



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

NAYENE MICHELE PITTA PAIÃO

Sobre a \mathcal{A} -equivalência de Hipersuperfícies Quase Ordinárias

Maringá - PR
2015

NAYENE MICHELE PITTA PAIÃO

Sobre a \mathcal{A} -equivalência de Hipersuperfícies Quase Ordinárias

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor.

Orientador: Marcelo Escudeiro Hernandes.

Maringá - PR
2015

Sobre a \mathcal{A} -equivalência de Hipersuperfícies Quase Ordinárias

Nayene Michele Pitta Paião

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM - PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor.

Aprovada por:

Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes (UEM)
(Orientador)

Prof. Dr. Ednei Aparecido Santulo Junior (UEM)

Prof. Dr. Nivaldo de Goes Grulha Junior (ICMC-USP)

Prof. Dra. Patrícia Hernandes Baptistelli (UEM)

Prof. Dr. Percy Braulio Fernández Sánchez (PUCP-Lima-Peru)

Maringá
Dezembro, 2015



Agradecimentos

Ao longo dos anos de estudo que resultaram nesta tese, muitas pessoas e instituições me ajudaram, seja pelo carinho, seja pelo ensino ou através de apoio financeiro. Agora, com o objetivo alcançado, não poderia deixar de reconhecê-los.

À Deus, por todas as bênçãos que recebi nesta vida. Pela saúde, pela família e por todas as pessoas boas que sempre colocou em meu caminho. Também por permitir que eu pudesse estudar o que amo.

Agradeço infinitamente aos meus pais José Carlos e Ozires por tudo que me proporcionaram na vida. À eles dedico tudo que tenho e tudo que sou. Pela formação humana, por proverem meu sustento, minha educação, pela proteção e amor que sempre dedicaram a mim. Aos meus irmãos Luiza, Eudes e Juliano pelo carinho e apoio, aos meus sobrinhos Daniel, Danielle, Ana Beatriz, Ana Julia e Ana Luiza pelos momentos de risos e descontração, à minha querida tia Claudete por todo amor e orações e a minha madrinha Rosa Ely pela incansável torcida! Aos meus amigos queridos, alguns que até já se foram, mas que sempre me apoiaram e souberam entender a minha ausência justificada por longos dias de estudo.

Ao meu amado Luciano, por ser além de um ótimo exemplo profissional, um super companheiro, que entendeu e apoiou cada dia de trabalho deste sonho que iniciamos juntos. Obrigada por todo amor e companheirismo.

Meu reconhecimento aos professores do DMA-UEM por tudo que me ensinaram em seus cursos ou até mesmo em conversas informais pelos corredores deste departamento que, após tantos anos, sinto como se fosse parte da minha casa.

Ao Prof. Marcelo Escudeiro Hernandes por fazer real o sentido da palavra “pai”, que usualmente falamos para nos referir aos nossos orientadores. Pelo profissional admirável, pela pessoa querida, por todos os ensinamentos, pela paciência, enfim, por toda a orientação que me deu, externo meu profundo agradecimento.

À CAPES, pelo financiamento parcial deste trabalho.

Nayene Michele Pitta Paião



A Deus, à família.



"Os dias prósperos não vêm por acaso; nascem de muita fadiga e persistência".

Henry Ford



Resumo

Neste trabalho estudamos a $\tilde{\mathcal{A}}_1$ -equivalência de parametrizações quase ordinárias. Relacionamos o espaço tangente à órbita pelo grupo $\tilde{\mathcal{A}}_1$ com r -formas de Kähler $\Omega_{\mathcal{O}}^r$ e os elementos do ideal Jacobiano.

Introduzimos um conjunto associado a $\Omega_{\mathcal{O}}^r$ que permite identificar termos elimináveis em uma parametrização quase ordinária. Vários resultados conhecidos para curvas planas são generalizados para hipersuperfícies quase ordinárias.

Abstract

In this work we study the $\tilde{\mathcal{A}}_1$ -equivalence of quasi-ordinary parametrization. We present some relations among the tangent space to the orbit with respect the $\tilde{\mathcal{A}}_1$ group, Kähler r -forms $\Omega_{\mathcal{O}}^r$ and the elements in the Jacobian ideal.

We introduce a set associated to $\Omega_{\mathcal{O}}^r$ that allow us to identify terms that can be eliminated in a quasi-ordinary parametrization. Some results well known for plane curves are generalized for quasi ordinary hypersurfaces.

Sumário

Introdução	1
1 Hipersuperfícies Quase Ordinárias	4
1.1 Hipersuperfícies Quase Ordinárias	4
1.2 Expoentes Característicos Generalizados	7
1.3 Expoentes dominantes e semirraízes	15
1.4 Semigrupo de uma hipersuperfície quase ordinária	18
1.5 Conjunto singular	22
2 \mathcal{A}-equivalência de ramos quase ordinários	24
2.1 O grupo \mathcal{A}	24
2.2 Ação do grupo $(\tilde{\mathcal{L}}_1 \times \tilde{\mathcal{R}}_1)$	32
2.3 Homotetias	44
3 O conjunto Λ	48
3.1 Espaço Tangente e r -formas	48
3.2 O ideal Jacobiano e r -formas diferenciais	54
3.3 Conjunto Λ <i>versus</i> semigrupo Γ	62
3.4 Expoentes de Zariski Generalizados	69
3.5 Conjunto $\Lambda_{\mathcal{N}}(H)$ para $n \leq 3$	75
3.6 Hipersuperfícies quase ordinárias associadas à curvas planas	79



A Apêndice	87
A.1 Séries de Potências	87
A.2 Resultante e Discriminante	89
Referências Bibliográficas	90

Introdução

Seja $(\mathcal{X}, 0) \subset (\mathbb{C}^{r+1}, 0)$ um germe de hipersuperfície determinado por $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{r+1}\}$. Dizemos que $(\mathcal{X}, 0)$ é uma hipersuperfície quase ordinária, se existem coordenadas tais que f é um polinômio de Weierstrass em X_{r+1} de grau n e seu discriminante é da forma $\Delta_{X_{r+1}} f = X_1^{\delta_1} \dots X_r^{\delta_r} u$ com $u \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}$ unidade.

Em geral uma hipersuperfície quase ordinária singular não tem singularidade isolada. De fato, os únicos casos que ocorrem singularidade isolada são para $r = 1$, ou seja, curvas planas e superfícies normais.

Uma hipersuperfície quase ordinária admite, pelo Teorema de Abhyankar-Jung (veja [1]) uma parametrização da forma

$$H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r))$$

com $S(t_1, \dots, t_r) \in \mathbb{C}\{t_1, \dots, t_r\}$.

Lipman, em [17], mostrou que podemos considerar parametrizações especiais, chamadas normalizadas (veja Definição 1.14), a partir das quais se define os expoentes característicos generalizados que determinam o tipo topológico da hipersuperfície quase ordinária. Reciprocamente, tais expoentes característicos determinam completamente o tipo topológico da hipersuperfície quase ordinária como germe imerso. Tal resultado foi provado por Gau em [6].

Mais tarde, González Pérez e Popescu-Pampu introduziram um semigrupo Γ_H contido em \mathbb{N}^r que determina e é determinado pelos expoentes característicos generalizados. Este semigrupo apresenta propriedades similares ao semigrupo de curvas planas que foram também exploradas por Assi em [2].



Este trabalho tem como principal objetivo estudar as hipersuperfícies quase ordinárias, dadas por meio de parametrizações normalizadas, enfocando propriedades do ponto de vista analítico. Na sequência descreveremos brevemente a estrutura destas notas.

No Capítulo 1 apresentamos os principais resultados relacionados às hipersuperfícies quase ordinárias, seus expoentes característicos e o semigrupo associado. Por tratar de resultados conhecidos na literatura, nos limitamos a apresentá-los sem demonstrações, porém com indicação de referências onde podem ser encontradas.

Neste trabalho, estudamos a equivalência de parametrizações normalizadas de hipersuperfícies quase ordinárias com respeito a ação do grupo \mathcal{A} . Mais especificamente, consideramos uma parametrização $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r))$ como uma aplicação $H : \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}^{r+1}$ e os elementos $(\sigma, \rho) \in \mathcal{A}$ são difeomorfismos $\rho : \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}^r$ e $\sigma : \mathbb{C}^{r+1} \rightarrow \mathbb{C}^{r+1}$.

No Capítulo 2, caracterizamos o subgrupo de \mathcal{A} que preserva uma parametrização normalizada, bem como determinamos o espaço tangente à órbita de um elemento.

O objetivo é aplicar o conhecido Teorema da Transversal Completa nesta situação. Para tanto, decomposmos a ação do grupo como composição da ação de dois grupos: $\tilde{\mathcal{A}}_1$ e homotetias. Para o grupo $\tilde{\mathcal{A}}_1$ foi realizada uma análise detalhada da ação, de modo a verificar que as hipóteses do Teorema da Transversal Completa são satisfeitas. As homotetias foram analisadas separadamente na Seção 2.2.

O Capítulo 3 contém os principais resultados do trabalho. Na Seção 3.1 relacionamos os elementos do espaço tangente à órbita pelo grupo $\tilde{\mathcal{A}}_1$ com r -formas de Kähler que é uma generalização do caso de curvas planas tratado em [12].

Esta abordagem possibilitou a definição de um conjunto $\Lambda_{\mathcal{N}}(H) \subset \mathbb{N}^r$ que desempenha papel importante na identificação de termos que podem ser eliminados em uma parametrização de hipersuperfície quase ordinária.

Na Seção 3.2 apresentamos um modo de relacionar as r -formas de Kähler $\Omega_{\mathcal{O}}^r$ com elementos do ideal Jacobiano $J(f) = \langle f_{x_1}, \dots, f_{x_{r+1}} \rangle$ (ver Teorema 3.7). Tal relação permite obter informações sobre o submódulo de torção T de $\Omega_{\mathcal{O}}^r$. Em particular, temos que

$$\frac{\Omega_{\mathcal{O}}}{T} \approx J(f).$$

No contexto de curvas planas, tem-se que $\Gamma \setminus \{0\} \subset \Lambda$. Porém, para $r > 1$ tal fato não ocorre como ilustramos na Observação 3.14. No entanto, caracterizamos precisamente o subconjunto $\Upsilon_H \subset \Gamma_H$ tal que $\Upsilon_H \subset \Lambda_{\mathcal{N}}(H)$ (veja Teorema 3.19). Em particular, quando



$r = 1$, recuperamos o caso de curvas planas, isto é, $\Upsilon_H = \Gamma_H \setminus \{0\}$.

Zariski, em [24], caracteriza as curvas planas tais que $\Lambda = \Gamma \setminus \{0\}$. Nesta direção, o Teorema 3.19 caracteriza, a menos de $\tilde{\mathcal{A}}$ -equivalência as hipersuperfícies quase ordinárias tais que $\Lambda_{\mathcal{N}} = \Upsilon_H$.

Na Seção 3.4 determinamos as possibilidades para $\Lambda_{\mathcal{N}}$ para uma hipersuperfície quase ordinária com $n \leq 3$ utilizando o conceito de Expoentes de Zariski Generalizados.

O trabalho encerra com um apêndice contendo os principais resultados sobre séries de potências, resultante e discriminante.

Hipersuperfícies Quase Ordinárias

Nesta seção introduziremos nosso principal objeto de estudo, as hipersuperfícies quase ordinárias. Apresentaremos os conceitos básicos da teoria, fixaremos notações e recordaremos algumas propriedades já conhecidas que serão utilizadas no decorrer do trabalho. Procuramos sempre que possível ilustrar os conceitos e resultados com exemplos, além de citar fontes onde as justificativas podem ser encontradas.

1.1 Hipersuperfícies Quase Ordinárias

Denotamos por L o corpo de frações do anel $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}$ e por L_n o corpo de frações de $\mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{n}}, \dots, X_r^{\frac{1}{n}}\}$.

Utilizando as noções de polinômio de Weierstrass e discriminante apresentadas no apêndice deste trabalho, podemos introduzir o conceito de hipersuperfície quase ordinária.

Definição 1.1. Dizemos que um polinômio de Weierstrass $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ é *quase ordinário* se

$$\Delta_{X_{r+1}} f = X_1^{\delta_1} X_2^{\delta_2} \cdots X_r^{\delta_r} u$$

em que $u \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}$ é uma unidade e $\delta_i \in \mathbb{N}$ para $i = 1, \dots, r$.

Talvez seja oportuno, neste momento, comentarmos que muitos resultados que apresentamos são válidos tanto para o caso irredutível quanto para o redutível. Porém, neste trabalho estamos interessados apenas no caso de polinômios quase ordinários irredutíveis.

No que segue $(\mathcal{X}, 0) \subset (\mathbb{C}^{r+1}, 0)$ denota um germe de uma hipersuperfície dada por uma equação $f = 0$.



Definição 1.2. Dizemos que $(\mathcal{X}, 0) \subset (\mathbb{C}^{r+1}, 0)$ é uma *hipersuperfície quase ordinária*, se existem coordenadas locais $(X_1, \dots, X_r, X_{r+1})$ de modo que $(\mathcal{X}, 0)$, nestas coordenadas, é dada por $\{(X_1, \dots, X_{r+1}) \in \mathbb{C}^{r+1}; f(X_1, \dots, X_{r+1}) = 0\}$ com $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ um polinômio de Weierstrass e o discriminante da projeção $pr : (\mathcal{X}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^r, 0)$, dada por $(X_1, \dots, X_r, X_{r+1}) \mapsto (X_1, \dots, X_r)$, esteja contido em $X_1 \dots X_r = 0$.

A definição anterior é equivalente a afirmar que f , nas coordenadas mencionadas, é um polinômio de Weierstrass quase ordinário.

Se $r = 1$, então obtemos o conjunto de exemplos mais simples de hipersuperfícies quase ordinárias, as curvas planas, como se constata abaixo.

Exemplo 1.3. Toda curva analítica plana é uma hipersuperfície quase ordinária. De fato, dada uma curva definida por $f \in \mathbb{C}\{X_1, X_2\}$, através de convenientes mudanças de coordenadas e aplicando o Teorema da Preparação de Weierstrass, podemos assumir que $f = X_2^n + \sum_{i=1}^n a_i(X_1)X_2^{n-i}$ é um polinômio de Weierstrass. Visto que $a_i(X_1) \in \mathbb{C}\{X_1\}$ para $i = 1, \dots, n$, segue que $\Delta_{X_2}f = X_1^\delta u(X_1)$ com $\delta \in \mathbb{N}^*$ e $u(X_1)$ é unidade em $\mathbb{C}\{X_1\}$. Portanto, f é um polinômio de Weierstrass quase ordinário.

O exemplo a seguir ilustra como a condição de um polinômio de Weierstrass quase ordinário é sensível por mudanças de coordenadas.

Exemplo 1.4. Seja $f(X, Y, Z) = Z^2 - XY^2 \in \mathbb{C}\{X, Y\}[Z]$. Temos que f é um polinômio de Weierstrass quase ordinário, pois

$$\Delta_Z f = -4XY^2.$$

A hipersuperfície definida por f é conhecida como *Guarda chuva de Whitney*. Agora note que a mudança de coordenadas $X = X + Y$, $Y = Y$ e $Z = Z$, nos dá $g(X, Y, Z) = f(X + Y, Y, Z) = Z^2 - (X + Y)Y^2 \in \mathbb{C}\{X, Y\}[Z]$ que é um polinômio de Weierstrass porém não quase ordinário, uma vez que $\Delta_Z f = -4(X + Y)Y^2$.

No caso plano, isto é, quando $r = 1$, o teorema de Newton-Puiseux garante que, dado $f \in \mathbb{C}\{X_1\}[X_2]$, suas raízes pertencem à $\mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{n}}\}$ onde $n = \deg_{X_2}(f)$. No caso em que $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ define uma hipersuperfície quase ordinária irreduzível, o teorema de Abhyankar-Jung garante que as raízes de f são séries de potências fracionárias no anel $\mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{k}}, \dots, X_r^{\frac{1}{k}}\}$ para algum inteiro positivo k , isto é, se $f(X_1, \dots, X_r, \xi) = 0$, então



$\xi \in \mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{k}}, \dots, X_r^{\frac{1}{k}}\}$ para algum $k \in \mathbb{N}^*$. Diferente do caso plano, k não é necessariamente igual a $\deg_{X_{r+1}}(f) = n$. No entanto, se f é irredutível, podemos tomar $k = n$ e faremos isso sempre que for conveniente. Tais fatos foram justificados por Jung, que considerou funções em duas variáveis e por Abhyankar que forneceu uma prova geral para o caso algebroide. Uma demonstração para o caso formal e analítico pode ser encontrada em [13].

Exemplo 1.5. Consideremos

$$\begin{aligned} f(X_1, X_2, X_3) = & X_3^4 - 8X_2X_3^3 + (24X_2^2 - 2X_2^3 - 2X_1X_2^4)X_3^2 \\ & + (-32X_2^3 + 8X_2^4 + 8X_1X_2^5)X_3 + 16X_2^4 - 8X_2^5 + X_2^6 \\ & + 2X_1X_2^7 - 8X_1X_2^6 + X_1^2X_2^8 - 4X_1X_2^7. \end{aligned}$$

Temos que f é um polinômio quase ordinário pois

$$\Delta_{X_3}f = 4096X_1^2X_2^{20}(X_1^2X_2^2 - 2X_1X_2 + 1).$$

Embora tenhamos $\deg_{X_3}(f) = 4$, uma raiz de f é dada por $\xi = 2X_2 + X_2^{\frac{3}{2}} + X_1^{\frac{1}{2}}X_2^2 \in \mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{2}}, X_2^{\frac{1}{2}}\} \subset \mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{4}}, X_2^{\frac{1}{4}}\}$, ou seja, o inteiro k mencionado acima é 2.

Definição 1.6. Seja $n \in \mathbb{N}^*$ e $\xi \in \mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{n}}, \dots, X_r^{\frac{1}{n}}\}$. Dizemos que ξ é um *ramo quase ordinário* se o polinômio minimal de ξ sobre L é um polinômio de Weierstrass quase ordinário.

Encerramos esta seção apresentando um exemplo de um polinômio de Weierstrass cujas raízes pertencem a $\mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{k}}, \dots, X_r^{\frac{1}{k}}\}$, mas o polinômio não define uma hipersuperfície quase ordinária.

Exemplo 1.7. Consideremos

$$f(X_1, X_2, X_3) = X_3^4 - 2(X_1 + X_2)X_3^2 + (X_1 - X_2)^2.$$

Notemos que f tem raízes $\xi = \pm X_1^{\frac{1}{2}} \pm X_2^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{C}\{X_1^{1/2}, X_2^{1/2}\}$, mas f não é um polinômio quase ordinário, uma vez que,

$$\Delta_{X_3}f = -256(X_2 - X_1)(X_2 + (2X_1 + 1)X_2 + X_1^2 - X_1)^2.$$



1.2 Expoentes Característicos Generalizados

Apresentaremos agora os conceitos de monômios e expoentes característicos, bem como suas principais propriedades. Veremos adiante que os expoentes característicos determinam e são determinados pelo semigrupo da hipersuperfície quase ordinária. Tais expoentes, como mencionamos na introdução, desempenham papel importante no estudo das hipersuperfícies quase ordinárias, uma vez que são invariantes topológicos completos no contexto local.

Notemos que, sendo $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ um polinômio quase ordinário de grau n , temos que

$$\Delta_{X_{r+1}} f = \prod_{i \neq j} (\xi_i - \xi_j) = X_1^{\delta_1} \cdots X_r^{\delta_r} u \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}$$

com $u \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}$ uma unidade (veja apêndice) e ξ_k , $k = 1, \dots, n$ são raízes de f . Ainda, como $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\} \subset \mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{n}}, \dots, X_r^{\frac{1}{n}}\}$ e estes anéis são domínios fatoriais, segue que,

$$\xi_i - \xi_j = X_1^{\frac{\lambda_1(i,j)}{n}} X_2^{\frac{\lambda_2(i,j)}{n}} \cdots X_r^{\frac{\lambda_r(i,j)}{n}} u_{ij}$$

onde u_{ij} é unidade em $\mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{n}}, \dots, X_r^{\frac{1}{n}}\}$ e $\lambda_l(i, j) \in \mathbb{N}$ para $l = 1, \dots, r$.

Definição 1.8. Os monômios $M_{ij} = X_1^{\frac{\lambda_1(i,j)}{n}} X_2^{\frac{\lambda_2(i,j)}{n}} \cdots X_r^{\frac{\lambda_r(i,j)}{n}}$ destacados acima, são chamados de *monômios característicos de f* e as r -uplas $(\frac{\lambda_1(i,j)}{n}, \dots, \frac{\lambda_r(i,j)}{n})$ para todos $1 \leq i, j \leq n$ distintos são chamados de *expoentes característicos (generalizados) de f* .

Vamos agora calcular os monômios e expoentes característicos da hipersuperfície quase ordinária determinada pelo polinômio do Exemplo 1.5.

Exemplo 1.9. Para o polinômio f dado no Exemplo 1.5, temos que suas raízes são

$$\begin{aligned} \xi_0 &= 2X_2 + X_2^{\frac{3}{2}} + X_1^{\frac{1}{2}} X_2^2, & \xi_1 &= 2X_2 + X_2^{\frac{3}{2}} - X_1^{\frac{1}{2}} X_2^2 \\ \xi_2 &= 2X_2 - X_2^{\frac{3}{2}} + X_1^{\frac{1}{2}} X_2^2, & \xi_3 &= 2X_2 - X_2^{\frac{3}{2}} - X_1^{\frac{1}{2}} X_2^2. \end{aligned}$$



Assim, os monômios característicos são dados por

$$\begin{aligned} \xi_0 - \xi_1 &= 2X_1^{\frac{1}{2}}X_2^2 & \Rightarrow M_{01} &= X_1^{\frac{1}{2}}X_2^2 \\ \xi_0 - \xi_2 &= 2X_2^{\frac{3}{2}} & \Rightarrow M_{02} &= X_2^{\frac{3}{2}} \\ \xi_0 - \xi_3 &= 2X_2^{\frac{3}{2}}(1 + X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{\frac{1}{2}}) & \Rightarrow M_{03} &= X_2^{\frac{3}{2}} \\ \xi_1 - \xi_2 &= 2X_2^{\frac{3}{2}}(1 - X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{\frac{1}{2}}) & \Rightarrow M_{12} &= X_2^{\frac{3}{2}} \\ \xi_1 - \xi_3 &= 2X_2^{\frac{3}{2}} & \Rightarrow M_{13} &= X_2^{\frac{3}{2}} \\ \xi_2 - \xi_3 &= 2X_1^{\frac{1}{2}}X_2^2 & \Rightarrow M_{23} &= X_1^{\frac{1}{2}}X_2^2 \end{aligned}$$

e os expoentes característicos generalizados são $(0, \frac{3}{2})$ e $(\frac{1}{2}, 2)$.

Consideremos ξ um ramo quase ordinário, os anéis

$$\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\} \subset \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[\xi] \subset \mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{n}}, \dots, X_r^{\frac{1}{n}}\}$$

bem como seus respectivos corpos de frações,

$$L \subset L(\xi) \subset L_n.$$

A extensão de corpos $L \subset L_n$ é finita e galoisiana. Além disto, o grupo de Galois desta extensão pode ser descrito por meio da ação das r -uplas (η_1, \dots, η_r) de raízes n -ésimas da unidade, dada por $X_i^{\frac{1}{n}} \mapsto \eta_i X_i^{\frac{1}{n}}$, para $i = 1, \dots, r$ (veja [1]). Em particular, temos que as raízes de f são conjugadas de ξ pela ação anterior.

Fixemos uma raiz ξ de f e consideremos $Z(f) = \{\xi = \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\} \subset L_n$ os conjugados de ξ . Avaliando a diferença de ξ com outras raízes, podemos calcular os monômios e os expoentes característicos.

Se $G = Gal(L_n : L)$ é o grupo de Galois de L_n sobre L , então fixando a raiz ξ_0 e variando os elementos de G obtemos $Z(f) = \{\varphi(\xi); \varphi \in G\}$. Assim, $\xi_i = \varphi_i(\xi)$ e $\xi_j = \varphi_j(\xi)$, para $\varphi_i, \varphi_j \in G$, donde segue que

$$\begin{aligned} \xi_i - \xi_j &= \varphi_i(\xi) - \varphi_j(\xi) = \varphi_j \varphi_j^{-1} \varphi_i(\xi) - \varphi_j(\xi) \\ &= \varphi_j(\varphi_j^{-1} \varphi_i(\xi) - \xi) = \varphi_j(\xi_k - \xi), \end{aligned}$$

com $\varphi_k = \varphi_j^{-1} \varphi_i \in G$ e $\varphi_k(\xi) = \xi_k$.

Por definição, temos que $\xi_i - \xi_j = M_{ij}u_{ij}$ e $\xi_k - \xi = M_{k0}u_{k0}$. Denotando M_{k0} por M_k e levando em conta a forma como os elementos $\varphi_j = (\eta_{1j}, \dots, \eta_{rj}) \in G$ agem nos elementos



de L_n , temos que

$$\begin{aligned} \varphi_j(M_k) &= \varphi_j(X_1^{\frac{\lambda_1(k,0)}{n}} \cdots X_r^{\frac{\lambda_r(k,0)}{n}}) \\ &= \eta_{1j}^{\frac{\lambda_1(k,0)}{n}} X_1^{\frac{\lambda_1(k,0)}{n}} \cdots \eta_{rj}^{\frac{\lambda_r(k,0)}{n}} X_r^{\frac{\lambda_r(k,0)}{n}} \\ &= (\eta_{1j}^{\frac{\lambda_1(k,0)}{n}} \cdots \eta_{rj}^{\frac{\lambda_r(k,0)}{n}}) X_1^{\frac{\lambda_1(k,0)}{n}} \cdots X_r^{\frac{\lambda_r(k,0)}{n}} \\ &= \alpha M_k, \end{aligned}$$

onde $\alpha = \eta_{1j}^{\frac{\lambda_1(k,0)}{n}} \cdots \eta_{rj}^{\frac{\lambda_r(k,0)}{n}} \neq 0$.

Isto mostra que os monômios característicos e, conseqüentemente os expoentes característicos, não se alteram pela ação de um elemento de G e, sendo assim, concluímos que $M_k = M_{ij}$, isto é,

$$\{M_{ij}; 0 \leq i, j \leq n-1\} = \{M_k; 1 \leq k \leq g\}$$

para algum $g \leq n$.

Lema 1.10. *O conjunto $\{M_k\}_{1 \leq k \leq g}$ dos monômios característicos de um ramo quase ordinário ξ é totalmente ordenado pela relação de divisibilidade \preceq , isto é, $M_i \preceq M_j$ se, e somente se, M_i divide M_j em $\mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{n}}, \dots, X_r^{\frac{1}{n}}\}$.*

Demonstração. Veja [15]. □

No que segue denotaremos os expoentes característicos de uma hipersuperfície quase ordinária por $\lambda_i = (\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{ir})$ para $i = 1, \dots, g$. Observemos que $\lambda_i \in (\frac{1}{n})\mathbb{N}$ para todo $i = 1, \dots, g$.

Notemos que $\varphi \in \text{Gal}(L_n : L)$ implica em $\varphi(\xi) \in \{\xi = \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}$. Assim, se $\xi_i = \varphi(\xi) \neq \xi = \xi_0$ temos

$$0 \neq \varphi(\xi) - \xi = \xi_i - \xi = M_i u_i,$$

com u_i unidade. Isto indica que M_i é um monômio presente em ξ_i e em $\varphi(\xi)$. De fato, a igualdade acima não seria verificada se M_i estivesse presente em apenas um dos elementos ξ_i ou $\varphi(\xi)$. Em particular, temos que $\varphi(M_i) = \alpha M_i \neq M_i$ com $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

No decorrer do texto, para abreviar notações usaremos com frequência (\underline{a}) para indicar (a, \dots, a) a r -upla com todas as coordenadas iguais, sejam elas, naturais, inteiras ou racionais, e \underline{a} para indicar a r -upla (a_1, \dots, a_r) , cujas coordenadas não são necessariamente



iguais. Por conveniência, esta última notação não será empregada para os expoentes característicos generalizados, sendo estes, como visto anteriormente, denotados apenas por λ_i para indicar $(\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{ir})$, para $i = 1, \dots, g$. Ademais, a notação \underline{a}_i indicará a r -upla (a_{i1}, \dots, a_{ir}) . Além disto, vamos adotar a notação X^γ para indicar $X_1^{\gamma_1} \cdots X_r^{\gamma_r}$ em que $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r)$.

Em \mathbb{Q}^r consideraremos as seguintes ordens:

Dados $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, $\underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_r) \in \mathbb{Q}^r$, dizemos que

$$\underline{\alpha} > \underline{\beta} \Leftrightarrow \alpha_i \geq \beta_i \text{ para todo } i = 1, \dots, r \text{ e } \alpha_j > \beta_j \text{ para algum } j \in \{1, \dots, r\}.$$

$$\underline{\alpha} >_{lex} \underline{\beta} \Leftrightarrow \text{existe } j \in \{1, \dots, r\} \text{ tal que } \alpha_j > \beta_j \text{ e } \alpha_i = \beta_i \text{ para todo } i < j.$$

$$\underline{\alpha} \succ \underline{\beta} \Leftrightarrow \alpha_i > \beta_i \text{ para todo } i = 1, \dots, r.$$

Seja $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ um polinômio quase ordinário irreduzível. O próximo resultado permite obtermos os expoentes característicos de f sem explicitar todas as suas raízes.

Lema 1.11. *Seja $\xi = \sum c_\lambda X^\lambda \in \mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{n}}, \dots, X_r^{\frac{1}{n}}\}$ não unidade. Então ξ é um ramo quase ordinário se, e somente se, existem elementos $\lambda_i \in (\frac{1}{n})\mathbb{N}^r$, para $i = 1, \dots, g$, tais que:*

(i) $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_g$ e $c_{\lambda_i} \neq 0$ para $1 \leq i \leq g$.

(ii) Se $c_\lambda \neq 0$, então λ pertence ao subgrupo de \mathbb{Q}^r dado por $\mathbb{Z}^r + \sum_{\lambda_i \leq \lambda} \mathbb{Z}\lambda_i$.

(iii) λ_j não pertence ao subgrupo de \mathbb{Q}^r dado por $\mathbb{Z}^r + \sum_{\lambda_i < \lambda_j} \mathbb{Z}\lambda_i$ para $j = 1, \dots, g$.

Demonstração. Ver Proposição 1.3 em [6]. □

O Lema 1.11 nos dá um modo de escrever um ramo quase ordinário ξ , como

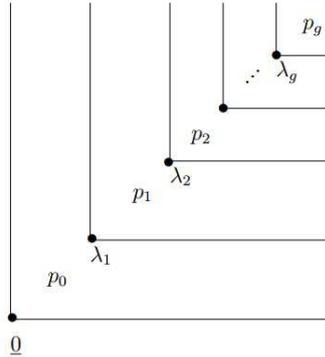
$$\xi = p_0 + p_1 + \dots + p_g$$

onde $p_0 \in \mathbb{C}\{X\}$, $p_1, \dots, p_g \in \mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{n}}, \dots, X_r^{\frac{1}{n}}\}$ e para todo X^λ que ocorre em p_i com coeficiente não nulo, temos que $\lambda_i < \lambda$ e $\lambda_{i+1} \not\leq \lambda$. Note que a mudança de coordenadas $(X_1, \dots, X_r, X_{r+1}) \mapsto (X_1, \dots, X_r, X_{r+1} - p_0(X_1, \dots, X_r))$ permite supor que $p_0 = 0$.



Além disto, o lema anterior permite concluir que qualquer truncamento de um ramo quase ordinário, ainda é um ramo quase ordinário.

A figura a seguir ajuda a ilustrar, para $r = 2$, a região de \mathbb{Q}^r que contém os expoentes de p_i para $i = 1, \dots, g$.



Dizemos que um ramo quase ordinário ξ tem *variáveis bem ordenadas* se as g -uplas $(\lambda_{1i}, \dots, \lambda_{gi})$ das i -ésimas coordenadas dos expoentes característicos $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ são ordenadas lexicograficamente, mais precisamente, se para $1 \leq i < j \leq r$ temos que

$$\lambda^i = (\lambda_{1i}, \dots, \lambda_{gi}) \geq_{lex} (\lambda_{1j}, \dots, \lambda_{gj}) = \lambda^j.$$

As i -ésimas coordenadas dos expoentes característicos podem ser visualizadas como segue:

$$\begin{array}{rcccl}
 \lambda_1 & = & (\lambda_{11}, & \cdots & \lambda_{1i} & \cdots & \lambda_{1r}) \\
 \lambda_2 & = & (\lambda_{21}, & \cdots & \lambda_{2i} & \cdots & \lambda_{2r}) \\
 & & \vdots & & & & \\
 \lambda_g & = & (\lambda_{g1}, & \cdots & \lambda_{gi} & \cdots & \lambda_{gr}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \lambda^1 & & \lambda^i & & \lambda^r
 \end{array} \tag{1.1}$$

É claro que, dado um ramo quase ordinário ξ podemos renomear as variáveis X_1, \dots, X_r de modo a termos variáveis bem ordenadas. Por este motivo assumiremos sem perda de generalidade que os ramos quase ordinários considerados ao longo do texto têm variáveis bem ordenadas, salvo menção contrária.



Exemplo 1.12. No Exemplo 1.9 vimos que os expoentes característicos dos ramos de $f(X_1, X_2, X_3) = ((X_3 - X_2)^2 - X_2^3 - X_1 X_2^4)^2 - 4X_1 X_2^7$ são $\lambda_1 = (0, \frac{3}{2})$ e $\lambda_2 = (\frac{1}{2}, 2)$. Neste caso, $\lambda^2 = (\frac{3}{2}, 2) \geq_{lex} (0, \frac{1}{2}) = \lambda^1$, ou seja, as variáveis não estão bem ordenadas. No entanto, fazendo a mudança de variáveis $X_1 \mapsto X_2, X_2 \mapsto X_1$ obtemos

$$\begin{aligned} f(X_1, X_2, X_3) &= X_3^4 - 8X_1 X_3^3 + (24X_1^2 - 2X_1^3 - 2X_1^4 X_2) X_3^2 \\ &\quad + (-32X_1^3 + 8X_1^4 + 8X_1^5 X_2) X_3 + 16X_1^4 - 8X_1^5 \\ &\quad + X_1^6 + 2X_1^7 X_2 - 8X_1^6 X_2 + X_1^8 X_2^2 - 4X_1^7 X_2 \end{aligned}$$

com variáveis bem ordenadas, que admite o ramo $\xi = 2X_1 + X_1^{\frac{3}{2}} + X_1^2 X_2^{\frac{1}{2}}$ e expoentes característicos $\lambda_1 = (\frac{3}{2}, 0)$ e $\lambda_2 = (2, \frac{1}{2})$.

Sejam $\xi \in \mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{n}}, \dots, X_r^{\frac{1}{n}}\}$ um ramo quase ordinário, $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ seus expoentes característicos generalizados e $\lambda^k = (\lambda_{1k}, \dots, \lambda_{gk})$ introduzido em (1.1). O número minimal $c \in \{1, \dots, r\}$ com a propriedade de que $\lambda_{ik} = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, g\}$ e todo $k \in \{c+1, \dots, r\}$ é chamado *dimensão equisingular* da hipersuperfície quase ordinária determinada por f que tem ξ como raiz (Veja [21]).

Notemos que c representa o número de variáveis com expoentes não nulos que aparecem nos monômios característicos. Quando $c = r$, ou seja, quando todas as variáveis X_1, \dots, X_r aparecem nos monômios característicos, dizemos que a hipersuperfície quase ordinária tem *dimensão equisingular maximal*. A escolha deste nome foi motivada pelo fato de que, neste caso, a projeção quase ordinária é uma deformação equisingular de um germe quase ordinário c -dimensional mas não de um germe de dimensão menor (Veja [21]).

Denotamos $Q_0 = \mathbb{Z}^r$ e por $Q_i = Q_{i-1} + \mathbb{Z}\lambda_i$ para todo $i = 1, \dots, g$ e além disto, associamos ao ramo quase ordinário ξ os subgrupos $Q_0 \subset \dots \subset Q_g$ de \mathbb{Q}^r e a sequência de inteiros $n_0 = 1, n_i = \#(Q_i/Q_{i-1})$ para $i = 1, \dots, g$.

No que segue denotaremos $e_0 = n$ e $e_{j-1} = n_j \cdots n_g$ para $j = 1, \dots, g$.

É fácil ver que os inteiros e_j e n_j são os graus das extensões de corpos

$$\begin{aligned} e_j &:= [L(\xi) : L(M_1, \dots, M_j)] && \text{para } j = 1, \dots, g. \\ n_j &:= [L(M_1, \dots, M_j) : L(M_1, \dots, M_{j-1})] && \text{para } j = 2, \dots, g. \end{aligned} \tag{1.2}$$

e $n_1 = [L(M_1) : L]$, onde os M_i são os monômios característicos e $L(M_1, \dots, M_i)$ é o corpo de frações do anel $\mathbb{C}\{M_1, \dots, M_i\}$.



Observação 1.13. Note que temos as extensões de corpos

$$L \subsetneq L(M_1) \subsetneq L(M_1, M_2) \subsetneq \cdots \subsetneq L(M_1, \dots, M_g) = L(\xi).$$

O Lema 1.11 garante que estas inclusões são estritas. Deste modo, como o polinômio minimal de ξ é $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ e $\deg_{X_{r+1}} f = n$ segue que

$$\begin{aligned} n &= [L(\xi) : L] \\ &= [L(M_1, \dots, M_g) : L] \\ &= [L(M_1, \dots, M_g) : L(M_1, \dots, M_{g-1})] \cdots [L(M_1) : L] \\ &= n_g \cdots n_1. \end{aligned}$$

Em particular, se n é um número primo, então temos apenas um monômio característico generalizado, isto é, $g = 1$.

A observação acima sugere denominarmos $n = \deg_{X_{r+1}} f = [L(\xi) : L]$ de *grau do ramo quase ordinário*, ou simplesmente, *grau da hipersuperfície quase ordinária*.

Embora existam várias possibilidades de apresentar um ramo quase ordinário, uma forma particular desempenha papel importante na teoria. Este é o objeto da próxima definição.

Definição 1.14. Um ramo quase ordinário $\xi = \sum c_{\underline{\lambda}} X^{\underline{\lambda}} \in \mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{n}}, \dots, X_r^{\frac{1}{n}}\}$ é *normalizado* se:

- (i) $c_{\underline{\lambda}} \neq 0$ então $\underline{\lambda} > \lambda_1$, ou seja, $\xi = c_{\lambda_1} X^{\lambda_1} u$ com $u \in \mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{n}}, \dots, X_r^{\frac{1}{n}}\}$ e $u(\underline{0}) = 1$;
- (ii) ξ tem variáveis bem ordenadas;
- (iii) Se $\lambda_1 = (\lambda_{11}, 0, \dots, 0)$, então $\lambda_{11} > 1$.

No caso de curvas planas, a condição para que um ramo seja normalizado significa que a multiplicidade da curva na origem é igual ao grau da projeção, ou equivalentemente, igual ao grau do polinômio de Weierstrass quase ordinário que a define.

No Exemplo 1.12 vimos que a condição (ii) é facilmente obtida por meio de mudanças de coordenadas. Vejamos agora um exemplo que ilustra que a condição (i) também pode ser trivialmente atingida.



Exemplo 1.15. Seja $\xi = 2X_1 + X_1^{\frac{3}{2}} + X_1^2 X_2^{\frac{1}{2}}$. Como vimos no Exemplo 1.12, ξ tem variáveis bem ordenadas. No entanto, como não satisfaz a condição (i) da Definição 1.14 o ramo não é normalizado. Mas notemos que, efetuando a mudança de coordenadas $X_1 \mapsto X_1$, $X_2 \mapsto X_2$ e $X_3 \mapsto X_3 - 2X_1$, obtemos

$$f(X_1, X_2, X_3) = X_3^4 + (-2X_1^4 X_2 - 2X_1^3)X_3^2 - 2X_1^7 X_2 + X_1^6 + X_1^8 X_2^2$$

e $\xi = X_1^{\frac{3}{2}} + X_1^2 X_2^{\frac{1}{2}}$ que é normalizado.

O próximo resultado, conhecido como Lema da Inversão, garante que a condição (iii) da definição anterior pode ser sempre obtida. Para demonstração indicamos o Lema 2.3 de [16] ou o Apêndice de [6].

Lema 1.16. *Seja $(\mathcal{X}, 0) \in \mathbb{C}^{r+1}$ uma hipersuperfície quase ordinária definida por $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ e que possui uma raiz $\xi = X_1^{\frac{k}{s_1}} u(X_1^{\frac{1}{s_1}}, \dots, X_r^{\frac{1}{s_r}})$ com $u(0) \neq 0$, então $(\mathcal{X}, 0)$ também pode ser definida (a menos de mudanças analíticas de coordenadas) por um polinômio quase ordinário em $\mathbb{C}\{X_2, \dots, X_r, X_{r+1}\}[X_1]$ que possui uma raiz da forma*

$$\tau = X_{r+1}^{\frac{s_1}{k}} u'(X_{r+1}^{\frac{1}{k}}, X_2^{\frac{1}{s_2}}, \dots, X_r^{\frac{1}{s_r}})$$

com $u'(0) \neq 0$.

É sabido que dois ramos quase ordinários obtidos por projeções quase ordinárias distintas podem ter expoentes característicos distintos, ou seja, os expoentes característicos dependem da projeção quase ordinária. Este fato causou uma obstrução do desenvolvimento no estudo das hipersuperfícies quase ordinárias e durante duas décadas atrasou a descrição do tipo topológico de uma hipersuperfície quase ordinária por meio de dados numéricos obtidos de um ramo quase ordinário. Lipman, primeiro para superfícies (ver [15]) e mais tarde, para o caso geral (ver [17]), provou que qualquer hipersuperfície quase ordinária admite, após uma mudança de coordenadas, um ramo normalizado e que os expoentes característicos generalizados de um ramo normalizado são únicos. Tal fato possibilitou um feito importante: os expoentes característicos de um ramo quase ordinário determinam o tipo topológico da hipersuperfície que o define. Isto pode ser deduzido usando resultados de Zariski sobre saturação de anéis locais (ver [24], [15] e também [20] para outra prova). A recíproca, isto é, o tipo topológico determina os expoentes característicos, também é válida e foi provada por Gau em [6].



1.3 Expontes dominantes e semirraízes

No caso de curvas planas irredutíveis os expoentes característicos são dados equivalentes ao conhecimento do semigrupo de valores. Neste caso, um modo de obtermos o semigrupo é via a valoração associada a f , isto é, $\nu_f(h) = \text{mult}_T(h(T^n, \phi(T)))$ com $h \in \mathbb{C}\{X_1, X_2\} \setminus \langle f \rangle$ e $(T^n, \phi(T))$ uma parametrização de f , ou equivalentemente, $\nu_f(h) = n \cdot \text{mult}_{X_1}(h(X_1, \xi))$ com ξ uma raiz de f . Notamos que, neste caso, $\nu_f(h)$ é o expoente dominante de $h(T^n, \phi(T))$, ou seja, $h(T^n, \phi(T)) = T^{\nu_f(h)} \cdot u(T)$ com $u(0) \neq 0$.

Seja $\xi = \sum_{\underline{\gamma}} c_{\underline{\gamma}} X^{\underline{\gamma}} \in \mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{n}}, \dots, X_r^{\frac{1}{n}}\}$ um ramo quase ordinário de um polinômio quase ordinário $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ irredutível com $\text{deg}_{X_{r+1}} f = n$, vamos considerar $t_i = X_i^{\frac{1}{n}}$, ou seja, $X_i = t_i^n$ para $i = 1, \dots, r$. Deste modo, de ξ obtemos $S(t_1, \dots, t_r) = \sum_{\underline{\alpha}} c_{\underline{\alpha}} t_1^{\alpha_1} \cdots t_r^{\alpha_r}$ em que $\underline{\alpha} = n\underline{\gamma} \in \mathbb{N}^r$ e temos um homomorfismo sobrejetor de \mathbb{C} -álgebras

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{r+1}\} &\rightarrow \mathbb{C}\{t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r)\} \subset \mathbb{C}\{t_1, \dots, t_r\} \\ h(X_1, \dots, X_{r+1}) &\mapsto h(t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r)) \end{aligned}$$

cujo núcleo é $\langle f \rangle$ uma vez que f é o polinômio minimal de ξ . Deste modo, temos que

$$\frac{\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]}{\langle f \rangle} \approx \frac{\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{r+1}\}}{\langle f \rangle} \approx \mathbb{C}\{t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r)\}.$$

Com as notações acima, denominaremos

$$H = H_f = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r))$$

de uma *parametrização (quase ordinária)* de f ou de ξ .

Definição 1.17. Seja $\zeta = \sum c_{\underline{\alpha}} t_1^{\alpha_1} \cdots t_r^{\alpha_r} \in \mathbb{C}\{t_1, \dots, t_r\}$. Se for possível escrever $\zeta = t_1^{\underline{\delta}} \cdots t_r^{\underline{\delta}} u(t_1, \dots, t_r)$ com $\underline{\delta} \in \mathbb{N}^r$ e u uma unidade, diremos que ζ possui *expoente dominante* $\underline{\delta}$. Sejam $h \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{r+1}\}$ e $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r))$ uma parametrização de um ramo quase ordinário. Dizemos que h tem expoente dominante $\underline{\delta}$ com respeito a H se $h(t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r))$ tem expoente dominante $\underline{\delta}$. Neste caso, denotamos

$$\nu_H(h) = \underline{\delta}.$$

Vejam os exemplos.



Exemplo 1.18. Consideremos a hipersuperfície quase ordinária definida no Exemplo 1.15 com o ramo normalizado dado por

$$\xi = X_1^{\frac{3}{2}} + X_1^2 X_2^{\frac{1}{2}}.$$

Notemos que $\xi \in \mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{2}}, X_2^{\frac{1}{2}}\}$, então considerando $t_1 = X_1^{\frac{1}{2}}$ e $t_2 = X_2^{\frac{1}{2}}$, de ξ obtemos $S(t_1, t_2) = t_1^3 + t_1^4 t_2$.

Com estas notações temos que

$$H = (t_1^2, t_2^2, t_1^3 + t_1^4 t_2)$$

é uma parametrização quase ordinária de f ou de ξ .

Ademais, se consideramos $h \in \mathbb{C}\{X_1, X_2, X_3\}$ dada por $h(X_1, X_2, X_3) = X_1^2 X_2 - X_1^2 X_2^2 + X_3$ temos que

$$h(H) = h(t_1^2, t_2^2, t_1^3 + t_1^4 t_2) = t_1^3(1 + t_1 t_2^2 - t_1 t_2^2 + t_1 t_2),$$

ou seja, h tem expoente dominante $\nu_H(h) = (3, 0)$.

Observação 1.19. Utilizando resultados relacionados com as raízes de um polinômio quase ordinário f e propriedades de discriminante, podemos mostrar (veja [9]) que

$$\nu_H(\Delta_{X_{r+1}} f) = \sum_{k=1}^g (e_{k-1} - e_k) \lambda_k \quad (1.3)$$

em que H é uma parametrização quase ordinária de f , $\lambda_1 < \dots < \lambda_g$ são os expoentes característicos generalizados de ξ e os inteiros e_k são definidos como em (1.2).

Como cada λ_i , para $i = 1, \dots, g$, tem n como denominador, podemos definir também os vetores $\gamma_1, \dots, \gamma_g \in \mathbb{N}^r$ como segue:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= n\lambda_1; \\ \gamma_i &= n_{i-1}\gamma_{i-1} + n\lambda_i - n\lambda_{i-1} \text{ para todo } i = 2, \dots, g; \\ \gamma_{g+1} &= \infty. \end{aligned} \quad (1.4)$$

De (1.4) podemos escrever,

$$\begin{aligned} \gamma_{k+1} &= n(n_k \cdots n_2 (n_1 - 1) \lambda_1 + n_k \cdots n_3 (n_2 - 1) \lambda_2 + \cdots + (n_k - 1) \lambda_k + \lambda_{k+1}) \\ &= n_1 \cdots n_k ((e_0 - e_1) \lambda_1 + (e_1 - e_2) \lambda_2 + \cdots + (e_{k-1} - e_k) \lambda_k + e_k \lambda_{k+1}). \end{aligned}$$

Os elementos $\gamma_1, \dots, \gamma_g \in \mathbb{N}^r$ introduzidos acima podem ser obtidos como expoentes dominantes de elementos especiais de $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ com respeito a H .



Definição 1.20. Sejam $\xi \in Z(f)$ e $k \in \{0, \dots, g\}$. Chamamos um polinômio mônico $f_k \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ de uma k -semirraiz de f se $\deg_{X_{r+1}}(f_k) = n_0 n_1 \dots n_k$ e f_k possui expoente dominante $\nu_H(f_k) = \gamma_{k+1}$. Uma $(g+1)$ -upla (f_0, \dots, f_g) tal que, para todo $k \in \{0, \dots, g\}$, f_k é uma k -semirraiz de f , é chamada um sistema completo de semirraízes para f . Note que f pode ser considerada como a g -ésima semirraiz de si própria.

Pode-se mostrar que as semirraízes de f não dependem da escolha de $\xi \in Z(f)$ e sempre existe um sistema completo de semirraízes para f . A saber, os polinômios minimais de truncamentos adequados de ξ formam um sistema completo de semirraízes para f .

Exemplo 1.21. Seja

$$f(X_1, X_2, X_3) = X_3^4 + (-2X_1^4 X_2 - 2X_1^3)X_3^2 - 2X_1^7 X_2 + X_1^6 + X_1^8 X_2^2$$

e $\xi = X_1^{\frac{3}{2}} + X_1^2 X_2^{\frac{1}{2}}$ seu ramo normalizado, conforme Exemplo 1.15. Vamos calcular as semirraízes de f .

Temos que $\lambda_1 = (\frac{3}{2}, 0)$ e $\lambda_2 = (2, \frac{1}{2})$. Então, neste caso $g = 2$ e como temos $g+1$ semirraízes, devemos calcular f_0, f_1 e f_2 .

De ξ , obtemos a parametrização quase ordinária $H = (t_1^2, t_2^2, t_1^3 + t_1^4 t_2)$. Como vimos, f pode ser considerada como uma g -semirraiz de si própria, isto é, $f_2 = f$.

- Descrição de f_0 .

Temos que $\deg_{X_3} f_0 = n_0 = 1$. Logo, $f_0 = X_3 + a(X_1, X_2)$ e queremos $\nu_H(f_0) = \gamma_1 = n\lambda_1 = (3, 0)$. Como

$$f_0(H) = t_1^3 + t_1^4 t_2 + \sum_{\alpha} c_{\alpha} t_1^{2\alpha_1} t_2^{2\alpha_2},$$

basta considerarmos $a(X_1, X_2) = X_1^2 h(X_1, X_2)$, com $h \in \mathbb{C}\{X_1, X_2\}$ e teremos $f_0(H) = t_1^3(1 + t_1 t_2 + t_1 h(t_1^2, t_2^2))$. Note que isto indica que uma semirraiz não é única.

- Descrição de f_1 .

Temos que $\deg_{X_3} f_1 = n_0 n_1 = 1 \cdot 2 = 2$. Logo $f_1 = X_3^2 + A(X_1, X_2)X_3 + B(X_1, X_2)$. Como $\nu_H(f_1) = n_1 \gamma_1 + n\lambda_2 - n\lambda_1 = (7, 1)$ e

$$f_1(H) = t_1^6 + 2t_1^7 t_2 + t_1^8 t_2^2 + A(t_1^2, t_2^2)(t_1^3 + t_1^4 t_2) + B(t_1^2, t_2^2),$$



a forma mais simples de obter o desejado é considerar $A(X_1, X_2) = 0$ e $B(X_1, X_2) = -X_1^3$, assim encontramos $f_1(X_1, X_2, X_3) = X_3^2 - X_1^3$.

O lema a seguir é uma consequência da divisão euclidiana de polinômios.

Lema 1.22. *Sejam $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ um polinômio quase ordinário com $n = \deg_{X_{r+1}}(f)$ e $f_0, f_1, \dots, f_g \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ com $\deg(f_i) = n_0 n_1 \dots n_i$ para todo $i \in \{0, \dots, g\}$. Qualquer $h \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ pode ser escrito de modo único como uma soma finita $h = \sum c_{i_0 \dots i_g} f_0^{i_0} \dots f_g^{i_g}$ com $c_{i_0 \dots i_g} \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}$, onde as $(g+1)$ -uplas $(i_0, \dots, i_g) \in \mathbb{N}^{g+1}$ verificam $0 \leq i_k < n_{k+1}$, para todo $k \in \{0, \dots, g-1\}$ e $i_g \leq \left\lfloor \frac{\deg_{X_{r+1}}(h)}{n} \right\rfloor$.*

Demonstração. Veja [9]. □

Com relação a expansão apresentada no lema anterior define-se:

Definição 1.23. *Seja (f_0, \dots, f_g) um sistema completo de semirraízes para f . A expansão anterior $h = \sum c_{i_0 \dots i_g} f_0^{i_0} \dots f_g^{i_g}$ é chamada *expansão (f_0, \dots, f_g) -ádica* de h . O conjunto finito $\{(i_0, \dots, i_g); c_{i_0 \dots i_g} \neq 0\}$ é chamado o *suporte (f_0, \dots, f_g) -ádico* de h e denotado por $Supp_{(f_0, \dots, f_g)}(h)$.*

1.4 Semigrupo de uma hipersuperfície quase ordinária

Nesta seção descreveremos o semigrupo associado à uma hipersuperfície quase ordinária definida por $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$, assim como suas propriedades. Tal objeto foi tratado a primeira vez por Micus e Kiyek em [14] e mais tarde, descrito simultaneamente de formas distintas, porém equivalentes, por Popescu-Pampu e González Pérez em [21] e [8], respectivamente.

Veremos que tal semigrupo é determinado e determina os expoentes característicos e portanto, é um invariante topológico completo de uma hipersuperfície quase ordinária. Enquanto para curvas planas é quase imediato verificar que o semigrupo é também um invariante analítico, o mesmo não é evidente para hipersuperfícies quase ordinárias em geral. González Pérez em [8] e Popescu-Pampu em [21] provaram que o semigrupo de uma hipersuperfície quase ordinária não depende da projeção quase ordinária escolhida, sendo assim um invariante analítico.



Consideremos $\xi \in Z(f)$ um ramo quase ordinário e $\mathcal{N}_{X_1, \dots, X_r}(h(X_1, \dots, X_r, \xi))$ o poliedro de Newton de $h(X_1, \dots, X_r, \xi)$ com $h \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}] \setminus \langle f \rangle$ (veja Definição A.6), com tais notações definimos

$$\Gamma_{\mathcal{N}}(f) = \{\underline{\gamma} \in \mathbb{Q}_+^r; \underline{\gamma} \in V_{\mathcal{N}}(h(X_1, \dots, X_r, \xi)), \text{ para } h \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}] \setminus \langle f \rangle\}.$$

A seguir um resultado que garante que o conjunto $\Gamma_{\mathcal{N}}(f)$ definido acima é um semigrupo aditivo de \mathbb{Q}_+^r e cuja demonstração pode ser encontrada em [8].

Proposição 1.24. *Seja $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ um polinômio de Weierstrass quase ordinário irreduzível tal que $\deg_{X_{r+1}}(f) = n$. Temos a seguinte igualdade de conjuntos:*

$$\Gamma_{\mathcal{N}}(f) = \mathbb{N}^r + \mathbb{N}\frac{\gamma_1}{n} + \dots + \mathbb{N}\frac{\gamma_g}{n},$$

em que γ_i para $i = 1, \dots, g$ são como em (1.4).

Se considerarmos agora somente as séries que possuem expoente dominante com respeito à H , então podemos definir o seguinte conjunto:

$$\Gamma_{\mathcal{D}}(f) = \{\nu_H(h); h \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}] \setminus \langle f \rangle \text{ e } \#V_{\mathcal{N}}(h(X_1, \dots, X_r, \xi)) = 1\}.$$

É de fácil constatação que $\Gamma_{\mathcal{D}}(f)$ é semigrupo de \mathbb{Q}_+^r . Além disto, claramente se verifica que $\Gamma_{\mathcal{D}}(f) \subset \Gamma_{\mathcal{N}}(f)$.

González Pérez em sua tese (veja [7]) apresenta o seguinte resultado.

Proposição 1.25. *Com as notações da Proposição 1.24 temos que $\Gamma_{\mathcal{D}}(f) = \Gamma_{\mathcal{N}}(f)$.*

Se $f \in \mathbb{C}\{X_1\}[X_2]$ define uma curva plana irreduzível, temos que $\Gamma(f) \subset \mathbb{N}$. As proposições anteriores garantem que no caso de uma hipersuperfície quase ordinária definida por $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ temos $\Gamma_{\mathcal{N}}(f) \subset \frac{1}{n}\mathbb{N}^r$. Isto possibilita que adotemos a seguinte definição:

Definição 1.26. O semigrupo

$$\Gamma(f) := n\Gamma_{\mathcal{N}}(f) = n\mathbb{N}^r + \mathbb{N}\gamma_1 + \dots + \mathbb{N}\gamma_g$$

é chamado de *semigrupo de f* ou da hipersuperfície definida por f .



No que segue, vamos denotar os geradores do semigrupo $\Gamma(f)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \nu_i &= n\theta_i, \text{ para } i = 1, \dots, r \\ \nu_{r+j} &= \gamma_j, \text{ para } j = 1, \dots, g, \end{aligned} \tag{1.5}$$

em que $\{\theta_i = (0, \dots, 1, \dots, 0), i = 1, \dots, r\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^r .

Desta forma, indicaremos $\Gamma(f) = \langle \nu_1, \dots, \nu_{r+g} \rangle \subset \mathbb{N}^r$ e $\Gamma_j(f)$ o subsemigrupo $\langle \nu_1, \dots, \nu_{r+j} \rangle$ de $\Gamma(f)$, para $j = 0, \dots, g$.

Várias propriedades do semigrupo de curvas planas também são válidas para o semigrupo de hipersuperfícies quase ordinárias em \mathbb{C}^{r+1} . O próximo resultado elenca algumas delas.

Proposição 1.27. *Com as notações anteriores temos:*

1. O subgrupo de \mathbb{Z}^r gerado por ν_1, \dots, ν_{r+j} é igual a nQ_j para $0 \leq j \leq g$.
2. A ordem da classe de ν_{r+j} no grupo $\frac{nQ_j}{nQ_{j-1}}$ é igual a n_j para $j = 1, \dots, g$.
3. Temos que $\nu_{r+j} > n_{j-1}\nu_{r+j-1}$ para $j = 2, \dots, g$.
4. Se o vetor $u_j \in nQ_j$ possui coordenadas não negativas, então $u_j + n_j\nu_{r+j} \in \Gamma_j(f)$, para $j = 1, \dots, g$.
5. O vetor $n_j\nu_{r+j}$ pertence ao semigrupo $\Gamma_{j-1}(f)$ para $j = 1, \dots, g$.

A demonstração pode ser consultada em [7], página 74.

O exemplo que segue, ilustra os passos para o cálculo do semigrupo $\Gamma(f)$.

Exemplo 1.28. Consideremos $f \in \mathbb{C}\{X_1, X_2\}[X_3]$ dada como no Exemplo 1.15. Vamos calcular $\Gamma(f)$.

Neste caso, temos que $n = 4$ e os expoentes característicos generalizados são dados por $\lambda_1 = (\frac{3}{2}, 0)$ e $\lambda_2 = (2, \frac{1}{2})$. Assim, temos que $Q_0 = \mathbb{Z}^2$ e $Q_1 = \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}(\frac{3}{2}, 0)$. Afim de obtermos γ_1 e γ_2 calculemos n_1 que é dado por

$$n_1 = \# \left(\frac{Q_1}{Q_0} \right) = \min\{k \in \mathbb{N}^*; k \left(\frac{3}{2}, 0 \right) \in \mathbb{Z}^2\} = 2.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= n\lambda_1 = (6, 0) \\ \gamma_2 &= n_1\gamma_1 + n\lambda_2 - n\lambda_1 \\ &= 2(6, 0) + 4 \left(2, \frac{1}{2} \right) - 4 \left(\frac{3}{2}, 0 \right) = (14, 2). \end{aligned}$$



Logo,

$$\Gamma(f) = 4\mathbb{N}^2 + \mathbb{N}(6, 0) + \mathbb{N}(14, 2)$$

com os geradores $\nu_1 = (4, 0), \nu_2 = (0, 4), \nu_3 = (6, 0)$ e $\nu_4 = (14, 2)$.

Os conceitos que apresentaremos na sequência serão úteis na análise que faremos sobre as hipersuperfícies quase ordinárias nos próximos capítulos. Estes conceitos foram definidos e utilizados por Abdallah Assi. Para mais detalhes e demonstrações indicamos [2]. Nesse trabalho, Assi apresenta resultados em casos mais gerais, mas por comodidade, apresentaremos aqui o que nos será útil e já adaptado a nossa notação.

Seja $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r))$ uma parametrização de uma hipersuperfície quase ordinária e $\Gamma_H = \langle \nu_1, \dots, \nu_r, \nu_{r+1}, \dots, \nu_{r+g} \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{r+g} a_i \nu_i; a_i \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{N}^r$ com $\nu_j, j = 1, \dots, r+g$ como definidos em (1.5).

No que segue, denotaremos $G = \left\{ \sum_{i=1}^{r+g} a_i \nu_i; a_i \in \mathbb{Z} \right\}$ o subgrupo de \mathbb{Z}^r gerado por $\nu_i, i = 1, \dots, r+g$.

Teorema 1.29. *Sejam $\Gamma_H = \langle \nu_1, \dots, \nu_r, \nu_{r+1}, \dots, \nu_{r+g} \rangle$ o semigrupo de uma hipersuperfície quase ordinária com parametrização H e defina*

$$\underline{w} = \sum_{k=1}^g (n_k - 1) \nu_{r+k} - \sum_{i=1}^r \nu_i$$

em que $n_k = \sharp(Q_k/Q_{k-1})$. Então as seguintes propriedades são válidas:

- (i) $\underline{w} \notin \Gamma_H$;
- (ii) Para todo $\underline{v} \in \mathbb{Z}^r$ com $v_i > w_i, i = 1, \dots, r$ se $\underline{v} \in G$, então $\underline{v} \in \Gamma_H$.

O vetor \underline{w} é chamado vetor de Frobenius de Γ_H , e será denotado por \mathcal{F}_H .

A demonstração pode ser consultada em [2].

Além disto, se $G_k = \left\{ \sum_{i=1}^{r+k} a_i \nu_i; a_i \in \mathbb{Z} \right\}$ com $k \in \{0, \dots, g\}$ e $\underline{v} \in G_k$, então existem únicos $a_1, \dots, a_{r+k} \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq a_{r+j} < n_j$ com $j = 1, \dots, k$, tais que $\underline{v} = \sum_{i=1}^{r+k} a_i \nu_i$. Tal representação de \underline{v} é chamada *representação padrão*.

Mais ainda, dado $\underline{v} = \sum_{i=1}^{r+k} a_i \nu_i \in G_k$ dado por uma representação padrão, temos que $\underline{v} \in \Gamma_k = \langle \nu_1, \dots, \nu_{r+k} \rangle$ se, e somente se, $a_i \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq r+k$.



Exemplo 1.30. O vetor de Frobenius do semigrupo Γ_H do Exemplo 1.28 é

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_H &= (n_1 - 1)\nu_3 + (n_2 - 1)\nu_4 - \nu_1 - \nu_2 \\ &= (2 - 1)(6, 0) + (2 - 1)(14, 2) - (4, 0) - (0, 4) \\ &= (16, -2).\end{aligned}$$

Deste modo, dado $\underline{v} = (v_1, v_2) \in 4\mathbb{Z}^2 + (6, 0)\mathbb{Z} + (14, 2)\mathbb{Z}$ com $v_1 > 16$ e $v_2 > -2$, temos que $\underline{v} \in \Gamma_H$. Em particular, todo vetor da forma $2(9 + a, b)$ com $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ é um elemento de Γ_H .

A partir deste ponto, neste trabalho, daremos especial enfoque às parametrizações $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r))$ de um ramo quase ordinário $\xi = \sum c_{\underline{\lambda}} X^{\underline{\lambda}} \in \mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{n}}, \dots, X_r^{\frac{1}{n}}\}$. Os expoentes $\underline{\lambda} \in \frac{1}{n}\mathbb{N}^r$ de ξ correspondem à expoentes $n\underline{\lambda} \in \mathbb{N}^r$ em $S(t_1, \dots, t_r)$. Por comodidade os expoentes de $S(t_1, \dots, t_r)$ associados aos expoentes característicos generalizados continuarão a serem denotados por $\lambda_i, i = 1, \dots, g$.

1.5 Conjunto singular

Nesta seção, apresentamos resumidamente alguns aspectos sobre o conjunto singular de hipersuperfícies quase ordinárias.

Seja $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ um polinômio de Weierstrass quase ordinário de grau $n > 0$ que define uma hipersuperfície quase ordinária $(\mathcal{X}, 0) \subset (\mathbb{C}^{r+1}, 0)$. Dizemos que $P \in (\mathcal{X}, 0)$ é uma singularidade de $(\mathcal{X}, 0)$ se $f_{X_i}(P) = 0$ para todo $i = 1, \dots, r + 1$.

É um fato conhecido, veja [7], que uma hipersuperfície quase ordinária irredutível possui singularidade isolada somente nos seguintes casos:

- (i) $r = 1$, ou seja, $(\mathcal{X}, 0)$ é uma curva plana.
- (ii) $r = 2$ e $(\mathcal{X}, 0)$ é uma superfície normal, ou seja, $\frac{\mathbb{C}\{X_1, X_2\}[X_3]}{\langle f \rangle}$ é um anel integralmente fechado em seu corpo de frações.

Um estudo dos aspectos analíticos do caso (i) é feita em [12]. O caso (ii) foi considerado por Lipman [17] que mostrou que se $(\mathcal{X}, 0) \subset (\mathbb{C}^{r+1}, 0)$ é uma hipersuperfície quase ordinária irredutível normal, então existem coordenadas locais de modo que f se expressa como $X_{r+1}^n - X_1 \cdots X_c$ para algum $1 \leq c \leq r$. Em particular, temos que f admite uma parametrização quase ordinária $(t_1^n, \dots, t_r^n, t_1 \cdots t_c)$. Se $(\mathcal{X}, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ tem singularidade isolada, então em coordenadas convenientes, podemos parametrizá-la por $(t_1^n, t_2^n, t_1 t_2)$.



Uma outra observação pertinente é com respeito à multiplicidade de uma hipersuperfície quase ordinária. Enquanto para curvas planas, o polinômio de Weierstrass que a define pode ser considerado como

$$f = X_2^n + \sum_{i=1}^n A_i(X_1)X_2^{n-i} \text{ com } mult(f) = n,$$

o mesmo não se pode afirmar no caso geral de uma hipersuperfície quase ordinária. De fato, se $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} u)$ é uma parametrização quase ordinária, então Lipman (veja [15]) mostrou que a multiplicidade da hipersuperfície é $min\{n, |\lambda_1| = \sum_{i=1}^r \lambda_{1i}\}$.

Além disto, Lipman adota a seguinte terminologia:

Se $n \leq |\lambda_1|$, então dizemos que estamos no “Caso transversal”.

Se $|\lambda_1| < n$, então denominaremos esta situação de “Caso não transversal”.

Nos próximos capítulos, vamos concentrar o foco nas hipersuperfícies quase ordinárias singulares (em particular temos multiplicidade maior que 1) e com singularidade não isolada. Particularmente, estaremos interessados em informações analíticas de tais objetos.

\mathcal{A} -equivalência de ramos quase ordinários

Neste capítulo, vamos explorar a equivalência analítica de hipersuperfícies quase ordinárias. Para tanto, vamos traduzir a equivalência analítica de hipersuperfícies quase ordinárias em termos da \mathcal{A} -equivalência de suas parametrizações.

O objetivo principal do capítulo é descrever mudanças de coordenadas que mantêm parametrizações normalizadas, bem como analisar detalhadamente a ação do grupo \mathcal{A} sobre tais parametrizações.

2.1 O grupo \mathcal{A}

Sejam $(\mathcal{X}, 0), (\mathcal{Y}, 0) \subset (\mathbb{C}^{r+1}, 0)$ hipersuperfícies quase ordinárias dadas por polinômios de Weierstrass $f, g \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$, respectivamente. Dizemos que $(\mathcal{X}, 0)$ e $(\mathcal{Y}, 0)$ são analiticamente equivalentes se existem vizinhanças U, V da origem e um isomorfismo analítico $\Phi^* : (\mathbb{C}^{r+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{r+1}, 0)$ tais que $\Phi^*(\mathcal{X} \cap U) = \mathcal{Y} \cap V$. O isomorfismo analítico Φ^* induz um automorfismo $\Phi : \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{r+1}\} \rightarrow \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{r+1}\}$ tal que $\Phi(f) = ug$ com $u(0) \neq 0$, isto é, $\langle \Phi(f) \rangle = \langle g \rangle$. Consequentemente, temos um isomorfismo entre as álgebras analíticas \mathcal{O}_f e \mathcal{O}_g de $(\mathcal{X}, 0)$ e $(\mathcal{Y}, 0)$ respectivamente

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_f &:= \frac{\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{r+1}\}}{\langle f \rangle} = \frac{\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]}{\langle f \rangle} \\ &\cong \\ \mathcal{O}_g &:= \frac{\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{r+1}\}}{\langle g \rangle} = \frac{\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]}{\langle g \rangle}. \end{aligned}$$

Note que considerando os germes de aplicações $f, g : (\mathbb{C}^{r+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, temos que



a equivalência analítica de $(\mathcal{X}, 0)$ e $(\mathcal{Y}, 0)$ corresponde à \mathcal{K} -equivalência dos germes de aplicações f e g no sentido clássico da Teoria de Singularidades.

Por outro lado, uma parametrização $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r))$ da hipersuperfície quase ordinária $(\mathcal{X}, 0)$ dada por $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ de grau n pode ser considerada como germe de uma aplicação

$$\begin{aligned} H : (\mathbb{C}^r, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}^{r+1}, 0) \\ (t_1, \dots, t_r) &\mapsto (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r)). \end{aligned}$$

Deste modo, é natural considerar equivalências de tais aplicações. Particularmente, três relações de equivalência se destacam:

Dadas $H_1, H_2 : (\mathbb{C}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{r+1}, 0)$ dizemos que

- H_1 e H_2 são \mathcal{R} -equivalentes, que indicamos por $H_1 \sim_{\mathcal{R}} H_2$, se existe um difeomorfismo $\rho \in \mathcal{R} = \text{Diff}(\mathbb{C}^r, 0)$ tal que

$$H_1 = H_2 \circ \rho^{-1}.$$

- H_1 e H_2 são \mathcal{L} -equivalentes, denotando $H_1 \sim_{\mathcal{L}} H_2$, se temos $\sigma \in \mathcal{L} = \text{Diff}(\mathbb{C}^{r+1}, 0)$ de modo que

$$H_1 = \sigma \circ H_2.$$

- H_1 e H_2 são $(\mathcal{L} \times \mathcal{R})$ -equivalentes, se

$$H_1 = \sigma \circ H_2 \circ \rho^{-1}$$

com $\sigma \in \mathcal{L}$ e $\rho \in \mathcal{R}$. Neste caso, denotamos $\mathcal{A} = \mathcal{L} \times \mathcal{R}$ o produto direto de \mathcal{L} e \mathcal{R} e diremos que H_1 é \mathcal{A} -equivalente a H_2 , indicando $H_1 \sim_{\mathcal{A}} H_2$.

Denotando $A = \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{r+1}\}$ e $B = \mathbb{C}\{t_1, \dots, t_r\}$, temos que a parametrização H induz um homomorfismo de \mathbb{C} -álgebras

$$\begin{aligned} H^* : A &\rightarrow B \\ h &\mapsto h \circ H. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Se $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ é irredutível e $\xi = S(X_1^{\frac{1}{n}}, \dots, X_r^{\frac{1}{n}})$ é raiz de f , então $\ker(H^*) = \langle f \rangle$ e assim

$$\mathcal{O}_f = \frac{\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{r+1}\}}{\langle f \rangle} \approx \text{Im}(H^*) = \mathbb{C}\{t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r)\}.$$



O homomorfismo injetor

$$\mathcal{O}_f = \frac{\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{r+1}\}}{\langle f \rangle} \rightarrow B$$

induzido por H^* e dado por

$$\bar{h} = h + \langle f \rangle \mapsto H^*(h)$$

continuará a ser denotado, por abuso de linguagem, por H^* , isto é,

$$\begin{aligned} H^* : \mathcal{O}_f &\rightarrow \mathbb{C}\{t_1, \dots, t_r\} \\ \bar{h} &\mapsto h(H) \end{aligned} \tag{2.2}$$

com $Im(H^*) = \mathbb{C}\{t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r)\}$.

Deste modo, a equivalência analítica de hipersuperfícies quase ordinárias pode ser traduzida em termos de isomorfismos da \mathbb{C} -álgebra $\mathbb{C}\{t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r)\}$ que, por sua vez, corresponde à mudanças de parâmetros e coordenadas, ou seja, \mathcal{A} -equivalência de parametrizações. Temos assim que

$$\mathcal{O}_f \approx \mathcal{O}_g \Leftrightarrow H_1 \sim_{\mathcal{A}} H_2$$

em que H_1 e H_2 são parametrizações das hipersuperfícies quase ordinárias $(\mathcal{X}, 0)$ e $(\mathcal{Y}, 0)$ dadas por f e g respectivamente.

O principal objetivo deste trabalho é explorar a ação do grupo \mathcal{A} sobre parametrizações da forma $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r))$ normalizada no sentido da Definição 1.14. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $S(t_1, \dots, t_r) = t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} u(t_1, \dots, t_r)$ com $u(\underline{0}) = 1$.

Note que, se $H_1 \sim_{\mathcal{A}} H_2$, então existe $(\sigma, \rho) \in \mathcal{A}$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^r & \xrightarrow{H_1} & \mathbb{C}^{r+1} \\ \rho \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathbb{C}^r & \xrightarrow{H_2} & \mathbb{C}^{r+1} \end{array}$$

onde

$$\sigma(X_1, \dots, X_{r+1}) = (\sigma_1(X_1, \dots, X_{r+1}), \dots, \sigma_{r+1}(X_1, \dots, X_{r+1}))$$

com $\sigma_i(X_1, \dots, X_{r+1}) = \sum_{j=1}^{r+1} a_{ij} X_j + q_i$ em que $q_i \in \mathcal{M}_{r+1}^2$, $\mathcal{M}_{r+1} = \langle X_1, \dots, X_{r+1} \rangle$ é o ideal maximal de $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{r+1}\}$ e

$$\rho(t_1, \dots, t_r) = (\rho_1(t_1, \dots, t_r), \dots, \rho_r(t_1, \dots, t_r)).$$



A fim de manter a parametrização quase ordinária, isto é,

$$\begin{aligned}\sigma \circ H_1 \circ \rho^{-1}(t_1, \dots, t_r) &= H_2(t_1, \dots, t_r) = (t_1^n, \dots, t_r^n, S_2(t_1, \dots, t_r)) \\ \sigma((\rho^{-1})_1^n, \dots, (\rho^{-1})_r^n, S_1((\rho^{-1})_1, \dots, (\rho^{-1})_r)) &= (t_1^n, \dots, t_r^n, S_2(t_1, \dots, t_r)),\end{aligned}$$

em que $(\rho^{-1})_i$ denota a i -ésima coordenada de ρ^{-1} , devemos ter, para $1 \leq i \leq r$:

$$\begin{aligned}t_i^n &= \sigma_i((\rho^{-1})_1^n, \dots, (\rho^{-1})_r^n, S_1((\rho^{-1})_1, \dots, (\rho^{-1})_r)) \\ &= \sum_{j=1}^r a_{ij}(\rho^{-1})_j^n + a_{i,r+1}S_1(\rho^{-1}) + q_i(H_1\rho^{-1}),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(\sum_{j=1}^r a_{ij}(\rho^{-1})_j^n + a_{i,r+1}S_1\rho^{-1} + q_iH_1\rho^{-1} \right)^{\frac{1}{n}} = t_i = \rho_i\rho^{-1}(t_1, \dots, t_r).$$

Consequentemente,

$$\rho_i(t_1, \dots, t_r) = \left(\sum_{j=1}^r a_{ij}t_j^n + a_{i,r+1}S_1 + q_iH_1 \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Como $\rho_i(t_1, \dots, t_r) \in \mathbb{C}\{t_1, \dots, t_r\}$ para $i = 1, \dots, r$, para mantermos a condição normalizada, devemos ter que

$$\rho_i(t_1, \dots, t_r) = t_i U_i$$

com $U_i = \left(a_{i,i} + \frac{a_{i,r+1}S_1 + q_i(H_1)}{t_i^n} \right)^{\frac{1}{n}}$ uma unidade em $\mathbb{C}\{t_1, \dots, t_r\}$, ou seja, $a_{i,r+1} = 0$ se $n > \lambda_{1i}$ e $t_i^n | q_i(H_1)$.

Assim, para cada $1 \leq i \leq r$ temos que $a_{ij} = 0$ se $j \neq i$ e, em particular, tais condições também se aplicam a $\sigma_1, \dots, \sigma_r$.

Analisemos agora σ_{r+1} , isto é,

$$\sigma_{r+1}(X_1, \dots, X_{r+1}) = \sum_{j=1}^r a_{r+1,j}X_j + a_{r+1,r+1}X_{r+1} + q_{r+1}.$$

Note que

$$\sigma_{r+1}H_1\rho^{-1}(t_1, \dots, t_r) = \sum_{j=1}^r a_{r+1,j}(\rho_j^{-1})^n + a_{r+1,r+1}S_1(\rho^{-1}) + q_{r+1}(H_1(\rho^{-1})).$$



Como $(\rho^{-1})_j^n(t_1, \dots, t_r) = t_j^n U_j^n = c_j t_j^n + \dots$, com $c_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, para obtermos H_2 normalizada, o que implica não termos t_i^n em $S_2 = \sigma_{r+1} H_1 \rho^{-1}(t_1, \dots, t_r)$, devemos ter $a_{r+1,j} = 0$ para todo $j = 1, \dots, r$. Além disto, como $S_2 = \sigma_{r+1} H_1 \rho^{-1}(t_1, \dots, t_r) = a_{r+1,r+1} S_1(\rho^{-1}) + q_{r+1}(H_1(\rho^{-1})) = t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} v$ e $S_1 = t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} u$ devemos ter

$$a_{r+1,r+1}(\rho_1^{-1})^{\lambda_{11}} \dots (\rho_r^{-1})^{\lambda_{1r}} \cdot u(\rho^{-1}) + q_{r+1}(H_1(\rho^{-1})) = t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} \cdot v, \quad v(\underline{0}) \neq 0$$

e então, $t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} | q_{r+1}(H_1(\rho^{-1}))$.

Logo, o subgrupo $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$ que mantém a forma normalizada é composto pelos pares $(\sigma, \rho) \in \mathcal{A}$ tais que

$$\rho(t_1, \dots, t_r) = (\rho_1(t_1, \dots, t_r), \dots, \rho_r(t_1, \dots, t_r))$$

e

$$\sigma(X_1, \dots, X_{r+1}) = (\sigma_1(X_1, \dots, X_{r+1}), \dots, \sigma_{r+1}(X_1, \dots, X_{r+1}))$$

com

$$\begin{aligned} \rho_i(t_1, \dots, t_r) &= t_i \left(a_{i,i} + \frac{a_{i,r+1} S_1 + q_i(H_1)}{t_i^n} \right)^{\frac{1}{n}}, \text{ tal que} \\ &a_{ii} \neq 0; a_{i,r+1} = 0 \text{ se } n > \lambda_{1i} \text{ e } t_i^n | q_i(H_1) \\ \sigma_i(X_1, \dots, X_{r+1}) &= a_{i,i} X_i + a_{i,r+1} X_{r+1} + q_i, \\ &1 \leq i \leq r \text{ e } q_i \in \mathcal{M}_{r+1}^2; \\ \sigma_{r+1}(X_1, \dots, X_{r+1}) &= a_{r+1,r+1} X_{r+1} + q_{r+1}, \text{ com} \\ &t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} | q_{r+1}(H_1) \text{ com } q_{r+1} \in \mathcal{M}_{r+1}^2. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $(\sigma, \rho) \in \mathcal{G}$ e H é uma parametrização normalizada de uma hipersuperfície quase ordinária, então $\sigma H \rho^{-1}$ também é normalizada.

Podemos resumir as considerações acima no seguinte resultado.

Teorema 2.1. *Seja $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r))$ uma parametrização normalizada de uma hipersuperfície quase ordinária. O subgrupo $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$ cuja ação sobre H ainda nos dá*



uma parametrização normalizada é caracterizado pelos elementos (σ, ρ) tais que

$$\begin{aligned} \rho_i(t_1, \dots, t_r) &= t_i \left(a_{i,i} + \frac{a_{i,r+1} S + q_i(H)}{t_i^n} \right)^{\frac{1}{n}}, \text{ com} \\ & a_{ii} \neq 0; a_{i,r+1} = 0 \text{ se } n > \lambda_{1i} \text{ e } t_i^n | q_i(H) \\ \sigma_i(X_1, \dots, X_{r+1}) &= a_{i,i} X_i + a_{i,r+1} X_{r+1} + q_i, \\ & 1 \leq i \leq r \text{ e } q_i \in \mathcal{M}_{r+1}^2; \\ \sigma_{r+1}(X_1, \dots, X_{r+1}) &= a_{r+1,r+1} X_{r+1} + q_{r+1}, \text{ com} \\ & t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} | q_{r+1}(H) \text{ com } q_{r+1} \in \mathcal{M}_{r+1}^2. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2. Seja $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r))$ uma parametrização quase ordinária com semigrupo Γ_H e vetor de Frobenius \mathcal{F}_H , conforme introduzimos na Seção 1.4. Se $\mathcal{F}_H \prec \lambda_1$, então $H \sim_{\mathcal{A}} (t_1^n, \dots, t_r^n, t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}})$.

De fato, como $\mathcal{F}_H = \sum_{i=1}^g (n_i - 1) \nu_{r+i} - (\underline{n})$ e $n_i > 1$, para que $\mathcal{F}_H \prec \lambda_1$ devemos ter que $g = 1$ e, neste caso,

$$\mathcal{F}_H = (n - 1) \lambda_1 - (\underline{n}) \prec \lambda_1$$

ou seja,

$$(n - 2) \lambda_1 \prec (\underline{n}). \quad (2.3)$$

Obviamente a relação acima é sempre válida para $n = 2$.

Se $n > 3$, então devemos ter $\frac{n}{n-2} \leq 2$. De fato, se $\frac{n}{n-2} > 2$, então $n > 2n - 4$, isto é, $4 > n$ contrariando o fato de que $n > 3$. De (2.3), temos que $\lambda_{1i} < \frac{n}{n-2} \leq 2$, assim $\lambda_{1i} < 2$ para todo $i = 1, \dots, r$.

Para $n = 3$, devemos ter $\lambda_1 \prec (\underline{3})$, ou seja, $\lambda_{1i} \in \{0, 1, 2\}$.

Como $\mathcal{F}_H \prec \lambda_1$, do item (ii) do Teorema 1.29, temos que todo termo $at_1^{\delta_1} \dots t_r^{\delta_r} \neq t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}}$ é tal que $\underline{\delta} \in \Gamma_H$. Além disto, uma vez que H é normalizada temos que

$$\underline{\delta} = \nu_H(X_{r+1}h)$$

com $h \in \mathcal{M}_r$.

Agora consideremos

$$\begin{aligned} \rho(t_1, \dots, t_r) &= (t_1, \dots, t_r) \\ \sigma(X_1, \dots, X_{r+1}) &= (X_1, \dots, X_r, X_{r+1} - X_{r+1}h) \end{aligned}$$

com $\nu_H(X_{r+1}h) = \underline{\delta}$. Note que $X_{r+1}h \in \mathcal{M}_{r+1}^2$ e $t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} | (X_{r+1}h)(H)$, ou seja, $(\sigma, \rho) \in \mathcal{G}$, em que \mathcal{G} é o subgrupo descrito no teorema anterior.



Deste modo, $\sigma H \rho^{-1}$ não possui o termo $at_1^{\delta_1} \dots t_r^{\delta_r}$ e possui os mesmos termos $t_1^{\beta_1} \dots t_r^{\beta_r}$ tais que $\underline{\beta} < \underline{\delta}$.

Repetindo tal argumento para todos os monômios, exceto o característico, temos que

$$H \sim_{\mathcal{G}} (t_1^n, \dots, t_r^n, t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}}).$$

Assim, temos que se $\mathcal{F}_H \prec \lambda_1$ então:

- Para $n = 2$, temos $H \sim_{\mathcal{G}} (t_1^2, \dots, t_r^2, t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}})$.
- Para $n = 3$, temos $H \sim_{\mathcal{G}} (t_1^3, \dots, t_r^3, t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}})$ com $\lambda_{1i} \in \{0, 1, 2\}$.
- Para $n \geq 4$, temos $H \sim_{\mathcal{G}} (t_1^n, \dots, t_r^n, t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}})$ com $\lambda_{1i} \in \{0, 1\}$.

Note que o caso $n \geq 4$ corresponde, segundo Lipman (*Remarks* 7.3.2, pág. 99 de [17]), às hipersuperfícies quase ordinárias normais.

O exemplo anterior também ilustra como podemos eliminar um termo $at_1^{\delta_1} \dots t_r^{\delta_r}$ de H com $\underline{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_r) > (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1r}) = \lambda_1$ tal que $\underline{\delta} \in \Gamma_H$ alterando, eventualmente, apenas os termos $t_1^{\beta_1} \dots t_r^{\beta_r}$ de H com $\underline{\beta} > \underline{\delta}$. O resultado abaixo, retrata uma situação mais geral.

Proposição 2.3. *Sejam $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r))$ com $S(t_1, \dots, t_r) = t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} + \sum_{i > \lambda_1} b_i t_1^{i_1} \dots t_r^{i_r}$ e $\underline{\delta} \in \mathbb{N}^r$ tal que $\underline{\delta} > \lambda_1$. Se*

$$\underline{\delta} \in \bigcup_{i=1}^{r+1} \Gamma_H + \lambda_1 - \nu_i,$$

então podemos eliminar de H o termo com expoente $\underline{\delta}$ alterando, eventualmente, termos $t_1^{\beta_1} \dots t_r^{\beta_r}$ de H com $\underline{\beta} > \underline{\delta}$.

Demonstração. Consideremos mudanças de coordenadas da forma

$$\sigma(X_1, \dots, X_r, X_{r+1}) = (X_1 + p_1, \dots, X_r + p_r, X_{r+1} + p_{r+1})$$

e

$$\rho(t_1, \dots, t_r) = (\rho_1(t_1, \dots, t_r), \dots, \rho_r(t_1, \dots, t_r))$$



tais que

$$\rho_j(t_1, \dots, t_r) = t_j \left(1 + \frac{p_j(H)}{t_j^n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

para $1 \leq j \leq r$. Sem perda de generalidade podemos considerar p_j com expoente dominante.

Temos então, que $\rho^{-1}(t_1, \dots, t_r) = t_j \left(1 - \frac{1}{n} \frac{p_j(H)}{t_j^n} + \dots \right) = t_j - \frac{p_j(H)}{nt_j^{n-1}} + \boxtimes$, em que os termos $t_1^{i_1} \dots t_r^{i_r}$ de \boxtimes são tais que $i_j \geq 2\nu_H(p_j) - (n-1)\theta_j$.

Assim, para $1 \leq i \leq r$ temos que

$$(\sigma H \rho^{-1}(t_1, \dots, t_r))_i = \sigma_i(H \rho^{-1}) = (\rho_i^{-1})^n + p_i(H \rho^{-1}) = t_i^n.$$

Para $i = r+1$,

$$\begin{aligned} \sigma_{r+1} H \rho^{-1}(t_1, \dots, t_r) &= (\rho_1^{-1})^{\lambda_{11}} \dots (\rho_r^{-1})^{\lambda_{1r}} + \sum_{i > \lambda_1} b_i (\rho_1^{-1})^{i_1} \dots (\rho_r^{-1})^{i_r} + p_{r+1}(H \rho^{-1}) \\ &= \left(t_1^{\lambda_{11}} - \frac{\lambda_{11} t_1^{\lambda_{11}} p_1}{nt_1^n} + \boxtimes_1 \right) \dots \left(t_r^{\lambda_{1r}} - \frac{\lambda_{1r} t_r^{\lambda_{1r}} p_r}{nt_r^n} + \boxtimes_r \right) \\ &\quad + \sum_{i > \lambda_1} b_i \left(t_1^{i_1} - \frac{i_1 t_1^{i_1} p_1}{nt_1^n} + \boxplus_1 \right) \dots \left(t_r^{i_r} - \frac{i_r t_r^{i_r} p_r}{nt_r^n} + \boxplus_r \right) + p_{r+1}(H \rho^{-1}) \\ &= S(t_1, \dots, t_r) \\ &\quad - \frac{p_1}{nt_1^{n-1}} \left(\lambda_{11} t_1^{\lambda_{11}-1} t_2^{\lambda_{12}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} + \sum_{i > \lambda_1} b_i i_1 t_1^{i_1-1} t_2^{i_2} \dots t_r^{i_r} \right) \\ &\quad \vdots \\ &\quad - \frac{p_r}{nt_r^{n-1}} \left(\lambda_{1r} t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}-1} + \sum_{i > \lambda_1} b_i i_r t_1^{i_1} \dots t_r^{i_r-1} \right) \\ &\quad + p_{r+1}(H) + \boxminus \\ &= S(t_1, \dots, t_r) - \frac{p_1}{nt_1^{n-1}} S_{t_1} - \dots - \frac{p_r}{nt_r^{n-1}} S_{t_r} + p_{r+1}(H) + \boxminus, \end{aligned}$$

onde \boxtimes_j representa termos com expoentes em $\nu_H(p_j) + (\lambda_{1j} - n)\theta_j + \mathbb{N}^r$, \boxplus_j representa termos com expoentes em $\nu_H(p_j) + (i_j - n)\theta_j + \mathbb{N}^r$ e \boxminus representa termos com expoentes em $\bigcup_{i=1}^r (\lambda_1 - \nu_i + \nu_H(p_i) + \mathbb{N}^r) \cup (\nu_H(p_{r+1}) + \mathbb{N}^r)$.

Se $p_1 = \dots = p_r = 0$, então podemos escolher $p_{r+1} \in \mathcal{M}_{r+1}^2$ com expoente dominante de modo a eliminar o termo com expoente $\nu_H(p_{r+1})$ de $S(t_1, \dots, t_r)$ alterando, eventualmente, os termos com expoente em $\nu_H(p_{r+1}) + \mathbb{N}^r \setminus \{\nu_H(p_{r+1})\}$.

Se $p_1 = \dots = \widehat{p}_i = \dots = p_{r+1} = 0$ podemos escolher p_i com expoente dominante tal



que

$$\nu_H \left(\frac{p_i S_{t_i}}{nt_i^{n-1}} \right) = \nu_H(p_i) + \lambda_1 - \nu_i$$

e assim podemos eliminar o termo com expoente $\nu_H(p_i) + \lambda_1 - \nu_i$ de $S(t_1, \dots, t_r)$ alterando, eventualmente, os termos com expoente em

$$\{\nu_H(p_i) + \lambda_1 - \nu_i + \mathbb{N}^r\} \setminus \{\nu_H(p_i) + \lambda_1 - \nu_i\}.$$

□

O resultado anterior foi inspirado no Lema 5 de [4].

2.2 Ação do grupo $(\tilde{\mathcal{L}}_1 \times \tilde{\mathcal{R}}_1)$

Na seção anterior caracterizamos precisamente o subgrupo de \mathcal{A} que preserva a parametrização normalizada de uma hipersuperfície quase ordinária. Alguns dos elementos deste subgrupo introduzem termos, outros eliminam e ainda há elementos que alteram apenas os coeficientes de termos da parametrização. Identificar quais elementos deste subgrupo eliminam um determinado termo não é uma tarefa fácil na maioria das vezes. No entanto, o Teorema da Transversal Completa nos ajuda a identificar termos que podem ser eliminados a partir da caracterização do espaço tangente à órbita de um elemento pela ação de um grupo.

Por comodidade apresentaremos uma versão do Teorema da Transversal Completa que utilizaremos neste trabalho.

Teorema 2.4. (Teorema da Transversal Completa) *Seja G um grupo de Lie agindo suavemente sobre um espaço afim \mathbb{A} (com respeito a um espaço vetorial V) e seja W um subespaço vetorial de V satisfazendo*

$$T_{v+w}G(v+w) = T_vG(v) \tag{2.4}$$

para todo $v \in \mathbb{A}$ e $w \in W$. Então

$$(i) \ v + \{T_vG(v) \cap W\} \subset G(v) \cap \{v+w\}, \forall v \in \mathbb{A};$$



(ii) Se $v_0 \in \mathbb{A}$ e T é um subespaço vetorial de W tal que

$$W \subset T + T_{v_0}G(v_0)$$

então para todo $w \in W$, existem $g \in G$ e $t \in T$ tais que

$$g(v_0 + w) = v_0 + t.$$

Demonstração. Consultar [5]. □

O teorema acima assegura que o subespaço T contém um representante da G -órbita de todos os elementos de $v_0 + W$ de V e, por este fato, é denominado Teorema da Transversal Completa. Além disto, a condição (2.4) indica que o espaço tangente às órbitas de $v + W$ é o mesmo em todos os pontos $v + w$, e é igual à $T_vG(v)$.

Por impor que as mudanças de coordenadas mantenham a parametrização normalizada, as restrições impostas sobre os difeomorfismos dificultam a análise do espaço tangente à órbita de um elemento. Vamos relaxar as condições sobre as mudanças de coordenadas de modo a facilitar nossas análises, sem abrir mão de algumas propriedades.

Vamos considerar $(\sigma, \rho) \in \mathcal{A}$ tais que σ e ρ sejam independentes entre si e da parametrização $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r))$ com $S(t_1, \dots, t_r) = t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} u$ com $u(\underline{0}) \neq 0$, porém levando em consideração a relação entre λ_{1i} e n . Mais especificamente, consideramos $\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{L}} \times \tilde{\mathcal{R}}$ o subgrupo de \mathcal{A} em que

$$\tilde{\mathcal{R}} = \{\rho = (\rho_1, \dots, \rho_r); \rho_i(t_1, \dots, t_r) = c_i t_i + t_i \zeta, c_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \zeta \in \mathcal{M}_r\}$$

e $\tilde{\mathcal{L}}$ é constituído por elementos

$$\sigma(X_1, \dots, X_{r+1}) = (a_1 X_1 + \epsilon_1, \dots, a_{r+1} X_{r+1} + \epsilon_{r+1})$$

em que para $1 \leq i \leq r$ temos

$$\epsilon_i = \begin{cases} q_i \in X_i \mathcal{M}_{r+1} & \text{se } \lambda_{1i} < n \\ b_i X_{r+1} + q_i & \text{com } q_i \in X_i \mathcal{M}_{r+1} + X_{r+1} \mathcal{M}_{r+1} \text{ se } \lambda_{1i} \geq n \end{cases} \quad (2.5)$$

e $\epsilon_{r+1} \in \mathcal{M}_{r+1}^2$.



Observação 2.5. Note que, se $r = 1$, ou seja, $H = (t^n, t^\lambda u)$ é a parametrização de uma curva plana com $\lambda > n$, então temos

$$\tilde{\mathcal{R}} = \{\rho(t) = ct + t\zeta; \zeta \in \mathcal{M}_1\},$$

$$\tilde{\mathcal{L}} = \{\sigma(X_1, X_2) = (a_1X_1 + b_2X_2 + q_1, a_2X_2 + q_2); q_i \in \mathcal{M}_2^2\}$$

e $\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{L}} \times \tilde{\mathcal{R}}$ é o grupo considerado em [12] para a classificação de curvas planas irredutíveis.

Note que o subgrupo $\tilde{\mathcal{A}}$ contém as mudanças de coordenadas que mantém a parametrização normalizada. Em particular, a ação de um elemento $(\sigma, \rho) \in \tilde{\mathcal{A}}$ sobre $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r))$ com $S(t_1, \dots, t_r) = t_1^{\lambda_1} \dots t_r^{\lambda_r} u$ com $u(\underline{0}) \neq 0$ é dada por

$$\sigma H \rho^{-1}(t_1, \dots, t_r) = (\dots, a_i(\rho_i^{-1})^n + b_i S(\rho^{-1}) + q_i(H(\rho^{-1})), \dots, a_{r+1} S(\rho^{-1}) + q_{r+1}(H(\rho^{-1})))$$

com

$$\begin{aligned} b_i &= 0, \quad q_i \in X_i \mathcal{M}_{r+1} & \text{se } \lambda_{1i} < n \\ b_i &\in \mathbb{C}, \quad q_i \in X_i \mathcal{M}_{r+1} + X_{r+1} \mathcal{M}_{r+1} & \text{se } \lambda_{1i} \geq n \end{aligned}$$

e $q_{r+1} \in \mathcal{M}_{r+1}^2$.

Como

$$\rho^{-1}(t_1, \dots, t_r) = (t_1 v_1, \dots, t_r v_r)$$

com $v_i(\underline{0}) \neq 0$, temos para $1 \leq i \leq r$

$$(\sigma H \rho^{-1})_i = t_i^n u_i = (t_i u_i^{\frac{1}{n}})^n$$

com $u_i(\underline{0}) \neq 0$.

No que segue, se $h \in \mathbb{C}\{Y_1, \dots, Y_s\}$, então $j^k h$ denota o polinômio de Taylor de h (na origem) de grau k , ou seja, o truncamento de h constituído pelos termos de ordem menor ou igual a k .

Se denotarmos

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{array}{l} (\sigma, \rho) \in \tilde{\mathcal{A}}; \quad \sigma(X_1, \dots, X_{r+1}) = (a_1 X_1, \dots, a_{r+1} X_{r+1}), \\ \rho(t_1, \dots, t_r) = (c_1 t_1, \dots, c_r t_r), a_i \neq 0 \neq c_i \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

e

$$\tilde{\mathcal{A}}_1 = \{(\sigma, \rho) \in \tilde{\mathcal{A}}; j^1 \sigma = (X_1, \dots, X_{r+1}) \text{ e } j^1 \rho = (t_1, \dots, t_r)\} \quad (2.7)$$



então todo elemento de $\tilde{\mathcal{A}}$ pode ser expresso como uma composição de um elemento de \mathcal{H} e $\tilde{\mathcal{A}}_1$. Note que $\tilde{\mathcal{A}}_1 = \tilde{\mathcal{L}}_1 \times \tilde{\mathcal{R}}_1$ com

$$\tilde{\mathcal{L}}_1 = \{\sigma \in \tilde{\mathcal{L}}; j^1\sigma = (X_1, \dots, X_{r+1})\} \text{ e } \tilde{\mathcal{R}}_1 = \{\rho \in \tilde{\mathcal{R}}; j^1\rho = (t_1, \dots, t_r)\}.$$

Identificaremos os germes de aplicações analíticas de \mathbb{C}^r em \mathbb{C}^{r+1} que preservam a origem com sua expansão em série de Taylor na origem, que indicaremos por $J(r, r+1)$. Deste modo, temos que a ação do grupo $\tilde{\mathcal{A}}_1$ é dada por

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{L}}_1 \times \tilde{\mathcal{R}}_1) \times J(r, r+1) &\longrightarrow J(r, r+1) \\ ((\sigma, \rho), H) &\longmapsto \sigma \circ H \circ \rho^{-1}. \end{aligned}$$

A órbita de H por esta ação é

$$(\tilde{\mathcal{L}}_1 \times \tilde{\mathcal{R}}_1) \cdot H = \{\sigma \circ H \circ \rho^{-1}; \sigma \in \tilde{\mathcal{L}}_1, \rho \in \tilde{\mathcal{R}}_1\}.$$

Deste modo, o espaço tangente à órbita de H é dado por:

$$T_H((\tilde{\mathcal{L}}_1 \times \tilde{\mathcal{R}}_1) \cdot H) = d(\phi_H)_1(T_1(\tilde{\mathcal{L}}_1 \times \tilde{\mathcal{R}}_1)) = d(\phi_H)_1(T_1\tilde{\mathcal{L}}_1 \times T_1\tilde{\mathcal{R}}_1)$$

onde

$$\begin{aligned} \phi_H : \tilde{\mathcal{L}}_1 \times \tilde{\mathcal{R}}_1 &\longrightarrow (\tilde{\mathcal{L}}_1 \times \tilde{\mathcal{R}}_1) \cdot H \\ (\sigma, \rho) &\longmapsto (\sigma, \rho) \cdot H = \sigma \circ H \circ \rho^{-1}, \end{aligned}$$

$d(\phi_H)_1$ denota a derivada de ϕ_H na identidade $1 \in \tilde{\mathcal{L}}_1 \times \tilde{\mathcal{R}}_1$ e T_1G denota o espaço tangente de G na identidade, sendo G um dos grupos $\tilde{\mathcal{R}}_1$, $\tilde{\mathcal{L}}_1$ ou $\tilde{\mathcal{L}}_1 \times \tilde{\mathcal{R}}_1$.

Como $\tilde{\mathcal{L}}_1$ e $\tilde{\mathcal{R}}_1$ são espaços afins, temos que

$$T_1\tilde{\mathcal{L}}_1 = \{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{r+1}), \text{ com } \epsilon_i \text{ como em (2.5), } i = 1, \dots, r+1\}$$

e

$$T_1\tilde{\mathcal{R}}_1 = \bigoplus_{i=1}^r t_i \zeta_i, \text{ com } \zeta_i \in \mathcal{M}_r.$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(\phi_H)_1(T_1\tilde{\mathcal{L}}_1 \times T_1\tilde{\mathcal{R}}_1) &= d(\phi_H)_1((T_1\tilde{\mathcal{L}}_1 \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times T_1\tilde{\mathcal{R}}_1)) \\ &= d(\phi_H)_1(T_1\tilde{\mathcal{L}}_1 \times \{0\}) + d(\phi_H)_1(\{0\} \times T_1\tilde{\mathcal{R}}_1). \end{aligned} \tag{2.8}$$



Temos que $d(\phi_H)_1(T_1\tilde{\mathcal{L}}_1 \times \{0\}) = d\psi_1(T_1\tilde{\mathcal{L}}_1)$ onde

$$\begin{aligned} \psi : \tilde{\mathcal{L}}_1 &\longrightarrow J(r, r+1) \\ \sigma &\longmapsto \sigma \circ H. \end{aligned}$$

De fato, seja u um elemento da base de $T_1\tilde{\mathcal{L}}_1$. Então, $u = (0, \dots, \epsilon_i, \dots, 0)$ em que ϵ_i satisfaz as condições dadas em (2.5). Como $u \in T_1\tilde{\mathcal{L}}_1$, existe uma curva $\lambda_{\tilde{\mathcal{L}}_1}(t) = 1_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + tu$ com $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, tal que, $\lambda_{\tilde{\mathcal{L}}_1}(0) = 1_{\tilde{\mathcal{L}}_1}$ e $\lambda'_{\tilde{\mathcal{L}}_1}(0) = u$. Assim, estendemos $\lambda_{\tilde{\mathcal{L}}_1}(t)$ a uma curva em $\tilde{\mathcal{L}}_1 \times \tilde{\mathcal{R}}_1$ dada por

$$\begin{aligned} \lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_1 \times \tilde{\mathcal{R}}_1 \\ t &\longmapsto (\lambda_{\tilde{\mathcal{L}}_1}(t), 1_{\tilde{\mathcal{R}}_1}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda(0) = (\lambda_{\tilde{\mathcal{L}}_1}(0), 1_{\tilde{\mathcal{R}}_1}) = (1_{\tilde{\mathcal{L}}_1}, 1_{\tilde{\mathcal{R}}_1}) \text{ e } \lambda'(0) = (\lambda'_{\tilde{\mathcal{L}}_1}(0), 0) = (u, 0).$$

Desta forma,

$$d(\phi_H)_1(u, 0) = (\phi_H \circ \lambda)'(0). \quad (2.9)$$

Mas,

$$(\phi_H \circ \lambda)(t) = \phi_H(\lambda_{\tilde{\mathcal{L}}_1}(t), 1_{\tilde{\mathcal{R}}_1}) = \lambda_{\tilde{\mathcal{L}}_1}(t) \circ H \circ (1_{\tilde{\mathcal{R}}_1})^{-1} = \lambda_{\tilde{\mathcal{L}}_1}(t) \circ H = (\psi \circ \lambda_{\tilde{\mathcal{L}}_1})(t). \quad (2.10)$$

Portanto,

$$d(\phi_H)_1(u, 0) \stackrel{(2.9)}{=} (\phi_H \circ \lambda)'(0) \stackrel{(2.10)}{=} d\psi_1(\lambda'_{\tilde{\mathcal{L}}_1}(0)) = d\psi_1(u),$$

donde concluímos que

$$d(\phi_H)_1(T_1\tilde{\mathcal{L}}_1 \times \{0\}) = d\psi_1(T_1\tilde{\mathcal{L}}_1).$$

De maneira análoga, considerando

$$\begin{aligned} \bar{\psi} : \tilde{\mathcal{R}}_1 &\longrightarrow J(r, r+1) \\ \rho &\longmapsto H \circ \rho^{-1} \end{aligned}$$

podemos mostrar que $d(\phi_H)_1(\{0\} \times T_1\tilde{\mathcal{R}}_1) = d\bar{\psi}_1(T_1\tilde{\mathcal{R}}_1)$.

Portanto, substituindo em (2.8) temos,

$$d(\phi_H)_1(T_1\tilde{\mathcal{L}}_1 \times T_1\tilde{\mathcal{R}}_1) = d\psi_1(T_1\tilde{\mathcal{L}}_1) + d\bar{\psi}_1(T_1\tilde{\mathcal{R}}_1).$$



Agora tomando

$$\begin{aligned}\tilde{\psi} : \tilde{\mathcal{R}}_1 &\longrightarrow J(r, r+1) \\ \rho &\longmapsto H \circ \rho\end{aligned}$$

temos que $d\tilde{\psi}_1(T_1\tilde{\mathcal{R}}_1) = d\bar{\psi}_1(T_1\tilde{\mathcal{R}}_1)$.

De fato, considerando a composição

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{R}}_1 &\xrightarrow{\theta} \tilde{\mathcal{R}}_1 \xrightarrow{\tilde{\psi}} J(r, r+1) \\ \rho &\longmapsto \rho^{-1} \longmapsto H \circ \rho^{-1}\end{aligned}$$

e lembrando que θ é difeomorfismo, temos que $d\theta_1$ é isomorfismo, $d\bar{\psi}_1 = d\tilde{\psi}_1 \circ d\theta_1$ e desta forma, $d\tilde{\psi}_1(T_1\tilde{\mathcal{R}}_1) = d\bar{\psi}_1(T_1\tilde{\mathcal{R}}_1)$.

Logo,

$$T_H(\tilde{\mathcal{L}}_1 \times \tilde{\mathcal{R}}_1 \cdot H) = d(\phi_H)_1(T_1\tilde{\mathcal{L}}_1 \times T_1\tilde{\mathcal{R}}_1) = d\psi_1(T_1\tilde{\mathcal{L}}_1) + d\tilde{\psi}_1(T_1\tilde{\mathcal{R}}_1).$$

Agora vamos descrever $d\tilde{\psi}_1(T_1\tilde{\mathcal{R}}_1)$.

Seja $\eta = (0, \dots, \eta_i, \dots, 0)$ um elemento da base de $T_1\tilde{\mathcal{R}}_1$, isto é, $\eta_i = t_i\zeta_i$ com $\zeta_i \in \mathcal{M}_r$ e consideremos uma curva em $\tilde{\mathcal{R}}_1$ que passa pela identidade de $\tilde{\mathcal{R}}_1$ e admite vetor tangente η dado por $\gamma(t) = 1_{\tilde{\mathcal{R}}_1} + t\eta = (t_1, \dots, t_i + t\eta_i, \dots, t_r)$. Deste modo, temos a seguinte curva em $J(r, r+1)$:

$$\begin{aligned}(\tilde{\psi} \circ \gamma)(t) &= \tilde{\psi}(1_{\tilde{\mathcal{R}}_1} + t\eta) = H(1_{\tilde{\mathcal{R}}_1} + t\eta) \\ &= (t_1^n, \dots, (t_i + t\eta_i)^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_i + t\eta_i, \dots, t_r)).\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}d\tilde{\psi}_1(\eta) &= (\tilde{\psi} \circ \gamma)'(0) = H(1_{\tilde{\mathcal{R}}_1} + t\eta)'(0) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(t_1^n, \dots, (t_i + t\eta_i)^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, (t_i + t\eta_i), \dots, t_r))(0) \\ &= (0, \dots, nt_i^{n-1}\eta_i, \dots, 0, S_{t_i}\eta_i) \\ &= (0, \dots, (X_i \circ H)_{t_i}, \dots, 0, (X_{r+1} \circ H)_{t_i})\eta_i,\end{aligned}$$

em que S_{t_i} denota a derivada de S com respeito à t_i .

Assim,

$$d\tilde{\psi}_1(T_1\tilde{\mathcal{R}}_1) = \left\{ \left((X_1 \circ H)_{t_1} \cdot t_1\mathcal{M}_r, \dots, (X_r \circ H)_{t_r} \cdot t_r\mathcal{M}_r, \sum_{i=1}^r (X_{r+1} \circ H)_{t_i} \cdot t_i\mathcal{M}_r \right) \right\}.$$



Em termos matriciais, um elemento de $d\tilde{\psi}(T_1\tilde{\mathcal{R}}_1)$ é dado pela transposta de

$$\begin{pmatrix} (X_1 \circ H)_{t_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (X_2 \circ H)_{t_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_{r+1} \circ H)_{t_1} & (X_{r+1} \circ H)_{t_2} & \cdots & (X_{r+1} \circ H)_{t_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_r \end{pmatrix},$$

com $\eta_i \in t_i\mathcal{M}_r$.

De maneira análoga, calculemos $d\psi_1$ nos elementos da base de $T_1\tilde{\mathcal{L}}_1$. Para tanto, tome a curva $\gamma(t) = 1_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + t\delta$, onde $\delta = (0, \dots, \delta_i, \dots, 0)$ em que δ_i satisfaz as condições dadas em (2.5), tal que $\gamma(0) = 1_{\tilde{\mathcal{L}}_1}$ e $\gamma'(0) = \delta$.

Temos assim, a seguinte curva em $J(r, r+1)$:

$$(\psi \circ \gamma)(t) = \psi(1_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + t\delta) = (t_1^n, \dots, t_i^n + t(\delta_i \circ H), \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r)).$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} d\psi_1(\delta) = (\psi \circ \gamma)'(0) &= \frac{\partial}{\partial t} (t_1^n, \dots, t_i^n + t(\delta_i \circ H), \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r)) (0) \\ &= (0, \dots, \delta_i \circ H, \dots, 0). \end{aligned}$$

Logo,

$$d\psi_1(T_1\tilde{\mathcal{L}}_1) = (\delta_1 \circ H, \dots, \delta_{r+1} \circ H)$$

com δ_i satisfazendo as condições dadas em (2.5) para $i = 1, \dots, r+1$.

A análise acima pode ser sintetizada no seguinte resultado.

Proposição 2.6. *O espaço tangente à órbita de H pelo grupo $\tilde{\mathcal{L}}_1 \times \tilde{\mathcal{R}}_1$ é o conjunto dos elementos dados pela transposta de*

$$\begin{pmatrix} (X_1 \circ H)_{t_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (X_2 \circ H)_{t_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_{r+1} \circ H)_{t_1} & (X_{r+1} \circ H)_{t_2} & \cdots & (X_{r+1} \circ H)_{t_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1(H) \\ \delta_2(H) \\ \vdots \\ \delta_{r+1}(H) \end{pmatrix}$$

com $\eta_i = t_i\zeta_i$ com $\zeta_i \in \mathcal{M}_r$ e δ_i satisfazendo as condições dadas em (2.5).

Embora tenhamos descrito o espaço tangente em um elemento da órbita determinada pelo grupo $\tilde{\mathcal{A}}_1$, tal grupo de difeomorfismos não é um grupo de Lie e deste modo, não



podemos aplicar o Teorema da Transversal Completa. Para contornar a situação, consideramos jatos destes elementos. Mais especificamente, se \mathcal{G} é subgrupo de \mathcal{A} , denotamos

$$\mathcal{G}^k = \{j^k g; g \in \mathcal{G}\}$$

que é um grupo de Lie.

Assim, se \mathcal{J}^k denota o conjunto dos k -jatos de parametrizações de hipersuperfícies quase ordinárias, então temos para $g \in \mathcal{G}^k$ e $H \in \mathcal{J}^k$ a ação

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^k \times \mathcal{J}^k &\rightarrow \mathcal{J}^k \\ (g, H) &\mapsto j^k(g \cdot H). \end{aligned}$$

Recordemos que um de nossos objetivos é o de descrever termos elimináveis em uma parametrização de hipersuperfície quase ordinária por meio de mudanças de coordenadas do grupo $\tilde{\mathcal{A}}$. Para a utilização do Teorema da Transversal Completa utilizando o grupo $\tilde{\mathcal{A}}_1^k$ temos algumas hipóteses a serem verificadas e objetos a serem identificados.

Para nossos propósitos fixaremos uma classe topológica, ou equivalentemente, os expoentes característicos generalizados

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_g; \lambda_i \in \mathbb{N}^r \text{ e } n = \deg_{X_{r+1}} f$$

em que $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ é um polinômio de Weierstrass quase ordinário que define uma hipersuperfície quase ordinária dada por uma parametrização normalizada

$$H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r))$$

em que $S(t_1, \dots, t_r) = t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} u$ com $u(\underline{0}) \neq 0$.

Ao agirmos em H elementos $(\sigma, \rho) \in \tilde{\mathcal{A}}_1$, como descritos anteriormente, obtemos uma parametrização

$$H_2 = (t_1^n u_1, \dots, t_r^n u_r, t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} u' + q_{r+1}(H(\rho^{-1}))).$$

Podemos nos concentrar em $q_{r+1} \in \mathcal{M}_{r+1}^2$ tal que $q_{r+1}(H(\rho^{-1}))$ tenha expoente dominante divisível por $t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}}$, ou seja,

$$H_2 = (t_1^n u_1, \dots, t_r^n u_r, t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} u_{r+1})$$

com $u_i(\underline{0}) = 1$ para $i = 1, \dots, r+1$.



Deste modo, as parametrizações de hipersuperfícies quase ordinárias, em que estamos interessados, pertencem ao espaço afim

$$\mathbb{A} = (t_1^n, \dots, t_r^n, t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}}) + V$$

com respeito ao espaço vetorial

$$V = t_1^n \mathcal{M}_r \oplus \dots \oplus t_r^n \mathcal{M}_r \oplus t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} \mathcal{M}_r.$$

Além disto, é imediato verificar que $T_H \tilde{\mathcal{A}}_1^k(H) = j^k T_H \tilde{\mathcal{A}}_1(H)$.

Vamos mostrar que o subespaço de V

$$W_k = \left\{ \begin{array}{l} w = (w_1, \dots, w_r, w_{r+1}) \in V; \quad w_i, \ 1 \leq i \leq r \text{ é homogêneo de grau } k \text{ tal que} \\ w_i = 0 \text{ se } k \leq n \text{ para } 1 \leq i \leq r \quad \text{e } w_{r+1} = 0 \text{ se } k \leq |\lambda_1| = \lambda_{11} + \dots + \lambda_{1r} \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

satisfaz a condição (2.4) do Teorema da Transversal Completa. Para tanto necessitamos de alguns resultados auxiliares.

Lema 2.7. *Sejam $H \in \mathcal{J}^k$, $(\sigma, \rho) \in \tilde{\mathcal{A}}_1^k$ e $w \in W_k$, temos que*

$$j^k((\sigma, \rho) \cdot (H + w)) = j^k((\sigma, \rho) \cdot H) + w + \theta$$

com $\theta = (b_1, \dots, b_r, 0)w_{r+1}$ em que para $1 \leq i \leq r$, $\sigma_i(X_1, \dots, X_{r+1}) = X_i + b_i X_{r+1} + q_i$ tal que $b_i = 0$ e $q_i \in X_i \mathcal{M}_{r+1}$ se $\lambda_{1i} < n$; $q_i \in X_i \mathcal{M}_{r+1} + X_{r+1} \mathcal{M}_{r+1}$ se $\lambda_{1i} \geq n$.

Demonstração. Uma vez que

$$j^k \sigma_i(H + w) \rho^{-1} = j^k \sigma_i(H(\rho^{-1}) + w) = j^k \sigma_i(H(\rho^{-1})) + w_i + b_i w_{r+1}$$

para $1 \leq i \leq r$, temos que

$$\begin{aligned} j^k[(\sigma_i, \rho) \cdot (H + w)] &= j^k[\dots, \sigma_i(H + w) \rho^{-1}, \dots, \sigma_{r+1}(H + w) \rho^{-1}] \\ &= [\dots, j^k \sigma_i(H(\rho^{-1})) + w_i + b_i w_{r+1}, \dots, j^k \sigma_{r+1}(H(\rho^{-1}) + w_{r+1})] \end{aligned}$$

uma vez que $\sigma_{r+1}(X_1, \dots, X_{r+1}) = X_{r+1} + q_{r+1}$ com $q_{r+1} \in \mathcal{M}_{r+1}^2$. Assim,

$$j^k[(\sigma_i, \rho) \cdot (H + w)] = j^k[(\sigma, \rho)(H)] + w + (b_1, \dots, b_r, 0)w_{r+1}$$

□



O próximo lema situa um elemento $\theta = (b_1, \dots, b_r, 0)w_{r+1}$ como descrito no resultado anterior.

Lema 2.8. *Com as notações do lema anterior temos que*

$$\theta = (b_1, \dots, b_r, 0)w_{r+1} \in T_{H+w}\tilde{\mathcal{A}}_1^k(H+w) \cap T_H\tilde{\mathcal{A}}_1^k(H).$$

Demonstração. É suficiente considerarmos $w_{r+1} = t_1^{\beta_1} \dots t_r^{\beta_r}$ com $k = |\beta| > |\lambda_1|$ e $\beta_i \geq \lambda_{1i}$.

Pela Proposição 2.6, temos que $\theta \in T_{H+w'}\tilde{\mathcal{A}}_1^k(H+w')$ com $w' \in W_k$ se, e somente se, existem

- (1) $\eta_i \in t_i\mathcal{M}_r$, para $1 \leq i \leq r$;
- (2) $\delta_i \in X_i\mathcal{M}_{r+1}$ se $\lambda_{1i} < n$ ou $\delta_i \in (X_{r+1}) + X_i\mathcal{M}_{r+1}$ se $\lambda_{1i} \geq n$, para $1 \leq i \leq r$;
- (3) $\delta_{r+1} \in \mathcal{M}_{r+1}^2$

tais que

$$\begin{aligned} b_1 t_1^{\beta_1} \dots t_r^{\beta_r} &= j^k((t_i^n + w'_i)_{t_i} \eta_i + \delta_i(H+w')) \\ &= j^k(nt_i^{n-1} \eta_i + \delta_i(H+w')) \quad \text{para } 1 \leq i \leq r \text{ e} \\ 0 &= j^k \left(\sum_{j=1}^r (S + w'_{r+1})_{t_j} \eta_j + \delta_{r+1}(H+w') \right). \end{aligned}$$

Para tanto, basta considerarmos $\delta_i = 0$ para $i = 1, \dots, r+1$. Além disto, para $1 \leq i \leq r$:

(a) se $\lambda_{1i} < n$, então $b_i = 0$, como já observamos no lema anterior e, neste caso, tomamos $0 = \eta_i \in t_i\mathcal{M}_r$.

(b) se $\lambda_{1i} \geq n$, então como $\beta_i \geq \lambda_{1i} \geq n$, tomamos

$$\eta_i = \frac{b_i}{n} t_1^{\beta_1} \dots t_i^{\beta_i - n + 1} \dots t_r^{\beta_r} \in \mathbb{C}\{t_1, \dots, t_r\}.$$

Se $i > 1$, então como $\beta_1 \geq \lambda_{11} > 0$ temos que $\eta_i \in t_i\mathcal{M}_r$.

Se $i = 1$ e existe $\beta_j > 0$, então $\eta_1 \in t_1\mathcal{M}_r$.

Se $i = 1$ e $0 = \beta_m \geq \lambda_{1m}$ para todo $m > 1$, então $\beta_m = \lambda_{1m} = 0$ para todo $m > 1$ e $\beta_1 \geq \lambda_{11} > n$, que nos dá novamente $\eta_1 \in t_1\mathcal{M}_r$.



Note que, deste modo, em $\sum_{j=1}^r (S + w'_{r+1})_{t_j} \eta_j$ para os índices j tais que $\lambda_{1j} \geq n$, temos

$$(S + w'_{r+1})_{t_j} \eta_j = \frac{\lambda_{1j}}{n} b_j t_1^{\beta_1 + \lambda_{11}} \dots t_j^{\beta_j + \lambda_{1j} - n} \dots t_r^{\beta_r + \lambda_{1r}} u_j$$

com u_j unidade, pois $w'_{r+1} \in W_k$.

Mas,

$$\sum_{l=1}^r (\beta_l + \lambda_{1l}) - n = |\beta| + |\lambda_1| - n \geq k + \lambda_{1i} - n$$

com igualdade se, e somente se, $\lambda_1 = (\lambda_{11}, 0, \dots, 0)$.

Deste modo, se $|\beta| + |\lambda_1| - n > k + \lambda_{1i} - n$, então $|\beta| + |\lambda_1| - n > k$ pois $\lambda_{1i} \geq n$. Se, por outro lado, $|\beta| + |\lambda_1| - n = k + \lambda_{1i} - n$, então $\lambda_1 = (\lambda_{11}, 0, \dots, 0)$ com $\lambda_{11} > n$ e temos $|\beta| + |\lambda_1| - n > k$.

De qualquer modo, temos que

$$j^k \left(\sum_{j=1}^r (S + w'_{r+1})_{t_j} \eta_j + \delta_{r+1}(H + w') \right) = 0,$$

ou seja, $\theta \in T_{H+w'} \tilde{\mathcal{A}}_1(H + w')$ para todo $w' \in W_k$. Em particular, para $w' = 0 \in W_k$ temos $\theta \in T_H \tilde{\mathcal{A}}_1(H)$. Portanto,

$$\theta \in T_{H+w} \tilde{\mathcal{A}}_1^k(H + w) \cap T_H \tilde{\mathcal{A}}_1^k(H).$$

□

Agora estamos aptos a justificar a seguinte proposição:

Proposição 2.9. *Se $H \in \mathcal{J}^k$ e $w \in W_k$, então*

$$T_{H+w} \tilde{\mathcal{A}}_1^k(H + w) = T_H \tilde{\mathcal{A}}_1^k(H).$$

Demonstração. Tomemos $v \in T_{H+w} \tilde{\mathcal{A}}_1^k(H + w)$, então existe uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}_1^k$ definida por $u \mapsto (\sigma_u, \rho_u)$ e tal que $\alpha(0) = (\sigma_0, \rho_0)$ em que σ_0 e ρ_0 indicam a identidade de $\tilde{\mathcal{L}}_1^k$ e $\tilde{\mathcal{R}}_1^k$, respectivamente.

Assim, considerando a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi_{H+w} : \tilde{\mathcal{A}}_1^k &\rightarrow \mathcal{J}^k \\ (\sigma, \rho) &\mapsto (\sigma, \rho) \cdot (H + w) \end{aligned}$$



temos

$$\begin{aligned}
 v = (\Phi_{H+w} \circ \alpha)'(0) &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\Phi_{H+w}(\alpha(u)) - \Phi_{H+w}(\alpha(0))}{\alpha(u) \cdot (H+w) - \alpha(0) \cdot (H+w)} \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{j^k((\sigma_u, \rho_u) \cdot (H+w)) - H-w}{u}.
 \end{aligned}$$

Do Lema 2.7 temos

$$j^k((\sigma_u, \rho_u) \cdot (H+w)) = j^k((\sigma_u, \rho_u) \cdot H) + w + \theta(u)$$

e assim, como $\theta(u) = (b_1(u), \dots, b_r(u), 0)w_{r+1}$ e $b_i(0) = 0$, temos

$$v = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{j^k((\sigma_u, \rho_u) \cdot H) - H}{u} + \frac{\theta(u) - \theta(0)}{u} = (\Phi_H \circ \alpha)'(0) + \theta'(0). \quad (2.12)$$

Mas, pelo Lema 2.8

$$\theta'(0) = (b'_1(0), \dots, b'_r(0), 0)w_{r+1} \in T_{H+w}\tilde{\mathcal{A}}_1^k(H+w) \cap T_H\tilde{\mathcal{A}}_1^k(H).$$

Assim, como $y = (\Phi_H \circ \alpha)'(0) \in T_H\tilde{\mathcal{A}}_1^k(H)$ segue que $v \in T_H\tilde{\mathcal{A}}_1^k(H)$.

Além disto, uma vez que $v \in T_{H+w}\tilde{\mathcal{A}}_1^k(H+w)$, $y = (\Phi_H \circ \alpha)'(0) \in T_H\tilde{\mathcal{A}}_1^k(H)$ e $\theta'(0) \in T_{H+w}\tilde{\mathcal{A}}_1^k(H+w) \cap T_H\tilde{\mathcal{A}}_1^k(H)$, segue de (2.12) que

$$y = v - \theta'(0) \in T_{H+w}\tilde{\mathcal{A}}_1^k(H+w).$$

Portanto, $T_{H+w}\tilde{\mathcal{A}}_1^k(H+w) = T_H\tilde{\mathcal{A}}_1^k(H)$. □

Deste modo, temos que o grupo $\tilde{\mathcal{A}}_1^k$ satisfaz as condições do Teorema da Transversal Completa considerando $W = W_k$ dado em (2.11). Em particular, para todo elemento w de $W_k \cap T_H\tilde{\mathcal{A}}_1^k(H)$ temos que $H' = H+w$ é $\tilde{\mathcal{A}}_1^k$ -equivalente à H . Deste modo, é importante identificarmos os elementos de $W_k \cap T_H\tilde{\mathcal{A}}_1^k(H)$.

Dado $w = (w_1, \dots, w_{r+1}) \in W_k$, temos que $w \in T_H\tilde{\mathcal{A}}_1^k(H)$ se, e somente se, existem $\eta_i = t_i \zeta_i$; $\zeta_i \in \mathcal{M}_r$ e δ_i satisfazendo as condições dadas em (2.5) tais que

$$\begin{aligned}
 w_i &= j^k(nt_i^{n-1}\eta_i + \delta_i(H)) \quad 1 \leq i \leq r \\
 w_{r+1} &= j^k\left(\sum_{j=1}^r S_{t_j}\eta_j + \delta_{r+1}(H)\right).
 \end{aligned}$$



Como, para $1 \leq i \leq r$, temos $w_i \in t_i^n \mathcal{M}_r$, digamos, $w_i = t_i^n \gamma_i$ com $\gamma_i \in \mathcal{M}_r$, basta tomarmos $\delta_i = 0$ e $\eta_i = \frac{1}{n} t_i \gamma_i \in t_i \mathcal{M}_r$ e teremos satisfeitas as r primeiras equações do sistema acima. Observe que se $k \leq n$, então $w_i = 0$ e neste caso, temos $\delta_i = 0$.

Além disto, note que para $j = 1, \dots, r$ a parcela

$$S_{t_j} \eta_j = \frac{1}{n} S_{t_j} t_j \gamma_j$$

é nula se $k \leq n$ e tem multiplicidade $|\lambda_1| + k - n$ se $k > n$.

Note que, se $|\lambda_1| > n$, então $j^k \left(\sum_{j=1}^r S_{t_j} \eta_j + \delta_{r+1}(H) \right) = 0$, isto é, neste caso, temos que todo $(w_1, \dots, w_r, 0) \in W_k$ pertence à $T_H \tilde{\mathcal{A}}_1^k(H)$.

De qualquer modo, o exposto acima garante que para quaisquer $w_i \in t_i^n \mathcal{M}_r$ $1 \leq i \leq r$, existe $(w_1, \dots, w_r, w_{r+1}) \in W_k \cap T_H \tilde{\mathcal{A}}_1^k(H)$.

Observe que desta forma, dado $(\sigma, \rho) \in \tilde{\mathcal{A}}_1^k$ e $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} u)$ com $u(\underline{0}) = 1$, temos que

$$\sigma H \rho^{-1}(t_1, \dots, t_r) = (t_1^n u_1, \dots, t_r^n u_r, t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} u_{r+1})$$

com $u_i(\underline{0}) = 1$. Como $t_i^n u_i = t_i^n + t_i^n \gamma_i$, com $\gamma_i \in \mathcal{M}_r$, tomando $w_i = t_i^n \gamma_i$ temos a existência de $w = (w_1, \dots, w_r, w_{r+1}) \in W_k \cap T_H \tilde{\mathcal{A}}_1^k(H)$, tal que H é $\tilde{\mathcal{A}}_1^k$ -equivalente a parametrização $H' = H + w = (t_1^n, \dots, t_r^n, t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} u')$ com $u'(\underline{0}) = 1$.

No próximo capítulo apresentaremos uma alternativa de como identificar termos da forma $(0, \dots, 0, v)$ que podem ser eliminados de H .

2.3 Homotetias

Um dos nossos objetivos é que, dada uma parametrização de hipersuperfície quase ordinária H , possamos obter uma outra parametrização H_1 que seja \mathcal{A} -equivalente à esta, mas que tenha uma expressão mais simples. Nesta busca determinamos o subgrupo \mathcal{G} de \mathcal{A} que preserva a forma normalizada da parametrização. Este subgrupo e o estudo de r -formas diferenciais que apresentaremos no capítulo seguinte, bem como a relação com o ideal Jacobiano, nos ajudam a identificar termos da parametrização que podem ser eliminados de modo a obtermos uma parametrização que seja equivalente e apresente uma expressão mais simples.

Na seção anterior, expressamos os elementos do grupo $\tilde{\mathcal{A}}$ como composição do grupo $\tilde{\mathcal{A}}_1$ (veja (2.7)) e do grupo \mathcal{H} (veja (2.6)). O grupo $\tilde{\mathcal{A}}_1$ foi considerado anteriormente.



Nesta seção vamos analisar aspectos do grupo \mathcal{H} das homotetias. Embora, como veremos, tal grupo não auxilie na eliminação de termos, ele permite normalizar alguns coeficientes, ou seja, torná-los mônicos.

Consideremos uma parametrização normalizada de hipersuperfície quase ordinária dada por $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S)$ em que $S = t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} + \sum_{i=1}^r a_i t_1^{\zeta_{i1}} \dots t_r^{\zeta_{ir}} + \dots$, ou seja, selecionamos r termos de S em que $a_i \neq 0$. Neste momento, não estamos preocupados se os termos selecionados podem ou não ser eliminados, o objetivo é mostrar que podemos escolher até r elementos em S , além de $t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}}$, de modo a deixá-los mônicos.

Consideremos a homotetia

$$\begin{aligned}\sigma(X_1, \dots, X_{r+1}) &= (m_1 X_1, \dots, m_{r+1} X_{r+1}), \\ \rho^{-1}(t_1, \dots, t_r) &= (s_1 t_1, \dots, s_r t_r).\end{aligned}$$

A ação do par (σ, ρ) sobre H é dada por

$$\begin{aligned}H' &= (\sigma, \rho) \cdot H = \sigma H \rho^{-1}(t_1, \dots, t_r) \\ &= \left(\dots, m_i s_i^n t_i^n, \dots, m_{r+1} \left(\prod_{j=1}^r s_j^{\lambda_{1j}} t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} + \sum_{i=1}^r a_i \prod_{j=1}^r s_j^{\zeta_{ij}} t_1^{\zeta_{i1}} \dots t_r^{\zeta_{ir}} + \dots \right) \right).\end{aligned}$$

Escolhendo $m_i = s_i^{-n}$, para $1 \leq i \leq r$, temos

$$H' = \left(t_1^n, \dots, t_r^n, m_{r+1} \left(\prod_{j=1}^r s_j^{\lambda_{1j}} t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} + \sum_{i=1}^r a_i \prod_{j=1}^r s_j^{\zeta_{ij}} t_1^{\zeta_{i1}} \dots t_r^{\zeta_{ir}} + \dots \right) \right).$$

Consideremos o sistema de r equações em s_i

$$a_i \prod_{j=1}^r s_j^{\zeta_{ij}} = \prod_{j=1}^r s_j^{\lambda_{1j}}, \text{ para } 1 \leq i \leq r, \text{ ou seja, } \prod_{j=1}^r s_j^{\zeta_{ij} - \lambda_{1j}} = a_i^{-1}.$$

Para simplificar a notação denotamos $\alpha_{ij} = \zeta_{ij} - \lambda_{1j}$. Deste modo, temos o sistema:

$$\prod_{j=1}^r s_j^{\alpha_{ij}} = a_i^{-1} \quad 1 \leq i \leq r. \quad (2.13)$$

Aplicando a função logarítmica complexa $f(z) = \log(z)$ nas equações do sistema obtemos

$$\log \left(\prod_{j=1}^r s_j^{\alpha_{ij}} \right) = \sum_{j=1}^r \alpha_{ij} \log(s_j) = \log(a_i^{-1}) \quad 1 \leq i \leq r.$$



Denotando por $b_i = \log(a_i^{-1})$ e $\log(s_j) = w_j$, reescrevemos o sistema acima como o sistema linear

$$b_i = \sum_{j=1}^r \alpha_{ij} w_j. \quad 1 \leq i \leq r. \quad (2.14)$$

Agora selecionamos um subsistema, que admite solução, com número de equações $k \leq r$ máximo que, sem perda de generalidade, podemos assumir que seja composto pelas k primeiras equações.

Deste modo, determinamos $w_j, j = 1, \dots, r$ satisfazendo (2.14) e, como $w_j = \log(s_j)$, num domínio conveniente usando a inversa da função logarítmica, obtemos $s_j, j = 1, \dots, r$ satisfazendo (2.13).

Desta forma, usando os s_i 's obtidos e σ e ρ^{-1} dados por

$$\begin{aligned} \sigma(X_1, \dots, X_{r+1}) &= \left(s_1^{-n} X_1, \dots, s_r^{-n} X_r, \left(\prod_{j=1}^r s_j^{\lambda_{1j}} \right)^{-1} X_{r+1} \right), \\ \rho^{-1}(t_1, \dots, t_r) &= (s_1 t_1, \dots, s_r t_r) \end{aligned} \quad (2.15)$$

agindo na parametrização H da hipersuperfície quase ordinária, obtemos

$$\sigma H \rho^{-1}(t_1, \dots, t_r) = (t_1^n, \dots, t_r^n, t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} + \sum_{i=1}^k t_1^{\zeta_{i1}} \dots t_r^{\zeta_{ir}} + \dots),$$

mostrando que H é \mathcal{A} -equivalente a uma parametrização cujos termos dos expoentes $(\zeta_{i1}, \dots, \zeta_{ir})$, com $i = 1, \dots, k$, são mônicos e que correspondem as k -linhas do sistema (2.14) selecionadas.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.10. Considere a parametrização quase ordinária

$$H = (t_1^3, t_2^3, t_1^3 t_2^4 + 512 t_1^3 t_2^7 + 8 t_1^6 t_2^5 + 8 t_1^9 t_2^6).$$

Considerando os termos $512 t_1^3 t_2^7$ e $8 t_1^6 t_2^5$ temos que o sistema (2.14) associado é

$$\begin{aligned} 0w_1 + 3w_2 &= \log 512^{-1} = -9 \log 2 \\ 3w_1 + 1w_2 &= \log 8^{-1} = -3 \log 2 \end{aligned}$$

cuja solução é

$$0 = w_1 = \log s_1 \text{ e } \log 2^{-3} = w_2 = \log s_2,$$



ou seja, $s_1 = 1$ e $s_2 = 1/8$ são valores para os quais a homotetia descrita em (2.15) nos dá a seguinte parametrização quase ordinária $\tilde{\mathcal{A}}$ -equivalente à H :

$$H' = \left(t_1^3, t_2^3, t_1^3 t_2^4 + t_1^3 t_2^7 + t_1^6 t_2^5 + \frac{1}{8} t_1^9 t_2^6 \right).$$

Por outro lado, se selecionarmos os termos $8t_1^6 t_2^5$ e $8t_1^9 t_2^6$, então obtemos o sistema (2.14)

$$\begin{aligned} 3w_1 + 1w_2 &= \log 8^{-1} \\ 6w_1 + 2w_2 &= \log 8^{-1} \end{aligned}$$

que não admite solução, ou seja, não há homotetia que normaliza simultaneamente os dois termos selecionados.

Podemos resumir o apresentado nesta seção no seguinte resultado.

Proposição 2.11. *Seja $H = \left(t_1^n, \dots, t_r^n, t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} + \sum_{\underline{\zeta} > \lambda_1} a_{\underline{\zeta}} t_1^{\zeta_1} \dots t_r^{\zeta_r} \right)$ uma parametrização quase ordinária. Se $\{\underline{\zeta} - \lambda_1; a_{\underline{\zeta}} \neq 0\}$ é um conjunto linearmente independente de \mathbb{R}^r , então existe uma homotetia que normaliza simultaneamente todos os termos com expoente $\underline{\zeta}$ de H .*

Demonstração. Se $C = \{\underline{\zeta} - \lambda_1; a_{\underline{\zeta}} \neq 0\}$ é um conjunto linearmente independente de \mathbb{R}^r , então $0 < \#C \leq r$. Renomeando os termos de C temos que

$$C = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}, \quad k \leq r.$$

Deste modo, o sistema associado aos termos que determinam o conjunto C admite solução e conseqüentemente, pelo exposto anteriormente, a homotetia obtida pela solução do sistema, normaliza os termos associados ao conjunto C . \square

O conjunto Λ

Neste capítulo vamos apresentar uma caracterização de vetores no espaço tangente descrito no capítulo anterior utilizando r -formas de Kähler. Ademais, estabeleceremos uma conexão entre os elementos do ideal Jacobiano e tais r -formas. Utilizando o módulo das r -formas de Kähler podemos definir um subconjunto $\Lambda_H \subset \mathbb{N}^r$ associado a uma parametrização de hipersuperfície quase ordinária. Tal conjunto, no caso de curvas planas irredutíveis, desempenha papel crucial na classificação analítica veja [12]. Além disto, caracterizaremos para casos particulares, o conjunto de valores Λ_H .

3.1 Espaço Tangente e r -formas

No que segue estamos interessados em apresentar uma caracterização para os vetores tangentes à órbita de uma parametrização de uma hipersuperfície quase ordinária H com respeito ao grupo $\tilde{\mathcal{A}}_1$. Particularmente, vetores da forma $(0, \dots, 0, u)$, pois o conhecimento destes permitirão a eliminação de termos na parametrização H . Tal caracterização será feita utilizando r -formas de Kähler.

Seja $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S)$ com $S = t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} v$, $v(\underline{0}) = 1$ uma parametrização normalizada de uma hipersuperfície quase ordinária determinada por $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ irredutível.

Considerando o grupo $\tilde{\mathcal{A}}_1$ descrito em (2.7), temos

$$\begin{aligned} T_1 \tilde{\mathcal{L}}_1 &= \{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{r+1}), \text{ com } \epsilon_i \text{ satisfazendo as condições dadas em (2.5)}\} \\ T_1 \tilde{\mathcal{R}}_1 &= \bigoplus_{i=1}^r t_i \zeta_i \text{ com } \zeta_i \in \mathcal{M}_r \end{aligned}$$



e $(0, \dots, 0, u) \in T_H \tilde{\mathcal{A}}_1(H)$ se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nt_1^{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & nt_r^{n-1} \\ S_{t_1} & & \cdots & & S_{t_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1(H) \\ \vdots \\ \delta_{r+1}(H) \end{pmatrix},$$

com $\eta_i \in t_i \mathcal{M}_r$ e δ_i satisfazendo as condições dadas em (2.5). Deste modo, tomamos $\eta_i = -\frac{\delta_i(H)}{nt_i^{n-1}}$ e temos:

(a) Se $\lambda_{1i} < n$, então $\delta_i = X_i q_i$ em que $q_i \in \mathcal{M}_{r+1}$ e $\eta_i = -\frac{\delta_i(H)}{nt_i^{n-1}} = -\frac{1}{n} t_i q_i(H) \in t_i \mathcal{M}_r$;

(b) Se $\lambda_{1i} \geq n$, então $\delta_i = b_i X_{r+1} + X_i h_i + X_{r+1} g_i$, $h_i, g_i \in \mathcal{M}_{r+1}$ e

$$\eta_i = -\frac{1}{n} (b_i t_1^{\lambda_{11}} \dots t_i^{\lambda_{1i}-n+1} \dots t_r^{\lambda_{1r}} v + t_i h_i(H) + t_1^{\lambda_{11}} \dots t_i^{\lambda_{1i}-n+1} \dots t_r^{\lambda_{1r}} g_i(H)) \in t_i \mathcal{M}_r.$$

Assim, devemos ter

$$u = \delta_{r+1}(H) - \sum_{i=1}^r \frac{S_{t_i} \delta_i(H)}{nt_i^{n-1}},$$

isto é,

$$u = \frac{n\delta_{r+1}(H)t_1^{n-1} \dots t_r^{n-1} - \sum_{i=1}^r \delta_i(H) S_{t_i} t_1^{n-1} \dots \widehat{t_i^{n-1}} \dots t_r^{n-1}}{nt_1^{n-1} \dots t_r^{n-1}}, \quad (3.1)$$

ou seja,

$$nt_1^{n-1} \dots t_r^{n-1} u = n\delta_{r+1}(H)t_1^{n-1} \dots t_r^{n-1} - \sum_{i=1}^r \delta_i(H) S_{t_i} t_1^{n-1} \dots \widehat{t_i^{n-1}} \dots t_r^{n-1}.$$

Considere $\mathcal{O} = \mathcal{O}_f$ e $\Omega_{\mathcal{O}}^1$ o \mathcal{O} -módulo de diferenciais de Kähler, ou seja, o \mathcal{O} -módulo gerado por dX_1, \dots, dX_{r+1} sujeito à relação $\sum_{i=1}^{r+1} f_{X_i} dX_i = 0$. No que segue vamos considerar o \mathcal{O} -módulo $\Omega_{\mathcal{O}}^r$ das r -formas de Kähler, isto é,

$$\Omega_{\mathcal{O}}^r = \bigwedge_{i=1}^r \Omega_{\mathcal{O}}^1.$$

Note que, se $\omega \in \Omega_{\mathcal{O}}^r$, então

$$\omega = \sum_{i=1}^{r+1} h_i dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1}.$$



Seja $B = \mathbb{C}\{t_1, \dots, t_r\}$ e consideremos Ω_B^r o B -módulo das r -formas diferenciais

$$\Omega_B^r = \{g dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r, g \in B\} (\approx B)$$

que é, em particular, um $\mathbb{C}\{t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r)\}$ -módulo. Deste modo, como por (2.2)

$$H^*(\mathcal{O}) = \mathbb{C}\{t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r)\}$$

temos que Ω_B^r tem estrutura de \mathcal{O} -módulo via H^* .

O monomorfismo de \mathbb{C} -álgebras $H^* : \mathcal{O} \rightarrow B$, apresentado em (2.2), nos dá assim o homomorfismo de \mathcal{O} -módulos

$$\begin{aligned} \psi_H : \Omega_{\mathcal{O}}^r &\rightarrow \Omega_B^r \\ \omega &\mapsto \sum_{i=1}^{r+1} H^*(h_i) \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} dH^*(X_j) \end{aligned} \quad (3.2)$$

em que $\omega = \sum_{i=1}^{r+1} h_i dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_{r+1}$.

Note que, se $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r))$, então

$$\begin{aligned} dH^*(X_j) &= d(t_j^n) = n t_j^{n-1} dt_j, \quad 1 \leq j \leq r \\ dH^*(X_{r+1}) &= d(S(t_1, \dots, t_r)) = \sum_{k=1}^r S_{t_k} dt_k, \end{aligned}$$

Deste modo, para $1 \leq i \leq r$ temos

$$\bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} dH^*(X_j) = (-1)^{r-i} n^{r-1} t_1^{n-1} \dots \widehat{t_i^{n-1}} \dots t_r^{n-1} S_{t_i} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r.$$

Além disto, $\bigwedge_{j=1}^r dH^*(X_j) = n^r t_1^{n-1} \dots t_r^{n-1} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r$. Temos assim,

$$\begin{aligned} \frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r} &= n^r H^*(h_{r+1}) t_1^{n-1} \dots t_r^{n-1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^r (-1)^{r-i} n^{r-1} H^*(h_i) S_{t_i} t_1^{n-1} \dots \widehat{t_i^{n-1}} \dots t_r^{n-1}. \end{aligned}$$

Como, $\psi_H(dX_1 \wedge \dots \wedge dX_r) = n^r t_1^{n-1} \dots t_r^{n-1} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r$ temos a igualdade

$$\frac{\psi_H(\omega)}{\psi_H(dX_1 \wedge \dots \wedge dX_r)} = \frac{n H^*(h_{r+1}) t_1^{n-1} \dots t_r^{n-1} + \sum_{i=1}^r (-1)^{r-i} H^*(h_i) S_{t_i} t_1^{n-1} \dots \widehat{t_i^{n-1}} \dots t_r^{n-1}}{n t_1^{n-1} \dots t_r^{n-1}}.$$



Comparando com (3.1) temos que a igualdade

$$\frac{\psi_H(\omega)}{\psi_H(dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_r)} = u; (0, \dots, 0, u) \in T_H \tilde{\mathcal{A}}_1(H)$$

se tomarmos $\delta_{r+1} = h_{r+1}$ e $\delta_i = (-1)^{r-i+1}h_i$, $1 \leq i \leq r$ pertencendo aos conjuntos convenientes que descrevem os elementos do grupo $\tilde{\mathcal{A}}_1$.

O exposto acima pode ser resumido no seguinte teorema:

Teorema 3.1. *Seja $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r))$ uma parametrização de uma hipersuperfície quase ordinária normalizada. Temos que $(0, \dots, 0, u) \in T_H \tilde{\mathcal{A}}_1(H)$ se, e somente se, existe $\omega = \sum_{i=1}^{r+1} h_i dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1} \in \Omega_{\mathcal{O}}^r$ tal que $\psi_H(\omega) = u\psi_H(dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_r)$ com $\delta_{r+1} = h_{r+1}$ e $\delta_i = (-1)^{r-i+1}h_i$, $1 \leq i \leq r$ e δ_i satisfazendo as condições dadas em (2.5).*

Ainda considerando o homomorfismo de \mathcal{O} -módulos dado em (3.2) e dado $\omega \in \Omega_{\mathcal{O}}^r$, denotamos

$$V_{\mathcal{N}}(\omega) := \left\{ \underline{\delta}; \underline{\delta} \text{ é vértice do poliedro de Newton de } \frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r} \right\}.$$

Claramente, se $\frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r}$ admite expoente dominante $\underline{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_r)$, ou seja, se $\nu \left(\frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r} \right) = (\delta_1, \dots, \delta_r)$, o poliedro de Newton correspondente tem um único vértice que é justamente $\underline{\delta}$. Este fato será usado ao longo do texto evidenciado pela notação $\sharp V_{\mathcal{N}}(\omega) = 1$. Além disto, indicaremos $\nu(\omega) = \nu \left(\frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r} \right) + (\underline{1})$.

Similarmente ao caso do semigrupo de uma hipersuperfície quase ordinária, definimos os conjuntos $\Lambda_{\mathcal{N}}$ e $\Lambda_{\mathcal{D}}$, respectivamente, por

$$\Lambda_{\mathcal{N}}(H) = \Lambda_{\mathcal{N}} = \{ \underline{\delta} + (\underline{1}); \underline{\delta} \in V_{\mathcal{N}}(\omega) \text{ para todo } \omega \in \Omega_{\mathcal{O}}^r \setminus \ker(\psi_H) \}$$

e

$$\Lambda_{\mathcal{D}}(H) = \Lambda_{\mathcal{D}} = \left\{ \underline{\delta} + (\underline{1}); \underline{\delta} = \nu \left(\frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r} \right) \text{ e } \sharp V_{\mathcal{N}}(\omega) = 1 \text{ para } \omega \in \Omega_{\mathcal{O}}^r \setminus \ker(\psi_H) \right\}.$$

No caso do semigrupo de uma hipersuperfície quase ordinária H , González-Pérez (em [8]) e Popescu-Pampu (em [21]) introduzem os conjuntos $\Gamma_{\mathcal{N}}$ e $\Gamma_{\mathcal{D}}$ e mostram que $\Gamma_{\mathcal{N}} = \Gamma_{\mathcal{D}}$ (veja Capítulo 1). No caso dos conjuntos $\Lambda_{\mathcal{N}}$ e $\Lambda_{\mathcal{D}}$ é óbvio que $\Lambda_{\mathcal{D}} \subseteq \Lambda_{\mathcal{N}}$. No entanto, não podemos garantir a igualdade. De fato, o próximo exemplo ilustra o fato de que esta inclusão pode ser estrita.



Exemplo 3.2. Consideremos a parametrização quase ordinária dada por

$$H = (t_1^3, t_2^3, t_1^{13}t_2^{12} + t_1^{14}t_2^{21} + t_1^{17}t_2^{18} + at_1^{20}t_2^{15}).$$

Neste caso, temos $\lambda_1 = (\lambda_{11}, \lambda_{12}) = (13, 12)$.

Consideremos a 2-forma

$$\omega = \alpha_1 X_1 dX_2 \wedge dX_3 + \alpha_2 X_2 dX_1 \wedge dX_3 + \alpha_3 X_3 dX_1 \wedge dX_2.$$

Tomando $\alpha_3 = -\frac{1}{3}(-\lambda_{11}\alpha_1 + \lambda_{12}\alpha_2) = \frac{13}{3}\alpha_1 - 4\alpha_2$ obtemos,

$$\frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge dt_2} = 3t_1^{15}t_2^{14} \left((9\alpha_2 - \alpha_1)t_1 t_2^9 + (6\alpha_2 - 4\alpha_1)t_1^4 t_2^6 + (3\alpha_2 - 7\alpha_1)at_1^7 t_2^3 \right).$$

Note que, se $a = 0$ então, embora $\frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge dt_2}$ não tenha expoente dominante, podemos obter 2-formas com expoentes dominantes que correspondem precisamente aos vértices do poliedro de Newton de $\frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge dt_2}$.

De fato, considere,

$$\omega' = \frac{3}{2}\beta X_1 dX_2 \wedge dX_3 + \beta X_2 dX_1 \wedge dX_3 + \frac{5}{2}\beta X_3 dX_1 \wedge dX_2$$

com $\beta \neq 0$ e teremos

$$\frac{\psi_H(\omega')}{dt_1 \wedge dt_2} = -90\beta t_1^{19}t_2^{20}.$$

Agora tomando $\beta = \frac{3\alpha_2 - 2\alpha_1}{15}$, temos que $\omega - \omega'$ tem expoente dominante (16, 23).

Por outro lado, se $a \neq 0$, então não temos uma 2-forma com expoente dominante (16, 23) $\notin \Gamma_H$. De fato, consideremos uma 2-forma geral, que é dada por

$$\eta = h_1 dX_2 \wedge dX_3 + h_2 dX_1 \wedge dX_3 + h_3 dX_1 \wedge dX_2$$

com $h_i \in \mathcal{O}$.

Como

$$\frac{\psi_H(\eta)}{dt_1 \wedge dt_2} = h_1(H) \frac{\psi_H(dX_2 \wedge dX_3)}{dt_1 \wedge dt_2} + h_2(H) \frac{\psi_H(dX_1 \wedge dX_3)}{dt_1 \wedge dt_2} + h_3(H) \frac{\overbrace{\psi_H(dX_1 \wedge dX_2)}^{9t_1^2 t_2^2}}{dt_1 \wedge dt_2},$$

$$\frac{\psi_H(dX_2 \wedge dX_3)}{dt_1 \wedge dt_2} = -39t_1^{12}t_2^{14} - 42t_1^{13}t_2^{23} - 51t_1^{16}t_2^{20} - 60at_1^{19}t_2^{17}$$



e

$$\frac{\psi_H(dX_1 \wedge dX_3)}{dt_1 \wedge dt_2} = 36t_1^{15}t_2^{11} + 63t_1^{16}t_2^{20} + 54t_1^{19}t_2^{17} + 45at_1^{22}t_2^{14},$$

é suficiente considerarmos $h_1 = c_0 + c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_2^2 + c_4X_2^3$,

$h_2 = e_0 + e_1X_2 + e_2X_2^2 + e_3X_2^3 + e_4X_2^4$ e $h_3 = \sum b_{i_1i_2i_3}X_1^{i_1}X_2^{i_2}X_3^{i_3}$ tais que

$$\begin{cases} i_3 \in \{0, 1\}, \\ i_1 = i_2 = 0 \quad \text{se } i_3 = 1, \\ 0 \leq i_1 \leq 4, \quad 0 \leq i_2 \leq 7 \text{ se } i_3 = 0, \end{cases}$$

uma vez que quaisquer outros termos em h_1, h_2 e h_3 produzem somente termos de ordem superior à (16, 23).

Agora, compondo h_i com H e expandindo $\frac{\psi_H(\eta)}{dt_1 \wedge dt_2}$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\psi_H(\eta)}{dt_1 \wedge dt_2} &= (c_0 + c_1t_1^3 + c_2t_2^3 + c_3t_2^6 + c_4t_2^9)(-39t_1^{12}t_2^{14} - 42t_1^{13}t_2^{23} - 51t_1^{16}t_2^{20} - 60at_1^{19}t_2^{17}) + \\ &+ \left(\sum_{i=1}^4 e_i t_2^{3i} \right) (36t_1^{15}t_2^{11} + 63t_1^{16}t_2^{20} + 54t_1^{19}t_2^{17} + 45at_1^{22}t_2^{14}) + \\ &+ \left(\sum_{\substack{0 \leq i_1 \leq 4 \\ 0 \leq i_2 \leq 7}} b_{i_1i_2} t_1^{\beta_{i_1}} t_2^{\beta_{i_2}} + b_{001}(t_1^{13}t_2^{12} + t_1^{14}t_2^{21} + t_1^{17}t_2^{18} + at_1^{20}t_2^{15}) \right) (9t_1^2t_2^2). \end{aligned}$$

Para que a ordem em t_1 seja igual ou maior a 16, devemos considerar

$$\begin{aligned} b_{0i0} &= 0 \quad \forall i = 0, \dots, 7 && \text{para anular termos com } t_1^2, \\ b_{1i0} &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, 7 && \text{para anular termos com } t_1^5, \\ b_{2i0} &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, 7 && \text{para anular termos com } t_1^8, \\ b_{3i0} &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, 7 && \text{para anular termos com } t_1^{11}, \\ c_0 = c_2 = c_3 = c_4 &= 0 && \text{para anular termos com } t_1^{12}, \\ b_{4i0} &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, 7 && \text{para anular termos com } t_1^{14}, \\ e_0 = e_2 = e_3 = e_4 = 0 & \quad b_{001} = \frac{13}{3}c_1 - 4e_1 && \text{para anular termos com } t_1^{15}. \end{aligned}$$

Com as considerações anteriores, o termo de menor ordem em t_2 é $a(9e_1 - 21c_1)t_1^{22}t_2^{16}$.

Se $a \neq 0$, então devemos considerar

$$e_1 = \frac{7}{3}c_1 \text{ para anular termos com } t_2^{17} \tag{3.3}$$

e

$$c_1 = 0 \text{ para anular termos com } t_2^{20}.$$



Mas com isso, anulamos $\frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge dt_2}$, isto é, não temos expoente dominante (16, 23).

O fato de $a \neq 0$ é extremamente importante pois, se $a = 0$ não temos a condição (3.3) e conseguiremos obter a ordem que queremos como expoente dominante. Neste caso, sendo $a \neq 0$ obtemos uma 2-forma η tal que $(16, 23) \in \Lambda_{\mathcal{N}}$, mas $(16, 23) \in \Lambda_{\mathcal{N}} \setminus \Lambda_{\mathcal{D}}$.

Observação 3.3. Em virtude do Teorema 2.4 e do Teorema 3.1, podemos obter parametrizações quase ordinárias equivalentes com k -jatos contendo uma quantidade menor de termos. De fato, se $(0, \dots, 0, u) \in W_k$, como descrito em (2.11), é tal que $\psi_H(\omega) = u\psi_H(dX_1 \wedge \dots \wedge dX_r)$ com $\omega = \sum_{i=1}^{r+1} h_i dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_{r+1} \in \Omega_{\mathcal{O}}^r$ com h_i satisfazendo as condições dadas em (2.5), então

$$H \text{ é } \tilde{\mathcal{A}}_1\text{-equivalente à } H + (0, \dots, 0, u).$$

3.2 O ideal Jacobiano e r -formas diferenciais

Seja $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ um polinômio de Weierstrass de grau n que define uma hipersuperfície quase ordinária.

Nesta seção, vamos considerar o ideal Jacobiano de f (em \mathcal{O})

$$J(f) := \langle f_{X_1}, \dots, f_{X_{r+1}} \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{r+1} h_i f_{X_i}; h_i \in \mathcal{O} \right\}$$

e relacioná-lo com $\Omega_{\mathcal{O}}^r$.

Considerando uma parametrização quase ordinária de f dada por

$$H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r))$$

temos

$$\begin{aligned} \Delta_{X_{r+1}} f &= X_1^{\delta_1} \dots X_r^{\delta_r} u \\ &= R_{X_{r+1}}(f, f_{X_{r+1}}) \\ &= \prod_{i=1}^n f_{X_{r+1}}(X_1, \dots, X_r, \xi_i) \end{aligned} \tag{3.4}$$

em que $\xi_i(X_1, \dots, X_r) \in \mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{n}}, \dots, X_r^{\frac{1}{n}}\}$ é uma raiz de f e $\xi_1(t_1^n, \dots, t_r^n) = S$.

Como estamos tratando com domínios de fatoração única, temos que

$$f_{X_{r+1}}(X_1, \dots, X_r, \xi_1) = X_1^{\frac{k_1}{n}} \dots X_r^{\frac{k_r}{n}} u',$$



ou seja,

$$f_{X_{r+1}}(H) = f_{X_{r+1}}(t_1^n, \dots, t_r^n, S) = t_1^{k_1} \dots t_r^{k_r} u'(H),$$

isto é, $f_{X_{r+1}}$ tem expoente dominante.

Por (1.3) temos, usando (3.4), que o expoente dominante de $f_{X_{r+1}}(H)$ é

$$\sum_{i=1}^g (n_i - 1) \nu_{r+i},$$

em que ν_{r+i} é dado como em (1.5).

Seja $\Omega^1 := \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{r+1}\}dX_1 + \dots + \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{r+1}\}dX_{r+1}$, consideremos a diferencial de f , ou seja, $df = \sum_{j=1}^{r+1} f_{X_j} dX_j \in \Omega^1$ e tomemos as r -formas diferenciais em

$\bigwedge_{i=1}^r \Omega^1$:

$$\begin{aligned} \omega_i &= df \wedge dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_r \wedge \widehat{dX_{r+1}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{r+1} f_{X_j} dX_j \right) \wedge dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_r \wedge \widehat{dX_{r+1}} \\ &= f_{X_i} dX_i \wedge dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_r \\ &\quad + f_{X_{r+1}} dX_{r+1} \wedge dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_r \\ &= (-1)^{i-1} f_{X_i} dX_1 \wedge \dots \wedge dX_r \\ &\quad + (-1)^{r-1} f_{X_{r+1}} dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_{r+1} \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq r$.

Como $f(H) = 0$, então $df(H) = 0$, ou seja, $df = 0$ em $\Omega_{\mathcal{O}}^1$ e $\omega_i = 0$ em $\Omega_{\mathcal{O}}^r$, e deste modo temos

$$\begin{aligned} 0 &= \psi_H(\omega_i) \\ &= (-1)^{i-1} f_{X_i}(H) n^r t_1^{n-1} \dots t_r^{n-1} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r \\ &\quad + (-1)^{r-1} f_{X_{r+1}}(H) n^{r-1} t_1^{n-1} \dots \widehat{t_i^{n-1}} \dots t_r^{n-1} (-1)^{r-i} S_{t_i} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r \\ &= n^{r-1} (-1)^{i-1} t_1^{n-1} \dots \widehat{t_i^{n-1}} \dots t_r^{n-1} (f_{X_i}(H) n t_i^{n-1} + f_{X_{r+1}}(H) S_{t_i}) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r \end{aligned}$$

em que S_{t_i} indica a derivada de S com respeito à t_i . Assim, temos que

$$f_{X_i}(H) n t_i^{n-1} = -f_{X_{r+1}}(H) S_{t_i}. \quad (3.5)$$

Se $V_{\mathcal{N}}(h)$ denota o conjunto dos vértices do poliedro de Newton de h , então

$$V_{\mathcal{N}}(f_{X_i}(H)) = V_{\mathcal{N}}(S_{t_i}) + \sum_{i=1}^g (n_i - 1) \nu_{r+i} - (n - 1) \theta_i. \quad (3.6)$$



Em particular, se S_{t_i} tiver expoente dominante, que ocorre sempre que $\lambda_{1i} \neq 0$, então $f_{X_i}(H)$ também possui.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.4. Consideremos $f = X_{r+1}^n - X_1^{\lambda_{11}} \cdots X_r^{\lambda_{1r}}$ que admite a parametrização $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, t_1^{\lambda_{11}} \cdots t_r^{\lambda_{1r}})$.

Neste caso, temos que $n = n_1$, $g = 1$, $\nu_{r+1} = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1r})$ e

- $f_{X_{r+1}}(H) = nX_{r+1}^{n-1}$ que tem expoente dominante $(n-1)(\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1r}) = (n-1)\nu_{r+1}$;
- $f_{X_i}(H) = -\lambda_{1i}X_1^{\lambda_{11}} \cdots X_i^{\lambda_{1i}-1} \cdots X_r^{\lambda_{1r}}$ e assim, se $\lambda_{1i} \neq 0$, então

$$n(\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1i} - 1, \dots, \lambda_{1r}) = \nu_{\mathcal{N}}(S_{t_i}) + (n-1)\nu_{r+1} - (n-1)\theta_i.$$

Exemplo 3.5. Seja $f = X_3^2 - 2X_1^3X_2X_3 - 2X_1^3X_2 - X_1^3X_2^4 + X_1^6X_2^2 - X_1^3$ que admite a parametrização $H = (t_1^2, t_2^2, t_1^3 + t_1^3t_2^4 + t_1^6t_2^2)$. Temos que $n = n_1 = 2$ e $\nu_3 = (3, 0)$.

Neste caso, temos:

- $f_{X_3} = 2X_3 - 2X_1^3X_2$ e $f_{X_3}(H) = t_1^3(2 + 2t_2^4)$ que possui expoente dominante $(3, 0)$.

- $f_{X_1} = -6X_1^2X_2X_3 - 6X_1^2X_2^2 - 3X_1^2X_2^4 + 6X_1^5X_2^2 - 3X_1^2$ e

$$f_{X_1}(H) = -6t_1^7t_2^2 - 6t_1^7t_2^6 - 3t_1^4 - 6t_1^4t_2^4 - 3t_1^4t_2^8 = t_1^4(-3 - 6t_2^4 - 3t_2^8 - 6t_1^3t_2^2 - 6t_1^3t_2^6)$$

que tem expoente dominante $(4, 0) = V_{\mathcal{N}}(S_{t_1}) + \nu_3 - \theta_1 = (2, 0) + (3, 0) - (1, 0)$.

- $f_{X_2} = -2X_1^3X_3 - 4X_1^3X_2 - 4X_1^3X_2^3 + 2X_1^6X_2$ e $f_{X_2}(H) = -2t_1^9 - 2t_1^9t_2^4 - 4t_1^6t_2^2 - 4t_1^6t_2^6$. Note que como em (3.6) temos $\{(9, 0), (6, 2)\} = V_{\mathcal{N}}(f_{X_2}) = V_{\mathcal{N}}(S_{t_2}) + (3, 0) - (0, 1) = \{(3, 3), (6, 1)\} + (3, -1)$.

No que segue vamos explorar a relação de $J(f)$ com $\Omega_{\mathcal{O}}^r$ por meio do seguinte homomorfismo sobrejetor de \mathcal{O} -módulos

$$\begin{aligned} \Psi : \Omega_{\mathcal{O}}^r &\rightarrow J(f) \\ \omega = \sum_{i=1}^{r+1} h_i dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1} &\mapsto \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{r+1-i} h_i f_{X_i}. \end{aligned}$$



Observação 3.6. Dada uma r -forma

$$\omega' = \sum_{i=1}^{r+1} h'_i dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX}_i \wedge \dots \wedge dX_{r+1} \in \Omega^r = \bigwedge_{i=1}^r \Omega^1,$$

com $h'_i \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{r+1}\}$, temos que

$$\begin{aligned} \omega' \wedge df &= \left(\sum_{i=1}^{r+1} h'_i dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX}_i \wedge \dots \wedge dX_{r+1} \right) \wedge \left(\sum_{i=1}^{r+1} f_{X_i} dX_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{r+1} h'_i f_{X_i} dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX}_i \wedge \dots \wedge dX_{r+1} \wedge dX_i \\ &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{r+1-i} h'_i f_{X_i} dX_1 \wedge \dots \wedge dX_{r+1}. \end{aligned}$$

Deste modo, se $h_i \in \mathcal{O}$ é a imagem de h'_i pelo epimorfismo canônico

$$\pi : \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{r+1}\} \rightarrow \mathcal{O}_f = \frac{\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{r+1}\}}{\langle f \rangle},$$

então considerando

$$\omega = \sum_{i=1}^{r+1} h_i dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX}_i \wedge \dots \wedge dX_{r+1} \in \Omega^r_{\mathcal{O}}$$

temos que

$$\Psi(\omega) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{r+1-i} h_i f_{X_i} = \pi \left(\frac{\omega' \wedge f}{dX_1 \wedge \dots \wedge dX_{r+1}} \right).$$

Mais especificamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.7. *Seja $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ um polinômio de Weierstrass que define uma hipersuperfície quase ordinária com parametrização $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r))$. Com as notações acima, temos que*

$$\frac{\psi_H(\omega)}{\psi_H(dX_1 \wedge \dots \wedge dX_r)} = \frac{H^*(\Psi(\omega))}{H^*(f_{X_{r+1}})}.$$

Em particular, $V_{\mathcal{N}}(\Omega^r_{\mathcal{O}}) = V_{\mathcal{N}}(H^*(J(f))) - \mathcal{F}_H - (\underline{1})$, em que \mathcal{F}_H é o vetor de Frobenius de Γ_H e H^* é como em (2.1).



Demonstração. Note que a imagem de $\omega = \sum_{i=1}^{r+1} h_i dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_{r+1} \in \Omega_{\mathcal{O}}^r$ por Ψ também pode ser obtida, segundo a Observação 3.6, a partir da r -forma diferencial $\omega' = \sum_{i=1}^{r+1} h'_i dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_{r+1} \in \Omega^r$. De fato, temos que

$$\pi \left(\frac{\omega' \wedge df}{dX_1 \wedge \dots \wedge dX_{r+1}} \right) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{r+1-i} h_i f_{X_i} = \Psi(\omega).$$

Além disto, dado $\omega = \sum_{i=1}^{r+1} h_i dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_{r+1} \in \Omega_{\mathcal{O}}^r$ temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r} &= h_{r+1}(H) n^r t_1^{n-1} \dots t_r^{n-1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^r (-1)^{r-i} h_i(H) n^{r-1} t_1^{n-1} \dots \widehat{t_i^{n-1}} \dots t_r^{n-1} S_{t_i}. \end{aligned}$$

Agora por (3.5), temos que

$$S_{t_i} = -\frac{f_{X_i}(H) n t_i^{n-1}}{f_{X_{r+1}}(H)} \in \mathbb{C}\{t_1, \dots, t_r\}$$

e substituindo em $\frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r} &= h_{r+1}(H) n^r t_1^{n-1} \dots t_r^{n-1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^r (-1)^{r+1-i} h_i(H) n^r t_1^{n-1} \dots t_r^{n-1} \frac{f_{X_i}(H)}{f_{X_{r+1}}(H)} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{r+1-i} h_i(H) f_{X_i}(H) \right) n^r \frac{t_1^{n-1} \dots t_r^{n-1}}{f_{X_{r+1}}(H)}. \end{aligned}$$

Deste modo, temos que

$$\frac{\psi_H(\omega)}{\psi_H(dX_1 \wedge \dots \wedge dX_r)} = \frac{H^*(\Psi(\omega))}{H^*(f_{X_{r+1}})}$$

e

$$V_{\mathcal{N}}(\omega) = V_{\mathcal{N}}(H^*(\Psi(\omega))) - \sum_{i=1}^g (n_i - 1) \nu_{r+i} + (n - 1),$$

ou seja,

$$V_{\mathcal{N}}(\Omega_{\mathcal{O}}^r) = V_{\mathcal{N}}(H^*(J(f))) - \mathcal{F}_H - (1).$$

□



O teorema anterior estabelece uma relação entre os vetores $(0, \dots, 0, u) \in T_H \tilde{\mathcal{A}}_1(H)$, r -formas e o ideal Jacobiano $J(f)$ de uma hipersuperfície quase ordinária definida por $f = 0$ com parametrização H .

Corolário 3.8. *Com as notações anteriores, temos que*

$$\ker(\psi_H) = \ker(\Psi).$$

Demonstração. Pelo teorema anterior, temos que $\omega \in \ker(\psi_H)$ se, e somente se, $H^*(\Psi(\omega)) = 0$. Mas $H^* : \mathcal{O}_f \rightarrow B$ é um monomorfismo, ou seja, $\Psi(\omega) = 0$. \square

Podemos ainda, reinterpretar $\ker(\Psi)$ ($= \ker(\psi_H)$) em termos do submódulo T de torção de $\Omega_{\mathcal{O}}^r$, ou seja,

$$T = \{\omega \in \Omega_{\mathcal{O}}^r; \exists h \in \mathcal{O}_f \setminus \{0\} \text{ e } h\omega = 0\}.$$

Proposição 3.9. *O núcleo do homomorfismo $\Psi : \Omega_{\mathcal{O}}^r \rightarrow J(f)$ definido anteriormente é precisamente o submódulo de torção T de $\Omega_{\mathcal{O}}^r$, ou seja,*

$$T = \ker(\Psi).$$

Demonstração. Seja $\omega \in T$, então existe $h \in \mathcal{O}_f \setminus \{0\}$ tal que $h\omega = 0$. Deste modo,

$$0 = \Psi(h\omega) = h\Psi(\omega).$$

Sendo \mathcal{O}_f um domínio e $h \in \mathcal{O}_f \setminus \{0\}$, segue que $\Psi(\omega) = 0$, isto é, $\omega \in \ker(\Psi)$.

Reciprocamente, seja $\omega = \sum_{i=1}^{r+1} h_i dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_{r+1} \in \ker(\Psi)$. Como em $\Omega_{\mathcal{O}}^r$, temos

$$\begin{aligned} 0 = \omega_i &= df \wedge dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_r \wedge \widehat{dX_{r+1}} \\ &= (-1)^{i-1} f_{X_i} dX_1 \wedge \dots \wedge dX_r \\ &\quad + (-1)^{r-1} f_{X_{r+1}} dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_{r+1}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

ou seja,

$$(-1)^{r-i+1} f_{X_i} dX_1 \wedge \dots \wedge dX_r = f_{X_{r+1}} dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_{r+1} \quad (3.8)$$

em $\Omega_{\mathcal{O}}^r$.



Deste modo, como $0 = \Psi(\omega) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{r-i+1} h_i f_{X_i}$ em \mathcal{O}_f , temos em $\Omega_{\mathcal{O}}^r$

$$\begin{aligned}
 0 &= \Psi(\omega) dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_r \\
 &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{r-i+1} h_i f_{X_i} dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_r \\
 &\stackrel{(3.8)}{=} \sum_{i=1}^{r+1} f_{X_{r+1}} h_i dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1} \\
 &= f_{X_{r+1}} \left(\sum_{i=1}^{r+1} h_i dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1} \right) \\
 &= f_{X_{r+1}} \omega.
 \end{aligned}$$

Portanto, como $f_{X_{r+1}} \neq 0$ em \mathcal{O} , temos que $\omega \in T$. □

Como corolário, temos que

Corolário 3.10. *Como \mathcal{O} -módulos temos que*

$$\frac{\Omega_{\mathcal{O}}^r}{T} \approx J(f).$$

Demonstração. Segue do fato de que $\Psi : \Omega_{\mathcal{O}}^r \rightarrow J(f)$ é um epimorfismo e da proposição anterior, isto é, $\ker(\Psi) = T$. □

Exemplo 3.11. Considere $f = X_{r+1}^n - X_1^{\lambda_{11}} \cdots X_r^{\lambda_{1r}}$ com $n \geq 2$ cuja parametrização é $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, t_1^{\lambda_{11}} \cdots t_r^{\lambda_{1r}})$. Temos que, se $1 \leq i \leq r$ e $\lambda_{1i} \neq 0$, então

$$\omega = \lambda_{1i} X_{r+1} dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_r + (-1)^{r-i} n X_i dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1} \in T \subset \Omega_{\mathcal{O}}^r.$$

De fato, como $\psi_H(\omega) = 0$, temos que $\omega \in \ker(\psi_H) = \ker(\Psi) = T$. Podemos ainda, constatar que em $\bigwedge_{i=1}^r \Omega^1$ temos

$$\begin{aligned}
 \omega \wedge df &= n \lambda_{1i} X_{r+1}^n dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_r \wedge dX_{r+1} - n \lambda_{1i} X_1^{\lambda_{11}} \cdots X_r^{\lambda_{1r}} dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_{r+1} \\
 &= n \lambda_{1i} f dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_{r+1},
 \end{aligned}$$



ou ainda, em $\Omega_{\mathcal{O}}^r$

$$\begin{aligned}
f_{X_{r+1}}\omega &= nX_{r+1}^{n-1} (\lambda_{1i}X_{r+1}dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_r \\
&\quad + (-1)^{r-i}nX_i dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1}) \\
&= n (\lambda_{1i}X_{r+1}^n dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_r \\
&\quad + (-1)^{r-i}nX_i X_{r+1}^{n-1} dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1}) \\
&= n (\lambda_{1i}X_1^{\lambda_{11}} \dots X_r^{\lambda_{1r}} dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_r \\
&\quad + (-1)^{r-i}nX_i X_{r+1}^{n-1} dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1}) \\
&= (-1)^{1-i}nX_i ((-1)^{i-1}f_{X_i}dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_r \\
&\quad + (-1)^{r-1}f_{X_{r+1}}dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1}) \\
&= (-1)^{1-i}nX_i df \wedge dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_r \wedge \widehat{dX_{r+1}} = 0
\end{aligned}$$

em que a penúltima igualdade segue de (3.7).

Do mesmo modo, podemos mostrar que $X_{r+1}^k\omega$ com $k = 0, \dots, n-2$ é um elemento de T , uma vez que $nX_{r+1}^{n-1-k}(X_{r+1}^k\omega) = nX_{r+1}^{n-1}\omega = f_{X_{r+1}}\omega = 0$ em $\Omega_{\mathcal{O}}^r$.

Exemplo 3.12. Se $r = 2$ e $\lambda_{11} = \lambda_{12} = 1$, ou seja, $f = X_3^n - X_1X_2$, então a superfície quase ordinária determinada por f tem singularidade isolada e T é cíclico, uma vez que f é quase homogêneo (veja [18]).

Note que, em $\Omega_{\mathcal{O}}^2$, temos que

$$\begin{aligned}
\omega' &= X_3dX_1 \wedge dX_2 - nX_1dX_2 \wedge dX_3 \in T \\
\omega'' &= X_3dX_1 \wedge dX_2 + nX_2dX_1 \wedge dX_3 \in T
\end{aligned}$$

são iguais. De fato, como

$$\begin{aligned}
0 &= df \wedge dX_3 \\
&= f_{X_1}dX_1 \wedge dX_3 + f_{X_2}dX_2 \wedge dX_3 + f_{X_3}dX_3 \wedge dX_3 \\
&= -X_2dX_1 \wedge dX_3 - X_1dX_2 \wedge dX_3 \\
&= \frac{1}{n}(\omega'' - \omega'),
\end{aligned}$$

segue que $\omega' = \omega''$ em $\Omega_{\mathcal{O}}^2$. Além disto,

$$\begin{aligned}
X_2\omega' &= X_2(X_3dX_1 \wedge dX_2 + nX_1dX_2 \wedge dX_3) \\
&= X_3(X_2dX_1 \wedge dX_2 + nX_3^{n-1}dX_2 \wedge dX_3) \\
&= -X_3(df \wedge dX_2) = 0
\end{aligned}$$



e

$$\begin{aligned}
 X_1\omega' &= X_1\omega'' \\
 &= X_1(X_3dX_1 \wedge dX_2 - nX_2dX_1 \wedge dX_3) \\
 &= X_3(X_1dX_1 \wedge dX_2 - nX_3^{n-1}dX_1 \wedge dX_3) \\
 &= -X_3(dX_1 \wedge df) = 0.
 \end{aligned}$$

Temos que dado $\omega \in T$, como T é cíclico, então $\omega = h\omega'$ com $h = \sum a_{ijk}X_1^iX_2^jX_3^k$. Deste modo, segue da análise acima e do exemplo anterior, que

$$\omega = h\omega' = \sum a_{ijk}X_1^iX_2^jX_3^k\omega' = \sum_{k=0}^{n-2} X_3^k\omega',$$

ou seja,

$$\dim_{\mathbb{C}} T = n - 1 = \mu_f = \tau_f = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{X_1, X_2, X_3\}}{\langle f_{X_1}, f_{X_2}, f_{X_3} \rangle}.$$

Por outro lado, se $r > 2$ ou $\max_{1 \leq i \leq r} \{\lambda_{1i}\} > 1$, então $X_1^k\omega' \in T$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$\dim_{\mathbb{C}} T = \infty = \mu_f = \tau_f.$$

3.3 Conjunto Λ versus semigrupo Γ

Seja $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r))$ uma parametrização de hipersuperfície quase ordinária com semigrupo $\Gamma_H = \langle \nu_1, \dots, \nu_r, \nu_{r+1}, \dots, \nu_{r+g} \rangle$. Nesta seção vamos realizar uma análise sobre o conjunto $\Lambda_{\mathcal{N}}(H)$.

Temos que $\{dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_{r+1}; i = 1, \dots, r+1\}$ é um conjunto de geradores para $\Omega_{\mathcal{O}}^r$ como \mathcal{O} -módulo. Considerando elementos da forma

$$\omega = h_i dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_{r+1} \in \Omega_{\mathcal{O}}^r, \quad (3.9)$$

temos que

$$\frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r} = \frac{h_i(H)\psi_H(dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_{r+1})}{dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r}$$

e $\frac{\psi_H(dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_{r+1})}{dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r}$ tem sempre expoente dominante dado por

$$\begin{aligned}
 (\underline{n}) - \nu_i + \lambda_1 &= (n, \dots, \underbrace{0}_i, \dots, n) + (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1r}) \quad \text{se } i < r + 1 \\
 (\underline{n}) &= (n, \dots, n) \quad \text{se } i = r + 1.
 \end{aligned}$$



Assim, variando $h_i \in \mathcal{O} = \frac{\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{r+1}\}}{\langle f \rangle}$, temos que $\frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r}$ terá vértices do poliedro de Newton da forma

$$\bigcup_{i=1}^{r+1} \Gamma_H + (\underline{n}) - \nu_i + \lambda_1 \subset \Lambda_{\mathcal{N}}(H)$$

e se variarmos h_i somente entre as séries com expoente dominante, obteremos o mesmo, ou seja,

$$\bigcup_{i=1}^{r+1} \Gamma_H + (\underline{n}) - \nu_i + \lambda_1 \subset \Lambda_{\mathcal{D}}(H). \quad (3.10)$$

Disso, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.13. *Se $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r))$ é uma parametrização de hipersuperfície quase ordinária com semigrupo $\Gamma_H = \langle \nu_1, \dots, \nu_r, \nu_{r+1}, \dots, \nu_{r+g} \rangle$, então elementos em*

$$\bigcup_{i=1}^{r+1} \Gamma_H + (\underline{n}) - \nu_i + \lambda_1$$

pertencem à $\Lambda_{\mathcal{D}}(H) \subset \Lambda_{\mathcal{N}}(H)$.

Observação 3.14. No caso particular em que $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r))$ tem um único expoente característico $\lambda_1 = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1r})$, temos que

$$\Gamma_H \setminus \Xi \subset \Lambda_{\mathcal{D}}(H) \subset \Lambda_{\mathcal{N}}(H)$$

com

$$\Xi = \left\{ \begin{array}{l} \underline{\gamma} \in \Gamma_H; \underline{\gamma} = \alpha_{r+1} \lambda_1 + n \underline{\alpha}, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}, \quad i = 1, \dots, r, \quad 0 \leq \alpha_{r+1} < n \text{ e} \\ \#\{\alpha_j = 0; j = 1, \dots, r+1\} \geq 2 \end{array} \right\}.$$

De fato, se H tem um único expoente característico λ_1 , então $\Gamma_H = \langle \nu_1, \dots, \nu_r, \nu_{r+1} \rangle$ em que ν_j para $j = 1, \dots, r+1$ são como definidos em (1.5) sendo $\nu_{r+1} = \gamma_1 = \lambda_1 = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1r})$.

Assim, se $\underline{\gamma} \in \Gamma_H \setminus \Xi$, então utilizando a representação padrão mencionada no Teorema 1.29, temos $\underline{\gamma} = \alpha_{r+1} \lambda_1 + n \underline{\alpha}$ com no máximo um α_i nulo. Se α_j é o único possível nulo, isto é, $\alpha_k \geq 1$ para todo $k \neq j$, então considerando

$$\omega = X_1^{\alpha_1-1} \dots X_j^{\alpha_j} \dots X_{r+1}^{\alpha_{r+1}-1} dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_j} \wedge \dots \wedge dX_{r+1}$$

segue que $\frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r}$ tem expoente dominante $\underline{\gamma}$.



Vale observar que este argumento não é válido se H tem mais de um expoente característico, pois neste caso, teríamos que $\nu_{r+2} \in \Gamma_H \setminus \Xi$ e não podemos obter ν_{r+2} com ω como acima, já que ν_{r+2} não provém de expoente dominante das variáveis X_1, \dots, X_{r+1} .

A análise feita para o conjunto $\Lambda_{\mathcal{N}}$ até o momento utilizou r -formas como dadas em (3.9), mas como nem todo elemento de $\Omega_{\mathcal{O}}^r$ é desta forma, e sim uma soma de parcelas similares, nosso próximo passo é analisar soma de elementos da forma

$$h_i dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_{r+1} + h_j dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_j} \wedge \dots \wedge dX_{r+1} \quad (3.11)$$

e, posteriormente, soma de mais parcelas.

Como os vértices do poliedro de Newton de cada parcela acima estão em (3.10), se não houver cancelamento de vértices ao realizar a soma, não obteremos nada de novo.

Por exemplo, se $H = (t_1^3, t_2^3, t_1^{13}t_2^{12} + t_1^{17}t_2^{18})$, cujo semigrupo é $\Gamma_H = \langle (3, 0), (0, 3), (13, 12) \rangle$ e considerarmos

$$\omega = \alpha_1 X_1 dX_2 \wedge dX_3 + \alpha_2 X_2 dX_1 \wedge dX_3,$$

então temos que as parcelas têm vértices do poliedro de Newton iguais a $(15, 14)$. Mas, se $\alpha_2 = \frac{13}{12}\alpha_1$, então $\frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge dt_2} = \frac{15}{2}\alpha_1 t_1^{19}t_2^{20}$ que, para $\alpha_1 \neq 0$, nos dá $(20, 21) \in \Lambda_{\mathcal{D}}(H) \subseteq \Lambda_{\mathcal{N}}(H)$ e $(20, 21) \notin \Gamma_H$.

Num caso mais geral, se $\gamma_i, \gamma_j \in \Gamma_H$ são vértices do poliedro de Newton de $h_i(H)$ e $h_j(H)$, respectivamente, então queremos que

$$\gamma_i + \nu \left(\frac{\psi_H(dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_{r+1})}{dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r} \right) = \gamma_j + \nu \left(\frac{\psi_H(dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_j} \wedge \dots \wedge dX_{r+1})}{dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r} \right). \quad (3.12)$$

Os elementos minimais (não nulos) de Γ_H para os quais podemos obter a igualdade (3.12) são $\gamma_i = \nu_H(X_i)$ e $\gamma_j = \nu_H(X_j)$. Assim, h_i e h_j não devem ter termos constantes e devem ter termos da forma $\alpha_i X_i$ e $\alpha_j X_j$, respectivamente, com $\alpha_i, \alpha_j \in \mathbb{C}^*$. Note ainda que, se no poliedro de Newton de $h_i(H)$ houver um vértice $\gamma_k = \nu_H(X_k)$, com $k \neq i$, então nunca obteremos a igualdade (3.12). Assim, para obtermos novos valores em $\Lambda_{\mathcal{N}}$, basta considerarmos cada h_k da forma

$$h_k = \alpha_k X_k + h'_k, \quad (3.13)$$

em que h'_k representa termos com grau maior ou igual a 2, i.e., $h'_k \in \mathcal{M}_{r+1}^2$.



Como teríamos $\binom{r+1}{2}$ possibilidades para soma de elementos da forma (3.11), amenizaremos essas combinações considerando a r -forma

$$\omega = \sum_{i=1}^{r+1} h_i dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1}.$$

Usando a expressão dada em (3.13), obtemos

$$\omega = \underbrace{\sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i X_i dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1}}_{\omega_1} + \sum_{i=1}^{r+1} h'_i dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1}. \quad (3.14)$$

Neste ponto, vamos analisar quais informações ω_1 pode nos fornecer.

Seja $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r))$ com

$$\begin{aligned} S(t_1, \dots, t_r) &= t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} u \\ &= t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} (1 + \sum_{\beta_j} b_{\beta_j} t_1^{\beta_{j1}} \dots t_r^{\beta_{jr}}) \\ &= t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} + \underbrace{\sum_{\beta_j} b_{\beta_j} t_1^{\beta_{j1} + \lambda_{11}} \dots t_r^{\beta_{jr} + \lambda_{1r}}}_R \end{aligned}$$

e $\omega_1 = \sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i X_i dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1}$, tomando $\alpha_{r+1} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^r (-1)^{r-i} \lambda_{1i} \alpha_i$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\psi_H(\omega_1)}{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r} &= n^{r-1} t_1^{\lambda_{11} + n - 1} \dots t_r^{\lambda_{1r} + n - 1} \sum_{\beta_j} b_{\beta_j} \left(\sum_{i=1}^r (-1)^{r-i} \alpha_i \beta_{ji} \right) t_1^{\beta_{j1}} \dots t_r^{\beta_{jr}} \\ &= n^{r-1} t_1^{n-1} \dots t_r^{n-1} \sum_{\beta_j} b_{\beta_j} \left(\sum_{i=1}^r (-1)^{r-i} \alpha_i \beta_{ji} \right) t_1^{\beta_{j1} + \lambda_{11}} \dots t_r^{\beta_{jr} + \lambda_{1r}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Denotemos $R = S - t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}}$ e considere $R_i = b_{\zeta_i} t_1^{\zeta_{i1}} \dots t_r^{\zeta_{ir}}$ com $1 \leq i \leq k$ os elementos minimais de R com respeito à ordem $<$ (coordenada a coordenada), isto é, dado qualquer termo $t_1^{\delta_1} \dots t_r^{\delta_r} \in R$, existe R_j com $1 \leq j \leq k$ tal que

$$\zeta_j = (\zeta_{j1}, \dots, \zeta_{jr}) \leq (\delta_1, \dots, \delta_r) = \underline{\delta}.$$

Desta forma, podemos escrever

$$R = (R_1 + M_1) + \cdots + (R_k + M_k),$$



em que qualquer termo $t_1^{\gamma_{i1}} \dots t_1^{\gamma_{ir}}$ de M_j é tal que $(\zeta_{i1}, \dots, \zeta_{ir}) \preceq (\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{ir})$.

Deste modo, escolhendo α_i com $i = 1, \dots, r$ convenientes, a r -forma ω_1 permite obtermos

$$\zeta_j + (\underline{n}) = (\zeta_{j1}, \dots, \zeta_{jr}) + (n, \dots, n) \in \Lambda_{\mathcal{N}}, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Em particular, se $\zeta_j + (\underline{n}) \notin \Gamma_H$, então obtemos um elemento de $\Lambda_{\mathcal{N}} \setminus \Gamma_H$. Se $\zeta_j + (\underline{n}) \in \Gamma_H$, podemos analisar o sistema $\sum_{i=1}^r (-1)^{r-i} \alpha_i \beta_{ji} = 0$, $1 \leq j \leq k$ a fim de obtermos elementos que não pertençam a Γ_H .

Mais especificamente, temos a seguinte observação.

Observação 3.15. Se $S = t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} + R$ e $R = (R_1 + M_1) + \dots + (R_k + M_k)$, em que $R_j = b_{\zeta_j} t_1^{\zeta_{j1}} \dots t_r^{\zeta_{jr}}$ são os elementos minimais, como mencionado acima, então em (3.15) temos parcelas correspondentes à R_1, \dots, R_k dadas por

$$\begin{aligned} & b_{\zeta_1} \left(\sum_{i=1}^r (-1)^r \alpha_i (\zeta_{1i} - \lambda_{1i}) \right) t_1^{\zeta_{11}} \dots t_r^{\zeta_{1r}} \\ & b_{\zeta_2} \left(\sum_{i=1}^r (-1)^r \alpha_i (\zeta_{2i} - \lambda_{1i}) \right) t_1^{\zeta_{21}} \dots t_r^{\zeta_{2r}} \\ & \quad \vdots \\ & b_{\zeta_k} \left(\sum_{i=1}^r (-1)^r \alpha_i (\zeta_{ki} - \lambda_{1i}) \right) t_1^{\zeta_{k1}} \dots t_r^{\zeta_{kr}}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Se considerarmos $k - 1$ equações da forma $\sum_{i=1}^r (-1)^r \alpha_i \beta_{ji} = 0$ e uma destas equações $\sum_{i=1}^r (-1)^r \alpha_i \beta_{1i} = 1$, de modo que os vetores $\beta_j = \zeta_j - \lambda_{1i}$, $j = 1, \dots, r$ sejam linearmente independentes, então podemos resolver o sistema de modo a anular os coeficientes de $k - 1$ dos R_i 's envolvidos e obter ω_1 com expoente dominante $\zeta_j + (\underline{n})$.

No exemplo que segue, através do raciocínio exposto acima, caracterizaremos o conjunto $\Lambda_{\mathcal{D}}$, que neste caso será igual a $\Lambda_{\mathcal{N}}$.

Exemplo 3.16. Considere a hipersuperfície quase ordinária com parametrização normalizada dada por

$$H = (t_1^3, t_2^3, S = t_1^{13} t_2^{12} + t_1^{17} t_2^{21} + t_1^{20} t_2^{24} + t_1^{26} t_2^{18} + t_1^{23} t_2^{21}),$$

em que $\Gamma_H = \langle (3, 0), (0, 3), (13, 12) \rangle$.



Analisando os expoentes que ocorrem em S temos que

$$\begin{aligned} (17, 21) &= 2(13, 12) - 3(3, 1) \notin \Gamma_H \\ (20, 24) &= 2(13, 12) - 3(2, 0) \notin \Gamma_H \\ (26, 18) &= 2(13, 12) - 3(0, 2) \notin \Gamma_H \\ \mathcal{F}_H = (23, 21) &= 2(13, 12) - 3(1, 1) \notin \Gamma_H \end{aligned}$$

onde \mathcal{F}_H denota o vetor de Frobenius de Γ_H .

Consideremos $\omega_1 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i X_i dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1}$ com $\alpha_3 = \frac{13}{3}\alpha_1 - 4\alpha_2$ que é a 2-forma que pode originar os valores minimais em $\Lambda_{\mathcal{N}}(H) \setminus \Gamma_H$. Lembremos que os α 's são coeficientes que podemos escolher para determinar a 2-forma.

Da expressão dada em (3.15) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\psi_H(\omega_1)}{dt_1 \wedge dt_2} &= 3t_1^2 t_2^2 [(-4\alpha_1 + 9\alpha_2)t_1^{17} t_2^{21} + (-7\alpha_1 + 12\alpha_2)t_1^{20} t_2^{24} \\ &\quad + (-13\alpha_1 + 6\alpha_2)t_1^{26} t_2^{18} + (-10\alpha_1 + 9\alpha_2)t_1^{23} t_2^{21}]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Assim, basta escolhermos $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ de modo que $-4\alpha_1 + 9\alpha_2 \neq 0$ e $-13\alpha_1 + 6\alpha_2 \neq 0$ e teremos que

$$\begin{aligned} (17, 21) + (3, 3) &= (20, 24) \in \Lambda_{\mathcal{N}}(H) \setminus \Gamma_H \\ (26, 18) + (3, 3) &= (29, 21) \in \Lambda_{\mathcal{N}}(H) \setminus \Gamma_H. \end{aligned}$$

Agora note que

$$\left. \begin{aligned} (20, 24) + 3(0, \alpha) \\ (20, 24) + (3, 0) + 3(0, \alpha) \\ (29, 21) + 3(\alpha, 0) \end{aligned} \right\} \in \Lambda_{\mathcal{N}}(H) \setminus \Gamma_H \quad (3.18)$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}$.

Qualquer outro par da forma $(20, 24) + \underline{\gamma}$ ou $(29, 21) + \underline{\gamma}$ com $\underline{\gamma} \in \Gamma_H$ estará no semigrupo Γ_H , pois $(20, 24) + \underline{\gamma} > \mathcal{F}_H$ e $(29, 21) + \underline{\gamma} > \mathcal{F}_H$ onde $>$ é a ordem coordenada a coordenada.

Além disto, note que se em (3.17) escolhermos $\alpha_1 = \frac{6}{13}\alpha_2$ e $\alpha_2 = 1$, obteremos uma 2-forma ω'_1 tal que $\nu\left(\frac{\psi_H(\omega'_1)}{dt_1 \wedge dt_2}\right) = (19, 23)$. Logo, $\nu(\omega'_1) = \nu\left(\frac{\psi_H(\omega'_1)}{dt_1 \wedge dt_2}\right) + (1, 1) = (20, 24)$, isto é, ω'_1 tem expoente dominante $(20, 24)$.

Por outro lado, se escolhermos $\alpha_1 = \frac{9}{4}$ e $\alpha_2 = 1$, obteremos uma 2-forma ω''_1 , tal que $\frac{\psi_H(\omega''_1)}{dt_1 \wedge dt_2}$ não tem expoente dominante e cujos vértices do polígono de Newton são



(22, 26), (28, 20) e (25, 23). Veja que (22, 26) é expoente dominante de $\frac{\psi_H(X_1 X_2 \omega'_1)}{dt_1 \wedge dt_2}$, com ω'_1 considerada acima.

Agora considere

$$\omega = -2X_1^2 X_3 dX_1 \wedge dX_2 + X_1^2 X_2 dX_1 \wedge dX_3 + \frac{6}{13} X_1^3 dX_2 \wedge dX_3$$

e temos que $\frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge dt_2}$ tem expoente dominante (25, 23).

Além disto, considerando

$$\bar{\omega} = \omega''_1 + \frac{65}{124} X_1 X_2 \omega'_1 + \frac{117}{62} \omega - \frac{1235}{1522} X_1^2 X_2^2 \omega'_1,$$

obtemos

$$\frac{\psi_H(\bar{\omega})}{dt_1 \wedge dt_2} = \frac{-279}{4} t_1^{28} t_2^{20} + \frac{7011}{124} t_1^{28} t_2^{26} - \frac{16245}{961} t_1^{28} t_2^{32} + \frac{1539}{32} t_1^{31} t_2^{23} - \frac{16245}{1922} t_1^{31} t_2^{29},$$

ou seja, $\frac{\psi_H(\bar{\omega})}{dt_1 \wedge dt_2}$ tem expoente dominante (28, 20).

Em resumo, obtemos 2-formas com expoentes dominantes que geram elementos como os anunciados em (3.18). Assim,

$$(20, 24) + \underline{\gamma}, (29, 21) + \underline{\gamma} \in \Lambda_{\mathcal{D}}(H)$$

com

$$\left. \begin{array}{l} (20, 24) + 3(0, \alpha) \\ (20, 24) + (3, 0) + 3(0, \alpha) \\ (29, 21) + 3(\alpha, 0) \end{array} \right\} \in \Lambda_{\mathcal{D}}(H) \setminus \Gamma_H \quad (3.19)$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}$.

Além disto, pelo modo como as 2-formas foram construídas, (20, 24) e (29, 21) são elementos minimais de $\Lambda_{\mathcal{D}}(H) \setminus \Gamma_H (= \Lambda_{\mathcal{N}}(H) \setminus \Gamma_H)$ no sentido que qualquer outra 2-forma como dada em (3.14) com $h'_i \neq 0$ para originar elementos em $\Lambda_{\mathcal{D}}(H) \setminus \Gamma_H$ ou $= \Lambda_{\mathcal{D}}(H) \setminus \Gamma_H$ vai produzir elementos em Γ_H pois, a ordem vai superar o vetor de Frobenius, ou será da forma $(20, 24) + \underline{\gamma}, (29, 21) + \underline{\gamma}$ com $\underline{\gamma} \in \Gamma_H$.

Deste modo, temos que

$$\Lambda_{\mathcal{D}}(H) = \Lambda_{\mathcal{N}}(H) = \Gamma_H \setminus \Xi \cup \{(20, 24) + \underline{\gamma}, (29, 21) + \underline{\gamma}; \underline{\gamma} \in \Gamma_H\}$$

em que

$$\Xi = \{\underline{\gamma} \in \Gamma_H; \underline{\gamma} = \alpha_3 \gamma_1 + 3(\alpha_1, \alpha_2), 0 \leq \alpha_3 < 3, \#\{\alpha_j = 0, j = 1, 2, 3\} \geq 2\}.$$



Em particular,

$$\Lambda_{\mathcal{D}}(H) \setminus \Gamma_H = \Lambda_{\mathcal{N}}(H) \setminus \Gamma_H = \{(20, 24)+3(0, \alpha), (23, 24)+3(0, \alpha), (29, 21)+3(\alpha, 0); \alpha \in \mathbb{N}\}.$$

3.4 Expoentes de Zariski Generalizados

Seja uma hipersuperfície quase ordinária dada por uma parametrização quase ordinária normalizada

$$H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r)),$$

em que $S(t_1, \dots, t_r) = t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} v$, $v(\underline{0}) = 1$ e consideremos $R = S - t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}}$ que não necessariamente tem expoente dominante. Então, podemos escrever

$$R = R_1 u_1 + \dots + R_k u_k$$

em que u_i é unidade e $k \geq 1$.

Na expressão para R dada acima, se $R_j = t_1^{\delta_{j1}} \dots t_r^{\delta_{jr}}$, então em virtude da Proposição 2.3, podemos assumir que $\underline{\delta}_j \notin \bigcup_{i=1}^{r+1} \Gamma_H + \lambda_1 - \nu_i$.

Note que se H admite um segundo expoente característico λ_2 , então $\lambda_2 \notin \Gamma_H$ e $\lambda_2 + \nu_i \notin \Gamma_H$, $\forall i = 1, \dots, r$.

De fato, se $\lambda_2 \in \Gamma_H$ então, pela Proposição 2.3, poderíamos eliminar o termo com expoente λ_2 , mas isto alteraria a classe topológica, o que é um absurdo. Por outro lado, se $\lambda_2 + \nu_i \in \Gamma_H$ com $1 \leq i \leq r$, então como $\gamma_2 = \nu_{r+2} = n_1 \gamma_1 + \lambda_2 - \lambda_1$, temos que $\lambda_2 = \nu_{r+2} + \lambda_1 - n_1 \gamma_1$. Mas, pela Proposição 1.27 (5), temos que, $n_1 \gamma_1 \in n\mathbb{N}^r$, isto é,

$$n_1 \gamma_1 = n(a_1, \dots, a_r), \quad a_i \in \mathbb{N}. \quad (3.20)$$

Assim, teríamos

$$\lambda_2 + \nu_i = \nu_{r+2} + \gamma_1 + n(-a_1, \dots, 1 - a_i, \dots, -a_r) \in \Gamma_H.$$

Segue da representação padrão (única) de um elemento de Γ_H , dada no Teorema 1.29, que $a_j = 0$ para todo $j \neq i$ e $a_i = 1$. Assim, de (3.20), temos que

$$n_1(\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1r}) = \nu_i.$$



Mas H é normalizada, então a única possibilidade de ocorrer a igualdade anterior seria para o caso $i = 1$. Porém, neste caso, $n_1 \lambda_{11} = n$, ou seja, $\lambda_{11} < n$ que contraria o fato de H ser normalizada.

Deste modo, podemos assumir que a hipersuperfície quase ordinária é da forma

$$H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S) \text{ com } S = p_1 + p_2 + \dots + p_g$$

e em p_1 , exceto pelo termo $t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}}$, não há termos com expoente em $\bigcup_{i=1}^{r+1} \Gamma_H + \lambda_1 - \nu_i$.

A fim de formalizar a nomenclatura de uma parametrização como descrita anteriormente, introduzimos a seguinte definição.

Definição 3.17. Uma hipersuperfície quase ordinária dada por uma parametrização normalizada

$$H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S)$$

com $S = t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} u$ e $u(\underline{0}) = 1$ é uma *parametrização normalizada de Zariski*, se todo termo de $S - t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}}$ tem expoente $\delta \notin \bigcup_{i=1}^{r+1} \Gamma_H + \lambda_1 - \nu_i$, em que ν_i são dados em (1.5).

Note que pelo que descrevemos anteriormente, toda hipersuperfície quase ordinária admite uma parametrização normalizada de Zariski.

Além disto, introduzimos o seguinte conceito.

Definição 3.18. Seja $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S)$ uma parametrização normalizada de Zariski. Denominamos $E_Z(H) = V_{\mathcal{N}}(S - t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}})$, caso tal conjunto seja não vazio, de *expoentes de Zariski generalizados*.

A nomenclatura *expoentes de Zariski generalizados* foi escolhida por ser uma generalização de um conceito similar introduzido por Zariski em [23], no contexto de curvas planas.

Além disto, pela Observação 3.15, temos que, se $E_Z(H) \neq \emptyset$, então $E_Z(H) = V_{\mathcal{N}}(\omega_1) - (\underline{n})$ com ω_1 introduzido em (3.14).

Note que, se $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_g$ são os expoentes característicos generalizados e $g > 1$, então sempre há expoentes de Zariski generalizados. De fato, se $S = p_1 + p_2 + \dots + p_g$ e todo termo de p_1 tiver expoente em $\bigcup_{i=1}^{r+1} \Gamma_H + \lambda_1 - \nu_i$, então λ_2 é um expoente de Zariski



generalizado. Observe ainda que se $E_Z(H) = \emptyset$, ou seja, não existem expoentes de Zariski generalizados, então $g = 1$ e H é $\tilde{\mathcal{A}}_1$ -equivalente à $(t_1^n, \dots, t_r^n, t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}})$.

No Exemplo 3.16 os expoentes de Zariski generalizados são $(17, 21)$ e $(26, 18)$ sendo $(17, 21) + (3, 3) = (20, 24)$ e $(26, 18) + (3, 3) = (29, 21)$ os elementos minimais de $\Lambda_{\mathcal{D}}(H) \setminus \Gamma_H = \Lambda_{\mathcal{N}}(H) \setminus \Gamma_H$.

No caso de curvas planas tem-se que $\Gamma \setminus \{0\} \subset \Lambda$. No entanto, o mesmo não ocorre com hipersuperfícies quase ordinárias em geral. O teorema a seguir identifica o subconjunto Υ_H de Γ_H que sempre está contido em $\Lambda_{\mathcal{D}}(H)$, bem como caracteriza quando $\Upsilon_H = \Lambda_{\mathcal{D}}(H)$. Deste modo, o teorema abaixo, pode ser encarado como uma generalização do principal resultado de [23].

Teorema 3.19. *Dada $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}}u)$ uma parametrização normalizada de hipersuperfície quase ordinária, então $\Upsilon_H \subseteq \Lambda_{\mathcal{D}}(H)$, onde*

$$\Upsilon_H := \{\underline{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_r) \in \Gamma_H; \text{ se } \delta_i \neq 0, \text{ então } \underline{\delta} - (\underline{n}) + \nu_i \in \Gamma_H\} \subset \Gamma_H.$$

Mais ainda, $\Upsilon_H = \Lambda_{\mathcal{D}}(H)$ se, e somente se, H é $\tilde{\mathcal{A}}$ -equivalente a uma hipersuperfície quase ordinária quase homogênea, isto é, $H \sim_{\tilde{\mathcal{A}}} (t_1^n, \dots, t_r^n, t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}})$.

Demonstração. Consideremos $g \in \mathcal{O}$ tal que $\nu_H(g) = \underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \Gamma_H$, isto é, $g(H) = t_1^{\alpha_1} \dots t_r^{\alpha_r}u$ com $u(\underline{0}) \neq 0$. Definamos

$$\begin{aligned} \omega_i &= dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_r \wedge dg \in \Omega_{\mathcal{O}}^r \\ &= dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_r \wedge \left(\sum_{i=1}^{r+1} g_{X_i} dX_i \right) \\ &= (-1)^{r-i} g_{X_i} dX_1 \wedge \dots \wedge dX_r + g_{X_{r+1}} dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_{r+1}. \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \psi_H(\omega_i) &= (nt_1^{n-1} dt_1) \wedge \dots \wedge (\widehat{nt_i^{n-1} dt_i}) \wedge \dots \wedge (nt_r^{n-1} dt_r) \wedge dg(H) \\ &= n^{r-1} t_1^{n-1} \dots \widehat{t_i^{n-1}} \dots t_r^{n-1} dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt_i} \wedge \dots \wedge dt_r \wedge \\ &\quad \wedge \left(\sum_{j=1}^r t_1^{\alpha_1} \dots t_j^{\alpha_j-1} \dots t_r^{\alpha_r} (\alpha_j u + t_j u_{t_j}) dt_j \right) \\ &= n^{r-1} (-1)^{r-i} t_1^{\alpha_1+n-1} \dots t_i^{\alpha_i-1} \dots t_r^{\alpha_r+n-1} (\alpha_i u + t_i u_{t_i}) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r. \end{aligned}$$

Se $\alpha_i \neq 0$, então $\frac{\psi_H(\omega_i)}{dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r}$ tem expoente dominante e

$$\nu_H(\omega_i) = \underline{\alpha} + (\underline{n}) - \nu_i = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) + (n, \dots, 0, \dots, n) \in \Lambda_{\mathcal{D}}(H).$$



Portanto, dado $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \Gamma_H$ tal que $\alpha_i \neq 0$ e $\underline{\alpha} + (\underline{n}) + \nu_i \in \Gamma_H$, então $\underline{\alpha} \in \Lambda_{\mathcal{D}}(H)$, ou seja, $\Upsilon_H \subset \Lambda_{\mathcal{D}}(H)$.

Suponhamos agora que $H \sim_{\tilde{\mathcal{A}}} (t_1^n, \dots, t_r^n, t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}})$, ou seja, em algum sistema de coordenadas, podemos assumir que

$$H = (t_1^n, \dots, t_r^n, t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}}).$$

Da parametrização dada acima, temos que

$$\begin{aligned} d(X_i \circ H) &= n t_i^{n-1} dt_i & 1 \leq i \leq r \\ d(X_{r+1} \circ H) &= \sum_{j=1}^r \lambda_{1j} t_1^{\lambda_{11}} \dots t_j^{\lambda_{1j}-1} \dots t_r^{\lambda_{1r}} dt_j. \end{aligned}$$

Então:

$$(a) \frac{\psi_H(dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_{r+1})}{dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r} = (-1)^{r-i} n^{r-1} \lambda_{1i} t_1^{\lambda_{11}+n-1} \dots t_i^{\lambda_{1i}-1} \dots t_r^{\lambda_{1r}+n-1}.$$

Se $\lambda_{1i} = 0$, então obtemos zero e, se $\lambda_{1i} \neq 0$, então obtemos

$$\nu(dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_{r+1}) = \lambda_1 + (\underline{n}) - \nu_i \in \Gamma_H.$$

$$(b) \frac{\psi_H(dX_1 \wedge \dots \wedge dX_r)}{dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r} = n^r t_1^{n-1} \dots t_r^{n-1} \text{ e } \nu(dX_1 \wedge \dots \wedge dX_r) = (\underline{n}) \in \Gamma_H.$$

Além disto, dado $h = \sum_{\underline{\eta}} a_{\underline{\eta}} X_1^{\eta_1} \dots X_{r+1}^{\eta_{r+1}} \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{r+1}\}$, obtemos

$$H^*(h) = h \circ H = \sum_{\underline{\eta}} a_{\underline{\eta}} t_1^{n\eta_1 + \eta_{r+1}\lambda_{11}} \dots t_r^{n\eta_r + \eta_{r+1}\lambda_{1r}}$$

e todos os vértices do poliedro de Newton estão em Γ_H , pois

$$n(\eta_1, \dots, \eta_r) + \eta_{r+1}(\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1r}) \in \Gamma_H.$$

Assim, dados $h_i \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{r+1}\}$ com $1 \leq i \leq r+1$, temos que todos os vértices do poliedro de Newton de $h_i dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_{r+1}$ pertencem ao semigrupo Γ_H , o mesmo ocorrendo com os vértices do poliedro de Newton de $\frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r}$, em que

$$\omega = \sum_{i=1}^{r+1} h_i dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_{r+1}, \text{ ou seja}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathcal{N}}(H) &= \{\underline{\delta} + (\underline{1}); \underline{\delta} \in V_{\mathcal{N}}(\omega)\} \\ &= \{\Gamma_H + \lambda_1 + (\underline{n}) - \nu_i, \text{ com } \lambda_{1i} \neq 0, 1 \leq i \leq r\} \cup \{\Gamma_H + (\underline{n})\} \subset \Gamma_H. \end{aligned}$$



Em particular, temos que para cada elemento $\underline{\delta} + (\underline{1})$ de $\Lambda_{\mathcal{N}}(H)$, podemos exibir $\omega \in \Omega_{\mathcal{O}}^r$ que admite expoente dominante igual a $\underline{\delta}$. De fato, dado $\underline{\gamma} \in \Gamma_H$ tomamos $h \in \mathcal{O}$ tal que $\nu(h) = \underline{\gamma}$ e temos que

$$\nu \left(\frac{\psi_H(hdX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX}_i \wedge \cdots \wedge dX_{r+1})}{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r} \right) = \underline{\gamma} + \lambda_1 + (\underline{n}) - \nu_i$$

e

$$\nu \left(\frac{\psi_H(hdX_1 \wedge \cdots \wedge dX_r)}{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r} \right) = \underline{\gamma} + (\underline{n}).$$

Logo, $\Lambda_{\mathcal{D}}(H) = \Lambda_{\mathcal{N}}(H)$.

Além disto, note que $\Lambda_{\mathcal{D}}(H) = \Lambda_{\mathcal{N}}(H) \subseteq \Upsilon_H$.

De fato, se $\underline{\delta} + (\underline{1}) \in \Lambda_{\mathcal{D}}(H) \subseteq \Gamma_H$, então temos duas possibilidades:

- (a) $\underline{\delta} + (\underline{1}) = \underline{\gamma} + \lambda_1 + (\underline{n}) - \nu_i \in \Gamma_H$ com $1 \leq i \leq r$ e $\underline{\gamma} \in \Gamma_H$. Assim, $\underline{\delta} + (\underline{1}) - (\underline{n}) + \nu_i \in \Gamma_H$.
- (b) $\underline{\delta} + (\underline{1}) = \underline{\gamma} + (\underline{n}) \in \Gamma_H$ com $\underline{\gamma} \in \Gamma_H$. Seguindo que

$$\underline{\delta} + (\underline{1}) - (\underline{n}) + \nu_i = \underline{\gamma} + \nu_i \in \Gamma_H,$$

em que ν_i é como dado em (1.5).

Portanto, se $H \sim_{\tilde{\mathcal{A}}} (t_1^n, \dots, t_r^n, t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}})$, então $\Upsilon_H = \Lambda_{\mathcal{N}}(H) = \Lambda_{\mathcal{D}}(H)$.

Agora, pela contrapositiva é suficiente mostrarmos que, se H não é $\tilde{\mathcal{A}}$ -equivalente a $(t_1^n, \dots, t_r^n, t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}})$, então $\Lambda_{\mathcal{N}}(H) \neq \Upsilon_H$.

De fato, considerando $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S)$ com $R = S - t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} = \sum_{\underline{\delta}_i} b_{\underline{\delta}_i} t_1^{\delta_{i1}} \dots t_r^{\delta_{ir}} u_i$,

a Proposição 2.3 possibilita supormos que, se $b_{\underline{\delta}_i} \neq 0$, então $\underline{\delta}_i \notin \bigcup_{i=1}^{r+1} \Gamma_H + \lambda_1 - \nu_i$, i.e., $\underline{\delta}_i - \lambda_1 + \nu_i \notin \Gamma_H$ para todo $i = 1, \dots, r+1$.

Deste modo, tomando

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^{r+1} c_i X_i dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX}_i \wedge \cdots \wedge dX_{r+1}$$

temos, ao considerar $c_{r+1} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^r (-1)^{r-1} \lambda_{1i} c_i$,

$$\frac{\psi_H(\omega_1)}{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r} = n^{r-1} \sum_{\underline{\delta}_i} b_{\underline{\delta}_i} \left(\sum_{j=1}^r (-1)^{r-1} c_j (\delta_{ij} - \lambda_{1j}) \right) t_1^{\delta_{i1} + n - 1} \dots t_r^{\delta_{ir} + n - 1}.$$



Agora, escolhendo $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{C}$ de modo a não anularmos os coeficientes dos termos com expoentes em $E_Z(H) + (\underline{n} - 1)$ (veja Definição 3.18), temos que $V_{\mathcal{N}}(\omega_1) = E_Z(H) + (\underline{n} - 1)$.

Agora note que, se $\underline{\delta}_i + (\underline{n}) \in V_{\mathcal{N}}(\omega) \setminus \Gamma_H$ então $\underline{\delta}_i + (\underline{n}) \notin \Upsilon_H$. Por outro lado, se $\underline{\delta}_i + (\underline{n}) \in \Gamma_H$, podemos ter $\underline{\delta}_i = \alpha_0 \lambda_1 + n(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$; $0 < \alpha_0 < n_1$ e $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ (representação padrão) ou $\underline{\delta}_i = \lambda_2$ para algum i .

No primeiro caso, como $\underline{\delta}_i + (\underline{n}) - (\underline{n}) + \nu_i = \lambda_2 + \nu_i \notin \Gamma_H$, para todo $i = 1, \dots, r$, temos que $\underline{\delta}_i + (\underline{n}) \in \Lambda_{\mathcal{N}}(H) \setminus \Upsilon_H$.

No segundo caso, se $\underline{\delta}_i + (\underline{n}) - (\underline{n}) + \nu_i = \underline{\delta}_i + \nu_i \in \Gamma_H$, então $\alpha_i \geq -1$ e $\alpha_j > 0$ para todo $j \neq i$. Mas, deste modo, $\underline{\delta}_i - \lambda_1 + \nu_i = (\alpha_0 - 1)\lambda_1 + n(\alpha_1, \dots, \alpha_i + 1, \dots, \alpha_r) \in \Gamma_H$ que não pode ocorrer. Assim, $\underline{\delta}_i + (\underline{n}) - (\underline{n}) + \nu_i \notin \Gamma_H$ e $\underline{\delta}_i + (\underline{n}) \notin \Upsilon_H$.

Portanto, $\Lambda_{\mathcal{N}}(H) \neq \Upsilon_H$. □

Vimos no teorema anterior que para hipersuperfícies quase ordinárias com parametrização dada por $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}})$ temos

$$\Lambda_{\mathcal{N}}(H) = \Lambda_{\mathcal{D}}(H) = \Upsilon_H := \{\underline{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_r) \in \Gamma_H; \text{ se } \delta_i \neq 0, \text{ então } \underline{\delta} - (\underline{n}) + \nu_i \in \Gamma_H\}.$$

No caso em que a hipersuperfície quase ordinária tem parametrização normalizada de Zariski (veja Definição 3.17) dada por

$$H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1, \dots, t_r))$$

com $S = t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}} v$ e $v(\underline{0}) = 1$, escrevemos

$$R_1 u_1 + \dots + R_k u_k = S - t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}}$$

com $R_i = t_1^{\delta_{i1}} \dots t_r^{\delta_{ir}}$, u_i uma unidade e expoentes de Zariski generalizados $E_Z(H) = \{\underline{\delta}_j, j = 1, \dots, k\}$ (veja Definição 3.18).

Consideremos a r -forma $\omega_1 = \sum_{i=1}^{r+1} c_i X_i dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_{r+1}$, com $c_{r+1} = -1/n \sum_{i=1}^r (-1)^{r-i} \lambda_{1i} c_i$ e $\sum_{i=1}^r (-1)^{r-1} c_i (\delta_{ji} - \lambda_{1i}) \neq 0$ para $j = 1, \dots, k$. Para todo $\underline{\delta}_j$, $j = 1, \dots, k$, temos que

$$\underline{\delta}_j + (\underline{n}) \in \Lambda_{\mathcal{N}}(H) \setminus \Upsilon_H.$$

Além disto,

$$\Gamma_H + \underline{\delta}_j + (\underline{n}) \subset \Lambda_{\mathcal{N}}(H).$$



De fato, como $\underline{\delta}_j + (\underline{n} - 1)$ é vértice do poliedro de Newton de ω_1 , então dado $\underline{\gamma} \in \Gamma_H$, existe $h \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{r+1}\}$ com expoente dominante $\underline{\gamma}$, isto é, $h(H) = t_1^{\gamma_1} \dots t_r^{\gamma_r} v$, onde v é uma unidade. Agora considerando $h\omega_1$ temos que $\frac{\psi_H(h\omega_1)}{dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r}$ tem vértices do poliedro de Newton $\underline{\gamma} + \underline{\delta}_j + (\underline{n} - 1)$ com $j = 1, \dots, k$. Logo,

$$\Upsilon_H \cup \left(\bigcup_{j=1}^k \Gamma_H + \underline{\delta}_j + (\underline{n}) \right) \subset \Lambda_{\mathcal{N}}(H).$$

Na próxima seção vamos analisar o conjunto $\Lambda_{\mathcal{N}}(H)$ para hipersuperfícies de grau menor ou igual a 3, isto é, o caso $n \leq 3$.

3.5 Conjunto $\Lambda_{\mathcal{N}}(H)$ para $n \leq 3$

Se $n = 1$, então a multiplicidade da hipersuperfície quase ordinária é 1 e a hipersuperfície é regular. Além disto, a hipersuperfície admite uma parametrização da forma $H = (t_1, \dots, t_r, \sum_{\underline{\gamma}} a_{\underline{\gamma}} t_1^{\gamma_1} \dots t_r^{\gamma_r})$. Temos que $\Gamma_H = \langle \nu_1, \dots, \nu_r \rangle = \mathbb{N}^r$ e pela Proposição 2.3, temos que H é $\tilde{\mathcal{A}}_1$ -equivalente à $(t_1, \dots, t_r, 0)$, ou seja, a hipersuperfície é definida por $f = X_{r+1}$. Deste modo, dado $\omega \in \Omega_{\mathcal{O}}^r$ temos que

$$\omega = \sum_{i=1}^{r+1} h_i dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_{r+1} = h_{r+1} dX_1 \wedge \dots \wedge dX_r$$

com $h_{r+1} \in \mathcal{O} = \frac{\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]}{(f)} \approx \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}$ e $\Lambda_{\mathcal{N}}(H) = \Lambda_{\mathcal{D}}(H) = \Upsilon_H$.

Se $n = 2$ e a parametrização é normalizada, então a multiplicidade da hipersuperfície é $\min\{n, |\lambda_1|\} = \min\{2, \lambda_{11} + \dots + \lambda_{1r}\} = 2$. Além disto, do Exemplo 2.2, temos que a parametrização é $\tilde{\mathcal{A}}_1$ -equivalente a $H = (t_1^2, \dots, t_r^2, t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}})$ e, do Teorema 3.19, segue que $\Lambda_{\mathcal{N}}(H) = \Lambda_{\mathcal{D}}(H) = \Upsilon_H$.

Agora, se $n = 3$, então não podemos afirmar que a multiplicidade da hipersuperfície quase ordinária seja 3. De fato, como a multiplicidade é $\min\{n, |\lambda_1|\} = \min\{3, \lambda_{11} + \dots + \lambda_{1r}\}$ podemos ter $r = 2$ e $\lambda_{11} = \lambda_{12} = 1$, ou seja, podemos ter multiplicidade 2.

Consideremos $H = (t_1^3, \dots, t_r^3, S(t_1, \dots, t_r))$ uma parametrização normalizada de Zariski. Se $E_Z(H) = \emptyset$, então, com vimos, podemos assumir $H = (t_1^3, \dots, t_r^3, t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}})$ e $\Lambda_{\mathcal{N}}(H) = \Lambda_{\mathcal{D}}(H) = \Upsilon_H$.



Agora considere $H = (t_1^3, \dots, t_r^3, S(t_1, \dots, t_r))$ a parametrização normalizada de Zariski de uma hipersuperfície quase ordinária. Neste caso, os possíveis expoentes de termos em $S(t_1, \dots, t_r)$ são da forma

$$\underline{\delta} = 2\lambda_1 + 3\underline{\alpha}, \quad \text{com } \alpha_i \in \mathbb{Z} \text{ e } \underline{\delta} + \nu_i \notin \Gamma_H + \lambda_1, \text{ para todo } i = 1, \dots, r. \quad (3.21)$$

Denotemos os expoentes generalizados de Zariski por $E_Z(H) = V_{\mathcal{N}}(S - t_1^{\lambda_{11}} \dots t_r^{\lambda_{1r}}) = \{\underline{\delta}_j = 2\lambda_1 + 3\underline{\alpha}_j; j = 1, \dots, k\}$. O vetor de Frobenius é dado por $\mathcal{F}_H = 2\lambda_1 - \underline{\mathfrak{z}}$.

Como vimos no final da seção anterior temos que

$$\Upsilon_H \cup \left(\bigcup_{j=1}^k \Gamma_H + \underline{\delta}_j + \underline{\mathfrak{z}} \right) \subset \Lambda_{\mathcal{N}}(H).$$

Vamos mostrar que um elemento da região $\underline{\delta}_j + \underline{\mathfrak{z}} + \mathbb{N}^r$, dado na representação padrão, pertence a $\Lambda_{\mathcal{N}}(H)$.

Para isto, seja $\underline{\gamma} \in \underline{\delta}_j + \underline{\mathfrak{z}} + \mathbb{N}^r$ para algum $j = 1, \dots, k$ e escrevamos

$$\underline{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_r) = s_0(\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1r}) + 3(s_1, \dots, s_r)$$

com $0 \leq s_0 \leq 2$, $s_i \in \mathbb{Z}$. Analisemos cada possibilidade para s_0 .

($s_0 = 0$) Neste caso, temos que

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_r) = 3(s_1, \dots, s_r) \geq \underline{\delta}_j + \underline{\mathfrak{z}}$$

o que implica que $s_i \in \mathbb{N}^*$, para $1 \leq i \leq r$. Logo, $(\gamma_1, \dots, \gamma_r) \in \Gamma_H$ e, como

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_r) - 3(1, \dots, 0, \dots, 1) = 3(\underbrace{s_1 - 1}_{\geq 0}, \dots, \underbrace{s_i}_{> 0}, \dots, \underbrace{s_r - 1}_{\geq 0}) \in \Gamma_H$$

segue que $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_r) \in \Upsilon_H \subset \Lambda_{\mathcal{N}}(H)$.

($s_0 = 1$) Neste caso,

$$\underline{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_r) = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1r}) + 3(s_1, \dots, s_r) \geq \underline{\delta}_j + \underline{\mathfrak{z}} > (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1r})$$

o que implica que $s_i \in \mathbb{N}^*$, para $1 \leq i \leq r$. Como no caso anterior, tem-se que $\underline{\gamma} - 3(1, \dots, 0, \dots, 1) \in \Gamma_H$ e, portanto, $\underline{\gamma} \in \Upsilon_H \subset \Lambda_{\mathcal{N}}(H)$.



($s_0 = 2$) Neste caso,

$$\underline{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_r) = 2(\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1r}) + 3(s_1, \dots, s_r) \geq \underline{\delta}_j + \underline{\mathfrak{Z}}$$

o que implica que $\gamma_i \geq \delta_{ji} + 3$, para todo $j = 1, \dots, r$, ou seja,

$$2\lambda_{1i} + 3s_i \geq 2\lambda_{1i} + 3\alpha_{ji} + 3$$

donde segue que $s_i \geq \alpha_{ji} + 1$, ou seja, $s_i > \alpha_{ji}$.

Deste modo, temos que $s_i = \alpha_{ji} + \xi_i$, com $\xi_i \in \mathbb{N}^*$. Portanto,

$$\begin{aligned} (\gamma_1, \dots, \gamma_r) &= 2(\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1r}) + 3(\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jr}) + 3(\xi_1, \dots, \xi_r) \\ &= (\delta_{j1}, \dots, \delta_{jr}) + 3(\xi_1, \dots, \xi_r) \\ &= \underline{\delta}_j + \underline{\mathfrak{Z}} + 3(\underbrace{\xi_1 - 1}_{\geq 0}, \dots, \underbrace{\xi_r - 1}_{\geq 0}). \end{aligned}$$

Como observamos após a Definição 3.18, os expoentes de Zariski generalizados estão relacionados com os vértices do poliedro de Newton de $\frac{\psi_H(\omega_1)}{dt_1 \wedge \dots \wedge dt_r}$ com $\omega_1 \in \Omega_{\mathcal{O}}^r$ dada em (3.14) pela relação $E_Z(H) + (\underline{n}) = V_{\mathcal{N}}(\omega_1)$. Assim, $\underline{\gamma} \in V_{\mathcal{N}}(X_1^{\xi_1 - 1} \dots X_r^{\xi_r - 1} \omega_1) \subset \Lambda_{\mathcal{N}}(H)$.

Deste modo, mostramos que, se $\underline{\gamma} \in \bigcup_{j=1}^k \underline{\delta}_j + \underline{\mathfrak{Z}} + \mathbb{N}^r$, na representação padrão, então $\underline{\gamma} \in \Lambda_{\mathcal{N}}(H)$.

Reciprocamente, seja $\omega \in \Omega_{\mathcal{O}}^r$, isto é,

$$\omega = \sum_{i=1}^{r+1} h_i dX_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \dots \wedge dX_{r+1},$$

com $h_i \in \mathcal{O}$.

Usando semirraízes podemos escrever cada h_i como

$$h_i = \underbrace{\sum_{\underline{\alpha}_i} a_{\underline{\alpha}_i} X_1^{\alpha_{i1}} \dots X_r^{\alpha_{ir}}}_{(A)} + \underbrace{\sum_{\underline{\beta}_i} a_{\underline{\beta}_i} X_1^{\beta_{i1}} \dots X_r^{\beta_{ir}} X_{r+1}}_{(B)} + \underbrace{\sum_{\underline{\gamma}_i} a_{\underline{\gamma}_i} X_1^{\gamma_{i1}} \dots X_r^{\gamma_{ir}} X_{r+1}^2}_{(C)}.$$

Notemos que, compondo h_i com H , os expoentes que ocorrem em (C) são da forma

$$3(\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{ir}) + 2(\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1r}) + \mathbb{N}^r$$



que superam o vetor de Frobenius \mathcal{F}_H e, desta forma, estão em Γ_H . Deste modo, os expoentes que ocorrem em $\sum_{\underline{\gamma}_i} a_{\underline{\gamma}_i} X_1^{\gamma_{i1}} \cdots X_r^{\gamma_{ir}} X_{r+1}^2 dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1}$ estão em $\bigcup_{i=1}^{r+1} \Gamma_H + (\underline{3}) - \nu_i + \nu_{r+1} \subset \Gamma_H$. Em particular, temos que tais expoentes pertencem à Υ_H . Vamos agora analisar o efeito dos expoentes que ocorrem em (A) e (B).

Consideremos $i \neq r + 1$. Em $dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1}$ ocorrem termos com expoentes da forma

$$(\underline{2}) - \nu_i + \begin{cases} \lambda_1 \\ \underline{\delta}_j + \mathbb{N}^r. \end{cases}$$

Mas, deste modo, ao considerar $h_i dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1}$ os termos provenientes de (B) contribuirão apenas para Υ_H .

Desta forma, para $i \neq r + 1$, basta analisar a influência dos termos de (A) na expressão

$$h_i dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_{r+1}.$$

Os termos obtidos originarão elementos $3(\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{ir}) + (\underline{3}) - \nu_i + (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1r}) \in \Upsilon_H$ ou $3(\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{ir}) + (\underline{3}) - \nu_i + (\delta_{j1}, \dots, \delta_{jr}) + \mathbb{N}^r \subset \bigcup_{j=1}^k \underline{\delta}_j + (\underline{3}) + \Gamma_H$, caso ocorra o cancelamento dos termos com expoente dominante.

Ainda, como $dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_r$ origina o elemento $(3, \dots, 3)$, então a parcela de ω , dada por $h_{r+1} dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_{r+1}$ gera expoentes da forma:

$$\text{Usando (A)} \quad 3(\beta_1, \dots, \beta_r) + (3, \dots, 3) \in \Upsilon_H;$$

$$\text{Usando (B)} \quad 3(\beta_1, \dots, \beta_r) + (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1r}) + (3, \dots, 3) \in \Upsilon_H$$

ou

$$3(\beta_1, \dots, \beta_r) + (\delta_{j1}, \dots, \delta_{jr}) + (3, \dots, 3) \in \bigcup_{j=1}^k \underline{\delta}_j + (\underline{3}) + \Gamma_H.$$

Logo, todos os expoentes provenientes de $\frac{\psi_H(\omega)}{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r}$ geram elementos de

$$\Upsilon_H \cup \bigcup_{i=1}^k (\underline{\delta}_i + (\underline{3}) + \Gamma_H).$$

Portanto, para $n = 3$ temos

$$\Lambda_{\mathcal{N}}(H) = \Upsilon_H$$

no caso monomial ou,

$$\Lambda_{\mathcal{N}}(H) = \Upsilon_H \cup \left(\bigcup_{i=1}^k \underline{\delta}_i + (\underline{3}) + \Gamma_H \right).$$



As análises feitas nesta seção poderiam ser aplicadas para $n > 3$. No entanto, obteríamos vários casos e subcasos que tornariam o trabalho técnico e demasiadamente longo. Mesmo no caso plano, o caso $n = 4$ se mostra complexo como se constata em [11].

Na próxima seção faremos um breve estudo a respeito do conjunto Λ para um tipo particular de hipersuperfícies quase ordinárias.

3.6 Hipersuperfícies quase ordinárias associadas à curvas planas

Nesta seção estudamos hipersuperfícies quase ordinárias que estão relacionadas com curvas planas. Os resultados e propriedades que usaremos relativos às curvas planas podem ser encontradas em [10]. Inicialmente apresentamos formalmente como se dá esta relação e em seguida mostramos que, de fato tal construção origina uma parametrização de hipersuperfície quase ordinária. Na sequência faremos um breve estudo da quase ordinária obtida, descrevendo os geradores do semigrupo associado e o conjunto $\Lambda_{\mathcal{D}}$, sobre o qual destacamos certas particularidades.

Seja $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, \sum a_{\alpha_i} t_1^{\alpha_i} \dots t_r^{\alpha_i})$ em que α_i são tais que $\varphi = (t^n, \sum a_{\alpha_i} t^{\alpha_i})$ é uma parametrização de uma curva plana. Vamos mostrar que H é uma parametrização de uma hipersuperfície quase ordinária, verificando o Lema 1.11 adaptado para parametrizações ao invés de elementos de $\mathbb{C}\{X_1^{1/n}, \dots, X_r^{1/n}\}$.

A condição (i) do Lema 1.11 é satisfeita já que $\lambda_i = (\underline{\beta}_i) = (\beta_i, \dots, \beta_i) < (\beta_j, \dots, \beta_j) = (\underline{\beta}_j) = \lambda_j$ para $i < j$, em que β_i e β_j são expoentes característicos da curva plana.

Analisemos a condição (ii) do referido lema, ou seja, se $a_{\underline{\alpha}_i} \neq 0$, então $\underline{\alpha}_i$ deve pertencer ao subgrupo $n\mathbb{Z}^r + \sum_{\lambda_i \leq \underline{\alpha}_i} \mathbb{Z}\lambda_i$, em que, $\underline{\alpha}_i = (\alpha_i, \dots, \alpha_i)$ e $\lambda_i = (\underline{\lambda}_i) = (\underline{\beta}_i)$.

Equivalentemente, devemos mostrar que $\alpha_i(\underline{1}) \in n\mathbb{Z}^r + \sum_{\beta_i \leq \underline{\alpha}_i} \mathbb{Z}\beta_i(\underline{1})$, isto é,

$$\alpha_i = nk + \sum_{\beta_i \leq \alpha_i} k_i \beta_i \tag{3.22}$$

em que $k, k_i \in \mathbb{Z}$.

Lembrando que a parametrização de uma curva plana é da forma $(t^n, \sum_{i=1}^g a_{\beta_i} t^{\beta_i} +$ (termos com expoentes divisíveis por e_i)) onde $a_{\beta_i} \neq 0$ e $e_0 = \beta_0 = n$; $\beta_i = \min\{\alpha_i; a_{\alpha_i} \neq$



0 e $e_{i-1} \nmid \alpha_i$ e $e_i = MDC(e_{i-1}, \beta_i)$ para $i = 1, \dots, g$. Como $e_1 = MDC(\beta_0, \beta_1)$, pelo Teorema de Bézout temos que $e_1 = z_0\beta_0 + z_1\beta_1$, com $z_0, z_1 \in \mathbb{Z}$. Da mesma forma, $e_2 = MDC(e_1, \beta_2)$ implica que $e_2 = z_2\beta_2 + ze_1 = z_2\beta_2 + z_1\beta_1 + z_0\beta_0$. Seguindo este raciocínio, concluímos que

$$e_i = \sum_{j=0}^i z_j \beta_j,$$

com $z_j \in \mathbb{Z}$.

Se $a_{\alpha_i} \neq 0$, então considere $\alpha_i \geq \beta_k$. Temos que e_k divide α_i , ou seja,

$$\begin{aligned} \alpha_i &= qe_k; \quad q, e_k \in \mathbb{N} \\ &= q \sum_{j=0}^k z_j \beta_j, \quad z_j \in \mathbb{Z} \\ &= \sum_{j=0}^k p_j \beta_j, \quad p_j = qz_j \in \mathbb{Z} \\ &= p_0\beta_0 + \sum_{j=1}^k p_j \beta_j = p_0\beta_0 + \sum_{\beta_j \leq \alpha_i} p_j \beta_j = p_0n + \sum_{\beta_j \leq \alpha_i} p_j \beta_j. \end{aligned}$$

Concluimos assim, que α_i satisfaz a equação (3.22) e, deste modo, a condição (ii) do Lema 1.11 é satisfeita.

A condição (iii) do Lema 1.11 se traduz em $\lambda_i \notin n\mathbb{Z}^r + \sum_{\lambda_j < \lambda_i} \lambda_j \mathbb{Z}$, que neste caso equivale à $\beta_i \notin n\mathbb{Z} + \sum_{\beta_j < \beta_i} \mathbb{Z}\beta_j$.

Suponha por absurdo que $\beta_i \in nk + \sum_{\beta_j < \beta_i} k_j \beta_j$ para algum $k, k_j \in \mathbb{Z}$.

Como $n = \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{i-1} < \beta_i$, $\beta_i = \min\{l, a_l \neq 0; e_{i-1} \nmid l\}$ e $e_k | e_{k-1}$ para todo $k = 1, \dots, g$, então todo β_j , para $j = 0, \dots, i-1$, é divisível por e_{i-1} . Assim, $e_{i-1} | \beta_i$ o que é um absurdo.

Portanto, dada $\varphi = (t^n, \sum a_{\alpha_i} t^{\alpha_i})$ uma parametrização de curva plana, temos que a parametrização $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, \sum a_{\alpha_i} t_1^{\alpha_i} \dots t_r^{\alpha_i})$ é quase ordinária com expoentes característicos generalizados

$$\lambda_i = \underline{\beta}_i = (\beta_i, \dots, \beta_i).$$

A caracterização destas hipersuperfícies quase ordinárias nos impulsionam a fazer uma análise de suas propriedades paralelamente às propriedades da curva plana associada.

Usaremos a notação Γ_φ para indicar o semigrupo associado à curva plana de parametrização φ e Γ_H para o semigrupo associado à hipersuperfície quase ordinária cuja parametrização é H obtida a partir de φ como apresentamos anteriormente.



Para curvas planas, temos que $\Gamma_\varphi = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ onde $v_0 = \beta_0, v_1 = \beta_1$ e $v_{i+1} = n'_i v_i + \beta_{i+1} - \beta_i$ e $n'_i = \frac{MDC(\beta_0, \dots, \beta_{i-1})}{MDC(\beta_0, \dots, \beta_i)}$. Notemos a semelhança da relação anterior com (1.4) e (1.5) em que no caso de hipersuperfícies quase ordinárias temos que

$$n_i = \# \frac{Q_i}{Q_{i-1}} = \min\{k \in \mathbb{N}^*; k\lambda_i \in Q_{i-1}\}$$

onde $Q_0 = n\mathbb{Z}^r$ e $Q_i = n\mathbb{Z}^r + \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{Z}\lambda_j$. Vamos mostrar que $n_i = n'_i$ para todo $i = 1, \dots, g$.

Para $i = 1$ temos, no caso de curvas planas, que $n'_1 = \frac{\beta_0}{\text{mdc}(\beta_0, \beta_1)} = \frac{\beta_0}{e_1} = \frac{n}{e_1}$ e para tais hipersuperfícies quase ordinárias, $n_1 = \min\{k \in \mathbb{N}^*, k\lambda_1 \in n\mathbb{Z}^r\}$. Agora note que

$$k\beta_1(\underline{1}) \in n\mathbb{Z}^r \Leftrightarrow k\beta_1 = np \Leftrightarrow k \frac{\beta_1}{e_1} = \frac{n}{e_1} p.$$

Mas como $MDC\left(\frac{\beta_1}{e_1}, \frac{n}{e_1}\right) = 1$, temos que $n_1 = \min\{k \in \mathbb{N}^*; k\lambda_1 \in n\mathbb{Z}^r\} = \frac{n}{e_1} = n'_1$.

Agora, para $i > 1$, temos que $n_i = \min\{k \in \mathbb{N}^*, k\lambda_i \in n\mathbb{Z}^r + \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{Z}\lambda_j\}$, ou seja, $k\beta_i(\underline{1}) \in n\mathbb{Z}^r + \sum_{j=1}^{i-1} z_j \beta_j(\underline{1})$, isto é, $k\beta_i = nz + \sum_{j=1}^{i-1} k_i \beta_j = \beta_0 z + \sum_{j=1}^{i-1} z_i \beta_j$ com $z, z_i \in \mathbb{Z}$. Lembrando que e_j divide β_0, \dots, β_j e $e_{j-1} \nmid \beta_j$ para todo $j = 1, \dots, g$, temos

$$\begin{aligned} k \frac{\beta_i}{e_i} &= z \frac{\beta_0}{e_i} + \sum_{j=1}^{i-1} z_j \frac{\beta_j}{e_i} = \frac{1}{e_i} \left(z\beta_0 + \sum_{j=1}^{i-1} z_j \beta_j \right) \\ &= \frac{1}{e_i} e_{i-1} \underbrace{\left(z \frac{\beta_0}{e_{i-1}} + \sum_{j=1}^{i-1} z_j \frac{\beta_j}{e_{i-1}} \right)}_p = \frac{e_{i-1}}{e_i} p = n'_i p. \end{aligned}$$

Mas como

$$MDC\left(n'_i, \frac{\beta_i}{e_i}\right) = MDC\left(\frac{e_{i-1}}{e_i}, \frac{\beta_i}{e_i}\right) = \frac{1}{e_i} MDC(e_{i-1}, \beta_i) = \frac{e_i}{e_i} = 1,$$

da igualdade $k \frac{\beta_i}{e_i} = n'_i p$ temos que n'_i divide k . Logo $n_i = \min\{k \in \mathbb{N}^*; k\lambda_i \in Q_{i-1}\} = n'_i$.



Desta forma temos que os $n_i = n'_i$ para todo $i = 1, \dots, g$ e

$$\begin{aligned} \nu_1 &= (v_0, 0, \dots, 0) = (n, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ \nu_r &= (0, 0, \dots, v_0) = (0, 0, \dots, n) \\ \nu_{r+1} &= (v_1, \dots, v_1) = (\beta_1, \dots, \beta_1) \\ \nu_{r+2} &= n_1 \nu_{r+1} + \lambda_2 - \lambda_1 \\ &= n_1(v_1, \dots, v_1) + (\beta_2, \dots, \beta_2) - (\beta_1, \dots, \beta_1) \\ &= (v_2, \dots, v_2) \\ &\vdots \\ \nu_{r+g} &= (v_g, \dots, v_g). \end{aligned}$$

Desta forma, temos que $\Gamma_H = n\mathbb{N}^r + \sum_{i=1}^g (v_i)\mathbb{N}$.

Seja $\varphi = (t^n, t^{\beta_1}u(t))$ a parametrização de uma curva plana e consideremos a quase ordinária H associada a esta curva, conforme vimos anteriormente, com parametrização dada por

$$H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1 \cdots t_r)) = t_1^{\beta_1} \cdots t_r^{\beta_1} u(t_1 \cdots t_r)$$

e de modo que os expoentes de S estão bem ordenados com respeito à ordem $>$.

Dado $\delta \in \Gamma_\varphi$, existe $g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ tal que $g(t^n, S(t)) = t^\delta v(t)$ em que $v(0) \neq 0$. Isto implica que

$$g(t_1^n \cdots t_r^n, S(t_1 \cdots t_r)) = t_1^\delta \cdots t_r^\delta v(t_1 \cdots t_r)$$

e assim, $\underline{\delta} = (\delta, \dots, \delta) \in \Gamma_H$ pois $g(X_1 \cdots X_r, X_{r+1}) \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{r+1}\}$ e temos que $\nu_H(g(X_1 \cdots X_r, X_{r+1})) = \underline{\delta}$.

Isto motiva considerarmos o homomorfismo de \mathbb{C} -álgebras

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C}\{X, Y\} &\rightarrow \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r, X_{r+1}\} \\ h(X, Y) &\mapsto h(X_1 \cdots X_r, X_{r+1}). \end{aligned}$$

Note que, se $h = \sum a_{ij} X^i Y^j \in \ker(T)$, então $0 = T(h) = \sum a_{ij} X_1^i \cdots X_r^i X_{r+1}^j$ se, e somente se, $a_{ij} = 0$ para todo i, j , ou seja, $h = 0$. Logo, T é um monomorfismo e portanto, $Im(T) = \mathbb{C}\{X_1 \cdots X_r, X_{r+1}\} \approx \mathbb{C}\{X, Y\}$.

Assim, $\hat{\Gamma} = \{\nu_H(h); h \in Im(T)\}$ é semigrupo e

$$\hat{\Gamma} = \Delta \cap \Gamma_H$$



onde Δ denota a diagonal de \mathbb{N}^r .

Deste modo, dada H quase ordinária, se considerarmos $(\sigma, \rho) \in \tilde{\mathcal{A}}$ com $\rho = Id$ e

$$\sigma(X_1, \dots, X_r, X_{r+1}) = (X_1, \dots, X_r, X_{r+1} - \underbrace{g(X_1 \cdots X_r, X_{r+1})}_{T(g)})$$

com $g(X, Y) \in (X, Y)^2$ e, conseqüentemente, $g(X_1 \cdots X_r, X_{r+1}) \in (X_1, \dots, X_{r+1})^2$, teremos

$$\sigma H \rho^{-1}(t_1, \dots, t_r) = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1 \cdots t_r) - g(t_1^n \cdots t_r^n, S(t_1 \cdots t_r))). \quad (3.23)$$

Sempre que tivermos $\delta \in \Gamma_\varphi$, então $(\underline{\delta}) = (\delta, \dots, \delta) \in \hat{\Gamma} \subset \Gamma_H$. Conseqüentemente, dado um expoente $(\underline{\alpha}) = (\alpha, \dots, \alpha)$ em $S(t_1 \cdots t_r)$ tal que $\alpha \in \Gamma_\varphi$, então $(\underline{\alpha}) \in \hat{\Gamma}$ e existe $g(X, Y) \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ tal que

$$g(t_1^n \cdots t_r^n, S(t_1 \cdots t_r)) = t_1^\alpha \cdots t_r^\alpha w(t_1 \cdots t_r)$$

com $w(0) \neq 0$ e de modo que em (3.23) podemos eliminar o termo $t_1^\alpha \cdots t_r^\alpha$ sem alterar os termos anteriores e introduzindo, eventualmente, termos com expoente $(\beta, \dots, \beta) \in \Delta$, tal que $\beta > \alpha$.

Como o vetor de Frobenius é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_H &= \sum_{i=1}^g (n_i - 1) \nu_{r+i} - (\underline{v}_0) = \sum_{i=1}^g (n_i - 1) v_i(\underline{1}) - v_0(\underline{1}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^g (n_i - 1) v_i - v_0 \right) (\underline{1}) = (c - 1)(\underline{1}) \end{aligned}$$

em que c é o condutor do semigrupo da curva plana e $\mathcal{F}_H \prec (\underline{c}) + (\underline{\alpha}) \in \hat{\Gamma}$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}$, então podemos eliminar todos os termos de H com ordem $(\underline{\beta}) = (\beta, \dots, \beta)$, $\beta \in \Gamma_\varphi$. Em particular, H é \mathcal{A} -equivalente ao seu truncamento no termo com expoente $(\underline{c} - \underline{1})$.

Portanto,

$$H \stackrel{\mathcal{A}}{\sim} \left(t_1^n, \dots, t_r^n, t_1^{\beta_1} \cdots t_r^{\beta_1} + \sum_{\substack{i \notin \Gamma_\varphi \\ \beta_1 < i < c}} a_i t_1^i \cdots t_r^i \right).$$

Observação 3.20. Embora várias informações da curva plana possibilitem obter imediatamente, informações da hipersuperfície quase ordinária, como o semigrupo, por exemplo,



muitas outras informações não apresentam conexões aparentes. Por exemplo, é bem conhecido que o número de Milnor μ de uma curva plana definida por $f \in \mathbb{C}\{X, Y\}$, isto é, $\mu = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{X, Y\}}{\langle f_X, f_Y \rangle}$ é um importante invariante topológico e é finito. No entanto, se considerarmos a curva plana com parametrização $\varphi = (t^2, t^e)$ com $1 = MDC(2, e)$ e $e > 2$, temos que a curva é definida por $Y^2 - X^e$ cujo número de Milnor é $\mu(\varphi) = e - 1$, enquanto a hipersuperfície quase ordinária $f = Z^2 - X^e Y^e$ que admite parametrização $H = (t_1^2, t_2^2, t_1^e t_2^e)$ tem número de Milnor $\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{X, Y, Z\}}{\langle f_X, f_Y, f_Z \rangle} = \infty$.

No que segue faremos uma breve análise sobre o conjunto $\Lambda_{\mathcal{D}}(H)$ para este tipo particular de hipersuperfície quase ordinária.

Para curvas planas sabemos que

$$\delta \in \Lambda_{\varphi} \Leftrightarrow \text{existe } \omega \in \Omega_{\mathbb{C}\{X, Y\}}^1 \text{ tal que } \omega(\varphi) = t^{\delta-1} u(t) dt.$$

Se tomarmos

$$\omega' = dX_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX_i} \wedge \cdots \wedge dX_r \wedge \omega(X_1 \cdots X_r, X_{r+1})$$

teremos

$$\omega'(H) = (-1)^{r-i} t_1^{\delta+n-1} \cdots t_i^{\delta-1} \cdots t_r^{\delta+n-1} u(t_1 \cdots t_r) dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_r.$$

Deste modo, se $\delta \in \Lambda_{\varphi}$, então $(\underline{\delta}) + (\underline{n}) - \nu_i \in \Lambda_{\mathcal{D}}(H)$ para todo $i = 1, \dots, r$.

A análise acima pode ser resumida no seguinte resultado.

Proposição 3.21. *Seja $\varphi = (t^n, S(t))$ uma parametrização de uma curva plana e $H = (t_1^n, \dots, t_r^n, S(t_1 \cdots t_r))$ a parametrização de uma hipersuperfície quase ordinária associada a φ como descrito anteriormente. Temos que*

$$\Gamma_H = \Gamma_{\varphi}(\underline{1}) + n\mathbb{N}^r \text{ e } \bigcup_{i=1}^r \Lambda_{\varphi}(\underline{1}) + (\underline{n}) - \nu_i \subset \Lambda_{\mathcal{D}}(H).$$

O exemplo a seguir indica que ainda podem haver elementos de Γ_H em $\Lambda_{\mathcal{D}}(H)$, dependendo da expressão de H .

Exemplo 3.22. Seja $H_d = (t_1^3, t_2^3, t_1^4 t_2^4 + dt_1^5 t_2^5)$. Neste caso, temos que $\underline{v}_1 = (4, 4)$ e claramente $2\underline{v}_1 \in \Gamma_H \setminus \Upsilon_H$. Existe $\omega \in \Omega_{\mathcal{O}}^2$, tal que $\nu_{H_d}(\omega) = 2\underline{v}_1 = (8, 8)$, ou seja, $2\underline{v}_1 \in \Lambda_{\mathcal{D}}(H_d)$?



Para respondermos a esta questão, consideremos

$$\omega = h_3 dX_1 \wedge dX_2 + h_2 dX_1 \wedge dX_3 + h_1 dX_2 \wedge dX_3.$$

Temos então que,

$$\frac{\omega(H_d)}{dt_1 \wedge dt_2} = h_3(H_d)9t_1^2 t_2^2 + h_2(H_d)3t_1^2(4t_1^4 t_2^3 + 5dt_1^5 t_2^4) - h_1(H_d)3t_2^2(4t_1^3 t_2^4 + 5dt_1^4 t_2^5).$$

Agora, notemos que para analisar a possibilidade de encontrarmos $2v_1 - (1)$ como expoente dominante, basta considerar em h_i termos em X_i de grau no máximo igual a 1, para $i = 1, 2, 3$ e em h_3 eventuais termos em X_1 e X_2 , isto é, $h_1 = a_0 + a_1 X_1$, $h_2 = b_0 + b_1 X_2$ e $h_3 = g_1(X_1, X_2) + cX_3$. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{\omega(H_d)}{dt_1 \wedge dt_2} &= 9g_1(t_1^3, t_2^3)t_1^2 t_2^2 - 12a_0 t_1^3 t_2^6 - 15a_0 dt_1^4 t_2^7 + 12b_0 t_1^6 t_2^3 + \\ &\quad (9c + 12b_1 - 12a_1)t_1^6 t_2^6 + 15b_0 dt_1^7 t_2^4 + d(9c + 15b_1 - 15a_1)t_1^7 t_2^7. \end{aligned}$$

Para que possamos obter o expoente desejado devemos obrigatoriamente tomar $a_0 = b_0 = 0$, que nos dá

$$\frac{\omega(H_d)}{dt_1 \wedge dt_2} = 9g_1(t_1^3, t_2^3)t_1^2 t_2^2 + (9c + 12b_1 - 12a_1)t_1^6 t_2^6 + d(9c + 15b_1 - 15a_1)t_1^7 t_2^7.$$

Como nenhum termo de $g_1(t_1^3, t_2^3)t_1^2 t_2^2$ influenciará na obtenção do expoente desejado, podemos considerar $g_1 = 0$ e $9c = 12a_1 - 12b_1$. Note que, se $d = 0$, isto é, a parametrização é monomial, então $2v_1 \notin \Lambda_{\mathcal{D}}(H_0)$. A análise acima também indica que $2v_1 \notin \Lambda_{\mathcal{N}}(H_0)$. Por outro lado, se $d \neq 0$, então considerando $a_1 \neq b_1$ e a 2-forma diferencial $\omega = \frac{4}{3}(a_1 - b_1)X_3 dX_1 \wedge dX_2 + b_1 X_2 dX_1 \wedge dX_3 + a_1 X_1 dX_2 \wedge dX_3$ obtemos que $\nu\left(\frac{\psi_{H_d}(\omega)}{dt_1 \wedge dt_2}\right) + (1, 1) = 2v_1 \in \Lambda_{\mathcal{D}}(H_d) \subset \Lambda_{\mathcal{N}}(H_d)$.

No caso de curvas planas, temos que $C_1 = (t^3, t^4 + t^5)$ é \mathcal{A} -equivalente à $C_0 = (t^3, t^4)$. No entanto, as hipersuperfícies quase ordinárias obtidas a partir destas curvas planas não o são.

De fato, consideremos H_i a hipersuperfície quase ordinária obtida de C_i , para $i = 0, 1$, ou seja,

$$H_0 = (t_1^3, t_2^3, t_1^4 t_2^4) \text{ e } H_1 = (t_1^3, t_2^3, t_1^4 t_2^4 + t_1^5 t_2^5).$$

Se H_1 fosse \mathcal{A} -equivalente à H_0 , então como as parametrizações são normalizadas, deveria haver (σ, ρ) como descritos no Teorema 2.1, tal que $\sigma H_1 \rho^{-1}(t_1, t_2) = H_0$.



Neste caso, temos

$$\begin{aligned}\rho^{-1}(t_1, t_2) &= (\alpha_1 t_1 + \beta_1 t_1^2 t_2^4 + (t_1^3), \alpha_2 t_2 + \beta_2 t_1^4 t_2^2 + (t_2^3)) \\ \sigma_3(X_1, X_2, X_3) &= (\alpha X_3 + q_3)\end{aligned}$$

com $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}^*$, $q_3 \in \mathcal{M}_3^2$, tal que $t_1^4 t_2^4 | q_3(H_1)$ e (t_i^k) denota termos com potência maior ou igual a k em t_i .

É fácil constatar que $q_3(H_1)$ introduz termos com expoentes distintos de $(5, 5)$. Além disto,

$$\sigma H_1 \rho^{-1}(t_1, t_2) = (t_1^3, t_2^3, S)$$

com

$$\begin{aligned}S &= \alpha((\alpha_1^4 t_1^4 + 4\beta_1 t_1^5 t_2^4 + (t_1^6))(\alpha_2^4 t_2^4 + 4\beta_2 t_1^4 t_2^5 + (t_2^6)) + \\ &\quad (\alpha_1^5 t_1^5 + (t_1^6))(\alpha_2^5 t_2^5 + (t_2^6))) + q_3(H_1) \\ &= \alpha(\alpha_1^4 \alpha_2^4 t_1^4 t_2^4 + \alpha_1^5 \alpha_2^5 t_1^5 t_2^5 + h(t_1, t_2)) + q_3(H_1)\end{aligned}$$

em que $h(t_1, t_2)$ contém termos com potência em t_1 ou em t_2 maiores ou iguais a 6.

Portanto, não podemos eliminar o termo $t_1^5 t_2^5$ e assim H_1 não é \mathcal{A} -equivalente à H_0 .

A.1 Séries de Potências

Neste apêndice apresentaremos sucintamente alguns resultados básicos relativo às séries de potências analíticas cujas justificativas são imediatas ou podem ser encontradas em [10] e [22].

Considere $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}$ o anel das séries de potências analíticas nas indeterminadas X_1, \dots, X_r com coeficientes no corpo dos números complexos \mathbb{C} . Temos que $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}$ é um domínio local de fatoração única.

Um elemento $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}$, com P_i um polinômio homogêneo de grau i , é inversível se, e somente se, $P_0 \neq 0$. Além disto, dizemos que $f, h \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}$ são *associados*, se existe uma unidade $u \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}$, tal que $f = uh$.

Definição A.1. Seja $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\} \setminus \{0\}$ tal que $f = \sum_{i=n}^{\infty} P_i$, em que cada P_j é um polinômio homogêneo de grau j e $P_n \neq 0$. O polinômio homogêneo P_n é chamado *forma inicial de f* . O inteiro n é chamado de *multiplicidade de f* e é denotado por $\text{mult}(f)$. Se $f = 0$, então convencionamos que $\text{mult}(f) = \infty$.

A multiplicidade de séries de potências goza das seguintes propriedades:

1. $\text{mult}(u) = 0$ se, e somente se, $u \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}$ é uma unidade.
2. $\text{mult}(fh) = \text{mult}(f) + \text{mult}(h)$;



3. $\text{mult}(f \pm h) \geq \min\{\text{mult}(f), \text{mult}(h)\}$ com igualdade sempre que $\text{mult}(f) \neq \text{mult}(h)$.
4. $\text{mult}(\Phi(f)) = \text{mult}(f)$ para todo $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}$ e Φ um \mathbb{C} -automorfismo de $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}$.

Se $\text{mult}(f(0, \dots, 0, X_j, 0, \dots, 0)) = m$, então dizemos que $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}$ é regular de ordem m com respeito à indeterminada X_j . Se f é regular de ordem $m = \text{mult}(f)$ com respeito à indeterminada X_j , então diremos simplesmente que f é *regular* com respeito à X_j .

A propriedade de regularidade de uma série $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}$ em uma indeterminada não é um fato tão restritivo, se permitirmos atuar automorfismos de $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}$. De fato, temos o seguinte resultado:

Proposição A.2. *Dado $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}$ existe um \mathbb{C} -automorfismo de $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}$, tal que $\Phi(f)$ é regular em uma das indeterminadas.*

Demonstração. Lema 3, Capítulo VII, página 147 de [10]. □

O conceito abaixo é usado constantemente neste trabalho.

Definição A.3. Um polinômio $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ da forma,

$$p(X_1, \dots, X_r, X_{r+1}) = X_{r+1}^n + a_1(X_1, \dots, X_r)X_{r+1}^{n-1} + \dots + a_n(X_1, \dots, X_r)$$

com $n \geq 1$ é chamado um *polinômio de Weierstrass*, se $\text{mult}(a_i(X_1, \dots, X_r)) \geq i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

O resultado abaixo assegura que toda série regular com respeito a uma indeterminada é associada a um polinômio de Weierstrass.

Teorema A.4 (Teorema de Preparação de Weierstrass). *Seja uma série de potências $f(X_1, \dots, X_r) \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r, X_{r+1}\}$ com $\text{mult}(f) > 0$ e regular com respeito à X_{r+1} . Existe uma única unidade $u \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{r+1}\}$, tal que $uf = p$ e $p \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ é um polinômio de Weierstrass de grau $\text{mult}(f)$.*

Demonstração. Proposição 3.3, página 14 de [22]. □



A.2 Resultante e Discriminante

No que segue, relembremos os conceitos de resultante e discriminante de um polinômio, assim como algumas de suas propriedades que nos permite definir algebricamente uma hipersuperfície quase ordinária.

Sejam A um domínio e $p = a_0Y^n + a_1Y^{n-1} + \dots + a_{n-1}Y + a_n$, $q = b_0Y^m + b_1Y^{m-1} + \dots + b_{m-1}Y + b_m \in A[Y]$. O *resultante* (em Y) dos polinômios p e q é definido por $R_Y(p, q) = \det(R)$ em que R é a matriz $(n+m) \times (n+m)$ dada por

$$R = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_{m-1} & b_m & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_{m-1} & b_m & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_0 & b_1 & \cdot & b_{m-1} & b_m \end{pmatrix}$$

em que os coeficientes de $p(Y)$ aparecem nas m primeiras linhas e os coeficientes de $q(Y)$ aparecem nas n últimas linhas.

Se $p, q \in A[Y] \setminus A$, então também podemos calcular o resultante de p e q da seguinte maneira

$$R_Y(p, q) = a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\xi_i - \eta_j) = a_0^m \prod_{i=1}^n q(\xi_i) = (-1)^{nm} b_0^n \prod_{j=1}^m p(\eta_j) \quad (\text{A.1})$$

em que ξ_i e η_j são raízes de p e q , respectivamente. Em particular, temos que o resultante é zero se, e somente se, p e q têm ao menos uma raiz comum.

O *discriminante* de um polinômio $p = Y^n + a_1Y^{n-1} + \dots + a_{n-1}Y + a_n \in A[Y]$ é definido por

$$\Delta_Y p = R_Y(p, p_Y) = \prod_{i \neq j} (\xi_i - \xi_j) \quad (\text{A.2})$$

em que ξ_i e ξ_j são raízes de p e p_Y é a derivada de p com respeito à Y .

Definição A.5. Seja $\eta = \sum c_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r} \in \mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{n}}, \dots, X_r^{\frac{1}{n}}\}$. Se for possível escrever η na forma $\eta = X_1^{m_1} \dots X_r^{m_r} u(X_1, \dots, X_r)$ com $m_i \in \mathbb{Q}_+$ para $i = 1, \dots, r$ e u



unidade, diremos que η possui expoente dominante \underline{m} e denotaremos este expoente por $\nu_{X_1, \dots, X_r}(\eta) = \underline{m}$.

O conceito que apresentaremos a seguir é utilizado para definir o semigrupo de uma hipersuperfície quase ordinária.

Definição A.6. Seja $\eta = \sum c_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_r^{\alpha_r} \in \mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{n}}, \dots, X_r^{\frac{1}{n}}\}$ e considere $Supp(\eta) = \{\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^r; c_\alpha \neq 0\}$. O poliedro de Newton de η é o fecho convexo em \mathbb{R}^r do conjunto $Supp(\eta) + \mathbb{R}_+^r$, ou seja, $\overline{Supp(\eta) + \mathbb{R}_+^r}$ que denotaremos por $\mathcal{N}_{X_1, \dots, X_r}(\eta)$, ou simplesmente, $\mathcal{N}_X(\eta)$.

Denotaremos por $V_{\mathcal{N}}(\eta) := \{\underline{\delta}; \underline{\delta} \text{ é vértice de } \mathcal{N}_X(\eta)\}$ o conjunto dos vértices de $\mathcal{N}_X(\eta)$.

Observação A.7. Se $f, h \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_r\}[X_{r+1}]$ são tais que $deg(f) = n$ e $deg(h) = m$, de (A.1) temos,

$$\mathcal{N}_{X_1, \dots, X_r}(R_{X_{r+1}}(f, h)) = \mathcal{N}_{X_1, \dots, X_r} \left(\prod_{i=1}^n h(\xi_i) \right) = deg(f) \mathcal{N}_{X_1, \dots, X_r}(h(\xi_i))$$

e

$$\mathcal{N}_{X_1, \dots, X_r}(R_{X_{r+1}}(f, h)) = \mathcal{N}_{X_1, \dots, X_r} \left(\prod_{j=1}^m f(\tau_j) \right) = deg(h) \mathcal{N}_{X_1, \dots, X_r}(f(\tau_j))$$

onde ξ_i , com $i = 1, \dots, n$ são raízes de f e τ_j , com $j = 1, \dots, m$ são raízes de h .

Para justificativas das propriedades apresentadas acima indicamos [10] e [22].

Referências Bibliográficas

- [1] Abhyankar, S. S.; *On the ramification of algebraic functions*. Amer. J. Math., 77, 575-592, (1995).
- [2] Assi, A.; *The Frobenius vector of a free affine semigroup*. Journal of Algebra and its Applications, vol 11, n° 4, (2012).
- [3] Ban, C.; *A Whitney stratification and equisingular family of quasi-ordinary singularities*. Proceedings of the American Mathematical Society, vol 117, n° 2, (1993).
- [4] Delorme, C.; *Sur les modules de singularités des courbes planes*. Bull. Soc. Math. France, 106, 417-446, (1978).
- [5] Farid, T.; *Singularidades de aplicações diferenciáveis - Notas didáticas do ICMC*, n°34, São Carlos, (1999).
- [6] Gau, Y.; *Embedded topological classification of quasi-ordinary singularities*. Mem. American Mathematical Society, vol 74, n° 388, (1988).
- [7] González Pérez, P. D.; *Quasi-ordinary singularities via toric geometry*; Tesis Doctoral, Universidad de La Laguna, (2000).
- [8] González Pérez, P. D.; *The semigroup of a quasi-ordinary hypersurface*; J. Inst. Math. Jussieu, 2 no. 3, 383-399, (2003).



- [9] González Pérez, and P. D., González-Springberg, G.; *Analytical invariants of quasi-ordinary hypersurface singularities associated to divisorial valuations*; Kodai Math. J., 27, n° 2, 164-173, (2004).
- [10] Hefez, A.; *Irreducible plane curve singularities, Real and Complex Singularities*. Lectures Notes in Pure and Appl. Math. 232 Dekker, 1-120. New York, (2003).
- [11] Hefez, A. and Hernandez, M. E.; *Analytic classification of plane branches up to multiplicity 4*. Journal of Symbolic Computation, 44, 626-634, (2009).
- [12] Hefez, A. and Hernandez, M. E.; *The analytic classification of plane branches*. Bull. London Math. Soc., 43, 289-298, (2011).
- [13] Kiyek, K. and Vicente, J. L.; *On the Jung-Abhyankar theorem*. Archiv der Mathematik 83, 123-134, (2004).
- [14] Kiyek K. and Micus M.; *Semigroup of a quasiordinary singularity*; Topics in Algebra, Banach Center Publications, volume 26, part 2, pwn-polish scientific publishers, Warsaw, (1990).
- [15] Lipman, J.; *Quasi-ordinary singularities of surfaces in \mathbb{C}^3* . Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 40, Part 2, 161-172, (1983).
- [16] Lipman, J.; *Quasi-ordinary singularities of embedded surfaces*. Ph.D. dissertation, Harvard Univ., Cambridge, (1965).
- [17] Lipman, J.; *Topological invariants of quasi-ordinary singularities*. Mem. American Mathematical Society., vol 74, n° 388, (1988).
- [18] Michler, R. and Monique, L. J.; *Affine hypersurfaces with Gorenstein singular loci*. Proceedings of the American Mathematical Society, vol 130, n° 12, (2002).
- [19] Micus, M.; *Zur formalen Äquivalenz von quasigewöhnlichen Singularitäten*; Thesis, Paderborn, (1987).
- [20] Oh, K.; *Topological types of quasi-ordinary singularities*. Proceedings of the American Mathematical Society, vol 117, n° 1, (1993).



- [21] Popescu-Pampu P.; *On the analytical invariance of the semigroups of a quasi-ordinary hypersurface singularity*. Duke Math. J. 124, no. 1, 67-104, (2004).
- [22] Ruiz, J. M.; *The basic theory of power series*. Advanced Lectures in Mathematics, (1993).
- [23] Zariski, O.; *Characterization of plane algebroid curves whose module of differentials has maximum torsion*, Proceedings Nat. Acad. of Science U.S.A. 56, 781-786, (1966).
- [24] Zariski, O.; *Studies in equisingularity III. Saturation of local rings and equisingularity*, Collected papers, Vol 4, 96-158, (1979).