondentes x_1 e x_2 são ortogonais. Este resultado não vale para operadores bilineares autoadjuntos, conforme o exemplo abaixo.

Exemplo 2.1.19. *Seja $T \in Bil(\mathbb{R}^2)$ cuja matriz associada é*

$$[B] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Note que T é autoadjunto. Verifica-se facilmente que $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \sqrt{2}$ são autovalores com autovetores correspondentes $x_1 = (1,0)$ e $x_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, respectivamente. Temos $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $< x_1, x_2 >\neq 0$.

Sejam x_1, x_2 autovetores distintos de um operador bilinear $T \in Bil(H)$ autoadjunto com autovalores, respectivamente, λ_1 e λ_2, distintos ou não. Seja $M_1 = \langle x_1 \rangle$ e $M_2 = \langle x_2 \rangle$. Suponha que $M_1 \perp M_2$, ou seja, $x_1 \perp x_2$. Se $M_1^\perp$ for invariante sobre T, isto é, $T(M_1^\perp, M_1^\perp) \subset M_1^\perp$, então pelo Teorema 2.1.18 temos que $T(x_1, x_2) = 0$. Note que não exigimos que $M_2^\perp$ seja também invariante sobre T, apenas exigimos que x_2 seja ortogonal a x_1. Note que se colocarmos que $M_2^\perp$ seja invariante sobre T, então $T(x_2, x_1) = 0$ se $x_1 \perp x_2$. Novamente, não exigimos que $M_1^\perp$ seja também invariante sobre T. O Exemplo 2.1.20 nos mostra que se $T(x_1, x_2) = 0$ não temos necessariamente que $M_1^\perp$ ou $M_2^\perp$ sejam invariantes sobre T.

Exemplo 2.1.20. *Seja $T \in Bil(\mathbb{R}^3)$ cuja matriz associada é dada por*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Note que T é autoadjunto. Temos que $x_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ e $x_2 = (1,1,1)$ são autovetores *com autovalores, respectivamente,* $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = 6$. *Note que* $x_1 \perp x_2$ *e* $T(x_1, x_2) = 0$. *Se* $M_1 = \langle x_1 \rangle$ *e* $M_2 = \langle x_2 \rangle$, *temos que:*

$$\begin{aligned} M_1^{\perp} &= \{\, y \in \mathbb{R}^3 \, :< y, x_1 >= 0\} = \{(-y_2 + 2y_3,\, y_2,\, y_3) \,|\, y_2, y_3 \in \mathbb{R}\}\,, && (2.1.11) \\ M_2^{\perp} &= \{\, y \in \mathbb{R}^3 \, :< y, x_2 >= 0\} = \{(-y_2 - y_3,\, y_2,\, y_3) \,|\, y_2, y_3 \in \mathbb{R}\}\,. && (2.1.12) \end{aligned}$$

Sejam $m_1^{\perp}, n_1^{\perp} \in \mathbb{R}^3$ *definidos como :*

$$m_1^{\perp} = (-3, 1, -1) \qquad ; \qquad n_1^{\perp} = (3, 1, 2)\,.$$

Por (2.1.11), *é fácil ver que* $m_1^{\perp}, n_1^{\perp} \in M_1^{\perp}$. *Temos que* $T(m_1^{\perp}, n_1^{\perp}) = (0, -20, -8) \notin M_1^{\perp}$. *Logo,* $T(M_1^{\perp}, M_1^{\perp}) \not\subset M_1^{\perp}$.

Sejam $m_2^{\perp}, n_2^{\perp} \in \mathbb{R}^3$ *definidos como :*

$$m_2^{\perp} = (0, 1, -1) \qquad ; \qquad n_2^{\perp} = (-3, 1, 2)\,.$$

Por (2.1.12), *é fácil ver que* $m_2^{\perp}, n_2^{\perp} \in M_2^{\perp}$. *Temos que* $T(m_2^{\perp}, n_2^{\perp}) = (-3, -2, 1) \notin M_2^{\perp}$. *Logo,* $T(M_2^{\perp}, M_2^{\perp}) \not\subset M_2^{\perp}$.

Exemplo 2.1.21. *Seja* $T \in Bil(\mathbb{R}^3)$ *cuja matriz associada é dada por*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \frac{902}{2025} & \frac{16}{81} & -\frac{184}{2025} & -\frac{82}{405} & -\frac{22}{81} & \frac{164}{405} & -\frac{184}{2025} & -\frac{32}{81} & \frac{1178}{2025} \\ \frac{8}{405} & \frac{14}{81} & -\frac{16}{405} & \frac{14}{81} & \frac{1}{81} & -\frac{28}{81} & -\frac{16}{405} & -\frac{28}{81} & \frac{32}{405} \\ \frac{266}{2025} & \frac{4}{81} & \frac{278}{2025} & -\frac{61}{405} & -\frac{46}{81} & \frac{122}{405} & \frac{278}{2025} & -\frac{8}{81} & -\frac{151}{2025} \end{array}\right].$$

Note que T *não é autoadjunto. Temos que* $x_1 = (2,\, 0,\, 1)$ *e* $x_2 = (1,\, 2,\, -2)$ *são autovetores com autovalores, respectivamente,* $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = 2$. *Note que* $x_1 \perp x_2$, $T(x_1, x_2) = (2,\, -5,\, -4)$ *e* $T(x_2, x_1) = 0$. *Se* $M_1 = \langle x_1 \rangle$ *e* $M_2 = \langle x_2 \rangle$, *temos que :*

$$\begin{aligned} M_1^{\perp} &= \{\, y \in \mathbb{R}^3 \,|\, < y, x_1 >= 0\} = \{(y_1,\, y_2,\, -2y_1) \,|\, y_1, y_2 \in \mathbb{R}\}\,, && (2.1.13) \\ M_2^{\perp} &= \{\, y \in \mathbb{R}^3 \,|\, < y, x_2 >= 0\} = \{(-2y_2 + 2y_3,\, y_2,\, y_3) \,|\, y_2, y_3 \in \mathbb{R}\}\,. && (2.1.14) \end{aligned}$$

Sejam $m_1^{\perp}, n_1^{\perp} \in \mathbb{R}^3$ *definidos como :*

$$m_1^{\perp} = (u_1,\, u_2,\, -2u_1) \qquad ; \qquad n_1^{\perp} = (y_1,\, y_2,\, -2y_1)\,.$$

Por (2.1.13), *é fácil ver que* $m_1^{\perp}, n_1^{\perp} \in M_1^{\perp}$. *Temos que*

$$\begin{aligned}
T(m_1^\perp, n_1^\perp) &= \big(\tfrac{2}{9}(2u_2+5u_1)(2y_2+5y_1)+\tfrac{6}{9}(2u_1-u_2)(2y_1-y_2)\,,\\
&\tfrac{4}{9}(2u_2+5u_1)(2y_2+5y_1)-\tfrac{15}{9}(2u_1-u_2)(2y_1-y_2)\,,\\
&-\tfrac{4}{9}(2u_2+5u_1)(2y_2+5y_1)-\tfrac{12}{9}(2u_1-u_2)(2y_1-y_2)\big)\\
&\in M_1^\perp\,.
\end{aligned}$$

Logo, $T(M_1^\perp, M_1^\perp) \subset M_1^\perp$.

Sejam $m_2^\perp, n_2^\perp \in \mathbb{R}^3$ *definidos como :*

$$m_2^\perp = (-2y_2+2y_3,\, y_2,\, y_3) \qquad ; \qquad n_2^\perp = (-2u_2+2u_3,\, u_2,\, u_3)\,.$$

Por (2.1.14)*, é fácil ver que* $m_2^\perp, n_2^\perp \in M_2^\perp$*. Temos que*

$$\begin{aligned}
T(m_2^\perp, n_2^\perp) &= \big(2(-\tfrac{4}{5}y_2+y_3)(-\tfrac{4}{5}u_2+u_3)+\tfrac{6}{25}y_2u_2\,,\\
&-\tfrac{3}{5}y_2u_2\,,\\
&(-\tfrac{4}{5}y_2+y_3)(-\tfrac{4}{5}u_2+u_3)-\tfrac{12}{25}y_2u_2\big)\\
&\in M_2^\perp\,.
\end{aligned}$$

Logo, $T(M_2^\perp, M_2^\perp) \subset M_2^\perp$*. Note então que no Teorema 2.1.18 é fundamental que o operador bilinear* T *seja autoadjunto.*

Os Exemplos 2.1.22 e 2.1.23 nos mostram que se x_1 e x_2 forem autovetores de um operador bilinear T tal que $x_1 \perp x_2$, não temos necessariamente que $T(x_1, x_2) = 0$.

Exemplo 2.1.22. *Seja* $T \in Bil(\mathbb{R}^3)$ *cuja matriz associada é dada por*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right].$$

T ***não é autoadjunto****. Temos que* $x_1 = (0,0,1)$ *e* $x_2 = (2,0,0)$ *são autovetores com autovalores, respectivamente,* $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = 2$*. Note que* $x_1 \perp x_2$ *e* $T(x_1,x_2) = (0,2,0) \neq 0$*. Se* $M_1 =< x_1 >$ *e* $M_2 =< x_2 >$*, é fácil mostrar que* $T(M_1^\perp, M_1^\perp) \not\subset M_1^\perp$ *e* $T(M_2^\perp, M_2^\perp) \not\subset M_2^\perp$*.*

Exemplo 2.1.23. *Seja $T \in Bil(\mathbb{R}^3)$ cuja matriz associada é dada por*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

*T **é autoadjunto**. Temos que $x_1 = (0,0,1)$ e $x_2 = (2,0,0)$ são autovetores com autovalores, respectivamente, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. Note que $x_1 \perp x_2$ e $T(x_1, x_2) = (0,2,0) \neq 0$. Neste caso, concluímos também que se $M_1 =< x_1 >$ e $M_2 =< x_2 >$, temos que $T(M_1^\perp, M_1^\perp) \not\subset M_1^\perp$ e $T(M_2^\perp, M_2^\perp) \not\subset M_2^\perp$.*

Proposição 2.1.24. *Seja $T \in Bil(H)$ autoadjunto. Sejam x_1 e x_2 autovetores distintos de T, e λ_1 e λ_2 seus respectivos autovalores não-nulos, distintos ou não. Se $T(x_1, x_2) = 0$ então $x_1 \perp x_2$.*

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} < x_1, x_2 > &= < \tfrac{\lambda_1}{\lambda_1} x_1, x_2 >= \tfrac{1}{\lambda_1} < \lambda_1 x_1, x_2 > \\ &= \tfrac{1}{\lambda_1} < T(x_1, x_1), x_2 >= \tfrac{1}{\lambda_1} < x_1, T(x_1, x_2) > \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Portanto $x_1 \perp x_2$. ∎

Observação 2.1.25. *Se $T \in Bil(\mathbb{R}^2)$ é autoadjunto, x_1 e x_2 são autovetores distintos de T, com $x_1 \perp x_2$, então $\{x_1, x_2\}$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$. Logo, se $z \in \mathbb{R}^2$, temos $z = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2$, com $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, e*

$$\begin{aligned} < z, T(x_1, x_2) > &= < a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2, T(x_1, x_2) > \\ &= a_1 < x_1, T(x_1, x_2) > + a_2 < x_2, T(x_1, x_2) > \\ &= a_1 < T(x_1, x_1), x_2 > + a_2 < T(x_2, x_2), x_1 > \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{R}^2$, portanto $T(x_1, x_2) = 0$, ou seja, vale a recíproca da Proposição 2.1.24. Também temos que se $T \in Bil(H)$ não for autoadjunto, podemos ter x_1 e x_2 autovetores, distintos, de T tal que $T(x_1, x_2) = 0$ sem que x_1 seja ortogonal a x_2, conforme Exemplo 2.1.26.

Exemplo 2.1.26. *Seja $T \in Bil(\mathbb{R}^2)$ cuja matriz associada é*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -5 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Note que T não é autoadjunto. Temos que $x_1 = (1,1)$ e $x_2 = (-2,-1)$ são autovetores de T cujos autovalores, respectivamente, são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$. Temos que x_1 não é ortogonal a x_2 e $T(x_1, x_2) = T(x_2, x_1) = 0$.

2.2 Existência de Autovalores para Operadores Bilineares

Na seção anterior definimos o autovalor de um operador $T \in Bil(H)$ e mostramos algumas propriedades que os autovalores, e seus respectivos autovetores, têm quando $T \in Bil(H)$ é autoadjunto. Vamos mostrar agora que um operador $T \in Bil(H)$, compacto, autoadjunto e não nulo possui pelo menos um autovalor e um correspondente autovetor unitário.

No que segue, $S = \{x \in H : \|x\|_H = 1\}$ e Q é o operador quadrático associado ao operador $T \in Bil(H)$, ou seja, $Q(y) = T(y,y)$, para todo $y \in H$.

Lema 2.2.1. *Seja $T \in Bil(H)$ (não necessariamente autoadjunto). Então*

$$\|T\| = \sup_{x,y,z \in S} |< T(x,y), z >| .$$

Demonstração: Temos que $T(x,y) \in H$ para todo $x, y \in H$. Logo

$$\|T(x,y)\|_H = \sup_{z \in S} |< T(x,y), z >| . \qquad (2.2.15)$$

Tomando o sup dos dois lados em (2.2.15), temos

$$\|T\| = \sup_{x,y \in S} \|T(x,y)\|_H = \sup_{x,y,z \in S} |< T(x,y), z >| ,$$

como queríamos. ■

Phillips em [9] faz a seguinte conjectura: Seja Q um operador quadrático associado a um operador bilinear $T \in Bil(H)$ autoadjunto. Então $\|Q\| = \sup_{x \in S} |< Q(x), x >|$.

No Lema 2.2.3 mostramos que tal afirmação é verdadeira.

Lema 2.2.2. *Seja $L \in \mathfrak{L}(H)$ autoadjunto, então*

$$\|L\|_{\mathfrak{L}(H)} = \sup_{x\in S} | < L(x), x > |.$$

Demonstração: Ver o livro [5]. ∎

Temos um resultado análogo quando $T \in Bil(H)$ for autoadjunto.

Lema 2.2.3. *Seja $T \in Bil(H)$ autoadjunto e Q o operador quadrático associado a T. Então*

$$\|T\| = \|Q\| = \sup_{x\in S} | < Q(x), x > | \,.$$

Demonstração: Note que $T(x, *) : H \to H$ é um operador linear para todo $x \in H$ fixado, logo

$$\|T(x, *)\|_{\mathfrak{L}(H)} = \sup_{y\in S} \|T(x, y)\|_H \,.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
||T|| &= \sup_{x,y\in S} \|T(x, y)\|_H = \sup_{x\in S}\sup_{y\in S} \|T(x, y)\| = \sup_{x\in S} \|T(x, *)\|_{\mathfrak{L}(H)} \\
&= \sup_{x\in S}\sup_{y\in S} | < T(x, y), y > | = \sup_{x,y\in S} | < T(x, y), y > | \\
&= \sup_{x,y\in S} | < x, T(y, y) > | = \sup_{x,y\in S} | < Q(y), x > | \\
&= \sup_{y\in S}\sup_{x\in S} = | < Q(y), x > | = \sup_{y\in S} \|Q(y)\|_H \\
&= \|Q\| \,,
\end{aligned}$$

como queríamos. Seja $C = \sup_{x\in S} | < Q(x), x > |$. Temos que

$$| < Q(x), x > | = | < T(x, x), x > | \leq \|T\| \cdot \|x\|_H^3 = \|Q\| \cdot \|x\|_H^3$$

para todo $x \in H$. Portanto, aplicando o sup para $x \in S$ dos dois lados da inequação, temos

$$C = \sup_{x\in S} | < Q(x), x > | \leq \|Q\| \,. \tag{2.2.16}$$

Temos que $| < Q(w), w > | \leq C \cdot \|w\|_H^3$, para todo $w \in H$.

Como $Q \neq 0$, existe $x_0 \in H$, $\|x_0\|_H = 1$, tal que $Q(x_0) \neq 0$. Seja $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, temos que

$$x = a\|Q(x_0)\|_H^2 x_0 \ , \ y = a^2\|Q(x_0)\|_H Q(x_0)$$

são não nulos, e

$$\|x\|_H = a\|Q(x_0)\|_H^2 \ , \ \|x\|_H^2 = a^2\|Q(x_0)\|_H^4 \ , \ \|x\|_H^3 = a^3\|Q(x_0)\|_H^6$$
$$\|y\|_H = a^2\|Q(x_0)\|_H^2 \ , \ \|y\|_H^2 = a^4\|Q(x_0)\|_H^4 \ , \ \|y\|_H^3 = a^6\|Q(x_0)\|_H^6 \,.$$

Então,

$$\begin{aligned} < Q(x), y > &= < Q(a\|Q(x_0)\|_H^2 x_0), a^2\|Q(x_0)\|_H Q(x_0) > \\ &= < a^2\|Q(x_0)\|_H^4 Q(x_0), a^2\|Q(x_0)\|_H Q(x_0) > \\ &= a^4\|Q(x_0)\|_H^7 \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} < Q(y), y > &= < Q(a^2\|Q(x_0)\|_H Q(x_0)), a^2\|Q(x_0)\|_H Q(x_0) > \\ &= < a^4\|Q(x_0)\|_H^2 Q(Q(x_0)), a^2\|Q(x_0)\|_H Q(x_0) > \\ &= a^6\|Q(x_0)\|_H^3 < Q(Q(x_0)), Q(x_0) > . \end{aligned}$$

Logo, $< Q(x), y >= a^4\|Q(x_0)\|_H^7$ e $< Q(y), y >= a^6\|Q(x_0)\|_H^3 < Q(Q(x_0)), Q(x_0) >$.

Sejam $u = x + y$ e $v = x - y$, temos que:

$$< Q(u), u > - < Q(v), v >= 6 < Q(x), y > +2 < Q(y), y > .$$

logo $6 < Q(x), y >=< Q(u), u > - < Q(v), v > -2 < Q(y), y >$, implicando em

$$| 6 < Q(x), y >|\leq | < Q(u), u > | + | < Q(v), v > | + 2| < Q(y), y > | .$$

Assim,

$$\begin{aligned} | 6 < Q(x), y >| &\leq C(\|u\|_H^3 + \|v\|_H^3 + 2\|y\|_H^3) \\ &= C(\|x+y\|_H^3 + \|x-y\|_H^3 + 2\|y\|_H^3) \\ &\leq C(2\|x\|_H^3 + 6\|x\|_H^2\|y\|_H + 6\|x\|_H\|y\|_H^2 + 4\|y\|_H^3) , \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 6a^4\|Q(x_0)\|_H^7 &\leq C(2a^3\|Q(x_0)\|_H^6 + 6a^4\|Q(x_0)\|_H^6 + 6a^5\|Q(x_0)\|_H^6 + 4a^6\|Q(x_0)\|_H^6) \\ &= C\|Q(x_0)\|_H^6(2a^3 + 6a^4 + 6a^5 + 4a^6) . \end{aligned}$$

Portanto,

$$6a^4\|Q(x_0)\|_H \leq C(2a^3 + 6a^4 + 6a^5 + 4a^6) .$$

Queremos que $6a^4 = 2a^3 + 6a^4 + 6a^5 + 4a^6$, ou $4a^6 + 6a^5 + 2a^3 = 0$, com $a \neq 0$, logo $4a^3 + 6a^2 + 2 = 0$. Sabemos que $4a^3 + 6a^2 + 2 = 0$ admite pelo menos uma raíz real não nula, para ser mais exato, a única raíz real é

$$a = -\frac{1}{2}\frac{(3+2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}} + 1 + (3+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}}{(3+2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}} .$$

Logo, se a for a única raíz real de $4a^3 + 6a^2 + 2 = 0$, temos que

$$\|Q(x_0)\|_H \leq C .$$

Como

$$\|Q\| = \sup\{\|Q(x_0)\|_H \ ; \ \|x_0\|_H = 1\} = \sup\{\|Q(x_0)\| \ ; \ \|x_0\|_H = 1 \text{ e } Q(x_0) \neq 0\} ,$$

temos
$$\|Q\| \leq C\,. \tag{2.2.17}$$
Por (2.2.16) e (2.2.17) temos que
$$\|Q\| = \sup_{x\in S} |< Q(x), x >|\,,$$
como queríamos. ∎

Sabemos que se $L \in \mathfrak{L}(H)$ for compacto e autoadjunto, então $\|L\|_{\mathfrak{L}(H)}$ é um autovalor de L. Esse resultado vale para o caso bilinear e é expresso no teorema a seguir.

Teorema 2.2.4. *Seja $T \in Bil(H)$ compacto, autoadjunto e não nulo. Então $\lambda = \|T\|$ é um autovalor com um autovetor correspondente x_0 unitário, ou seja, $T(x_0, x_0) = \lambda x_0$ e $\|x_0\|_H = 1$.*

Demonstração: Como T é autoadjunto, logo $\|T\| = \|Q\|$. Seja
$$\lambda = \|Q\| = \sup_{x\in S} |< Q(x), x >|\,. \tag{2.2.18}$$
Temos que
$$|< Q(x), x >| \leq \lambda$$
para todo $x \in S$. Assim, $|< Q(w), w >| \leq \lambda \|w\|_H^3$, ou
$$< Q(w), w >^2 \leq \lambda^2 < w, w >^3 \tag{2.2.19}$$
para todo $w \in H$.

De (2.2.18), existe uma sequência $(x_n) \subseteq S$ tal que
$$\lambda^2 - < Q(x_n), x_n >^2 < \frac{1}{n^2}, \qquad \|x_n\|_H = 1\,. \tag{2.2.20}$$
Sem perda de generalidade, assumiremos
$$< Q(x_n), x_n > > 0\,. \tag{2.2.21}$$
Seja $y_n = Q(x_n) - \lambda x_n$. Então segue de (2.2.20) e (2.2.21) que
$$\begin{aligned} |< y_n, x_n >| &= |< Q(x_n) - \lambda x_n, x_n >| = |< Q(x_n), x_n > - \lambda| \\ &= \lambda - < Q(x_n), x_n > = \frac{\lambda^2 - < Q(x_n), x_n >^2}{\lambda + < Q(x_n), x_n >} \\ &< \frac{\lambda^2 - < Q(x_n), x_n >^2}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}(\lambda^2 - < Q(x_n), x_n >^2) \\ &< \tfrac{1}{\lambda}\tfrac{1}{n^2}\,. \end{aligned}$$
Consequentemente,
$$\lambda |< y_n, x_n >| < \frac{1}{n^2}\,. \tag{2.2.22}$$

Agora, mostraremos que $y_n \to 0$. Substitua w por $x_n + \dfrac{y_n}{n}$ em (2.2.19). Então,

$$< Q(x_n + \frac{y_n}{n}), x_n + \frac{y_n}{n} >^2 \leq \lambda^2 < x_n + \frac{y_n}{n}, x_n + \frac{y_n}{n} >^3 \quad . \tag{2.2.23}$$

A expressão do lado esquerdo em (2.2.23) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
& < Q\left(x_n + \frac{y_n}{n}\right), x_n + \frac{y_n}{n} >^2 = < T\left(x_n + \frac{y_n}{n}, x_n + \frac{y_n}{n}\right), x_n + \frac{y_n}{n} >^2 \\
= & \left(< T(x_n, x_n) + T\left(x_n, \frac{y_n}{n}\right) + T\left(\frac{y_n}{n}, x_n\right) + T\left(\frac{y_n}{n}, \frac{y_n}{n}\right), x_n + \frac{y_n}{n} >\right)^2 \\
= & (< T(x_n, x_n), x_n > +2 < T\left(x_n, \frac{y_n}{n}\right), x_n > + < T\left(\frac{y_n}{n}, \frac{y_n}{n}\right), x_n > \\
& + < T(x_n, x_n), \frac{y_n}{n} > +2 < T\left(x_n, \frac{y_n}{n}\right), \frac{y_n}{n} > + < T\left(\frac{y_n}{n}, \frac{y_n}{n}\right), \frac{y_n}{n} >)^2 \\
= & \left(< Q(x_n), x_n > + \frac{3}{n} < Q(x_n), y_n > + \frac{3}{n^2} < Q(y_n), x_n > + \frac{1}{n^3} < Q(y_n), y_n >\right)^2 \\
= & a^2 + \tfrac{1}{n}6ab + \tfrac{1}{n^2}(6ac + 9b^2) + \tfrac{1}{n^3}(2ad + 18bc) + \tfrac{1}{n^4}(6bd + 9c^2) + \tfrac{1}{n^5}6cd + \tfrac{1}{n^6}d^2 \,,
\end{aligned}$$

onde

$$a = < Q(x_n), x_n > \,,\; b = < Q(x_n), y_n > \,,\; c = < Q(y_n), x_n > \,,\; d = < Q(y_n), y_n > \quad .$$

A expressão do lado direito em (2.2.23) também pode ser reescrita. O resultado é

$$\begin{aligned}
& \lambda^2 < x_n + \frac{y_n}{n}, x_n + \frac{y_n}{n} >^3 = \\
= & \lambda^2 (< x_n, x_n > + \tfrac{2}{n} < x_n, y_n > + \tfrac{1}{n^2} < y_n, y_n >)^3 \\
= & \lambda^2 \left(1 + \tfrac{1}{n}6f + \tfrac{1}{n^2}(3g + 12f^2) + \tfrac{1}{n^3}(12fg + 8f^3) + \tfrac{1}{n^4}(3g^2 + 12f^2 g) + \tfrac{6}{n^5}fg^2 + \tfrac{1}{n^6}g^3\right) \,,
\end{aligned}$$

onde

$$f = < x_n, y_n > \,,\; g = < y_n, y_n > \quad .$$

Segue agora, por (2.2.20) e (2.2.22), que a inequação em (2.2.23) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n}\left(6ab + \frac{1}{n}(6ac + 9b^2) + \frac{1}{n^2}(2ad + 18bc) + \frac{1}{n^3}(6bd + 9c^2) + \frac{1}{n^4}6cd + \frac{1}{n^5}d^2\right) \leq \\
\leq & \lambda^2 - a^2 + \lambda^2 \frac{1}{n}6f + \lambda^2\left(\frac{1}{n^2}(3g + 12f^2) + \frac{1}{n^3}(12fg + 8f^3) + \frac{1}{n^4}(3g^2 + 12f^2 g)\right. \\
& \left. + \frac{6}{n^5}fg^2 + \frac{1}{n^6}g^3\right) \\
\leq & \frac{1}{n^2} + \lambda \frac{6}{n}\frac{1}{n^2} + \lambda^2 \frac{1}{n^2}\left|3g + 12f^2 + \frac{1}{n}(12fg + 8f^3) + \frac{1}{n^2}(3g^2 + 12f^2 g) + \frac{6}{n^3}fg^2 + \frac{1}{n^4}g^3\right| \\
= & \frac{1}{n^2}\left(1 + \lambda\frac{6}{n} + \lambda^2\left|3g + 12f^2 + \frac{1}{n}(12fg + 8f^3) + \frac{1}{n^2}(3g^2 + 12f^2 g) + \frac{6}{n^3}fg^2 + \frac{1}{n^4}g^3\right|\right) .
\end{aligned}$$

Temos então que

$$
\begin{aligned}
&6 < Q(x_n), x_n >< Q(x_n), y_n > \leq \\
\leq\ & \frac{1}{n}\left(1+\lambda\frac{6}{n}+\lambda^2|3g+12f^2+\frac{1}{n}(12fg+8f^3)+\frac{1}{n^2}(3g^2+12f^2g)+\frac{6}{n^3}fg^2+\frac{1}{n^4}g^3|\right) \\
& -\left(\frac{1}{n}(6ac+9b^2)+\frac{1}{n^2}(2ad+18bc)+\frac{1}{n^3}(6bd+9c^2)+\frac{1}{n^4}6cd+\frac{1}{n^5}d^2\right). \qquad (2.2.24)
\end{aligned}
$$

Vamos colocar o termo $\frac{1}{n}$ do lado direito da inequação (2.2.24) em evidência e temos o seguinte

$$6 < Q(x_n), x_n >< Q(x_n), y_n > \leq \frac{1}{n}[\diamond], \qquad (2.2.25)$$

onde

$$
\begin{aligned}
\diamond = 1+\lambda\frac{6}{n}+\lambda^2\left|3g+12f^2+\frac{1}{n}(12fg+8f^3)+\frac{1}{n^2}(3g^2+12f^2g)+\frac{6}{n^3}fg^2+\frac{1}{n^4}g^3\right| \\
-(6ac+9b^2)-\frac{1}{n}(2ad+18bc)-\frac{1}{n^2}(6bd+9c^2)-\frac{1}{n^3}6cd-\frac{1}{n^4}d^2
\end{aligned}
$$

que aparece no lado direito de (2.2.25) indica um termo limitado quando $n \to \infty$.

Como $< Q(x_n), x_n > > 0$ e é limitado, podemos concluir que $< Q(x_n), y_n > \to 0$ quando $n \to \infty$. Também podemos concluir de (2.2.22) que $< y_n, x_n > \to 0$ quando $n \to \infty$. Logo temos que

$$
\begin{aligned}
0 \leq \|y_n\|_H^2 &= < y_n, y_n >=< Q(x_n) - \lambda x_n, y_n > \\
&= < Q(x_n), y_n > -\lambda < x_n, y_n > \\
&\leq |< Q(x_n), y_n >| + |\lambda < x_n, y_n >|.
\end{aligned}
$$

Portanto, concluímos que

$$\|y_n\|_H^2 = \|Q(x_n) - \lambda x_n\|_H^2 \to 0 \qquad (2.2.26)$$

quando $n \to \infty$.

Temos que $\lambda > 0$ e (x_n) é uma sequência limitada. Como T é compacto, temos que $Q(x_n) = T(x_n, x_n)$ tem uma subsequência convergente, digamos, $Q(x_{n_k})$. Logo, de (2.2.26) concluímos que (x_{n_k}) converge para algum elemento, digamos x_0, e como Q é contínua, temos que

$$Q(x_{n_k}) \to Q(x_0).$$

Portanto

$$Q(x_0) = T(x_0, x_0) = \lambda x_0$$

com $\|x_0\|_H = 1$, pois

$$
\begin{aligned}
1 &= \|x_{n_k}\|_H = \|x_{n_k} - x_0 + x_0\|_H \\
&\leq \|x_{n_k} - x_0\|_H + \|x_0\|_H \\
&\leq \frac{1}{n_k} + \|x_0\|_H.
\end{aligned}
$$

Logo, $\|x_0\|_H \geq 1 - \dfrac{1}{n_k}$ para todo n_k. Assim,

$$\begin{aligned} \|x_0\|_H &= \|x_0 - x_{n_k} + x_{n_k}\|_H \\ &\leq \|x_0 - x_{n_k}\|_H + \|x_{n_k}\|_H \\ &\leq \frac{1}{n_k} + 1\,, \end{aligned}$$

ou seja, $\|x_0\|_H \leq 1 - \dfrac{1}{n_k}$ para todo n_k. ■

2.3 Representação de Schur de um operador bilinear

Nas seções anteriores mostramos que se um operador $T \in Bil(H)$ for compacto, autoadjunto e não nulo, então $\lambda = \|T\|$ é autovalor com um autovetor unitário x_0. Vimos que se T tem um autovalor, então, qualquer número real γ é autovalor. Vimos também que se $x \in H$ for autovalor de T e $M =< x >$, não temos necessariamente que $T(M^{\perp}, M^{\perp}) \subset M^{\perp}$, mesmo T sendo compacto, autoadjunto e não nulo. A definição a seguir é fundamental para encontrar no conjunto dos $T \in Bil(H)$, compacto, autoadjunto e não nulo, quais podem possuir uma Representação de Schur.

Definição 2.3.1. *Seja $T \in Bil(H)$ não nulo. Suponha que T tenha um autovalor λ. Dizemos que λ é um **autovalor generalizado** de T se o conjunto*

$$O(\lambda) = \{x \in H \,:\, T(x,y) = \lambda \frac{< x, y >}{< x, x >} x\,,\ \textit{para todo } y \in H\,, x \neq 0\}$$

*é não vazio. Se $x \in O(\lambda)$ tal que $\|x\| = 1$, dizemos então que x é um **autovetor ordenado** associado ao autovalor generalizado λ de T e, neste caso, temos que $T(x,y) = \lambda < x, y > x$, para todo $y \in H$, e chamaremos λ de um **autovalor ordenado**, e x o autovetor ordenado associado ao autovalor ordenado λ.*

Observação 2.3.2. *Note que se $x \in O(\lambda)$, então $x \in W(\lambda) = \{x \in H\,;\, T(x,x) = \lambda x\,,\, x \neq 0\}$, ou seja, x é um autovalor de T associado a λ. Temos então que $O(\lambda) \subset W(\lambda)$.*

Veremos no Exemplo 2.3.10, se λ for um autovalor generalizado, pode existir $u \in W(\lambda)$ tal que $u \notin O(\lambda)$ e, também, não temos necessariamente que todo autovalor generalizado λ de T tenha um autovetor ordenado associado.

Note que de acordo com o Teorema 2.1.18, se λ for autovalor ordenado de um operador bilinear $T \in Bil(H)$ autoadjunto e $x \in O(\lambda)$, se $M =< x >$, então $T(M^{\perp}, M^{\perp}) \subset M^{\perp}$.

Proposição 2.3.3. *Seja $T \in Bil(H)$ não nulo. Se $\lambda \neq 0$ é um autovalor generalizado de T, então todo $0 \neq \gamma \in \mathbb{R}$ é um autovalor generalizado de T.*

Demonstração: Seja $x \in O(\lambda)$, ou seja, $T(x,y) = \lambda \dfrac{< x, y >}{< x, x >} x$, para todo $y \in H$. Seja $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$, e $u = \dfrac{\gamma}{\lambda} x$. Temos

$$T(u,u) = T\left(\frac{\gamma}{\lambda}x, \frac{\gamma}{\lambda}x\right) = \frac{\gamma^2}{\lambda^2} T(x,x) = \gamma\left(\frac{\gamma}{\lambda}x\right) = \gamma u,$$

ou seja γ é um autovalor de T. Temos também

$$\begin{aligned} T(u,y) &= T\left(\tfrac{\gamma}{\lambda}x, y\right) \\ &= \tfrac{\gamma}{\lambda} T(x,y) \\ &= \tfrac{\gamma}{\lambda} \lambda \tfrac{<x,y>}{<x,x>} x \\ &= \lambda \frac{< \frac{\lambda}{\gamma}u, y >}{< \frac{\lambda}{\gamma}u, \frac{\lambda}{\gamma}u >} \frac{\lambda}{\gamma} u \\ &= \gamma \frac{< u, y >}{< u, u >} u, \end{aligned}$$

para todo $y \in H$. Logo $u \in O(\gamma)$. Portanto γ é um autovalor generalizado de T.

■

Proposição 2.3.4. *Seja $T \in Bil(H)$ não nulo. Se $\lambda \neq 0$ é um autovalor generalizado de T, então para cada $u \in O(\lambda)$ podemos associar um autovalor ordenado $\gamma \neq 0$ de T.*

Demonstração: Seja $u \in O(\lambda)$, ou seja, $T(u,y) = \lambda \dfrac{< u, y >}{< u, u >} u$, para todo $y \in H$. Seja $x = \dfrac{u}{\|u\|}$. Temos

$$T(x,x) = T\left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{1}{\|u\|^2} T(u,u) = \frac{\lambda}{\|u\|} \frac{u}{\|u\|} = \gamma x,$$

ou seja, $\gamma = \dfrac{\lambda}{\|u\|}$ é um autovalor de T com autovetor associado x, $\|x\| = 1$. Temos também

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T\left(\frac{u}{\|u\|}, y\right) \\ &= \frac{1}{\|u\|} T(u,y) \\ &= \frac{1}{\|u\|} \lambda \tfrac{<u,y>}{<u,u>} u \\ &= \gamma \frac{< \|u\|x, y >}{< \|u\|x, \|u\|x >} \|u\| x \\ &= \gamma \frac{< x, y >}{< x, x >} x, \end{aligned}$$

para todo $y \in H$. Logo $x \in O(\gamma)$. Como $\|x\| = 1$, concluímos que $\gamma = \dfrac{\lambda}{\|u\|}$ é um autovalor ordenado de T.

■

Temos então que se o operador $T \in Bil(H)$ tem um autovalor generalizado $\lambda \neq 0$, então todo número real não nulo γ também é um autovalor generalizado de T. Nem todo autovalor generalizado é um autovetor ordenado, mas se λ for um autovalor ordenado de T, ou seja, existe um vetor $x \in H$, $\|x\| = 1$, tal que $T(x,y) = \lambda < x, y > x = \lambda \dfrac{< x, y >}{< x, x >} x$, para todo $y \in H$, então λ é um autovalor generalizado por definição. No Método da Ordenação 2.3.27, a seguir, estaremos interessados nos autovalores ordenados de T e assim veremos quais são os critérios que $T \in Bil(H)$ tem que satisfazer para que ele tenha uma Representação de Schur.

Método da Ordenação (2.3.27)

Seja $T \in Bil(H)$, compacto e autoadjunto. O Teorema 2.2.4 nos garante que se $T \in Bil(H)$ for não nulo , então $\lambda_1 = \|T\|$ é um autovalor de T com um autovetor associado unitário x_1. Se λ_1 for **autovalor ordenado** de T com x_1 autovetor ordenado associado a λ_1, então $T(x_1, y) = \lambda_1 < y, x_1 > x_1$, para todo $y \in H$.

Seja $T_1 : H \times H \to H$ dado por

$$T_1(x,y) = T(x,y) - \lambda_1 < x, x_1 >< y, x_1 > x_1$$

para todo $x, y \in H$. Por T ser limitado e compacto, temos que $T_1 \in Bil(H)$ e é compacto. Vamos mostrar que T_1 é autoadjunto, ou seja,

$$\phi_{11}(x) : H \to H \quad e \quad \phi_{12}(x) : H \to H$$

$$\phi_{11}(x)(y) = T_1(x,y) \quad e \quad \phi_{12}(x)(y) = T_1(y,x)$$

são autoadjuntos. Temos, para $z \in H$,

$$\begin{aligned}
< \phi_{11}(x)(y), z > &= < T_1(x,y), z >=< T(x,y) - \lambda_1 < x, x_1 >< y, x_1 > x_1, z > \\
&= < T(x,y), z > + < -\lambda_1 < x, x_1 >< y, x_1 > x_1, z > \\
&= < y, T(x,z) > + < y, -\lambda_1 < x, x_1 >< z, x_1 > x_1 > \\
&= < y, T(x,z) - \lambda_1 < x, x_1 >< z, x_1 > x_1 > \ .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\phi_{11}^*(x)(z) = T(x,z) - \lambda_1 < x, x_1 >< z, x_1 > x_1 = T_1(x,z) = \phi_{11}(x)(z)$$

para todo $z \in H$, logo $\phi_{11}^*(x) = \phi_{11}(x)$. Da mesma forma, para $z \in H$,

$$\begin{aligned} < \phi_{12}(x)(y), z > &= < T_1(y,x), z >=< T(y,x) - \lambda_1 < y, x_1 >< x, x_1 > x_1, z > \\ &= < T(y,x), z > + < -\lambda_1 < y, x_1 >< x, x_1 > x_1, z > \\ &= < y, T(z,x) > + < y, -\lambda_1 < x, x_1 >< z, x_1 > x_1 > \\ &= < y, T(z,x) - \lambda_1 < z, x_1 >< x, x_1 > x_1 >, \end{aligned}$$

e obtemos que

$$\phi_{12}^*(x)(z) = T(z,x) - \lambda_1 < z, x_1 >< x, x_1 > x_1 = T_1(z,x) = \phi_{12}(x)(z)$$

para todo $z \in H$, logo $\phi_{12}^*(x) = \phi_{12}(x)$. Mostramos então que $T_1 \in Bil(H)$ é compacto e autoadjunto.

Se T_1 for não nulo, temos então que $\lambda_2 = \|T_1\|$ é um autovalor de T_1 com um autovetor associado unitário x_2.

Afirmamos que $x_1 \perp x_2$. De fato,

$$\begin{aligned} \lambda_2 < x_1, x_2 > &= < x_1, \lambda_2 x_2 >=< x_1, T_1(x_2, x_2) > \\ &= < T_1(x_1, x_2), x_2 >=< T(x_1, x_2) - \lambda_1 < x_1, x_1 >< x_2, x_1 > x_1, x_2 > \\ &= < \lambda_1 < x_2, x_1 > x_1 - \lambda_1 < x_2, x_1 > x_1, x_2 > \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

E também $T_1(x,y) \perp x_1$, pois

$$\begin{aligned} < T_1(x,y), x_1 > &= < T(x,y) - \lambda_1 < x, x_1 >< y, x_1 > x_1, x_1 > \\ &= < T(x,y), x_1 > -\lambda_1 < x, x_1 >< y, x_1 > \\ &= < x, T(x_1, y) > -\lambda_1 < x, x_1 >< y, x_1 > \\ &= < x, \lambda_1 < y, x_1 > x_1 > - < x, \lambda_1 < y, x_1 > x_1 > \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Portanto $T_1(x,y) \perp \lambda_1 < x, x_1 >< y, x_1 > x_1$, para todo $x, y \in H$. Assim, temos que

$$\|T_1(x,y)\|_H^2 + \|\lambda_1 < x, x_1 >< y, x_1 > x_1\|_H^2 = \|T(x,y)\|_H^2\,.$$

implicando que $\lambda_1 \geq \lambda_2$.

Temos que λ_2 é autovalor de T, pois

$$\lambda_2 x_2 = T_1(x_2, x_2) = T(x_2, x_2)\,.$$

Se λ_2 for autovalor ordenado de T com x_2 autovetor ordenado associado a λ_2, temos então que $T(x_2, y) = \lambda_2 < y, x_2 > x_2$, para todo $y \in H$.

Seja $T_2 : H \times H \to H$ dado por

$$T_2(x,y) = T(x,y) - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i < x, x_i >< y, x_i > x_i$$

para todo $x, y \in H$. Por T ser limitado e compacto, temos que $T_2 \in Bil(H)$ e é compacto. Vamos mostrar que T_2 é autoadjunto, ou seja,

$$\phi_{21}(x) : H \to H \quad e \quad \phi_{22}(x) : H \to H$$

$$\phi_{21}(x)(y) = T_2(x,y) \quad e \quad \phi_{22}(x)(y) = T_2(y,x)$$

são autoadjuntos. Temos que,

$$\begin{aligned}
< \phi_{21}(x)(y), z > &= < T_2(x,y), z >=< T(x,y) - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i < x, x_i >< y, x_i > x_i, z > \\
&= < T(x,y), z > - < \sum_{i=1}^{2} \lambda_i < x, x_i >< y, x_i > x_i, z > \\
&= < y, T(x,z) > - < y, \sum_{i=1}^{2} \lambda_i < x, x_i >< z, x_i > x_i > \\
&= < y, T(x,z) - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i < x, x_i >< z, x_i > x_i > \;.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\phi_{21}^{*}(x)(z) = T(x,z) - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i < x, x_i >< z, x_i > x_i = T_2(x,z) = \phi_{21}(x)(z)$$

para todo $z \in H$, logo $\phi_{21}^{*}(x) = \phi_{21}(x)$. E também,

$$\begin{aligned}
< \phi_{22}(x)(y), z > &= < T_2(y,x), z >=< T(y,x) - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i < y, x_i >< x, x_i > x_i, z > \\
&= < T(y,x), z > - < \sum_{i=1}^{2} \lambda_i < y, x_i >< x, x_i > x_i, z > \\
&= < y, T(z,x) > - < y, \sum_{i=1}^{2} \lambda_i < z, x_i >< x, x_i > x_i > \\
&= < y, T(z,x) - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i < z, x_i >< x, x_i > x_i > \;.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\phi_{22}^*(x)(z) = T(z,x) - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i < z, x_i >< x, x_i > x_i = T_2(z,x) = \phi_{22}(x)(z)$$

para todo $z \in H$, logo $\phi_{22}^*(x) = \phi_{22}(x)$. Mostramos então que $T_2 \in Bil(H)$ é compacto e autoadjunto.

Se T_2 for não nulo, temos então que $\lambda_3 = \|T_2\|$ é um autovalor de T_2 com um autovetor associado unitário x_3.

Afirmamos que $x_3 \perp x_i, i = 1, 2$. De fato,

$$\begin{aligned}
\lambda_3 < x_i, x_3 > &= < x_i, \lambda_3 x_3 >=< x_i, T_2(x_3, x_3) > \\
&= < T_2(x_i, x_3), x_3 >=< T(x_i, x_3) - \sum_{k=1}^{2} \lambda_k < x_i, x_k >< x_3, x_k > x_k, x_3 > \\
&= < \lambda_i < x_3, x_i > x_i - \lambda_i < x_3, x_i > x_i, x_3 > \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

E também, $T_2(x,y) \perp x_2$, pois

$$\begin{aligned}
< T_2(x,y), x_2 > &= < T(x,y) - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i < x, x_i >< y, x_i > x_i, x_2 > \\
&= < T(x,y), x_2 > - < \sum_{i=1}^{2} \lambda_i < x, x_i >< y, x_i > x_i, x_2 > \\
&= < x, T(x_2, y) > - < \lambda_2 < x, x_2 >< y, x_2 > x_2, x_2 > \\
&= < x, \lambda_2 < y, x_2 > x_2 > - < x, \lambda_2 < y, x_2 > x_2 > \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Portanto, $T_2(x,y) \perp \lambda_2 < x, x_2 >< y, x_2 > x_2$, para todo $x, y \in H$, logo

$$\|T_2(x,y)\|_H^2 + \|\lambda_2 < x, x_2 >< y, x_2 > x_2\|_H^2 = \|T_1(x,y)\|_H^2$$

para todo $x, y \in H$, implicando $\lambda_2 \geq \lambda_3$.

Temos que λ_3 é autovalor de T, pois

$$\lambda_3 x_3 = T_2(x_3, x_3) = T(x_3, x_3)\,.$$

Se λ_3 for autovalor ordenado de T com x_3 autovetor ordenado associado a λ_3, temos então que $T(x_3, y) = \lambda_3 < y, x_3 > x_3$, para todo $y \in H$.

Por indução, supomos que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ são autovalores ordenados de T com seus respectivos autovetores ordenados associados $x_1, x_2, \ldots, x_n$, com $x_i \perp x_j$ quando $i \neq j$, ou seja, para $i = 1, \ldots, n$ e $y \in H$ qualquer

$$T(x_i, x_i) = \lambda_i x_i \ \text{ e } \ T(x_i, y) = \lambda_i < y, x_i > x_i$$

e

$$T_{n-1}(x, y) = T(x, y) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i < x, x_i >< y, x_i > x_i$$

é limitado, compacto, autoadjunto e não nulo, com $\lambda_n = \|T_{n-1}\|$.

Vamos mostrar que

$$T_n(x, y) = T(x, y) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < x, x_i >< y, x_i > x_i$$

é limitado, compacto e autoadjunto. Se T_n for não nulo, temos que $\lambda_{n+1} = \|T_n\|$ é autovalor de T_n com autovetor associado unitário x_{n+1}. Vamos mostrar também que $x_i \perp x_{n+1}$, $i = 1, \ldots, n$ e $\lambda_n \geq \lambda_{n+1}$.

Como $T \in Bil(H)$ é compacto, logo, $T_n \in Bil(H)$ e é compacto. Vamos mostrar que T_n é autoadjunto, ou seja,

$$\phi_{n1}(x) : H \to H \quad e \quad \phi_{n2}(x) : H \to H$$

$$\phi_{n1}(x)(y) = T_n(x, y) \quad e \quad \phi_{n2}(x)(y) = T_n(y, x)$$

são autoadjuntos. Primeiro, temos

$$\begin{aligned}
< \phi_{n1}(x)(y), z > &= < T_n(x, y), z >=< T(x, y) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < x, x_i >< y, x_i > x_i, z > \\
&= < T(x, y), z > - < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < x, x_i >< y, x_i > x_i, z > \\
&= < y, T(x, z) > - < y, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < x, x_i >< z, x_i > x_i > \\
&= < y, T(x, z) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < x, x_i >< z, x_i > x_i > \ .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\phi_{n1}^*(x)(z) = T(x, z) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < x, x_i >< z, x_i > x_i = T_n(x, z) = \phi_{n1}(x)(z)$$

para todo $z \in H$, logo $\phi_{n1}^*(x) = \phi_{n1}(x)$. E também

$$\begin{aligned} < \phi_{n2}(x)(y), z > &= < T_n(y,x), z >=< T(y,x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < y, x_i >< x, x_i > x_i, z > \\ &= < T(y,x), z > - < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < y, x_i >< x, x_i > x_i, z > \\ &= < y, T(z,x) > - < y, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < z, x_i >< x, x_i > x_i > \\ &= < y, T(z,x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < z, x_i >< x, x_i > x_i > \ . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\phi_{n2}^*(x)(z) = T(z,x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < z, x_i >< x, x_i > x_i = T_n(z,x) = \phi_{n2}(x)(z)$$

para todo $z \in H$, logo $\phi_{n2}^*(x) = \phi_{n2}(x)$. Mostramos então que $T_n \in Bil(H)$ é compacto e autoadjunto.

Se T_n for não nulo, temos então que $\lambda_{n+1} = \|T_n\|$ é um autovalor de T_n com um autovetor associado unitário x_{n+1}. Afirmamos que $x_{n+1} \perp x_i, i = 1, \ldots, n$. De fato,

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} < x_i, x_{n+1} > &= < x_i, \lambda_{n+1} x_{n+1} >=< x_i, T_n(x_{n+1}, x_{n+1}) >=< T_n(x_i, x_{n+1}), x_{n+1} > \\ &= < T(x_i, x_{n+1}) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k < x_i, x_k >< x_{n+1}, x_k > x_k, x_{n+1} > \\ &= < \lambda_i < x_{n+1}, x_i > x_i, x_{n+1} > - < \lambda_i < x_{n+1}, x_i > x_i, x_{n+1} > \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

E $T_n(x,y) \perp x_n$, pois

$$\begin{aligned} < T_n(x,y), x_n > &= < T(x,y) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < x, x_i >< y, x_i > x_i, x_n > \\ &= < T(x,y), x_n > - < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < x, x_i >< y, x_i > x_i, x_n > \\ &= < x, T(x_n, y) > - < \lambda_n < x, x_n >< y, x_n > x_n, x_n > \\ &= < x, \lambda_n < y, x_n > x_n > - < x, \lambda_n < y, x_n > x_n > \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Portanto $T_n(x,y) \perp \lambda_n < x, x_n >< y, x_n > x_n$, para todo $x, y \in H$, logo

$$\|T_n(x,y)\|_H^2 + \|\lambda_n < x, x_n >< y, x_n > x_n\|_H^2 = \|T_{n-1}(x,y)\|_H^2$$

para todo $x, y \in H$, implicando $\lambda_n \geq \lambda_{n+1}$.

Temos que λ_{n+1} é autovalor de T, pois

$$\lambda_{n+1}x_{n+1} = T_n(x_{n+1}, x_{n+1}) = T(x_{n+1}, x_{n+1})\,.$$

Se λ_{n+1} é autovalor ordenado de T com x_{n+1} autovetor ordenado associado a λ_{n+1}, temos então que $T(x_{n+1}, y) = \lambda_{n+1} < y, x_{n+1} > x_{n+1}$, para todo $y \in H$.

Este processo continua, e se para algum $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_{k+1} = 0$, então $\|T_k\| = 0$, ou seja,

$$T(x,y) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i < x, x_i >< y, x_i > x_i\,,$$

para todo $x, y \in H$, ou seja, T é um operador de posto finito. Caso contrário, afirmamos que $\lambda_n = \|T_{n-1}\|$ tende para zero quando $n \to \infty$. Seja $T(x_i, x_i) = \lambda_i x_i$ e $T(x_j, x_j) = \lambda_j x_j$, $i \neq j$.

$$\begin{aligned} \|T(x_i,x_i) - T(x_j,x_j)\|_H^2 &= < T(x_i,x_i) - T(x_j,x_j), T(x_i,x_i) - T(x_j,x_j) > \\ &= < \lambda_i x_i - \lambda_j x_j, \lambda_i x_i - \lambda_j x_j > \\ &= \lambda_i^2 + \lambda_j^2\,. \end{aligned} \tag{2.3.28}$$

Como T é operador compacto e $\|x_i\|_H = 1$, $i = 1, \ldots, n, \ldots$, temos que $\{(x_n, x_n)\}$ é uma sequência limitada em $H \times H$, logo $\{T(x_n, x_n)\}$ tem uma subsequência convergente, digamos, $\{T(x_{n_k}, x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$, logo ela é de Cauchy, e portanto, por (2.3.28), temos que ter $\lambda_n \to 0$.

Mostramos então que o operador de posto finito

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < \cdot, x_i >< \cdot, x_i > x_i$$

dado por

$$B_n(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < x, x_i >< y, x_i > x_i$$

converge na norma do espaço normado $Bil(H)$ para o operador T. Portanto temos que

$$T(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < x, x_i >< y, x_i > x_i$$

para todo $x, y \in H$.

Definição 2.3.5. *Seja $T \in Bil(H)$, compacto, autoadjunto e não nulo. Dizemos que T satisfaz o* ***Método da Ordenação 2.3.27*** *se:*

1. *O autovalor $\lambda_1 = \|T\|$ com seu respectivo autovetor unitário x_1, dado pelo Teorema 2.2.4, é um autovalor ordenado de T e x_1 é um autovetor ordenado de T associado*

a λ_1*;*

2. *Existe uma sequência* $\|T\| = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq \ldots$ *de autovalores ordenados de* T *tal que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *seja uma sequência ortonormal de autovalores ordenados de* T *associados, respectivamente, aos autovalores ordenados* λ_n *de* T*, ou seja,* $x_i \perp x_j$ *e* $x_n \in O(\lambda_n)$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

3. *Se a sequência* $\|T\| = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq \ldots$ *for infinita, então* $\lambda_n \to 0$*, quando* $n \to \infty$*.*

Temos então o seguinte teorema:

Teorema 2.3.6. *Seja* $T \in Bil(H)$*, compacto, autoadjunto e não nulo. Se* T *satisfaz o* ***Método da Ordenação 2.3.27*** *, então temos*

$$T(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < x, x_i >< y, x_i > x_i \,, \tag{2.3.29}$$

para todo $x, y \in H$*, onde* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de autovalores ordenados de* T*,* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$*, com seus respectivos autovetores ordenados* x_n*, ou seja,* $x_n \in O(\lambda_n)$ *com* $x_i \perp x_j$ *quando* $i \neq j$*.*

Temos que (2.3.29) é a Representação de Schur do operador $T \in Bil(H)$.

Observação 2.3.7. *Seja* $T : H \times H \to H$ *dado por*

$$T(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < x, x_i >< y, x_i > x_i$$

com $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^1$*,* $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *conjunto ortonormal de* H*. Temos que* $\lambda_i \to 0$*, quando* $i \to \infty$*, logo* $T \in KBil(H)$*. É simples verificar que* T *é autoadjunto. Note que*

$$T(x_i, x_i) = \lambda_i x_i$$

$$T(x_i, y) = \lambda_i < y, x_i > x_i$$

Portanto λ_i *é um autovalor ordenado de* T *com autovetor ordenado associado* x_i*.*

Seja $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ *e* $\lambda \neq \lambda_i$*, para todo* $i \in \mathbb{N}$*. Se* $u_i = \frac{\lambda}{\lambda_i} x_i$*, então* $x_i = \frac{\lambda_i}{\lambda} u_i$*. Temos*

$$T(u_i, u_i) = T\left(\frac{\lambda}{\lambda_i} x_i, \frac{\lambda}{\lambda_i} x_i\right) = \frac{\lambda^2}{\lambda_i^2} T(x_i, x_i) = \lambda u_i.$$

Logo λ *é autovalor de* T *e* $u_i \in W(\lambda)$*. Seja* $y \in H$*, então*

$$T(u, y) = T(\frac{\lambda}{\lambda_i} x_i, y) = \frac{\lambda}{\lambda_i} T(x_i, y) = \lambda < y, x_i > x_i.$$

Como $x_i = \frac{\lambda_i}{\lambda} u_i$ *e* $< u_i, u_i >= \frac{\lambda^2}{\lambda_i^2}$, *temos*

$$T(u_i, y) = \lambda \frac{< u_i, y >}{< u_i, u_i >} u_i,$$

para todo $y \in H$. *Logo* λ *é um autovalor generalizado de* T *e* $u_i \in O(\lambda)$.

Observação 2.3.8. *No Exemplo 2.3.11 vemos que a sequência de vetores* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *que aparece em* (2.3.29) *não é necessariamente maximal, ou seja, não é necessariamente uma base do espaço* H.

Observação 2.3.9. *Seja* H *um espaço de Hilbert de dimensão finita, digamos,* $dim(H) = n$, *onde* $n > 0$ *e* $n \in \mathbb{N}$. *Temos então que se* $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, *for um conjunto ortonormal de* H, *então* $j \leq n$. *Ou seja, se* $B \in Bil(H)$ *tiver uma Representação de Schur conforme o Teorema 2.3.6, isto é,*

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i < x, x_i >< y, x_i > x_i \,,$$

para todo $x, y \in H$, *então* $k \leq n$. *Se* $k = n$, *então temos que* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *é uma base ortonormal de* H *formada por autovetores de* B *e* $B(x_i, x_j) = 0$, *se* $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$. *Portanto nosso operador* B *é diagonalizável.*

Conforme o Exemplo 2.3.11, em geral, $k < n$, *e assim temos que* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ *é um conjunto ortonormal de* H *que não é maximal. Podemos completar o conjunto* X *com vetores* $u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots, u_n$ *de modo que o conjunto* $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots, u_n\}$ *seja maximal em* H, *ou seja uma base de* H. *É fácil de ver que* $B(u_j, y) = 0$, *para todo* $y \in H$ *e* $k < j \leq n$, *pois* $u_j \perp x_i$, $i = 1, \ldots k$. *Concluímos então que* u_j, $k < j \leq n$, *é um autovetor ordenado de* B *associado ao autovalor ordenado* $\lambda = 0$. *Logo* $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots, u_n\}$ *é uma base de* H *formada por autovetores de* B.

Podemos concluir que se o operador bilinear $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *satisfaz o Teorema 2.3.6, então existe uma base* $X = \{u_1, \ldots, u_n\}$ *ortonormal de* $\mathbb{R}^n$ *formada por autovetores de* B *tal que* $B(u_i, u_j) = 0$, *se* $i \neq j$, *logo nosso operador é diagonalizável.*

Nem todo operador $B \in \mathbb{R}^n$ *autoadjunto é diagonalizável, mesmo se ele tiver uma base ortonormal formada por autovetores, conforme o Exemplo 2.3.12.*

Exemplo 2.3.10. *Seja $B \in Bil(\mathbb{R}^3)$ autoadjunto cuja matriz associada é*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Após alguns cálculos temos os seguintes autovetores associados ao autovalor λ:

$$v_1 = \left((\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{5})\lambda, 0, -2(\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{5})\lambda + \lambda \right), v_2 = \left((\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{5})\lambda, 0, -2(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{5})\lambda + \lambda \right),$$

$$v_3 = \left((\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{5})\lambda, \lambda, -2(\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{5})\lambda + \lambda \right), v_4 = \left((\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{5})\lambda, \lambda, -2(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{5})\lambda + \lambda \right),$$

$$v_5 = (0, \lambda, 0)\,, v_6 = (\lambda, 0, 0)\,, v_7 = (\lambda, \lambda, 0)\,.$$

É simples verificar que v_1, v_2 e $v_5 \in O(\lambda)$. Os vetores v_3, v_4, v_6, $v_7 \notin O(\lambda)$.

Para $\lambda \neq 0$, é fácil verificar que $X = \{v_1, v_2, v_5\}$ é uma conjunto ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Após alguns cálculos para normalizar o conjunto X chegamos nos seguintes autovetores ordenados associados com seus respectivos autovalores ordenados:

$$u_1 = \frac{v_2}{||v_2||} = \left(-\frac{(-5+\sqrt{5})\lambda}{\sqrt{-10(-5+\sqrt{5})\lambda^2}}, 0, \frac{2\lambda\sqrt{5}}{\sqrt{-10(-5+\sqrt{5})\lambda^2}} \right), \ \textit{com autovalor} \ \lambda_1 = \frac{10\lambda}{\sqrt{-10(-5+\sqrt{5})\lambda^2}}$$

$$u_2 = \frac{v_1}{||v_1||} = \left(\frac{1}{10}\frac{(5+\sqrt{5})\lambda\sqrt{10}}{\sqrt{(5+\sqrt{5})\lambda^2}}, 0, -\frac{1}{5}\frac{\lambda\sqrt{5}\sqrt{10}}{\sqrt{(5+\sqrt{5})\lambda^2}} \right), \ \textit{com autovalor} \ \lambda_2 = \frac{\lambda\sqrt{10}}{\sqrt{(5+\sqrt{5})\lambda^2}}$$

$$u_3 = \frac{v_5}{||v_5||} = \left(0, \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2}}, 0\right), \ \textit{com autovalor} \ \lambda_3 = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2}}\ .$$

Temos agora que $W = \{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores ordenados e $B(u_i, u_j) = 0$, se $i \neq j$, e $B(u_i, u_i) = \lambda_i u_i$, $i, j = 1, 2, 3$. Logo nosso operador B é diagonalizável.

Note que para $x, y \in \mathbb{R}^3$ quaisquer, temos que $x =< x, u_1 > u_1 + < x, u_2 > u_2 + < x, u_3 > u_3$ e $y =< y, u_1 > u_1 + < y, u_2 > u_2 + < y, u_3 > u_3$. Logo,

$$\begin{aligned} B(x,y) &= B(<x,u_1> u_1 + <x,u_2> u_2 + <x,u_3> u_3, <y,u_1> u_1 + <y,u_2> u_2 + <y,u_3> u_3) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i < x, u_i >< y, u_i > u_i. \end{aligned}$$

Se colocarmos $u_i = 0$ e $\lambda_i = 0$ para $i \in \mathbb{N}$ e $i > 3$, então ,

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < x, u_i >< y, u_i > u_i$$

é uma Representação de Schur para B. Note que a matriz do operador B na nova base fixada $W = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ é

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{array}\right].$$

Note que todos os autovetores ordenados de B associados a autovalores ordenados não nulos de B estão na Representação de Schur de B.

Exemplo 2.3.11. *Seja $B \in Bil(\mathbb{R}^5)$ autoadjunto cuja matriz associada é*

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc|ccccc} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{2}}{4} & \frac{3\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{2}}{4} & \frac{3\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{2}}{4} & \frac{3\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{2}}{4} & \frac{3\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Após alguns cálculos temos os seguintes autovetores associados ao autovalor λ:

$$v_1 = \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{6}\lambda, \frac{\sqrt{2}}{6}\lambda, 0\right), v_2 = \left(\frac{1}{5}\lambda, 0, 0, 0, 0\right),$$

$$v_3 = \left(\frac{1}{5}\lambda, 0, \frac{\sqrt{2}}{6}\lambda, \frac{\sqrt{2}}{6}\lambda, 0\right), v_4 = \left(0, \frac{1}{4}\lambda, 0, 0, 0\right),$$

$$v_5 = \left(0, \frac{1}{4}\lambda, \frac{\sqrt{2}}{6}\lambda, \frac{\sqrt{2}}{6}\lambda, 0\right), v_6 = \left(\frac{1}{5}\lambda, \frac{1}{4}\lambda, 0, 0, 0\right), v_7 = \left(\frac{1}{5}\lambda, \frac{1}{4}\lambda, \frac{\sqrt{2}}{6}\lambda, \frac{\sqrt{2}}{6}\lambda, 0\right).$$

É simples verificar que v_1, v_2 e $v_4 \in O(\lambda)$. Os vetores v_3, v_5, v_6, $v_7 \notin O(\lambda)$.

Para $\lambda \neq 0$, é fácil verificar que $X = \{v_1, v_2, v_4\}$ é uma conjunto ortogonal de $\mathbb{R}^5$. Após alguns cálculos para normalizar o conjunto X chegamos nos seguintes autovetores ordenados associados com seus respectivos autovalores ordenados:

$u_1 = \frac{v_2}{||v_2||} = (1, 0, 0, 0, 0)$, *com autovalor* $\lambda_1 = 5$

$u_2 = \frac{v_4}{||v_4||} = (0, 1, 0, 0, 0)$, *com autovalor* $\lambda_2 = 4$

$u_3 = \frac{v_1}{||v_1||} = \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, *com autovalor* $\lambda_3 = 3$.

Afirmamos que para todo $x, y \in \mathbb{R}^5$,

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i < x, u_i >< y, u_i > u_i$$

é uma Representação de Schur para B. Note que o conjunto ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ que aparece *na Representação de Schur de B não é uma base de $\mathbb{R}^5$, ou seja, não é maximal.*

Seja $u_4 = \left(0, 0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ e $u_5 = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$. Temos que $\|u_4\| = \|u_5\| = 1$, $B(u_4, y) = 0$ e $B(u_5, y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^5$, logo temos que u_4 e u_5 são autovetores ordenados associados ao autovalor ordenado $\gamma = 0$. É simples verificar que o conjunto $W = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^5$ formada por autovetores de B e $B(u_i, u_j) = 0$, se $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, 5$. Portanto nosso operador B é diagonalizável. Note que a matriz do operador B na nova base fixada $W = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ de $\mathbb{R}^5$ é

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc|ccccc}
5&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right].$$

Note que todos os autovetores ordenados de B associados a autovalores ordenados não nulos de B estão na Representação de Schur de B.

Exemplo 2.3.12. *Seja $B \in Bil(\mathbb{R}^3)$ autoadjunto cuja matriz associada é*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1&0&0&0&0&1&0&1&0\\
0&0&1&0&1&0&1&0&0\\
0&1&0&1&0&0&0&0&1
\end{array}\right].$$

Os autovetores associados ao autovalor λ são:

$$v_1 = (0,0,\lambda), v_2 = (\frac{1}{3}\lambda, \frac{1}{3}\lambda, \frac{1}{3}\lambda), v_3 = (\frac{2}{3}\lambda, -\frac{1}{3}\lambda, -\frac{1}{3}\lambda), v_4 = (-\frac{1}{3}\lambda, -\frac{1}{3}\lambda, \frac{2}{3}\lambda),$$
$$v_5 = (\lambda, 0, 0), v_6 = (0, \lambda, 0), v_7 = (-\frac{1}{3}\lambda, \frac{2}{3}\lambda, -\frac{1}{3}\lambda)\ .$$

Temos que para $\lambda = 1$, $X = \{v_1, v_5, v_6\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ mas não temos que $B(v_i, v_j) = 0$ se $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$, por exemplo, $B(v_6, v_5) = v_1$. Logo nosso operador não é diagonalizável.

Devemos observar que, mesmo se $B \in Bil(H)$ for compacto e autoadjunto, não devemos ter necessariamente a existência de uma base de autovetores ortonormais conforme exemplo abaixo.

Exemplo 2.3.13. *Seja $B \in Bil(\mathbb{R}^3)$ autoadjunto dado pela matriz*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Após alguns cálculos concluímos que os autovetores de B associados ao autovalor λ são $\{v_1 = (\frac{1}{2}\lambda, -\frac{1}{4}\lambda, -\frac{1}{2}\lambda),\ \ v_2(-\frac{1}{4}\lambda, \frac{1}{2}\lambda, -\frac{1}{2}\lambda)\}$.

Os autovetores normalizados com seus respectivos autovalores são:

$\lambda_1 = \frac{4}{3} \qquad u_1 = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$

$\lambda_2 = \frac{4}{3} \qquad u_2 = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$

$\lambda_3 = -\frac{4}{3} \qquad u_3 = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

$\lambda_4 = -\frac{4}{3} \qquad u_4 = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Note que $u_1 \perp u_2$, $u_1 \perp u_4$, $u_2 \perp u_3$, $u_4 \perp u_3$, mas não temos uma base formada por autovetores ortonormais.

Temos um resultado clássico da Teoria Espectral que diz que se $L \in \mathfrak{L}(H)$ for compacto, autoadjunto e não nulo, então H possui uma base ortonormal enumerável formada por autovalores de L. Existe uma resultado análogo para o caso bilinear se o operador $T \in Bil(H)$ tem uma Representação de Schur de acordo com o Teorema 2.3.6.

Na Observação 2.3.9 é demonstrado que se H for de dimensão finita e $B \in Bil(H)$ tem uma Representação de Schur, então o operador é diagonalízável, ou seja, H tem um base ortonormal formada por autovalores de B. No Exemplo 2.3.12 temos um operador $B \in Bil(H)$ tal que H possui uma base ortonormal formada por autovetores de B, mas B não possui um Representação de Schur, ou seja, B não é diagonalizável.

Seja H um espaço de hilbert separável qualquer. Seja $T \in Bil(H)$ tal que tenha uma Representação de Schur de acordo com o Teorema 2.3.6, ou seja,

$$T(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < x, x_i >< y, x_i > x_i\,, \tag{2.3.30}$$

para todo $x, y \in H$. Se o conjunto $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de autovetores de T que aparecem em (2.3.30) for maximal, então H possui uma base ortonormal enumerável formada por autovetores de T. Caso contrário, existe $u_1 \in H$, tal que $u_1 \perp x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\|u_1\| = 1$. Se $U_1 = X \cup u_1$ for maximal, então temos que U_1 é uma base ortonormal enumerável de H formada por autovetores de T, pois temos que $T(u_1, y) = 0$ para todo $y \in H$, logo concluímos que u_1 é um autovetor ordenado de T associado ao autovalor ordenado $\gamma = 0$. Note que $X \subset U_1$. Se U_1 não for maximal, então existe $u_2 \in H$, $\|u_2\| = 1$, e $u_2 \perp y$, para todo $y \in U_1$. Seja $U_2 = U_1 \cup u_2$. Se U_2 for maximal, de maneira análoga, temos que U_2 é uma base ortonormal enumerável de H formada por autovetores ordenados de T. Note que $X \subset U_1 \subset U_2$. Se U_2 não for maximal, podemos continuar com a construção dessa cadeia de conjuntos não vazio e, pelo Lema de Zorn, teremos um elemento maximal dessa cadeia, ou seja, teremos um conjunto U maximal formado por autovetores ordenados de T, ou seja, U é uma base ortonormal enumerável de H formada por autovetores de T. Temos então o seguinte teorema:

Teorema 2.3.14. *Seja H um espaço de hilbert separável . Seja $T \in Bil(H)$ tal que tenha uma Representação de Schur de acordo com o Teorema 2.3.6. Então H possui uma base ortonormal enumerável formada por autovetores de T.*

CAPÍTULO 3

Valores Singulares e Representação de Schmidt

Sejam H e K espaços de Hilbert sobre o corpo dos reais e $T : H \to K$ um operador linear limitado. Temos a seguinte definição, dada em [10]:

Definição 3.0.15. *Um número positivo τ é dito ser valor singular do operador $T : H \to K$ se existem vetores unitários $x \in H$ e $y \in K$ tal que*

$$T(x) = \tau y \quad e \ T^*(y) = \tau x$$

onde $T^* : K \to H$ é o operador adjunto de T. Temos:

$$\begin{aligned} T^*(T(x)) &= T^*(\tau y) = \tau(T^*(y)) = \tau^2 x \\ T(T^*(y)) &= T(\tau x) = \tau(T(x)) = \tau^2 y\,. \end{aligned}$$

Portanto τ^2 é autovalor de (T^*T) e (TT^*). Note que T e T^* têm os mesmos valores singulares.

Dizemos que (x_i) é uma sequência ortonormal extendida se :

$< x_i, x_j >= 0$ se $i \neq j$ e cada x_i é unitário ou nulo para todo $i, j \in \mathbb{N}$.

Chamamos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tau_i < \cdot, x_i > y_i$$

uma representação de Schmidt do operador $T : H \to K$ se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $(\tau_i) \in c_0$.

2. (x_i) e (y_i) são sequências ortonormais extendidas de H e K, respectivamente.

3. $T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_i < x, x_i > y_i$ para todo $x \in H$.

4. Se $x_i \neq 0$ e $y_i \neq 0$, então segue que $< T(x_i), y_i >= \tau_i$. Caso contrário, se pelo menos um dos elementos x_i ou y_i é zero, o valor do coeficiente correspondente τ_i não tem qualquer efeito. E portanto naturalmente assumimos que $\tau_i = 0$. E assim obtemos $< T(x_i), y_i >= \tau_i$, para $i \in \mathbb{N}$.

A representação de Schmidt é dita ser monótona se $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \ldots \geq 0$. Note que todos coeficientes positivos τ_i são valores singulares de T.

Temos o seguinte resultado:

Teorema 3.0.16. *Todo operador compacto $T : H \to K$ tem uma representação de Schmidt monótona.*

Neste capítulo definimos o valor singular de um operador bilinear e mostramos que todo operador bilinear compacto não nulo tem um valor singular. Também mostramos quando um operador bilinear tem uma representação de Schmidt.

3.1 Valores Singulares de um Operador Bilinear

Sejam H_1, H_2 e K espaços de Hilbert separáveis sobre o corpo dos reais. A definição de valor singular de um operador bilinear tem como motivação a definição de valor singular para o caso linear.

Definição 3.1.1. *Dado $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$, sejam*

$$\begin{aligned} \phi_{H_1} &: H_2 \to \mathfrak{L}(H_1, K) \\ \phi_{H_2} &: H_1 \to \mathfrak{L}(H_2, K) \end{aligned}$$

definidos como: se $x \in H_1$, $y \in H_2$, temos

$$\begin{aligned} \phi_{H_1}(y)(x) &= T(x, y) \\ \phi_{H_2}(x)(y) &= T(x, y). \end{aligned}$$

Definição 3.1.2. *Um número positivo τ é um valor singular de $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$, se existem elementos normalizados $x_0 \in H_1$, $y_0 \in H_2$ e $z_0 \in K$ tal que*

$$\begin{aligned} T(x_0, y_0) &= \tau z_0 \\ \phi^*_{H_1}(y_0)(z_0) &= \tau x_0 \\ \phi^*_{H_2}(x_0)(z_0) &= \tau y_0 \end{aligned}$$

onde

$$\phi_{H_1}(y_0)\colon H_1 \to K\,, \quad \phi_{H_2}(x_0)\colon H_2 \to K\,, \quad \phi^*_{H_1}(y_0)\colon K \to H_1 \;\; e \;\; \phi^*_{H_2}(x_0)\colon K \to H_2\,.$$

Neste caso, dizemos que $(x_0\,, y_0\,, z_0)$ é uma terna de vetores singulares associados ao valor singular τ.

Observação 3.1.3. *No Exemplos 3.2.2 e 3.2.3 vemos que podem existir mais de uma terna $(x_0\,, y_0\,, z_0)$ de vetores singulares associados ao mesmo valor singular τ.*

Observação 3.1.4. *Temos que*

$$< T(x_0, y_0), z_0 >_K = < \phi_{H_1}(y_0)(x_0), z_0 >_K = < x_0, \phi^*_{H_1}(y_0)(z_0) >_{H_1} = < x_0, \tau x_0 >_{H_1} = \tau$$
$$< T(x_0, y_0), z_0 >_K = < \phi_{H_2}(x_0)(y_0), z_0 >_K = < y_0, \phi^*_{H_2}(x_0)(z_0) >_{H_2} = < y_0, \tau y_0 >_{H_2} = \tau\,.$$

τ^2 é autovalor de:

$$\begin{aligned} &\phi_{H_1}(y_0) \circ \phi^*_{H_1}(y_0) : K \to K && \phi_{H_2}(x_0) \circ \phi^*_{H_2}(x_0) : K \to K \\ &\phi^*_{H_1}(y_0) \circ \phi_{H_1}(y_0) : H_1 \to H_1 && \phi^*_{H_2}(x_0) \circ \phi_{H_2}(x_0) : H_2 \to H_2\,. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Basta notar que

$$\phi_{H_1}(y_0) \circ \phi^*_{H_1}(y_0)(z_0) = \phi_{H_1}(y_0)(\tau x_0) = T(\tau x_0, y_0) = \tau T(x_0, y_0) = \tau^2 z_0\,.$$

Raciocínio análogo se aplica aos demais operadores lineares em (3.1.1).

Dado um operador bilinear $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$, será que ele tem um valor singular? Como no caso linear, mostramos no Teorema 3.1.6 que se o operador bilinear for compacto então garantimos a existência de pelo menos um valor singular.

Lema 3.1.5. *Seja $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$. Se T for compacto então os operadores ϕ_{H_1} e ϕ_{H_2} dados na Definição 3.1.1 são lineares e compactos.*

Demonstração: Sejam $y, y' \in H_2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos:

$$\begin{aligned}\phi_{H_1}(\alpha y + y')(x) &= T(x, \alpha y + y') \\ &= \alpha T(x,y) + T(x,y') \\ &= (\alpha\phi_{H_1}(y) + \phi_{H_1}(y'))(x),\end{aligned}$$

para todo $x \in H_1$, logo $\phi_{H_1}(\alpha y + y') = \alpha\phi_{H_1}(y) + \phi_{H_1}(y')$. Portanto ϕ_{H_1} é linear. De maneira análoga se mostra que ϕ_{H_2} também é linear.

Como $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ é compacto, então $T(x,\cdot) : H_2 \to K$ e $T(\cdot, y) : H_1 \to K$ são operadores lineares compactos para todo $x \in H_1$, $y \in H_2$ fixos.

Suponha que ϕ_{H_1} não seja compacto. Então existe uma sequência limitada $(y_n) \subset H_2$ tal que $(\phi_{H_1}(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ não tenha nenhuma subsequência convergente, ou seja, se $(\phi_{H_1}(y_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ é um subsequência de $(\phi_{H_1}(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$, então existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\epsilon \leq \|\phi_{H_1}(y_{n_i}) - \phi_{H_1}(y_{n_j})\|_{\mathfrak{L}(H_1,K)}, \tag{3.1.2}$$

para todo $i \neq j \in \mathbb{N}$.

Note que para cada $k \in \mathbb{N}$ fixo, $\phi_{H_1}(y_{n_k}) : H_1 \to K$ é compacto, pois

$$\phi_{H_1}(y_{n_k}) = T(\cdot, y_{n_k}).$$

Seja $x \in H_1$, tal que $\|x\|_{H_1} = 1$. Temos que $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada e como $T(x,\cdot) : H_2 \to K$ é compacto, então $(T(x, y_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente em K, ou seja, existe uma subsequência $(y_{n_{k_s}})_{s\in\mathbb{N}} \subset (y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$T(x, y_{n_{k_s}}) \to z \text{ com } \ s \to \infty,$$

onde $z \in K$ depende de $x \in H_1$.

Note que $(\phi_{H_1}(y_{n_{k_s}}))_{s\in\mathbb{N}} \subset (\phi_{H_1}(y_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ e $\phi_{H_1}(y_{n_{k_s}})(x) = T(x, y_{n_{k_s}}) \to z$, quando $s \to \infty$. Temos então que

$$\|\phi_{H_1}(y_{n_{k_i}})(x) - \phi_{H_1}(y_{n_{k_j}})(x)\|_K \to 0,$$

quando $i, j \to \infty$. Logo,

$$\|\phi_{H_1}(y_{n_{k_i}}) - \phi_{H_1}(y_{n_{k_j}})\|_{\mathfrak{L}(H_1,K)} = \sup_{\|x\|_{H_1}=1} \|\phi_{H_1}(y_{n_{k_i}})(x) - \phi_{H_1}(y_{n_{k_j}})(x)\|_K \to 0,$$

quando $i, j \to \infty$. Mas temos um contradição por (3.1.2). Portanto ϕ_{H_1} é compacto. De maneira análoga se mostra que ϕ_{H_2} é compacto. ■

Com o Lema 3.1.5 podemos provar o seguinte teorema.

Teorema 3.1.6. *Seja $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ compacto. Se $T \neq 0$, então $\tau = \|T\|$ é um valor singular de T.*

Demonstração: Sabemos que $\|T\| = \sup_{\|x\|_{H_1}=1\,,\,\|y\|_{H_2}=1} \|T(x,y)\|_K$. Portanto existe uma sequência $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in H_1 \times H_2$, com $\|x\|_{H_1} = \|y\|_{H_2} = 1$ e $\lim_{n\to\infty} \|T(x_n, y_n)\|_K = \|T\| = \tau$.

Seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K$ um sequência definada como $z_n = \tau^{-1}T(x_n, y_n)$. Note que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|z_n\|_K \leq 1$, pois

$$\begin{aligned} \|z_n\|_K &= \|\tau^{-1}T(x_n, y_n)\|_K = \tau^{-1}\|T(x_n, y_n)\|_K \\ &\leq \tau^{-1}\|T\|\|x_n\|_{H_1}\|y_n\|_{H_2} \\ &= \tau^{-1}\tau = 1. \end{aligned}$$

Como T é compacto e $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $H_1 \times H_2$, temos que a sequência $T(x_n, y_n)$ tem uma subsequência convergente em K, ou seja, existe $z \in K$ tal que $z_{n_k} = \lambda^{-1}T(x_{n_k}, y_{n_k}) \to z$, quando $k \to \infty$. Note que $\|z\|_K = 1$, pois

$$\begin{aligned} \|z\|_K &= \lim_{k\to\infty} \|z_{n_k}\|_K = \lim_{k\to\infty} \|\tau^{-1}T(x_{n_k}, y_{n_k})\|_K \\ &= \tau^{-1} \lim_{k\to\infty} \|T(x_{n_k}, y_{n_k})\|_K \\ &= \tau^{-1}\tau = 1\,. \end{aligned}$$

Agora, como $\|y_{n_k}\|_{H_2} = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, então $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em H_2. Pelo Lema 3.1.5 temos que o operador $\phi_{H_1} : H_2 \to \mathfrak{L}(H_1, K)$ é compacto, logo $(\phi_{H_1}(y_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente, ou seja, existe uma subsequência $(y_{n_{k_s}})_{s\in\mathbb{N}} \subset (y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(\phi_{H_1}(y_{n_{k_s}}))_{s\in\mathbb{N}}$ converge em $\mathfrak{L}(H_1, K)$, isto é, existe $\phi_1 \in \mathfrak{L}(H_1, K)$ tal que $\phi_{H_1}(y_{n_{k_s}}) \to \phi_1$, quando $s \to \infty$.

Deve se observar que dado $y \in H_2$ tal que $\|y\|_{H_2} = 1$, temos que $\phi_{H_1}(y) \leq T$. De fato, desde que $\phi_{H_1}(y) \in \mathfrak{L}(H_1, K)$, temos

$$\begin{aligned} \|\phi_{H_1}(y)\|_{\mathfrak{L}(H_1,K)} &= \sup_{\|x\|_{H_1}=1} \|\phi_{H_1}(y)(x)\|_K = \sup_{\|x\|_{H_1}=1} \|T(x,y)\|_K \\ &\leq \sup_{\|x\|_{H_1}=1, \|y\|_{H_2}=1} \|T(x,y)\|_K = \|T|. \end{aligned}$$

Como $\phi_{H_1}(y_{n_{k_s}}) \to \phi_1$ e $\|\phi_{H_1}(y_{n_{k_s}})\|_{\mathfrak{L}(H_1,K)} \leq T$, para todo $s \in \mathbb{N}$, então $\|\phi_1\|_{\mathfrak{L}(H_1,K)} \leq T$. Portanto

$$\begin{aligned}
\|\phi^*_{H_1}(y_{n_{k_s}})(z_{n_{k_s}}) - \tau x_{n_{k_s}}\|^2_{H_1} &= < \phi^*_{H_1}(y_{n_{k_s}})(z_{n_{k_s}}) - \tau x_{n_{k_s}}, \phi^*_{H_1}(y_{n_{k_s}})(z_{n_{k_s}}) - \tau x_{n_{k_s}} > \\
&= < \phi^*_{H_1}(y_{n_{k_s}})(z_{n_{k_s}}), \phi^*_{H_1}(y_{n_{k_s}})(z_{n_{k_s}}) > \\
&\quad -2\tau < \phi^*_{H_1}(y_{n_{k_s}})(z_{n_{k_s}}), x_{n_{k_s}} > +\tau^2 \\
&= \|\phi^*_{H_1}(y_{n_{k_s}})(z_{n_{k_s}})\|^2_{H_1} - 2\tau < z_{n_{k_s}}, \phi_{H_1}(y_{n_{k_s}})(x_{n_{k_s}}) > +\tau^2 \\
&= \|\phi^*_{H_1}(y_{n_{k_s}})(z_{n_{k_s}})\|^2_{H_1} \\
&\quad -2\tau < \tau^{-1}T(x_{n_{k_s}}, y_{n_{k_s}}), T(x_{n_{k_s}}, y_{n_{k_s}})) > +\tau^2 \\
&\leq \|\phi^*_{H_1}(y_{n_{k_s}})\|^2_{\mathfrak{L}(K,H_1)} \|z_{n_{k_s}}\|^2_K - 2\|T(x_{n_{k_s}}, y_{n_{k_s}})\|^2_K + \tau^2 \\
&\leq \|\phi^*_{H_1}(y_{n_{k_s}})\|^2_{\mathfrak{L}(K,H_1)} - 2\|T(x_{n_{k_s}}, y_{n_{k_s}})\|^2_K + \tau^2 \\
&= \|\phi_{H_1}(y_{n_{k_s}})\|^2_{\mathfrak{L}(K,H_1)} - 2\|T(x_{n_{k_s}}, y_{n_{k_s}})\|^2_K + \tau^2 \\
&\leq \|T\|^2 + \tau^2 - 2\|T(x_{n_{k_s}}, y_{n_{k_s}})\|^2_K \\
&= 2\tau^2 - 2\|T(x_{n_{k_s}}, y_{n_{k_s}})\|^2_K .
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\phi^*_{H_1}(y_{n_{k_s}})(z_{n_{k_s}}) - \tau x_{n_{k_s}}\|^2_{H_1} \leq 2\tau^2 - 2\|T(x_{n_{k_s}}, y_{n_{k_s}})\|^2_K \to 0 \,,$$

quando $s \to \infty$.

Como $\phi_{H_1}(y_{n_{k_s}}) \to \phi_1$, então $\|\phi_1 - \phi_{H_1}(y_{n_{k_s}})\|_{\mathfrak{L}(H_1,K)} \to 0$, quando $s \to \infty$, logo

$$\|\phi^*_1 - \phi^*_{H_1}(y_{n_{k_s}})\|_{\mathfrak{L}(K,H_1)} = \|(\phi_1 - \phi_{H_1}(y_{n_{k_s}}))^*\|_{\mathfrak{L}(K,H_1)} = \|\phi_1 - \phi_{H_1}(y_{n_{k_s}})\|_{\mathfrak{L}(H_1,K)} \to 0$$

Temos então que:

$$\begin{aligned}
\|\phi^*_1(z) - \tau x_{n_{k_s}}\|_{H_1} &= \|\phi^*_1(z) - \phi^*_{H_1}(y_{n_{k_s}})(z_{n_{k_s}}) + \phi^*_{H_1}(y_{n_{k_s}})(z_{n_{k_s}}) - \tau x_{n_{k_s}}\|_{H_1} \\
&\leq \|\phi^*_1(z) - \phi^*_{H_1}(y_{n_{k_s}})(z_{n_{k_s}})\|_{H_1} + \|\phi^*_{H_1}(y_{n_{k_s}})(z_{n_{k_s}}) - \tau x_{n_{k_s}}\|_{H_1} \\
&= \|\phi^*_1(z) - \phi^*_1(z_{n_{k_s}}) + \phi^*_1(z_{n_{k_s}}) - \phi^*_{H_1}(y_{n_{k_s}})(z_{n_{k_s}})\|_{H_1} \\
&\quad + \|\phi^*_{H_1}(y_{n_{k_s}})(z_{n_{k_s}}) - \tau x_{n_{k_s}}\|_{H_1} \\
&\leq \|\phi^*_1(z) - \phi^*_1(z_{n_{k_s}})\|_{H_1} + \|\phi^*_1(z_{n_{k_s}}) - \phi^*_{H_1}(y_{n_{k_s}})(z_{n_{k_s}})\|_{H_1} \\
&\quad + \|\phi^*_{H_1}(y_{n_{k_s}})(z_{n_{k_s}}) - \tau x_{n_{k_s}}\|_{H_1} \\
&\leq \|\phi^*_1\|_{\mathfrak{L}(K,H_1)} \|z - z_{n_{k_s}}\|_K + \|\phi^*_1 - \phi^*_{H_1}(y_{n_{k_s}})\|_{\mathfrak{L}(K,H_1)} \|z_{n_{k_s}}\|_K \\
&\quad + \|\phi^*_{H_1}(y_{n_{k_s}})(z_{n_{k_s}}) - \tau x_{n_{k_s}}\|_{H_1} .
\end{aligned}$$

Como $(z_{n_{k_s}})_{s\in\mathbb{N}} \subset (z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $z_{n_k} \to z$, então $z_{n_{k_s}} \to z$. Visto que os termos $\|z - z_{n_{k_s}}\|_K$, $\|\phi^*_1 - \phi^*_{H_1}(y_{n_{k_s}})\|_{\mathfrak{L}(K,H_1)}$ e $\|\phi^*_{H_1}(y_{n_{k_s}})(z_{n_{k_s}}) - \tau x_{n_{k_s}}\|_{H_1}$ convergem para zero, temos que $\tau x_{n_{k_s}} \to \phi^*_1(z)$, ou $x_{n_{k_s}} \to \tau^{-1}\phi^*_1(z)$. Defina $x = \tau^{-1}\phi^*_1(z) \in H_1$, assim $x_{n_{k_s}} \to x$.

Os mesmos cálculos são válidos para o operador $\phi_{H_2} : H_1 \to \mathfrak{L}(H_2, K)$, onde é obtido um operador $\phi_2 : H_2 \to K$ tal que $\|\phi_2^*(z) - \tau y_{n_{k_s}}\|_{H_2} \to 0$. Defina $y = \tau^{-1}\phi_2^*(z) \in H_2$, assim $y_{n_{k_s}} \to y$. Temos então que, para todo $h_1 \in H_1$

$$\phi_1(h_1) = \lim_{s\to\infty} \phi_{H_1}(y_{n_{k_s}})(h_1) = \lim_{s\to\infty} T(h_1, y_{n_{k_s}}) = T(h_1, y) = \phi_{H_1}(y)(h_1)\,,$$

logo, $\phi_1 = \phi_{H_1}(y)$. Com o mesmo raciocínio, temos $\phi_2 = \phi_{H_2}(x)$. Como

$$x = \tau^{-1}\phi_1^*(z) = \tau^{-1}\phi_{H_1}^*(y)(z),$$

então $\phi_{H_1}^*(y)(z) = \tau x$, e da mesma forma $\phi_{H_2}^*(x)(z) = \tau y$. Visto que $\tau z_{n_{k_s}} = T(x_{n_{k_s}}, y_{n_{k_s}})$, tomando o limite, obtemos $T(x, y) = \tau z$. É fácil mostrar que $\|x\|_{H_1} = 1$ e $\|y\|_{H_2} = 1$, que prova que $\|T\|$ é um valor singular de T. ■

3.2 Representação de Schmidt de um Operador Bilinear

Vimos que se $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ for compacto, então $\|T\|$ é um valor singular. Vamos agora definir a representação de Schmidt de um operador $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$.

Definição 3.2.1. *Chamamos*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tau_i < \cdot, x_i >< \cdot, y_i > z_i$$

uma Representação de Schmidt do operador $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ *se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. $(\tau_i) \in c_0$;

2. (x_i),(y_i) *e* (z_i) *são sequências ortonormais extendidas de* H_1, H_2 *e* K, *respectivamente;*

3. $T(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_i < x, x_i >< y, y_i > z_i$ *para todo* $(x, y) \in H_1 \times H_2$;

4. *Se* $x_i \neq 0$, $y_i \neq 0$ *e* $z_i \neq 0$ *então segue que* $< T(x_i, y_i), z_i >= \tau_i$. *Caso contrário, se pelo menos um dos elementos* x_i, y_i *ou* z_i *é zero, o valor do coeficiente correspondente* τ_i *não tem qualquer efeito. E portanto naturalmente assumimos que* $\tau_i = 0$. *E assim obtemos* $< T(x_i, y_i), z_i >= \tau_i$ *para* $i \in \mathbb{N}$.

A representação de Schmidt é dita ser monótona se $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \ldots \geq 0$.

Se H, K forem espaços de Hilbert de dimensão finita e $T : H \to K$ um operador linear de posto r, ou seja, a dimensão da imagem de T é r, então o operador T tem r valores singulares, para mais detalhes sobre valores singulares indicamos as referências [14] e [2]. Temos no Exemplo 3.2.2 que tal fato não ocorre em operadores bilineares. Vimos que todo operador linear compacto $T \in \mathfrak{L}(H, K)$ tem uma representação de Schmidt monótona. Vemos nos Exemplos 3.2.2 e 3.2.3 que nem todo operador bilinear $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ compacto tem uma representação de Schmidt.

Exemplo 3.2.2. *Seja $T : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definido da seguinte forma: se $x = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, $y = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ e $z = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4$, então:*

$$T(x, y) = (2a_1b_1,\ 3a_2b_2,\ 0,\ 0).$$

É simples verificar que $T \in Bil(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4)$. Seja $y \in \mathbb{R}^2$ fixo. Temos que $\phi_{\mathbb{R}^3}(y) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ é definido como $\phi_{\mathbb{R}^3}(y)(x) = T(x, y)$. Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$, temos que

$$\begin{cases} \phi_{\mathbb{R}^3}(y)(e_1) &= (\,2b_1,\ 0,\ 0,\ 0) \\ \phi_{\mathbb{R}^3}(y)(e_2) &= (\,0,\ 3b_2,\ 0,\ 0) \\ \phi_{\mathbb{R}^3}(y)(e_3) &= (\,0,\ 0,\ 0,\ 0). \end{cases}$$

Ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} 2b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 3b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é a matriz de $\phi_{\mathbb{R}^3}(y) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ fixada a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$. Para encontrar $\phi^*_{\mathbb{R}^3}(y) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, fixada a base canônica de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$, basta calcular a matriz transposta de A. Temos então que

$$\phi^*_{\mathbb{R}^3}(y)(z) = (\,2b_1u_1,\ 3b_2u_2,\ 0).$$

Seja $x \in \mathbb{R}^3$ fixo, de maneira análoga mostramos que

$$\phi^*_{\mathbb{R}^2}(x)(z) = (\,2a_1u_1,\ 3a_2u_2).$$

Para encontrar os valores singulares de T temos que resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} T(x_0, y_0) &= \tau z_0 \\ \phi^*_{\mathbb{R}^3}(y_0)(z_0) &= \tau x_0 \\ \phi^*_{\mathbb{R}^2}(x_0)(z_0) &= \tau y_0\,, \end{cases}$$

onde $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ *é uma terna de vetores singulares associados ao valor singular* τ*. Prosseguindo com o sistema, temos*

$$\left\{ \begin{array}{rclrcl} 2a_1b_1 &=& \tau u_1 & 3a_2b_2 &=& \tau u_2 \\ 0 &=& \tau u_3 & 0 &=& \tau u_4 \\ 2b_1u_1 &=& \tau a_1 & 3b_2u_2 &=& \tau a_2 \\ 0 &=& \tau a_3 & 2a_1u_1 &=& \tau b_1 \\ 3a_2u_2 &=& \tau b_2 & (a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2 &=& 1 \\ (b_1)^2+(b_2)^2 &=& 1 & (u_1)^2+(u_2)^2+(u_3)^2+(u_4)^2 &=& 1 \\ \tau &>& 0\,. & & & \end{array} \right.$$

Utilizando o sistema algébrico computacional $Maple$ *ou* $MatLab$*, resolvemos o sistema acima e chegamos nos seguintes valores singulares com suas respectivas ternas de vetores singulares associados.*

$\tau = 2$*:*

$$(x=(1,0,0), y=(1,0), z=(1,0,0,0)) \quad , \quad (x=(1,0,0), y=(-1,0), z=(-1,0,0,0))$$
$$(x=(-1,0,0), y=(1,0), z=(-1,0,0,0)) \quad , \quad (x=(-1,0,0), y=(-1,0), z=(1,0,0,0))$$

$\tau = 3$*:*

$$(x=(0,1,0), y=(0,1), z=(0,1,0,0)) \quad , \quad (x=(0,1,0), y=(0,-1), z=(0,-1,0,0))$$
$$(x=(0,-1,0,), y=(0,1), z=(0,-1,0,0)) \quad , \quad (x=(0,-1,0), y=(0,-1), z=(0,1,0,0))$$

$\tau = \frac{6}{13}\sqrt{13}$:

$$x = (\frac{3}{13}\sqrt{13}, \frac{2}{13}\sqrt{13}), 0), y = (\frac{3}{13}\sqrt{13}, \frac{2}{13}\sqrt{13}), z = (\frac{3}{13}\sqrt{13}, \frac{2}{13}\sqrt{13}, 0, 0)$$
$$x = (\frac{3}{13}\sqrt{13}, -\frac{2}{13}\sqrt{13}, 0), y = (\frac{3}{13}\sqrt{13}, -\frac{2}{13}\sqrt{13}), z = (\frac{3}{13}\sqrt{13}, \frac{2}{13}\sqrt{13}, 0, 0)$$
$$x = (-\frac{3}{13}\sqrt{13}, \frac{2}{13}\sqrt{13}, 0), y = (-\frac{3}{13}\sqrt{13}, \frac{2}{13}\sqrt{13}), z = (\frac{3}{13}\sqrt{13}, \frac{2}{13}\sqrt{13}, 0, 0)$$
$$x = (-\frac{3}{13}\sqrt{13}, -\frac{2}{13}\sqrt{13}, 0), y = (-\frac{3}{13}\sqrt{13}, -\frac{2}{13}\sqrt{13}), z = (\frac{3}{13}\sqrt{13}, \frac{2}{13}\sqrt{13}, 0, 0)$$
$$x = (-\frac{3}{13}\sqrt{13}, \frac{2}{13}\sqrt{13}, 0), y = (\frac{3}{13}\sqrt{13}, \frac{2}{13}\sqrt{13}), z = (-\frac{3}{13}\sqrt{13}, \frac{2}{13}\sqrt{13}, 0, 0)$$
$$x = (-\frac{3}{13}\sqrt{13}, -\frac{2}{13}\sqrt{13}, 0), y = (\frac{3}{13}\sqrt{13}, -\frac{2}{13}\sqrt{13}), z = (-\frac{3}{13}\sqrt{13}, \frac{2}{13}\sqrt{13}, 0, 0)$$
$$x = (\frac{3}{13}\sqrt{13}, \frac{2}{13}\sqrt{13}, = 0), y = (-\frac{3}{13}\sqrt{13}, \frac{2}{13}\sqrt{13}), z = (-\frac{3}{13}\sqrt{13}, \frac{2}{13}\sqrt{13}, 0, 0)$$
$$x = (\frac{3}{13}\sqrt{13}, -\frac{2}{13}\sqrt{13}, 0), y = (-\frac{3}{13}\sqrt{13}, -\frac{2}{13}\sqrt{13}), z = (-\frac{3}{13}\sqrt{13}, \frac{2}{13}\sqrt{13}, 0, 0)$$

Observe que se:

$$\tau_1 = 3 \quad e \quad x_1 = (\,0,\,1,\,0), y_1 = (\,0,\,1), z_1 = (\,0,\,1,\,0,\,0)$$

$$\tau_2 = 2 \quad e \quad x_2 = (\,1,\,0,\,0), y_2 = (\,1,\,0), z_2 = (\,1,\,0,\,0,\,0)$$

então

$$T(x,y) = \sum_{i=1}^{2} \tau_i < x, x_i >< y, y_i > z_i$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$. *Note também que o posto de* T *é dois e* T *tem três valores singulares.*

Exemplo 3.2.3. *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ *definido da seguinte forma: se* $x = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, $y = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ *e* $z = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^4$, *então:*

$$T(x,y) = (a_1 b_1,\, b_1(a_1 + a_2),\, b_1 a_1,\, b_2(a_1 + a_3))$$

De maneira análoga ao Exemplo 3.2.2, mostramos que

$$\phi^*_{\mathbb{R}^3}(y)(z) = (b_1u_1 + b_1u_2 + b_1u_3 + b_2u_4,\, b_1u_2,\, b_2u_4),$$

$$\phi^*_{\mathbb{R}^2}(x)(z) = (a_1u_1 + (a_1 + a_2)u_2 + a_1u_3,\, (a_1 + a_3)u_4).$$

Após alguns cálculos, de maneira análoga ao Exemplo 3.2.2, temos que os valores singulares de T *com suas respectivas ternas de vetores singulares associados são:*

$\tau = \sqrt{2}$

$$
\begin{aligned}
x &= (\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}), y = (0,1), z = (0,0,0,1)\\
x &= (-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}), y = (0,1), z = (0,0,0,-1)\\
x &= (-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}), y = (0,-1), z = (0,0,0,1)\\
x &= (\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}), y = (0,-1), z = (0,0,0,-1)
\end{aligned}
$$

$\tau = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

$$
\begin{aligned}
x &= (\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \frac{1}{2}(-1+\sqrt{2})\sqrt{2+\sqrt{2}}, 0), y = (1,0), z = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}, 0)\\
x &= (-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}(-1+\sqrt{2})\sqrt{2+\sqrt{2}}, 0), y = (1,0), z = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{12}, 0)\\
x &= (-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}(-1+\sqrt{2})\sqrt{2+\sqrt{2}}, 0), y = (-1,0), z = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}, 0)\\
x &= (\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \frac{1}{2}(-1+\sqrt{2})\sqrt{2+\sqrt{2}}, 0), y = (-1,0), z = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, 0)
\end{aligned}
$$

$\tau = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

$$
\begin{aligned}
x &= (-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}(-1-\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}, 0), y = (1,0), z = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, 0)\\
x &= (\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, \frac{1}{2}(-1-\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}, 0), y = (1,0), z = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}, 0),\\
x &= (\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, \frac{1}{2}(-1-\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}, 0), y = (-1,0), z = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, 0)\\
x &= (-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}(-1-\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}, 0), y = (-1,0), z = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}, 0).
\end{aligned}
$$

$\tau = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$
\begin{aligned}
x &= (0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}), y = (-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}), z = (0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2})\\
x &= (0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}), y = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}), z = (0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2})\\
x &= (0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}), y = (-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}), z = (0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2})\\
x &= (0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}), y = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}), z = (0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2})\,.
\end{aligned}
$$

Após uma análise dos valores singulares de T, concluímos que T não tem uma Representação de Schmidt de acordo com a Definição 3.2.1.

Os Exemplos 3.2.2 e 3.2.3 nos mostram que $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ ser compacto não é condição suficiente para que T tenha uma Representação de Schmidt. Para contornar esse problema, teremos que exigir mais propriedades do operador $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$.

Definição 3.2.4. *Seja τ_1 valor singular de $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$. Dizemos que τ_1 é um valor singular ordenado de T se:*

$$\begin{cases} T(x, y_1) = \tau_1 < x, x_1 > z_1 & , \text{ para todo } x \in H_1 \\ T(x_1, y) = \tau_1 < y, y_1 > z_1 & , \text{ para todo } y \in H_2 \\ \phi^*_{H_1}(y)(z_1) = \tau_1 < y, y_1 > x_1 & , \text{ para todo } y \in H_2 \end{cases}$$

para alguma terna $(x_1\,, y_1\,, z_1)$ de vetores singulares associados ao valor singular τ_1. Neste caso dizemos que x_1, y_1 e z_1 são vetores singulares ordenados associados ao valor singular ordenado τ_1.

Exemplo 3.2.5. *No Exemplo 3.2.2, os valores singulares $\tau = 2$ e $\tau = 3$ são ordenados e o valor singular $\tau = \frac{6}{13}\sqrt{13}$ não é ordenado.*

No Exemplo 3.2.3, todos os valores singulares encontrados não são ordenados.

Com esta definição de valor singular ordenado, mostramos no *Método da Ordenação 3.2.3* que se $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ for compacto e possuir uma sequência de valores singulares ordenados tal que seus respectivos vetores singulares ordenados formam uma sequência ortonormal de vetores, então T tem uma representação de Schmidt.

Método da Ordenação (3.2.3)

Seja $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ compacto não nulo. O Teorema 3.1.6 nos fornece o primeiro valor singular de T, ou seja, $\tau_1 = \|T\|$ é valor singular com uma terna $(x_1\,, y_1\,, z_1)$ de vetores singulares associados a τ_1. Temos:

$$\begin{aligned} T(x_1, y_1) &= \tau_1 z_1 \\ \phi^*_{H_1}(y_1)(z_1) &= \tau_1 x_1 \\ \phi^*_{H_2}(x_1)(z_1) &= \tau_1 y_1 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \phi_{H_1}(y) &: H_1 \to K \qquad \phi_{H_1}(y)(x) = T(x,y) \\ \phi_{H_2}(x) &: H_2 \to K \qquad \phi_{H_2}(x)(y) = T(x,y) \end{aligned}$$

para todo $(x, y) \in H_1 \times H_2$.

Assuma que τ_1 é **valor singular ordenado** de T e x_1 , y_1 e z_1 vetores singulares ordenados associados a τ_1, ou seja, temos:

$$\begin{cases} T(x, y_1) = \tau_1 < x, x_1 > z_1 \\ T(x_1, y) = \tau_1 < y, y_1 > z_1 \\ \phi^*_{H_1}(y)(z_1) = \tau_1 < y, y_1 > x_1 \end{cases}$$

para todo $(x, y) \in H_1 \times H_2$.

Seja $T_2 \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ dado por

$$T_2(x, y) = T(x, y) - \tau_1 < x, x_1 >< y, y_1 > z_1 \,,$$

logo T_2 é operador bilinear compacto. Se T_2 for não nulo, existe $\tau_2 = \|T_2\|$ valor singular de T_2 com uma terna $(x_2\,, y_2\,, z_2)$ de vetores singulares associados a τ_2. Temos:

$$\begin{cases} T_2(x_2, y_2) = \tau_2 z_2 \\ \phi^*_{2H_1}(y_2)(z_2) = \tau_2 x_2 \\ \phi^*_{2H_2}(x_2)(z_2) = \tau_2 y_2 \,. \end{cases}$$

Afirmação: $x_1 \perp x_2$, $y_1 \perp y_2$ e $z_1 \perp z_2$. De fato

$$\begin{aligned} \tau_2 < x_1, x_2 > &= < x_1, \tau_2 x_2 >=< x_1, \phi^*_{2H_1}(y_2)(z_2) > \\ &= < \phi_{2H_1}(y_2)(x_1), z_2 >=< T_2(x_1, y_2), z_2 > \\ &= < T(x_1, y_2) - \tau_1 < y_2, y_1 > z_1, z_2 > \\ &= < \tau_1 < y_2, y_1 > z_1 - \tau_1 < y_2, y_1 > z_1, z_2 > \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \tau_2 < y_1, y_2 > &= < y_1, \tau_2 y_2 >=< y_1, \phi^*_{2H_2}(x_2)(z_2) > \\ &= < \phi_{2H_2}(x_2)(y_1), z_2 >=< T_2(x_2, y_1), z_2 > \\ &= < T(x_2, y_1) - \tau_1 < x_2, x_1 > z_1, z_2 > \\ &= < \tau_1 < x_2, x_1 > z_1 - \tau_1 < x_2, x_1 > z_1, z_2 > \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\tau_2 < z_1, z_2 > &= < z_1, \tau_2 z_2 >=< z_1, T_2(x_2, y_2) > \\
&= < z_1, T(x_2, y_2) >=< z_1, \phi_{H_1}(y_2)(x_2) > \\
&= < \phi^*_{H_1}(y_2)(z_1), x_2 >=< \tau_1 < y_2, y_1 > x_1, x_2 > \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
&\tau_2 = \|T_2\| = \sup\{\|T_2(x,y)\|_{K} : \text{ onde } \|x\|_{H_1} = \|y\|_{H_2} = 1, x \in H_1, y \in H_2\} \\
&\tau_1 = \|T\| = \sup\{\|T(x,y)\|_{K} : \text{ onde } \|x\|_{H_1} = \|y\|_{H_2} = 1, x \in H_1, y \in H_2\}\,. \qquad (3.2.4)
\end{aligned}$$

Afirmação: $T_2(x,y) \perp z_1$ para todo $(x,y) \in H_1 \times H_2$, e portanto $\tau_1 \geq \tau_2$. Temos que

$$\begin{aligned}
< T_2(x,y), z_1 > &= < T(x,y) - \tau_1 < x, x_1 >< y, y_1 > z_1, z_1 > \\
&= < T(x,y), z_1 > - \tau_1 < x, x_1 >< y, y_1 > \\
&= < \phi_{H_1}(y)(x), z_1 > - \tau_1 < x, x_1 >< y, y_1 > \\
&= < x, \phi^*_{H_1}(y)(z_1) > - \tau_1 < x, x_1 >< y, y_1 > \\
&= < x, \tau_1 < y, y_1 > x_1 > - < x, \tau_1 < y, y_1 > x_1 > \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Portanto, $T_2(x,y) \perp \tau_1 < x, x_1 >< y, y_1 > z_1$, para todo $(x,y) \in H_1 \times H_2$. Logo

$$\begin{aligned}
\|T_2(x,y)\|^2_{K} + \|\tau_1 < x, x_1 >< y, y_1 > z_1\|^2_{K} &= \|T(x,y) - \tau_1 < x, x_1 >< y, y_1 > z_1 \\
&\quad + \tau_1 < x, x_1 >< y, y_1 > z_1\|^2_{K} = \|T(x,y)\|^2_{K}\,.
\end{aligned}$$

Temos então

$$\|T_2(x,y)\|^2_{K} + \|\tau_1 < x, x_1 >< y, y_1 > z_1\|^2_{K} = \|T(x,y)\|^2_{K} \qquad (3.2.5)$$

para todo $(x,y) \in H_1 \times H_2$. Logo de (3.2.5) e (3.2.4) temos que $\tau_1 \geq \tau_2$.

Observação 3.2.6. *Como $x_1 \perp x_2$, $y_1 \perp y_2$ e $z_1 \perp z_2$, temos que $T_2(x_2, y_2) = T(x_2, y_2)$, logo $T(x_2, y_2) = \tau_2 z_2$. Note que*

$$\phi^*_{2H_1}(y)(z) = \phi^*_{H_1}(y)(z) - \tau_1 < y, y_1 >< z, z_1 > x_1$$

$$\phi^*_{2H_2}(x)(z) = \phi^*_{H_2}(x)(z) - \tau_1 < x, x_1 >< z, z_1 > y_1\,.$$

Logo

$$\phi^*_{2H_1}(y_2)(z_2) = \phi^*_{H_1}(y_2)(z_2) \quad e \quad \phi^*_{2H_2}(x_2)(z_2) = \phi^*_{H_2}(x_2)(z_2)$$

portanto

$$\phi^*_{H_1}(y_2)(z_2) = \tau_2 x_2 \quad e \quad \phi^*_{H_2}(x_2)(z_2) = \tau_2 y_2\,.$$

Concluímos que τ_2 é valor singular de T com uma terna $(x_2\,, y_2\,, z_2)$ de vetores singulares associados a τ_2.

Assuma que τ_2 é **valor singular ordenado** de T e x_2 , y_2 e z_2 vetores singulares ordenados associados a τ_2, ou seja, temos:

$$\begin{cases} T(x, y_2) = \tau_2 < x, x_2 > z_2 \\ T(x_2, y) = \tau_2 < y, y_2 > z_2 \\ \phi^*_{H_1}(y)(z_2) = \tau_2 < y, y_2 > x_2 \end{cases}$$

para todo $(x, y) \in H_1 \times H_2$.

Seja $T_3 \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ dado por

$$T_3(x, y) = T(x, y) - \sum_{i=1}^{2} \tau_i < x, x_i >< y, y_i > z_i$$

para todo $(x, y) \in H_1 \times H_2$. Logo T_3 é operador bilinear compacto. Se T_3 for não nulo, existe $\tau_3 = \|T_3\|$ valor singular de T_3 com uma terna $(x_3\,, y_3\,, z_3)$ de vetores singulares associados a τ_3. Temos:

$$\begin{cases} T_3(x_3, y_3) = \tau_3 z_3 \\ \phi^*_{3H_1}(y_3)(z_3) = \tau_3 x_3 \\ \phi^*_{3H_2}(x_3)(z_3) = \tau_3 y_3\,. \end{cases}$$

Afirmação: $x_3 \perp x_i$, $y_3 \perp y_i$, $z_3 \perp z_i$, $i = 1, 2$ e $\tau_2 \geq \tau_3$. De fato,

$$\begin{aligned} \tau_3 < x_i, x_3 > &= < x_i, \tau_3 x_3 >=< x_i, \phi^*_{3H_1}(y_3)(z_3) > \\ &= < \phi_{3H_1}(y_3)(x_i), z_3 >=< T_3(x_i, y_3), z_3 > \\ &= < T(x_i, y_3) - \sum_{k=1}^{2} \tau_k < x_i, x_k >< y_3, y_k > z_k, z_3 > \\ &= < T(x_i, y_3) - \tau_i < y_3, y_i > z_i, z_3 > \\ &= < \tau_i < y_3, y_i > z_i - \tau_i < y_3, y_i > z_i, z_3 > \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_3 < y_i, y_3 > &= < y_i, \tau_3 y_3 > = < y_i, \phi^*_{3H_2}(x_3)(z_3) > \\
&= < \phi_{3H_2}(x_3)(y_i), z_3 > = < T_3(x_3, y_i), z_3 > \\
&= < T(x_3, y_i) - \sum_{k=1}^{2} \tau_k < x_3, x_k >< y_i, y_k > z_k, z_3 > \\
&= < T(x_3, y_i) - \tau_i < x_3, x_i > z_i, z_3 > \\
&= < \tau_i < x_3, x_i > z_i - \tau_i < x_3, x_i > z_i, z_3 > \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\tau_3 < z_i, z_3 > &= < z_i, \tau_3 z_3 > = < z_i, T_3(x_3, y_3) > \\
&= < z_i, T(x_3, y_3) > = < z_i, \phi_{H_1}(y_3)(x_3) > \\
&= < \phi^*_{H_1}(y_3)(z_i), x_3 > = < \tau_i < y_3, y_i > x_i, x_3 > \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Temos que

$$\tau_3 = \|T_3\| = \sup\{\|T_3(x,y)\|_{K} : \text{ onde } \|x\|_{H_1} = \|y\|_{H_2} = 1, x \in H_1, y \in H_2\}$$

$$\tau_2 = \|T_2\| = \sup\{\|T_2(x,y)\|_{K} : \text{ onde } \|x\|_{H_1} = \|y\|_{H_2} = 1, x \in H_1, y \in H_2\}\,.$$

Afirmação: $T_3(x, y) \perp z_2$, para todo $(x, y) \in H_1 \times H_2$. De fato,

$$\begin{aligned}
< T_3(x, y), z_2 > &= < T(x, y) - \sum_{i=1}^{2} \tau_i < x, x_i >< y, y_i > z_i, z_2 > \\
&= < T(x, y), z_2 > -\tau_2 < x, x_2 >< y, y_2 > \\
&= < \phi_{H_1}(y)(x), z_2 > -\tau_2 < x, x_2 >< y, y_2 > \\
&= < x, \phi^*_{H_1}(y)(z_2) > -\tau_2 < x, x_2 >< y, y_2 > \\
&= < x, \tau_2 < y, y_2 > x_2 > - < x, \tau_2 < y, y_2 > x_2 > \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Portanto $T_3(x, y) \perp \tau_2 < x, x_2 >< y, y_2 > z_2$, para todo $(x, y) \in H_1 \times H_2$. Logo

$$\|T_3(x,y)\|^2_{K} + \|\tau_2 < x, x_2 >< y, y_2 > z_2\|^2_{K} = \|T_2(x,y)\|^2_{K}$$

para todo $(x, y) \in H_1 \times H_2$. Logo $\tau_2 \geq \tau_3$.

Do fato de $x_3 \perp x_i$, $y_3 \perp y_i$ e $z_3 \perp z_i$, $i = 1, 2$, temos que $T_3(x_3, y_3) = T(x_3, y_3)$, logo $T(x_3, y_3) = \tau_3 z_3$.

Note que

$$\phi_{3H_1}(y)(x) = T_3(x,y) = T(x,y) - \sum_{i=1}^{2} \tau_i < x, x_i >< y, y_i > z_i\,,$$

logo

$$\phi_{3H_1}(y)(x) = \phi_{H_1}(y)(x) - \sum_{i=1}^{2} \tau_i < x, x_i >< y, y_i > z_i$$

para todo $(x,y) \in H_1 \times H_2$.

Seja $z \in K$ qualquer, logo

$$\begin{aligned} < \phi_{3H_1}(y)(x), z > &= < \phi_{H_1}(y)(x) - \sum_{i=1}^{2} \tau_i < x, x_i >< y, y_i > z_i, z > \\ &= < \phi_{H_1}(y)(x), z > - < \sum_{i=1}^{2} \tau_i < x, x_i >< y, y_i > z_i, z > \\ &= < x, \phi^*_{H_1}(y)(z) > - < x, \sum_{i=1}^{2} \tau_i < y, y_i >< z, z_i > x_i > \ . \end{aligned}$$

Assim,

$$\phi^*_{3H_1}(y)(z) = \phi^*_{H_1}(y)(z) - \sum_{i=1}^{2} \tau_i < y, y_i >< z, z_i > x_i\,.$$

De maneira análoga, temos que

$$\phi^*_{3H_2}(x)(z) = \phi^*_{H_2}(x)(z) - \sum_{i=1}^{2} \tau_i < x, x_i >< z, z_i > y_i\,.$$

Portanto

$$\phi^*_{H_1}(y_3)(z_3) = \phi^*_{3H_1}(y_3)(z_3) = \tau_3 x_3$$
$$\phi^*_{H_2}(x_3)(z_3) = \phi^*_{3H_2}(x_3)(z_3) = \tau_3 y_3\,.$$

Concluímos que τ_3 é valor singular de T com uma terna $(x_3\,, y_3\,, z_3)$ de vetores singulares associados a τ_3.

Assuma que τ_3 é **valor singular ordenado** de T e x_3 , y_3 e z_3 vetores singulares ordenados associados a τ_3, ou seja, temos:

$$\begin{cases} T(x, y_3) = \tau_3 < x, x_3 > z_3 \\ T(x_3, y) = \tau_3 < y, y_3 > z_3 \\ \phi^*_{H_1}(y)(z_3) = \tau_3 < y, y_3 > x_3 \end{cases}$$

para todo $(x,y) \in H_1 \times H_2$.

Este processo continua e suponha que até a etapa n, $n \in \mathbb{N}$, temos τ_i valor singular ordenado de T com vetores singulares ordenados correspondentes x_i, y_i, z_i onde

$i = 1, 2, \ldots, n$ tal que $\|T\| = \tau_1 \geq \tau_2 \geq \ldots \geq \tau_n$, $x_i \perp x_j$, $y_i \perp y_j$, $z_i \perp z_j$ sempre que $i \neq j$ e

$$\begin{cases} T(x_i, y_i) = \tau_i z_i \\ \phi^*_{H_1}(y_i)(z_i) = \tau_i x_i \\ \phi^*_{H_2}(x_i)(z_i) = \tau_i y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(x, y_i) = \tau_i < x, x_i > z_i \\ T(x_i, y) = \tau_i < y, y_i > z_i \\ \phi^*_{H_1}(y)(z_i) = \tau_i < y, y_i > x_i \end{cases}$$

para todo $(x, y) \in H_1 \times H_2$.

Temos também que

$$\begin{cases} \phi_{nH_1}(y)(x) = \phi_{H_1}(y)(x) - \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i < x, x_i >< y, y_i > z_i \\ \phi_{nH_2}(x)(y) = \phi_{H_2}(x)(y) - \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i < x, x_i >< y, y_i > z_i \\ \phi^*_{nH_1}(y)(z) = \phi^*_{H_1}(y)(z) - \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i < y, y_i >< z, z_i > x_i \\ \phi^*_{nH_2}(x)(z) = \phi^*_{H_2}(x)(z) - \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i < x, x_i >< z, z_i > y_i \\ T_n(x, y) = T(x, y) - \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i < x, x_i >< y, y_i > z_i \quad \text{e } \tau_i = \|T_i\|, \text{ i=2,3,...,n} \end{cases} .$$

Se o processo para em alguma etapa, digamos etapa m, então o operador T_{m+1} é nulo e temos

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \tau_i < x, x_i >< y, y_i > z_i$$

ou seja T é operador de posto finito. Se colocarmos $\tau_i = 0$, $x_i = y_i = z_i = 0$ para $i > m$, temos que

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_i < x, x_i >< y, y_i > z_i \,.$$

Caso contrário, temos que $\tau_n = \|T_n\|$ e:

Afirmação: $\tau_n \to 0$ quando $n \to \infty$, ou seja, $\|T_n\| \to 0$, e portanto

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_i < x, x_i >< y, y_i > z_i \,.$$

Temos que T é operador compacto. Seja $T(x_i, y_i) = \tau_i z_i$ e $T(x_j, y_j) = \tau_j z_j$, onde $i \neq j$,

$i, j = 1, 2, \ldots, n$. Então,

$$\|T(x_i, y_i) - T(x_j, y_j)\|_K^2 = \|\tau_i z_i - \tau_j z_j\|_K^2 =< \tau_i z_i - \tau_j z_j, \tau_i z_i - \tau_j z_j >= \tau_i^2 + \tau_j^2$$

$$\|T(x_i, y_i) - T(x_j, y_j)\|_K^2 = \tau_i^2 + \tau_j^2 .$$

Como (x_n, y_n) é limitado, $\|x_n\|_{H_1} = \|y_n\|_{H_2} = 1$, logo $(T(x_n, y_n))$ tem uma subsequência convergente, digamos $(T(x_{n_k}, y_{n_k}))$. Logo $(T(x_{n_k}, y_{n_k}))$ é subsequência de Cauchy, ou seja, temos que $\|T(x_{n_i}, y_{n_i}) - T(x_{n_j}, y_{n_j})\|_K^2 \to 0$. Portanto $\tau_n \to 0$.

Através do método da Ordenação, provamos o seguinte teorema.

Teorema 3.2.7. *Seja $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ compacto e não nulo. Se T satisfaz as hipóteses do Método da Ordenação 3.2.3, ou seja, T tem uma sequência de valores singulares ordenados tal que seus respectivos vetores singulares ordenados associados são ortonormais, então T tem uma representação de Schmidt monótona, ou seja,*

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_i < x, x_i >< y, y_i > z_i$$

onde $(\tau_i) \in c_0$ são valores singulares de T com vetores singulares $(x_i), (y_i), (z_i)$, para cada $i \in \mathbb{N}$ e $x_i \perp x_j$, $y_i \perp y_j$ e $z_i \perp z_j$, com $i \neq j$.

Observação 3.2.8. *Seja τ_n os valores singulares ordenados obtidos no Método da Ordenação 3.2.3. Temos que*

$$\begin{cases} \phi_{nH_1}(y_n)(x) = \phi_{H_1}(y_n)(x) \\ \phi_{nH_2}(x_n)(y) = \phi_{H_2}(x_n)(y) \\ \phi^*_{nH_1}(y_n)(z) = \phi^*_{H_1}(y_n)(z) \\ \phi^*_{nH_2}(x_n)(z) = \phi^*_{H_2}(x_n)(z) \end{cases}$$

para todo $(x, y) \in H_1 \times H_2$ e $z \in K$

Portanto:

$$\begin{cases} \phi^*_{H_1}(y_n) \circ \phi_{H_1}(y_n)(x_n) = \tau_n^2 x_n & \text{logo } \tau_n^2 \text{ é autovalor de } \phi^*_{H_1}(y_n) \circ \phi_{H_1}(y_n) : H_1 \to H_1 \\ \phi^*_{H_2}(x_n) \circ \phi_{H_2}(x_n)(y_n) = \tau_n^2 y_n & \text{logo } \tau_n^2 \text{ é autovalor de } \phi^*_{H_2}(x_n) \circ \phi_{H_2}(x_n) : H_2 \to H_2 \\ \phi_{H_1}(y_n) \circ \phi^*_{H_1}(y_n)(z_n) = \tau_n^2 z_n & \text{logo } \tau_n^2 \text{ é autovalor de } \phi_{H_1}(y_n) \circ \phi^*_{H_1}(y_n) : K \to K \\ \phi_{H_2}(x_n) \circ \phi^*_{H_2}(x_n)(z_n) = \tau_n^2 z_n & \text{logo } \tau_n^2 \text{ é autovalor de } \phi_{H_2}(x_n) \circ \phi^*_{H_2}(x_n) : K \to K\,. \end{cases}$$

Observação 3.2.9. *Seja $T \in \mathscr{B}(H_1 \times H_2, K)$ dado por*

$$T(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty} \tau_i < x, x_i >< y, y_i > z_i$$

com $(\tau_i) \in l^1$ e (x_i), (y_i) e (z_i) conjuntos ortonormais de H_1, H_2 e K, respectivamente. Temos então que $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ e é compacto.

$$\begin{aligned} < \phi_{H_1}(y)(x), z > &= < T(x,y), z >=< \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \tau_i < x, x_i >< y, y_i > z_i, z > \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \tau_i < x, x_i >< y, y_i >< z, z_i > \\ &= < x, \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \tau_i < y, y_i >< z, z_i > x_i > . \end{aligned}$$

Portanto $\phi^*_{H_1}(y)(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_i < y, y_i >< z, z_i > x_i$. De maneira análoga mostramos que $\phi^*_{H_2}(x)(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_i < x, x_i >< z, z_i > y_i$. Temos então que

$$\begin{cases} T(x_i, y_i) = \tau_i z_i \\ \phi^*_{H_1}(y_i)(z_i) = \tau_i x_i \\ \phi^*_{H_2}(x_i)(z_i) = \tau_i y_i \\ T(x, y_i) = \tau_i < x, x_i > z_i \\ T(x_i, y) = \tau_i < y, y_i > z_i \\ \phi^*_{H_1}(y)(z_i) = \tau_i < y, y_i > x_i \, . \end{cases}$$

Concluímos então que τ_i é valor singular ordenado de T com vetores singulares ordenados associados (x_i), (y_i) e (z_i).

Exemplo 3.2.10. *Seja $T \in Bil(\mathbb{R}^3)$ autoadjunto cuja matriz associada é*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{12}}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{12}}{4} & \frac{\sqrt{12}}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{12}}{4} & -\frac{\sqrt{12}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{12}}{2} \end{array}\right].$$

Após alguns cálculos temos os seguintes valores singulares com seus vetores singulares associados:

$$\tau_1 = 1 \text{ e } x_1 = (1,\, 0,\, 0),\; y_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}},\, 0,\, \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ e } z_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$
$$\tau_2 = 2 \text{ e } x_2 = (0,\, 1,\, 0),\; y_2 = (0,\, 1,\, 0) \text{ e } z_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}},\, 0)$$
$$\tau_3 = 3 \text{ e } x_3 = (0,\, 0,\, 1),\; y_3 = (\frac{2}{\sqrt{8}},\, 0,\, -\frac{2}{\sqrt{8}}) \text{ e } z_3 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})\, .$$

Após uns cálculos pode-se mostrar que τ_i, $i = 1, 2, 3$, são valores regulares ordenados com *seus vetores singulares ordenados associados* x_i, y_i, z_i. *É fácil de mostrar que* $x_i \perp x_j$, $y_i \perp y_j$ *e* $z_i \perp z_j$, *onde* $i, j = 1, 2, 3$ *e* $i \neq j$.

Em [12] é demonstrado que se $L \in \mathfrak{L}(H)$ for compacto e autoadjunto, então as Representações de Schur e de Schmidt de L coincidem, ou seja os valores singulares são os autovalores. Vamos mostrar um resultado análogo para o caso bilinear.

Seja $T : H_1 \times H_2 \to K$ compacto. Assuma que $H_1 = H_2 = K = H$, logo temos $T \in Bil(H)$ compacto. Sabemos que $\tau_1 = \|T\|$ é valor singular de T, ou seja, existem vetores unitários x_1, y_1 e $z_1 \in H$, tal que,

$$\begin{cases} T(x_1, y_1) = \tau_1 z_1 \\ \phi^*_{H_1}(y_1)(z_1) = \tau_1 x_1 \\ \phi^*_{H_2}(x_1)(z_1) = \tau_1 y_1 \end{cases} .$$

Assuma que T seja autoadjunto, ou seja,

$$< T(x, y), z >=< y, T(x, z) >$$
$$< T(y, x), z >=< y, T(z, x) >$$

para todo x, y, $z \in H$. Pela Proposição 2.1.10 concluímos que T é simétrico.

Temos então que:

$$< \phi_{H_1}(y)(x), z >=< T(x, y), z >=< x, T(z, y) >=< x, \phi_{H_1}(y)(z) >$$
$$< \phi_{H_2}(x)(y), z >=< T(x, y), z >=< y, T(x, z) >=< y, \phi_{H_2}(x)(z) >.$$

Portanto $\phi^*_{H_1}(y) = \phi_{H_1}(y)$ e $\phi^*_{H_2}(x) = \phi_{H_2}(x)$, ou seja, $\phi_{H_1}(y)$ e $\phi_{H_2}(x)$ são autoadjuntos. Temos então que:

$$\begin{aligned} T(x_1, y_1) &= \tau_1 z_1 \\ T(z_1, y_1) &= \tau_1 x_1 \\ T(x_1, z_1) &= \tau_1 y_1 \,. \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Concluímos que se $T \in Bil(H)$ for compacto e autoadjunto, então $\tau_1 = \|T\|$ é valor singular com vetores singulares unitários associados x_1, y_1, $z_1 \in H$ tal que vale (3.2.6). Se τ_1 for valor singular ordenado com vetores singulares ordenados x_1, y_1 e z_1 associados a τ_1, temos:

$$\begin{aligned} T(x, y_1) &= \tau_1 < x, x_1 > z_1 \\ T(x_1, y) &= \tau_1 < y, y_1 > z_1 \\ T(z_1, y) &= \tau_1 < y, y_1 > x_1 \,, \end{aligned}$$

para todo x, $y \in H$. Note que:

$$T(y_1, y_1) = \tau_1 < y_1, x_1 > z_1$$
$$T(x_1, x_1) = \tau_1 < x_1, y_1 > z_1\,,$$

ou seja, $T(y_1, y_1) = T(x_1, x_1)$ e

$$T(z_1, z_1) = \tau_1 < z_1, y_1 > x_1\,.$$

Vamos agora mostrar que se $T \in Bil(H)$ for compacto, autoadjunto e que tenha uma Representação de Schmidt, então ela é uma representação de Schur de T, ou seja, os valores singulares ordenados de T que aparecem em sua representação de Schmidt também são autovalores ordenados.

Teorema 3.2.11. *Seja $T \in Bil(H)$ compacto, autoadjunto e não nulo. Sabemos que $\|T\|$ é um valor singular de T e também um autovalor de T. Se T tem uma Representação de Schmidt de acordo com o Teorema 3.2.7, ou seja $T(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j < x, x_j >< y, y_j > z_j$, então T tem uma representação de Schur, isto é*

$$T(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < x, x_j >< y, x_j > x_j$$

para todo $x, y \in H$.

Demonstração: Seja $T(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j < x, x_j >< y, y_j > z_j$ uma decomposição de Schmidt de T de acordo com o Teorema 3.2.7. Temos que

$$\begin{aligned} T(x_i, y_i) &= \tau_i z_i & \qquad T(x, y_i) &= \tau_i < x, x_i > z_i \\ T(z_i, y_i) &= \tau_i x_i & \qquad T(x_i, y) &= \tau_i < y, y_i > z_i \\ T(x_i, z_i) &= \tau_i y_i & \qquad T(z_i, y) &= \tau_i < y, y_i > x_i \end{aligned}$$

para todo x, $y \in H$.

Temos que $T(y_i, x_i) = T(x_i, y_i) = \tau_i z_i$, logo

$$T(y_i, x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j < y_i, x_j >< x_i, y_j > z_j = \tau_i z_i \quad .$$

Assim,

$$\tau_i < y_i, x_i >< x_i, y_i >< z_i, z_i >= \tau_i < z_i, z_i >.$$

Portanto, como $\tau_i \neq 0$ e z_i unitário, concluímos que

$$< y_i, x_i >= \pm 1\,. \tag{3.2.7}$$

Temos também que $T(z_i, y_i) = T(y_i, z_i) = \tau_i x_i$, logo

$$T(z_i, y_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j < z_i, x_j >< y_i, y_j > z_j = \tau_i x_i$$
$$T(y_i, z_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j < y_i, x_j >< z_i, y_j > z_j = \tau_i x_i \; .$$

Portanto

$$\tau_i < z_i, x_i >< y_i, y_i > z_i = \tau_i x_i$$
$$\tau_i < y_i, x_i >< z_i, y_i >< z_i, z_i >= \tau_i < x_i, z_i > \; .$$

Logo, como $\tau_i > 0$ e y_i é unitário, temos

$$< z_i, x_i > z_i = x_i \qquad (3.2.8)$$
$$< y_i, x_i >< z_i, y_i > = < x_i, z_i > \; . \qquad (3.2.9)$$

Também temos que $T(x_i, z_i) = T(z_i, x_i) = \tau_i y_i$, logo

$$T(x_i, z_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j < x_i, x_j >< z_i, y_j > z_j = \tau_i y_i$$
$$T(z_i, x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j < z_i, x_j >< x_i, y_j > z_j = \tau_i y_i \; .$$

Portanto

$$\tau_i < z_i, y_i > z_i = \tau_i y_i$$
$$\tau_i < z_i, x_i >< x_i, y_i >< z_i, z_i >= \tau_i < y_i, z_i > \; .$$

Como $\tau_i > 0$ e z_i é unitário, temos

$$< z_i, y_i > z_i = y_i \qquad (3.2.10)$$
$$< z_i, x_i >< x_i, y_i > = < y_i, z_i > \; . \qquad (3.2.11)$$

Por τ_i ser um valor singular ordenado, temos também que :

$$T(y_i, y_i) = \tau_i < y_i, x_i > z_i$$
$$T(x_i, x_i) = \tau_i < x_i, y_i > z_i$$
$$T(z_i, z_i) = \tau_i < z_i, y_i > x_i.$$

Por (3.2.7), temos que $< y_i, x_i >= \pm 1$. Seja $< y_i, x_i >= 1$. Logo de (3.2.9), temos que $< z_i, y_i >=< x_i, z_i >$. Portanto de (3.2.8) e (3.2.10) concluímos que $y_i = x_i$.

Por (3.2.8), temos que $< z_i, x_i > z_i = x_i$, logo $< z_i, x_i >= \pm 1$. Seja $< z_i, x_i >= 1$. Como

$$T(z_i, y_i) = \tau_i x_i \tag{3.2.12}$$

$$T(x, y_i) = \tau_i < x, x_i > z_i\,, \tag{3.2.13}$$

para todo $x \in H$. Logo por (3.2.13) temos que

$$T(z_i, y_i) = \tau_i < z_i, x_i > z_i = \tau_i z_i.$$

Como $\tau_i > 0$, por (3.2.12) temos que $z_i = x_i$. Se colocarmos $\lambda_i = \tau_i$, $i \in \mathbb{N}$, temos então que

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < x, x_i >< y, x_i > x_i \ \ ,$$

é uma representação de Schur de T.

Se $< z_i, x_i >= -1$, por (3.2.13) temos que $T(z_i, y_i) = -\tau_i z_i$, logo por (3.2.12) temos que $z_i = -x_i$. Se colocarmos $\lambda_i = -\tau_i$, $i \in \mathbb{N}$, temos então que

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < x, x_i >< y, x_i > x_i \ \ ,$$

é uma representação de Schur de T.

Seja agora $< y_i, x_i >= -1$. Logo de (3.2.9) temos que $< z_i, y_i >= - < z_i, x_i >$. Portanto de (3.2.8) e (3.2.10) concluímos que $y_i = -x_i$.

Se $< z_i, x_i >= 1$, temos que $z_i = x_i$. Se colocarmos $\lambda_i = -\tau_i$, $i \in \mathbb{N}$, temos então que

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < x, x_i >< y, x_i > x_i \ \ ,$$

é uma representação de Schur de T.

Se $< z_i, x_i >= -1$, temos que $z_i = -x_i$. Se colocarmos $\lambda_i = \tau_i$, $i \in \mathbb{N}$, temos então que

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < x, x_i >< y, x_i > x_i \ \ ,$$

é uma representação de Schur de T. ∎

Sabemos que se $L : H_1 \to H_2$ for um operador linear compacto, então L tem uma representação de Schmidt, ou seja, $L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n < x, x_n > y_n$. Em [4] temos a seguinte definição:

Definição 3.2.12. *Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert e $1 \le p \le \infty$. Um operador compacto $L \in \mathfrak{L}(H_1, H_2)$ pertence a classe de Schatten $S_p(H_1, H_2)$ se*

$$\|L\|_{S_p} := \|(\tau_n)\|_{l^p} < \infty$$

onde (τ_n) é a sequência dos valores singulares de L.

Teorema 3.2.13. *Um operador* $L \in \mathfrak{L}(H_1, H_2)$ *é Hilbert-Schmidt se, e somente se,* $L \in S_2(H_1, H_2)$.

Demonstração: Ver Teorema 4.10 em [4]. ■

A partir da Definição 3.2.12 vamos definir a classe de Schatten para os operadores bilineares.

Definição 3.2.14. *Sejam* H_1, H_2 *e* K *espaços de Hilbert e* $1 \leq p \leq \infty$. *Um operador compacto não nulo* $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$, *que admite uma Representação de Schmidt conforme o Teorema 3.2.7, pertence a Classe de Schatten* $S_p(H_1 \times H_2, K)$ *se*

$$(\tau_n) \in l^p \quad ,$$

onde (τ_n) *é a sequência dos valores singulares de* T *que aparecem na Representação de Schmidt de* T.

Teorema 3.2.15. *Sejam* H_1, H_2 *e* K *espaços de Hilbert e* $T \in Bil(H_1 \times H_2, K)$ *compacto não nulo. Suponha que* T *admite uma Representação de Schmidt conforme o Teorema 3.2.7. Seja* (τ_n) *a sequência dos valores singulares de* T *que aparecem na sua Representação de Schmidt. Se* $(\tau_n) \in l^2$, *então* T *é Hilbert-Schmidt.*

Demonstração: Seja $T(x, y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \tau_i < x, x_i >< y, y_i > z_i$ e $(\tau_i) \in l^2$, ou seja, $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |\tau_i|^2 < \infty$. Suponha que (u_i) e (v_i), $i \in \mathbb{N}$, sejam bases ortonormais de H_1 e H_2, respectivamente. Vamos mostrar que $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{\infty} \|T(u_i, v_j)\|_K^2 < \infty$ e assim concluímos que T é Hilbert-Schmidt. Temos que

$$\|x_s\|_{H_1} = \sum_{i=1}^{\infty} | < u_i, x_s > |^2 = 1 \;\text{ e }\; \|y_s\|_{H_2} = \sum_{j=1}^{\infty} | < v_j, y_s > |^2 = 1.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{\infty} \|T(u_i, v_j)\|_K^2 &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \left(\| \sum_{s=1}^{\infty} \tau_s < u_i, x_s >< v_j, y_s > z_s \|_K^2 \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{\infty} |\tau_s|^2 | < u_i, x_s > |^2 | < v_j, y_s > |^2 \right) \\
&= \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\tau_s|^2 | < u_i, x_s > |^2 | < v_j, y_s > |^2 \right) \right) \\
&= \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\tau_s|^2 | < u_i, x_s > |^2 \right) \\
&= \sum_{s=1}^{\infty} |\tau_s|^2 < \infty \,,
\end{aligned}$$

como queríamos. ■

Referências Bibliográficas

[1] Bényi, A., and R. H. Torres, *Compact Bilinear Operators and Commutators.* Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 141, Number 10, October 2013, Pages 3609–3621.

[2] Bueno, H. P., *Álgebra Linear - um segundo curso.*, SBM, 2006.

[3] Fernandez, D. L., Mastylo, M. and Silva, E. B., *Quasi s-numbers and measures of non-compactness of multilinear operators.* Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Mathematica. Volumen 38, 2013, 805–823.

[4] Garling, D.J.H., T. Tom Dieck and P. Walters, *Absolutely Summing Operators.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[5] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications.* John Wiley and Sons. Inc. , 1978.

[6] Lima, E. L.,*Curso de Análise,Volume 1.* Projeto Euclides. Décima edição. Rio de Janeiro: IMPA 2002.

[7] Matos, M.C., *Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings.* Collect. Math. 54 (2003), 111-136.

[8] Oliveira, C. R., *Introdução à Análise Funcional.* Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA 2010.

[9] Phillips, J. R., *Eigenfunction expansions for self-adjoint Bilinear Operators in Hilbert Space.* Thesis submitted to Oregon Satate University in partial fullfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, 1966

[10] Pietsch, A., *Eigenvalues and s-numbers.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 13. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[11] Ramanujan, M. S., and E. Schock, *Operator ideals and space of bilinear operators.* Lin. Multilin. Alg.**18** (1985), 307–318.

[12] Retherford, J. R., *Hilbert Space: Compact Operators and the Trace Theorem.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[13] Rudin, W., *Functional Analysis.* McGraw-Hill, 1973.

[14] Strang, G., *Introduction to Linear Algebra.* Wellesley-Cambridge Press, Year: 2016