UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

RICHARD WAGNER MACIEL ALVES

Função Admissível e Dinâmica Topológica

Maringá-PR
2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Função Admissível e Dinâmica Topológica

TESE DE DOUTORADO

Richard Wagner Maciel Alves

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito para obtenção do título de Doutor em Matemática.
Área de concentração: Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Dr. Josiney Alves de Souza.

Maringá-PR
2018

RICHARD WAGNER MACIEL ALVES

FUNÇÃO ADMISSÍVEL E DINÂMICA TOPOLÓGICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Josiney Alves de Souza

Prof. Dr. Josiney Alves de Souza
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi
Universidade de São Paulo – São Carlos

Thaís F. M. Monis

Profa. Dra. Thaís Fernanda Mendes Monis
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – Rio Claro

Ryuichi Fukuoka

Prof. Dr. Ryuchi Fukuoka
DMA/Universidade Estadual de Maringá

PHBaptistelli

Profa. Dra. Patrícia Hernandes Baptistelli
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 26 de outubro de 2018.
Local de defesa: Auditório do Departamento de Matemática, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Agradecimentos

Senhor, não só agradeço como também dedico este trabalho à Ti, sei que sem tua ajuda nada disso seria possível. Obrigado por ter me concedido sabedoria e força para realização desse sonho.

Gostaria também de expressar meus sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. Josiney Alves de Souza que me orientou neste trabalho, por ser sempre atencioso e paciente.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

A tese está dividida em duas partes. Na primeira, introduzimos a função admissível que pode ser vista como uma métrica abstrata sobre espaços completamente regulares. Nesse sentido, conceitos uniformes são revisitados e teoremas clássicos são reproduzidos. Em particular, construímos uma versão não metrizável do teorema da interseção de Cantor-Kuratowski. Na segunda parte, as noções de atrator global e atrator uniforme global são estendidas para ações de semigrupos gerais. Em especial, estudamos condições necessárias e suficientes para a existência do atrator global para semigrupos agindo em espaços completamente regulares. Além disso, apresentamos condições para a equivalência entre o atrator global e o atrator uniforme global.

Palavras-chave: Função admissível, Teorema da interseção de Cantor-Kuratowski, ações de semigrupo, atratores globais.

Abstract

The thesis is divided in two parts. In the first part we introduce the admissible function, which can be seen as an abstract metric on completely regular space. In this sense, uniformity concepts are revisited and classical theorems are reproduced. In particular, we construct a non-metrizable version of the Cantor–Kuratowski intersection theorem. In the second part, the notions of global attractor and global uniform attractor are extended to the setting of general semigroup actions. Especially, we study necessary and sufficient conditions for the existence of the global attractor for semigroups acting on completely regular spaces. Futhermore, we present conditions for the equivalence between the global attractor and global uniform attractor.
Key-words: admissible function, Cantor-Kuratowski intersection theorem, semigroup actions, global attractors.

Sumário

Introdução

Nesta tese vamos provar que a estrutura admissível pode ser aperfeiçoada por meio de uma aplicação binária que estende o conceito de distância. A então chamada função admissível permite uma ampliação conceitual da teoria dos espaços uniformizáveis além de aplicações à hiperconvergência e Dinâmica Topológica.

Espaços admissíveis são uma generalização de espaços métricos. A importância desta classe reside no fato de que sua estrutura de coberturas nos possibilita transferir metodologias de espaços métricos para espaços não metrizáveis. A noção de família admissível de coberturas abertas foi introduzida por Patrão e San Martin em [23]. Este artigo tem como principal objetivo o desenvolvimento da teoria de transitividade por cadeia para semi-fluxos. Em contrapartida, os artigos [9,10,14,31,33] falam sobre recorrência por cadeias para ações de semigrupos enquanto que [12] e [32] dizem respeito à estabilidade de Lyapunov e dispersividade para semigrupos de transformação. Além disso, ainda podemos encontrar em [12] tal conceito aplicado ao estudo dos fibrados. O primeiro trabalho a expor certa preocupação com aspectos relativos a topologia desses espaços foi o artigo [24] onde foi demonstrado que espaços uniformizáveis são admissíveis. Em seguida, foi provado em [2] que os mesmos são uniformizáveis ficando assim atestada a equivalência entre essas duas classes.

Um dos objetivos deste trabalho é estabelecer um procedimento sobre o conjunto das partes de uma família admissível de coberturas que generaliza a noção de distância. Em síntese, vamos construir uma função que atua como uma espécie de métrica abstrata sobre espaços admissíveis. Mostraremos que a então chamada função admissível deixa mais evidente a extensão de técnicas empregadas em espaços métricos e também fornece uma melhor interpretação de conceitos adjacentes à teoria de espaços uniformizáveis. Faremos uso de uma das técnicas mais comuns para se generalizar a noção de métrica que consiste basicamente em modificar o seu contradomínio. Exemplos deste tipo de metodologia são as métricas estatísticas de Menger, métricas difusas de Kramosil e Michálek (ver [19]) e distâncias abstratas definidas especialmente por A. Appert (ver [7]), G. Kurepa (ver [18]) e J.Colmez (ver [20]).

O conceito de distância induzido por uniformidades não é uma novidade. De fato, [7], [18] e [20] são trabalhos que utilizam este tipo de método. Uma construção mais atual, por assim dizer, pode ser encontrada em [34] onde Tallafha e Khalil consideraram uma aplicação sobre os espaços uniformes semi-lineares com valores em um conjunto totalmente ordenado de uma uniformidade diagonal fixa. Por outro lado, de forma independente definiremos uma aplicação com valores no monóide comutativo parcialmente ordenado $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ que vai nos permitir não somente o estudo mas também a inserção de conceitos não discutidos até o momento em espaços uniformizáveis. Nessa perspectiva, iremos introduzir as noções de diâmetro, medida de não compacidade, distância de Hausdorff e com isso provar alguns resultados entres os quais destacamos os Teoremas 1.3.1, 1.4.1 e 1.4.4.

Outro objetivo deste trabalho é aplicar a função admissível no estudo da hiperconvergência e dinâmica topológica. Seguindo a metodologia instituída em [26] vamos estender a teoria de atratores globais para ações de semigrupos de espaços métricos para espaços uniformizáveis. Esta classe abrange um amplo escopo da análise matemática uma vez que todo espaço topológico estudado neste ramo é pelo menos completamente regular (uniformizável). Para definir atração iremos considerar a estrutura admissível em vez da estrutura uniforme no espaço de fase. Com isso, vamos reproduzir a semidistância de Hausdorff e estender todos os resultados de [26]. Sobretudo, discutiremos condições necessárias e suficientes para a existência do atrator global e também sua relação com o atrator uniforme global. Além disso, iremos definir ação de semigrupo limite compacta e usar o teorema de Cantor-Kuratowski para estabelecer uma ligação entre compacidade assintótica e compacidade limite. Finalmente, recorreremos a conceitos de hiperconvergência para expandir resultados contidos em [27] relacionados principalmente à continuidade e estabilidade das aplicações conjunto limite. Em resumo, vamos utilizar a função admissível para reproduzir a hiperconvergência de Hausdorff e com isso estudar a semicontinuidade de multifunções com valores definidos principalmente por fecho da órbita, conjunto limite, prolongamento e conjunto limite prolongacional.

Organização do Trabalho

No Capítulo 1 introduzimos uma noção abstrata de métrica sobre espaços uniformizáveis. Na Seção 1.2 apresentamos as propriedades algébricas que qualificam o conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ como um espaço de valoração ideal para a função distância generalizada. Em seguida definimos o conjunto de valores essenciais que é responsável por assegurar a compatibilidade entre conceitos adjacentes à função admissível e à estrutura uniforme. Na Proposição 1.3.1 listamos algumas propriedades da função admissível e na Seção 1.3 definimos o diâmetro. Tal conceito não havia sido discutido ainda em espaços não metrizáveis. Comprovamos sua relevância com a demonstração dos Teoremas 1.3.1 e 1.5.3. É importante observar que o diâmetro permite a reformulação do Lema da cobertura de Lebesgue. Em resumo tal definição é consistente com a primeira versão contida em [30]. Fornecemos na Seção 1.4 uma caracterização das funções uniformemente contínuas por meio do conceito de módulo de continuidade. Além disso, na Seção 1.5 provamos o Teorema da interseção de Cantor (ver Teorema 1.5.3). Por último, na Seção 1.6 relacionamos conceitos métricos e admissíveis através das funções de conexão.

No Capítulo 2, mais especificamente na Seção 2.2, fornecemos uma leitura alternativa da estrutura uniforme diagonal do Hiperespaço $\mathcal{H}(X)$ induzida pela família de coberturas $\mathcal{O}$ (ver Teorema 2.2.1 e Proposição 2.2.2). Além do mais, no caso de um espaço Hausdorff compacto mostramos que a topologia uniforme do hiperespaço coincide com a topologia construída por E. Michael em [21]. Na Seção 2.3 estudamos a convergência induzida por ρ_H. Em resumo, estabelecemos uma relação entres as noções de convergência em $\mathcal{H}(X)$ adjacentes à estrutura uniforme e à aplicação ρ_H (ver Proposição 2.3.1) e também provamos a unicidade do limite de redes em $\mathcal{H}(X)$ (ver Proposição 2.3.2). Encerramos o Capítulo 2 com a Seção 2.4 que aborda a noção de Convergência de Kuratowski-Painlevé. Nesta Seção, provamos uma equivalência entre a ρ_H-convergência e convergência de Kuratowski-Painlevé para redes de compactos em $\mathcal{K}(X)$ (ver Teorema 2.4.1).

No Capítulo 3 estudamos atratores globais para ações de semigrupos. Em suma, generalizamos resultados obtidos em [26] onde a teoria foi construída sobre espaços métricos. Provamos que embora não se possa trabalhar com uma métrica podemos formular a teoria de atratores globais por meio da coleção $\rho_A(B)$ (ver Definição 2.1.2) que é na prática equivalente à distância de Hausdorff. Com isso, todo encaminhamento metodológico proposto em [26] pode ser aplicado na construção de uma teoria abstrata de atratores para ações de semigrupo em espaços topológicos mais gerais. Iniciamos a Seção 3.1 relembrando os entes matemáticos necessários ao estudo da dinâmica assintótica para a ação de um semigrupo. Em especial, definimos base de filtro, $\mathcal{F}$-divergência e hipóteses de translação. Em seguida, mostramos que se a ação admite um atrator global então ele é único e se exprime como a união de todos subconjuntos invariantes do espaço. Na Seção 3.3 definimos os conjuntos ω-limite, o primeiro conjunto limite prolongacional e alguns tipos especiais de ações: ação assintoticamente compacta, limitada e limitada dissipativa. No Teorema 3.3.1 provamos que se a ação for assintoticamente compacta então os conjuntos ω-limite são não vazios e adquirem uma propriedade extra de compacidade. Na Proposição 3.3.7 apresentamos condições que asseguram a invariância do ω-limite e na Proposição 3.3.8 investigamos sua conexidade. Logo depois, provamos o Teorema 3.3.3 que garante compatibilidade entre os conceitos de compacidade sobre espaços completos. Por fim, esclarecemos a relação entre o conjunto ω-limite e o conjunto limite prolongacional através da Proposição 3.3.15. A Seção 3.4 é dedicada à busca de condições necessárias e suficientes para a existência e a caracterização do atrator global (ver Teoremas 3.4.1 e 3.4.2). Definimos na Seção 3.5 o atrator uniforme global e depois relacionamos atratores globais e uniformes. Por último, utilizando as hipóteses de translação e também a noção de conjunto localmente absorvente construímos um atrator local para (S, X) assintoticamente compacta. Encerramos o capítulo estudando continuidade e estabilidade para as aplicações conjunto limite. Esta parte do trabalho teve como fonte inspiradora o artigo [27].

Capítulo 1

Função Admissível

Neste capítulo vamos introduzir uma generalização do conceito de distância, a qual é feita a partir da estrutura de coberturas abertas dos espaços admissíveis. Então, investigaremos suas propriedades e revisaremos conceitos uniformes. Vamos ainda estender as noções de diâmetro e a medida de não compacidade e com isso provar versões não metrizáveis do Teorema de Cantor e Teorema de Cantor-Kuratowski.

1.1 Preliminares

1.1.1 Espaços admissíveis

Seja X um espaço topológico e $\mathcal{U}$,$\mathcal{V}$ coberturas de X. Dizemos que $\mathcal{U}$ refina $\mathcal{V}$ ou que $\mathcal{U}$ é um refinamento de $\mathcal{V}$ e nesse caso escrevemos $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ se, e somente se, cada $U \in \mathcal{U}$ está contido em algum $V \in \mathcal{V}$. Dizemos ainda que $\mathcal{U}$ é um refinamento duplo de $\mathcal{V}$ e escrevemos $\mathcal{U} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{V}$ se, $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ são tais que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ então $U_1 \cup U_2 \subset V$ para algum $V \in \mathcal{V}$. Escrevemos $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^2}\mathcal{U}$ se existir uma cobertura $\mathcal{W}$ de X tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{W}$ e $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Dessa forma, indutivamente dizemos que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{U}$ se existir $\mathcal{W}$ com $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{W}$ e $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\mathcal{U}$.

Para cada cobertura $\mathcal{U}$ de X e $Y \subset X$, definimos a estrela de Y com respeito à cobertura $\mathcal{U}$ como

$$St[Y,\mathcal{U}] = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : Y \cap U \neq \emptyset\}.$$

Se $Y = \{x\}$, usualmente escrevemos $\mathrm{St}\,[x,\mathcal{U}]$ em vez de $\mathrm{St}\,[\{x\}\,,\mathcal{U}]$ e além disso vale que $\mathrm{St}\,[Y,\mathcal{U}] = \bigcup\limits_{x\in Y} \mathrm{St}\,[x,\mathcal{U}]$ para todo subconjunto $Y \subset X$.

Estabelecidas as devidas notações, estamos em condições de apresentar o conceito de espaço topológico admissível.

Definição 1.1.1. *Uma família $\mathcal{O}$ de coberturas abertas de X é dita admissível se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Para $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$ e $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{V}$.*

2. *As estrelas $St[x,\mathcal{U}]$ para $x \in X$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ formam uma base para a topologia de X.*

Um espaço topológico X é dito admissível se admitir uma família admissível de coberturas abertas.

Vejamos alguns exemplos os quais podem ser encontrados em [29] e [30].

Exemplo 1.1.1. *Se X é um espaço topológico Hausdorff paracompacto então a família de todas coberturas abertas de X é admissível. Além disso, se X é um espaço topológico Hausdorff compacto então a família $\mathcal{O}_f$ de todas coberturas abertas finitas de X é admissível.*

Exemplo 1.1.2. *Seja (X, d) um espaço métrico. Assim a família $\mathcal{O}_d$ de todas coberturas $\mathcal{U}_\epsilon = \{B_d(x, \epsilon) : x \in X\}$ com $\epsilon > 0$ é admissível. Além do mais, para $\varepsilon > 0$ e $Y \subset X$ temos que $\mathcal{U}_{\varepsilon/2} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}_\varepsilon$ e*

$$\mathrm{St}\left[Y,\mathcal{U}_{\varepsilon/2}\right] \subset \mathrm{B_d}\left(Y, \varepsilon\right) \subset \mathrm{St}\left[Y,\mathcal{U}_\varepsilon\right].$$

Exemplo 1.1.3. *Seja G um grupo topológico e $\mathcal{B}$ um sistema de vizinhanças simétricas abertas da identidade de G. Para cada $V \in \mathcal{B}$, defina a cobertura aberta $\mathcal{R}_V$ de G por $\mathcal{R}_V = \{Vg : g \in G\}$ de G e a cobertura aberta $\mathcal{L}_V = \{gV : g \in G\}$. Então $\mathcal{O}_R = \{\mathcal{R}_V : V \in \mathcal{B}\}$ e $\mathcal{O}_L = \{\mathcal{L}_V : V \in \mathcal{B}\}$ são famílias admissíveis de coberturas abertas de G.*

Exemplo 1.1.4. *Nas condições do exemplo anterior, considere $H \subset G$ um subgrupo de G e π a projeção canônica de G em G/H. Para cada $V \in \mathcal{B}$, defina a cobertura aberta $\mathcal{P}_V$ de G/H por $\mathcal{P}_V = \{\pi(Vg) : g \in G\}$ de G. Então $\mathcal{O}_\pi = \{\mathcal{P}_V : V \in \mathcal{B}\}$ é uma família admissível de coberturas abertas de G/H.*

Exemplo 1.1.5. *Seja $(X, \mathcal{O})$ um espaço admissível. Para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, defina $\mathcal{B}_\mathcal{U} = \{St[x,\mathcal{U}] : x \in X\}$. Então a família $\mathcal{B}_\mathcal{O} = \{B_\mathcal{U} : \mathcal{U} \in \mathcal{O}\}$ é admissível.*

Observação 1.1.1. *Para cada $Y \subset X$ temos $\bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}} \mathrm{St}\left[Y,\mathcal{U}\right] = \overline{Y}$. Em especial, se X for Hausdorff então $\bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}} \mathrm{St}\left[x,\mathcal{U}\right] = \{x\}$ para todo $x \in X$.*

Observação 1.1.2. *Se $Y \subset X$ é um aberto qualquer de X e K é um compacto em X tal que $K \subset Y$ então existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ cobertura aberta de X de modo que $St[K,\mathcal{U}] \subset Y$.*

Lema 1.1.1. *Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ duas coberturas de X pertencentes a uma família admissível de coberturas abertas $\mathcal{O}$. Se $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$ e $x \in X$, então $\overline{St[x,\mathcal{V}]} \subset St[x,\mathcal{U}]$.*

Demonstração. Ver [28], Lema 2.4, página 42. □

Para mais detalhes sobre espaços admissíveis indicamos a leitura de [1] e [30].

Definição 1.1.2. *Uma família admissível $\mathcal{O}$ de coberturas abertas de X é dita Full se satisfaz as seguintes condições:*

1. $X = \bigcup_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}} \mathrm{St}\,[x,\mathcal{U}]$ *para todo* $x \in X$.
2. *Para cada* $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ *existe* $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ *tal que* $\mathcal{U} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{V}$.

A condição 1. da Definição 1.1.2 garante que para cada par de pontos $x, y \in X$ existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $y \in \mathrm{St}\,[x,\mathcal{U}]$ enquanto que a condição 2. implica que para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $n \in \mathbb{N}$ existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{U} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{V}$. Além disso, não é difícil ver que as famílias admissíveis dos Exemplos 1.1.1 e 1.1.2 são full.

1.1.2 Espaços uniformizáveis

Nesta seção veremos algumas definições relativas a espaços uniformes. Em resumo, vamos desenvolver um estudo introdutório do assunto com base em [36].

Dado $V \subseteq X \times X$ definimos inicialmente

$$V^{-1} := \{(x,y) \in X \times X : (y,x) \in V\}.$$

Além disso, para quaisquer $U, V \subseteq X \times X$ temos

$$U \circ V := \{(x,y) \in X \times X : (\exists z \in X)(x,z) \in U, (z,y) \in V\}.$$

Para cada $V \subseteq X \times X$ e $x \in X$, definimos a V-*vizinhança* de x dada pelo conjunto

$$V[x] := \{y \in X : (x,y) \in V\}.$$

Posteriormente, definimos a *diagonal* de X por

$$\Delta := \{(x,x) : x \in X\} \subset X \times X.$$

Estabelecidas as devidas notações, vejamos a definição de espaço uniforme via família de vizinhanças diagonais.

Definição 1.1.3. *Um espaço uniforme é um par* $(X, \mathcal{D})$ *formado por um conjunto* X *e uma família* $\mathcal{D} \subseteq X \times X$ *chamada estrutura uniforme ou família de vizinhanças diagonais, que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $D \in \mathcal{D} \Rightarrow \Delta \subset D$.

2. $D1, D2 \in \mathcal{D} \Rightarrow D1 \cap D2 \in \mathcal{D}$.

3. $D \in \mathcal{D} \Rightarrow E \circ E \subset D$ *para algum* $E \in \mathcal{D}$.

4. $D \in \mathcal{D} \Rightarrow E^{-1} \subset D$ *para algum* $E \in \mathcal{D}$.

5. $D \in \mathcal{D}$, $D \subset E \Rightarrow E \in \mathcal{D}$.

Dado um conjunto qualquer X, podemos muni-lo com diferentes estruturas uniformes. A princípio, destacamos as estruturas *discreta* e *indiscreta* definidas sobre um conjunto X respectivamente por $\mathcal{D}_X := \{V \subseteq X \times X : \Delta \subseteq V\}$ e $\mathcal{D}_i \equiv \{X \times X\}$. Observe que, se $X = \emptyset$ então $\mathcal{D}_i$ é a estrutura uniforme vazia.

Além disso, dizemos que uma coleção $\epsilon \subset X \times X$ é uma base para uma estrutura uniforme se, e somente se, satisfaz os itens 1., 3., 4. e

$D_1, D_2 \in \epsilon$ *então* $D_3 \subset D_1 \cap D_2$ *para algum* $D_3 \in \epsilon$.

Dado um espaço uniforme $(X, \mathcal{D})$, a coleção $Sym(\mathcal{D}) = \{V \in \mathcal{D} : V = V^{-1}\}$ forma uma base para $\mathcal{D}$. Em geral, qualquer métrica d sobre um espaço X gera uma estrutura uniforme $\mathcal{U}_d$ que tem como base a coleção $U_\epsilon^d = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \epsilon\}$.

Vejamos dois exemplos de estruturas uniformes clássicas.

Exemplo 1.1.6. *Para cada* $a \in \mathbb{R}$, *seja* $D_a = \Delta \cup \{(x, y) | x > a, y > a\}$. *Dessa forma, a coleção* $\{D_a \subset \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}\}$ *é base para uma estrutura uniforme em* $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.1.7. *Para cada* $\epsilon > 0$, *seja* $D_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x - y| < \epsilon\}$. *A coleção* $\mathcal{E}$ *de todos conjuntos* D_ϵ, *com* $\epsilon > 0$ *é base para uma estrutura uniforme em* $\mathbb{R}$.

Para cada $x \in X$ e $D \in \mathcal{D}$ temos que $x \in D[x]$ pois $(x, x) \in \Delta \subseteq D$ e $D[A] = \bigcup_{x \in A} D[x]$ se $A \subseteq X$. Além disso, para cada $x \in X$, a coleção $\mathcal{D}_x = \{D[x] : D \in \mathcal{D}\}$ forma uma vizinhança básica em x. A topologia associada com a família de vizinhanças diagonais $\mathcal{D}$ é chamada de *topologia uniforme* gerada por $\mathcal{D}$, denotada por $\tau_{\mathcal{D}}$ e definida como: $\tau_{\mathcal{D}} = \{U \subset X : \forall x \in$

$U \ \exists D \in \mathcal{D}; D[x] \subset U\}$. Toda vez que a topologia do espaço puder ser obtida através de uma família de vizinhanças diagonais $\mathcal{D}$ dizemos que X é um espaço topológico *uniformizável*.

Uma estrutura uniforme $\mathcal{D}$ é dita *separada* se, e somente se, $\bigcap_{D\in\mathcal{D}} D = \Delta$. Nesse sentido, repare que uma estrutura uniforme num espaço induzida por uma métrica d é sempre separada pois

$$\bigcap_{U\in\mathcal{U}_d} U = \bigcap_{\epsilon>0} U^d_\epsilon = \bigcap_{\epsilon>0} (x, y) \in X \times X; d(x, y) < \epsilon\} = \Delta.$$

De modo geral, temos que a topologia induzida por $\mathcal{D}$ é Hausdorff se, e somente se, $\mathcal{D}$ é separada (ver Teorema 35.6, página 240, item b, [36]). As estruturas uniformes $\mathcal{U}_d$ geradas por uma métrica d são ditas metrizáveis. Um espaço topológico é uniformizável se, e somente se, é completamente regular (ver [36], Teorema 38.2, página 256). Por fim, uma estrutura uniforme é metrizável se, e somente se, é separável e possui base enumerável (ver [36], Corolário 38.4, página 258).

Além da axiomatização da noção de uniformidade via família de vizinhanças diagonais, existe uma outra que lhe é equivalente e na qual os elementos básicos são coberturas de X. Nesse sentido, uma cobertura $\mathcal{U}$ de $(X, \mathcal{D})$ se diz uma *uniforme*, se e somente, se pode ser refinada por uma cobertura da forma $\mathcal{U}_D = \{D[x] : x \in X\}$ para algum $D \in \mathcal{D}$. No entanto, pode ser visto em [36], Teorema 36.2, página 244, que a coleção $\mathcal{O}$ de todas coberturas uniformes de um espaço $(X, \mathcal{D})$ possui as seguintes propriedades:

1. se $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O}$, então para algum $\mathcal{U}_3 \in \mathcal{O}$,temos $\mathcal{U}_3* \leqslant \mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_3* \leqslant \mathcal{U}_2$,

2. se $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{U}'$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ então $\mathcal{U}' \in \mathcal{O}$.

Em contrapartida, tomando $\mathcal{O}$ uma família de coberturas satisfazendo os itens 1. e 2. temos que coleção de todos conjuntos da forma $D_\mathcal{U} = \bigcup\{U \times U : U \in \mathcal{U}\}$ com $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ gera uma estrutura uniforme em X cujas coberturas uniformes são precisamente os elementos de $\mathcal{O}$. Com isso, é possível estabelecer uma correspondência entre os conceitos de família de vizinhanças diagonais e família de coberturas uniformes. Ou seja, apesar das uniformidades via família de vizinhanças diagonais e coberturas possuírem linguagens diferentes podemos substituir uma estrutura por outra sem problema nenhum.

Atentamos para o fato de que uma uniformidade num conjunto X pode ser ainda descrita através de uma família de *pseudométricas* ou uma *uniformidade de calibre*. Para uma construção detalhada de um esquema de equivalência entre todas as estruturas descritas nesta seção indicamos a leitura de [6], Capítulo 2.

Por fim, o teorema seguinte estabelece uma equivalência entre espaços admissíveis e uniformizáveis. Sua prova pode ser encontrada em [2, 30].

Teorema 1.1.1. *Um espaço X é uniformizável se, e somente se, é admissível.*

Desde que X é uniformizável se, e somente se, é completamente regular (Ver [36], Teorema 38.2), unindo os resultados temos o teorema abaixo.

Teorema 1.1.2. *Um espaço topológico X é admissível se, e somente se, é completamente regular.*

1.1.3 Redes

Aqui vamos apresentar resultados básicos da teoria de *redes*, visto que este conceito será amplamente utilizado ao longo do trabalho. O leitor que já estiver familiarizado com o tema pode ir direto à Seção 1.2.

Definição 1.1.4. *Um subconjunto não vazio Λ é dirigido pela relação binária $\leq$ se:*

1. *$\lambda \leq \lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$ (reflexividade),*

2. *se $\lambda \leq \mu$ e $\mu \leq \nu$ então $\lambda \leq \nu$ (transitividade),*

3. *dados $\lambda, \mu \in \Lambda$ existe $\nu \in \Lambda$ tal que $\lambda \leq \nu$ e $\mu \leq \nu$.*

Exemplo 1.1.8. *O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ munido com a relação de ordem usual $\leq$ é um conjunto dirigido.*

Exemplo 1.1.9. *Seja (X, τ) um espaço topológico e $\mathcal{U}_x$ a família de todas vizinhanças do ponto $x \in X$. Considere a seguinte relação em $\mathcal{U}_x$: $U \leq V$ se, e somente se, $V \subset U$. Então a coleção $\mathcal{U}_x$ é um conjunto dirigido.*

Exemplo 1.1.10. *Dados $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ em uma família admissível, a relação $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ fornece uma direção sobre $\mathcal{O}$.*

Exemplo 1.1.11. *Dados Λ_1, Λ_2 conjuntos dirigidos então $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ é um conjunto dirigido pela seguinte relação $(\lambda_1, \lambda_2) \leq (\lambda_1', \lambda_2')$ se, e somente se, $\lambda_1 \leq \lambda_1'$ e $\lambda_2 \leq \lambda_2'$.*

Definição 1.1.5. *Seja Λ um conjunto dirigido. Uma aplicação $x : \Lambda \to X$ definida por $x(\lambda) = x_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$ é denominada uma rede em X e denotada por $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.*

Definição 1.1.6. *Uma rede* $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *converge para um ponto* $x \in X$ *se para qualquer vizinhança* U *de* x *existir* $\lambda_0 \in \Lambda$ *tal que* $x_\lambda \in U$ *toda vez que* $\lambda \geq \lambda_0$*.*

Observação 1.1.3. *Note que toda sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma rede. Então a convergência de redes generaliza convergência de sequências.*

Proposição 1.1.1. *Dado* $A \subset X$ *um subconjunto de* X *temos que* $x \in \overline{A}$ *se, e somente se, existe uma rede* $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *tal que* $x_\lambda \to x$*.*

Demonstração. Ver [22], Proposição 4.2. □

Proposição 1.1.2. *Um espaço* X *é Hausdorff se, e somente se, toda rede em* X *converge para no máximo um único ponto.*

Demonstração. Ver [22], Proposição 4.4. □

Definição 1.1.7. *Se* $x : \Lambda \to X$ *é uma rede em* X*, dizemos que* $y : \Lambda' \to X$ *é uma sub-rede de* $x : \Lambda \to X$*, onde* Λ' *é um conjunto dirigido, se a aplicação* $\phi : \Lambda' \to \Lambda$ *satisfaz:*

1. *Se* $\mu_1 \leq \mu_2$ *então* $\phi(\mu_1) \leq \phi(\mu_2)$*; (*$\phi$ *é crescente);*

2. *Dado* $\lambda \in \Lambda$ *existe* $\mu \in \Lambda'$ *tal que* $\phi(\mu) \geq \lambda$*.(*ϕ *é cofinal)*

Denotamos a sub-rede de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ por $(x_{\phi(\mu)})_{\mu\in\Lambda'}$.

Observação 1.1.4. *Não é difícil ver que se uma rede* $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset X$ *em* X *converge para um ponto* $x \in X$*, então cada sub-rede também converge para* x*.*

Proposição 1.1.3. *Um espaço é compacto se, e somente se, cada rede possui sub-rede convergente.*

Demonstração. Ver [22], Proposição 4.7. □

Definição 1.1.8. *Uma rede* (x_λ) *em* X *se diz universal se para cada* $A \subset X$ *a rede está eventualmente em* A *ou eventualmente em* $X \setminus A$*, isto é, se existir* λ_0 *tal que* $x_\lambda \in A$ *ou* $x_\lambda \in X \setminus A$ *se* $\lambda > \lambda_0$*.*

Proposição 1.1.4. *Toda rede admite sub-rede universal.*

Demonstração. Ver [22], Proposição 4.9. □

1.2 Conjunto de valores essenciais

Suponha $\mathcal{O}$ uma família admissível de coberturas abertas sobre X, $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ o conjunto das partes de $\mathcal{O}$ e além disso a relação de ordem parcial sobre $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ dada pela inclusão inversa, ou seja, dados $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$,

$$\mathcal{E}_1 \prec \mathcal{E}_2 \text{ se, e somente se, } \mathcal{E}_1 \supset \mathcal{E}_2.$$

Observe que $\mathcal{O}$ é o menor elemento em $(\mathcal{P}(\mathcal{O}), \prec)$. Em outras palavras, $\mathcal{O}$ é um limitante inferior para $\mathcal{P}(\mathcal{O})$. Além do que, a coleção vazia $\emptyset$ é o maior elemento em $(\mathcal{P}(\mathcal{O}), \prec)$ e portanto um limitante superior para $\mathcal{P}(\mathcal{O})$. Por fim, as operações binárias de união e interseção são compatíveis com a ordem, ou seja, se $\mathcal{E}_1 \prec \mathcal{D}_1$ e $\mathcal{E}_2 \prec \mathcal{D}_2$ então $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \prec \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ e $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \prec \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$.

Para cada $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ e $n \in \mathbb{N}^*$ definimos os elementos $n\mathcal{E}$ e $-n\mathcal{E}$ em $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ por:

$$\begin{aligned} -n\mathcal{E} &= \left\{\mathcal{U} \in \mathcal{O} : \text{existe } \mathcal{V} \in \mathcal{E} \text{ tal que } \mathcal{U} \leqslant \tfrac{1}{2^n}\mathcal{V}\right\}, \\ n\mathcal{E} &= \left\{\mathcal{U} \in \mathcal{O} : \text{existe } \mathcal{V} \in \mathcal{E} \text{ tal que } \mathcal{V} \leqslant \tfrac{1}{2^n}\mathcal{U}\right\} \end{aligned}$$

Observação 1.2.1. *Por conveniência admitimos $0\mathcal{E} = \mathcal{E}$.*

Lema 1.2.1. *Sejam $\mathcal{E}, \mathcal{D} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ e $m, n \in \mathbb{N}^*$. As seguintes propriedades são válidas:*

1. *Se $\mathcal{E} \prec \mathcal{D}$ então $n\mathcal{E} \prec n\mathcal{D}$ e $-n\mathcal{E} \prec -n\mathcal{D}$.*

2. *$m\mathcal{E} \prec n\mathcal{E}$ e $-m\mathcal{E} \prec -n\mathcal{E}$ toda vez que $m \leq n$.*

3. *$m(n\mathcal{E}) = (m+n)\mathcal{E}$ e $-m(-n\mathcal{E}) = -(m+n)\mathcal{E}$.*

4. *$n(-m\mathcal{E}) \prec \mathcal{E}$ toda vez que $m \leq n$.*

5. *$-m(n\mathcal{E}) \prec \mathcal{E}$ toda vez que $m \leq n$ e $\mathcal{O}$ é full.*

6. *$n\mathcal{O} = \mathcal{O}$ e $-n\mathcal{O} = \mathcal{O}$ se $\mathcal{O}$ é full.*

Demonstração. 1. Suponha que $\mathcal{E} \prec \mathcal{D}$. Se $\mathcal{U} \in n\mathcal{D}$ existe $\mathcal{V} \in \mathcal{D}$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{U}$. Como $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$, segue que $\mathcal{U} \in n\mathcal{E}$. Então $n\mathcal{E} \prec n\mathcal{D}$. Analogamente, provamos $-n\mathcal{E} \prec -n\mathcal{D}$.

2. É suficiente mostrar que $m\mathcal{E} \prec (m+1)\mathcal{E}$ e $-m\mathcal{E} \prec -(m+1)\mathcal{E}$. Para isto, tome $\mathcal{U} \in (m+1)\mathcal{E}$. Então existe $\mathcal{V} \in \mathcal{E}$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^{m+1}}\mathcal{U}$, o que implica $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^m}\mathcal{U}$. Dessa forma $\mathcal{U} \in m\mathcal{E}$, e portanto $(m+1)\mathcal{E} \subset m\mathcal{E}$, ou seja, $m\mathcal{E} \prec (m+1)\mathcal{E}$. Considere a seguir $\mathcal{U} \in$

$-(m+1)\,\mathcal{E}$. Existe dessa forma $\mathcal{V} \in \mathcal{E}$ de modo que $\mathcal{U} \leqslant \frac{1}{2^{m+1}}\mathcal{V}$, assim $\mathcal{U} \leqslant \frac{1}{2^m}\mathcal{V}$. Desse modo $\mathcal{U} \in -m\mathcal{E}$, e portanto $-(m+1)\,\mathcal{E} \subset -m\mathcal{E}$.

3. Se $\mathcal{U} \in m\,(n\mathcal{E})$ então existe $\mathcal{V} \in n\mathcal{E}$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^m}\mathcal{U}$. Dessa forma existe também $\mathcal{W} \in \mathcal{E}$ tal que $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{V}$ e $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^m}\mathcal{U}$, sendo assim $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2^{m+n}}\mathcal{U}$. Portanto $\mathcal{U} \in (m+n)\,\mathcal{E}$. Por outro lado, se $\mathcal{U} \in (m+n)\,\mathcal{E}$ existe assim $\mathcal{V} \in \mathcal{E}$ de modo que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^{m+n}}\mathcal{U}$. Daí existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ de modo que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{W}$ e $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2^m}\mathcal{U}$. Dessa forma $\mathcal{W} \in n\mathcal{E}$ e $\mathcal{U} \in m\,(n\mathcal{E})$. A igualdade $-m\,(-n\mathcal{E}) = -(m+n)\,\mathcal{E}$ pode ser provada de mesma maneira.

4. Para $\mathcal{U} \in \mathcal{E}$, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{U}$. Se $m \leq n$, segue que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^m}\mathcal{U}$, então $\mathcal{V} \in -m\mathcal{E}$ e $\mathcal{U} \in n\,(-m\mathcal{E})$. Assim $\mathcal{E} \subset n\,(-m\mathcal{E})$.

5. Suponha que $\mathcal{O}$ é full e tome $\mathcal{U} \in \mathcal{E}$. Então existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{U} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{V}$, e assim $\mathcal{V} \in n\mathcal{E}$. Se $m \leq n$, temos que $\mathcal{U} \leqslant \frac{1}{2^m}\mathcal{V}$, e então $\mathcal{U} \in -m\,(n\mathcal{E})$. Dessa forma $\mathcal{E} \subset -m\,(n\mathcal{E})$.

6. Para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{U}$. Então $\mathcal{U} \in n\mathcal{O}$, e portanto $n\mathcal{O} = \mathcal{O}$. Agora suponha que $\mathcal{O}$ é full. Para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{U} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{V}$. Dessa forma $\mathcal{U} \in -n\mathcal{O}$, e portanto $-n\mathcal{O} = \mathcal{O}$. □

A próxima definição recupera sobre o conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ a ideia de convergência a zero presente em espaços normados.

Definição 1.2.1. *Uma rede $(\mathcal{E}_\lambda)$ em $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ converge para $\mathcal{O}$, e escrevemos $\mathcal{E}_\lambda \to \mathcal{O}$, se para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ existir λ_0 tal que $\mathcal{U} \in \mathcal{E}_\lambda$ toda vez que $\lambda \geq \lambda_0$.*

Observação 1.2.2. *Não é difícil ver que se $\mathcal{D}_\lambda \prec \mathcal{E}_\lambda$ e $\mathcal{E}_\lambda \to \mathcal{O}$ então $\mathcal{D}_\lambda \to \mathcal{O}$. Em particular, se $\mathcal{E}_\lambda \to \mathcal{O}$ então $\mathcal{E}_\lambda \cup \mathcal{D} \to \mathcal{O}$ para todo $\mathcal{D} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$, visto que $\mathcal{E}_\lambda \cup \mathcal{D} \prec \mathcal{E}_\lambda$. Além disso, se $\mathcal{E}_\lambda \to \mathcal{O}$ então $n\mathcal{E}_\lambda \to \mathcal{O}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Com efeito, tome $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tais que $\mathcal{U} \in n\{\mathcal{V}\}$. Como $\mathcal{E}_\lambda \to \mathcal{O}$ existe λ_0 de modo que $\mathcal{V} \in \mathcal{E}_\lambda$ sempre que $\lambda \geq \lambda_0$. Então $n\mathcal{E}_\lambda \prec n\{\mathcal{V}\} \prec \{\mathcal{U}\}$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Portanto $n\mathcal{E}_\lambda \to \mathcal{O}$.*

Também podemos definir:

$$
\begin{array}{rccc}
\Phi: & \mathbb{Z} \times \mathcal{P}(\mathcal{O}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{O}) \\
 & (k, \mathcal{E}) & \longmapsto & \Phi(k, \mathcal{E}) = k\mathcal{E}.
\end{array}
$$

Para estudar as propriedades da aplicação Φ consideramos $\Phi^+ = \Phi\,|_{\mathbb{Z}^+ \times \mathcal{P}(\mathcal{O})}$, $\Phi^- = \Phi\,|_{\mathbb{Z}^- \times \mathcal{P}(\mathcal{O})}$ e $\Phi_n = \Phi\,|_{\{n\} \times \mathcal{P}(\mathcal{O})}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado.

Teorema 1.2.1. *Com relação a aplicação Φ temos:*

1. *As aplicações parciais Φ^+ and Φ^- são ações de semigrupos em $\mathcal{P}(\mathcal{O})$.*

2. Φ^+ *preserva a ordem e possui ponto fixo* $\mathcal{O}$.

3. Φ_n *preserva a ordem para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

4. Φ_n *possui ponto fixo* $\mathcal{O}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

5. Se $\mathcal{O}$ *é full,* Φ_n *possui ponto fixo* $\mathcal{O}$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. O item 1. segue pelo item 3. do Lema 1.2.1. O item 2. segue pelo item 1. do Lema 1.2.1 e por $\mathcal{O}$ ser admissível. Os itens 3. e 4. são consequências do item 1. e pelo fato de $\mathcal{O}$ ser admissível. Por fim, o item 5. segue pelo item 6. do Lema 1.2.1. □

Na sequência, vamos estabelecer o conjunto dos valores essenciais.

Definição 1.2.2. *Dizemos que* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ *admite cobertura minimal se existir* $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ *tal que* $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ *para todo* $\mathcal{V} \in \mathcal{E}$. *Uma sequência* $(\mathcal{E}_n)_{n=0}^{\infty}$ *em* $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ *é chamada de sequência essencial de refinamentos duplos se cada* $\mathcal{E}_n$ *admite uma cobertura minimal e* $1\mathcal{E}_{n+1} \prec \mathcal{E}_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Todo elemento* $\mathcal{E}$ *em uma sequência de refinamentos duplos essenciais é dito essencial e indicado por* $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}$. *O conjunto dos elementos essenciais de* $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ *é chamado de conjunto essencial, denotado por* $\mathcal{P}_e(\mathcal{O})$.

Dado $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}$, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathrm{St}[x,\mathcal{U}] \subset \bigcap_{\mathcal{V}\in\mathcal{E}} \mathrm{St}[x,\mathcal{V}]$ para todo $x \in X$. Com isso $x \in \mathrm{int}\left(\bigcap_{\mathcal{V}\in\mathcal{E}} \mathrm{St}[x,\mathcal{V}]\right)$. Além do mais, tomando $(\mathcal{E}_n)_{n=0}^{\infty}$ uma sequência essencial de refinamentos duplos então pelo Lema 1.2.1 tem-se $n\mathcal{E}_n = (n-1)\,1\mathcal{E}_n \prec (n-1)\,\mathcal{E}_{n-1}$ toda vez que $n > 0$. Portanto, por indução, $n\mathcal{E}_n \prec \mathcal{E}_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.2.3. *Dizemos que uma rede* $(\mathcal{E}_\lambda)$ *em* $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ *converge essencialmente a* $\mathcal{O}$, *e escrevemos* $\mathcal{E}_\lambda \to_e \mathcal{O}$, *se para todo* $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}$ *existir* λ_0 *tal que* $\mathcal{E}_\lambda \prec \mathcal{E}$ *toda vez que* $\lambda \geq \lambda_0$.

Observação 1.2.3. *As definições 1.2.1 e 1.2.3 são equivalentes.*

Exemplo 1.2.1. *O conjunto unitário* $\{\mathcal{U}\}$ *com* $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ *é essencial. De fato, como* $\mathcal{O}$ *é admissível podemos obter uma sequência* $\mathcal{U}_{n+1} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}_n$ *com* $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$. *Desde que* $\mathcal{U}_{n+1} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}_n$ *se, e somente se,* $1\{\mathcal{U}_{n+1}\} \prec \{\mathcal{U}_n\}$ *segue que* $(\{\mathcal{U}_n\})_{n=0}^{\infty}$ *é uma sequência de refinamentos duplos essenciais. Dessa forma* $\{\mathcal{U}\} \succ_e \mathcal{O}$.

Exemplo 1.2.2. *Todo subconjunto finito* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ *é essencial. Para isto, suponha* $\mathcal{E} = \{\mathcal{U}^1, ..., \mathcal{U}^k\}$ *um subconjunto de* $\mathcal{P}(\mathcal{O})$. *Pelo exemplo anterior para cada* $i = 1, ..., k$ *tome uma sequência* $\mathcal{U}^i_{n+1} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}^i_n$ *com* $\mathcal{U}^i_0 = \mathcal{U}^i$. *Seja* $\mathcal{E}_n = \{\mathcal{U}^1_n, ..., \mathcal{U}^k_n\} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$. *Então* $1\mathcal{E}_{n+1} \prec \mathcal{E}_n$ *para* *todo $n \in \mathbb{N}$. Pela admissibilidade, para cada n existe algum $\mathcal{V}_n \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V}_n \leqslant \mathcal{U}_n^i$ para todo i. Então cada $\mathcal{E}_n$ admite cobertura minimal e portanto $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}$.*

Exemplo 1.2.3. *O limitante superior $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ é essencial. Com efeito, tomando uma sequência de refinamentos duplos essenciais $(\mathcal{E}_n)_{n=0}^{\infty}$ podemos reescrever $\mathcal{E}_0$ por $\emptyset$. Sendo assim, $(\mathcal{E}_n)_{n=0}^{\infty}$ com $\mathcal{E}_0 = \emptyset$ é uma sequência de refinamentos duplos essenciais. Portanto $\emptyset \in \mathcal{P}_e(\mathcal{O})$.*

Um elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ pode não ser finito. Veremos mais adiante que: dado (X, d) um espaço métrico e $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O}_d)$, se $\inf\{\epsilon : \mathcal{U}_\epsilon \in \mathcal{E}\} > 0$ então $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}$ (ver Proposição 1.6.2).

Lema 1.2.2. *Seja $\{\mathcal{E}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{P}(\mathcal{O})$ e $n \in \mathbb{N}^*$. As seguintes propriedades são válidas:*

1. $n \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{E}_\lambda = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} n\mathcal{E}_\lambda$ *e* $-n \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{E}_\lambda = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} -n\mathcal{E}_\lambda$.
2. $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} n\mathcal{E}_\lambda \prec n \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{E}_\lambda$ *e* $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} -n\mathcal{E}_\lambda \prec -n \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{E}_\lambda$.

Demonstração. 1. Se $\mathcal{U} \in n \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{E}_\lambda$ então existe $\mathcal{V} \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{E}_\lambda$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{U}$. Uma vez que $\mathcal{V} \in \mathcal{E}_\lambda$ para algum λ temos $\mathcal{U} \in n\mathcal{E}_\lambda$ e daí $\mathcal{U} \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} n\mathcal{E}_\lambda$. Portanto $n \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{E}_\lambda \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} n\mathcal{E}_\lambda$. Em contrapartida, suponha $\mathcal{U} \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} n\mathcal{E}_\lambda$. Dessa forma $\mathcal{U} \in n\mathcal{E}_\lambda$ para algum λ e então existe $\mathcal{V} \in \mathcal{E}_\lambda$ com $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{U}$. Desse modo $\mathcal{V} \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{E}_\lambda$ e $\mathcal{U} \in n \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{E}_\lambda$. Assim $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} n\mathcal{E}_\lambda \subset n \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{E}_\lambda$ e portanto $n \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{E}_\lambda = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} n\mathcal{E}_\lambda$. A igualdade $-n \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{E}_\lambda = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} -n\mathcal{E}_\lambda$ pode ser provada de modo similar.
2. Se $\mathcal{U} \in n \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{E}_\lambda$ então existe $\mathcal{V} \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{E}_\lambda$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{U}$. Dessa forma $\mathcal{U} \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} n\mathcal{E}_\lambda$ e portanto $n \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{E}_\lambda \subset \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} n\mathcal{E}_\lambda$. A inclusão $-n \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{E}_\lambda \subset \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} -n\mathcal{E}_\lambda$ pode ser provada de modo similar. $\square$

Vamos provar no lema seguinte que para cada $k \in \mathbb{N}$ a aplicação Φ_k restrita a $\mathcal{P}_e(\mathcal{O})$ é fechada, isto é, $\Phi_k(\mathcal{E}) \in \mathcal{P}_e(\mathcal{O})$ para todo $\mathcal{E} \in \mathcal{P}_e(\mathcal{O})$ (Ver item 1). Além disso, nos demais itens demonstraremos que $\mathcal{P}_e(\mathcal{O})$ é fechado em relação as operações usuais de conjuntos.

Lema 1.2.3. *Sejam $\mathcal{E}, \mathcal{D} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$, $k \in \mathbb{N}$. Então as seguintes afirmações são validas.*

1. *Se $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}$ então $k\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*
2. *Se $\mathcal{D} \succ \mathcal{E}$ e $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}$ então $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}$.*
3. *Se $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}$ então $\mathcal{E} \cap \mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}$ para todo $\mathcal{D} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$.*
4. *Se $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}$ então $\mathcal{E} \setminus \mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}$ para todo $\mathcal{D} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$.*
5. *Se $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}$ e $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}$ então $\mathcal{E} \cup \mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}$.*

Demonstração. 1. Seja $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}$ e tome uma sequência essencial de refinamentos duplos $(\mathcal{E}_n)_{n=0}^{\infty}$ em $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ com $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$. Para cada n, tome $\mathcal{U}_n \in \mathcal{O}$ uma cobertura minimal para $\mathcal{E}_n$. Pelo Lema 1.2.1 temos que $1(k\mathcal{E}_{n+1}) = k(1\mathcal{E}_{n+1}) \prec k\mathcal{E}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo assim, dado $\mathcal{U} \in k\mathcal{E}_n$, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{E}_n$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^k}\mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}_n \leqslant \mathcal{V}$ temos que $\mathcal{U}_n \leqslant \mathcal{U}$ e então $k\mathcal{E}_n$ admite cobertura minimal. Portanto $\{k\mathcal{E}_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de refinamentos duplos essenciais e $k\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}$.
2. Suponha $\mathcal{D} \succ \mathcal{E}$. Então $\mathcal{D}$ admite cobertura minimal pois $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ e $\mathcal{E}$ admite cobertura minimal. Como $1\mathcal{E}_1 \prec \mathcal{E}$ temos que $1\mathcal{E}_1 \prec \mathcal{D}$. Dessa forma podemos reescrever $\mathcal{E}$ por $\mathcal{D}$ de maneira que a nova sequência $(\mathcal{E}_n)_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência essencial de refinamentos duplos.
3., 4. Desde que $\mathcal{E} \cap \mathcal{D} \succ \mathcal{E}$ e além disso $\mathcal{E} \setminus \mathcal{D} \succ \mathcal{E}$ para todo $\mathcal{D} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$, temos que $\mathcal{E} \cap \mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}$ e $\mathcal{E} \setminus \mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}$ pelo item (2).
5. Se $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}$ existe uma sequência essencial de refinamentos duplos $(\mathcal{D}_n)_{n=0}^{\infty}$ em $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ com $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$. Seja $\mathcal{V}_n \in \mathcal{O}$ cobertura minimal para $\mathcal{D}_n$. Além do mais, para todo n temos que $1\mathcal{E}_{n+1} \cup 1\mathcal{D}_{n+1} \prec \mathcal{E}_n \cup \mathcal{D}_n$. Pelo Lema 1.2.2, temos que $1(\mathcal{E}_{n+1} \cup \mathcal{D}_{n+1}) = 1\mathcal{E}_{n+1} \cup 1\mathcal{D}_{n+1}$, e portanto $1(\mathcal{E}_{n+1} \cup \mathcal{D}_{n+1}) \prec \mathcal{E}_n \cup \mathcal{D}_n$. Na sequência, para cada n tome $\mathcal{W}_n \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{W}_n \leqslant \mathcal{U}_n$ e $\mathcal{W}_n \leqslant \mathcal{V}_n$. Assim $\mathcal{W}_n$ é cobertura minimal para ambos $\mathcal{E}_n$ e $\mathcal{D}_n$. Desse modo $\{\mathcal{E}_n \cup \mathcal{D}_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência essencial de refinamentos duplos logo $\mathcal{E} \cup \mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}$. □

Definição 1.2.4. *Sejam $\mathcal{E}, \mathcal{D} \in \mathcal{P}_e(\mathcal{O})$. A diferença simétrica entre $\mathcal{E}$ e $\mathcal{D}$ denotada por $\mathcal{E}\Delta\mathcal{D}$ é definida como $\mathcal{E}\Delta\mathcal{D} = (\mathcal{E} \cup \mathcal{D}) \setminus (\mathcal{E} \cap \mathcal{D})$.*

O último resultado da seção caracteriza a estrutura algébrica do conjunto de valores essenciais.

Teorema 1.2.2. *O conjunto essencial $\mathcal{P}_e(\mathcal{O})$ é um ideal invariante do anel booleano $\mathcal{P}(\mathcal{O})$.*

Demonstração. Podemos ver que $\emptyset \in \mathcal{P}_e(\mathcal{O})$. Considere $\mathcal{E}, \mathcal{D} \in \mathcal{P}_e(\mathcal{O})$. Pelo Lema 1.2.3, itens 3. e 5. temos que $\mathcal{E} \cap \mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}$ e $\mathcal{E} \cup \mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}$. Pelo item 4. do mesmo lema, $\mathcal{E}\Delta\mathcal{D} \in \mathcal{P}_e(\mathcal{O})$. Assim temos que $\mathcal{P}_e(\mathcal{O})$ é um subgrupo de $\mathcal{P}(\mathcal{O})$. Além do mais, veja que o item 3. assegura que $\mathcal{P}_e(\mathcal{O})$ é um ideal de $\mathcal{P}(\mathcal{O})$. Enfim , pelo item 1. , $\mathcal{P}_e(\mathcal{O})$ é invariante com respeito a ação de Φ^+. □

1.3 Função admissível

O objetivo desta seção é construir uma noção abstrata de distância com valores em $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ que capture a ideia de proximidade via coberturas presente na teoria de espaços uniformes. Para tanto, observe que cada cobertura $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ satisfazendo $y \in St[x,\mathcal{U}]$ atribui uma relação de proximidade topológica ao par $(x, y) \in X^2$ o que nos motiva a definir a seguinte função.

Definição 1.3.1. *A função admissível de X associada à família de coberturas $\mathcal{O}$ é definida por*

$$\rho : X^2 \to \mathcal{P}(\mathcal{O})$$

$$\rho(x, y) = \{\mathcal{U} \in \mathcal{O} : y \in \mathrm{St}[x,\mathcal{U}]\}.$$

A aplicação ρ toma valores no monóide comutativo parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(\mathcal{O}), \cap, \prec)$. Com efeito, o elemento neutro de $(\mathcal{P}(\mathcal{O}), \cap)$ é $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O} \prec \mathcal{E}$ para todo $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$. Além do mais, $\cap$ e $\prec$ são compatíveis pois se $\mathcal{E}_1 \prec \mathcal{D}_1$ e $\mathcal{E}_2 \prec \mathcal{D}_2$ então $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \prec \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$.

Observação 1.3.1. *Se $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ com $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$ então $\mathcal{V} \in \rho(x, y)$. Assim $\rho(x, y) \prec n\rho(x, y)$ e $r\rho(x, y) \prec n\rho(x, y)$ se $r < n$ para todo $x, y \in X$ e $r, n \in \mathbb{N}$.*

Proposição 1.3.1. *A função admissível satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *$\rho(x, y) = \rho(y, x)$ para todo $x, y \in X$.*

2. *$\mathcal{O} \prec \rho(x, y)$, para todo $x, y \in X$, e $\mathcal{O} = \rho(x, x)$.*

3. *Se X é Hausdorff, $\mathcal{O} = \rho(x, y)$ se, e somente se, $x = y$.*

4. *$\rho(x, y) \prec 1(\rho(x, z) \cap \rho(z, y))$ para todo $x, y, z \in X$.*

5. *$\rho(x, y) \prec n(\rho(x, x_1) \cap \rho(x_1, x_2) \cap \ldots \cap \rho(x_n, y))$ para todo $x, y, x_1, ..., x_n \in X$.*

Demonstração. Para a prova do item 1. é suficiente observar que $y \in \mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$ se, e somente se, $x \in \mathrm{St}[y,\mathcal{U}]$. No item 2., temos que $\rho(x, y) \subset \mathcal{O}$ para todo $x, y \in X$, então $\mathcal{O} \prec \rho(x, y)$. Devido a $x \in \mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$ para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ temos $\rho(x, x) = \mathcal{O}$. Para o item 3., supondo X Hausdorff e $\rho(x, y) = \mathcal{O}$ temos $y \in \mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$ para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Uma vez que $\{\mathrm{St}[x,\mathcal{U}] : \mathcal{U} \in \mathcal{O}\}$ é uma coleção de vizinhanças básicas de x, segue que $y = x$. Note por fim que o item 4. é um caso particular do item 5.. Assim, provaremos o item 5.. Para isto, repare que se $n(\rho(x, x_1) \cap \rho(x_1, x_2) \cap \ldots \cap \rho(x_n, y)) = \emptyset$ então a desigualdade é imediata. Suponha então que $n(\rho(x, x_1) \cap \rho(x_1, x_2) \cap \ldots \cap \rho(x_n, y)) \neq \emptyset$ e tome $\mathcal{U} \in n(\rho(x, x_1) \cap \rho(x_1, x_2) \cap \ldots \cap \rho(x_n, y))$. Nesse caso, existe $\mathcal{V} \in \rho(x, x_1) \cap \rho(x_1, x_2) \cap \ldots \cap \rho(x_n, y)$ com $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^n}\mathcal{U}$, o que garante a existência de coberturas $\mathcal{U}_1, ..., \mathcal{U}_{n-1} \in \mathcal{O}$ tais que

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &\leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}_{n-1},\ \mathcal{U}_{n-1} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}_{n-2},\ \dots,\ \mathcal{U}_1 \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U},\\ x, x_2 &\in \operatorname{St}[x_1, \mathcal{V}],\ x_1, x_3 \in \operatorname{St}[x_2, \mathcal{V}],\ \dots,\ x_{n-1}, y \in \operatorname{St}[x_n, \mathcal{V}].\end{aligned}$$

Como $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}_{n-1}$, segue que

$$x, x_3 \in \operatorname{St}[x_2, \mathcal{U}_{n-1}],\ x_2, x_4 \in \operatorname{St}[x_3, \mathcal{U}_{n-1}],\ \dots,\ x_{n-2}, y \in \operatorname{St}[x_{n-1}, \mathcal{V}].$$

Por último, usando sucessivamente as relações $\mathcal{U}_{n-i} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}_{n-i-1}$ e $\mathcal{U}_1 \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$ obtemos $y \in \operatorname{St}[x, \mathcal{U}]$. Com isso, $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$ e portanto

$$\rho(x, y) \supset n\left(\rho(x, x_1) \cap \rho(x_1, x_2) \cap \ldots \cap \rho(x_n, y)\right).$$

□

Na Definição 1.3.1 assumimos a possibilidade de $\rho(x, y)$ ser o conjunto vazio de $\mathcal{P}(\mathcal{O})$, o que em certo sentido recupera a ideia de espaço métrico estendido onde a distância entre dois pontos pode assumir valor infinito. Em contrapartida, se $\mathcal{O}$ for uma família de coberturas full então $\rho(x, y) \neq \emptyset$ para todo $x, y \in X$, posto que $X = \bigcup_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}} \operatorname{St}[x, \mathcal{U}]$ para todo $x \in X$.

Proposição 1.3.2. *Sejam $x, y, z \in X$ e $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$. Se $\rho(x, z) \prec -1\mathcal{E}$ e $\rho(z, y) \prec -1\mathcal{E}$ então $\rho(x, y) \prec \mathcal{E}$.*

Demonstração. Dado $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$, tome $-1\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ definido por $-1\mathcal{E} = \{\mathcal{V} \in \mathcal{O} : \mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$ para algum $\mathcal{U} \in \mathcal{E}\}$. Assuma que $\rho(x, z) \prec -1\mathcal{E}$ e $\rho(z, y) \prec -1\mathcal{E}$. Em seguida, seja $\mathcal{U} \in \mathcal{E}$ e $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Com isso $\mathcal{V} \in -1\mathcal{E}$ e como $\rho(x, z) \prec -1\mathcal{E}$ então $-1\mathcal{E} \subset \rho(x, z)$. Assim $\mathcal{V} \in \rho(x, z)$, logo existe $V_1 \in \mathcal{V}$ tal que $x, z \in V_1$. De modo análogo, como $\rho(z, y) \prec -1\mathcal{E}$ existe também $V_2 \in \mathcal{V}$ tal que $z, y \in V_2$. Isto implica que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Nesse caso existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V_1 \cup V_2 \subset U$ e daí $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$ para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{E}$. Portanto $\rho(x, y) \prec \mathcal{E}$. □

Exemplo 1.3.1. *Considere G um grupo topológico cujo elemento neutro denotamos por 1 e $\mathcal{B}$ um sistema de vizinhanças simétricas abertas da identidade de G. Para cada $V \in \mathcal{B}$, defina a cobertura aberta $\mathcal{R}_V$ de G por $\mathcal{R}_V = \{Vg : g \in G\}$ e a cobertura aberta $\mathcal{L}_V = \{gV : g \in G\}$. Assim, para todo $g \in G$ e $V \in \mathcal{B}$ temos que*

1. *$St[g, \mathcal{R}_V] = St[1, \mathcal{R}_V]g = V^2g$.*

2. *$St[g, \mathcal{L}_V] = gSt[1, \mathcal{R}_V] = gV^2$.*

3. $St[1, \mathcal{R}_V] = St[1, \mathcal{L}_V] = V^2$.

No entanto, dado que $\mathcal{O}_{\mathcal{R}} = \{\mathcal{R}_V : V \in \mathcal{B}\}$ *e* $\mathcal{O}_{\mathcal{L}} = \{\mathcal{L}_V : V \in \mathcal{B}\}$ *são famílias admissíveis de coberturas abertas de* G *(Ver [6], página 113) dados* $g, h \in G$ *obtemos:*

$$\rho_{\mathcal{O}_{\mathcal{R}}}(g, h) = \{\mathcal{R}_V \in \mathcal{O}_{\mathcal{R}} : gh^{-1} \in V^2\}$$

$$\rho_{\mathcal{O}_{\mathcal{L}}}(g, h) = \{\mathcal{L}_V \in \mathcal{O}_{\mathcal{L}} : hg^{-1} \in V^2\}.$$

Para cada $x \in X$ e $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ a $\mathcal{E}$-bola de x é definida por $\mathrm{B}(x, \mathcal{E}) = \{y \in X : \rho(x, y) \prec \mathcal{E}\}$.

Observação 1.3.2. *Temos* $\mathrm{B}(x, \emptyset) = X$*, visto que* $\rho(x, y) \prec \emptyset$ *para todo* $x, y \in X$.

Lema 1.3.1. *As bolas com respeito a aplicação* ρ *satisfazem os itens abaixo:*

1. $\mathrm{B}(x, \{\mathcal{U}\}) = \mathrm{St}[x, \mathcal{U}]$ *para todo* $x \in X$ *e* $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$.

2. $\mathrm{B}(x, \mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{V} \in \mathcal{E}} \mathrm{St}[x, \mathcal{V}]$ *para todo* $x \in X$ *e* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$.

3. $x \in int(\mathrm{B}(x, \mathcal{E}))$ *para todo* $x \in X$ *e* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$.

4. *Se* X *é Hausdorff então* $\mathrm{B}(x, \mathcal{O}) = \{x\}$ *para todo* $x \in X$.

Demonstração. A prova segue pela Proposição 1.3.1. □

Se $\mathcal{E}$ contém uma cobertura minimal $\mathcal{U}$ então $\mathrm{B}(x, \mathcal{E}) = \mathrm{St}[x, \mathcal{U}]$ para todo $x \in X$. De modo geral $\mathrm{B}(x, \mathcal{E} \cup \{\mathcal{U}\}) = \mathrm{St}[x, \mathcal{U}]$ para todo $x \in X$ sempre que $\mathcal{U} \in \min(\mathcal{E})$.

Proposição 1.3.3. *Considere* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O}_d)$ *e denote por* $\delta_0 := \inf\{\epsilon > 0 : \mathcal{U}_\epsilon \in \mathcal{E}\}$*. Então temos as seguintes inclusões*

$$B_d(x, \delta_0) \subset \mathrm{B}(x, \mathcal{E}) \subset B_d(x, 4\delta_0).$$

Demonstração. Tome $y \in B_d(x, \delta_0)$ e $\mathcal{U}_\delta \in \mathcal{E}$ com $\delta > 0$. Desse jeito $\delta_0 \leq \delta$, de modo que $y \in B_d(x, \delta)$. Isto implica que $\mathcal{U}_\delta \in \rho(x, y)$ para todo $\mathcal{U}_\delta \in \mathcal{E}$ e portanto $\rho(x, y) \prec \mathcal{E}$. Assim $y \in \mathrm{B}(x, \mathcal{E})$. Daí concluímos que $B_d(x, \delta_0) \subset \mathrm{B}(x, \mathcal{E})$. Considere posteriormente $y \in \mathrm{B}(x, \mathcal{E})$. Com isso, $\rho(x, y) \prec \mathcal{E}$ o que garante $\mathcal{E} \subset \rho(x, y)$. Em seguida, dado que $\delta_0 < 2\delta_0$ por definição de ínfimo, existe $\delta \in \{\epsilon > 0 : \mathcal{U}_\epsilon \in \mathcal{E}\}$ tal que $\delta \leq 2\delta_0$. Como $\mathcal{U}_\delta \in \mathcal{E}$ temos que $\mathcal{U}_\delta \in \rho(x, y)$ e assim existe $B_d(z, \delta)$ para algum $z \in X$ tal que $x, y \in B_d(z, \delta)$. Por fim, vale que $d(x, y) < 2\delta \leq 4\delta_0$ e então $y \in B_d(x, 4\delta_0)$. Portanto $\mathrm{B}(x, \mathcal{E}) \subset B_d(x, 4\delta_0)$. □

As proposições a seguir serão usadas em resultados futuros (ver Proposições 2.1.4 e 3.3.11, Lema 3.7.2 e Teoremas 1.5.3 e 1.5.4).

Proposição 1.3.4. *Seja (x_λ) uma rede em X. Então $x_\lambda \to x$ se, e somente se, $\rho(x_\lambda, x) \to \mathcal{O}$.*

Demonstração. Segue pelas Definições 1.2.1 e 1.3.1. □

Proposição 1.3.5. *Sejam $(X, \mathcal{O}_X, \rho_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y, \rho_Y)$ espaços admissíveis. Uma função $f : X \to Y$ é contínua em $x \in X$ se, e somente se, para cada $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_Y$ existir $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}_X$ tal que $\rho_Y(f(x), f(y)) \prec \mathcal{E}$ toda vez que $\rho_X(x, y) \prec \mathcal{D}$.*

Demonstração. Suponha f contínua em x e tome $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_Y$. Como $f(x) \in \operatorname{int}(\mathrm{B}(f(x), \mathcal{E}))$, graças à continuidade de f, vemos que $f^{-1}(\operatorname{int}(\mathrm{B}(f(x), \mathcal{E})))$ é um aberto contendo x. Na sequência, escolha $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X$ tal que $\mathrm{St}[x, \mathcal{U}] \subset f^{-1}(\operatorname{int}(\mathrm{B}(f(x), \mathcal{E})))$ e tome $\mathcal{D} = \{\mathcal{U}\}$. Então $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}_X$ e se $\rho_X(x, y) \prec \mathcal{D}$ temos que $y \in \mathrm{St}[x, \mathcal{U}]$ e com isso $f(y) \in \operatorname{int}(\mathrm{B}(f(x), \mathcal{E}))$. Dessa forma $\rho_Y(f(x), f(y)) \prec \mathcal{E}$ toda vez que $\rho_X(x, y) \prec \mathcal{D}$. De outro modo, admita que para cada $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_Y$ existe $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}_X$ tal que se $\rho_X(x, y) \prec \mathcal{D}$ então $\rho_Y(f(x), f(y)) \prec \mathcal{E}$. Nesse caso, dado $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_Y$ tome $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}_X$ tal que se $\rho_X(x, y) \prec \mathcal{D}$ então $\rho_Y(f(x), f(y)) \prec \{\mathcal{V}\}$. Portanto $x \in \operatorname{int}(\mathrm{B}(x, \mathcal{D}))$ e para todo $y \in \operatorname{int}(\mathrm{B}(x, \mathcal{D}))$, temos $f(y) \in \mathrm{St}[f(x), \mathcal{V}]$. Consequentemente, $\operatorname{int}(\mathrm{B}(x, \mathcal{D})) \subset f^{-1}(\mathrm{St}[f(x), \mathcal{V}])$ e assim provamos que f é contínua. □

Vamos concluir a seção com uma generalização da ideia de módulo de continuidade. Nossa intenção é utilizar esse conceito no estudo da continuidade uniforme (ver Proposição 1.4.3).

Definição 1.3.2. *Sejam $(X, \mathcal{O}_X, \rho_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y, \rho_Y)$ espaços admissíveis. Uma função $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{P}(\mathcal{O}_Y)$ é chamada de módulo de continuidade se preserva ordem, $\varphi(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$ e para cada $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_Y$ existe $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}_X$ tal que $\varphi(\mathcal{D}) \prec \mathcal{E}$.*

Se $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{P}(\mathcal{O}_Y)$ é um módulo de continuidade então para cada $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_Y$ existe $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}_X$ tal que o intervalo $[\mathcal{O}_X, \mathcal{D})$ está contido em $\varphi^{-1}[\mathcal{O}_Y, \mathcal{E})$.

Proposição 1.3.6. *Sejam $(X, \mathcal{O}_X, \rho_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y, \rho_Y)$ espaços admissíveis e $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{P}(\mathcal{O}_Y)$ um módulo de continuidade.*

1. *Se $\mathcal{E}_\lambda \to_e \mathcal{O}_X$ então $\varphi(\mathcal{E}_\lambda) \to_e \mathcal{O}_Y$.*

2. *Se $(Z, \mathcal{O}_Z, \rho_Z)$ é outro espaço admissível e $\phi : \mathcal{P}(\mathcal{O}_Y) \to \mathcal{P}(\mathcal{O}_Z)$ é um módulo de continuidade, então $\phi \circ \varphi : \mathcal{P}(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{P}(\mathcal{O}_Z)$ é um módulo de continuidade.*

Demonstração. 1. Dado $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}_Y$ existe $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_X$ tal que $\varphi(\mathcal{E}) \prec \mathcal{D}$. Como $\mathcal{E}_\lambda \to_e \mathcal{O}_X$, existe λ_0 tal que $\mathcal{E}_\lambda \prec \mathcal{E}$ toda vez que $\lambda \geq \lambda_0$. Segue que $\varphi(\mathcal{E}_\lambda) \prec \varphi(\mathcal{E}) \prec \mathcal{D}$ sempre que $\lambda \geq \lambda_0$. Assim $\varphi(\mathcal{E}_\lambda) \to_e \mathcal{O}_Y$.

2. Uma vez que ϕ e φ preservam ordem, a composição $\phi\circ\varphi$ também preserva ordem. Além disso, $\phi\circ\varphi(\mathcal{O}_X) = \phi(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_Z$. Em seguida, dado $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_Z$ existe $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}_Y$ tal que $\phi(\mathcal{D}) \prec \mathcal{E}$. Desde que $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}_Y$ tome $\mathcal{F} \succ_e \mathcal{O}_X$ tal que $\varphi(\mathcal{F}) \prec \mathcal{D}$. Portanto $\phi\circ\varphi(\mathcal{F}) \prec \phi(\mathcal{D}) \prec \mathcal{E}$. Assim provamos que $\phi\circ\varphi$ é um módulo de continuidade. □

Proposição 1.3.7. *A aplicação $\Phi_n : \mathcal{P}(\mathcal{O}) \to \mathcal{P}(\mathcal{O})$ é um módulo de continuidade para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\mathcal{O}$ é full, então $\Phi_n : \mathcal{P}(\mathcal{O}) \to \mathcal{P}(\mathcal{O})$ é um módulo de continuidade para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.2.1, $\Phi_n : \mathcal{P}(\mathcal{O}) \to \mathcal{P}(\mathcal{O})$ preserva ordem e $\Phi_n(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A seguir, dado $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}$, considere uma sequência essencial de refinamentos duplos $(\mathcal{E}_n)_{n=0}^{\infty}$ em $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ com $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$. Como $\mathcal{E}_n \succ_e \mathcal{O}$, vale que $n\mathcal{E}_n \prec \mathcal{E}$. Com isso temos que $\Phi_n(\mathcal{E}_n) \prec \mathcal{E}$ e então Φ_n é um módulo de continuidade para todo $n \in \mathbb{N}$. De outro modo, suponha que $\mathcal{O}$ é full. Pelo Teorema 1.2.1, $\Phi_n : \mathcal{P}(\mathcal{O}) \to \mathcal{P}(\mathcal{O})$ preserva ordem e $\Phi_n(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Agora, dado $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}$, $n\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ pelo Lema 1.2.1. Em virtude do item 5. do Lema 1.2.1, segue que $-n(n\mathcal{E}) \prec \mathcal{E}$. Portanto $\Phi_{-n}(n\mathcal{E}) \prec \mathcal{E}$, e então Φ_{-n} é um módulo de continuidade para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Diâmetro estendido

Estamos prontos para introduzir o conceito de diâmetro em nosso ambiente de estudo. Destacamos a utilização desta definição na construção de resultados importantes deste trabalho (em especial, ver Teoremas 1.3.1 e 1.5.3).

Definição 1.3.3. *O diâmetro de $Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$, é o conjunto $\mathrm{D}(Y) \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ definido como*

$$\mathrm{D}(Y) = \bigcap_{x,y\in Y} \rho(x,y).$$

Definição 1.3.4. *Um subconjunto Y de X é limitado com respeito à $\mathcal{O}$ se existir $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{U} \in \rho(x,y)$ para todo $x,y \in Y$.*

Observação 1.3.3. *Se $Y \subset X$ é limitado então $\mathrm{D}(Y) \neq \emptyset$. Além disso, $\mathcal{U} \in \mathrm{D}(Y)$ se, e somente se, Y é limitado por $\mathcal{U}$.*

Proposição 1.3.8. *Dados $A, B \subset X$ não vazios, as seguintes propriedades são válidas:*

1. *$\rho(x,y) \prec \mathrm{D}(A)$ para todo $x,y \in A$.*

2. *$\mathrm{D}(A) \prec \mathrm{D}(B)$ se $A \subset B$.*

3. $\mathrm{D}(A) \prec \mathrm{D}(\overline{A}) \prec 2\mathrm{D}(A)$.

Demonstração. Os itens 1. e 2. seguem diretamente da Definição 1.3.3. Passamos então à prova do item 3.. Como $A \subset \overline{A}$ a primeira desigualdade $\mathrm{D}(A) \prec \mathrm{D}(\overline{A})$ é óbvia. De outro modo, tome $\mathcal{U} \in 2\mathrm{D}(A)$ e $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{A}$. Assim existe $\mathcal{V} \in \mathrm{D}(A)$ de modo que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^2}\mathcal{U}$ e $x, y \in A$ tais que $x \in \mathrm{St}[\bar{x}, \mathcal{V}]$ e $y \in \mathrm{St}[\bar{y}, \mathcal{V}]$. Como $\mathcal{V} \in \rho(x, y)$ vale que $\mathcal{V} \in \rho(x, \bar{x}) \cap \rho(y, \bar{y}) \cap \rho(x, y)$, então $\mathcal{U} \in 2(\rho(x, \bar{x}) \cap \rho(y, \bar{y}) \cap \rho(x, y))$. Uma vez que que $\rho(\bar{x}, \bar{y}) \prec 2(\rho(x, \bar{x}) \cap \rho(y, \bar{y}) \cap \rho(x, y))$ concluímos que $\mathcal{U} \in \rho(\bar{x}, \bar{y})$. Portanto $2\mathrm{D}(A) \subset \rho(\bar{x}, \bar{y})$ para arbitrários $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{A}$, o que implica $\mathrm{D}(\overline{A}) \prec 2\mathrm{D}(A)$. □

Definição 1.3.5. *Assuma $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma cobertura aberta qualquer de X. Dizemos que $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ é uma cobertura de Lebesgue para a cobertura $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, se dado $A \subset X$ tal que $\mathcal{U} \in \mathrm{D}(A)$ então $A \subset V_\alpha$ para algum $\alpha \in \Lambda$.*

O próximo teorema fornece uma reformulação do Lema da cobertura de Lebesgue contido em [30] em razão do diâmetro.

Teorema 1.3.1. *(Lema da cobertura de Lebesgue) Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{O}$ uma família admissível de coberturas abertas de X. Assuma $K \subset X$ um compacto, tal que $K \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$ com a coleção $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma cobertura aberta qualquer de K. Nesse caso, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que se $A \subset K$ e $\mathcal{U} \in \mathrm{D}(A)$ então $A \subset V_\alpha$ para algum $\alpha \in \Lambda$.*

Demonstração. Fixe $x_0 \in A$. Pelo Teorema 5 contido em [30] existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $St[x_0, \mathcal{U}] \subset V_\alpha$ para algum α. Depois tome $x \in A$ qualquer. Como $\mathcal{U} \in \mathrm{D}(A)$ então $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$ para quaisquer $x, y \in A$. Sendo assim, $\mathcal{U} \in \rho(x, x_0)$ o que garante $x \in St[x_0, \mathcal{U}] \subset V_\alpha$. Portanto $A \subset V_\alpha$.

□

Corolário 1.3.1. *Seja $f : X \to Y$ uma função contínua entre os espaços admissíveis X e Y. Assuma $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$uma cobertura aberta de Y. Nessas condições, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ de modo que para todo compacto $K \subset X$ tal que $\mathcal{U} \in \mathrm{D}(K)$ vale que $f(K) \subset V_\alpha$ para algum $\alpha \in \Lambda$.*

A seguir, vamos relacionar os diâmetros métrico e admissível.

Proposição 1.3.9. *Considere $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O}_d)$. Dado $A \subset X$ e $c > 0$ temos os seguintes itens:*

1. *Se $diam(A) < c$ então $\mathrm{D}(A) \prec \{\mathcal{U}_c\}$.*

2. *Se $\mathrm{D}(A) \prec \{\mathcal{U}_c\}$ então $diam(A) \leq 2c$.*

3. Dado $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O}_d)$, se $\mathrm{D}(A) \prec \mathcal{E}$, então $diam(A) < 4\delta_0$, onde $\delta_0 := \inf\{\epsilon > 0 : \mathcal{U}_\epsilon \in \mathcal{E}\}$.

Demonstração. Para o item 1. tome $x, y \in A$. Como $diam(A) < c$ então $d(x, y) < c$. Assim $y \in B_d(x, c)$ e daí $\mathrm{D}(A) \prec \{\mathcal{U}_c\}$. Passamos ao item 2. Para isto, sejam $x, y \in A$. Como $\mathcal{U}_c \in \mathrm{D}(A)$ existe $z \in X$ tal que $x, y \in B_d(z, c)$. Desse modo $d(x, y) < 2c$ para todo $x, y \in A$ e assim $diam(A) \leq 2c$. Para verificar o item 3. tome novamente $x, y \in A$. Dado que $\delta_0 < 2\delta_0$ então existe $\delta \in \{\epsilon > 0 : \mathcal{U}_\epsilon \in \mathcal{E}\}$ tal que $\delta \leq 2\delta_0$. Uma vez que $\mathcal{U}_\delta \in \mathcal{E} \subset \mathrm{D}(A)$, então $\mathcal{U}_\delta \in \mathrm{D}(A)$. Assim existe $B(z, \delta)$ para algum $z \in X$ tal que $x, y \in B(z, \delta)$. Com isso $d(x, y) < 2\delta \leq 4\delta_0$ para todo $x, y \in A$, o que implica $diam(A) < 4\delta_0$. □

Dados (X, d) um espaço métrico e $\mathcal{O}_d$ a família admissível de coberturas abertas $\mathcal{U}_\epsilon = \{B(x, \epsilon) : x \in X\}$ por ϵ-bolas, $\epsilon > 0$, então $\mathrm{D}(A) = \mathcal{O}_d$ se, e somente se, $diam(A) = 0$. Com efeito, pelo item 3. da Proposição 1.3.1 temos $\rho(x, y) = \mathcal{O}_d$ se, e somente se, $x = y$. Portanto $\mathrm{D}(A) = \mathcal{O}_d$ se, e somente se, $A = \{x\}$. De modo geral, dado X Hausdorff e $A \subset X$, como $\rho(x, y) = \mathcal{O}$ se, e somente se, $x = y$ então $\mathcal{D}(A) = \mathcal{O}$ se, e somente se, A é unitário.

Observação 1.3.4. *Se $(\mathcal{E}_\lambda)$ é uma rede em $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ com $1\mathcal{E}_\lambda \to \mathcal{O}$ então $\mathrm{D}(B(x, \mathcal{E}_\lambda)) \to \mathcal{O}$. De fato, sejam $a, b \in \mathrm{B}(x, \mathcal{E}_\lambda)$. Para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tome $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que se $\lambda \geq \lambda_0$ então $\mathcal{U} \in 1\mathcal{E}_\lambda$. Desse modo $\rho(a, b) \prec 1(\rho(a, x) \cap \rho(x, b)) \prec 1\mathcal{E}_\lambda \prec \{\mathcal{U}\}$ sempre que $\lambda \geq \lambda_0$ o que implica $\mathcal{U} \in \rho(a, b)$ para todo $a, b \in \mathrm{B}(x, \mathcal{E}_\lambda)$ se $\lambda \geq \lambda_0$. Portanto, $\mathcal{U} \in \mathrm{D}(\mathrm{B}(x, \mathcal{E}_\lambda))$ toda vez que $\lambda \geq \lambda_0$.*

1.4 Conceitos uniformes revisitados

O propósito desta seção é simplificar definições, estabelecer metodologias e também fornecer releituras de resultados envolvendo principalmente os conceitos de continuidade uniforme, equicontinuidade uniforme, conexidade uniforme local e módulo de continuidade. Além do mais, vamos generalizar alguns teoremas que não haviam sido demonstrados ainda em ambientes mais específicos (em especial, veja o Teorema 1.4.1).

Antes de mais nada, no sentido da Proposição 1.3.5 reeditaremos o conceito de função uniformemente contínua.

Definição 1.4.1. *Sejam $(X, \mathcal{O}_X, \rho_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y, \rho_Y)$ espaços admissíveis. Uma função $f : X \to Y$ se diz uniformemente contínua com respeito a ρ_X e ρ_Y (ou simplesmente uniformemente contínua) se para cada $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_Y$, existir $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}_X$ tal que $\rho_Y(f(x), f(y)) \prec \mathcal{E}$ toda vez que*

$\rho_X(x, y) \prec \mathcal{D}$. *Se f é bijetora e $f^{-1} : Y \to X$ é uniformemente contínua então f se diz um isomorfismo uniforme.*

Pela Proposição 1.3.5 toda função uniformemente contínua é contínua.

Definição 1.4.2. *Uma função $f : X \to Y$ é uniformemente contínua com respeito a $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$ se para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_Y$, existir $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_X$ tal que se x e y pertencem a algum elemento de $\mathcal{V}$ então $f(x)$ e $f(y)$ pertencem a algum elemento $\mathcal{U}$, em outras palavras, se $y \in \mathrm{St}[x, \mathcal{V}]$ então $f(y) \in \mathrm{St}[f(x), \mathcal{U}]$.*

Na sequência, relacionaremos o conceito de continuidade uniforme definido acima e o conceito usual de continuidade uniforme presente em espaços uniformes.

Proposição 1.4.1. *Sejam $(X, \mathcal{O}_X, \rho_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y, \rho_Y)$ espaços admissíveis. Uma função $f : X \to Y$ é uniformemente contínua com respeito a ρ_X e ρ_Y se, e somente se, é uniformemente contínua com respeito a $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_Y$. Uma vez que $\{\mathcal{U}\} \succ_e \mathcal{O}_Y$ existe $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}_X$ tal que $\rho_Y(f(x), f(y)) \prec \{\mathcal{U}\}$ toda vez que $\rho_X(x, y) \prec \mathcal{D}$. Em seguida, se $\mathcal{D} = \emptyset$ então $\rho_Y(f(x), f(y)) \prec \{\mathcal{U}\}$ para todo $x, y \in X$. Se $\mathcal{D} \neq \emptyset$, tome $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_X$ com $\mathcal{V} \in \min(\mathcal{D})$. Observe que $\rho_X(x, y) \prec \{\mathcal{V}\}$ implica $\rho_X(x, y) \prec \mathcal{D}$ e portanto $\rho_Y(f(x), f(y)) \prec \{\mathcal{U}\}$ sempre que $\rho_X(x, y) \prec \{\mathcal{V}\}$. Com isso, se $y \in \mathrm{St}[x, \mathcal{V}]$ então $f(y) \in \mathrm{St}[f(x), \mathcal{U}]$ e por causa disso f é uniformemente contínua com respeito $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$. Reciprocamente, assuma que f é uniformemente contínua com respeito a $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$ e além disso $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_Y$. Se $\mathcal{E} = \emptyset$ então $\rho_Y(f(x), f(y)) \prec \mathcal{E}$ para todo $x, y \in X$. Se $\mathcal{E} \neq \emptyset$, considere $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_Y$ com $\mathcal{V} \in \min(\mathcal{E})$. Por hipótese, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_X$ tal que se $y \in \mathrm{St}[x, \mathcal{V}]$ então $f(y) \in \mathrm{St}[f(x), \mathcal{U}]$. Dito isto, se $\rho_X(x, y) \prec \{\mathcal{V}\}$ vale que $f(y) \in \mathrm{St}[f(x), \mathcal{U}] \subset \mathrm{B}(f(x), \mathcal{E})$ e assim $\rho_Y(f(x), f(y)) \prec \mathcal{E}$. Portanto f é uniformemente contínua com respeito a ρ_X e ρ_Y. $\square$

Definição 1.4.3. *Sejam $(X, \mathcal{O}_X, \rho_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y, \rho_Y)$ espaços admissíveis. Uma função $f : X \to Y$ admite um módulo de continuidade $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{P}(\mathcal{O}_Y)$ se*

$$\rho_Y(f(x), f(y)) \prec \varphi(\rho_X(x, y))$$

para todo $x, y \in X$.

O próximo resultado prova que a existência de um módulo de continuidade é uma condição necessária e suficiente para a continuidade uniforme de $f : X \to Y$.

Teorema 1.4.1. *Sejam* $(X, \mathcal{O}_X, \rho_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y, \rho_Y)$ *espaços admissíveis. Uma função* $f : X \to Y$ *é uniformemente contínua se, e somente se, possui um módulo de continuidade.*

Demonstração. Admita $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{P}(\mathcal{O}_Y)$ um módulo de continuidade para f. Em seguida, dado $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_Y$ tome $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}_X$ tal que $\varphi(\mathcal{D}) \prec \mathcal{E}$. Se $\rho_X(x,y) \prec \mathcal{D}$ então

$$\rho_Y(f(x), f(y)) \prec \varphi(\rho_X(x,y)) \prec \varphi(\mathcal{D}) \prec \mathcal{E}$$

donde segue que f é uniformemente contínua. De modo recíproco, suponha f uniformemente contínua e defina a função $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{P}(\mathcal{O}_Y)$ por

$$\varphi(\mathcal{D}) = \bigcap \{\rho_Y(f(x), f(y)) : x, y \in X, \rho_X(x,y) \prec \mathcal{D}\}.$$

Afirmamos que φ é um módulo de continuidade para f. Para isto, repare que

$$\begin{aligned}\varphi(\mathcal{O}_X) &= \bigcap \{\rho_Y(f(x), f(y)) : x, y \in X, \rho_X(x,y) = \mathcal{O}_X\} \\ &= \bigcap \{\rho_Y(f(x), f(x)) : x \in X\} = \mathcal{O}_Y.\end{aligned}$$

Dessa forma $\varphi(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$. Se $\mathcal{D}_1 \prec \mathcal{D}_2$ temos que

$$\begin{aligned}\varphi(\mathcal{D}_1) &= \bigcap \{\rho_Y(f(x), f(y)) : x, y \in X, \rho_X(x,y) \prec \mathcal{D}_1\} \\ &\supset \bigcap \{\rho_Y(f(x), f(y)) : x, y \in X, \rho_X(x,y) \prec \mathcal{D}_2\} \\ &= \varphi(\mathcal{D}_2),\end{aligned}$$

então $\varphi(\mathcal{D}_1) \prec \varphi(\mathcal{D}_2)$. Desse modo φ preserva a ordem. Na sequência, observe que para $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_Y$ basta tomarmos pela continuidade uniforme de f um elemento $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}_X$ tal que $\rho_Y(f(x), f(y)) \prec \mathcal{E}$ sempre que $\rho_X(x,y) \prec \mathcal{D}$ e então $\varphi(\mathcal{D}) \prec \mathcal{E}$. Finalmente, para todo $x, y \in X$ temos

$$\begin{aligned}\varphi(\rho_X(x,y)) &= \bigcap \{\rho_Y(f(x'), f(y')) : x', y' \in X, \rho_X(x', y') \prec \rho_X(x,y)\} \\ &\subset \rho_Y(f(x), f(y))\end{aligned}$$

,

de onde deduzimos $\rho_Y(f(x), f(y)) \prec \varphi(\rho_X(x,y))$. □

Passamos agora ao estudo da equicontinuidade uniforme. Nossa motivação é a Proposição 1.3.5 a qual sugere uma descrição alternativa do conceito de família de funções uniformemente equicontínuas.

Definição 1.4.4. *Sejam $(X, \mathcal{O}_X, \rho_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y, \rho_Y)$ espaços admissíveis. Uma família $\mathfrak{F} \subset C(X, Y)$ se diz equicontínua em $x \in X$ se para cada $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_Y$ existe $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}_X$ (dependendo de x) tal que se $\rho_X(x, y) \prec \mathcal{D}$ então $\rho_Y(f(x), f(y)) \prec \mathcal{E}$ para todo $f \in \mathfrak{F}$. A família $\mathfrak{F}$ é equicontínua se for equicontínua em todo ponto $x \in X$. Por último, a família $\mathfrak{F}$ é uniformemente equicontínua se para cada $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_Y$ existe $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}_X$ tal que para qualquer $x, y \in X$ com $\rho_X(x, y) \prec \mathcal{D}$ tem-se $\rho_Y(f(x), f(y)) \prec \mathcal{E}$ para todo $f \in \mathfrak{F}$.*

Teorema 1.4.2. *Uma família $\mathfrak{F} \subset C(X, Y)$ de funções admitindo um mesmo módulo de continuidade é uniformemente contínua.*

Demonstração. Suponha $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{P}(\mathcal{O}_Y)$ um módulo de continuidade comum para as funções da família $\mathfrak{F}$. Em seguida, dado $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_Y$ tome $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}_X$ tal que $\varphi(\mathcal{D}) \prec \mathcal{E}$. Então para todo $x, y \in X$ com $\rho_X(x, y) \prec \mathcal{D}$ e para todo $f \in \mathfrak{F}$ temos que $\rho_Y(f(x), f(y)) \prec \varphi(\rho_X(x, y)) \prec \varphi(\mathcal{D}) \prec \mathcal{E}$. Assim $\mathfrak{F}$ é uniformemente contínua. $\square$

É fácil ver que uma família uniformemente equicontínua de funções é em si uma família equicontínua. Além disso, uma aplicação do Lema da cobertura de Lebesgue assegura que a recíproca é verdadeira toda vez que X é compacto.

Teorema 1.4.3. *Se X é compacto então qualquer família equicontínua de funções $\mathfrak{F} \subset C(X, Y)$ é uniformemente equicontínua.*

Demonstração. Suponha $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_Y$ e tome uma sequência essencial de refinamentos duplos $(\mathcal{E}_n)_{n=0}^{\infty}$ com $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$. Para cada $x \in X$, tome $\mathcal{D}_x \succ_e \mathcal{O}_X$ tal que $\rho_X(x, y) \prec \mathcal{D}_x$. Então $\rho_Y(f(x), f(y)) \prec \mathcal{E}_1$ para todo $f \in \mathfrak{F}$. Considere $X = \bigcup_{x \in X} \operatorname{int}(\mathrm{B}(x, \mathcal{D}_x))$. Como X é compacto, existe $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}_X$ tal que se A é um subconjunto qualquer de X com $\mathrm{D}(A) \prec \mathcal{D}$ então $A \subset \operatorname{int}(\mathrm{B}(x, \mathcal{D}_x))$ para algum $x \in X$. Tome $x, y \in X$ tal que $\rho_X(x, y) \prec \mathcal{D}$. Assim existe $z \in X$ tal que $\{x, y\} \in \operatorname{int}(\mathrm{B}(z, \mathcal{D}_z))$. Isto garante que $\rho_X(x, z) \prec \mathcal{D}_z$ e $\rho_X(y, z) \prec \mathcal{D}_z$ e daí $\rho_Y(f(x), f(z)) \prec \mathcal{E}_1$ e $\rho_Y(f(y), f(z)) \prec \mathcal{E}_1$ para todo $f \in \mathfrak{F}$. Com isso $\rho_Y(f(x), f(y)) \prec 1\mathcal{E}_1 \prec \mathcal{E}$ para todo $f \in \mathfrak{F}$. Portanto $\mathfrak{F}$ é uniformemente equicontínua. $\square$

Segmentos admissíveis

Vamos explorar em seguida o conceito de segmento admissível com o objetivo de fornecer uma caracterização alternativa para a continuidade uniforme de uma aplicação $f : X \to Y$.

Definição 1.4.5. *Sejam $x, y \in X$ distintos. O segmento ligando x e y é denotado por $S(x, y)$ e definido como*

$$S(x,y) = \{z \in X : \rho(x,z) \cap \rho(z,y) = \rho(x,y)\}.$$

Como $\rho(x,x) \cap \rho(x,y) = \rho(x,y) \cap \rho(y,y) = \mathcal{O} \cap \rho(x,y) = \rho(x,y)$ então $x, y \in S(x,y)$. Além disso, X Hausdorff e $\mathrm{D}(S(x,y)) = \mathcal{O}$ implica $x = y$. De fato, como $x, y \in S(x,y)$ e $\mathrm{D}(S(x,y)) = \mathcal{O}$ então $\rho(x,y) = \mathcal{O}$. Portanto $x = y$.

Proposição 1.4.2. *Sejam (x_λ) e (y_λ) redes em X. As seguintes afirmações são válidas:*

1. *$\rho(x_\lambda, y_\lambda) \to \mathcal{O}$ se, e somente se, $\mathrm{D}(S(x_\lambda, y_\lambda)) \to \mathcal{O}$.*

2. *Se $\mathrm{D}(S(x_\lambda, y_\lambda)) \to \mathcal{O}$ e $z \in S(x_\lambda, y_\lambda)$ para todo λ então $x_\lambda, y_\lambda \to z$.*

Demonstração. 1. Suponha $\rho(x_\lambda, y_\lambda) \to \mathcal{O}$. Dado $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tome $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Então existe λ_0 de modo que $\mathcal{V} \in \rho(x_\lambda, y_\lambda)$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Seja $x, y \in S(x_\lambda, y_\lambda)$ com $\lambda \geq \lambda_0$. Desse modo

$$\mathcal{V} \in \rho(x_\lambda, y_\lambda) = \rho(x_\lambda, x) \cap \rho(x, y_\lambda) = \rho(x_\lambda, y) \cap \rho(y, y_\lambda)$$

e então $\mathcal{V} \in \rho(x, x_\lambda) \cap \rho(x_\lambda, y)$. Nesse caso

$$\rho(x,y) \prec 1(\rho(x, x_\lambda) \cap \rho(x_\lambda, y)) \prec 1\{\mathcal{V}\} \prec \{\mathcal{U}\}.$$

Assim $\mathcal{U} \in \mathrm{D}(S(x_\lambda, y_\lambda))$ para $\lambda \geq \lambda_0$ o que prova que $\mathrm{D}(S(x_\lambda, y_\lambda)) \to \mathcal{O}$. Reciprocamente, dado $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ existe λ_0 tal que $\mathcal{U} \in \mathrm{D}(S(x_\lambda, y_\lambda))$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Como $x_\lambda, y_\lambda \in S(x_\lambda, y_\lambda)$ então $\mathcal{U} \in \rho(x_\lambda, y_\lambda)$ sempre que $\lambda \geq \lambda_0$. Portanto $\rho(x_\lambda, y_\lambda) \to \mathcal{O}$.
2. Seja $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Pelo item 1. temos $\rho(x_\lambda, y_\lambda) \to \mathcal{O}$, logo existe λ_0 tal que $\mathcal{U} \in \rho(x_\lambda, y_\lambda)$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Em seguida, como $\rho(x_\lambda, z) \cap \rho(z, y_\lambda) = \rho(x_\lambda, y_\lambda)$ então $x_\lambda, y_\lambda \in \mathrm{St}[z, \mathcal{U}]$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Portanto $x_\lambda \to z$ e $y_\lambda \to z$. □

Teorema 1.4.4. *Seja $(Y, \mathcal{O}_Y, \rho_Y)$ um espaço admissível, (x_λ) e (y_λ) redes em X, e $f : X \to Y$ uma função. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *f é uniformemente contínua.*

2. *para cada $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_Y$ existe $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}$ tal que $\mathrm{D}(S(f(x), f(y))) \prec \mathcal{E}$ toda vez que $\mathrm{D}(S(x,y)) \prec \mathcal{D}$.*

3. *$\rho(x_\lambda, y_\lambda) \to_e \mathcal{O}$ então $\rho_Y(f(x_\lambda), f(y_\lambda)) \to_e \mathcal{O}_Y$.*

4. $\mathrm{D}(S(x_\lambda, y_\lambda)) \to_e \mathcal{O}$ *então* $\mathrm{D}(S(f(x_\lambda), f(y_\lambda))) \to_e \mathcal{O}_Y$.

Demonstração. (1) $\Leftrightarrow$ (2) Suponha que f é uniformemente contínua. Dado $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_Y$, tome $\mathcal{E}_1 \succ_e \mathcal{O}_Y$ tal que $1\mathcal{E}_1 \prec \mathcal{E}$. Pela continuidade uniforme, existe $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}$ tal que $\rho_Y(f(x), f(y)) \prec \mathcal{E}_1$ sempre que $\rho(x,y) \prec \mathcal{D}$. Suponha que $\mathrm{D}(S(x,y)) \prec \mathcal{D}$ e tome $a, b \in S(f(x), f(y))$. Isto garante que

$$\rho_Y(f(x), a) \cap \rho_Y(a, f(y)) = \rho_Y(f(x), f(y)) = \rho_Y(f(x), b) \cap \rho_Y(b, f(y)).$$

Como $\rho(x,y) \prec \mathcal{D}$, temos que $\rho_Y(f(x), f(y)) \prec \mathcal{E}_1$. Assim $\rho_Y(f(x), a) \prec \mathcal{E}_1$ e $\rho_Y(f(x), b) \prec \mathcal{E}_1$, e então

$$\rho_Y(a,b) \prec 1(\rho_Y(a, f(x)) \cap \rho_Y(f(x), b)) \prec 1\mathcal{E}_1 \prec \mathcal{E}.$$

Portanto $\mathrm{D}(S(f(x), f(y))) \prec \mathcal{E}$ sempre que $\mathrm{D}(S(x,y)) \prec \mathcal{D}$. Reciprocamente, dado $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_Y$ existe $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}$ tal que $\mathrm{D}(S(f(x), f(y))) \prec \mathcal{E}$ toda vez que $\mathrm{D}(S(x,y)) \prec \mathcal{D}$. Tome $\mathcal{D}_1 \succ_e \mathcal{O}$ de modo que $1\mathcal{D}_1 \prec \mathcal{D}$. Suponha $\rho(x,y) \prec \mathcal{D}_1$ e tome $a, b \in S(x,y)$. Então

$$\rho(x,a) \cap \rho(a,y) = \rho(x,b) \cap \rho(b,y) = \rho(x,y) \prec \mathcal{D}_1$$

e assim $\rho(a,b) \prec 1\mathcal{D}_1 \prec \mathcal{D}$. Desse modo $\mathrm{D}(S(x,y)) \prec \mathcal{D}$. Sendo assim temos que $\mathrm{D}(S(f(x), f(y))) \prec \mathcal{E}$. Como $f(x), f(y) \in S(f(x), f(y))$,temos que $\rho_Y(f(x), f(y)) \prec \mathcal{E}$ toda vez que $\rho(x,y) \prec \mathcal{D}_1$. Assim f é uniformemente contínua.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) Segue imediatamente da Proposição 1.4.2, item 1.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) Suponha que f é uniformemente contínua e $\rho(x_\lambda, y_\lambda) \to_e \mathcal{O}$. Dado $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_Y$ existe $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}$ tal que $\rho_Y(f(x), f(y)) \prec \mathcal{E}$ toda vez que $\rho(x,y) \prec \mathcal{D}$. Como $\rho(x_\lambda, y_\lambda) \to_e \mathcal{O}$, existe λ_0 tal que $\rho(x_\lambda, y_\lambda) \prec \mathcal{D}$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Então $\rho_Y(f(x_\lambda), f(y_\lambda)) \prec \mathcal{E}$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$, e portanto $\rho_Y(f(x_\lambda), f(y_\lambda)) \to_e \mathcal{O}_Y$.

Além do mais, suponha que $\rho(x_\lambda, y_\lambda) \to_e \mathcal{O}$ então $\rho_Y(f(x_\lambda), f(y_\lambda)) \to_e \mathcal{O}_Y$. Suponha por contradição que f não é uniformemente contínua. Então existe algum $\mathcal{E}_0 \succ_e \mathcal{O}_Y$ ta que para cada $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}$ existe um par de pontos $x_\mathcal{D}, y_\mathcal{D} \in X$ satisfazendo $\rho(x_\mathcal{D}, y_\mathcal{D}) \prec \mathcal{D}$ e $\rho_Y(f(y_\mathcal{D}), f(y_\mathcal{D})) \not\supseteq \mathcal{E}_0$. Isto garante que a rede $(\rho(x_\mathcal{D}, y_\mathcal{D}))_{\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}}$ converge essencialmente a $\mathcal{O}$, entretanto, a rede $(\rho_Y(f(y_\mathcal{D}), f(y_\mathcal{D})))_{\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}}$ não converge a $\mathcal{O}_Y$, o que é uma contradição. Assim f é uniformemente contínua. $\square$

Prosseguindo nosso estudo, vamos aplicar o Lema da cobertura de Lebesgue pra mostrar que todo espaço compacto localmente conexo é uniformemente localmente conexo e então provaremos que todo espaço de Peano é uniformemente localmente conexo por caminhos.

Definição 1.4.6. *Um espaço X é dito localmente conexo se cada $x \in X$ possui uma base de vizinhanças formada por conjuntos conexos; X é localmente conexo por arcos se cada ponto possui uma base de vizinhanças formada por conjuntos localmente conexos.*

Logo após, reproduziremos as noções de conjuntos uniformemente localmente conexos (conexos por arcos) e espaços de Peano.

Definição 1.4.7. *Um espaço admissível X se diz uniformemente localmente conexo se para qualquer $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}$, existe algum $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}$ de modo que se $\rho(x,y) \prec \mathcal{D}$, então ambos x e y pertencem a um mesmo subconjunto conexo de X com diâmetro menor do que $\mathcal{E}$. O espaço X é chamado uniformemente localmente conexo por arcos, se para todo $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}$, existe algum $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}$ de modo que se $\rho(x,y) \prec \mathcal{D}$ então ambos x e y são ligados por um arco cujo diâmetro é menor do que $\mathcal{E}$.*

Definição 1.4.8. *Um espaço admissível X é chamado de espaço de Peano se for compacto, conexo por arcos, localmente conexo, e todo subconjunto conexo de X é conexo por arcos.*

Pelo Teorema de Hahn-Mazurkiewicz, um espaço Hausdorff X é uma imagem contínua de um intervalo unitário I se, e somente se, é um espaço de Peano métrico.

Teorema 1.4.5. *Se X é um espaço admissível compacto localmente conexo, então é uniformemente localmente conexo. Se X é um espaço de Peano então é uniformemente localmente conexo por arcos.*

Demonstração. Suponha X compacto e localmente conexo. Em seguida, dado $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_Y$ tome uma sequência essencial de refinamentos duplos $(\mathcal{E}_n)_{n=0}^{\infty}$ com $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$. Para cada $x \in X$, considere também uma vizinhança aberta conexa V_x de x tal que $V_x \subset \mathrm{B}(x, \mathcal{E}_1)$. Se $y, z \in V_x$ então temos que $\rho(y,z) \prec 1(\rho(y,x) \cap \rho(x,z)) \prec 1\mathcal{E}_1 \prec \mathcal{E}$. Dessa forma $\mathrm{D}(V_x) \prec \mathcal{E}$ e pelo Teorema 1.3.1 existe $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}$ tal que se A é um subconjunto de X com $\mathrm{D}(A) \prec \mathcal{D}$ então $A \subset V_x$ para algum $x \in X$. Com isso, se $\rho(x,y) \prec \mathcal{D}$ então ambos x e y pertencem a um mesmo subconjunto conexo V_z com $\mathrm{D}(V_z) \prec \mathcal{E}$. Agora admita X um espaço de Peano. Visto que X é compacto e localmente conexo então X é uniformemente localmente conexo.

Considere a seguir $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_Y$ e uma sequência essencial de refinamentos duplos $(\mathcal{E}_n)_{n=0}^{\infty}$ com $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$. Portanto existe $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}$ de modo que se $\rho(x,y) \prec \mathcal{D}$ ambos x e y pertencem a um mesmo subconjunto conexo $C_{x,y} \subset X$ com $\mathrm{D}(C_{x,y}) \prec \mathcal{E}_2$. Para cada $z \in C_{x,y}$, tome uma vizinhança aberta conexa U_z de z com $\mathrm{D}(U_z) \prec \mathcal{E}_2$. Então $U_{x,y} = \bigcup_{z \in C_{x,y}} U_z$ é um subconjunto conexo de X e assim $U_{x,y}$ é conexo por arcos. Afirmamos que $\mathrm{D}(U_{x,y}) \prec \mathcal{E}$. De fato, para $w_1, w_2 \in U_{x,y}$, existem $z_1, z_2 \in C_{x,y}$ tal que $w_1 \in U_{z_1}$ e $w_2 \in U_{z_2}$. Então $\rho(w_1, z_1) \prec \mathcal{E}_2$ e $\rho(w_2, z_2) \prec \mathcal{E}_2$. Como $\rho(z_1, z_2) \prec \mathcal{E}_2$ segue que $\rho(w_1, w_2) \prec 2\mathcal{E}_2 \prec \mathcal{E}$ e então $\mathrm{D}(U_{x,y}) \prec \mathcal{E}$. Assim, se $\rho(x, y) \prec \mathcal{D}$ então ambos x e y pertencem a um mesmo subconjunto conexo por arcos $U_{x,y}$ com $\mathrm{D}(U_{x,y}) \prec \mathcal{E}$. $\square$

Encerramos a seção falando sobre oscilação e continuidade.

Definição 1.4.9. *Seja $f : X \to Y$ uma função e $x_0 \in X$. Definimos a oscilação de f em x_0 como $\omega(f, x_0) := \{\mathcal{V} \in \mathcal{O} : \mathcal{V} \in D(f(St[x_0, \mathcal{U}]))$ para algum $\mathcal{U} \in \mathcal{O}\}$.*

Proposição 1.4.3. *Uma função $f : X \to Y$ é contínua em x_0 se, e somente se, $\omega(f, x_0) = \mathcal{O}_Y$.*

Demonstração. Dado $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_Y$, seja $\mathcal{W} \in \mathcal{O}_Y$ tal que $\mathcal{W} \prec \frac{1}{2}\mathcal{V}$. Pela continuidade de f em x_0 existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X$ tal que $f(x) \in St[f(x_0), \mathcal{W}]$ se $x \in St[x_0, \mathcal{U}]$. Tome $f(x_1), f(x_2) \in f(St[x_0, \mathcal{U}])$ onde $x_1, x_2 \in St[x_0, \mathcal{U}]$. Assim $f(x_1), f(x_2) \in St[f(x_0), \mathcal{W}]$ e daí $f(x_1) \in St[f(x_2), \mathcal{V}]$. Então $\mathcal{V} \in \mathrm{D}(f(St[x_0, \mathcal{U}]))$ e com isso $\mathcal{V} \in \omega(f, x_0)$. Portanto $\omega(f, x_0) = \mathcal{O}_Y$. Agora assuma $\omega(f, x_0) = \mathcal{O}_Y$. Para cada $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_Y$ temos $\mathcal{V} \in \omega(f, x_0)$ e portanto $\mathcal{V} \in \mathrm{D}(f(St[x_0, \mathcal{U}]))$ para algum $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X$. Suponha $x \in St[x_0, \mathcal{U}]$. Então $f(x), f(x_0) \in f(St[x_0, \mathcal{U}])$. Como $\mathcal{V} \in \mathrm{D}(f(St[x_0, \mathcal{U}]))$ temos $f(x) \in St[f(x_0), \mathcal{V}]$ e assim f é contínua em x_0. $\square$

1.5 Teorema de Cantor-Kuratowski

Nesta parte do trabalho vamos caracterizar conjuntos relativamente compactos sobre espaços completos e também provar uma generalização do Teorema de Cantor-Kuratowski.

Definição 1.5.1. *Uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ em X é $\mathcal{O}$-Cauchy se para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ existir algum $\lambda_0 \in \Lambda$ para o qual $x_{\lambda_1} \in \mathrm{St}[x_{\lambda_2}, \mathcal{U}]$ toda vez que $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0$.*

Observação 1.5.1. *Note que $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é $\mathcal{O}$-Cauchy se, e somente se, para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ existir $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\mathcal{U} \in \rho(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2})$ para todo $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0$.*

Proposição 1.5.1. *Uma rede de Cauchy que admite sub-rede convergente é convergente (com mesmo limite).*

Demonstração. Ver [1], Proposição 2.7.2. $\square$

Definição 1.5.2. *Um espaço admissível X é dito completo se toda rede de Cauchy em X converge.*

A próxima definição traduz a diferença entre completude e compacidade.

Definição 1.5.3. *O espaço admissível X se diz $\mathcal{O}$-totalmente limitado se para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ existir uma cobertura finita $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ por conjuntos com diâmetro contendo $\mathcal{U}$.*

Proposição 1.5.2. *O espaço admissível X é $\mathcal{O}$-totalmente limitado se, e somente se, para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ existirem $x_1, ..., x_n$ em X tais que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} St[x_i, \mathcal{U}]$.*

Demonstração. Suponha X totalmente limitado e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Dessa forma $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ com $\mathcal{U} \in \mathrm{D}(X_i)$. Escolhendo $x_i \in X_i$ então $X_i \subset St[x_i, \mathcal{U}]$. Portanto $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} St[x_i, \mathcal{U}]$. Reciprocamente, dado $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tome $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Então existem $x_1, ..., x_n$ de modo que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} St[x_i, \mathcal{V}]$. Para $x, y \in St[x_i, \mathcal{V}]$ temos que $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$ e com isso $\mathcal{U} \in \mathrm{D}(St[x_i, \mathcal{U}])$. $\square$

Teorema 1.5.1. *Seja X Hausdorff admissível $\mathcal{O}$-totalmente limitado. Se toda cobertura aberta de X admite cobertura de Lebesgue então X é compacto.*

Demonstração. Considere $\mathcal{A}$ cobertura aberta de X, $\mathcal{U}$ cobertura de Lebesgue associada a $\mathcal{A}$ e $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Como X é $\mathcal{O}$-totalmente limitado então $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} St[x_i, \mathcal{V}]$ com $x_i \in X$ e $i \in \{1, ..., n\}$. Além disso, o diâmetro de cada $St[x_i, \mathcal{V}]$ contém $\mathcal{U}$. Com efeito, fixe $i \in \{1, ..., n\}$ e tome $a, b \in St[x_i, \mathcal{V}]$. Nesse caso $\mathcal{V} \in \rho(a, x_i) \cap \rho(x_i, b)$ logo $\mathcal{U} \in \rho(a, b)$ para todo $a, b \in St[x_i, \mathcal{V}]$. Desse modo $\mathcal{U} \in \mathrm{D}(St[x_i, \mathcal{V}])$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Então cada $St[x_i, \mathcal{V}]$ está contida em um elemento $A_i \in \mathcal{A}$ e com isso

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{n} St[x_i, \mathcal{V}] \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Portanto $\{A_i : i \in \{1, ..., n\}\}$ é uma subcoleção finita de $\mathcal{A}$ que cobre X. $\square$

Proposição 1.5.3. *O espaço admissível X é $\mathcal{O}$-totalmente limitado se, e somente se, cada rede em X possui sub-rede de Cauchy.*

Demonstração. Seja X $\mathcal{O}$-totalmente limitado e (x_λ) uma rede em X. Dado $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ existe um conjunto $X_\mathcal{U} \subset X$ com $\mathcal{U} \in \mathrm{D}(X_\mathcal{U})$ de modo que (x_λ) está frequentemente em $X_\mathcal{U}$, ou seja, para cada λ existe λ' com $\lambda' \geq \lambda$ e $x_{\lambda'} \in X_\mathcal{U}$. Note que $X_\emptyset = X$ e tome $\Gamma = \{(\lambda, \mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathcal{O} \text{ e } x_\lambda \in X_\mathcal{U}\}$ dirigido por $(\lambda_1, \mathcal{U}_1) \leq (\lambda_2, \mathcal{U}_2)$ se, e somente se, $\lambda_1 \leq \lambda_2$ e $X_{\mathcal{U}_1} \supset X_{\mathcal{U}_2}$. Para cada $(\lambda, \mathcal{U}) \in \Gamma$ definimos $x_{(\lambda, \mathcal{U})} = x_\lambda$. Então $\left(x_{(\lambda, \mathcal{U})}\right)$ é uma sub-rede de (x_λ). Agora dado $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ considere λ tal que $(\lambda, \mathcal{U}) \in \Gamma$. Se $(\lambda_1, \mathcal{U}_1), (\lambda_2, \mathcal{U}_2) \geq (\lambda, \mathcal{U})$ então

$$\begin{aligned} x_{(\lambda_1, \mathcal{U}_1)} &= x_{\lambda_1} \in X_{\mathcal{U}_1} \subset X_\mathcal{U}, \\ x_{(\lambda_2, \mathcal{U}_2)} &= x_{\lambda_2} \in X_{\mathcal{U}_2} \subset X_\mathcal{U}. \end{aligned}$$

Logo $\mathcal{U} \in \rho\left(x_{(\lambda_1,\mathcal{U}_1)}, x_{(\lambda_2,\mathcal{U}_2)}\right)$. Portanto $\left(x_{(\lambda,\mathcal{U})}\right)$ é uma sub-rede de Cauchy de (x_λ). Em contrapartida, admita que cada rede em X possui uma sub-rede de Cauchy. Se X não é $\mathcal{O}$-totalmente limitado então existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que a cobertura $X = \bigcup_{x\in X} St[x,\mathcal{U}]$ não admite subcobertura finita. Por indução, podemos construir a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X tal que $x_{n+1} \notin \bigcup_{i=1}^{n} St[x_i,\mathcal{U}]$ e assim existe sub-rede de Cauchy (x_{n_λ}) de (x_n). Desse modo existe algum λ_0 de forma que $\mathcal{U} \in \rho\left(x_{n_\lambda}, x_{n_{\lambda'}}\right)$ toda vez que $\lambda, \lambda' \geq \lambda_0$. Assim tomando $\lambda, \lambda' \geq \lambda_0$ com $n_\lambda > n_{\lambda'}$, segue que $x_{n_\lambda} \in St[x_{n_{\lambda'}},\mathcal{U}]$ e então $x_{(n_\lambda-1)+1} \in \bigcup_{i=1}^{n_\lambda-1} St[x_i,\mathcal{U}]$. Assim temos uma contradição. □

Teorema 1.5.2. *O espaço admissível X é compacto se, e somente se, é completo e $\mathcal{O}$-totalmente limitado.*

Demonstração. Suponha X compacto. Para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ a cobertura $X = \bigcup_{x\in X} St[x,\mathcal{U}]$ possui subcobertura finita e assim X é $\mathcal{O}$-totalmente limitado. Além do mais, se (x_λ) é uma rede de Cauchy em X então (x_λ) possui sub-rede convergente em X. Pela Proposição 1.5.1 temos (x_λ) convergente e portanto X é completo. De modo recíproco, assuma X completo e $\mathcal{O}$-totalmente limitado. Pela Proposição 1.5.3 toda rede em X possui sub-rede de Cauchy de onde se conclui pela completude que toda rede em X possui sub-rede convergente. Pela Poposição 1.1.3 X é compacto. □

Observação 1.5.2. *Se $Y \subset X$ é $\mathcal{O}$-totalmente limitado então Y é limitado. De fato, para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tome uma cobertura $Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{St}\left[x_i,\mathcal{U}\right]$. Como $\mathcal{O}$ é full considere $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ e $\mathcal{V} \in \rho\left(x_i, x_j\right)$ para todo par $i, j \in \{1, ..., n\}$. Para $x, y \in Y$ temos que $x \in \mathrm{St}\left[x_i,\mathcal{U}\right]$ e $y \in \mathrm{St}\left[x_j,\mathcal{U}\right]$ para alguns i, j e assim*

$$\rho\left(x, y\right) \prec 2\left(\rho\left(x, x_i\right) \cap \rho\left(x_i, x_j\right) \cap \rho\left(x_j, y\right)\right) \prec 2\left\{\mathcal{V}\right\}$$

com $2\left\{\mathcal{V}\right\} \neq \emptyset$.

Observação 1.5.3. *Se $A \subset X$ é limitado então $\mathrm{B}\left(A,\mathcal{E}\right)$ é também limitado para qualquer $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}$. De fato, seja $\mathcal{E}_0 \succ_e \mathcal{O}$ de modo que $\mathcal{E}_0 \neq \emptyset$ e $\rho\left(x, y\right) \prec \mathcal{E}_0$ para todo $x, y \in A$. Considere $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{E}_0$. Se $u, v \in \mathrm{B}\left(A,\mathcal{E}\right)$ e $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{E}$ existem $x, y \in A$ tais que $u \in \mathrm{St}\left[x,\mathcal{U}\right]$ e $v \in \mathrm{St}\left[y,\mathcal{V}\right]$. Por fim, seja $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{W}$. Com isso $\rho\left(u, v\right) \prec 2\left(\rho\left(u, x\right) \cap \rho\left(x, y\right) \cap \rho\left(y, v\right)\right) \prec 2\left\{\mathcal{W}\right\}$.*

A seguir, vamos usar o diâmetro na construção de uma versão não metrizável do Teorema da interseção de Cantor.

Teorema 1.5.3. *Um espaço admissível X é completo se, e somente se, toda rede decrescente (F_λ) de conjuntos fechados não vazios de X com $\mathrm{D}(F_\lambda) \to \mathcal{O}$ possui intersecção não vazia. Se X é Hausdorff essa intersecção consiste de um ponto só.*

Demonstração. Suponha X completo e (F_λ) uma rede decrescente de fechados não vazios de X com $\mathrm{D}(F_\lambda) \to \mathcal{O}$. Para cada λ tome $x_\lambda \in F_\lambda$. Dado $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ existe λ_0 tal que se $\lambda \geq \lambda_0$ então $\mathcal{U} \in \mathrm{D}(F_\lambda)$. Para $\lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0$ temos $F_{\lambda_1} \cup F_{\lambda_2} \subset F_{\lambda_0}$ e então $x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2} \in F_{\lambda_0}$. Como $\mathcal{U} \in \mathrm{D}(F_{\lambda_0})$ segue que $\mathcal{U} \in \rho(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2})$ toda vez que $\lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0$. Desse modo (x_λ) é uma rede de Cauchy. Pela completude de X temos que (x_λ) converge a algum $x \in X$. Com isso, para cada λ a sub-rede $(x_{\lambda'})_{\lambda' \geq \lambda}$ também converge a x. Como F_λ é fechado e $x_{\lambda'} \in F_{\lambda'} \subset F_\lambda$ para todo $\lambda' \geq \lambda$ temos que $x \in F_\lambda$. Portanto $x \in \bigcap\limits_{\lambda} F_\lambda$.

Reciprocamente, suponha que toda rede decrescente (F_λ) de fechados não vazios de X com $\mathrm{D}(F_\lambda) \to \mathcal{O}$ possui intersecção não vazia. Tome (x_λ) uma rede de Cauchy. Para cada λ defina o conjunto $H_\lambda = \{x_{\lambda'} : \lambda' \geq \lambda\}$. Dessa forma H_λ é um subconjunto não vazio de X e $H_{\lambda_1} \subset H_{\lambda_2}$ toda vez que $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Afirmamos que $\mathrm{D}(H_\lambda) \to \mathcal{O}$. Com efeito, dado $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ existe λ_0 tal que $\mathcal{U} \in \rho(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2})$ sempre que $\lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0$. Se $x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2} \in H_\lambda$ com $\lambda \geq \lambda_0$ temos que $\lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda \geq \lambda_0$ e assim $\mathcal{U} \in \rho(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2})$. Desse modo $\mathcal{U} \in \mathrm{D}(H_\lambda)$ toda vez que $\lambda \geq \lambda_0$ e portanto $\mathrm{D}(H_\lambda) \to \mathcal{O}$. Assim, $2\mathrm{D}(H_\lambda) \to \mathcal{O}$ e pela Proposição 1.3.8 temos $\mathrm{D}(H_\lambda) \prec \mathrm{D}(\overline{H_\lambda}) \prec 2\mathrm{D}(H_\lambda)$. Desse modo $\mathrm{D}(\overline{H_\lambda}) \to \mathcal{O}$. Visto que $\overline{H_{\lambda_1}} \subset \overline{H_{\lambda_2}}$ sempre que $\lambda_1 \geq \lambda_2$ temos uma rede decrescente $(\overline{H_\lambda})$ de fechados não vazios de X com $\mathrm{D}(\overline{H_\lambda}) \to \mathcal{O}$. Por hipótese a intersecção $\bigcap\limits_{\lambda} \overline{H_\lambda}$ é não vazia e assim podemos tomar $x \in \bigcap\limits_{\lambda} \overline{H_\lambda}$. Afirmamos que $x_\lambda \to x$. De fato, pela Proposição 1.3.4 basta provarmos que $\rho(x_\lambda, x) \to \mathcal{O}$. Para isto, dado $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tome λ_0 tal que se $\lambda \geq \lambda_0$ então $\mathcal{U} \in \mathrm{D}(\overline{H_\lambda})$. Como $x_\lambda, x \in \overline{H_\lambda}$, segue que $\mathcal{U} \in \rho(x_\lambda, x)$ sempre que $\lambda \geq \lambda_0$. Então $\rho(x_\lambda, x) \to \mathcal{O}$. Portanto a rede de Cauchy (x_λ) é convergente e com isso X é completo. Passamos à segunda parte do teorema. Para isto, assuma X Hausdorff completo e (F_λ) uma rede decrescente de fechados não vazios de X com $\mathrm{D}(F_\lambda) \to \mathcal{O}$. Pela primeira parte da prova existe $x \in \bigcap\limits_{\lambda} F_\lambda$. Se $y \in \bigcap\limits_{\lambda} F_\lambda$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ então $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$ pois $\mathrm{D}(F_\lambda) \to \mathcal{O}$ e $x, y \in F_\lambda$ para todo λ. Então temos $y \in St[x, \mathcal{U}]$ para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ o que implica $\rho(x, y) = \mathcal{O}$. Pela Proposição 1.3.1 item 3. segue que $x = y$. $\square$

Medida de não compacidade

Definição 1.5.4. *Seja $Y \subset X$ um subconjunto não vazio. A medida de não compacidade (por estrelas) de Y é a coleção $\alpha(Y) \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ definida como*

$$\alpha(Y) = \left\{ \mathcal{U} \in \mathcal{O} : Y \textit{ admite uma subcobertura finita } Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{St}\left[x_i, \mathcal{U}\right] \right\};$$

A medida de não compacidade (via diâmetro) de Y é o conjunto $\gamma(Y) \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ definido como

$$\gamma(Y) = \bigcup \left\{ \mathcal{E} \succ_e \mathcal{O} : Y \textit{ admite uma subcobertura finita } Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} X_i \textit{ com } \mathrm{D}(X_i) \prec \mathcal{E} \right\}.$$

O conjunto $\gamma(Y)$ corresponde à medida de não compacidade de Kuratowski em espaços métricos. Além disso, se $Y \subset X$ é limitado então $\alpha(Y)$ e $\gamma(Y)$ são não vazios.

Proposição 1.5.4. *As seguintes propriedades são válidas:*

1. $\alpha(Y) \prec \gamma(Y) \prec 1\alpha(Y)$.

2. $\alpha(Y) \prec \mathrm{D}(Y)$.

3. $\alpha(Y) \prec \alpha(Z)$ *se* $Y \subset Z$.

4. $\alpha(Y \cup Z) = \alpha(Y) \cap \alpha(Z)$.

5. $\alpha(Y) \prec \alpha(\overline{Y}) \prec 1\alpha(Y)$.

Demonstração. Os itens 2. 3. e 4. seguem diretamente pela Definição 1.5.4.
1. Se $\mathcal{U} \in \gamma(Y)$ então $\mathcal{U} \in \mathcal{E}$ onde $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}$ e Y admite cobertura $Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ com $\mathrm{D}(X_i) \prec \mathcal{E}$. Para cada $i = 1, ..., n$, tome $x_i \in X_i$. Como $\mathcal{U} \in \mathcal{E}$ e $\mathrm{D}(X_i) \prec \mathcal{E}$ então $X_i \subset \mathrm{B}(x_i, \mathcal{E}) \subset \mathrm{St}[x_i, \mathcal{U}]$. Desse modo $Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{St}[x_i, \mathcal{U}]$ e assim $\mathcal{U} \in \alpha(Y)$. Portanto $\gamma(Y) \subset \alpha(Y)$. Agora suponha $\mathcal{U} \in 1\alpha(Y)$. Com isso existe $\mathcal{V} \in \alpha(Y)$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Então Y admite uma cobertura $Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{St}[x_i, \mathcal{V}]$. Para $x, y \in \mathrm{St}[x_i, \mathcal{V}]$ temos $y \in \mathrm{St}[x, \mathcal{U}]$ e daí $\mathcal{U} \in \mathrm{D}(\mathrm{St}[x_i, \mathcal{V}])$. Desse modo $Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{St}[x_i, \mathcal{V}]$ com $\mathrm{D}(\mathrm{St}[x_i, \mathcal{V}]) \prec \{\mathcal{U}\}$ o que garante $\mathcal{U} \in \gamma(Y)$.
5. A desigualdade $\alpha(Y) \prec \alpha(\overline{Y})$ segue pelo item 3. pois $Y \subset \overline{Y}$. Se $\mathcal{U} \in 1\alpha(Y)$ então existe $\mathcal{V} \in \alpha(Y)$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Desse modo Y admite cobertura $Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{St}[x_i, \mathcal{V}]$ e com isso

$$\overline{Y} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\mathrm{St}[x_i, \mathcal{V}]} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{St}[x_i, \mathcal{U}].$$

Portanto $\mathcal{U} \in \alpha(\overline{Y})$ e assim $\alpha(\overline{Y}) \prec 1\alpha(Y)$. □

Pelos itens 1. e 2. da Proposição 1.5.4 podemos considerar qualquer uma das medidas contidas na Definição 1.5.4 nos problemas teóricos.

Proposição 1.5.5. *Seja $Y \subset X$ não vazio. Se $\overline{Y}$ é compacto então $\alpha(Y) = \mathcal{O}$. A recíproca é válida se X é admissível completo.*

Demonstração. Suponha $\overline{Y}$ compacto. Dado $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, temos que a cobertura aberta $\overline{Y} \subset \bigcup_{x\in\overline{Y}} \mathrm{St}[x,\mathcal{U}]$ admite subcobertura finita $\overline{Y} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{St}[x_i,\mathcal{U}]$. Desse modo $\alpha(\overline{Y}) = \mathcal{O}$. Pela Proposição 1.5.4 segue que $\alpha(Y) \prec \alpha(\overline{Y}) = \mathcal{O}$ o que garante $\alpha(Y) = \mathcal{O}$. Para a recíproca assuma X completo. Se $\alpha(Y) = \mathcal{O}$ pelo Lema 1.2.1 temos que $1\alpha(Y) = 1\mathcal{O} = \mathcal{O}$. Novamente pela Proposição 1.5.4 tem-se $\alpha(\overline{Y}) \prec 1\alpha(Y) = \mathcal{O}$, então $\alpha(\overline{Y}) = \mathcal{O}$. Desse modo para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ garantimos que $\overline{Y}$ admite cobertura finita $\overline{Y} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{St}[x_i,\mathcal{U}]$. Assim $\overline{Y}$ é $\mathcal{O}$-totalmente limitado e fechado. Por último, dado que X é completo concluímos que $\overline{Y}$ é compacto pelo Teorema 1.5.2. □

Corolário 1.5.1. *Se X é um espaço admissível completo e $Y \subset X$ é um subconjunto fechado não vazio então Y é compacto se, e somente se, $\alpha(Y) = \mathcal{O}$ (ou $\gamma(Y) = \mathcal{O}$).*

Estamos, neste momento, aptos a enunciar e demonstrar uma versão não metrizável do *Teorema de Cantor-Kuratowski.*

Teorema 1.5.4. *O espaço admissível X é completo se, e somente se, toda rede encaixada (F_λ) de conjuntos fechados e não vazios de X, com $\gamma(F_\lambda) \to \mathcal{O}$, possui intersecção compacta não vazia.*

Demonstração. Suponha X completo e tome (F_λ) uma rede encaixada de fechados não vazios de X com $\gamma(F_\lambda) \to \mathcal{O}$. Para cada λ tome $x_\lambda \in F_\lambda$. Dado $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, como $\gamma(F_\lambda) \to \mathcal{O}$ existe λ_0 tal que $\lambda \geq \lambda_0$ implica $\mathcal{U} \in \gamma(F_\lambda)$. Dessa forma, existem $x_1, ..., x_n \in X$ tais que $F_{\lambda_0} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{St}[x_i,\mathcal{U}]$. Com isso a rede (x_λ) não pode estar eventualmente em cada $X \setminus \mathrm{St}[x_i,\mathcal{U}]$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$, logo está frequentemente em alguma das estrelas $\mathrm{St}[x_1,\mathcal{U}]$,...,$\mathrm{St}[x_n,\mathcal{U}]$. Portanto toda rede (x_λ) com $x_\lambda \in F_\lambda$ e $\gamma(F_\lambda) \to \mathcal{O}$ é cofinal Cauchy. Pela Proposição 1.1.4 a rede (x_λ) possui sub-rede universal, digamos (x_{λ_μ}). Em seguida, como $x_{\lambda_\mu} \in F_{\lambda_\mu}$, onde (F_{λ_μ}) é uma rede encaixada de fechados tal que $\mu(F_{\lambda_\mu}) \to \mathcal{O}$, temos que (x_{λ_μ}) é também cofinal Cauchy e então está frequentemente em $St[x_{i_0},\mathcal{U}]$ para algum $i_0 \in \{1, ..., n\}$. Mas então (x_{λ_μ}) está eventualmente em $St[x_{i_0},\mathcal{U}]$. Desse modo (x_{λ_μ}) é uma sub-rede de Cauchy de (x_λ). Pela completude de X segue que (x_{λ_μ}) converge para algum $x \in X$. Afirmamos que $x \in \bigcap_{\lambda} F_\lambda$. Com efeito, fixe $\lambda \in \Lambda$. Depois tome μ_0 tal que $\lambda_{\mu_0} \geq \lambda$. A sub-rede $(x_{\lambda_\mu})_{\mu \geq \mu_0}$ também converge a x. Uma vez que $\lambda_{\mu_0} \geq \lambda$ tem-se $x_{\lambda_\mu} \in F_{\lambda_{\mu_0}} \subset F_\lambda$ para todo $\mu \geq \mu_0$. Então $(x_{\lambda_\mu}) \subset F_\lambda$ se $\mu \geq \mu_0$. Como F_λ é fechado então $x \in F_\lambda$. Portanto $x \in \bigcap\limits_\lambda F_\lambda$. Além do mais, $\gamma\left(F_\lambda\right) \to \mathcal{O}$ e com isso $\gamma\left(\bigcap\limits_\lambda F_\lambda\right) = \mathcal{O}$. Assim pela Proposição 1.5.5 temos $\bigcap\limits_\lambda F_\lambda = \overline{\bigcap\limits_\lambda F_\lambda}$ compacto. Em contrapartida, suponha que toda rede decrescente (F_λ) de conjuntos fechados não vazios de X com $\gamma\left(F_\lambda\right) \to \mathcal{O}$ possui intersecção não vazia. Seja $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma rede de Cauchy. Para cada λ considere $H_\lambda = \{x_{\lambda'} : \lambda' \geq \lambda\}$. A demonstração do Teorema 1.5.3 garante que $\mathrm{D}\left(\overline{H_\lambda}\right) \to \mathcal{O}$. Logo pelo item 2. da Proposição 1.5.4 segue que $\alpha(\overline{H_\lambda}) \to \mathcal{O}$. Como $\overline{H_{\lambda_1}} \subset \overline{H_{\lambda_2}}$ sempre que $\lambda_1 \geq \lambda_2$ obtemos uma rede decrescente $(\overline{H_\lambda})$ de conjuntos fechados não vazios de X com $\alpha(\overline{H_\lambda}) \to \mathcal{O}$. Por hipótese a intersecção $\bigcap\limits_\lambda \overline{H_\lambda}$ é não vazia e com isso podemos tomar $x \in \bigcap\limits_\lambda \overline{H_\lambda}$. Isto posto, segue que $x_\lambda \to x$. Portanto a rede (x_λ) converge, logo X é completo. □

1.6 Funções de conexão

Seja $(X, \mathcal{O}_{\mathrm{d}}, \rho)$ um espaço métrico (veja Exemplo 1.1.2). Com o objetivo de relacionar conceitos induzidos por d e ρ definimos as funções de conexão $\mu : \mathcal{P}\left(\mathcal{O}_{\mathrm{d}}\right) \to [0, \infty]$ e $\mu^* : [0, \infty] \to \mathcal{P}\left(\mathcal{O}_{\mathrm{d}}\right)$ por

$$\begin{aligned} \mu\left(\mathcal{E}\right) &= \inf\left\{\varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{E}\right\}, \text{ se } \mathcal{E} \neq \emptyset, \text{ e } \mu\left(\emptyset\right) = \infty, \\ \mu^*\left(t\right) &= \left\{\mathcal{U}_\varepsilon : t < \varepsilon\right\}. \end{aligned}$$

Proposição 1.6.1. *As funções de conexão satisfazem as seguintes propriedades:*

1. $\mu\left(\rho(x,y)\right) \leq \mathrm{d}\left(x,y\right) \leq 2\mu\left(\rho(x,y)\right)$ *para todo* $x, y \in X$.

2. $\mu^*\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(x,y\right)\right) \prec \rho(x,y) \prec \mu^*\left(\mathrm{d}\left(x,y\right)\right)$ *para todo* $x, y \in X$.

3. $\mu\left(\mathcal{E}\right) \leq \mu\left(\mathcal{D}\right)$ *toda vez que* $\mathcal{E} \prec \mathcal{D}$ *e* $\mu^*\left(t\right) \prec \mu^*\left(s\right)$ *sempre que* $t \leq s$.

4. $\mu\left(k\mathcal{E}\right) \leq 2^k\mu\left(\mathcal{E}\right)$ *para todo* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}\left(\mathcal{O}_{\mathrm{d}}\right)$ *e* $k \in \mathbb{Z}$.

5. $k\mu^*\left(2^{-k}t\right) \prec \mu^*\left(t\right)$ *para todo* $t \in [0, \infty]$ *e* $k \in \mathbb{Z}$.

6. $\mu\left(\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{E}_\lambda\right) \leq \inf_{\lambda \in \Lambda} \mu\left(\mathcal{E}_\lambda\right)$ *e* $\sup_{\lambda \in \Lambda} \mu\left(\mathcal{E}_\lambda\right) \leq \mu\left(\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{E}_\lambda\right)$.

7. $\mu^*\left(\inf\left(A\right)\right) = \bigcup\limits_{t \in A} \mu^*\left(t\right)$ *e* $\bigcap\limits_{t \in A} \mu^*\left(t\right) \prec \mu^*\left(\sup\left(A\right)\right)$. *A igualdade* $\mu^*\left(\sup\left(A\right)\right) = \bigcap\limits_{t \in A} \mu^*\left(t\right)$ *é válida se* A *for fechado.*

Demonstração. 1. Se $\rho(x,y)=\emptyset$ então $y\notin \mathrm{St}\,[x,\mathcal{U}_\varepsilon]$ para todo $0<\varepsilon<\infty$. Então $y\notin \mathrm{B_d}\,(x,\varepsilon)$ toda vez que $0<\varepsilon<\infty$, e então $\mathrm{d}\,(x,y)=\infty$. Assim $\mathrm{d}\,(x,y)=\infty=\mu\,(\rho(x,y))$. A seguir, suponha que $\rho\,(x,y)\neq\emptyset$ e tome $\mathcal{U}_\varepsilon\in\rho\,(x,y)$. Dessa forma $y\in \mathrm{St}\,[x,\mathcal{U}_\varepsilon]\subset \mathrm{B_d}\,(x,2\varepsilon)$, e então $\mathrm{d}\,(x,y)<2\varepsilon$. Assim $\mathrm{d}\,(x,y)\leq 2\mu\,(\rho(x,y))$. Em contrapartida, temos $y\in\mathrm{B_d}\,(x,\delta)$ para todo $\delta>\mathrm{d}\,(x,y)$. Como $\mathrm{B_d}\,(x,\delta)\subset\mathrm{St}\,[x,\mathcal{U}_\delta]$, segue que $\mathcal{U}_{\mathrm{d}(x,y)+\frac{1}{n}}\in\rho(x,y)$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Sendo assim $\mu\,(\rho(x,y))\leq \mathrm{d}\,(x,y)+\frac{1}{n}$ para todo $n\in\mathbb{N}$ o que garante que $\mu\,(\rho\,(x,y))\leq\mathrm{d}\,(x,y)$.

2. Se $\mathcal{U}_\varepsilon\in\rho(x,y)$ então $\mathrm{d}\,(x,y)<2\varepsilon$, e assim $\frac{1}{2}\mathrm{d}\,(x,y)<\varepsilon$. Portanto $\mathcal{U}_\varepsilon\in\mu^*\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\,(x,y)\right)$. Desse modo segue que $\mu^*\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\,(x,y)\right)\prec\rho(x,y)$. Por outro lado, se $\mathcal{U}_\delta\in\mu^*\,(\mathrm{d}\,(x,y))$ então $\mathrm{d}\,(x,y)<\delta$, logo $y\in\mathrm{St}\,[x,\mathcal{U}_\delta]$ e portanto $\mathcal{U}_\delta\in\rho\,(x,y)$. Dessa forma segue que $\rho(x,y)\prec\mu^*\,(\mathrm{d}\,(x,y))$.

3. Se $\mathcal{E}\prec\mathcal{D}$ então $\mathcal{E}\supset\mathcal{D}$, e portanto $\mu\,(\mathcal{E})\leq\mu\,(\mathcal{D})$. Se $t\leq s$ então $\{\mathcal{U}_\varepsilon : s<\varepsilon\}\subset\{\mathcal{U}_\delta : t<\delta\}$ e assim $\mu^*\,(t)\prec\mu^*\,(s)$.

4. Para $k=0$ temos uma igualdade. Seja $n\in\mathbb{N}^*$. Dado $\mathcal{U}_\varepsilon\in\mathcal{E}$ temos $\mathcal{U}_\varepsilon\leqslant\frac{1}{2^n}\mathcal{U}_{2^n\varepsilon}$ e portanto $\mathcal{U}_{2^n\varepsilon}\in n\mathcal{E}$. Assim $\mu\,(n\mathcal{E})\leq 2^n\varepsilon$ toda vez que $\mathcal{U}_\varepsilon\in\mathcal{E}$ implicando que $\mu\,(n\mathcal{E})\leq 2^n\mu\,(\mathcal{E})$. Na sequência, dado $\mathcal{U}_\varepsilon\in\mathcal{E}$ temos que $\mathcal{U}_{2^{-n}\varepsilon}\leqslant\frac{1}{2^n}\mathcal{U}_\varepsilon$ e com isso $\mathcal{U}_{2^{-n}\varepsilon}\in -n\mathcal{E}$. Sendo assim $\mu\,(-n\mathcal{E})\leq 2^{-n}\varepsilon$ toda vez que $\mathcal{U}_\varepsilon\in\mathcal{E}$ e daí $\mu\,(-n\mathcal{E})\leq 2^{-n}\mu\,(\mathcal{E})$.

5. Para $k=0$ temos uma igualdade. Seja $n\in\mathbb{N}^*$. Para $t=\infty$ temos que $n\mu^*\,(\infty)=-n\mu^*\,(\infty)=\mu^*\,(\infty)=\emptyset$. Para $t<\infty$, seja $\mathcal{U}_\varepsilon\in\mu^*\,(t)$. Dessa forma $t<\varepsilon$ e então $2^{-n}t<2^{-n}\varepsilon$. Isto garante que $\mathcal{U}_{2^{-n}\varepsilon}\in\mu^*\,(2^{-n}t)$. Já que $\mathcal{U}_{2^{-n}\varepsilon}\leqslant\frac{1}{2^n}\mathcal{U}_\varepsilon$ então $\mathcal{U}_\varepsilon\in n\mu^*\,(2^{-n}t)$, e portanto $n\mu^*\,(2^{-n}t)\prec\mu^*\,(t)$. Similarmente, $2^nt<2^n\varepsilon$ e assim $\mathcal{U}_{2^n\varepsilon}\in\mu^*\,(2^nt)$. Como $\mathcal{U}_\varepsilon\leqslant\frac{1}{2^n}\mathcal{U}_{2^n\varepsilon}$ temos que $\mathcal{U}_\varepsilon\in -n\mu^*\,(2^nt)$, e portanto $-n\mu^*\,(2^nt)\prec\mu^*\,(t)$.

6. Para cada $\lambda'\in\Lambda$ temos que $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{E}_\lambda\prec\mathcal{E}_{\lambda'}$, então $\mu\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{E}_\lambda\right)\leq\mu\,(\mathcal{E}_{\lambda'})$, pelo item 3. Assim $\mu\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{E}_\lambda\right)\leq\inf_{\lambda\in\Lambda}\mu\,(\mathcal{E}_\lambda)$. De outro modo, temos que $\mathcal{E}_{\lambda'}\prec\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{E}_\lambda$, então $\mu\,(\mathcal{E}_{\lambda'})\leq\mu\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{E}_\lambda\right)$. Portanto $\sup_{\lambda\in\Lambda}\mu\,(\mathcal{E}_\lambda)\leq\mu\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{E}_\lambda\right)$.

7. Se $\infty\in A$, então $\mu^*\,(\infty)=\emptyset\subset\mu^*\,(\inf\,(A))$. Suponha que $A\neq\{\infty\}$ e tome $\mathcal{U}_\varepsilon\in\mu^*\,(t)$ para algum $t\in A\setminus\{\infty\}$. Dessa forma $t<\varepsilon$ e $\inf\,(A)\leq t<\varepsilon$, logo $\mathcal{U}_\varepsilon\in\mu^*\,(\inf\,(A))$. Portanto $\bigcup\limits_{t\in A}\mu^*\,(t)\subset\mu^*\,(\inf\,(A))$. Além do que, se $\mathcal{U}_\varepsilon\in\mu^*\,(\inf\,(A))$ então $\inf\,(A)<\varepsilon$ e assim $s<\varepsilon$ para algum $s\in A$. Portanto $\mathcal{U}_\varepsilon\in\mu^*\,(s)\subset\bigcup\limits_{t\in A}\mu^*\,(t)$, o que garante que $\mu^*\,(\inf\,(A))\subset\bigcup\limits_{t\in A}\mu^*\,(t)$. Agora provaremos a desigualdade $\bigcap\limits_{t\in A}\mu^*\,(t)\prec\mu^*\,(\sup\,(A))$. Se $\sup\,(A)=\infty$ então a desigualdade é clara. Suponha que A é limitado e tome $\mathcal{U}_\varepsilon\in\mu^*\,(\sup\,(A))$. Então $\sup\,(A)<\varepsilon$ logo $t<\varepsilon$ para todo $t\in A$. Assim $\mathcal{U}_\varepsilon\in\bigcap\limits_{t\in A}\mu^*\,(t)$, e portanto $\mu^*\,(\sup\,(A))\subset\bigcap\limits_{t\in A}\mu^*\,(t)$. Posteriormente, suponha que A é um subconjunto fechado de $[0,\infty]$. Desse modo $\sup\,(A)\in A$, e assim $\bigcap\limits_{t\in A}\mu^*\,(t)\subset\mu^*\,(\sup\,(A))$. □

Definição 1.6.1. *Um espaço métrico* (X, d) *é dito uniformemente discreto se existir* $\epsilon > 0$ *tal que* $x = y$ *ou* $d(x, y) > \epsilon$ *para todo* $x, y \in X$.

O teorema a seguir fornece uma caracterização dos espaços uniformemente discretos por meio da função μ e do conceito de essencialidade.

Teorema 1.6.1. *O espaço métrico* (X, d) *é uniformemente discreto se, e somente se, existe algum* $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_\mathrm{d}$ *tal que* $\mu(\mathcal{E}) = 0$.

Demonstração. Suponha X uniformemente discreto. Assim existe algum $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\mathrm{B_d}(x, \varepsilon_0) = \{x\}$ para todo $x \in X$. Desse modo $\mathcal{U}_{\varepsilon_0}$ é a mais fina cobertura em $\mathcal{O}_\mathrm{d}$. Considere $\mathcal{E} = \{\mathcal{U}_\varepsilon : \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ e defina $\mathcal{E}_n = -n\mathcal{E}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Então $\mu(\mathcal{E}) = 0$. Pelo Lema 1.2.1 temos $1\mathcal{E}_{n+1} = 1(-1(-n\mathcal{E})) \prec -n\mathcal{E} = \mathcal{E}_n$. Como $\mathcal{U}_{\varepsilon_0}$ refina todas as coberturas em $\mathcal{O}_\mathrm{d}$, segue que $(\mathcal{E}_n)$ é uma sequência essencial de refinamentos duplos e portanto $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_\mathrm{d}$ com $\mu(\mathcal{E}) = 0$. Reciprocamente, suponha $\mu(\mathcal{E}) = 0$ para algum $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_\mathrm{d}$. Tome $\mathcal{U}_\delta$ uma cobertura minimal para $\mathcal{E}$. Então $x \in \mathrm{St}[x, \mathcal{U}_\delta] \subset \mathrm{int}(\mathrm{B}(x, \mathcal{E}))$ para todo $x \in X$. Seja $y \in \mathrm{B}(x, \mathcal{E})$. Pelos itens 1. e 3. da Proposição 1.6.1 temos que

$$\mathrm{d}(x, y) \leq 2\mu(\rho(x, y)) \leq 2\mu(\mathcal{E}) = 0.$$

Assim $y = x$ e portanto $\mathrm{B}(x, \mathcal{E}) = \{x\} = \mathrm{int}(\mathrm{B}(x, \mathcal{E}))$. Isto nos diz que $\mathrm{B_d}(x, \delta) = \{x\}$ e então X é uniformemente discreto. □

Proposição 1.6.2. *Seja* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O}_\mathrm{d})$. *Se* $\mu(\mathcal{E}) > 0$ *então* $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_\mathrm{d}$. *Neste caso, temos as inclusões*

$$\mathrm{B_d}(x, \mu(\mathcal{E})) \subset \mathrm{St}\left[x, \mathcal{U}_{\mu(\mathcal{E})}\right] \subset \mathrm{B}(x, \mathcal{E}) \subset \overline{\mathrm{B_d}(x, 2\mu(\mathcal{E}))}$$

para todo $x \in X$. *A recíproca é válida se* X *não é discreto.*

Demonstração. Se $\mu(\mathcal{E}) > 0$ então $\mathrm{St}\left[x, \mathcal{U}_{\mu(\mathcal{E})}\right] \subset \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{E}} \mathrm{St}[x, \mathcal{U}_\varepsilon] = \mathrm{B}(x, \mathcal{E})$, visto que $\mu(\mathcal{E}) \leq \varepsilon$ para todo $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{E}$. Tome $y \in \mathrm{B}(x, \mathcal{E})$. Então $y \in \mathrm{St}[x, \mathcal{U}_\varepsilon]$ para todo $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{E}$. Assim $y \in \mathrm{B_d}(x, 2\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{E}$. Portanto $\mathrm{d}(x, y) \leq 2\mu(\mathcal{E})$ o que implica $\mathrm{B}(x, \mathcal{E}) \subset \overline{\mathrm{B_d}(x, 2\mu(\mathcal{E}))}$. A inclusão $\mathrm{B_d}(x, \mu(\mathcal{E})) \subset \mathrm{St}\left[x, \mathcal{U}_{\mu(\mathcal{E})}\right]$ é clara. Em seguida, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\mathcal{E}_n = \left\{\mathcal{U}_{\varepsilon/2^n} : \mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{E}\right\}$. Portanto $1\mathcal{E}_{n+1} \prec \mathcal{E}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $\mu(\mathcal{E})/2^n \leq \varepsilon/2^n$ toda vez que $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{E}$ e daí $\mathcal{U}_{\mu(\mathcal{E})/2^n}$ é uma cobertura minimal para $\mathcal{E}_n$. Portanto $(\mathcal{E}_n)_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência essencial de refinamenos duplos com $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$. A recíproca segue pelo Teorema 1.6.1. □

Seguem mais algumas propriedades das funções μ e μ^*.

Proposição 1.6.3. *Com respeito às funções de conexão, são válidas as seguintes propriedades:*

1. *Se* $\mathcal{E}_\lambda \to_e \mathcal{O}_\mathrm{d}$ *então* $\mu(\mathcal{E}_\lambda) \to \mu(\mathcal{O}_\mathrm{d}) = 0$.

2. *Se* $t_\lambda \to 0$ *então* $\mu^*(t_\lambda) \to_e \mu^*(0) = \mathcal{O}_\mathrm{d}$.

3. $\mu^* \circ \mu : \mathcal{P}(\mathcal{O}_\mathrm{d}) \to \mathcal{P}(\mathcal{O}_\mathrm{d})$ *é um módulo de continuidade.*

4. $\mu \circ \mu^* : [0, \infty] \to [0, \infty]$ *é um módulo de continuidade.*

5. $\rho(x, y) = \mu^* \circ \mu(\rho(x, y))$ *para todo* $x, y \in X$.

6. $\mu \circ \mu^*(\mathrm{d}(x, y)) \leq \mathrm{d}(x, u) \leq 2\mu \circ \mu^*(\mathrm{d}(x, y))$ *para todo* $x, y \in X$.

Demonstração. 1. É fácil ver que $\mu(\mathcal{O}_\mathrm{d}) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, temos que $\{\mathcal{U}_\varepsilon\} \succ_e \mathcal{O}_\mathrm{d}$, e como $\mathcal{E}_\lambda \to_e \mathcal{O}_\mathrm{d}$ temos a existência de algum λ_0 tal que $\mathcal{E}_\lambda \prec \{\mathcal{U}_\varepsilon\}$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Desse modo $\mu(\mathcal{E}_\lambda) \leq \varepsilon$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Portanto $\mu(\mathcal{E}_\lambda) \to 0$.

2. Claramente $\mu^*(0) = \mathcal{O}_\mathrm{d}$. Seja $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_\mathrm{d}$. Se $\mu(\mathcal{E}) > 0$ existe λ_0 tal que $t_\lambda < \mu(\mathcal{E})$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Para qualquer $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{E}$, segue que $t_\lambda < \varepsilon$ e então $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mu^*(t_\lambda)$. Sendo assim $\mu^*(t_\lambda) \prec \mathcal{E}$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Se $\mu(\mathcal{E}) = 0$ então X é uniformemente discreto pelo Teorema 1.6.1. Logo existe $\delta > 0$ tal que $\mathrm{B_d}(x, \delta) = \{x\}$ para todo $x \in X$ o que garante que $\mathrm{B_d}(x, \varepsilon) = \{x\}$ para todo $\varepsilon \leq \delta$ e $x \in X$. Assim $\mathcal{U}_\varepsilon = \mathcal{U}_\delta = \{\{x\} : x \in X\}$ toda vez que $\varepsilon \leq \delta$. Depois, tome λ_0 tal que $t_\lambda < \delta/2$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Afirmamos que $\mu^*(t_\lambda) = \mathcal{O}_\mathrm{d}$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Com efeito, para $\varepsilon \geq \delta/2$, temos que $t_\lambda < \varepsilon$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Então $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mu^*(t_\lambda)$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Além disso, para $\varepsilon < \delta/2$, temos que $\mathcal{U}_\varepsilon = \mathcal{U}_\delta \in \mu^*(t_\lambda)$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$, o que prova a afirmação. Com isso, $\mu^*(t_\lambda) \prec \mathcal{E}$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$ e portanto $\mu^*(t_\lambda) \to_e \mu^*(0) = \mathcal{O}_\mathrm{d}$.

3. Como $\mu(\mathcal{O}_\mathrm{d}) = 0$ e $\mu^*(0) = \mathcal{O}_\mathrm{d}$ temos que $\mu^* \circ \mu(\mathcal{O}_\mathrm{d}) = \mathcal{O}_\mathrm{d}$. Pelo item 3. da Proposição 1.6.1 ambas μ e μ^* preservam ordem, portanto a composição $\mu^* \circ \mu$ também preserva ordem. Agora tome $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_\mathrm{d}$. Pelo item 2. existe algum $\delta > 0$ tal que $\mu^*(\delta) \prec \mathcal{E}$. Pelo item 1. existe $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}_\mathrm{d}$ de modo que $\mu(\mathcal{D}) < \delta$. Então temos que $\mu^*(\mu(\mathcal{D})) \prec \mu^*(\delta) \prec \mathcal{E}$ e com isso $\mu^* \circ \mu$ é um módulo de continuidade.

4. É claro que $\mu \circ \mu^*(0) = 0$ e $\mu \circ \mu^*$ preserva ordem. Pelos itens 1. e 2. podemos facilmente mostrar que $\mu \circ \mu^*$ é contínua em 0. Assim $\mu \circ \mu^*$ é um módulo de continuidade.

5. Se $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mu^*(\mu(\rho(x, y)))$ então existe $\mathcal{U}_\sigma \in \rho(x, y)$ tal que $\sigma < \varepsilon$. Uma vez que $\rho(x, y)$ é hereditário tem-se $\mathcal{U}_\varepsilon \in \rho(x, y)$ e portanto $\mu^*(\mu(\rho(x, y))) \subset \rho(x, y)$. De modo recíproco, $\mathcal{U}_\varepsilon \in$

$\rho(x,y)$ garante que $y \in \mathrm{St}\,[x,\mathcal{U}_\varepsilon]$. Dessa forma podemos encontrar $\delta < \epsilon$ tal que $y \in \mathrm{St}\,[x,\mathcal{U}_\delta]$. Então $\mathcal{U}_\delta \in \rho(x,y)$ com $\delta < \varepsilon$ o que implica em $\mu\,(\rho(x,y)) < \varepsilon$. Assim $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mu^*\,(\mu\,(\rho\,(x,y)))$ provando a inclusão $\rho\,(x,y) \subset \mu^*\,(\mu\,(\rho(x,y)))$.

6. Note que $\mu\,(\mu^*\,(t)) = \mu\,(\{\mathcal{U}_\varepsilon : t < \varepsilon\}) \leq t$. Desse modo $\mu \circ \mu^*\,(\mathrm{d}\,(x,y)) \leq \mathrm{d}\,(x,y)$ para todo $x, y \in X$. Além do mais, pela Proposição 1.6.1 item 1. vale que $\mathrm{d}\,(x,y) \leq 2\mu\,(\rho\,(x,y))$ para todo $x, y \in X$. Logo pelo item anterior

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\,(x,y) &\leq 2\mu\,(\mu^* \circ \mu\,(\rho(x,y))) = 2\mu \circ \mu^*\,(\mu\,(\rho(x,y))) \\
&\leq 2\mu \circ \mu^*\,(\mathrm{d}\,(x,y))
\end{aligned}
$$

para todo $x, y \in X$. □

As Proposições 1.6.1 e 1.6.3 mostram que a aplicação $\mathrm{Id} : (X,\rho) \to (X,\mathrm{d})$ é um isomorfismo uniforme. Além disso, como $\mathrm{d}\,(x,y) \leq 2\mu\,(\rho(x,y))$ e $\rho\,(x,y) \prec \mu^*\,(\mathrm{d}\,(x,y))$ para todo $x, y \in X$ a função 2μ é um módulo de continuidade para $\mathrm{Id} : (X,\rho) \to (X,\mathrm{d})$ e μ^* é um módulo de continuidade para $\mathrm{Id} : (X,\mathrm{d}) \to (X,\rho)$.

Teorema 1.6.2. *Sejam (Y,d_Y) um espaço métrico e $(Y,\mathcal{O}_{\mathrm{d}_Y},\rho_Y)$ o espaço admissível associado. Então a função $f : X \to Y$ é uniformemente contínua com respeito a d e d_Y se, e somente se, f é uniformemente contínua com respeito ρ e ρ_Y.*

Demonstração. Considere o diagrama comutativo

$$
\begin{array}{ccc}
(X,\mathrm{d}) & \xrightarrow{f} & (Y,\mathrm{d}_Y) \\
{\scriptstyle \mathrm{Id}_X}\updownarrow & & \updownarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_Y} \\
(X,\rho) & \xrightarrow[f]{} & (Y,\rho_Y)
\end{array}
$$

Suponha que f é uniformemente contínua com respeito a d e d_Y e tome $\mathcal{E} \succ_e \mathcal{O}_{\mathrm{d}_Y}$. Em consequência de $\mathrm{Id}_Y : (Y,\rho_Y) \to (Y,\mathrm{d}_Y)$ ser um isomorfismo, existe algum $\varepsilon > 0$ tal que $\mathrm{d}_Y\,(y,y') < \varepsilon$ implica em $\rho_Y\,(y,y') \prec \mathcal{E}$. Para este $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\mathrm{d}\,(x,x') < \delta$ implica em $\mathrm{d}_Y\,(f\,(x), f\,(x')) < \varepsilon$. Em seguida, como $\mathrm{Id}_X : (X,\rho) \to (X,\mathrm{d})$ é um isomorfismo uniforme, existe $\mathcal{D} \succ_e \mathcal{O}_\mathrm{d}$ tal que $\mathrm{d}\,(x,x') < \delta$ toda vez que $\rho\,(x,x') \prec \mathcal{D}$. Sendo assim $\rho_Y\,(f\,(x), f\,(x')) \prec \mathcal{E}$ sempre que $\rho\,(x,x') \prec \mathcal{D}$ e por conta disso f é uniformemente contínua com respeito a ρ e ρ_Y. A recíproca pode ser demonstrada de maneira similar. □

Capítulo 2

O Hiperespaço

Neste capítulo vamos discutir aspectos topológicos da coleção $\mathcal{H}(X)$ formada pelos subconjuntos fechados de um espaço $(X, \mathcal{O}, \rho)$. Em especial, iremos interpretar a $\mathcal{O}$-estrutura uniforme diagonal a partir da função ρ_H (ver Definição 2.1.2) e ainda provar a equivalência entre a topologia uniforme e a topologia construída por Michael em [21]. Além do mais, vamos atestar a compatibilidade entre as convergências de Hausdorff e Kuratowski-Painlevé e também apresentar relações com a convergência topológica usual (adjacente a $\mathfrak{D}_{\mathcal{H}}$) do Hiperespaço.

2.1 Métrica de Hausdorff generalizada

Definição 2.1.1. *Dados $x \in X$ e $A \subset X$ não vazio definimos $\rho(x, A) \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ por*

$$\rho(x, A) = \bigcup_{a \in A} \rho(x, a).$$

A proposição abaixo traz propriedades relevantes de $\rho(x, A)$ e será importante para mostrarmos resultados das seções seguintes. Em especial, vamos usar o item 3. na prova das Proposições 2.1.2 e 2.3.3 e dos Teoremas 3.3.1 e 3.5.1.

Proposição 2.1.1. *Dados $x \in X$ e $A, B \subset X$, as seguintes propriedades são válidas:*

1. $\rho(x, A) \prec \rho(x, a)$ *para todo* $a \in A$.

2. *Se* $B \supset A$ *então* $\rho(x, B) \prec \rho(x, A)$.

3. $\rho(x, A) = \mathcal{O}$ *se, e somente se,* $x \in \overline{A}$.

4. $\rho(x, \overline{A}) = \rho(x, A)$.

Demonstração. Os itens 1. e 2. seguem diretamente da definição. Para o item 3. note que $\rho(x, A) = \mathcal{O}$ se, e somente se, $A \cap \mathrm{St}[x, \mathcal{U}] \neq \emptyset$ para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Como a coleção $\{\mathrm{St}[x, \mathcal{U}] : \mathcal{U} \in \mathcal{O}\}$ é uma família de vizinhanças básicas em x concluímos que $\rho(x, A) = \mathcal{O}$ se, e somente se, $x \in \overline{A}$. Agora provaremos o item 4. Para isto, veja que se $\mathcal{U} \in \rho(x, \overline{A})$ então $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$ para algum $y \in \overline{A}$. Então $y \in \mathrm{St}[x, \mathcal{U}] \cap \overline{A}$ e portanto $\mathrm{St}[x, \mathcal{U}] \cap A \neq \emptyset$. Desse modo $\mathcal{U} \in \rho(x, a)$ para algum $a \in A$. Assim $\mathcal{U} \in \rho(x, A)$ e com isso $\rho(x, \overline{A}) \subset \rho(x, A)$. A inclusão $\rho(x, A) \subset \rho(x, \overline{A})$ é óbvia. □

Definição 2.1.2. *Para $A, B \subset X$, definimos o excesso de B sobre A denotado por $\rho_A(B)$ como*

$$\rho_A(B) = \bigcap_{b \in B} \rho(b, A) = \bigcap_{b \in B} \bigcup_{a \in A} \rho(b, a)$$

e além disso a coleção $\rho_H(A, B) \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ dada por

$$\rho_H(A, B) = \rho_A(B) \cap \rho_B(A) = \left\{ \bigcap_{b \in B} \bigcup_{a \in A} \rho(a, b) \right\} \cap \left\{ \bigcap_{a \in A} \bigcup_{b \in B} \rho(a, b) \right\}.$$

A coleção $\rho_H(A, B)$ é uma relação simétrica, enquanto $\rho_A(B)$ não é simétrica. Além disso, pelo item 4. da Proposição 2.1.1 temos $\rho_H(A, B) = \rho_H(\overline{A}, \overline{B})$ para $A, B \subset X$ e com isso consideramos somente subconjuntos fechados ao fazer uso da aplicação ρ_H.

Observação 2.1.1. *Pelo que foi visto, podemos escrever:*

1. $\rho(x, A) = \{\mathcal{U} \in \mathcal{O} : St[x, \mathcal{U}] \cap A \neq \emptyset\}$.
2. $\rho_A(B) = \{\mathcal{U} \in \mathcal{O} : B \subset St[A, \mathcal{U}]\}$.
3. $\rho_H(A, B) = \{\mathcal{U} \in \mathcal{O} : B \subset St[A, \mathcal{U}]$ *e* $A \subset St[B, \mathcal{U}]\}$.

Proposição 2.1.2. *A aplicação ρ_H de $\mathcal{H}(X)$ associada a $\mathcal{O}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\rho_H(A, B) = \rho_H(B, A)$ *para todo* $A, B \in \mathcal{H}(X)$.
2. $\rho_H(\{x\}, \{y\}) = \rho(x, y)$ *para todo* $x, y \in X$.
3. $\rho_H(A, B) = \mathcal{O}$ *se, e somente se,* $A = B$.
4. $\rho_H(A, C) \prec 1\,(\rho_H(A, B) \cap \rho_H(B, C))$ *para todo* $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$.
5. $\rho_H(A \cup B, C \cup D) \prec \rho_H(A, C) \cap \rho_H(B, D)$ *para todo* $A, B, C, D \in \mathcal{H}(X)$.
6. $\rho_H(A, B) \prec \mathcal{E}$ *se, e somente se,* $A \subset \mathrm{B}(B, \mathcal{E})$ *e* $B \subset \mathrm{B}(A, \mathcal{E})$.

Demonstração. Os itens 1. e 2. seguem diretamente pela definição.

Para o item 3., note que $\rho_A(B) = \mathcal{O}$ se, e somente se, $B \subset \overline{A} = A$, pela Proposição 2.1.1. Analogamente, $\rho_B(A) = \mathcal{O}$ se, e somente se, $A \subset B$. Portanto, $\rho_H(A, B) = \mathcal{O}$ se, e somente se, $\rho_A(B) = \rho_B(A) = \mathcal{O}$ se, e somente se, $A = B$.

Para o item 4., suponha que $\mathcal{U} \in 1(\rho_H(A, B) \cap \rho_H(B, C))$. Assim existe $\mathcal{V} \in \rho_H(A, B) \cap \rho_H(B, C)$ de modo que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &\in \rho_A(B) \cap \rho_B(A) \cap \rho_B(C) \cap \rho_C(B) \\
&= \left\{\bigcap_{b\in B}\bigcup_{a\in A}\rho(a, b)\right\} \cap \left\{\bigcap_{a\in A}\bigcup_{b\in B}\rho(a, b)\right\} \cap \left\{\bigcap_{c\in C}\bigcup_{b\in B}\rho(b, c)\right\} \cap \left\{\bigcap_{b\in B}\bigcup_{c\in C}\rho(b, c)\right\}.
\end{aligned}$$

Dado $c \in C$, existe $b \in B$ tal que $\mathcal{V} \in \rho(b, c)$, pois $\mathcal{V} \in \rho_B(C)$. Para o elemento b, existe $a \in A$ tal que $\mathcal{V} \in \rho(a, b)$, visto que $\mathcal{V} \in \rho_A(B)$. Desse modo $a, c \in \mathrm{St}[b, \mathcal{V}]$, o que implica que $a \in \mathrm{St}[c, \mathcal{U}]$, pois $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Com isso, vale que $\mathcal{U} \in \rho(a, c)$. Portanto, uma vez que $c \in C$ foi escolhido de modo arbitrário segue que $\mathcal{U} \in \bigcap_{c\in C}\rho(c, A) = \rho_A(C)$. Similarmente, usando $\mathcal{V} \in \rho_B(A) \cap \rho_C(B)$ obtemos $\mathcal{U} \in \bigcap_{a\in A}\rho(a, C) = \rho_A(C)$. Portanto $1(\rho_H(A, B) \cap \rho_H(B, C)) \subset \rho_A(C) \cap \rho_C(A) = \rho_H(A, C)$. Na sequência, mostraremos o item 5.

Suponha $\mathcal{U} \in \rho_H(A, C) \cap \rho_H(B, D)$, $x \in A \cup B$ e $y \in C \cup D$. Se $x \in A$, temos que

$$\mathcal{U} \in \rho_C(A) \subset \rho(x, C) \subset \rho(x, C \cup D).$$

Se $x \in B$, temos que

$$\mathcal{U} \in \rho_D(B) \subset \rho(x, D) \subset \rho(x, C \cup D)$$

Desse modo $\mathcal{U} \in \rho_{C\cup D}(A \cup B)$. Se $y \in C$ ou $y \in D$, temos respectivamente

$$\mathcal{U} \in \rho_A(C) \subset \rho(y, A) \subset \rho(y, A \cup B)$$

ou

$$\mathcal{U} \in \rho_B(D) \subset \rho(y, B) \subset \rho(y, A \cup B).$$

Com isso, $\mathcal{U} \in \rho_{A\cup B}(C \cup D)$ o que implica $\mathcal{U} \in \rho_H(A \cup B, C \cup D)$. Portanto, segue $\rho_H(A, C) \cap \rho_H(B, D) \subset \rho_H(A \cup B, C \cup D)$. Por último, vamos provar o item 6. Nesse sentido, repare que $\rho_H(A, B) \prec \mathcal{E}$ se, e somente se, $\rho(a, B) \prec \mathcal{E}$, para todo $a \in A$, e $\rho(b, A) \prec \mathcal{E}$, para todo $b \in B$, garantindo dessa forma que $A \subset \mathrm{B}(B, \mathcal{E})$ e $B \subset \mathrm{B}(A, \mathcal{E})$. □

Para o que segue, lembramos que a família $\mathcal{O}_{\mathrm{d}}$ é full.

Proposição 2.1.3. *Sejam $A, B \subset X$ não vazios e $x \in X$. Então*

1. *A é limitado com respeito a* d *se, e somente se, é limitado com respeito a ρ.*

2. $\mu(\mathrm{D}(A)) \leq \mathrm{diam}(A) \leq 2\mu(\mathrm{D}(A))$.

3. $\mu(\rho(x,A)) \leq \mathrm{d}(x,A) \leq 2\mu(\rho(x,A))$.

4. $\mu(\rho_A(B)) \leq \mathrm{d}_A(B) \leq 2\mu(\rho_A(B))$.

5. $\mu(\rho_H(A,B)) \leq \mathrm{d}_H(A,B) \leq 2\mu(\rho_H(A,B))$.

6. $\mu^*\left(\frac{1}{2}\mathrm{diam}(A)\right) \prec \mathrm{D}(\overline{A})$ *e* $\mathrm{D}(A) \prec \mu^*(\mathrm{diam}(A))$.

7. $\mu^*\left(\frac{1}{2}\mathrm{diam}(A)\right) \prec 2\mathrm{D}(A) \prec \mu^*(4\mathrm{diam}(A))$.

8. $\mu^*\left(\frac{1}{\alpha}\mathrm{d}_H(A,B)\right) \prec \rho_H(A,B) \prec \mu^*(\mathrm{d}_H(A,B))$ *para todo número real $\alpha > 2$.*

9. $\mu^*\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}_H(A,B)\right) \prec \rho_H(A,B) \prec \mu^*(\mathrm{d}_H(A,B))$ *se A e B são compactos.*

Demonstração. 1. Observe inicialmente que A é limitado com respeito a ρ se, e somente se, existe $x \in X$ e $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\mathrm{d}$ tal que $A \subset \mathrm{St}[x, \mathcal{U}_\varepsilon]$. Então as afirmações seguem pelas inclusões $\mathrm{B}_\mathrm{d}(x,\varepsilon) \subset \mathrm{St}[x,\mathcal{U}_\varepsilon] \subset \mathrm{B}_\mathrm{d}(x, 2\varepsilon)$.

2. Pela Proposição 1.6.1, temos que

$$2\mu(\mathrm{D}(A)) = 2\mu\left(\bigcap_{x,y\in A} \rho(x,y)\right) \geq \sup_{x,y\in A} 2\mu(\rho(x,y)) \geq \sup_{x,y\in A} \mathrm{d}(x,y) = \mathrm{diam}(A).$$

Se A é não limitado então para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $x_n, y_n \in A$ com $\mathrm{d}(x_n, y_n) > 2n$. Então $\mathcal{U}_n \notin \rho(x_n, y_n)$ e assim $\bigcap_{x,y\in A} \rho(x,y) = \emptyset$. Desse modo $\mu(\mathrm{D}(A)) = \infty = \mathrm{diam}(A)$. Se A é limitado, então é válida a condição $\mathrm{d}(x,y) \leq \mathrm{diam}(A)$, para todo $x, y \in A$, o que implica que $\mathcal{U}_{\mathrm{diam}(A)+\delta} \in \rho(x,y)$ para todo $x, y \in A$ e $\delta > 0$. Sendo assim $\mathcal{U}_{\mathrm{diam}(A)+\delta} \in \mathrm{D}(A)$ para todo $\delta > 0$, e portanto $\mu(\mathrm{D}(A)) \leq \mathrm{diam}(A) + \delta$ para todo $\delta > 0$. Assim segue que $\mu(\mathrm{D}(A)) \leq \mathrm{diam}(A)$.

3. Pela Proposição 1.6.1, temos que

$$\mu(\rho(x,A)) = \mu\left(\bigcup_{a\in A} \rho(x,a)\right) \leq \inf_{a\in A} \mu(\rho(x,a)) \leq \inf_{a\in A} \mathrm{d}(x,a) = \mathrm{d}(x,A).$$

Por outro lado, considerando $\mathcal{U}_\varepsilon \in \rho(x,A)$ então $\mathcal{U}_\varepsilon \in \rho(x,a)$ para algum $a \in A$. Isto garante que $\mathrm{d}(x,a) < 2\varepsilon$, e então $\mathrm{d}(x,A) \leq \mathrm{d}(x,a) < 2\varepsilon$ toda vez que $\mathcal{U}_\varepsilon \in \rho(x,A)$. Desse modo, $\mathrm{d}(x,A) \leq 2\mu(\rho(x,A))$.

4. Pela Proposição 1.6.1 novamente, temos que

$$2\mu\left(\rho_A\left(B\right)\right)=2\mu\left(\bigcap_{b\in B}\rho\left(b,A\right)\right)\geq\sup_{b\in B}2\mu\left(\rho\left(b,A\right)\right)\geq\sup_{b\in B}\mathrm{d}\left(b,A\right)=\mathrm{d}_A\left(B\right).$$

Em contrapartida, temos que $\mathrm{d}\left(b,A\right)\leq\mathrm{d}_A\left(B\right)$ para todo $b\in B$. Para cada $\delta>0$, existe algum $a\in A$ tal que $\mathrm{d}\left(b,a\right)<\mathrm{d}\left(b,A\right)+\delta$ e então $\mathrm{d}\left(b,a\right)<\mathrm{d}_A\left(B\right)+\delta$. Sendo assim temos que $\mathcal{U}_{\mathrm{d}_A(B)+\delta}\in\rho\left(b,a\right)$, e então $\mathcal{U}_{\mathrm{d}_A(B)+\delta}\in\rho\left(b,A\right)$ para todo $b\in B$. Então $\mathcal{U}_{\mathrm{d}_A(B)+\delta}\in\rho_A\left(B\right)$ e portanto $\mu\left(\rho_A\left(B\right)\right)\leq\mathrm{d}_A\left(B\right)+\delta$ para todo $\delta>0$, o que implica $\mu\left(\rho_A\left(B\right)\right)\leq\mathrm{d}_A\left(B\right)$.

5. Agora temos que

$$\begin{aligned}2\mu\left(\rho_H\left(A,B\right)\right)&=2\mu\left(\rho_A\left(B\right)\cap\rho_B\left(A\right)\right)\\&\geq\max\left\{2\mu\left(\rho_A\left(B\right)\right),2\mu\left(\rho_B\left(A\right)\right)\right\}\\&\geq\max\left\{\mathrm{d}_A\left(B\right),\mathrm{d}_B\left(A\right)\right\}=\mathrm{d}_H\left(A,B\right).\end{aligned}$$

Uma vez que $\mu\left(\rho_A\left(B\right)\right)\leq\mathrm{d}_A\left(B\right)$, existe $\mathcal{U}_{\varepsilon_n}\in\rho_A\left(B\right)$ de modo que $\varepsilon_n<\mathrm{d}_A\left(B\right)+1/n$. Como $\rho_A\left(B\right)$ é hereditária, segue que $\mathcal{U}_{\mathrm{d}_A(B)+1/n}\in\rho_A\left(B\right)$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Analogamente, $\mu\left(\rho_B\left(A\right)\right)\leq\mathrm{d}_B\left(A\right)$ implica que $\mathcal{U}_{\mathrm{d}_B(A)+1/n}\in\rho_B\left(A\right)$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Pela hereditariedade, $\mathcal{U}_{\mathrm{d}_H(A,B)+1/n}\in\rho_A\left(B\right)\cap\rho_B\left(A\right)$ para todo $n\in\mathbb{N}$, e portanto $\mu\left(\rho_H\left(A,B\right)\right)\leq\mathrm{d}_H\left(A,B\right)+1/n$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Desse modo temos que $\mu\left(\rho_H\left(A,B\right)\right)\leq\mathrm{d}_H\left(A,B\right)$.

6. Em razão de μ^* preservar a ordem e $\mu\left(\mathrm{D}\left(A\right)\right)\leq\mathrm{diam}\left(A\right)$, temos que $\mu^*\left(\mu\left(\mathrm{D}\left(A\right)\right)\right)\prec\mu^*\left(\mathrm{diam}\left(A\right)\right)$. Por propriedades presentes nas Proposições 1.6.1 e 1.6.3, temos que

$$\begin{aligned}\mu^*\left(\mu\left(\mathrm{D}\left(A\right)\right)\right)&=\mu^*\left(\mu\left(\bigcap_{x,y\in A}\rho\left(x,y\right)\right)\right)\\&\succ\mu^*\left(\sup_{x,y\in A}\mu\left(\rho(x,y)\right)\right)\\&\succ\bigcap_{x,y\in A}\mu^*\left(\mu\left(\rho\left(x,y\right)\right)\right)\\&=\bigcap_{x,y\in A}\rho(x,y)\\&=\mathrm{D}\left(A\right).\end{aligned}$$

Então $\mathrm{D}\left(A\right)\prec\mu^*\left(\mu\left(\mathrm{D}\left(A\right)\right)\right)\prec\mu^*\left(\mathrm{diam}\left(A\right)\right)$. Se A é não limitado então $\mathrm{diam}\left(A\right)=\infty$ e $\mathrm{D}\left(A\right)=\emptyset$, e então $\mu^*(\mathrm{diam}\left(A\right))=\emptyset=\mathrm{D}(A)$. Se A é limitado então $\overline{A}$ é compacto, então o conjunto $\{\mathrm{d}(x,y) : x,y \in \overline{A}\}$ é fechado em $[0,\infty)$. Então temos que

$$\begin{aligned}
\mu^*\left(\frac{1}{2}\mathrm{diam}(A)\right) &= \mu^*\left(\frac{1}{2}\mathrm{diam}\left(\overline{A}\right)\right) \\
&= \mu^*\left(\sup\left\{\frac{1}{2}\mathrm{d}(x,y) : x,y \in \overline{A}\right\}\right) \\
&= \bigcap_{x,y\in\overline{A}} \mu^*\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}(x,y)\right) \\
&\prec \bigcap_{x,y\in\overline{A}} \rho(x,y) \\
&= \mathrm{D}\left(\overline{A}\right).
\end{aligned}$$

7. Pela Proposição 1.3.8 item 3. temos que juntamente com o item anterior

$$\mu^*(\frac{1}{2}\mathrm{diam}(A)) \prec \mathrm{D}(\overline{A}) \prec 2\mathrm{D}(A).$$

Pela Proposição 1.6.1 item 5. juntamente com o item anterior temos que

$$2\mathrm{D}(A) \prec 2\mu^*(\mathrm{diam}(A)) = 2\mu^*\left(2^{-2}4\mathrm{diam}(A)\right) \prec \mu^*(4\mathrm{diam}(A)).$$

Desse modo $\mu^*\left(\frac{1}{2}\mathrm{diam}(A)\right) \prec 2\mathrm{D}(A) \prec \mu^*(4\mathrm{diam}(A))$.

8. Pelo item 5. temos que $\mu^*(\mu(\rho_H(A,B))) \prec \mu^*(\mathrm{d}_H(A,B))$. Pelas Proposições 1.6.1 e 1.6.3

$$\begin{aligned}
\mu^*(\mu(\rho_H(A,B))) &\succ \mu^*(\max\{\mu(\rho_A(B)), \mu(\rho_B(A))\}) \\
&= \mu^*(\mu(\rho_A(B))) \cap \mu^*(\mu(\rho_B(A))) \\
&\succ \mu^*\left(\sup_{b\in B}\mu(\rho(b,A))\right) \cap \mu^*\left(\sup_{a\in A}\mu(\rho(a,B))\right) \\
&\succ \left\{\bigcap_{b\in B}\mu^*(\mu(\rho(b,A)))\right\} \cap \left\{\bigcap_{a\in A}\mu^*(\mu(\rho(a,B)))\right\} \\
&= \left\{\bigcap_{b\in B}\rho(b,A)\right\} \cap \left\{\bigcap_{a\in A}\rho(a,B)\right\} \\
&= \rho_H(A,B),
\end{aligned}$$

então $\rho_H(A,B) \prec \mu^*(\mu(\rho_H(A,B))) \prec \mu^*(\mathrm{d}_H(A,B))$. Reciprocamente, se $\mathcal{U}_\varepsilon \in \rho_H(A,B)$ então $\mathcal{U}_\varepsilon \in \rho(b,A)$, para todo $b \in B$ e $\mathcal{U}_\varepsilon \in \rho(a,B)$, para todo $a \in A$. Sendo assim, para cada $b \in B$, existe algum $a_b \in A$ tal que $\mathcal{U}_\varepsilon \in \rho(b,a_b)$, o que garante $\mathrm{d}(b,a_b) < 2\varepsilon$. Segue que $\mathrm{d}(b,A) \leq \mathrm{d}(b,a_b) < 2\varepsilon$, para todo $b \in B$ e desse modo $\mathrm{d}_A(B) \leq 2\varepsilon$. Analogamente temos que $\mathrm{d}_B(A) \leq 2\varepsilon$. Se $\alpha > 2$, segue que

$$\frac{1}{\alpha}\mathrm{d}_H(A,B) = \frac{1}{\alpha}\max\{\mathrm{d}_A(B), \mathrm{d}_B(A)\} \leq \frac{2}{\alpha}\varepsilon < \varepsilon$$

e assim $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mu^*\left(\frac{1}{\alpha}\mathrm{d}_H(A,B)\right)$. Por conta disso $\mu^*\left(\frac{1}{\alpha}\mathrm{d}_H(A,B)\right) \prec \rho_H(A,B)$.

9. Suponha A e B subconjuntos compactos de X. Com isso $\{\mathrm{d}(b,A) : b \in B\}$ e $\{\mathrm{d}(a,B) : a \in A\}$ são fechados $[0,\infty)$. Então temos que

$$\begin{aligned}
\mu^*\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}_H(A,B)\right) &= \mu^*\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}_A(B)\right) \cap \mu^*\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}_B(A)\right) \\
&= \mu^*\left(\frac{1}{2}\sup_{b\in B}\mathrm{d}(b,A)\right) \cap \mu^*\left(\frac{1}{2}\sup_{a\in A}\mathrm{d}(a,B)\right) \\
&= \left\{\bigcap_{b\in B}\mu^*\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}(b,A)\right)\right\} \cap \left\{\bigcap_{a\in A}\mu^*\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}(a,B)\right)\right\} \\
&= \left\{\bigcap_{b\in B}\mu^*\left(\frac{1}{2}\inf_{a\in A}\mathrm{d}(b,a)\right)\right\} \cap \left\{\bigcap_{a\in A}\mu^*\left(\frac{1}{2}\inf_{b\in B}\mathrm{d}(a,b)\right)\right\} \\
&= \left\{\bigcap_{b\in B}\bigcup_{a\in A}\mu^*\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}(b,a)\right)\right\} \cap \left\{\bigcap_{a\in A}\bigcup_{b\in B}\mu^*\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}(a,b)\right)\right\} \\
&\prec \left\{\bigcap_{b\in B}\bigcup_{a\in A}\rho(b,a)\right\} \cap \left\{\bigcap_{a\in A}\bigcup_{b\in B}\rho(a,b)\right\} \\
&= \rho_H(A,B).
\end{aligned}$$

□

O próximo resultado será útil mais adiante (Ver Proposição 3.7.4).

Proposição 2.1.4. *Seja $A \subset X$ um subconjunto não vazio e tome uma rede convergente $x_\lambda \to x$ em X. Assim, $x \in \overline{A}$ se, e somente se, $\rho_A(x_\lambda) \to \mathcal{O}$.*

Demonstração. Suponha $x \in \overline{A}$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ qualquer. Devido à Proposição 1.3.4 existe λ_0 tal que se $\lambda \geq \lambda_0$ então $\mathcal{U} \in \rho(x_\lambda, x)$. Desse modo

$$\rho_A(x_\lambda) = \rho_{\overline{A}}(x_\lambda) \prec \rho(x_\lambda, x) \prec \{\mathcal{U}\}$$

e portanto $\rho_A(x_\lambda) \to \mathcal{O}$. Em contrapartida, suponha $\rho_A(x_\lambda) \to \mathcal{O}$ e tome $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ qualquer. Considere $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ com $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Com isso, existe λ_0 tal que se $\lambda \geq \lambda_0$ então $\mathcal{V} \in \rho_A(x_\lambda) \cap \rho(x_\lambda, x)$. Assim para cada $\lambda \geq \lambda_0$ existe também $a_\lambda \in A$ tal que $\mathcal{V} \in \rho(x_\lambda, a_\lambda)$. Desse modo

$$\rho_A(x) \prec \rho(x, a_\lambda) \prec 1\left(\rho(x, x_\lambda) \cap \rho(x_\lambda, a_\lambda)\right) \prec 1\{\mathcal{V}\} \prec \{\mathcal{U}\}$$

o que garante que $\rho_A(x) = \mathcal{O}$. Portanto $x \in \overline{A}$. □

Pelo item 3. da Proposição 2.1.1 temos que

$$\overline{A} = \{x \in X : \rho(x, A) = \mathcal{O}\}.$$

Com isso, nosso critério de aproximação mínima dado pela igualdade $\rho(x, A) = \mathcal{O}$ é compatível com a axiomatização clássica de proximidade topológica entre um ponto x e um conjunto A expressa pela relação $x \in \overline{A}$. Além do mais, pelo mesmo item da referida proposição, dados (X, d) um espaço métrico e $\mathcal{O}_d$ a família admissível de coberturas abertas $\mathcal{U}_\epsilon = \{B(x, \epsilon) : x \in X\}$ por ϵ-bolas, $\epsilon > 0$, temos que $\rho(x, A) = \mathcal{O}_d$ se, e somente se, $d(x, A) = 0$.

Proposição 2.1.5. *Seja K um subconjunto compacto de X e $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em X. Se $\rho(x_\lambda, K) \to \mathcal{O}$ então x_λ admite sub-rede convergente $x_{\lambda_\mu} \to y$, com $y \in \overline{K}$.*

Demonstração. Dado $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe $\lambda_\mathcal{U} \in \Lambda$ tal que $\mathcal{U} \in \rho(x_\lambda, K)$ toda vez que $\lambda \geq \lambda_\mathcal{U}$. Com isso, para todo $\lambda \geq \lambda_\mathcal{U}$, podemos tomar $z_{(\lambda,\mathcal{U})} \in K$ tal que $\mathcal{U} \in \rho\left(x_\lambda, z_{(\lambda,\mathcal{U})}\right)$. Em seguida, defina o conjunto

$$\Gamma = \left\{(\lambda, \mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \rho\left(x_\lambda, z_{(\lambda,\mathcal{U})}\right)\right\}$$

dirigido por $(\lambda_1, \mathcal{U}_1) \geq (\lambda_2, \mathcal{U}_2)$ se, e somente se, $\lambda_1 \geq \lambda_2$ e $\mathcal{U}_1 \leqslant \mathcal{U}_2$. Para cada $(\lambda, \mathcal{U}) \in \Gamma$, definimos também $x_{(\lambda,\mathcal{U})} = x_\lambda$. Pela compacidade de K podemos assumir que $z_{(\lambda,\mathcal{U})} \to z$ para algum $z \in \overline{K}$. Agora para um dado $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ seja $\mathcal{U}' \in \mathcal{O}$ com $\mathcal{U}' \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Como $\rho\left(z_{(\lambda,\mathcal{U})}, z\right) \to \mathcal{O}$, existe $(\lambda_0, \mathcal{U}_0)$ tal que $\mathcal{U}' \in \rho\left(z_{(\lambda,\mathcal{V})}, z\right)$ sempre que $(\lambda, \mathcal{V}) \geq (\lambda_0, \mathcal{U}_0)$. Depois, escolha $\mathcal{U}_0' \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{U}_0' \leqslant \mathcal{U}'$ e $\mathcal{U}_0' \leqslant \mathcal{U}_0$. Se $(\lambda, \mathcal{V}) \geq (\lambda_0, \mathcal{U}_0')$ então $\mathcal{U}' \in \rho\left(x_\lambda, z_{(\lambda,\mathcal{V})}\right)$, visto que $\mathcal{V} \in \rho\left(x_\lambda, z_{(\lambda,\mathcal{V})}\right)$. Além disso, $\mathcal{U}' \in \rho\left(z_{(\lambda,\mathcal{V})}, z\right)$ logo

$$\rho\left(x_{(\lambda,\mathcal{U})}, z\right) \prec 1(\rho(x_\lambda, z_{(\lambda,\mathcal{V})}) \cap \rho(z_{(\lambda,\mathcal{V})}, z)) \prec 1\{\mathcal{U}'\} \prec \{\mathcal{U}\}$$

para todo $(\lambda, \mathcal{V}) \geq (\lambda_0, \mathcal{U}_0')$. Portanto a sub-rede $\left(x_{(\lambda,\mathcal{U})}\right)_{(\lambda,\mathcal{U})\in\Gamma}$ de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge para $z \in \overline{K}$. □

Por último, vejamos como ρ_H se relaciona com o diâmetro da união de conjuntos.

Proposição 2.1.6. *Sejam $A, B \subset X$ não vazios. As seguintes afirmações são válidas.*

1. $\mathrm{D}(A \cup B) \prec 1(\mathrm{D}(A) \cap \mathrm{D}(B) \cap \rho_A(B))$.

2. $\mathrm{D}(A \cup B) \prec 1(\mathrm{D}(A) \cap \mathrm{D}(B) \cap \rho_B(A))$.

3. $\mathrm{D}(A \cup B) \prec 1(\mathrm{D}(A) \cap \mathrm{D}(B) \cap \rho_H(A, B))$.

Demonstração. Para o item 1., suponha o caso não trivial $1(\mathrm{D}(A) \cap \mathrm{D}(B) \cap \rho_A(B)) \neq \emptyset$. Se $\mathcal{U} \in 1(\mathrm{D}(A) \cap \mathrm{D}(B) \cap \rho_A(B))$ então existe $\mathcal{V} \in \mathrm{D}(A) \cap \mathrm{D}(B) \cap \rho_A(B)$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Em seguida, tome $x, y \in A \cup B$. Se $x, y \in A$ vale que $\mathcal{V} \in \rho(x, y)$. Portanto $\mathcal{U} \in \rho(x, y)$, visto que

$\rho(x,y)$ é hereditária. De mesmo modo $\mathcal{U} \in \rho(x,y)$ se $x, y \in B$. Por último, assuma $x \in A$ e $y \in B$. Uma vez que $\mathcal{V} \in \rho_A(B) = \bigcap_{b \in B} \bigcup_{a \in A} \rho(a,b)$ existe $a \in A$ tal que $\mathcal{V} \in \rho(a,y)$. Como $\mathcal{V} \in \mathrm{D}(A)$ então $\mathcal{V} \in \rho(x,a)$. Com isso $\mathcal{V} \in \rho(x,a) \cap \rho(a,y)$ e assim $\mathcal{U} \in 1(\rho(x,a) \cap \rho(a,y))$. Desde que $\rho(x,y) \prec 1(\rho(x,a) \cap \rho(a,y))$ daí $\mathcal{U} \in \rho(x,y)$. Nesse caso $\mathcal{U} \in \rho(x,y)$ para $x, y \in A \cup B$ arbitrários. Portanto $\mathcal{U} \in \mathrm{D}(A \cup B)$ e o item 1. está provado. O item 2. pode ser provado analogamente enquanto o item 3. é consequência do item 1. juntamente com o item 2. $\square$

2.2 Uniformidade diagonal ρ_H-induzida

O propósito desta seção é produzir uma descrição alternativa da estrutura uniforme diagonal do Hiperespaço $\mathcal{H}(X)$. Para mais detalhes sobre a construção de $\mathcal{H}(X)$ recomendamos a leitura de [36].

Para $A \subset X$ e $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ a $\mathcal{E}$-bola de A com respeito a ρ_H é o conjunto

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_H(A,\mathcal{E}) &= \{B \in \mathcal{H}(X) : \rho_H(A,B) \prec \mathcal{E}\} \\ &= \{B \in \mathcal{H}(X) : A \subset \mathrm{B}(B,\mathcal{E}) \text{ e } B \subset \mathrm{B}(A,\mathcal{E})\}. \end{aligned}$$

Além disso, para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ escreveremos daqui em diante $\mathrm{B}_H(A,\mathcal{U})$ ao invés de $\mathrm{B}_H(A,\{\mathcal{U}\})$. Como $\mathrm{B}(A,\{\mathcal{U}\}) = \mathrm{St}[A,\mathcal{U}]$ temos

$$\mathrm{B}_H(A,\mathcal{U}) = \{B \in \mathcal{H}(X) : A \subset \mathrm{St}[B,\mathcal{U}] \text{ e } B \subset \mathrm{St}[A,\mathcal{U}]\}.$$

Observação 2.2.1. *Na linguagem dos espaços uniformes, A e B são ditos uniformemente fechados ou A é $\mathcal{U}$-fechado a B se $A \subset \mathrm{St}[B,\mathcal{U}]$ e $B \subset \mathrm{St}[A,\mathcal{U}]$.*

Dados $D, E \subset \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X)$ a composição é definida como

$$D \circ E = \{(A,B) \in \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) : (A,C) \in E \text{ e } (C,B) \in D \text{ para algum } C \in \mathcal{H}(X)\}.$$

Além disso a relação inversa é dada por

$$D^{-1} = \{(A,B) \in \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) : (B,A) \in D\}.$$

Teorema 2.2.1. *A coleção $D_{\mathcal{U}} = \bigcup \{\mathrm{B}_H(A,\mathcal{U}) \times \mathrm{B}_H(A,\mathcal{U}) : A \in \mathcal{H}(X)\}$ com $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ é uma base para uma estrutura uniforme diagonal $\mathfrak{D}_{\mathcal{H}}$ em $\mathcal{H}(X)$.*

Demonstração. Seja $\Delta \subset \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X)$ a diagonal de $\mathcal{H}(X)$, ou seja, $\Delta = \{(A, A) : A \in \mathcal{H}(X)\}$. É fácil ver que $\Delta \subset D_{\mathcal{U}}$ para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Na sequência, dados $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$, tome $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$ e $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{V}$. Se $(A, B) \in D_{\mathcal{W}}$ então existe $C \in \mathcal{H}(X)$ tal que $(A, B) \in \mathrm{B}_H(C, \mathcal{W}) \times \mathrm{B}_H(C, \mathcal{W})$. Desse modo

$$\begin{aligned} A &\subset \mathrm{St}[C, \mathcal{W}] \text{ e } C \subset \mathrm{St}[A, \mathcal{W}], \\ B &\subset \mathrm{St}[C, \mathcal{W}] \text{ e } C \subset \mathrm{St}[B, \mathcal{W}]. \end{aligned}$$

Em vista disso, $A \subset \mathrm{St}[C, \mathcal{W}]$ e $C \subset \mathrm{St}[B, \mathcal{W}]$, então $A \subset \mathrm{St}[B, \mathcal{U}]$, já que $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Por outro lado $B \subset \mathrm{St}[C, \mathcal{W}]$ e $C \subset \mathrm{St}[A, \mathcal{W}]$, garantindo assim que $B \subset \mathrm{St}[A, \mathcal{U}]$. Desse modo $A \in \mathrm{B}_H(B, \mathcal{U})$, e portanto $(A, B) \in D_{\mathcal{U}}$. Como $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{V}$, é possível provar de modo análogo que $(A, B) \in D_{\mathcal{V}}$. Portanto $D_{\mathcal{W}} \subset D_{\mathcal{U}} \cap D_{\mathcal{V}}$. Para uma vizinhança diagonal $D_{\mathcal{U}}$, vamos obter a seguir $\mathcal{V}, \mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tais que $D_{\mathcal{V}} \circ D_{\mathcal{V}} \subset D_{\mathcal{U}}$ e $D_{\mathcal{W}}^{-1} \subset D_{\mathcal{U}}$. Para isto, visto que $D_{\mathcal{U}}$ é simétrico, temos que $D_{\mathcal{U}}^{-1} = D_{\mathcal{U}}$. Considere ainda $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ de modo que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Se $(A, B) \in D_{\mathcal{V}} \circ D_{\mathcal{V}}$ então existe $C \in \mathcal{H}(X)$ tal que $(A, C), (C, B) \in D_{\mathcal{V}}$. Nesse caso, existem $E, F \in \mathcal{H}(X)$ tais que $(A, C) \in \mathrm{B}_H(E, \mathcal{V}) \times \mathrm{B}_H(E, \mathcal{V})$ e $(C, B) \in \mathrm{B}_H(F, \mathcal{V}) \times \mathrm{B}_H(F, \mathcal{V})$. Dessa forma temos que

$$\begin{aligned} A &\subset \mathrm{St}[E, \mathcal{V}] \text{ e } E \subset \mathrm{St}[A, \mathcal{V}], \\ C &\subset \mathrm{St}[E, \mathcal{V}] \text{ e } E \subset \mathrm{St}[C, \mathcal{V}], \\ C &\subset \mathrm{St}[F, \mathcal{V}] \text{ e } F \subset \mathrm{St}[C, \mathcal{V}], \\ B &\subset \mathrm{St}[F, \mathcal{V}] \text{ e } F \subset \mathrm{St}[B, \mathcal{V}]. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$, segue que

$$\begin{aligned} A &\subset \mathrm{St}[C, \mathcal{U}] \text{ e } C \subset \mathrm{St}[A, \mathcal{U}], \\ B &\subset \mathrm{St}[C, \mathcal{U}] \text{ e } C \subset \mathrm{St}[B, \mathcal{U}]. \end{aligned}$$

Então $(A, B) \in \mathrm{B}_H(C, \mathcal{U}) \times \mathrm{B}_H(C, \mathcal{U})$, e portanto $D_{\mathcal{V}} \circ D_{\mathcal{V}} \subset D_{\mathcal{U}}$. □

Definição 2.2.1. *O espaço uniforme $\mathcal{H}(X)$ munido com a topologia cujas vizinhanças básicas em $A \in \mathcal{H}(X)$ são formadas pela coleção $\mathcal{N}_A = \{D[A] : D \in \mathfrak{D}_{\mathcal{H}}\}$ é chamado de Hiperespaço de X.*

A mesma topologia é produzida se considerarmos somente os elementos da base $D_{\mathcal{U}}$ (ver [36], Teorema 35.6). Além do mais, a família de coberturas $\mathcal{O}_{\mathcal{H}}$ associada à estrutura diagonal $\mathfrak{D}_{\mathcal{H}}$ possui uma base de coberturas uniformes na forma $\upsilon(D) = \{D[A] : A \in \mathcal{H}(X)\}$ para $D \in \mathfrak{D}_{\mathcal{H}}$.

Teorema 2.2.2. *Para todo $A \in \mathcal{H}(X)$, temos as seguintes inclusões:*

1. $D_{\mathcal{V}}[A] \subset \mathrm{B}_H(A,\mathcal{U}) \subset D_{\mathcal{U}}[A]$ *toda vez que* $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$.

2. $\mathrm{St}[A, \upsilon(D_{\mathcal{V}})] \subset \mathrm{B}_H(A,\mathcal{U}) \subset \mathrm{St}[A, \upsilon(D_{\mathcal{U}})]$ *toda vez que* $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2^2}\mathcal{U}$.

Demonstração. 1. Se $B \in D_{\mathcal{V}}[A]$ então $(A,B) \in D_{\mathcal{V}}$, assim existe $C \in \mathcal{H}(X)$ tal que $(A,B) \in \mathrm{B}_H(C,\mathcal{V}) \times \mathrm{B}_H(C,\mathcal{V})$. Como $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$, segue que $B \in \mathrm{B}_H(A,\mathcal{U})$. A inclusão $\mathrm{B}_H(A,\mathcal{U}) \subset D_{\mathcal{U}}[A]$ é óbvia.
2. Tome $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{W}$ e $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Se $B \in \mathrm{St}[A, \upsilon(D_{\mathcal{V}})]$ então $A, B \in D_{\mathcal{V}}[C]$ para algum $C \in \mathcal{H}(X)$. Pelo item 1., temos que $D_{\mathcal{V}}[C] \subset \mathrm{B}_H(C,\mathcal{W})$, então $A, B \in \mathrm{B}_H(C,\mathcal{W})$. Como $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$, temos que $B \in \mathrm{B}_H(A,\mathcal{U})$. Com isso, $\mathrm{St}[A, \upsilon(D_{\mathcal{V}})] \subset \mathrm{B}_H(A,\mathcal{U})$. Como $\mathrm{B}_H(A,\mathcal{U}) \subset D_{\mathcal{U}}[A]$, a inclusão $\mathrm{B}_H(A,\mathcal{U}) \subset \mathrm{St}[A, \upsilon(D_{\mathcal{U}})]$ é óbvia. □

Agora vamos mostrar uma equivalência entre duas topologias definidas sobre $\mathcal{H}(X)$. Para isto, dada uma coleção finita $\mathcal{C} = \{U_1, ..., U_n\}$ de abertos em X, seja o conjunto $\langle \mathcal{C} \rangle \subset \mathcal{H}(X)$ dado por

$$\langle \mathcal{C} \rangle = \left\{ A \in \mathcal{H}(X) : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ e } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para todo } i = 1, ..., n \right\}.$$

Definimos também para cada $A \in \mathcal{H}(X)$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_f$, a coleção

$$[A,\mathcal{U}] = \{U \in \mathcal{U} : A \cap U \neq \emptyset\}.$$

Estabelecidas as devidas considerações, vejamos o teorema abaixo.

Teorema 2.2.3. *A topologia uniforme em $\mathcal{H}(X)$ gerada pela estrutura uniforme diagonal $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$, coincide com a topologia Hausdorff.*

Demonstração. De acordo com [21] o conjunto $\mathcal{B}_{\mathcal{H}} = \{\langle [A,\mathcal{U}] \rangle : A \in \mathcal{H}(X), \mathcal{U} \in \mathcal{O}_f\}$ é uma base para a topologia Hausdorff compacta de $\mathcal{H}(X)$. Posto isto, é suficiente mostrar que para cada $A \in \mathcal{H}(X)$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_f$ existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_f$ tal que $\mathrm{B}_H(A,\mathcal{V}) \subset \langle [A,\mathcal{U}] \rangle \subset \mathrm{B}_H(A,\mathcal{U})$.

Inicialmente, note que $\mathrm{St}[A,\mathcal{U}] = \bigcup_{U \in [A,\mathcal{U}]} U$. Se $B \in \langle [A,\mathcal{U}] \rangle$ então $B \subset \bigcup_{U \in [A,\mathcal{U}]} U$ e $B \cap U \neq \emptyset$ para todo $U \in [A,\mathcal{U}]$. Assim $B \subset \mathrm{St}[A,\mathcal{U}]$ e $[A,\mathcal{U}] \subset [B,\mathcal{U}]$. A segunda inclusão implica que $A \subset \bigcup_{U \in [B,\mathcal{U}]} U = \mathrm{St}[B,\mathcal{U}]$. Então $B \in \mathrm{B}_H(A,\mathcal{U})$, e consequentemente $\langle [A,\mathcal{U}] \rangle \subset \mathrm{B}_H(A,\mathcal{U})$. Agora, tome $[A,\mathcal{U}] = \{U_1, ..., U_n\}$.

Para cada $i = 1, ..., n$, escolha $x_i \in A \cap U_i$ e defina $\mathcal{V}_i \in \mathcal{O}_f$ por

$$\mathcal{V}_i = \{U_1 \setminus \{x_i\}, ..., U_i, ..., U_n \setminus \{x_i\}, X \setminus A\}.$$

Tome $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_f$ de modo que $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{V}_i$ para todo $i = 1, ..., n$. Afirmamos que $\mathrm{B}_H(A, \mathcal{V}) \subset \langle [A, \mathcal{U}] \rangle$. Para isto, se $B \in \mathrm{B}_H(A, \mathcal{V})$ então $B \subset \mathrm{St}[A, \mathcal{V}]$ e $A \subset \mathrm{St}[B, \mathcal{V}]$. Uma vez que $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{V}_i$, temos $B \subset \mathrm{St}[A, \mathcal{V}_i]$ e $A \subset \mathrm{St}[B, \mathcal{V}_i]$. Como

$$[A, \mathcal{V}_i] \subset \{U_1 \setminus \{x_i\}, ..., U_i, ..., U_n \setminus \{x_i\}\}$$

segue que

$$B \subset (U_1 \setminus \{x_i\}) \cup \ldots \cup U_i \cup \ldots \cup (U_n \setminus \{x_i\}) \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j.$$

Para concluir que $B \in \langle [A, \mathcal{U}] \rangle$, só resta provar a inclusão $[A, \mathcal{U}] \subset [B, \mathcal{U}]$. Nesse sentido, suponha por absurdo que $B \cap U_i = \emptyset$ para algum $U_i \in [A, \mathcal{U}]$. Então $U_i \notin [B, \mathcal{V}_i]$. Como $A \subset \mathrm{St}[B, \mathcal{V}_i]$, segue que $A \subset \left(\bigcup_{j=1, j \neq i}^{n} U_j \right) \setminus \{x_i\}$, o que é uma contradição. Desse modo $B \cap U_i \neq \emptyset$, e portanto $[A, \mathcal{U}] \subset [B, \mathcal{U}]$. □

2.3 Hiperconvergência de Hausdorff

Nesta seção, vamos construir uma noção de convergência em $\mathcal{H}(X)$ fundamentada na família de coberturas $\rho_H(A, B)$ e na convergência de redes $(\mathcal{E}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{P}(\mathcal{O})$. A ideia é que com este critério em mãos e a partir das propriedades da aplicação ρ discutidas na Proposição 1.3.1 podemos apresentar de forma mais clara e objetiva a convergência de redes de conjuntos em $\mathcal{H}(X)$.

Definição 2.3.1. *Considere $\mathcal{H}(X)$ o Hiperespaço de um espaço admissível X. Uma rede $(F_\lambda) \subset \mathcal{H}(X)$ τ-converge a $F \subset X$, e denotamos por $F_\lambda \to F$, se F_λ converge a F na topologia cujas vizinhanças básicas em F são formadas pela coleção $\mathcal{N}_F = \{D_\mathcal{U}[F] : \mathcal{U} \in \mathcal{O}\}$. Dizemos ainda que uma rede (F_λ) h-converge a $F \subset X$, e denotamos por $F_\lambda \xrightarrow{h} F$, se $\rho_H(F_\lambda, F) \to \mathcal{O}$.*

Vamos apresentar em seguida resultados relacionados à convergência de Hausdorff.

Proposição 2.3.1. *Seja (F_λ) uma rede em $\mathcal{H}(X)$ e $F \subset X$. Se $F_\lambda \xrightarrow{h} F$ então $F_\lambda \to F$.*

Demonstração. Tome $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}(X)$ um aberto tal que $F \in \mathcal{A}$. Existe portanto $D_\mathcal{U}[F]$ de modo que $D_\mathcal{U}[F] \subset \mathcal{A}$ para algum $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Como $\rho_H(F_\lambda, F) \to \mathcal{O}$, existe λ_0 de forma que $\mathcal{U} \in \rho_H(F_\lambda, F)$ se $\lambda \geq \lambda_0$. Com isso $F_\lambda \in B_H(F, \mathcal{U}) \subset D_\mathcal{U}[F]$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$, pelo item 1. do Teorema 2.2.2 e assim $F_\lambda \to F$. □

Proposição 2.3.2. *Seja (F_λ) uma rede em $\mathcal{H}(X)$. Se $F_\lambda \xrightarrow{h} F_1$, $F_\lambda \xrightarrow{h} F_2$ então $F_1 = F_2$.*

Demonstração. Tome $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tais que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Como $\rho_H(F_\lambda, F_1) \to \mathcal{O}$ e $\rho_H(F_\lambda, F_2) \to \mathcal{O}$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\mathcal{V} \in \rho_H(F_\lambda, F_1), \rho_H(F_\lambda, F_2)$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Fixado $\lambda \geq \lambda_0$, o item 4. da Proposição 2.1.2 garante que

$$\rho_H(F_1, F_2) \prec 1(\rho_H(F_1, F_\lambda) \cap \rho_H(F_\lambda, F_2)) \prec 1\{\mathcal{V}\} \prec \{\mathcal{U}\}$$

para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Portanto pela Proposição 2.1.2 item 3. obtém-se $F_1 = F_2$. □

Proposição 2.3.3. *As seguintes afirmações são válidas.*

1. *Se $F \subset G$ e $\rho_F(F_\lambda) \to \mathcal{O}$ então $\rho_G(F_\lambda) \to \mathcal{O}$;*
2. *Se $G_\lambda \subset F_\lambda$ e $\rho_F(F_\lambda) \to \mathcal{O}$ então $\rho_F(G_\lambda) \to \mathcal{O}$;*
3. *Se $\rho_G(F_\lambda) \to \mathcal{O}$ e $\rho_{F_\lambda}(F) \to \mathcal{O}$ então $F \subset G$;*
4. *Sejam (F_λ),(G_λ) redes em $\mathcal{H}(X)$ com $F_\lambda \subset G_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Se $F, G \subset X$ são tais que $F_\lambda \xrightarrow{h} F$ e $G_\lambda \xrightarrow{h} G$ então $F \subset G$.*

Demonstração. Os itens 1. e 2. são óbvios pois $\rho_G(F_\lambda) \prec \rho_F(F_\lambda)$, $\rho_F(G_\lambda) \prec \rho_F(F_\lambda)$. O item 3. segue pela desigualdade $\rho_G(F) \prec 1(\rho_{F_\lambda}(F) \cap \rho_G(F_\lambda))$. Façamos então o item 4. Para isto, sejam $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tais que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Como $\rho_H(F_\lambda, F) \to \mathcal{O}$ e $\rho_H(G_\lambda, G) \to \mathcal{O}$ existe λ_0 tal que $\mathcal{V} \in \rho_H(F_\lambda, F) \cap \rho_H(G_\lambda, G)$ toda vez que $\lambda \geq \lambda_0$. Portanto $\mathcal{V} \in \rho_{F_\lambda}(F) \cap \rho_G(G_\lambda)$ sempre que $\lambda \geq \lambda_0$. Fixe $\lambda \geq \lambda_0$. Como $F_\lambda \subset G_\lambda$ então $\rho_G(F_\lambda) \prec \rho_G(G_\lambda)$ e com isso $\mathcal{V} \in \rho_G(F_\lambda)$. Desse modo

$$\rho_G(F) \prec 1(\rho_{F_\lambda}(F) \cap \rho_G(F_\lambda)) \prec 1\{\mathcal{V}\} \prec \{\mathcal{U}\}$$

para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Então $\rho_G(F) = \mathcal{O}$ e assim $F \subset G$. □

Proposição 2.3.4. *Seja X um espaço Hausdorff. Considere $(K_\lambda) \subset \mathcal{H}(X)$ uma rede de compactos e $B \subset X$ compacto. Se $K_\lambda \xrightarrow{h} K$ com $K \subset X$ compacto e $K_\lambda \cap B \neq \emptyset$ para todo $\lambda \in \Lambda$ então $K \cap B \neq \emptyset$.*

Demonstração. Tome uma rede $(x_\lambda) \subset K_\lambda \cap B$. Como $K_\lambda \cap B$ é compacto assuma $x_\lambda \to a$ para algum $a \in K_\lambda \cap B$. Depois, sejam $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tais que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Como $\rho_H(K_\lambda, K) \to \mathcal{O}$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ para o qual $\mathcal{V} \in \rho_K(K_\lambda)$ toda vez que $\lambda \geq \lambda_0$. Nesse caso $\mathcal{V} \in \rho_K(x_\lambda)$ sempre que $\lambda \geq \lambda_0$. Em seguida, para cada $\lambda \geq \lambda_0$ existe $a' \in K$ (dependendo de λ) de modo que $\mathcal{V} \in \rho(a', x_\lambda)$. Como $x_\lambda \to a$ então pela Proposição 1.3.4 temos $\rho(x_\lambda, a) \to \mathcal{O}$ e assim existe $\lambda_1 \in \Lambda$ tal que $\mathcal{V} \in \rho(x_\lambda, a)$ se $\lambda \geq \lambda_1$. Fixado $\lambda \geq \lambda_0, \lambda_1$ segue que

$$\rho_K(a) \prec \rho(a, a') \prec 1(\rho(a, x_\lambda) \cap \rho(x_\lambda, a')) \prec 1\{\mathcal{V}\} \prec \{\mathcal{U}\}.$$

Então $\mathcal{U} \in \rho_K(a)$ para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Desse modo $\rho_K(a) = \mathcal{O}$ e pela Proposição 2.1.1 temos $a \in K$. Portanto $a \in K \cap B$. □

Teorema 2.3.1. *As seguintes afirmações são válidas*

1. *Se (F_λ) é uma rede decrescente, $F = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ com $\rho_F(F_\lambda) \to \mathcal{O}$ então $F_\lambda \xrightarrow{h} F$.*

2. *Seja X admissível completo. Se (F_λ) é uma rede de conjuntos fechados, limitados e não vazios de X tal que $\gamma(F_\lambda) \to \mathcal{O}$ então $F = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ é compacto, não vazio e $\rho_H(F_\lambda, F) \to \mathcal{O}$.*

Demonstração. O item 1. é óbvio. Façamos então o item 2. Pelo Teorema 1.5.4 temos F não vazio e compacto. Suponha que F_λ não h-converge a F. Em seguida, considere $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que para cada $\lambda \in \Lambda$ existe $\lambda' \geq \lambda$ de modo que $\mathcal{U} \notin \rho_H(F_{\lambda'}, F)$. Visto que $F \subset F_{\lambda'}$ então $\mathcal{U} \in \rho_{F_{\lambda'}}(F)$ e com isso $\mathcal{U} \notin \rho_F(F_{\lambda'})$. Portanto $F_{\lambda'} \not\subseteq St[F, \mathcal{U}]$. Como $F_{\lambda'} \subset F_\lambda$ então $F_\lambda \not\subseteq St[F, \mathcal{U}]$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Depois, defina $C_\lambda = F_\lambda \cap (X \setminus St[F, \mathcal{U}])$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Dessa forma (C_λ) é uma rede decrescente de fechados tal que $\gamma(C_\lambda) \to \mathcal{O}$ pois $C_\lambda \subset F_\lambda$. Portanto $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \neq \emptyset$. Mas isto é impossível já que

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \cap (X \setminus \mathrm{St}\,[F, \mathcal{U}]) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \cap \left(X \setminus \mathrm{St}\left[\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda, \mathcal{U} \right] \right) = \emptyset.$$

□

2.4 Hiperconvergência de Kuratowski-Painlevé

Nesta seção vamos comparar as convergências de Kuratowski-Painlevé e h-convergência em $\mathcal{K}(X)$. Primeiro, vejamos algumas definições.

Definição 2.4.1. *Seja (F_λ) uma rede em $\mathcal{H}(X)$. Os conjuntos*

$$\begin{aligned} \mathcal{LS}(F_\lambda) &= \{x \in X : \text{ para toda vizinhança aberta } U \text{ de } x,\ U \cap F_\lambda \neq \emptyset \text{ frequentemente}\}, \\ \mathcal{LI}(F_\lambda) &= \{x \in X : \text{para toda vizinhança aberta } U \text{ de } x,\ U \cap F_\lambda \neq \emptyset \text{ residualmente}\} \end{aligned}$$

são chamados respectivamente limite superior e limite inferior de (F_λ).

Definição 2.4.2. *Dizemos que uma rede $(F_\lambda) \subset \mathcal{H}(X)$ Kuratowski converge a $F \in \mathcal{H}(X)$, e escrevemos $F_\lambda \xrightarrow{k} F$ se, e somente se, $F = \mathcal{LS}(F_\lambda) = \mathcal{LI}(F_\lambda)$.*

Observação 2.4.1. *Como* $\mathcal{LI}(F_\lambda) \subset \mathcal{LS}(F_\lambda)$ *então para verificar a convergência de Kuratowski é suficiente provar as inclusões* $\mathcal{LS}(F_\lambda) \subset F \subset \mathcal{LI}(F_\lambda)$.

Proposição 2.4.1. *Considere uma rede* $(F_\lambda) \subset \mathcal{H}(X)$. *Sendo assim são verdadeiras as seguintes afirmações.*

1. *Se* $\rho_F(F_\lambda) \to \mathcal{O}$ *então* $\mathcal{LS}(F_\lambda) \subset F$.

2. *Se* $\rho_{F_\lambda}(F) \to \mathcal{O}$ *então* $F \subset \mathcal{LI}(F_\lambda)$.

Demonstração. Para o item 1. tome $x \in \mathcal{LS}(F_\lambda)$ e $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$, $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Como $\rho_F(F_\lambda) \to \mathcal{O}$ existe $\lambda_0 \in \Lambda$ de modo que $\mathcal{V} \in \rho_F(F_\lambda)$. Então $F_\lambda \subset St[F, \mathcal{V}]$ sempre que $\lambda \geq \lambda_0$. Além disso, $x \in \mathcal{LS}(F_\lambda)$, daí existe $\lambda' \geq \lambda_0$ de modo que $St[F, \mathcal{V}] \cap F_{\lambda'} \neq \emptyset$. Seja $y \in St[x, \mathcal{V}] \cap F_{\lambda'}$. Como $y \in F_{\lambda'}$ então $y \in St[F, \mathcal{V}]$ e portanto $\mathcal{V} \in \rho(y, k)$ para algum $k \in F$. Isto garante que

$$\rho(x, k) \prec 1(\rho(x, y) \cap \rho(y, k)) \prec 1\{\mathcal{V}\} \prec \{\mathcal{U}\}$$

para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Por isso $\rho(x, F) = \mathcal{O}$ e assim $x \in F$. No item 2. considere $x \in F$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Visto que $\rho_{F_\lambda}(F) \to \mathcal{O}$ tome $\lambda_0 \in \Lambda$ de modo que $\mathcal{U} \in \rho_{F_\lambda}(F)$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Com isso, $x \in St[F_\lambda, \mathcal{U}]$ o que implica $F_\lambda \cap St[x, \mathcal{U}] \neq \emptyset$ toda vez que $\lambda \geq \lambda_0$. Portanto $x \in \mathcal{LI}(F_\lambda)$. $\square$

Corolário 2.4.1. *Se* (F_λ) *é uma rede em* $\mathcal{H}(X)$ *e* $F_\lambda \xrightarrow{h} F$, *para algum* $F \in \mathcal{H}(X)$ *então* $F_\lambda \xrightarrow{k} F$.

Demonstração. Como $F_\lambda \xrightarrow{h} F$, vale que $\rho_F(F_\lambda), \rho_{F_\lambda}(F) \to \mathcal{O}$ e assim pelos itens 1. e 2. da Proposição 2.4.1 temos que $\mathcal{LS}(F_\lambda) \subset F \subset \mathcal{LI}(F_\lambda)$. $\square$

O resultado a seguir mostra a equivalência entre as hiperconvergências de Hausdorff e Kuratowski-Painlevé para uma rede de conjuntos sobre um espaço compacto.

Teorema 2.4.1. *Seja* X *um espaço compacto,* $K \in \mathcal{H}(X)$ *um subconjunto fechado em* X *não vazio e* $(K_\lambda) \subset \mathcal{H}(X)$. *Então* $K_\lambda \xrightarrow{k} K$ *se, e somente se,* $K_\lambda \xrightarrow{h} K$.

Demonstração. Suponha que $K_\lambda \to K$. Mostremos que $\rho_H(K_\lambda, K) \to \mathcal{O}$. Para isto, considere $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Visto que $St[K, \mathcal{U}]$ é aberto então $X \setminus St[K, \mathcal{U}]$ é fechado em X e portanto compacto em X. Para cada $x \in X \setminus St[K, \mathcal{U}]$ temos que $x \notin K$ e como $\mathcal{LS}(K_\lambda) = K$ existem então aberto U_x e $\lambda_x \in \Lambda$ com $x \in U_x$ tal que $U_x \cap K_\lambda = \emptyset$ para todo $\lambda \geq \lambda_x$. Com isso $\{U_x : x \in X \setminus St[K, \mathcal{U}]\}$ é uma cobertura aberta de $X \setminus St[K, \mathcal{U}]$ e por compacidade admitimos

$$X \setminus St[K, \mathcal{U}] \subset \bigcup_{x \in F} U_x$$

onde $F \subset X \setminus St[K,\mathcal{U}]$ é finito. Depois, tome $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\lambda_0 \geq \lambda_x$ para todo $x \in F$. Nesse caso $\bigcup_{x \in F} U_x \cap K_\lambda = \emptyset$ se $\lambda \geq \lambda_0$ e então $(X \setminus St[K,\mathcal{U}]) \cap K_\lambda = \emptyset$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Assim $K_\lambda \subset St[K,\mathcal{U}]$ sempre que $\lambda \geq \lambda_0$, daí $\mathcal{U} \in \rho_K(K_\lambda)$ toda vez que $\lambda \geq \lambda_0$. Por outro lado, na medida em que K é compacto considere $U_1, ..., U_k$ uma cobertura aberta de K com $\mathrm{D}(U_j) \prec \{\mathcal{U}\}$ e $U_j \cap K \neq \emptyset$ para todo $j = 1, ..., k$. Como $\mathcal{LI}(K_\lambda) = K$ existe $\lambda_j \in \Lambda$ para cada $j \in \{1, ..., k\}$ tal que $U_j \cap K_\lambda \neq \emptyset$ sempre que $\lambda \geq \lambda_j$. Tome $\lambda_1 \geq \lambda_j$ para todo $j \in \{1, ..., k\}$. Afirmamos que $K \subset St[K_\lambda,\mathcal{U}]$ se $\lambda \geq \lambda_1$. Para isto, tome $x \in K$. Em tal caso, $x \in U_j$ para algum $j \in \{1, ..., k\}$. Dado que $\lambda \geq \lambda_j$ para todo $j \in \{1, ..., k\}$ vale que $U_j \cap K_\lambda \neq \emptyset$ e em vista disso existe $y \in U_j \cap K_\lambda$. Dessa forma

$$\rho(x, y) \prec \mathrm{D}(U_j) \prec \{\mathcal{U}\}$$

e assim $K \subset St[K_\lambda,\mathcal{U}]$ se $\lambda \geq \lambda_1$. Por fim, considere $\lambda_2 \geq \lambda_0, \lambda_1$. Se $\lambda \geq \lambda_2$ então $K \subset St[K_\lambda,\mathcal{U}]$ e $K_\lambda \subset St[K,\mathcal{U}]$ o que resulta $\mathcal{U} \in \rho_K(K_\lambda) \cap \rho_{K_\lambda}(K)$ se $\lambda \geq \lambda_2$. Portanto $\rho_H(K_\lambda, K) \to \mathcal{O}$. $\square$

Capítulo 3

Atratores globais para Ações de Semigrupos

O objetivo deste capítulo é construir uma teoria abstrata de atratores globais para ações de semigrupos em espaços completamente regulares. Para tanto, vamos considerar uma estrutura de coberturas abertas sobre o espaço de fase e em seguida usar a distância admissível para generalizar resultados contidos em [26]. Nosso interesse é discutir condições necessárias e suficientes para caracterização e existência do atrator global e do atrator uniforme global. Por fim, ainda vamos aplicar o Teorema de Cantor-Kuratowski no estabelecimento de uma relação entre compacidade assintótica e compacidade limite.

3.1 Definições, notações e fatos preliminares

Seja $(X, \mathcal{O})$ um espaço admissível, $\rho : X \times X \to \mathcal{P}(\mathcal{O})$ a função admissível e S um semigrupo. Uma ação à esquerda de S sobre X, denotada por (S, X, μ) ou simplificadamente (S, X), é uma aplicação $\mu : S \times X \to X$ dada por $\mu(s, x) = sx$ satisfazendo $s(tx) = (st)x$ para todo $x \in X$ e $s, t \in S$. Para todo $s \in S$ definimos $\mu_s : X \to X$ dada por $\mu_s(x) = sx$. Ao longo do capítulo vamos assumir μ_s contínua.

Dizemos que (S, X) é *eventualmente compacta* se existir $t \in S$ tal que $\mu_t : X \to X$ é compacta, isto é, para todo limitado $Y \subset X$ a imagem $\mu_t(Y)$ é relativamente compacta. Em seguida, dados $Y \subset X$ e $A \subset S$ definimos a *A-semiórbita* e *A-semiórbita regressiva* de Y respectivamente por:

$$AY = \{y \in X : \text{ existem } s \in A \text{ e } x \in Y \text{ tais que } sx = y\} = \bigcup_{s \in A} \mu_s(Y)$$

$$A^*Y = \{y \in X : \text{ existem } s \in A \text{ e } x \in Y \text{ tais que } sy = x\} = \bigcup_{s \in A} \mu_s^{-1}(Y)$$

Um subconjunto Y é *S-progressivamente invariante* se $SY \subset Y$ e *S-regressivamente invariante* se $S^*Y \subset Y$. É imediato verificar que SX e $\overline{SX}$ são progressivamente invariantes por S.

Ainda nesse sentido, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.1.1. *Se a ação do semigrupo S no espaço topológico X for aberta então o conjunto $\overline{S^*X}$ é regressivamente invariante se ele for não vazio.*

Demonstração. Ver [35], página 14. □

Prosseguindo com as definições, $Y \subset X$ é dito *invariante* pela ação de S se $sY = Y$ para todo $s \in S$. Repare que se Y for progressivamente e regressivamente invariante e a ação for sobrejetiva então Y é invariante. Com efeito, supondo Y progressivamente invariante então $sY \subset Y$ para todo $s \in S$. Por outro lado, para $y \in Y$ e $s \in S$ temos $\emptyset \neq \mu_s^{-1}(y) \subset Y$ pois a ação é sobrejetiva e Y é regressivamente invariante. Sendo assim, $y \in sY$ e portanto $Y \subset sY$.

Além disso, se $(Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de subconjuntos invariantes de X então a reunião $Y := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ é também invariante. De fato, basta observar que $s(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} sY_\lambda$ e $sY_\lambda = Y_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$.

Por último, $Y \subset X$ é dito *minimal* para ação de S se é não vazio, fechado, invariante e não tem nenhum subconjunto próprio com tais propriedades.

Proposição 3.1.2. *Um subconjunto não vazio Y de X é minimal pela ação de S se, e somente se, $Y = \overline{Sx}$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Ver [35], página 14. □

Lema 3.1.1. *Seja $Y \subset X$ invariante, compacto e não vazio. Existe pelo menos um subconjunto minimal de Y.*

Demonstração. Aplicar o Lema de Zorn. □

Para estudar o comportamento assintótico de (S, X) vamos precisar de uma noção de infinito no semigrupo.

Definição 3.1.1. *Seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos do semigrupo S. Dizemos que:*

1. *$\mathcal{F}$ é uma base de filtro de S se $\emptyset \notin \mathcal{F}$ e para cada $A, B \in \mathcal{F}$ existe $C \in \mathcal{F}$ tal que $C \subset A \cap B$.*

2. *Uma rede de valores $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ em S diverge na direção de $\mathcal{F}$ (ou é dita $\mathcal{F}$- divergente) se para cada $A \in \mathcal{F}$ existe $\lambda_A \in \Lambda$ tal que $t_\lambda \in A$ para todo $\lambda \geq \lambda_A$. Denotamos $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$.*

Observação 3.1.1. *A Definição 3.1.1 generaliza $t_n \to \infty$. Com efeito, tomando a base de filtro canônica $\mathcal{F} = \{A_t : t > 0\}$ com $A_t = (t, +\infty)$ (Filtro de Frechet) temos que $t_n \to \infty$ se, e somente se, $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$.*

Para o que segue, um subconjunto $Y \subset X$ *absorve* Z na direção de $\mathcal{F}$ se existir $A \in \mathcal{F}$ tal que $AZ \subset Y$.

Definição 3.1.2. *Uma ação de semigrupo é dita:*

1. *$\mathcal{F}$-limitada dissipativa se existe um subconjunto limitado que absorve todo subconjunto limitado de X.*

2. *$\mathcal{F}$-assintoticamente compacta, se para toda rede limitada $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset X$ e para toda rede $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset S$ com $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ a rede $(t_\lambda x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset X$ possui sub-rede convergente.*

Definição 3.1.3. *Dizemos que $\mathcal{F} \subset S$ satisfaz:*

1. *Hipótese* H_1 *se para todo $s \in \mathcal{S}$ e $A \in \mathcal{F}$ existir $B \in \mathcal{F}$ tal que $sB \subset A$.*

2. *Hipótese* H_2 *se para todo $s \in \mathcal{S}$ e $A \in \mathcal{F}$ existir $B \in \mathcal{F}$ tal que $Bs \subset A$.*

3. *Hipótese* H_3 *se para todo $s \in \mathcal{S}$ e $A \in \mathcal{F}$ existir $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset As$.*

4. *Hipótese* H_4 *se para todo $s \in \mathcal{S}$ e $A \in \mathcal{F}$ existir $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset sA$.*

Em especial, essas hipóteses serão importantes na descrição dos semigrupos cuja ação é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta (Proposição 3.4.1) e dos semigrupos que admitem atrator global (Teorema 3.4.2). Indicamos [9], [10] e [14] para exemplos de famílias satisfazendo as condições acima.

3.2 O atrator global

Conforme [26], dado (S, X) uma ação de semigrupo sobre um espaço métrico (X, d) e $\mathcal{F}$ uma base de filtro de subconjuntos de S, o atrator global para (S, X) é um subconjunto compacto invariante $\mathcal{A}$ de X que atrai todo subconjunto limitado Y de X, ou seja,

$$\lim_{t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty} \operatorname{dist}(t_\lambda Y, \mathcal{A}) = 0$$

para toda rede $\mathcal{F}$-divergente $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ em S. A definição de atração considerada depende da família $\mathcal{F}$ do semigrupo S e da semi-distância de Hausdorff denotada por $dist$ e definida como

$$dist(A, B) = \sup_{a \in A} \left(\inf_{b \in B} d(a, b) \right).$$

Para se definir o atrator global em nosso ambiente de estudo é necessário, em primeiro lugar, dar um significado para o termo atração.

Definição 3.2.1. *Um subconjunto $Y \subset X$ atrai $Z \subset X$ na direção da base de filtro $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{F}$-atrai Z se para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ existir $A \in \mathcal{F}$ tal que $AZ \subset St[Y, \mathcal{U}]$.*

Proposição 3.2.1. *Um subconjunto $Y \subset X$ atrai $Z \subset X$ na direção da base de filtro $\mathcal{F}$ se, e somente se, $\rho_Y(t_\lambda Z) \to \mathcal{O}$ para toda rede $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$.*

Demonstração. Suponha que Y atrai Z e tome uma rede $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$. Dado $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $AZ \subset St[Y, \mathcal{U}]$. Em seguida, tome λ_0 de modo que se $\lambda \geq \lambda_0$ então $t_\lambda \in A$. Desse modo $t_\lambda Z \subset St[Y, \mathcal{U}]$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$, isto é, $\mathcal{U} \in \rho_Y(t_\lambda Z)$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Portanto $\rho_Y(t_\lambda Z) \to \mathcal{O}$. Reciprocamente, assuma que $\rho_Y(t_\lambda Z) \to \mathcal{O}$ para toda rede $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ e suponha que Y não atrai Z. Então existe algum $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $AZ \not\subseteq St[Y, \mathcal{U}]$ para todo $A \in \mathcal{F}$. Com isso, para cada $A \in \mathcal{F}$ existe $t_A \in A$ com $t_A Z \not\subseteq St[Y, \mathcal{U}]$. Como $t_A \to_{\mathcal{F}} \infty$ temos que $\rho_Y(t_A Z) \to \mathcal{O}$ por hipótese. Isto garante a existência de A_0 de forma que se $A \subset A_0$ então $\mathcal{U} \in \rho_Y(t_A Z)$ e portanto $t_A Z \subset St[Y, \mathcal{U}]$ para todo $A \subset A_0$, o que é uma contradição. $\square$

A Proposição 3.2.1 possibilita o desenvolvimento de uma linguagem muito próxima à utilizada na teoria de atratores globais sobre espaços métricos. De fato, basta comparar nosso texto com [8] e [26] por exemplo.

Proposição 3.2.2. *A ação do semigrupo (S, X) é $\mathcal{F}$-limitada dissipativa se, e somente se, existe $D \subset X$ limitado que $\mathcal{F}$-atrai todo subconjunto limitado de X.*

Demonstração. Suponha que (S, X) é $\mathcal{F}$-limitada dissipativa. Assim existe $D \subset X$ limitado que absorve todo subconjunto limitado de X. Em seguida, considere $Y \subset X$ limitado. Desse modo, existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $AY \subset D$, o que garante $AY \subset St[D,\mathcal{U}]$ para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Com isso D atrai Y. Para a recíproca, assuma a existência de $Y \subset X$ limitado que atrai todo subconjunto limitado de X. Depois, escolha $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e defina $D = St[Y,\mathcal{U}]$. Dado $Z \subset X$ limitado existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $AZ \subset St[Y,\mathcal{U}]$, garantindo assim que D absorve Z. Portanto a ação é $\mathcal{F}$-limitada dissipativa. $\square$

Definição 3.2.2. *Um subconjunto $\mathcal{A}$ de X se diz um $\mathcal{F}$-atrator global para (S, X) se $\mathcal{A}$ é não vazio, fechado, compacto, invariante e $\mathcal{F}$-atrai todo subconjunto limitado de X.*

Depois de uma primeira leitura da Definição 3.2.2 nos parece razoável a possibilidade de que uma mesma ação de semigrupo admita mais de um $\mathcal{F}$-atrator global, no entanto temos a unicidade garantida pela próxima proposição.

Proposição 3.2.3. *Se a ação de um semigrupo possui um $\mathcal{F}$-atrator global $\mathcal{A}$ então ele é único e se exprime como a união de todos os subconjuntos limitados invariantes de X.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ dois $\mathcal{F}$-atratores globais. Desde que $\mathcal{A}'$ é compacto então $\mathcal{A}'$ é limitado. Com isso $\mathcal{A}$ atrai $\mathcal{A}'$ e daí $\rho_{\mathcal{A}}(t_\lambda \mathcal{A}') \to \mathcal{O}$ para toda rede $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$. Como $\mathcal{A}'$ é invariante segue que $\rho_{\mathcal{A}}(t_\lambda \mathcal{A}') = \rho_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}')$ e então $\rho_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}') = \mathcal{O}$. Portanto $\mathcal{A}' \subset \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$. De modo análogo temos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ daí $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$. Agora, seja $\{B_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ todos os subconjuntos invariantes limitados de X. Como $\mathcal{A}$ é invariante e limitado temos que $\mathcal{A} \subset \bigcup_{\sigma \in \Sigma} B_\sigma$. Por outro lado, $\mathcal{A}$ atrai todo B_σ, assim $\rho_{\mathcal{A}}(t_\lambda B_\sigma) \to \mathcal{O}$ para toda rede $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$. Como B_σ é invariante segue que $B_\sigma \subset \mathcal{A}$ e portanto $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} B_\sigma \subset \mathcal{A}$. $\square$

3.3 Conjunto ω-limite e prolongamentos

Nesta seção, voltaremos nossa atenção ao comportamento assintótico da ação de um semigrupo sobre um espaço admissível. Antes, vamos relembrar alguns conceitos indispensáveis a este tipo de abordagem.

Braga Barros e Souza introduziram em [9,b10] a seguinte definição de conjunto limite para (S, X).

Definição 3.3.1. *Dado $Y \subset X$ e $\mathcal{F}$ uma base de filtro de S, o conjunto*

$$\omega(Y, \mathcal{F}) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{AY}$$

é chamado de ω-limite com respeito à família $\mathcal{F}$.

Observação 3.3.1. *O conjunto $\omega(Y, \mathcal{F})$ representa a região onde se acumulam as A-semiórbitas de Y no extremo de S. Atentamos que cada família de subconjuntos $\mathcal{F}$ de S determina um comportamento assintótico para a ação de S.*

Na sequência, vamos enunciar uma caracterização do conjunto ω em termos de redes. Buscamos com isso praticidade nas demonstrações dos resultados já que do ponto de vista funcional a Definição 3.3.1 não é muito útil.

Proposição 3.3.1. *Seja X um espaço Hausdorff, Y um subconjunto de X e $\mathcal{F}$ uma base de filtro de S. O conjunto ω-limite de Y é caracterizado por:*

$$\omega(Y, \mathcal{F}) = \left\{ \begin{array}{c} x \in X: \text{ existem redes } (t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ em } S, \ (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ em } Y \\ \text{tais que } t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty \text{ e } \rho(t_\lambda x_\lambda, x) \to \mathcal{O} \end{array} \right\}.$$

Demonstração. A prova segue da Proposição 1.3.4 e também da Proposição 1.66 contida em [29]. □

É válido observar que o conjunto ω-limite para fluxos é um caso particular da Definição 3.3.1. De modo geral, o conjunto limite estende a definição de Conley para a Teoria de Morse em sistemas dinâmicos ([17]).

A definição abaixo foi introduzida em [10].

Definição 3.3.2. *O $\mathcal{F}$-domínio de atração, ou ainda, a $\mathcal{F}$-região de atração de $Y \subset X$ é definida por*

$$\mathfrak{A}(Y, \mathcal{F}) = \{x \in X: \text{ para cada } \mathcal{U} \in \mathcal{O} \text{ existe } A \in \mathcal{F} \text{ tal que } Ax \subset \mathrm{St}[Y, \mathcal{U}]\}.$$

Proposição 3.3.2. *Se $K \subset X$ é compacto então*

$$\mathfrak{A}(K, \mathcal{F}) \subset \{x \in X : \omega(x, \mathcal{F}) \neq \emptyset \text{ and } \omega(x, \mathcal{F}) \subset K\}.$$

A igualdade é válida quando X é localmente compacto e Ax é conexo para todo $A \in \mathcal{F}$ e $x \in X$.

Demonstração. Ver [10], Teorema 3.6. □

No que diz respeito a invariância da região de atração temos o seguinte resultado.

Proposição 3.3.3. *Seja $Y \subset X$. Supondo que a região de atração é não-vazia então,*

1. *$\mathfrak{A}(Y, \mathcal{F})$ é S-progressivamente invariante se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_2.

2. $\mathfrak{A}(Y, \mathcal{F})$ *é S-regressivamente invariante se* $\mathcal{F}$ *satisfaz a hipótese* H_3.

Demonstração. Ver [29], Proposição 1.74. □

Exemplo 3.3.1. *Seja* Φ *um fluxo contínuo em um espaço métrico* (X, d) *e* $Y \subset X$. *Para quaisquer* $t \in \mathbb{R}$ *e* $x \in X$ *tome* $tx = \Phi(t, x)$. *O conjunto* ω*-limite de* $Y \subset X$ *é definido como*

$$\omega(Y) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{(t, +\infty)Y}.$$

Considerando a família $\mathcal{F} = \{(t, +\infty) : t \geq 0\}$ *temos que* $\omega(Y) = \omega(Y, \mathcal{F})$.

Proposição 3.3.4. *Dado* $x \in X$ *e* $s \in S$, *vale que*

1. $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \omega(sx, \mathcal{F})$, *se* $\mathcal{F}$ *satisfaz a hipótese* H_3.

2. $\omega(sx, \mathcal{F}) \subset \omega(x, \mathcal{F})$, *se* $\mathcal{F}$ *satisfaz a hipótese* H_2.

Demonstração. Ver [12], Proposição 2.1. □

Proposição 3.3.5. *Sejam* Y *um subconjunto de* X *tal que* $\overline{SY}$ *é compacto e* $\mathcal{F}$ *uma base de filtro de subconjuntos de* S. *Então* $\omega(Y, \mathcal{F})$ *é não vazio.*

Demonstração. Ver [9], Seção 3. □

Observação 3.3.2. *Se* A *é um subconjunto fechado e invariante de* X *então* $\omega(A, \mathcal{F}) = A$. *Se retirarmos a hipótese de* A *ser fechado ainda temos a inclusão* $A \subset \omega(A, \mathcal{F})$.

O próximo resultado traz propriedades do conjunto ω-limite quando (S, X) é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta. Em especial, vamos usá-lo na prova da Proposição 3.3.8 e dos Teoremas 3.3.3, 3.4.3 e 3.5.1.

Teorema 3.3.1. *Seja* Y *um subconjunto limitado de* X. *Se* (S, X) *é* $\mathcal{F}$*-assintoticamente compacta então:*

1. $\omega(Y, \mathcal{F})$ *é não vazio.*

2. $\omega(Y, \mathcal{F})$ *é compacto.*

3. $\omega(Y, \mathcal{F})$ *atrai o subconjunto* Y.

4. $\omega(Y, \mathcal{F})$ *é o menor subconjunto fechado de* X *que atrai* Y.

Demonstração. 1. Seja $(x_\lambda) \subset Y$, $(t_\lambda) \subset S$ com $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$. Como (S, X) é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta, $(t_\lambda x_\lambda)$ possui sub-rede $(t_{\lambda_\mu} x_{\lambda_\mu})$ com $(t_{\lambda_\mu} x_{\lambda_\mu}) \to x$ para algum $x \in X$. Como $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ então $t_{\lambda_\mu} \to_{\mathcal{F}} \infty$. Com isso, existem redes $(x_{\lambda_\mu}) \subset Y$, $(t_{\lambda_\mu}) \subset S$ tais que $t_{\lambda_\mu} \to_{\mathcal{F}} \infty$ e $(t_{\lambda_\mu} x_{\lambda_\mu}) \to x$. Portanto pela Proposição 3.3.1 segue que $x \in \omega(Y, \mathcal{F})$.

2. Vamos provar que $\omega(Y, \mathcal{F})$ é compacto. Seja uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset \omega(Y, \mathcal{F})$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, $A \in \mathcal{F}$ temos que $x_\lambda \in \overline{AY}$. Com isso, dado $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ existe $t_{(\lambda,A,\mathcal{U})} y_{(\lambda,A,\mathcal{U})} \in AY$ com $t_{(\lambda,A,\mathcal{U})} \in A$ e $y_{(\lambda,A,\mathcal{U})} \in Y$ tal que $t_{(\lambda,A,\mathcal{U})} y_{(\lambda,A,\mathcal{U})} \in St[x_\lambda, \mathcal{U}]$, ou seja $\mathcal{U} \in \rho(t_{(\lambda,A,\mathcal{U})} y_{(\lambda,A,\mathcal{U})}, x_\lambda)$. Considere a rede $t_{(\lambda,A,\mathcal{U})} y_{(\lambda,A,\mathcal{U})}$ dirigida pela relação $(\lambda, A, \mathcal{U}) \leq (\lambda', B, \mathcal{V})$ se $\lambda' \geq \lambda$, $B \subset A$ e $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$. Afirmamos que $t_{(\lambda,A,\mathcal{U})} \to_{\mathcal{F}} \infty$. Com efeito, para cada $A \in \mathcal{F}$ temos $t_{(\lambda,A,\mathcal{U})} \in A$, daí se $(\lambda, A, \mathcal{U}) \leq (\lambda', B, \mathcal{V})$ então $t_{(\lambda',B,\mathcal{V})} \in B \subset A$. Portanto $t_{(\lambda,A,\mathcal{U})} \to_{\mathcal{F}} \infty$. Além do mais, $y_{(\lambda,A,\mathcal{U})} \subset Y$ onde Y é um subconjunto limitado de X. Uma vez que (S, X) é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta, a rede $t_{(\lambda,A,\mathcal{U})} y_{(\lambda,A,\mathcal{U})}$ admite sub-rede convergente $t_{\phi(\mu)} y_{\phi(\mu)}$ onde $\phi(\mu) = (\lambda_\mu, A_\mu, \mathcal{U}_\mu)$. Digamos que $t_{(\lambda_\mu,A_\mu,\mathcal{U}_\mu)} y_{(\lambda_\mu,A_\mu,\mathcal{U}_\mu)} \to x$ para algum $x \in X$. Logo após, sejam $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tais que $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Como $t_{(\lambda_\mu,A_\mu,\mathcal{U}_\mu)} y_{(\lambda_\mu,A_\mu,\mathcal{U}_\mu)} \to x$ existe μ_0 tal que $\mathcal{V} \in \rho(t_{(\lambda_\mu,A_\mu,\mathcal{U}_\mu)} y_{(\lambda_\mu,A_\mu,\mathcal{U}_\mu)}, x)$ se $\mu \geq \mu_0$. Fixado $(\lambda', B, \mathcal{V})$, pela cofinalidade da aplicação ϕ tome μ_1 tal que $\phi(\mu_1) = (\lambda_{\mu_1}, A_{\mu_1}, \mathcal{U}_{\mu_1}) \geq (\lambda', B, \mathcal{V})$. Nesse caso temos que $\mathcal{U}_{\mu_1} \leq \mathcal{V}$. Agora perceba que se $\mu \geq \mu_1$ temos $\phi(\mu) \geq \phi(\mu_1)$, pois ϕ é crescente e então $\mathcal{U}_\mu \leq \mathcal{U}_{\mu_1}$. Portanto $\mathcal{U}_\mu \leq \mathcal{V}$ se $\mu \geq \mu_1$. Por outro lado, temos por definição que $\mathcal{U}_\mu \in \rho(t_{(\lambda_\mu,A_\mu,\mathcal{U}_\mu)} y_{(\lambda_\mu,A_\mu,\mathcal{U}_\mu)}, x_{\lambda_\mu})$ e assim $\mathcal{V} \in \rho(t_{(\lambda_\mu,A_\mu,\mathcal{U}_\mu)} y_{(\lambda_\mu,A_\mu,\mathcal{U}_\mu)}, x_{\lambda_\mu})$ se $\mu \geq \mu_1$. Por último, tomando $\mu \geq \mu_0, \mu_1$ temos que:

$$\mathcal{V} \in \rho(t_{(\lambda_\mu,A_\mu,\mathcal{U}_\mu)} y_{(\lambda_\mu,A_\mu,\mathcal{U}_\mu)}, x) \cap \rho(t_{(\lambda_\mu,A_\mu,\mathcal{U}_\mu)} y_{(\lambda_\mu,A_\mu,\mathcal{U}_\mu)}, x_{\lambda_\mu})$$

e dessa forma

$$\mathcal{U} \in 1(\rho(t_{(\lambda_\mu,A_\mu,\mathcal{U}_\mu)} y_{(\lambda_\mu,A_\mu,\mathcal{U}_\mu)}, x) \cap \rho(t_{(\lambda_\mu,A_\mu,\mathcal{U}_\mu)} y_{(\lambda_\mu,A_\mu,\mathcal{U}_\mu)}, x_{\lambda_\mu})).$$

Na sequência, através da desigualdade triangular abstrata

$$\rho(x_{\lambda_\mu}, x) \prec 1(t_{(\lambda_\mu,A_\mu,\mathcal{U}_\mu)} y_{(\lambda_\mu,A_\mu,\mathcal{U}_\mu)}, x) \cap \rho(t_{(\lambda_\mu,A_\mu,\mathcal{U}_\mu)} y_{(\lambda_\mu,A_\mu,\mathcal{U}_\mu)}, x_{\lambda_\mu})),$$

vale que $\mathcal{U} \in \rho(x_{\lambda_\mu}, x)$ se $\mu \geq \mu_0, \mu_1$. Desse modo $\rho(x_{\lambda_\mu}, x) \to \mathcal{O}$ e então $x_{\lambda_\mu} \to x$. Portanto toda rede em $\omega(Y, \mathcal{F})$ admite sub-rede convergente e assim $\omega(Y, \mathcal{F})$ é compacto.

3. Do contrário, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ de modo que $AY \not\subseteq St[\omega(Y, \mathcal{F}), \mathcal{U}]$ para todo $A \in \mathcal{F}$. Depois, para cada $A \in \mathcal{F}$ tome $t_A \in A$ e $y_A \in Y$ tais que $t_A y_A \notin St[\omega(Y, \mathcal{F}), \mathcal{U}]$. Com isso,

$t_A \to_{\mathcal{F}} \infty$ e $(y_A) \subset Y$, logo por hipótese $t_A y_A$ admite sub-rede tal que $t_{A_\lambda} y_{A_\lambda} \to x$ para algum $x \in X$. Em vista disso $x \in \omega(Y, \mathcal{F})$ e pela Proposição 2.1.4 segue que $\rho_{\omega(Y,\mathcal{F})}(t_{A_\lambda} y_{A_\lambda}) \to \mathcal{O}$. Em seguida tome λ_0 tal que se $\lambda \geq \lambda_0$ então $\mathcal{U} \in \rho_{\omega(Y,\mathcal{F})}(t_{A_\lambda} y_{A_\lambda})$. Nessas condições tem-se $t_{A_\lambda} y_{A_\lambda} \in St[\omega(Y, \mathcal{F}), \mathcal{U}]$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$ o que é um absurdo. Portanto $\omega(Y, \mathcal{F})$ atrai Y.

4. Suponha $F \subset X$ fechado atraindo Y com $\omega(Y, \mathcal{F}) \nsubseteq F$. Com isso, tome $x \in \omega(Y, \mathcal{F})$ tal que $x \notin F$. Dado que F é fechado e $x \notin F$ pela Proposição 2.1.1 temos que $\rho(x, F) \neq \mathcal{O}$, logo existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{U} \notin \rho(x, F)$. Fixe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ onde $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Como F atrai Y existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $AY \subset St[F, \mathcal{V}]$. Em seguida seja $(t_\lambda) \subset S$ com $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ e $(y_\lambda) \subset Y$ tal que $\rho(t_\lambda y_\lambda, x) \to \mathcal{O}$, posto que $x \in \omega(Y, \mathcal{F})$. Tome também λ_1 tal que $\mathcal{V} \in \rho(t_\lambda y_\lambda, x)$ se $\lambda \geq \lambda_1$. Como t_λ diverge existe λ_0 tal que $t_\lambda \in A$ quando $\lambda \geq \lambda_0$. Disso resulta que $\mathcal{V} \in \rho(t_\lambda y_\lambda, F)$ sempre que $\lambda \geq \lambda_0$. Finalmente, dado $\lambda \geq \lambda_0, \lambda_1$ temos que $\mathcal{V} \in \rho(t_\lambda y_\lambda, x) \cap \rho(t_\lambda y_\lambda, F)$ e assim $\mathcal{U} \in \rho(x, F)$ o que é um absurdo. Portanto $\omega(Y, \mathcal{F}) \subset F$ para todo fechado $F \subset X$ que $\mathcal{F}$-atrai Y.

□

No Teorema 3.3.1 vimos que a compacidade assintótica da ação do semigrupo garante também compacidade ao conjunto $\omega(Y, \mathcal{F})$. Agora vamos mencionar algumas condições sob as quais está assegurada a invariância progressiva e regressiva do ω-limite.

Proposição 3.3.6. *Seja Y um subconjunto de X tal que $\omega(Y, \mathcal{F})$ é não vazio. Então*

1. *$\omega(Y, \mathcal{F})$ é S-progressivamente invariante se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_1.

2. *$\omega(Y, \mathcal{F})$ é S-regressivamente invariante se S é um sub-semigrupo e $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_4.

Demonstração. Ver [29], Proposição 1.54. □

Com respeito à invariância do ω-limite temos o seguinte resultado.

Proposição 3.3.7. *Seja X Hausdorff admissível. Assuma que (S, X) é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta e que a família $\mathcal{F}$ satisfaz as hipóteses* H_1 *e* H_4. *Nesse caso $\omega(Y, \mathcal{F})$ é invariante para todo $Y \subset X$ limitado.*

Demonstração. Sejam $x \in \omega(Y, \mathcal{F})$, $s \in S$ e $F \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_1 existe $F' \in \mathcal{F}$ tal que $sF' \subset F$. Além disso, uma vez que $x \in \overline{F'Y}$ e μ_s é contínua

$$sx \in s\overline{F'Y} \subset \overline{FY}.$$

Pela arbitrariedade de F segue que $sx \in \omega(Y,\mathcal{F})$, ou seja, $s\omega(Y,\mathcal{F}) \subset \omega(Y,\mathcal{F})$.

De modo recíproco, sejam $x \in \omega(Y,\mathcal{F})$ e $s \in S$. Pela hipótese H_4, dado $A \in \mathcal{F}$ existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset sA$. Como $x \in \overline{BY}$ temos que para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$

$$\emptyset \neq BY \cap St[x,\mathcal{U}] \subset sAY \cap St[x,\mathcal{U}].$$

Em vista disso, para cada $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ assuma $st_{(A,\mathcal{U})}x_{(A,\mathcal{U})} \in sAY \cap St[x,\mathcal{U}]$ uma rede dirigida pela relação: $(A,\mathcal{U}) \leq (B,\mathcal{V})$ se $B \subset A$ e $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$. Com isso $t_{(A,\mathcal{U})} \to_{\mathcal{F}} \infty$ e $x_{(A,\mathcal{U})} \subset Y$. Em razão de $Y \subset X$ ser limitado podemos admitir $t_{(A,\mathcal{U})}x_{(A,\mathcal{U})} \to y$ para algum $y \in X$. Portanto $y \in \omega(Y,\mathcal{F})$. Mostremos a seguir que $st_{(A,\mathcal{U})}x_{(A,\mathcal{U})} \to x$. Com efeito, fixe $St[x,\mathcal{U}]$. Se $(B,\mathcal{V}) \geq (A,\mathcal{U})$ então $st_{(B,\mathcal{V})}x_{(B,\mathcal{V})} \in St[x,\mathcal{V}] \subset St[x,\mathcal{U}]$, logo $st_{(A,\mathcal{U})}x_{(A,\mathcal{U})} \to x$. Por último, pela continuidade de (S,X) e pela unicidade do limite de redes concluímos que $sy = x$. $\square$

Corolário 3.3.1. *Sejam $Y \subset X$ limitado e X Hausdorff admissível. Assuma que a ação do semigrupo (S,X) é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta e que a família $\mathcal{F}$ satisfaz* H_4. *Se $\omega(Y,\mathcal{F}) \subset Y$ então*

$$\omega(Y,\mathcal{F}) = \bigcap_{s\in S} \mu_s(Y).$$

Demonstração. Denote por $I(Y) = \bigcap_{s\in S} \mu_s(Y)$. A inclusão $I(Y) \subset \omega(Y,\mathcal{F})$ é imediata. De outro modo, pela Proposição 3.3.7 vale que $\omega(Y,\mathcal{F}) \subset s\omega(Y,\mathcal{F})$, o que implica $\omega(Y,\mathcal{F}) \subset s\omega(Y,\mathcal{F}) \subset sY$ para todo $s \in S$. Portanto $\omega(Y,\mathcal{F}) \subset I(Y)$. $\square$

Os próximos resultados investigam a conexidade do conjunto ω-limite.

Proposição 3.3.8. *Assuma que (S,X) é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta e que além disso o conjunto AC é conexo para todo $C \subset X$ conexo e $A \in \mathcal{F}$. Se $Y \subset X$ é limitado e existe $C \supset Y$ conexo que é atraído por $\omega(Y,\mathcal{F})$, então $\omega(Y,\mathcal{F})$ é conexo.*

Demonstração. Seja $C \supset Y$ conexo com $\omega(Y,\mathcal{F})$ atraindo C. Suponha $\omega(Y,\mathcal{F})$ desconexo. Isto posto, podemos escrever $\omega(Y,\mathcal{F}) = K_1 \cup K_2$ com K_1 e K_2 dois fechados não vazios tais que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Graças ao Teorema 3.3.1 vale que $\omega(Y,\mathcal{F})$ é compacto e então ambos K_1 e K_2 são compactos. Em seguida, seja $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ de modo que $\mathrm{St}[K_1,\mathcal{U}] \cap \mathrm{St}[K_2,\mathcal{U}] = \emptyset$ e $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ com $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Já que $\omega(Y,\mathcal{F})$ atrai C existe $A \in \mathcal{F}$ tal que

$$AC \subset \mathrm{St}[\omega(Y,\mathcal{F}),\mathcal{V}] = \mathrm{St}[K_1,\mathcal{V}] \cup \mathrm{St}[K_2,\mathcal{V}].$$

Como AC é conexo e $\mathrm{St}[K_1,\mathcal{V}] \cap \mathrm{St}[K_2,\mathcal{V}] = \emptyset$, temos que $AC \subset \mathrm{St}[K_1,\mathcal{V}]$ ou $AC \subset \mathrm{St}[K_2,\mathcal{V}]$. Assuma sem perda de generalidade $AC \subset \mathrm{St}[K_1,\mathcal{V}]$. Com isso temos que

$$K_2 \subset \omega(Y,\mathcal{F}) \subset \overline{AC} \subset \overline{St[K_1,\mathcal{V}]} \subset \mathrm{St}[K_1,\mathcal{U}]$$

o que contradiz $\mathrm{St}\,[K_1,\mathcal{U}] \cap \mathrm{St}\,[K_2,\mathcal{U}] = \emptyset$. Portanto $\omega\,(Y,\mathcal{F})$ é conexo. □

Corolário 3.3.2. *Seja $Y \subset X$ conexo e limitado. Se (S,X) é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta e além disso AY é conexo para todo $A \in \mathcal{F}$, então $\omega\,(Y,\mathcal{F})$ é conexo.*

O resultado seguinte pode ser facilmente verificado.

Lema 3.3.1. *Considere $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede encaixada de subconjuntos conexos e fechados de X com $F = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ não vazio e compacto. Nessas condições existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $F_\lambda \subset U$ para toda vizinhança U de F.*

Teorema 3.3.2. *Seja X Hausdorff localmente compacto e $Y \subset X$ conexo. Se $\omega(Y,\mathcal{F})$ é compacto, não vazio e além disso AY é conexo para todo $A \in \mathcal{F}$ então $\omega(Y,\mathcal{F})$ é conexo.*

Demonstração. Seja Y conexo com $\omega\,(Y,\mathcal{F})$ compacto. Assuma $\omega\,(Y,\mathcal{F})$ desconexo. Com isso, escrevemos $\omega\,(Y,\mathcal{F}) = K_1 \cup K_2$, onde K_1 e K_2 são fechados compactos e não vazios tais que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Na sequência, tome U, V vizinhanças disjuntas de K_1, K_2. Depois aplique o Lema 3.3.1 à rede $(\overline{AY})_{A\in\mathcal{F}}$ para obter $A_0 \in \mathcal{F}$ tal que $\overline{A_0Y} \subset U \cup V$. Como $\overline{A_0Y}$ é conexo, sem perda de generalidade assuma que $\overline{A_0Y} \subset U$. Nesse caso $\omega(Y,\mathcal{F}) \subset \overline{A_0Y} \subset U$, o que é impossível. □

Segue uma relação entre conjuntos omega limite e conjuntos minimais.

Proposição 3.3.9. *Seja $\mathcal{F}$ uma base de filtro satisfazendo* H_1. *Suponha ainda $Y \subset X$ minimal para a ação de S e $\omega(x,\mathcal{F})$ não vazio para todo $x \in X$. Então $\omega(x,\mathcal{F}) = Y$ para todo $x \in Y$. Reciprocamente temos $\omega(x,\mathcal{F})$ minimal se $\omega(x,\mathcal{F}) = Y$ para todo $x \in Y$ e $Y \neq \emptyset$.*

Demonstração. Ver [35], Proposição 10. □

Continuando nosso estudo, vamos usar a medida de não compacidade de Kuratowski para definir um tipo especial de ação de semigrupo e com isso obter um critério de compacidade assintótica em espaços completos.

Definição 3.3.3. *A ação do semigrupo $(\mathcal{S},X)$ é dita $\mathcal{F}$-limite compacta se dado um subconjunto limitado $Y \subset X$ então para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{U} \in \gamma(AY)$.*

Teorema 3.3.3. *Se (S,X) é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta então (S,X) é $\mathcal{F}$-limite compacta. A recíproca é verdadeira se X é completo.*

Demonstração. Suponha que (S,X) é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta e tome $Y \subset X$ limitado não vazio. Devido ao Teorema 3.3.1 temos que $\omega(Y,\mathcal{F})$ é não vazio, compacto e atrai Y. Dado $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, a cobertura aberta $\omega(Y,\mathcal{F}) \subset \bigcup_{x\in\omega(Y,\mathcal{F})} St[x,\mathcal{V}]$ admite subcobertura finita $\omega(Y,\mathcal{F}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} St[x_i,\mathcal{V}]$. Considere $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathrm{St}[\omega(Y,\mathcal{F}),\mathcal{U}] \subset \bigcup_{i=1}^{n} St[x_i,\mathcal{V}]$. Uma vez que $\omega(Y,\mathcal{F})$ atrai Y existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $AY \subset \mathrm{St}[\omega(Y,\mathcal{F}),\mathcal{U}] \subset \bigcup_{i=1}^{n} St[x_i,\mathcal{V}]$. Portanto $\mathcal{V} \in \gamma(AY)$ de onde concluímos que (S,X) é $\mathcal{F}$-limite compacta. De modo recíproco, admita X completo e (S,X) uma ação $\mathcal{F}$-limite compacta. Assuma $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede limitada em X e $t_\lambda \rightarrow_{\mathcal{F}} \infty$. Depois, defina $Y = \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ pela Proposição 1.5.4 tome $A_\mathcal{U} \in \mathcal{F}$ de modo que $\mathcal{U} \in \gamma(\overline{A_\mathcal{U} Y})$. Dado $\lambda \in \Lambda$, defina também $F_\lambda = \overline{\{t_{\lambda'}x_{\lambda'} : \lambda' \geq \lambda\}}$. Para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe $\lambda_\mathcal{U}$ tal que se $\lambda \geq \lambda_\mathcal{U}$ então $t_\lambda \in A_\mathcal{U}$. Desse modo, $F_\lambda \subset \overline{A_\mathcal{U} Y}$ para todo $\lambda \geq \lambda_\mathcal{U}$ e portanto $\gamma(F_\lambda) \prec \gamma(\overline{A_\mathcal{U} Y}) \prec \{\mathcal{U}\}$ quando $\lambda \geq \lambda_\mathcal{U}$. Isto garante que $\gamma(F_\lambda) \rightarrow \mathcal{O}$. Além disso, se $\lambda' \geq \lambda$ então $F_{\lambda'} \subset F_\lambda$ e com isso $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma rede decrescente de fechados não vazios. Em razão do Teorema 1.5.3 vale que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ é não vazio e assim podemos tomar $x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$. Além do mais, para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $\lambda \in \Lambda$ existe $\lambda'_\mathcal{U} \geq \lambda$ tal que $t_{\lambda'_\mathcal{U}} x_{\lambda'_\mathcal{U}} \in St[x,\mathcal{U}]$, dado que $x \in F_\lambda$. Dessa forma $\left(t_{\lambda'_\mathcal{U}} x_{\lambda'_\mathcal{U}}\right)_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}}$ é uma sub-rede de $(t_\lambda x_\lambda)$ com $t_{\lambda'_\mathcal{U}} x_{\lambda'_\mathcal{U}} \rightarrow x$. Por isso (S,X) é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta, o que completa a prova. □

Decorre do item 2 do Teorema 2.3.1 o seguinte resultado em relação ao ω-limite.

Proposição 3.3.10. *Assuma X completo. Se (S,X) é $\mathcal{F}$-limite compacta então $\omega(Y,\mathcal{F}) \neq \emptyset$, compacto e $\rho_H(\overline{AY},\omega(Y,\mathcal{F})) \rightarrow \mathcal{O}$ para todo $Y \subset X$ limitado.*

Demonstração. Mostremos que $\gamma(\overline{AY}) \rightarrow \mathcal{O}$. Sejam $\mathcal{U},\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tais que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Desde que Y é limitado existe $A_\mathcal{V} \in \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{V} \in \gamma(A_\mathcal{V} Y)$. Portanto pela Proposição 1.5.4 item 5 temos $\gamma(\overline{A_\mathcal{V} Y}) \prec 1\{\mathcal{V}\} \prec \{\mathcal{U}\}$. Como $\overline{AY} \subset \overline{A_\mathcal{V} Y}$ se $A \subset A_\mathcal{V}$ então $\gamma(\overline{AY}) \prec \gamma(\overline{A_\mathcal{V} Y})$ o que implica $\mathcal{U} \in \gamma(\overline{AY})$ toda vez que $A_\mathcal{V} \leq A$. Em função do item 2 do Teorema 2.3.1 deduzimos que $\bigcap_{A\in\mathcal{F}} \overline{AY} = \omega(Y,\mathcal{F}) \neq \emptyset$, compacto e $\rho_H(\overline{AY},\omega(Y,\mathcal{F})) \rightarrow \mathcal{O}$. □

Por hora, seguem algumas definições necessárias ao desenvolvimento da seção.

Definição 3.3.4. *Sejam $x \in X$ e $A \subset S$ não vazio. Chamaremos de primeiro A-prolongamento progressivo e primeiro $\mathcal{F}$-conjunto limite progressivo prolongacional os conjuntos*

$$D(x,A) = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}} \overline{ASt[x,\mathcal{U}]} \ \text{e}\ J(x,\mathcal{F}) = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} D(x,A).$$

Se Y é um subconjunto de X, então

$$J(Y,\mathcal{F})=\bigcup_{y\in Y}J(y,\mathcal{F}).$$

De modo parecido ao que foi realizado na Proposição 3.3.1 temos a seguinte descrição do conjunto $D(x,A)$.

Proposição 3.3.11. *Seja $x\in X$. Então*

$$D(x,A)=\left\{\begin{array}{c} y\in X: \textit{existem redes } (t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \textit{ em } A \textit{ e } (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \textit{ em } X \textit{ tais que} \\ \rho(x_\lambda,x)\to\mathcal{O} \textit{ e } \rho(t_\lambda x_\lambda,y)\to\mathcal{O} \end{array}\right\}.$$

Demonstração. A prova segue da Proposição 1.3.4 e da Proposição 1.64 contida em [29]. □

Proposição 3.3.12. *Sejam $x\in X$ e $A\subset S$. Então*

1. *$D(x,A)$ é fechado.*

2. *$\overline{Ax}\subset D(x,A)$.*

Demonstração. Ver [35], Proposição 14. □

Para cada $x\in X$, em razão da Proposição 1.3.4 e também da Proposição 1.65 contida em [29] temos que:

$$J\left(x,\mathcal{F}\right)=\left\{\begin{array}{c} y\in X: \text{para todo } F\in\mathcal{F} \text{ existem redes } (t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ em } F \text{ e } (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ em } X \text{ tais que} \\ t_\lambda\to_{\mathcal{F}}\infty,\ \rho(x_\lambda,x)\to\mathcal{O} \text{ e } \rho(t_\lambda x_\lambda,y)\to\mathcal{O} \end{array}\right\}.$$

Também podemos caracterizar o primeiro $\mathcal{F}$-conjunto limite progressivo tomando uma única rede em S.

Proposição 3.3.13. *Dado $x\in X$, então*

$$J\left(x,\mathcal{F}\right)=\left\{\begin{array}{c} y\in X: \textit{existem redes } (t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \textit{ em } S \textit{ e } (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \textit{ em } X \textit{ tais que} \\ t_\lambda\to_{\mathcal{F}}\infty,\ \rho(x_\lambda,x)\to\mathcal{O} \textit{ e } \rho(t_\lambda x_\lambda,y)\to\mathcal{O} \end{array}\right\}.$$

Demonstração. A prova segue da Proposição 1.3.4 e também da Proposição 1.67 contida em [29]. □

Exemplo 3.3.2. *Seja Φ um fluxo contínuo em um espaço métrico (X,d). Para $x\in X$, o primeiro prolongamento é definido como $D^+(x)=\bigcap_{\epsilon\geq 0}\overline{\mathbb{R}^+B(x,\epsilon)}$. Além disso, o primeiro conjunto limite positivo prolongacional é definido como $J^+(x)=\bigcap_{t\geq 0}D^+(x)$. Por fim, considerando a família $\mathcal{F}=\{(t,+\infty):t\geq 0\}$ ainda temos que $J^+(x)=J(x,\mathcal{F})$.*

Proposição 3.3.14. *Sejam $x \in X$ e $s \in S$. Então*

1. *$J(x, \mathcal{F}) \subset J(sx, \mathcal{F})$ se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_3.

2. *$J(sx, \mathcal{F}) \subset J(x, \mathcal{F})$ se a ação de S em X é aberta e além disso $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_2.

Demonstração. Ver [29], Proposição 1.62. □

Vamos esclarecer em seguida a relação existente entre o ω-limite e o primeiro $\mathcal{F}$-conjunto limite progressivo prolongacional.

Proposição 3.3.15. *Dado $x \in X$ então*

$$J(x, \mathcal{F}) = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}} \omega(St[x, \mathcal{U}], \mathcal{F}).$$

Demonstração. Tome $y \in J(x, \mathcal{F})$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Em virtude da Proposição 3.3.13 considere $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset S$, $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ e $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset X$ onde $x_\lambda \to x$ e $t_\lambda x_\lambda \to y$. Além do mais, a convergência da rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ garante a existência de $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in St[x, \mathcal{U}]$ para todo $\lambda_0 \leq \lambda$. Com isso, $(x_\lambda)_{\lambda \geq \lambda_0} \subset St[x, \mathcal{U}]$, $(t_\lambda x_\lambda)_{\lambda \geq \lambda_0} \to y$ e $(t_\lambda)_{\lambda \geq \lambda_0} \to_{\mathcal{F}} \infty$ de onde se deduz, pela Proposição 3.3.1, que $y \in \omega(St[x, \mathcal{U}], \mathcal{F})$. Pela arbitrariedade de $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tem-se $y \in \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}} \omega(St[x, \mathcal{U}], \mathcal{F})$. De outro modo, seja $y \in \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}} \omega(St[x, \mathcal{U}], \mathcal{F})$. Assim $y \in \omega(St[x, \mathcal{U}], \mathcal{F})$ para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, o que garante $y \in \overline{ASt[x, \mathcal{U}]}$ para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $A \in \mathcal{F}$. Com isso, de modo idêntico à Proposição 3.3.13 construímos a rede $t_{(A,\mathcal{U})} x_{(A,\mathcal{U})} \in ASt[x, \mathcal{U}] \cap St[y, \mathcal{U}]$. Nessas condições $t_{(A,\mathcal{U})} \to_{\mathcal{F}} \infty$, $x_{(A,\mathcal{U})} \to x$ e $t_{(A,\mathcal{U})} x_{(A,\mathcal{U})} \to y$. Portanto pela Proposição 3.3.13 vale que $y \in J(x, \mathcal{F})$. □

Proposição 3.3.16. *Seja x um elemento de X tal que $J(x, \mathcal{F})$ é não vazio. Então*

1. *$J(x, \mathcal{F})$ é S-progressivamente invariante se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_1.

2. *$J(x, \mathcal{F})$ é S-regressivamente invariante se S é um subsemigrupo de um grupo e $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_4.

Demonstração. Ver [29], Proposição 1.61. □

Tal como na Proposição 3.3.10 decorre do item 2 da Proposição 2.4.1 o seguinte resultado em relação ao A-prolongamento progressivo.

Proposição 3.3.17. *Seja X completo. Se (S, X) é $\mathcal{F}$-limite compacta então $D(x, A)$ é não vazio, compacto e $\rho_H(\overline{ASt[x, \mathcal{U}]}, D(x, A)) \to \mathcal{O}$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Assuma a rede $(\overline{ASt[x,\mathcal{U}]})_{(A,\mathcal{U})}$ dirigida por $(A,\mathcal{U}) \leq (B,\mathcal{V})$ se $B \subset A$ e $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$. Mostremos que $\gamma(ASt[x,\mathcal{U}]) \to \mathcal{O}$. Para isto, fixe $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{O}$. Na sequência, sejam $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tais que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Uma vez que $St[x,\mathcal{U}_0]$ é limitado existe $A_0 \in \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{V} \in \gamma(A_0 St[x,\mathcal{U}_0])$ e desse jeito $\mathcal{U} \in \gamma(\overline{A_0 St[x,\mathcal{U}_0]})$ pela Proposição 1.5.4 item 6. Além disso, como $\overline{ASt[x,\mathcal{U}]} \subset \overline{A_0 St[x,\mathcal{U}_0]}$ se $(A_0,\mathcal{U}_0) \leq (A,\mathcal{U})$ então $\gamma(\overline{ASt[x,\mathcal{U}]}) \prec \gamma(\overline{A_{\mathcal{U}_0} St[x,\mathcal{U}_0]})$. Isto implica $\mathcal{U} \in \gamma(\overline{ASt[x,\mathcal{U}]})$ toda vez que $(A,\mathcal{U}_0) \leq (A,\mathcal{U})$. Em virtude do item 2 do Teorema 2.3.1 vale que $\bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}} \overline{ASt[x,\mathcal{U}]} = D(x,A) \neq \emptyset$, compacto e $\rho_H(\overline{ASt[x,\mathcal{U}]}, D(x,A)) \to \mathcal{O}$. □

O lema abaixo nos será útil mais à frente (ver Teorema 3.5.1).

Lema 3.3.2. *Se $K \subset X$ é compacto e $U \subset X$ é aberto então*

$$\omega(K,\mathcal{F}) \subset J(K,\mathcal{F}) \quad e \quad J(U,\mathcal{F}) \subset \omega(U,\mathcal{F}).$$

Demonstração. Ver [9], Proposição 2.14. □

3.4 Existência do atrator global

O resultado a seguir é análogo ao Teorema 2.26 de [25] a menos da condição de invariância do conjunto ω-limite para subconjuntos limitados.

Definição 3.4.1. *Uma ação de semigrupo (S,X) é dita $\mathcal{F}$-eventualmente limitada se para todo subconjunto limitado $Y \subset X$ existe $A \in \mathcal{F}$ tal que AY é limitado.*

Teorema 3.4.1. *Se (S,X) possui $\mathcal{F}$-atrator global $\mathcal{A}$ então (S,X) é $\mathcal{F}$-eventualmente limitada, $\mathcal{F}$-limitada dissipativa, $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta e*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{Y\in\mathfrak{B}} \omega(Y,\mathcal{F})$$

onde $\mathfrak{B}$ é a coleção de todos os subconjuntos limitados de X. A recíproca é válida se o conjunto ω-limite de todos os subconjuntos limitados de X são invariantes.

Demonstração. Visto que (S,X) possui um $\mathcal{F}$-atrator global $\mathcal{A}$ então (S,X) é $\mathcal{F}$-limitada dissipativa pela Proposição 3.2.2. Em seguida, seja $Y \subset X$ limitado. Para $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $AY \subset St[\mathcal{A},\mathcal{U}]$. Como $\mathcal{A}$ é limitado então $St[\mathcal{A},\mathcal{U}]$ também limitado e assim AY é limitado. Portanto (S,X) é $\mathcal{F}$-eventualmente limitada. Mostremos agora que (S,X) é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta. Para isso, assuma $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ limitada e $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset S$ tal que

$t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$. O conjunto $Y = \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é limitado e, como $\mathcal{A}$ é um atrator global, para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ existe $A_{\mathcal{U}} \in \mathcal{F}$ de modo que $A_{\mathcal{U}} Y \subset St[\mathcal{A}, \mathcal{U}]$. Com isso, para todo $t \in A_{\mathcal{U}}$ e $x_\lambda \in Y$ temos que $\mathcal{U} \in \rho(tx_\lambda, \mathcal{A})$. Dado que $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$, para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $\lambda \in \Lambda$ tome $\lambda_{\mathcal{U}} \geq \lambda$ tal que $t_{\lambda_{\mathcal{U}}} \in A_{\mathcal{U}}$ e $x_{\lambda_{\mathcal{U}}} \in Y$. Considerando a rede $(t_{\lambda_{\mathcal{U}}} x_{\lambda_{\mathcal{U}}})_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}}$ temos que $\mathcal{U} \in \rho(t_{\lambda_{\mathcal{U}}} x_{\lambda_{\mathcal{U}}}, \mathcal{A})$ e assim $\mathcal{U} \in \rho(t_{\lambda_{\mathcal{U}}} x_{\lambda_{\mathcal{U}}}, a_{\mathcal{U}})$ para algum $a_{\mathcal{U}} \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ é compacto admitimos que $a_{\mathcal{U}} \to z$. Considere portanto $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$, $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2}\mathcal{W}$. Desde de que $a_{\mathcal{U}} \to z$ existe $\mathcal{W}' \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V} \in \rho(a_{\mathcal{U}}, z)$ se $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{W}'$. Por último, tome $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}, \mathcal{W}'$. Desse modo $\mathcal{V} \in \rho(a_{\mathcal{U}}, z)$ e além disso por definição $\mathcal{U} \in \rho(t_{\lambda_{\mathcal{U}}} x_{\lambda_{\mathcal{U}}}, a_{\mathcal{U}})$ o que implica $\mathcal{V} \in \rho(t_{\lambda_{\mathcal{U}}} x_{\lambda_{\mathcal{U}}}, a_{\mathcal{U}})$. Portanto vale que $\mathcal{W} \in \rho(t_{\lambda_{\mathcal{U}}} x_{\lambda_{\mathcal{U}}}, z)$ se $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}, \mathcal{W}'$ e assim $t_{\lambda_{\mathcal{U}}} x_{\lambda_{\mathcal{U}}} \to z$. Com isso provamos que (S, X) é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta. Para finalizar, vamos mostrar que $\mathcal{A} = \bigcup_{Y \in \mathfrak{B}} \omega(Y, \mathcal{F})$. Com efeito, dado $Y \in \mathfrak{B}$ temos pelo item 4 do Teorema 3.3.1 que $\omega(Y, \mathcal{F})$ é o menor subconjunto fechado que atrai Y e assim $\omega(Y, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$ para todo $Y \in \mathfrak{B}$. Portanto $\displaystyle\bigcup_{Y \in \mathfrak{B}} \omega(Y, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$. Por outro lado, $\mathcal{A}$ é invariante e fechado logo $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ e como $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}$ então $\mathcal{A} \subset \displaystyle\bigcup_{Y \in \mathfrak{B}} \omega(Y, \mathcal{F})$.

De modo recíproco, assuma $\omega(Y, \mathcal{F})$ invariante para todo $Y \subset X$ limitado e além disso que (S, X) é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta, $\mathcal{F}$-limitada dissipativa e $\mathcal{F}$-eventualmente limitada. Depois, considere $\mathfrak{B}$ a coleção de todos so subconjuntos limitados não vazios de X e defina $\mathcal{A} = \bigcup_{Y \in \mathfrak{B}} \omega(Y, \mathcal{F})$. Pelo Teorema 3.3.1, $\omega(Y, \mathcal{F})$ é não vazio, compacto e atrai Y para todo $Y \in \mathfrak{B}$. Sendo assim, obviamente $\mathcal{A}$ é não vazio e atrai todo subconjunto limitado de X. Além do mais, $\mathcal{A}$ é invariante pois cada $\omega(Y, \mathcal{F})$ é invariante por hipótese. Dado que (S, X) é $\mathcal{F}$-limitada dissipativa existe limitado $D \subset X$ que absorve Y para todo $Y \in \mathfrak{B}$. Posto isto, segue que $\omega(Y, \mathcal{F}) \subset \overline{D}$ para todo $Y \in \mathfrak{B}$. Então $\mathcal{A} \subset \overline{D}$ e $\omega(\mathcal{A}, \mathcal{F}) \subset \omega(D, \mathcal{F})$. Como $\mathcal{A}$ é invariante segue que $\mathcal{A} \subset \omega(\mathcal{A}, \mathcal{F}) \subset \omega(D, \mathcal{F})$. Por outro lado, como D é limitado segue que $\omega(D, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$. Portanto $\mathcal{A} = \omega(D, \mathcal{F})$. Por último, em virtude do Teorema 3.3.1 temos que $\mathcal{A}$ é compacto e fechado. Assim $\mathcal{A}$ é o $\mathcal{F}$-atrator global para (S, X). □

Proposição 3.4.1. *Assuma que $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_4. *Se a ação do semigrupo (S, X) é $\mathcal{F}$-eventualmente compacta e $\mathcal{F}$-eventualmente limitada então (S, X) é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta.*

Demonstração. Seja $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma rede limitada em X e $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma rede em S com $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$. Existe portanto $A \in \mathcal{F}$ para o qual AY é limitado visto que (S, X) é $\mathcal{F}$-eventualmente limitada e o conjunto $Y = \{x_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ é limitado. Além disso, como (S, X) é eventualmente compacta existe também $t \in S$ tal que $\mu_t : X \to X$ é compacta. Por outro lado, a hipótese H_4 garante a existência de $B \in \mathcal{F}$ de modo que $B \subset tA$. Depois, tome $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $t_\lambda \in B$ sempre que

$\lambda \geq \lambda_0$. Com isso, para cada $\lambda \geq \lambda_0$ escrevemos $t_\lambda = ts_\lambda$ onde $s_\lambda \in A$. Posteriormente, defina $Z = \{s_\lambda x_\lambda : \ \lambda \geq \lambda_0\}$. Como $Z \subset AY$ então Z é limitado. Dessa forma, o conjunto

$$\mu_t(Z) = \{ts_\lambda x_\lambda; \ \lambda \geq \lambda_0\} = \{t_\lambda x_\lambda; \ \lambda \geq \lambda_0\}$$

é relativamente compacto. Assim a rede $(t_\lambda x_\lambda)$ possui sub-rede convergente. Portanto (S, X) é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta. □

Definição 3.4.2. *Uma ação de semigrupo (S, X) é dita $\mathcal{F}$-ponto limitada dissipativa se existe um subconjunto limitado que absorve todo ponto $x \in X$.*

Observação 3.4.1. *Se a ação do semigrupo é limitada e $\mathcal{F}$ é uma família de subconjuntos de $\mathcal{S}$ então a ação é $\mathcal{F}$-eventualmente limitada pois $AY \subset \mathcal{S}Y$ para todo $Y \subset X$ limitado e A em $\mathcal{F}$.*

Ações ponto dissipativas, além do Teorema 3.4.1 e da Proposição 3.4.1, garantem o seguinte critério para existência do atrator global.

Teorema 3.4.2. *Assuma $\omega(Y, \mathcal{F})$ invariante para todo subconjunto limitado Y de X, $\mathcal{F}$ base de filtro satisfazendo as hipóteses* H_3 *e* H_4, *(S, X) eventualmente compacta, $\mathcal{F}$-eventualmente limitada e $\mathcal{F}$-ponto dissipativa. Posto isto, (S, X) possui um $\mathcal{F}$-atrator global.*

Demonstração. Devido à Proposição 3.4.1 temos que (S, X) é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta. Na medida em que (S, X) é $\mathcal{F}$-ponto dissipativa, seja um subconjunto limitado D_0 de X que absorve todo ponto $x \in X$. Após isso, dado $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, definimos o conjunto limitado

$$D_1 = \mathrm{St}\,[D_0, \mathcal{U}]\,.$$

Em virtude de (S, X) ser $\mathcal{F}$-eventualmente limitada existe $A \in \mathcal{F}$ tal que o conjunto $D = AD_1$ é limitado. Afirmamos que D absorve todo subconjunto limitado Y de X. Com efeito, visto que a ação é eventualmente compacta, existe $t \in S$ tal que $K = \overline{tY}$ é compacto. Além disso, para cada $x \in K$ existe $A_x \in \mathcal{F}$ tal que

$$A_x x \subset D_0 \subset D_1.$$

Desse modo, para $t_x \in A_x$, existe $\mathcal{U}_x \in \mathcal{O}$ de modo que $t_x \mathrm{St}\,[x, \mathcal{U}_x] \subset D_1$. Além do mais, pela Hipótese H_3, tome $A'_x \in \mathcal{F}$ com $A'_x \subset At_x$. Por conseguinte

$$A'_x \mathrm{St}\,[x, \mathcal{U}_x] \subset At_x \mathrm{St}\,[x, \mathcal{U}_x] \subset AD_1 = D.$$

Na sequência, consideramos uma cobertura aberta $K \subset \bigcup_{x \in K} \mathrm{St}\,[x,\mathcal{U}_x]$. Uma vez que K é compacto, existem pontos $x_1, ..., x_n \in K$ tais que $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{St}\left[x_j, \mathcal{U}_{x_j}\right]$. Posteriormente, seja $B \in \mathcal{F}$ com $B \subset \bigcap_{j=1}^{n} A'_{x_j}$, de onde segue que

$$BK \subset B\left(\bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{St}\left[x_j, \mathcal{U}_{x_j}\right]\right) = \bigcup_{j=1}^{n} B\mathrm{St}\left[x_j, \mathcal{U}_{x_j}\right] \subset \bigcup_{j=1}^{n} A'_{x_j}\mathrm{St}\left[x_j, \mathcal{U}_{x_j}\right] \subset D.$$

Portanto $B\overline{tY} \subset D$. Por último, seja $B' \in \mathcal{F}$ tal que $B' \subset Bt$. Nessas condições, vale que

$$B'Y \subset BtY \subset D,$$

e então D absorve Y. Dessa forma, tem-se que a ação do semigrupo (S, X) é $\mathcal{F}$-limitada dissipativa. Isso posto, o Teorema 3.4.1 assegura que (S, X) possui um $\mathcal{F}$-atrator global. $\square$

Passaremos à investigação mais pormenorizada dos atratores locais.

Definição 3.4.3. *Um subconjunto $\mathcal{A}$ de X se diz um $\mathcal{F}$-atrator local para (S, X) se $\mathcal{A}$ é não vazio, fechado, compacto, invariante e atrai alguma $\mathcal{U}$-vizinhança de $\mathcal{A}$.*

Proposição 3.4.2. *Assuma X compacto, (S, X) uma ação de semigrupo e $\mathcal{A} \subset X$ compacto e invariante. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$\mathcal{A}$ é um $\mathcal{F}$-atrator local.*

2. *Existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $\omega(St[\mathcal{A}, \mathcal{U}], \mathcal{F}) = \mathcal{A}$.*

Demonstração. Se $\mathcal{A}$ é um $\mathcal{F}$-atrator local então pela Proposição 3.2.1 existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $\rho_{\mathcal{A}}\left(t_\lambda St[\mathcal{A}, \mathcal{U}]\right) \to \mathcal{O}$ para toda rede $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$. Suponha $\omega(St[\mathcal{A}, \mathcal{U}], \mathcal{F}]) \neq \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ é fechado e invariante, pela Observação 3.3.2 temos $\omega(St[\mathcal{A}, \mathcal{U}], \mathcal{F}) \setminus \mathcal{A} \neq \emptyset$. Com isso, tome $y \in \omega(St[\mathcal{A}, \mathcal{U}], \mathcal{F}) \setminus \mathcal{A}$. Existem portanto redes $(x_\lambda) \subset St[\mathcal{A}, \mathcal{U}]$ e $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ tais que $t_\lambda x_\lambda \to y$. Como $\rho(t_\lambda x_\lambda, \mathcal{A}) \prec \rho_{\mathcal{A}}(t_\lambda St[\mathcal{A}, \mathcal{U}])$ então $\rho(t_\lambda x_\lambda, \mathcal{A}) \to \mathcal{O}$. Assim pela Proposição 2.1.4 segue que $y \in \mathcal{A}$, o que é impossível. De modo recíproco, suponha que $\mathcal{A}$ não atrai $St[\mathcal{A}, \mathcal{U}]$ para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Fixe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Nesse caso existe $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{O}$ tal que $ASt[\mathcal{A}, \mathcal{U}] \nsubseteq St[\mathcal{A}, \mathcal{U}_0]$ para todo $A \in \mathcal{F}$. Seja $t_A x_A \in ASt[\mathcal{A}, \mathcal{U}]$ com $t_A x_A \notin St[\mathcal{A}, \mathcal{U}_0]$ para cada $A \in \mathcal{F}$. Depois, considere a rede $(t_A x_A)_{A \in \mathcal{F}}$. Em virtude da compacidade de X podemos admitir $t_A x_A \to y$ para algum $y \in X$. Por último, como $t_A \to_{\mathcal{F}} \infty$ então $y \in \omega(St[\mathcal{A}, \mathcal{U}], \mathcal{F}) = \mathcal{A}$, o que é absurdo. Com isso, $\mathcal{A}$ é um $\mathcal{F}$-atrator local. $\square$

Corolário 3.4.1. *Assuma X compacto, (S, X) uma ação $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta satisfazendo as hipóteses H_1 e H_2. Nessas condições, $\mathcal{A}$ é um $\mathcal{F}$-atrator local se, e somente se, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $\omega(St[\mathcal{A}, \mathcal{U}], \mathcal{F}) = \mathcal{A}$.*

Nosso próximo passo é buscar condições que garantam a existência e caracterização de atratores locais. Nesse sentido, vejamos a definição seguinte.

Definição 3.4.4. *Um subconjunto compacto $\mathcal{B} \subset X$ se diz localmente absorvente se absorve alguma $\mathcal{U}$-vizinhança de $\mathcal{B}$. Dito de outra maneira, deve existir $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $A \in \mathcal{F}$ tais que $ASt[\mathcal{B},\mathcal{U}] \subset \mathcal{B}$.*

O teorema a seguir nos dá, em uma situação particular, uma caracterização do $\mathcal{F}$-atrator local.

Teorema 3.4.3. *Suponha que (S, X) é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta satisfazendo as hipóteses* H_1 *e* H_4*. Além disso, admita $\mathcal{B} \subset X$ localmente absorvente, limitado e fechado. Nesse caso, (S, X) possui um $\mathcal{F}$-atrator local $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ dado por $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B}, \mathcal{F})$.*

Demonstração. Devido ao Teorema 3.3.1 temos que $\mathcal{A}$ é não vazio e compacto. Além disso, a partir das hipóteses H_1 e H_4 temos $\mathcal{A}$ invariante (ver Proposição 3.3.7). Vamos mostrar então que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}$ é localmente absorvente tome $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, $A \in \mathcal{F}$ tais que $ASt[\mathcal{B},\mathcal{U}] \subset \mathcal{B}$. Nesse caso $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B}, \mathcal{F}) \subset \overline{ASt[\mathcal{B},\mathcal{U}]} \subset \mathcal{B}$. Como $\mathcal{A}$ é fechado só nos resta provar que $\mathcal{A}$ atrai uma vizinhança de si mesmo. Note primeiramente que $\mathcal{A}$ atrai $\mathcal{B}$ pelo Teorema 3.3.1. Dessa forma, dado $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ seja $B \in \mathcal{F}$ tal que $B\mathcal{B} \subset St[\mathcal{A}, \mathcal{V}]$. Em seguida fixe $s \in B$. Com o auxílio da hipótese H_1 seja $B' \in \mathcal{F}$ tal que $B' \subset sA$. Sendo assim $B'St[\mathcal{B},\mathcal{U}] \subset sASt[\mathcal{B},\mathcal{U}] \subset St[\mathcal{A}, \mathcal{V}]$. Com isso $B'St[\mathcal{A},\mathcal{U}] \subset St[\mathcal{A}, \mathcal{V}]$. Portanto $\mathcal{A}$ é um atrator local para (S, X). □

3.5 Atratores uniformes globais

A presente seção aborda a noção de atrator uniforme global. Vamos introduzir este conceito discutindo sua relação com os atratores globais. Ressaltamos aqui a importância da compacidade assintótica e das hipóteses de translação sobre $\mathcal{F}$ durante o processo de busca de um elo de ligação entre essas duas classes de atratores.

O $\mathcal{F}$-domínio de atração uniforme de $Y \subset X$ é definido por

$$\mathrm{A}_u\left(Y, \mathcal{F}\right) = \left\{x \in X : J\left(x, \mathcal{F}\right) \neq \emptyset \text{ e } J\left(x, \mathcal{F}\right) \subset Y\right\}.$$

Além do mais, Y é um *$\mathcal{F}$-atrator uniforme* se existir $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $St[Y,\mathcal{U}] \subset \mathrm{A}_u(Y, \mathcal{F})$. Por último, Y é um *$\mathcal{F}$-atrator uniforme global* se $\mathrm{A}_u(Y, \mathcal{F}) = X$.

Teorema 3.5.1. *Assuma $\mathcal{A} \subset X$ não vazio, fechado, compacto e invariante. Se $\mathcal{A}$ é um $\mathcal{F}$-atrator global para (S, X) então $\mathcal{A}$ é um $\mathcal{F}$-atrator uniforme global para (S, X). A recíproca é válida se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_3*, (S, X) é eventualmente compacta e $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta.*

Demonstração. Seja $x \in X$ qualquer. Pelo Teorema 3.4.1 temos que (S, X) é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta e o Teorema 3.3.1 garante que $\omega(x, \mathcal{F})$ é não vazio. Como $\omega(x, \mathcal{F}) \subset J(x, \mathcal{F})$ então $J(x, \mathcal{F}) \neq \emptyset$. Em seguida fixe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Como $\mathrm{St}[x, \mathcal{U}]$ é limitado tem-se $\omega(\mathrm{St}[x, \mathcal{U}], \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$ pelo Teorema 3.4.1. Depois, pelo Lema 3.3.2 segue que $J(\mathrm{St}[x, \mathcal{U}], \mathcal{F}) \subset \omega(\mathrm{St}[x, \mathcal{U}], \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$. Portanto $J(X, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$ e assim $\mathcal{A}$ é um $\mathcal{F}$-atrator uniforme global para (S, X). Reciprocamente, seja $Y \subset X$ limitado e tome $t \in S$ tal que $\overline{tY}$ é compacto. Pelo Lema 3.3.2 segue que $\omega\left(\overline{tY}, \mathcal{F}\right) \subset J\left(\overline{tY}, \mathcal{F}\right)$ e portanto $\omega\left(\overline{tY}, \mathcal{F}\right) \subset \mathcal{A}$. Além do que, com o auxílio do Teorema 3.3.1 garantimos que $\omega\left(\overline{tY}, \mathcal{F}\right)$ atrai $\overline{tY}$. Isto implica que $\mathcal{A}$ atrai $\overline{tY}$. Desse modo, dado $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $A\overline{tY} \subset St[\mathcal{A}, \mathcal{U}]$. Pela hipótese H_3, tome $B \in \mathcal{F}$ para o qual $B \subset At$. Com isso, temos que $BY \subset AtY \subset St[\mathcal{A}, \mathcal{U}]$ de onde segue que $\mathcal{A}$ atrai Y. Portanto $\mathcal{A}$ é um $\mathcal{F}$-atrator global. $\square$

Corolário 3.5.1. *Assuma que a família $\mathcal{F}$ satisfaz as hipóteses* H_3 *e* H_4 *e que além disso (S, X) é $\mathcal{F}$-eventualmente limitada e eventualmente compacta. Então $\mathcal{A} \subset X$ não vazio fechado compacto e invariante é um $\mathcal{F}$-atrator uniforme global para (S, X) se, e somente se, $\mathcal{A}$ é o $\mathcal{F}$-atrator global para (S, X).*

Demonstração. Assuma $\mathcal{A}$ um $\mathcal{F}$-atrator uniforme global não vazio, fechado, compacto e invariante. Em razão do Teorema 3.3.1 temos que (S, X) é $\mathcal{F}$-assintoticamente compacta. Com isso, pelo Teorema 3.5.1 temos que $\mathcal{A}$ é um $\mathcal{F}$-atrator global. Em contrapartida, suponha $\mathcal{A}$ um $\mathcal{F}$-atrator global. Então $\mathcal{A}$ é não vazio, compacto e invariante e pela primeira parte do Teorema 3.5.1 segue que $\mathcal{A}$ é um $\mathcal{F}$-atrator uniforme global. $\square$

3.6 Atratores em E^E

Seja E um espaço vetorial normado munido da família admissível $\mathcal{O}_{\mathrm{d}}$ conforme o Exemplo 1.1.2. Para sequências finitas $\alpha = \{x_1, ..., x_k\}$ em E e $\epsilon = \{\mathcal{U}_{\varepsilon_1}, ..., \mathcal{U}_{\varepsilon_k}\}$ em $\mathcal{O}_{\mathrm{d}}$ defina a cobertura $\mathcal{U}_\alpha^\epsilon$ de E^E dada pelos conjuntos da forma $\prod_{x \in \mathbb{R}^n} U_x$, onde $U_{x_i} = \mathrm{B}(a_i, \varepsilon_i) \in \mathcal{U}_{\varepsilon_i}$ para $i = 1, ..., k$ e $U_x = E$ caso contrário. A família $\mathcal{O}_{\mathrm{p}} = \{\mathcal{U}_\alpha^\epsilon\}$ é uma base para a uniformidade da convergência pontual em E^E(ver [36], Corolário 37.13).

Observação 3.6.1. *Seja E^E com a topologia da convergência pontual. Então a aplicação inclusão $i : E \hookrightarrow E^E$, onde $i(x)$ é a função constante $i(x) \equiv x$ é uma aplicação contínua. Além do mais, é bem conhecido que E^E não é metrizável com a topologia da convergência pontual.*

A seguir, vejamos um atrator uniforme global que não é um atrator global. Isto mostra que a existência de um atrator uniforme global não a assegura compacidade assintótica da ação de S.

Exemplo 3.6.1. *Assuma E o n-espaço vetorial euclidiano e tome $a = (a_1, ..., a_n) \in (0,1)^n$. Depois, seja $\mu : E \times E^E \to E^E$ a ação de E em E^E dada por*

$$\mu((t_1, , , t_n), f) = \left(a_1^{t_1} f_1, ..., a_n^{t_n} f_n\right)$$

onde $f = (f_1, ..., f_n)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ defina o conjunto $A_k = \{(t_1, ..., t_n) \in E : t_i \geq k\}$. Em seguida, considere a base de filtro $\mathcal{F} = \{A_k : k \in \mathbb{N}\}$. Se $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ então é fácil ver que $t_\lambda f(x) = \mu(t_\lambda, f)(x) \to 0$ para todo $f \in E^E$ e $x \in E$, isto é, $i(0) \in \omega(f, \mathcal{F})$ para todo $f \in E^E$. Isto implica que $i(0) \in J(f, \mathcal{F})$ para todo $f \in E^E$. Agora, suponha $g \in J(f, \mathcal{F})$. Nesse caso existem redes $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ e $f_\lambda \to f$ tais que $t_\lambda f_\lambda \to g$. Escrevendo $t_\lambda = \left(t_1^\lambda, ..., t_n^\lambda\right)$, $f_\lambda = \left(f_1^\lambda, ..., f_n^\lambda\right)$ e $f = (f_1, ..., f_n)$ temos que $a_i^{t_i^\lambda} \to 0$ e $f_i^\lambda(x) \to f_i(x)$ para todo $x \in E$. Então $a_i^{t_i^\lambda} f_i^\lambda(x) \to 0$ e portanto $t_\lambda f_\lambda(x) \to 0$ para todo $x \in E$. Isto significa que $g = i(0)$, então $J(f, \mathcal{F}) = \{i(0)\}$ para toda $f \in E^E$. Assim $\mathcal{A} = \{i(0)\}$ é o $\mathcal{F}$-atrator uniforme global para $\left(E, E^E, \mu\right)$. Em contrapartida, vamos provar que $\left(E, E^E, \mu\right)$ não possui $\mathcal{F}$-atrator global, isto é, $\mathcal{A}$ não é o $\mathcal{F}$-atrator global para $\left(E, E^E, \mu\right)$. Tome $\alpha = \{(0, ..., 0)\}$ e $\beta = \{(1, ..., 1)\}$ em E, $\epsilon = \{\mathcal{U}_1\}$ em $\mathcal{O}_\mathrm{d}$ e defina $Y = \mathrm{St}[i(0), \mathcal{U}_\alpha^\epsilon]$. Então Y é um conjunto limitado por definição. Para provar que $\mathcal{A}$ não é o $\mathcal{F}$-atrator global para $\left(E, E^E, \mu\right)$ é suficiente mostrar que não existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A_k Y \subset \mathrm{St}\left[i(0), \mathcal{U}_\beta^\epsilon\right]$. De fato, note que se $f \in \mathrm{St}\left[i(0), \mathcal{U}_\beta^\epsilon\right]$ então $f(1, ..., 1), 0 \in \mathrm{B}(b, 1)$ para algum $b \in B$ e daí $\|f(1, ..., 1)\| < 2$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina $f_k \in E^E$ por $f_k(x) = 2\left(a_1^{-k} x_1, ..., a_n^{-k} x_n\right)$ onde $x = (x_1, ..., x_n)$. Desse modo $f_k(0) = 0$ logo $f_k \in Y$. Além do mais, $\|(k, ..., k) f_k(1, ..., 1)\| = \|(2, ..., 2)\| > 2$ e assim $(k, ..., k) f_k \notin \mathrm{St}\left[i(0), \mathcal{U}_\beta^\epsilon\right]$. Com isso $(k, ..., k) f_k \in A_k Y \setminus \mathrm{St}\left[i(0), \mathcal{U}_\beta^\epsilon\right]$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e portanto $\mathcal{A}$ não é $\mathcal{F}$-atrator global para $\left(E, E^E, \mu\right)$.

Exemplo 3.6.2. *Seja $\mathbb{N}$ o semigrupo dos inteiros positivos com a multiplicação e $\mu : \mathbb{N} \times E^E \to E^E$ a ação dada por $\mu(n, f) = f^n$. Em seguida, considere a base de filtro $\mathcal{F} = \{\{k \in \mathbb{N} : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}$. Nesse caso, temos que se $n_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ em $\mathbb{N}$ então $n_\lambda \to +\infty$. Além* *disso, seja $K \subset E$ compacto e $X \subset E^E$ o subespaço de todas as contrações de E com ponto fixo em K e mesma constante de Lipschitz $L < 1$. Então X é invariante e $i(K) \subset X$ é um conjunto compacto, fechado e invariante em X. Por fim, seja a restrição da ação $\mu : \mathbb{N} \times X \to X$. Afirmamos que $i(K)$ é o $\mathcal{F}$-atrator global para esta ação. De fato, para cada $f \in X$ denote por x_f o ponto fixo de f. Para sequências $\alpha = \{z_1, ..., z_m\}$ em E e $\epsilon = \{\mathcal{U}_{\varepsilon_1}, ..., \mathcal{U}_{\varepsilon_m}\}$ em $\mathcal{O}_{\mathrm{d}}$ defina $\delta = \sup\{\|z_j - x_f\| : f \in X, j = 1, ..., m\}$. Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L^{n_0}\delta < \min\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m\}$. Então para qualquer $f \in X$ e $n \geq n_0$ temos que*

$$\|f^n(z_j) - x_f\| < L^n \|z_j - x_f\| < L^{n_0}\delta < \min\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m\}$$

para todo $j = 1, ..., m$. Desse modo $f^n, i(x_f) \in \prod_{x \in \mathbb{R}^n} U_x$, onde $U_{z_j} = \mathrm{B}(x_f, \varepsilon_j)$ para $j = 1, ..., m$ e $U_x = E$ caso contrário, isto é, $f^n \in \mathrm{St}[i(x_f), \mathcal{U}_\alpha^\epsilon]$ para todo $f \in X$ e $n \geq n_0$. Segue que $n \geq n_0$ implica

$$\rho_{i(K)}(nX) = \bigcap_{f \in X} \rho(f^n, i(K)) \prec \bigcap_{f \in X} \rho(f^n, i(x_f)) \prec \{\mathcal{U}_\alpha^\epsilon\}.$$

Desse modo $\rho_{i(K)}(nX) \to \mathcal{O}_{\mathrm{p}}$ e portanto $i(K)$ é o $\mathcal{F}$-atrator global para $(\mathbb{N}, X, \mu)$. Além do mais, pelo Teorema 3.5.1 vale que $i(K)$ é o $\mathcal{F}$-atrator global uniforme para $(\mathbb{N}, X, \mu)$ e $J(X, \mathcal{F}) = i(K)$.

Exemplo 3.6.3. *Como um caso especial do Exemplo 3.6.2 seja $X \subset E^E$ o subespaço de todas as contrações com mesma constante de Lipschtiz $L < 1$. Então $i(0)$ é o $\mathcal{F}$-atrator global para $(\mathbb{N}, X, \mu)$.*

Exemplo 3.6.4. *Para $K > 0$ e $0 < L < 1$, seja $X \subset E^E$ o subespaço de todas as aplicações Lipschitzianas de E com mesma constante de Lipschitz K e $S \subset E^E$ o semigrupo topológico de todos os operadores de contração $S = \{T \in \mathcal{L}(E) : \|T\| \leq L < 1\}$. Depois, considere a ação $\mu : S \times X \to X$ de S em E^E dada pela composição $\mu(T, f) = T \circ f$. Para um dado $m \in \mathbb{N}$, defina o conjunto $S_m = \left\{T^k : T \in S, k \geq m\right\}$. Para $p, q \in \mathbb{N}$ temos que $S_m = S_p \cap S_q$ onde $m = \max\{p, q\}$. Então a família $\mathcal{F} = \{S_m : m \in \mathbb{N}\}$ é uma base de filtro de S. Afirmamos que $\mathcal{A} = \{i(0)\}$ é o $\mathcal{F}$-atrator global para (S, X, μ). De fato, para todo $T \in S$ e $x \in \mathbb{R}^n$ temos que $T \circ i(0)(x) = T(0) = 0$. Então $T \circ i(0) = i(0)$ para todo $T \in S$ e portanto $\mathcal{A}$ é invariante. Agora, seja $Y \subset E^E$ limitado. Nesse caso existem $\beta = \{x_1, ..., x_n\}$ em E e $\delta = \{\mathcal{U}_{\delta_1}, ..., \mathcal{U}_{\delta_n}\}$ em $\mathcal{O}_{\mathrm{d}}$ tais que $Y \subset \mathrm{St}\left[h, \mathcal{U}_\beta^\delta\right]$ para algum $h \in E^E$. Disso segue que $\|f(x_i) - g(x_i)\| < 4\delta_i$ para todo $f, g \in Y$ e $i = 1, ..., n$. Dando sequência, tome $T_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$, $\alpha = \{z_1, ..., z_m\}$ em E e*

$\epsilon = \{\mathcal{U}_{\varepsilon_1}, ..., \mathcal{U}_{\varepsilon_m}\}$ *em* $\mathcal{O}_{\mathrm{d}}$. *Para todo* $f, g \in Y$ *e* $j = 1, ..., m$, *temos que*

$$\begin{aligned} \|f(z_j) - g(z_j)\| &\leq \|f(z_j) - f(x_1)\| + \|f(x_1) - g(x_1)\| + \|g(x_1) - g(z_j)\| \\ &< 2K\|z_j - x_1\| + 4\delta_1. \end{aligned}$$

Então o conjunto $\{f(z_j) : f \in Y, j = 1, ..., m\}$ *é limitado em* E. *Suponha que* $\|f(z_j)\| \leq M$ *para todo* $f \in Y$ *e* $j = 1, ..., m$. *Como* $\|T_\lambda\| \leq L < 1$, *para um dado* $k \in \mathbb{N}$ *existe* λ_0 *tal que* $\lambda \geq \lambda_0$ *implica*

$$\|T_\lambda(x) - T_\lambda(y)\| \leq L^k \|x - y\|$$

para todo $x, y \in E$. *Então, para qualquer* $f \in Y$ *temos que*

$$\|T_\lambda(f(z_j))\| \leq L^k \|f(z_j)\| \leq L^k M$$

para todo $j = 1, ..., m$ *e* $\lambda \geq \lambda_0$. *Por fim, tome* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $L^k M < \min\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m\}$. *Então existe* λ_0 *tal que* $\lambda \geq \lambda_0$ *implica* $\|T_\lambda f(z_j)\| < \min\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m\}$ *para todo* $j = 1, ..., m$ *e* $f \in Y$. *Portanto* $T_\lambda f, i(0) \in \prod_{x \in \mathbb{R}^n} U_x$ *onde* $U_{z_j} = \mathrm{B}(0, \varepsilon_j)$ *para* $j = 1, ..., m$ *e* $U_x = E$ *caso contrário, ou seja,* $T_\lambda f \in \mathrm{St}[i(0), \mathcal{U}_\alpha^\epsilon]$. *Isto significa que* $\mathcal{U}_\alpha^\epsilon \in \rho(T_\lambda Y, i(0))$ *toda vez que* $\lambda \geq \lambda_0$ *e daí* $\rho_{\mathcal{A}}(T_\lambda Y) \to \mathcal{O}_{\mathrm{p}}$. *Portanto* $\mathcal{A}$ *é o* $\mathcal{F}$*-atrator global para* (S, E^E, μ). *Além disso,* $\mathcal{A}$ *é o* $\mathcal{F}$*-atrator global uniforme para* (S, X, μ) *e* $J(X, \mathcal{F}) = \mathcal{A}$.

Observação 3.6.2. *O exemplo acima pode se facilmente extendido tomando-se o semigrupo topológico* $S \subset E^E$ *de todas as contrações com mesmo ponto fixo* x_0 *e mesma constante de Lipschtiz* $L < 1$. *Neste caso,* $\mathcal{A} = \{i(x_0)\}$ *é o* $\mathcal{F}$*-atrator global para* (S, X).

3.7 Aplicações conjunto Limite

O objetivo aqui é aplicar os resultados da Seção 2.3 à dinâmica topológica. Em suma, utilizaremos as definições de excesso entre subconjuntos e convergência essencial para estudar a continuidade de multifunções com valores definidos por fecho da órbita, conjunto limite, prolongamento e conjunto limite prolongacional. Todo o desenvolvimento teórico proposto a seguir tem como base o artigo [27].

Antes de tudo, lembramos que uma função $F : X \to \mathcal{H}(X)$ que associa cada $x \in X$ a um subconjunto fechado não vazio $F(x)$ de X é chamada de multifunção. Em seguida, dado $A \subset X$ definimos os conjuntos:

$$\begin{aligned} F^{+}(A) &= \{x \in X : F(x) \subset A\}, \\ F^{-}(A) &= \{x \in X : F(x) \cap A \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Definição 3.7.1. *Uma multifunção $F : X \to \mathcal{H}(X)$ é dita:*

1. *Hausdorff semicontínua superiormente (H-scs) em $x_0 \in X$ se para todo aberto $V \subset X$ tal que $F(x) \subset V$ existe vizinhança U de x tal que $F(y) \subset V$ para todo $y \in U$, isto é, $U \subset F^{+}(V)$.*

2. *Hausdorff semicontínua inferiormente (H-sci) em $x_0 \in X$ se para todo aberto $V \subset X$ tal que $F(x) \cap V \neq \emptyset$ existe vizinhança U de x tal que $F(y) \cap V \neq \emptyset$ para todo $y \in U$, isto é, $U \subset F^{-}(V)$.*

3. *Hausdorff contínua em $x_0 \in X$ (H-c) se for H-scs e H-sci em x_0.*

Observação 3.7.1. *Sejam $F, F_1, F_2 : X \to \mathcal{H}(X)$ multifunções tais que $F(x) = F_1(x) \cup F_2(x)$ para algum $x \in X$. Se ambas, F_1 e F_2 são H-scs em x então F é H-scs em x. Além disso, se F_1 e F_2 são funções fechadas e H-sci em x então F é H-sci em x.*

Proposição 3.7.1. *Seja $F : X \to \mathcal{H}(X)$ uma multifunção com $F(x)$ compacto para todo $x \in X$. As seguintes afirmações são válidas:*

1. *F é H-scs em x se, e somente se, $\rho_{F(x)}(F(x_\lambda)) \to \mathcal{O}$ para toda rede $x_\lambda \to x$.*

2. *F é H-sci em x se, e somente se, $\rho_{F(x_\lambda)}(F(x)) \to \mathcal{O}$ para toda $x_\lambda \to x$.*

3. *F é H-c em x se, e somente se, $\rho_H(F(x_\lambda), F(x)) \to \mathcal{O}$ para toda rede $x_\lambda \to x$.*

Demonstração. 1. Suponha que F é H-scs em x. Em seguida, tome $x_\lambda \to x$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Nesse caso, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $F(y) \subset \mathrm{St}[F(x), \mathcal{U}]$ para qualquer $y \in \mathrm{St}[x, \mathcal{V}]$. Seja λ_0 tal que $x_\lambda \in \mathrm{St}[x, \mathcal{V}]$ sempre que $\lambda \geq \lambda_0$. Sendo assim, $F(x_\lambda) \subset \mathrm{St}[F(x), \mathcal{U}]$ e com isso $\mathcal{U} \in \rho_{F(x)}(F(x_\lambda))$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Portanto $\rho_{F(x)}(F(x_\lambda)) \to \mathcal{O}$. Por outro lado, suponha que $\rho_{F(x)}(F(x_\lambda)) \to \mathcal{O}$ para toda rede $x_\lambda \to x$. Considere $V \subset X$ um conjunto aberto para o qual $F(x) \subset V$. Pela compacidade de $F(x)$ existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathrm{St}[F(x), \mathcal{V}] \subset V$. Suponha por contradição que para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ existe $x_{\mathcal{U}} \in \mathrm{St}[x, \mathcal{U}]$ tal que $F(x_{\mathcal{U}}) \nsubseteq V$. Por hipótese, como $x_{\mathcal{U}} \to x$ então $\rho_{F(x)}(F(x_{\mathcal{U}})) \to \mathcal{O}$ e portanto existe $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V} \in \rho_{F(x)}(F(x_{\mathcal{U}}))$ toda vez que $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{U}_0$. Portanto $F(x_{\mathcal{U}}) \subset \mathrm{St}\left[F(x), \mathcal{V}\right] \subset V$ para $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{U}_0$, o que é impossível. Concluímos então que F é H-scs em x.

2. Suponha que F é H-sci em x. Seja $x_\lambda \to x$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Depois, tome $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ com $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Em razão da compacidade de $F(x)$ podemos considerar $y_1, ..., y_n \in F(x)$ tais que $F(x) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{St}\left[y_i, \mathcal{V}\right]$. Como F é H-sci em x, existe uma vizinhança U de x tal que $F(y) \cap \mathrm{St}\left[y_i, \mathcal{V}\right] \neq \emptyset$ para todo $y \in U$ e $i = 1, ..., n$. Seja λ_0 tal que $x_\lambda \in U$ toda vez que $\lambda \geq \lambda_0$. Para $y \in F(x)$ e $\lambda \geq \lambda_0$ temos que $y \in \mathrm{St}\left[y_i, \mathcal{V}\right]$ para algum i e assim $F(x_\lambda) \cap \mathrm{St}\left[y_i, \mathcal{V}\right] \neq \emptyset$. Como $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$, segue que $\mathcal{U} \in \rho(y, F(x_\lambda))$. Desse modo $\mathcal{U} \in \bigcap_{y \in F(x)} \rho(y, F(x_\lambda))$ toda vez que $\lambda \geq \lambda_0$ e com isso $\rho_{F(x_\lambda)}(F(x)) \to \mathcal{O}$. Reciprocamente, assuma que $\rho_{F(x_\lambda)}(F(x)) \to \mathcal{O}$ para toda rede $x_\lambda \to x$ e que além disso F não seja H-sci em x. Desse modo existe aberto $V \subset X$ tal que $F(x) \cap V \neq \emptyset$ e $F(x_\lambda) \cap V = \emptyset$ para alguma rede $x_\lambda \to x$. Em seguida, escolha $y \in F(x) \cap V$ e tome $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ para o qual $\mathrm{St}\left[y, \mathcal{U}\right] \subset V$. Pela hipótese $\rho_{F(x_\lambda)}(F(x)) \to \mathcal{O}$, logo existe λ_0 tal que $\lambda \geq \lambda_0$ implica $\mathcal{U} \in \rho_{F(x_\lambda)}(F(x))$. Então vale que $\mathcal{U} \in \rho(y, F(x_\lambda))$ toda vez que $\lambda \geq \lambda_0$ e com isso $\emptyset \neq F(x_\lambda) \cap \mathrm{St}\left[y, \mathcal{U}\right] \subset F(x_\lambda) \cap V$, o que é uma contradição.

3. Basta aplicar o item 1. juntamente com o item 2.. □

Proposição 3.7.2. *Seja $F : X \to \mathcal{H}(X)$ uma multifunção com $F(x)$ compacto. Se F é H-scs em x então $F(x) \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F(x_\lambda)$ é compacto para toda rede convergente $x_\lambda \to x$.*

Demonstração. Seja (y_μ) uma rede em $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F(x_\lambda)$. Assuma $y_\mu \in F\left(x_{\lambda_\mu}\right)$. Como $\rho_{F(x)}\left(F(x_{\lambda_\mu})\right) \to \mathcal{O}$ então $\rho(y_\mu, F(x)) \to \mathcal{O}$. Uma vez que $F(x)$ é compacto, pela Proposição 2.1.5 podemos encontrar uma sub-rede (y_{μ_σ}) e $y \in F(x)$ com $y_{\mu_\sigma} \to y$. Portanto $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F(x_\lambda)$ é compacto. □

Dando sequência, definimos as aplicações $K_A : X \to \mathcal{H}(X)$ e $L_{\mathcal{F}} : X \to \mathcal{H}(X)$ por:

$$K_A(x) = \overline{Ax}, \quad A \subset S, \qquad L_{\mathcal{F}}(x) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} K_A(x) = \omega(x, \mathcal{F}).$$

Repare que se X for completo e (S, X) for $\mathcal{F}$-limite compacta então pela Proposição 3.3.10 segue que $(K_A)_{A \in \mathcal{F}}$ converge pontualmente para $L_{\mathcal{F}}$.

Também definimos $D_A : X \to \mathcal{H}(X)$ e $J_{\mathcal{F}} : X \to \mathcal{H}(X)$ por:

$$D_A(x) = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}} \overline{A\mathrm{St}\left[x, \mathcal{U}\right]}, \quad A \subset S, \qquad J_{\mathcal{F}}(x) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} D_A(x).$$

Com isso, se X for completo e (S, X) for $\mathcal{F}$-limite compacta então $J_{\mathcal{F}}(x)$ é não vazio, compacto e além disso $(\overline{ASt[x, \mathcal{U}]})_{(A, \mathcal{U}) \in \mathcal{F} \times \mathcal{O}}$ converge para $J_{\mathcal{F}}(x)$ para todo $x \in X$ (ver Proposição 3.3.17).

A partir de agora vamos apresentar resultados de continuidade para as aplicações D_A, $L_{\mathcal{F}}$, e $J_{\mathcal{F}}$. Para isso assumiremos $K_A(x)$, $D_A(x)$, $L_{\mathcal{F}}(x)$ e $J_{\mathcal{F}}(x)$ não vazios e compactos para todo $x \in X$. Além do mais, vamos trabalhar com uma base de filtro $\mathcal{F}$ co-compacta, isto é, $S \setminus A$ é compacto em S para cada $A \in \mathcal{F}$.

Proposição 3.7.3. *A função K_A é H-sci.*

Demonstração. Seja $x \in X$ e $U \subset X$ uma vizinhança aberta de x. Considere $y \in K_A^-(U)$. Sendo assim, $K_A(y) \cap U \neq \emptyset$ e portanto existe $ty \in Ay \cap U$ com $t \in A$. Por continuidade tome $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $tSt[y,\mathcal{U}] \subset U$. Dessa forma, para todo $z \in St[y,\mathcal{U}]$ vale que $tz \in U \cap Az$, logo $K_A(z) \cap U \neq \emptyset$. Portanto $z \in K_A^-(U)$ e daí $St[y,\mathcal{U}] \subset K_A^-(U)$. Com isso $K_A^-(U)$ é aberto e assim K_A é H-sci em x. □

Pelo item 2. da Proposição 3.7.1 temos que $\rho_{K_A(x_\lambda)}(K_A(x)) \to \mathcal{O}$ para toda rede tal que $x_\lambda \to x$. Além do mais, o próximo resultado é uma consequência imediata da proposição 3.7.3.

Corolário 3.7.1. *As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. *K_A é H-sci em $x \in X$.*

2. *K_A é H-c em $x \in X$.*

Teorema 3.7.1. *A aplicação D_A é H-scs em x se, e somente se, $D_A(x) \cup \left\{ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D_A(x_\lambda) \right\}$ é compacto para toda rede $x_\lambda \to x$.*

Demonstração. A condição necessária segue da Proposição 3.7.2. Por outro lado, suponha que D_A não é H-scs em $x \in X$. Existe então uma rede $x_\lambda \to x$ tal que $\rho_{D_A(x)}(D_A(x_\lambda))$ não converge á $\mathcal{O}$. Em vista disso, considere $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que para cada λ existe $\lambda' \geq \lambda$ tal que $\mathcal{U} \notin \rho_{D_A(x)}(D_A(x_{\lambda'}))$. Depois, tome $y_\lambda \in D_A(x_{\lambda'})$ tal que $\mathcal{U} \notin \rho(y_\lambda, D_A(x))$, ou seja, $y_\lambda \notin St[D_A(x),\mathcal{U}]$. Como $D_A(x) \cup \left\{ \bigcup_{\lambda} D_A(x_\lambda) \right\}$ é compacto, assuma $y_\lambda \to y$ para algum $y \in X$. Como $y_\lambda \in X \setminus St[D_A(x),\mathcal{U}]$ segue que $y \in X \setminus St[D_A(x),\mathcal{U}]$. Afirmamos que isso é uma contradição. Com efeito, dados $\mathcal{V}, \mathcal{W} \in \mathcal{O}$ podemos escolher λ tal que $x_{\lambda'} \in St[x,\mathcal{V}]$ e $y_\lambda \in St[y,\mathcal{W}]$. Logo após, tome $\mathcal{V}' \in \mathcal{O}$ de modo que $St[x_{\lambda'},\mathcal{V}'] \subset St[x,\mathcal{V}]$. Como $y_\lambda \in D_A(x_{\lambda'})$ vale que $St[y,\mathcal{W}] \cap ASt[x_{\lambda'},\mathcal{V}'] \neq \emptyset$ e portanto $St[y,\mathcal{W}] \cap ASt[x,\mathcal{V}] \neq \emptyset$. Isto implica que $y \in D_A(x)$, o que contradiz $y \in X \setminus St[D_A(x),\mathcal{U}]$. Assim D_A é H-scs em x. □

Teorema 3.7.2. *Assuma $\mathcal{F}$ uma base de filtro sobre os subconjuntos conexos de S. Se X é Haudorff localmente compacto então $J_{\mathcal{F}}$ é H-scs.*

Demonstração. Para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, pela compacidade local tome $U \subset X$ aberto tal que $\overline{U}$ é compacto e $J_{\mathcal{F}}(x) \subset U \subset \overline{U} \subset St[J_{\mathcal{F}}(x), \mathcal{U}]$.

Afirmação: Existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ e $A \in \mathcal{F}$ tais que $ASt[x, \mathcal{W}] \subset U$. De fato, dado que ∂U é compacto existem $A_0 \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{O}$ com $\partial U \cap A_0 St[x, \mathcal{U}_0] = \emptyset$. Supondo o contrário, tomamos $t_{(A,\mathcal{U})} x_{(A,\mathcal{U})} \in \partial U \cap ASt[x, \mathcal{U}]$ para cada $A \in \mathcal{F}$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Assim $(t_{(A,\mathcal{U})} x_{(A,\mathcal{U})})_{(A,\mathcal{U}) \in \mathcal{F} \times \mathcal{O}} \subset \partial U$ e pela compacidade podemos considerar $t_{(A,\mathcal{U})} x_{(A,\mathcal{U})} \to y$ para algum $y \in \partial U$. Por fim, como $t_{(A,\mathcal{U})} \to_{\mathcal{F}} \infty$ e $x_{(A,\mathcal{U})} \to x$ concluímos que $y \in J(x, \mathcal{F})$, o que é impossível. Agora, dados $t \in A_0$ e $y \in St[x, \mathcal{U}_0]$ temos duas possibilidades: ou $ty \in U$, e nesse caso $A_0 y \subset U$ pela conexidade de $A_0 y$, ou $ty \in X \setminus \overline{U}$, o que implica dizer que $A_0 y \subset X \setminus \overline{U}$. Consequentemente, as igualdades $S_0 = \{y \in St[x, \mathcal{U}_0] : A_0 y \subset U\} = St[x, \mathcal{U}_0] \cap \mu_t^{-1}(U)$ e $S_1 = \{y \in St[x, \mathcal{U}_0] : A_0 y \subset X \setminus \overline{U}\} = St[x, \mathcal{U}_0] \cap \mu_t^{-1}(X \setminus \overline{U})$ são válidas e assim os conjuntos S_0, S_1 são abertos. Suponha que $x \in S_1$ e em seguida tome $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $St[x, \mathcal{V}] \subset S_1$. Assim $\overline{A_0 S_1} \subset X \setminus U$ e então $J(x, \mathcal{F}) \subset \overline{A_0 St[x, \mathcal{V}]} \subset X \setminus U$, o que contradiz a hipótese. Imediatamente, obtemos $x \notin S_1$, assim segue que $tx \notin X \setminus \overline{U}$. Isso significa que $tx \in U$ e em vista disso $x \in S_0$. Na sequência, considere $\mathcal{W}_0 \in \mathcal{O}$ tal que $St[x, \mathcal{W}_0] \subset S_0$. Isto implica que $A_0 St[x, \mathcal{W}_0] \subset A_0 S_0 \subset U$, logo a afirmação está demonstrada. Por último, dado $x' \in St[x, \mathcal{W}_0]$, seja $\mathcal{W}_0' \in \mathcal{O}$ com $St[x', \mathcal{W}_0'] \subset St[x, \mathcal{W}_0]$. Assim:

$$J(x', \mathcal{F}) \subset \overline{A_0 St[x', \mathcal{W}_0']} \subset \overline{A_0 St[x, \mathcal{W}_0]} \subset \overline{U} \subset St[J(x, \mathcal{F}), \mathcal{U}].$$

Em outras palavras, $\rho_{J_{\mathcal{F}}(x)}(J_{\mathcal{F}}(x')) \prec \mathcal{U}$ se $\rho(x', x) \prec \{\mathcal{W}_0\}$ e dessa forma concluímos que $J_{\mathcal{F}}$ é H-scs em $x \in X$. □

Nas condições do Teorema 3.7.2 vale que $\rho_{J_{\mathcal{F}(x)}}(J_{\mathcal{F}}(x_\lambda)) \to \mathcal{O}$ para toda rede $x_\lambda \to x$. Além disso, tomando em particular $\mathcal{F} = \{A\}$ teremos a seguinte equivalência.

Corolário 3.7.2. *Se X é Hausdorff localmente compacto e $A \subset S$ é não vazio e conexo então D_A é H-scs. Ainda, D_A é H-C se, e somente se, D_A é H-sci.*

A semicontinuidade superior da aplicação K_A garante que o A-prolongamento é trivial.

Proposição 3.7.4. *Se K_A é H-scs então $K_A(x) = D_A(x)$ para todo $x \in X$. A recíproca é válida se X for Hausdorff localmente compacto e A conexo.*

Demonstração. A inclusão $K_A(x) \subset D_A(x)$ é imediata. Suponha então que K_A é H-scs em x e tome $y \in D_A(x)$. Pela Proposição 3.3.11 considere redes $(t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset A$, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset X$ com $x_\lambda \to x$ e $t_\lambda x_\lambda \to y$. Visto que $t_\lambda x_\lambda \in K_A(x_\lambda)$ e $\rho_{K_A(x)}(K_A(x_\lambda)) \to \mathcal{O}$ então $\rho_{K_A(x)}(t_\lambda x_\lambda) \to \mathcal{O}$.

Assim, a Proposição 2.1.4 garante que $y \in K_A(x)$ e portanto $K_A(x) = D_A(x)$. A recíproca segue pelo Corolário 3.7.2. $\square$

Decorre do Corolário 3.7.1 e da Proposição 3.7.4 o seguinte resultado.

Corolário 3.7.3. *Assuma X Hausdorff localmente compacto e $A \subset S$ não vazio e conexo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *K_A é H-C.*

2. *K_A é H-scs.*

3. *K_A=D_A.*

Qualquer uma das três condições acima garante que D_A é H-C.

Prosseguindo, vamos provar que se as órbitas possuem prolongamentos triviais então o limite prolongacional se reduz ao ω-limite.

Teorema 3.7.3. *Se K_A é H-scs para todo $A \in \mathcal{F}$ então $J_{\mathcal{F}} = L_{\mathcal{F}}$. A recíproca é válida se X é Hausdorff localmente compacto, localmente conexo e além disso $\mathcal{F}$ é uma base de filtro co-compacta de subconjuntos conexos de S.*

Demonstração. Suponha que K_A é H-scs para todo $A \in \mathcal{F}$. Pela Proposição 3.7.4 temos que:

$$J(x, \mathcal{F}) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} D_A(x) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} K_A(x) = \omega(x, \mathcal{F}).$$

De modo respectivo, suponha X localmente conexo, $\mathcal{F}$ uma base de filtros co-compacta de subconjuntos conexos de S e $J_{\mathcal{F}} = L_{\mathcal{F}}$. Depois, tome $A \in \mathcal{F}$ e $x \in X$. Dada uma vizinhança U de $K_A(x)$, considere V aberto tal que $\overline{V}$ é compacto e $K_A(x) \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Afirmamos a existência de $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $ASt[x,\mathcal{U}] \subset V$. Para isto, suponha por contradição que $ASt[x,\mathcal{U}] \nsubseteq V$ para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Sendo assim, para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tome uma vizinhança conexa $N_{\mathcal{U}}$ de x onde $N_{\mathcal{U}} \subset St[x,\mathcal{U}]$. Desse modo $AN_{\mathcal{U}} \nsubseteq V$, visto que existe uma estrela centrada em x dentro de $N_{\mathcal{U}}$. Como $Ax \subset V$ e $AN_{\mathcal{U}}$ é conexo segue então que $AN_{\mathcal{U}} \cap \partial V \neq \emptyset$. Com isso, podemos considerar $t_{\mathcal{U}} x_{\mathcal{U}} \in AN_{\mathcal{U}} \cap \partial V$ onde $t_{\mathcal{U}} \in A$ e $x_{\mathcal{U}} \in N_{\mathcal{U}}$. Pela compacidade de ∂V admitimos que $t_{\mathcal{U}} x_{\mathcal{U}} \to y$ para algum $y \in \partial V$. Agora, se $t_{\mathcal{U}} \to_{\mathcal{F}} \infty$ então $y \in J_{\mathcal{F}}(x) = L_{\mathcal{F}}(x) \subset K_A(x)$, o que contradiz $K_A(x) \subset int(V)$. Portanto $(t_{\mathcal{U}})$ não $\mathcal{F}$-diverge. Uma vez que $\mathcal{F}$ é co-compacta, podemos assumir que $t_{\mathcal{U}} \to t$ com $t \in \overline{A}$, o que implica $t_{\mathcal{U}} x_{\mathcal{U}} \to tx$. Portanto $y = tx \in \overline{Ax} = K_A(x)$, o que é novamente uma contradição. Sendo assim, a afirmação está provada. Finalmente, tome $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $ASt[x,\mathcal{U}] \subset V$. Em vista disso, para cada $z \in St[x,\mathcal{U}]$ temos que $K_A(z) \subset \overline{ASt[x,\mathcal{U}]} \subset \overline{V} \subset U$. Concluímos assim que K_A é H-scs em x. $\square$

Resulta dos Teoremas 3.7.2 e 3.7.3 o corolário abaixo.

Corolário 3.7.4. *Assuma X Hausdorff localmente compacto, localmente conexo e além disso $\mathcal{F}$ uma base de filtro formada por subconjuntos conexos de S. Se K_A é H-scs para todo $A \in \mathcal{F}$ então $L_{\mathcal{F}}$ é H-scs.*

Também temos a seguinte relação entre a função K_A e o conjunto ω-limite.

Corolário 3.7.5. *Se K_A é H-scs para todo $A \in \mathcal{F}$ então $\omega(K,\mathcal{F}) = \bigcup_{x\in K} L_{\mathcal{F}}(x)$ para todo compacto $K \subset X$. A recíproca é válida se X é Hausdorff localmente compacto, localmente conexo e além disso $\mathcal{F}$ é uma base de filtro co-compacta de subconjuntos conexos de S.*

Demonstração. Suponha K_A H-scs para todo $A \in \mathcal{F}$ e $K \subset X$ um subconjunto compacto. Pelos Teorema 3.7.3 e Lema 3.3.2 segue que

$$\bigcup_{x\in K} L_{\mathcal{F}}(x) \subset \omega(K,\mathcal{F}) \subset \bigcup_{x\in K} J_{\mathcal{F}}(x) = \bigcup_{x\in K} L_{\mathcal{F}}(x).$$

Como $\{x\}$ é compacto, a recíproca é válida pela segunda parte do Teorema 3.7.3. $\square$

As noções de estabilidade a seguir foram introduzidas em [12].

Definição 3.7.2. *Um subconjunto Y é dito estável se para toda vizinhança U de Y e $y \in Y$ existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $S\mathrm{St}\,[y,\mathcal{U}] \subset U$. Além disso, Y é dito uniformemente estável se para toda vizinhança U de Y existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $S\mathrm{St}\,[Y,\mathcal{U}] \subset U$.*

Definição 3.7.3. *Seja $\mathcal{F}$ uma base de filtro de subconjuntos de S. Um subconjunto Y é dito $\mathcal{F}$-eventualmente estável se para toda vizinhança U de Y existe uma vizinhança V de Y tal que para cada $x \in V$ tem-se $Ax \subset U$ para algum $A \in \mathcal{F}$.*

Observação 3.7.2. *Todo conjunto uniformemente estável é estável e $\mathcal{F}$-eventualmente estável. Além do mais, qualquer conjunto compacto estável é uniformemente estável. Por fim, se Y é compacto então Y é estável se, e somente se, para toda vizinhança U de Y existe uma vizinhança V de Y tal que $SV \subset U$.*

Teorema 3.7.4. *Se K_S é H-scs então $K_S\,(x)$ é $\mathcal{F}$-estável para todo $x \in X$. A recíproca é válida se $x \in K_S\,(x)$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Suponha que K_S é H-scs e tome $x \in X$. Imediatamente, considere $U \subset X$ aberto tal que $K_S(x) \subset U$. Se $y \in K_S(x)$ então $K_S(y) \subset K_S(x) \subset U$. Sendo assim, existe vizinhança V de y tal que $K_S(z) \subset U$ para todo $z \in V$. Segue que $SV \subset U$ e portanto $K_S(x)$ é $\mathcal{F}$-estável. Por outro lado, supondo que $K_S(x)$ é $\mathcal{F}$-estável e $x \in K_S(x)$ para todo $x \in X$, tome $U \subset X$ uma vizinhança aberta de $K_S(x)$. Como $K_S(x)$ é compacto e estável existem vizinhanças V, W de $K_S(x)$ tais que $SV \subset W \subset \overline{W} \subset U$. Com isso, vale que $K_S(y) \subset \overline{SV} \subset \overline{W} \subset U$ para todo $y \in V$. Uma vez que V é vizinhança de x resulta que K_S é H-scs em x. □

Como combinação do Corolário 3.7.3 e do Teorema 3.7.4 garantimos o próximo resultado.

Corolário 3.7.6. *Assuma X Hausdorff localmente compacto, S conexo e $x \in K_S(x)$ para todo $x \in X$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *K_S é H-C.*

2. *K_S é H-scs*

3. *$K_S = D_S$.*

4. *$K_S(x)$ é $\mathcal{F}$-estável para todo $x \in X$.*

Qualquer uma das quatro condições implica que D_S é H-C.

O lema a seguir desempenha um importante papel no desenrolar da seção. Em resumo, este resultado será utilizado na prova do Lema 3.7.2 e da Proposição 3.7.5.

Lema 3.7.1. *Sejam X Hausdorff localmente compacto e $\mathcal{F}$ uma base de filtro de subconjuntos conexos de S. Para toda vizinhança U de $L_{\mathcal{F}}(x)$ existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $Ax \subset U$.*

Demonstração. Pela compacidade local de X tome W uma vizinhança de $L_{\mathcal{F}}(x)$ com $W \subset U$ e $\overline{W}$ compacto. Vamos mostrar que $Ax \subset W$ para algum $A \in \mathcal{F}$. Caso contrário, se $Ax \not\subset W$ para todo $A \in \mathcal{F}$, dado que W é uma vizinhança de $L_{\mathcal{F}}(x)$ temos que $Ax \cap W \neq \emptyset$ para cada $A \in \mathcal{F}$. Além do mais, a conexidade de Ax implica $Ax \cap \partial W \neq \emptyset$. Com isto, para cada $A \in \mathcal{F}$ podemos considerar $t_A x \in Ax \cap \partial W$. Como ∂W é compacto, $(t_A x)_{A \in \mathcal{F}}$ possui sub-rede convergente, digamos $t_A x \to y$. Por fim, em razão de $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ segue que $y \in L_{\mathcal{F}}(x)$. Isto é impossível. Portanto $Ax \subset W$ para algum $A \in \mathcal{F}$. □

Agora vamos relacionar continuidade com $\mathcal{F}$-estabilidade eventual da aplicacação $L_{\mathcal{F}}$.

Proposição 3.7.5. *Assuma X Hausdorff localmente compacto e $\mathcal{F}$ uma base de filtro de subconjuntos conexos de S satisfazendo as hipóteses* H_1 *e* H_3. *Nessas condições, $L_{\mathcal{F}}$ é H-scs em $L_{\mathcal{F}}(x)$ se, e somente se, $L_{\mathcal{F}}(x)$ é minimal e $\mathcal{F}$-eventualmente estável.*

Demonstração. Suponha que $L_{\mathcal{F}}$ seja H-scs em $L_{\mathcal{F}}(x)$. Dado $y \in L_{\mathcal{F}}(x)$, temos que $L_{\mathcal{F}}(y) \subset \overline{Sy} \subset L_{\mathcal{F}}(x)$ visto que $L_{\mathcal{F}}(x)$ é progressivamente invariante pela hipótese H_1. Para provar que $L_{\mathcal{F}}(x)$ é minimal suponha por contradição que $\overline{Sy} \subsetneq L_{\mathcal{F}}(x)$ e tome $z \in L_{\mathcal{F}}(x) \setminus \overline{Sy}$. Com isso existe vizinhança U de $\overline{Sy}$ tal que $z \notin U$. Como $L_{\mathcal{F}}$ é H-scs em y existe V contendo y tal que $L_{\mathcal{F}}(v) \subset U$ para todo $v \in V$. Por outro lado, uma vez que $y \in L_{\mathcal{F}}(x)$, existe $s \in S$ tal que $sx \in V$ e assim $L_{\mathcal{F}}(sx) \subset U$. Pela hipótese H_3 segue que $z \in L_{\mathcal{F}}(x) \subset L_{\mathcal{F}}(sx) \subset U$ o que é uma contradição. Portanto $L_{\mathcal{F}}(x) = \overline{Sy}$ e desse modo $L_{\mathcal{F}}(x)$ é minimal pela Proposição 3.1.2. Agora vamos provar que $L_{\mathcal{F}}(x)$ é $\mathcal{F}$-eventualmente estável. Com esse intuito, seja U uma vizinhança aberta de $L_{\mathcal{F}}(x)$. Para cada $y \in L_{\mathcal{F}}(x)$ segue que $L_{\mathcal{F}}(y) \subset L_{\mathcal{F}}(x) \subset U$ e como $L_{\mathcal{F}}$ é H-scs em y existe ainda V_y aberto contendo y tal que $L_{\mathcal{F}}(z) \subset U$ para todo $z \in V_y$. Então $V = \bigcup_{y \in L_{\mathcal{F}}(x)} V_y$ é uma vizinhança aberta de $L_{\mathcal{F}}(x)$. Mas repare que se $z \in V$ então $L_{\mathcal{F}}(z) \subset U$ e portanto pelo Lema 3.7.1 existe $A \in \mathcal{F}$ de modo que $Az \subset U$. Por isso, segue que $L_{\mathcal{F}}(x)$ é $\mathcal{F}$-eventualmente estável. De modo recíproco, tome $y \in L_{\mathcal{F}}(x)$ e U uma vizinhança de $L_{\mathcal{F}}(y)$. Como $L_{\mathcal{F}}(x)$ é minimal temos que $L_{\mathcal{F}}(x) = L_{\mathcal{F}}(y)$. Na sequência, seja V aberto onde $L_{\mathcal{F}}(y) \subset V$ e $\overline{V} \subset U$. Uma vez que $L_{\mathcal{F}}(x)$ é $\mathcal{F}$-eventualmente estável, existe um aberto W com $L_{\mathcal{F}}(x) \subset W$ de modo que para todo $w \in W$ vale que $Aw \subset V$ para algum $A \in \mathcal{F}$. Em vista disso, vale que $L_{\mathcal{F}}(w) \subset \overline{Aw} \subset \overline{V} \subset U$ e como W é uma vizinhança de y concluímos que $L_{\mathcal{F}}$ é H-scs em y. □

Lema 3.7.2. *Assuma X Hausdorff localmente compacto e $\mathcal{F}$ uma base de filtro de subconjuntos conexos de S satisfazendo as hipóteses* H_1 *e* H_3. *Então $L_{\mathcal{F}}$ é H-scs em $L_{\mathcal{F}}(x)$ se, e somente se, $L_{\mathcal{F}}$ é H-scs em $\mathfrak{A}(L_{\mathcal{F}}(x), \mathcal{F})$.*

Demonstração. Suponha que $L_{\mathcal{F}}$ é H-scs em $L_{\mathcal{F}}(x)$. Fixe $y \in \mathfrak{A}(L_{\mathcal{F}}(x), \mathcal{F})$ e U vizinhança de $L_{\mathcal{F}}(y)$. Em seguida tome V um aberto compacto contendo $L_{\mathcal{F}}(y)$ com $V \subset U$. Pela Proposição 3.7.5 temos $L_{\mathcal{F}}(x)$ minimal e $\mathcal{F}$-eventualmente estável. Como $L_{\mathcal{F}}(y) \subset L_{\mathcal{F}}(x)$ então $L_{\mathcal{F}}(y) = L_{\mathcal{F}}(x)$. Seja W vizinhança de $L_{\mathcal{F}}(y)$ tal que para todo $w \in W$ existe $A \in \mathcal{F}$ com $Aw \subset V$. Pelo Lema 3.7.1 considere $B \in \mathcal{F}$ para o qual $By \subset W$. Dando sequência, fixe $s \in B$. Como $sy \in W$, existe aberto V_y de y tal que $sV_y \subset W$. Para um dado $z \in V_y$ existe ainda $A \in \mathcal{F}$ com $Asz \subset V$. Portanto $L_{\mathcal{F}}(z) \subset L_{\mathcal{F}}(sz) \subset \overline{Asz} \subset V \subset U$. Então $L_{\mathcal{F}}$ é H-scs em y e assim $L_{\mathcal{F}}$ é H-scs em $\mathfrak{A}(L_{\mathcal{F}}(x), \mathcal{F})$. A recíproca é óbvia pois $L_{\mathcal{F}}(x) \subset \mathfrak{A}(L_{\mathcal{F}}(x), \mathcal{F})$. □

Lema 3.7.3. *Assuma que $\mathcal{F}$ satisfaz as hipóteses* H_1 *e* H_3*. Se $L_{\mathcal{F}}(y)$ é $\mathcal{F}$-eventualmente estável para todo $y \in L_{\mathcal{F}}(x)$ então $L_{\mathcal{F}}(x)$ é minimal.*

Demonstração. Suponha que $L_{\mathcal{F}}(x)$ não é minimal. Uma vez que $L_{\mathcal{F}}(x)$ é compacto e progressivamente invariante, pelo Lema 3.1.1 existe um conjunto minimal $M \subsetneq L_{\mathcal{F}}(x)$. Sendo assim, tome $y \in L_{\mathcal{F}}(x) \setminus M$ e em seguida considere U vizinhança aberta de M tal que $y \notin \overline{U}$. Dado $z \in M$, temos que $L_{\mathcal{F}}(z) = M$ e como $L_{\mathcal{F}}(z)$ é $\mathcal{F}$-eventualmente estável seja aberto V contendo M de modo que para todo $v \in V$ existe também $A \in \mathcal{F}$ tal que $Av \subset U$. Por fim, como $M \subset L_{\mathcal{F}}(x) \cap V$, podemos encontrar $s \in S$ tal que $sx \in V$ e portanto existe ainda $A \in \mathcal{F}$ com $Asx \subset U$. Com isso, segue que $y \in L_{\mathcal{F}}(x) \subset L_{\mathcal{F}}(sx) \subset \overline{Asx} \subset \overline{U}$, o que é impossível. □

Proposição 3.7.6. *Assuma X Hausdorff localmente compacto e $\mathcal{F}$ uma base de filtro de subconjuntos conexos de S satisfazendo as hipóteses* H_1 *e* H_3*. Nessas condições, $L_{\mathcal{F}}$ é H-scs se, e somente se, $L_{\mathcal{F}}(x)$ é $\mathcal{F}$-eventualmente estável para todo $x \in X$.*

Demonstração. Suponha que $L_{\mathcal{F}}(x)$ é $\mathcal{F}$-eventualmente estável para todo $x \in X$. Pelo Lema 3.7.3 temos $L_{\mathcal{F}}(x)$ minimal e pela Proposição 3.7.5 temos que $L_{\mathcal{F}}$ é H-scs em $L_{\mathcal{F}}(x)$. Além disso, o Lema 3.7.2 implica que $L_{\mathcal{F}}$ é H-scs em $\mathfrak{A}(L_{\mathcal{F}}(x), \mathcal{F})$. Por fim, o Lema 3.7.1 garante que $x \in \mathfrak{A}(L_{\mathcal{F}}(x), \mathcal{F})$ e daí concluímos que $L_{\mathcal{F}}$ é H-scs em x. Portanto $L_{\mathcal{F}}$ é H-scs. A recíproca decorre da Proposição 3.7.5. □

Proposição 3.7.7. *Assuma X Hausdorff localmente compacto e $\mathcal{F}$ uma base de filtro de subconjuntos conexos de S satisfazendo as hipóteses* H_1 *e* H_3*. Com isso, se $X = \mathfrak{A}(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ então $L_{\mathcal{F}}$ é H-scs se, e somente se, é H-scs em $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Uma vez que $X = \mathfrak{A}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = \{x \in X : L_{\mathcal{F}}(x) \subset \mathcal{A}\}$ a prova segue pelo Lema 3.7.2. □

Nos próximos resultados vamos discutir a Hausdorff continuidade da função $L_{\mathcal{F}}$. Antes, vejamos um lema técnico.

Lema 3.7.4. *Assuma X Hausdorff localmente compacto e $\mathcal{F}$ uma base de filtro de subconjuntos conexos de S satisfazendo as hipóteses* H_1 *e* H_2*. Se $L_{\mathcal{F}}$ é H-sci em $L_{\mathcal{F}}(x)$ então para cada $y \in L_{\mathcal{F}}(x)$ e U vizinhança de $L_{\mathcal{F}}(y)$ existe aberto V com $L_{\mathcal{F}}(y) \subset V$ tal que $Av \cap U \neq \emptyset$ para todo $v \in V$ e $A \in \mathcal{F}$. A recíproca é válida se $L_{\mathcal{F}}(y)$ é minimal para todo $y \in L_{\mathcal{F}}(x)$.*

Demonstração. Suponha que $L_{\mathcal{F}}$ é H-sci em $L_{\mathcal{F}}(x)$ e tome $y \in L_{\mathcal{F}}(x)$. Dada uma vizinhança U de $L_{\mathcal{F}}(y)$ e $z \in L_{\mathcal{F}}(y)$ temos que $L_{\mathcal{F}}(z) \subset L_{\mathcal{F}}(y) \subset U$. Como $L_{\mathcal{F}}$ é H-sci em z, existe um aberto V_z de z tal que $U \cap L_{\mathcal{F}}(v) \neq \emptyset$ para todo $v \in V_z$. Seja $V = \bigcup_{z \in L_{\mathcal{F}}(y)} V_z$. Com isso, V é um aberto de $L_{\mathcal{F}}(y)$ e $U \cap L_{\mathcal{F}}(v) \neq \emptyset$ para todo $v \in V$. Isto implica que $U \cap Av \neq \emptyset$ para todo $v \in V$ e $A \in \mathcal{F}$. Em contrapartida, assuma $L_{\mathcal{F}}(y)$ minimal para todo $y \in L_{\mathcal{F}}(x)$. Na sequência, seja $y \in L_{\mathcal{F}}(x)$ e U aberto com $U \cap L_{\mathcal{F}}(y) \neq \emptyset$. Para $z \in L_{\mathcal{F}}(y)$, temos que $L_{\mathcal{F}}(y) = \overline{Sz} = K_S(z)$. Desde que K_S é H-sci em z, existe aberto V_z contendo z tal que $U \cap K_S(v) \neq \emptyset$ para todo $v \in V_z$. Tome uma vizinhança W_z de z para a qual $\overline{W_z}$ é compacto e $\overline{W_z} \subset V_z$. Assim temos uma cobertura aberta $L_{\mathcal{F}}(y) \subset \bigcup_{z \in L_{\mathcal{F}}(y)} W_z$. Pela compacidade de $L_{\mathcal{F}}(y)$, podemos admitir uma subcobertura finita digamos $L_{\mathcal{F}}(y) \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{z_i}$. Seja $W = \bigcup_{i=1}^{n} W_{z_i}$. Por outro lado, existe também uma vizinhança V de $L_{\mathcal{F}}(y)$ tal que $Av \cap W \neq \emptyset$ para todo $v \in V$ and $A \in \mathcal{F}$. Pelo Lema 3.7.1, seja $A_0 \in \mathcal{F}$ com $A_0 y \subset V$. Imediatamente, fixado $s \in A_0$, tome N aberto contendo y com $sN \subset V$. Se $n \in N$ então $Asn \cap W \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{F}$. Sendo assim, para cada $A \in \mathcal{F}$, tome $t_A \in A$ tal que $t_A sn \in W$. Uma vez que $\overline{W}$ é compacto, asssumimos que $t_A sn \to w$ onde $w \in \overline{W}$. Como $t_A \to_{\mathcal{F}} \infty$ segue que $w \in L_{\mathcal{F}}(sn)$. Além disso, uma vez que $w \in \overline{W_{z_i}} \subset V_{z_i}$ para algum z_i então $U \cap K_S(w) \neq \emptyset$ e assim $\emptyset \neq U \cap \overline{Sw} \subset U \cap L_{\mathcal{F}}(sn)$. Por fim, pela hipótese H_2 segue que $L_{\mathcal{F}}(sn) \subset L_{\mathcal{F}}(n)$ e com isso $U \cap L_{\mathcal{F}}(n) \neq \emptyset$ toda vez que $n \in N$. Portanto $L_{\mathcal{F}}$ é H-sci em y. □

Combinando as hipóteses da Proposição 3.7.5 e do Lema 3.7.4 temos o resultado a seguir.

Proposição 3.7.8. *Assuma X Hausdorff localmente compacto e $\mathcal{F}$ uma base de filtro de subconjuntos conexos de S satisfazendo as hipóteses* H_1, H_2 *e* H_3. *Então $L_{\mathcal{F}}$ é H-C em $L_{\mathcal{F}}(x)$ se, e somente se, $L_{\mathcal{F}}(x)$ é $\mathcal{F}$-eventualmente estável e minimal.*

Demonstração. Suponha que $L_{\mathcal{F}}(x)$ é $\mathcal{F}$-eventualmente estável e minimal. Pela Proposição 3.7.5 vale que $L_{\mathcal{F}}$ é H-scs em $L_{\mathcal{F}}(x)$. Assim, só nos resta mostrar que $L_{\mathcal{F}}$ é H-sci em $L_{\mathcal{F}}(x)$. De fato, dado $y \in L_{\mathcal{F}}(x)$ temos que $L_{\mathcal{F}}(y) \subset L_{\mathcal{F}}(x)$ e portanto $L_{\mathcal{F}}$ é H-scs em $L_{\mathcal{F}}(y)$. Com isso, a Proposição 3.7.5 garante que $L_{\mathcal{F}}(y)$ é minimal e $\mathcal{F}$-eventualmente estável. Agora, considere U uma vizinhança aberta de $L_{\mathcal{F}}(y)$. Sendo assim, existe V aberto contendo $L_{\mathcal{F}}(y)$ tal que para cada $v \in V$ existe $A_0 \in \mathcal{F}$ para o qual $A_0 v \subset U$. Finalmente, para cada $A \in \mathcal{F}$, vale que $A \cap A_0 \neq \emptyset$ e portanto $Av \cap U \neq \emptyset$. Pelo Lema 3.7.4 segue que $L_{\mathcal{F}}$ é H-sci em $L_{\mathcal{F}}(x)$. A recíproca decorre pela Proposição 3.7.5. □

Segue um importante resultado sobre continuidade da função omega limite.

Teorema 3.7.5. *Assuma que X é Hausdorff localmente compacto e $\mathcal{F}$ é uma base de filtro de subconjuntos conexos de S satisfazendo as hipóteses* H_1, H_2 *e* H_3. *Então $L_{\mathcal{F}}$ é H-C contínua* *se, e somente se, $L_{\mathcal{F}}(x)$ é $\mathcal{F}$-eventualmente estável para todo $x \in X$.*

Demonstração. Suponha que $L_{\mathcal{F}}(x)$ é $\mathcal{F}$-eventualmente estável para todo $x \in X$. Pela Proposição 3.7.6 vale que $L_{\mathcal{F}}$ é H-scs. Então só resta mostrar que $L_{\mathcal{F}}$ é H-sci. Para isso, fixe $x \in X$ e tome U um aberto tal que $U \cap L_{\mathcal{F}}(x) \neq \emptyset$. Pelo Lema 3.7.3 temos $L_{\mathcal{F}}(x)$ minimal e pela Proposição 3.7.8 segue que $L_{\mathcal{F}}$ é H-sci em $L_{\mathcal{F}}(x)$. Além disso, para cada $y \in L_{\mathcal{F}}(x)$ temos que $L_{\mathcal{F}}(y) = L_{\mathcal{F}}(x)$. Portanto $U \cap L_{\mathcal{F}}(y) \neq \emptyset$. Com isso, existe aberto V_y contendo y tal que $U \cap L_{\mathcal{F}}(v) \neq \emptyset$ para todo $v \in V_y$. Considere então $V = \bigcup_{y \in L_{\mathcal{F}}(x)} V_y$. Nessas condições, V é uma vizinhança de $L_{\mathcal{F}}(x)$, logo pelo Lema 3.7.1 temos $Ax \subset V$ para algum $A \in \mathcal{F}$. Seja $s \in A$. Como $sx \in V$, existe vizinhança W de x tal que $sW \subset V$. Logo após, dado $w \in W$ temos que $sw \in V$ e assim $U \cap L_{\mathcal{F}}(sw) \neq \emptyset$. Por fim, uma vez que $L_{\mathcal{F}}(sw) \subset L_{\mathcal{F}}(w)$ segue que $U \cap L_{\mathcal{F}}(w) \neq \emptyset$. Portanto $L_{\mathcal{F}}$ é H-sci em x. A recíproca é válida pela Proposição 3.7.8. $\square$

A Proposição 3.7.8 e o Teorema 3.7.5 implicam no seguinte resultado.

Teorema 3.7.6. *Assuma que X é Hausdorff localmente compacto e $\mathcal{F}$ é uma base de filtro de subconjuntos conexos de S satisfazendo as hipóteses* H_1, H_2 *e* H_3. *Se $X = \mathfrak{A}(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ então $L_{\mathcal{F}}$ é H-C se, e somente se, é H-C em $\mathcal{A}$.*

Um subconjunto $Y \subset X$ é dito $\mathcal{F}$-topologicamente transitivo se $Y = \omega(y, \mathcal{F})$ para algum $y \in Y$. Uma consequência imediata do Teorema 3.7.6 pode ser vista no corolário abaixo.

Corolário 3.7.7. *Assuma X Hausdorff localmente compacto e $\mathcal{F}$ uma base de filtro de subconjuntos conexos de S satisfazendo as hipóteses* H_1, H_2 *e* H_3. *Suponha ainda que $X = \mathfrak{A}(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ onde $\mathcal{A}$ é estável. Se $\mathcal{A}$ é $\mathcal{F}$-topologicamente transitivo então $L_{\mathcal{F}}$ é H-C.*

Seja G um grupo topológico e $\mathcal{V}$ uma base de vizinhanças simétricas da identidade e de G. Para cada $V \in \mathcal{V}$ defina a cobertura aberta de G dada por

$$\mathcal{U}_V = \{Vg : g \in G\}.$$

Seja $\mathcal{O}$ a família de todas as coberturas abertas $\mathcal{U}_V$, $V \in \mathcal{V}$. Esta família é admissível (veja 9, Seção 4) e ainda

$$\mathrm{St}\,[g, \mathcal{U}_V] = V^2 g, \qquad \text{para todo } g \in G.$$

Observação 3.7.3. *De modo geral um grupo topológico não é metrizável.*

Seja $S \subset G$ um subgrupo fechado e G/S o conjunto de todas classes laterais gS. Então G/S é um subconjunto do hiperespaço $\mathcal{H}(G)$. Agora considere a ação à esquerda de S em

G. Defina $K_S(g) = gS$ para todo $g \in G$. Com isso $K_S : G \to \mathcal{H}(G)$ possui valores em G/S e corresponde à projeção $\pi : G \to G/S$. Assuma G/S munido da topologia quociente. Nesse caso $\pi : G \to G/S$ é uma aplicação aberta contínua. O próximo teorema mostra que a topologia quociente e a topologia uniforme induzida de $\mathcal{H}(G)$ são equivalentes.

Teorema 3.7.7. *A topologia quociente G/S coincide com a topologia uniforme induzida de $\mathcal{H}(G)$ e além disso a aplicação quociente $\pi : G \to G/S$ é uniformemente contínua.*

Demonstração. Observe que é suficiente comparar os abertos de G/S e os conjuntos $\mathrm{B}_H(gS,\mathcal{U}_V) \cap G/S$. Afirmamos que $\pi(\mathrm{St}[g,\mathcal{U}_V]) = \mathrm{B}_H(gS,\mathcal{U}_V) \cap G/S$ para todo $g \in G$ e $\mathcal{U}_V \in \mathcal{O}$. De início, considerando gS como um subconjunto de G temos $\mathrm{St}[gS,\mathcal{U}_V] = V^2 gS$. Depois, note que $g_1S \in \pi(\mathrm{St}[g,\mathcal{U}_V]) = \pi(V^2 g)$ se, e somente se, $g_1 S \subset V^2 gS$. Pela simetria de V temos $g_1S \subset V^2 gS$ se, e somente se, $gS \subset V^2 g_1 S$. Então $g_1 S \in \pi(\mathrm{St}[g,\mathcal{U}_V])$ se, e somente se, $g_1 S \in \mathrm{B}_H(gS,\mathcal{U}_V)$. Portanto $\pi(\mathrm{St}[g,\mathcal{U}_V]) = \mathrm{B}_H(gS,\mathcal{U}_V) \cap G/S$. Isto implica que π é uniformemente contínua com respeito a $\mathcal{O}$ e à uniformidade por coberturas induzida de $\mathcal{H}(G)$. Como π é uma aplicação aberta então $\mathrm{B}_H(gS,\mathcal{U}_V) \cap G/S$ é aberto na topologia quociente em G/S para todo $g \in G$ e $\mathcal{U}_V \in \mathcal{O}$. Por outro lado, seja $U \subset G/S$ um conjunto aberto. Então $\pi^{-1}(U)$ é aberto em G. Tome $g \in \pi^{-1}(U)$ e $\mathcal{U}_V$ tal que $\mathrm{St}[g,\mathcal{U}_V] \subset \pi^{-1}(U)$. Portanto $\mathrm{B}_H(gS,\mathcal{U}_V) \cap G/S = \pi(\mathrm{St}[g,\mathcal{U}_V]) \subset U$. □

Assim a função $K_S : G \to \mathcal{H}(G)$ é H-C. Isto implica que $\rho_H(g_\lambda S, gS) \to \mathcal{O}$ toda vez que $g_\lambda \to g$. Além do mais, se S é compacto cada gS é estável pelo Teorema 3.7.4.

Semigrupo de transformações no espaço de funções

Exemplo 3.7.1. *Considere a ação $\mu : \mathbb{N} \times E^E \to E^E$ dada por $\mu(n,f) = f^n$, $K \subset E$ compacto e $X \subset E^E$ o subespaço das contrações de E com ponto fixo em K e mesma constante de Lipschtiz $L < 1$. Pelo exemplo 3.6.2 temos X invariante e $i(K) \subset X$ compacto, fechado e invariante em X. Além disso, considerando a restrição $\mu : \mathbb{N} \times X \to X$ vimos que $J_{\mathcal{F}}(X) = i(K)$ e portanto $i(K)$ é o $\mathcal{F}$-atrator global (assintóticamente estável) para $(\mathbb{N}, X)$. Depois, note que $L_{\mathcal{F}}(f) = \{i(x_f)\}$ onde x_f denota o ponto fixo de f. Em particular, $L_{\mathcal{F}}(i(x)) = \{i(x)\}$ para todo $x \in K$ e portanto $L_{\mathcal{F}}$ é H-C em $i(K)$. Infelizmente não podemos aplicar o Teorema 3.7.6 para concluir que $L_{\mathcal{F}}$ é H-C em X pois A_n é desconexo para todo $n \in \mathbb{N}$. Então precisamos dar uma prova direta. Primeiro, note que a semicontinuidade superior e a semicontinuidade inferior são equivalentes desde que cada conjunto limite consista de um único ponto. Sendo assim, seja $f \in X$ e $\mathcal{U}_\alpha^\epsilon \in \mathcal{O}_\mathrm{p}$ com $\alpha = \{x_1, ..., x_k\}$ e $\epsilon = \{\mathcal{U}_{\varepsilon_1}, ..., \mathcal{U}_{\varepsilon_k}\}$. Depois, defina*

$\delta = \dfrac{\varepsilon(1-L)}{2}$ *onde* $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k\}$ *e tome* $g \in \mathrm{St}\left[f, \mathcal{U}_{\{x_f\}}^{\{\delta\}}\right]$. *Então* $g, f \in \prod_{x\in E} U_x$ *com* $U_{x_f} = \mathrm{B}(a,\delta) \in \mathcal{U}_\delta$ *e* $U_x = E$ *caso contrário. Desse modo*

$$\begin{aligned} \|x_g - x_f\| &\leq \|g(x_g) - g(x_f)\| + \|g(x_f) - f(x_f)\| \\ &< L\|x_g - x_f\| + 2\delta \end{aligned}$$

e assim $\|x_g - x_f\| < \dfrac{2\delta}{1-L} = \varepsilon$. *Isto significa que*

$$\|i(x_g)(x_i) - x_f\| = \|x_g - x_f\| < \varepsilon \leq \varepsilon_i$$

para todo $x_i \in \alpha$. *Desse modo* $i(x_g)(x_i) \in \mathrm{B}(x_f, \varepsilon_i)$ *para todo* $x_i \in \alpha$ *e daí* $i(x_g) \in \mathrm{St}[i(x_f), \mathcal{U}_\alpha^\epsilon]$ *para cada* $g \in \mathrm{St}\left[f, \mathcal{U}_{\{x_f\}}^{\{\delta\}}\right]$. *Portanto* $L_\mathcal{F}$ *é H-C em* f.

Sistemas dinâmicos *multi-time*

Um sistema dinâmico *n-time* é a ação de um cone convexo $S \subset \mathbb{R}^n$ em um espaço topológico X. Dado um vetor não nulo $u \in S$, considere a família de translações

$$\mathcal{F} = \{S + tu : t \geq 0\}.$$

Então $\mathcal{F}$ é uma base de filtro de subconjuntos conexos de S satisfazendo as hipóteses H_1, H_2 e H_3. Aqui, note que o comportamento limite com respeito à $\mathcal{F}$ é na verdade o comportamento na direção de u.

Exemplo 3.7.2. *Seja* $(S, \mathbb{R}^2)$ *o sistema dinâmico* 2*-time onde* $S = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : s, t \geq 0\}$ *e* $(s,t)(x,y) = (b^s x, b^t y)$ *com* b *um número real fixo no intervalo* $(0,1)$. *Considere a base de filtro* $\mathcal{F} = \{S + te_1 : t \geq 0\}$ *onde o vetor* e_1 *determina a direção do eixo* $0x$. *Neste caso,* $(s_\lambda, t_\lambda) \to_\mathcal{F} \infty$ *implica* $s_\lambda \to +\infty$. *Além disso, para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *temos* $L_\mathcal{F}(x,y) = \{(0,z) : 0 \leq z \leq by\}$. *Então o eixo* $0y$ *é o* $\mathcal{F}$*-atrator global de* $(S, \mathbb{R}^2)$. *Pode ser facilmente verificado que* $L_\mathcal{F}(x,y)$ *é estável e portanto* $\mathcal{F}$*-eventualmente estável. Por fim, pelo Teorema 3.7.5 segue que* $L_\mathcal{F}$ *é H-C.*

Sistemas de controle

Considere um sistema de controle $\dot{x} = X(x, u(t))$ em uma C^∞-variedade riemanniana conexa M onde $U \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{U}_{pc} = \{u : \mathbb{R} \to U : u \text{ constante por partes }\}$. Admita que para cada $u \in \mathcal{U}_{pc}$ e $x \in M$, o sistema possua única solução $\varphi(t,x,u)$, $t \in \mathbb{R}$ com $\varphi(0,x,u) = x$. Além disso, suponha os campos de vetores $X(\cdot, u)$, $u \in U$, completos. Em seguida, seja $F = \{X(\cdot, u) : \ u \in U\}$. O semigrupo de S é definido como

$$S = \left\{ \mathrm{e}^{t_n Y_n} \mathrm{e}^{t_{n-1} Y_{n-1}} ... \mathrm{e}^{t_0 Y_0} : Y_j \in F, t_j \geq 0, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

A família F e o semigrupo S determinam as trajetórias do sistema de controle no seguinte sentido $Sx = \{\varphi(t, x, u) : t \geq 0, u \in \mathcal{U}_{pc}\}$ para todo $x \in M$.
Depois, para $t > 0$ defina o conjunto

$$S_{\geq t} = \left\{ \mathrm{e}^{t_n Y_n} \mathrm{e}^{t_{n-1} Y_{n-1}} ... \mathrm{e}^{t_0 Y_0} : Y_j \in F, t_j \geq 0, \sum_{j=0}^{n} t_j \geq t, n \in \mathbb{N} \right\}$$

e tome a família $\mathcal{F} = \{S_{\geq t} : t > 0\}$. Esta família é uma base de filtro de subconjuntos conexos de S e satisfaz ambas as hipóteses H_1 e H_2 mas não satisfaz a hipótese H_3. Note que $\varphi(t_\lambda, x_\lambda, u_\lambda) \to_{\mathcal{F}} \infty$ implica que $t_\lambda \to +\infty$. Por fim, considere a distância riemaninana d em M munido da família admissível $\mathcal{O}_{\mathrm{d}}$.

Exemplo 3.7.3. *Considere o sistema de controle*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -u(t) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t), \quad U = [0, 1],$$

em $\mathbb{R}^2$. Para $u \equiv 0$ o sistema se move em círculos centrados em 0; para $u > 0$ o sistema se move em espirais centradas em 0. Para todo $u \in \mathbb{R}^2$ temos

$$K_{S_{\geq t}}(u) = K_S(u) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : \|v\| \leq \|u\| \right\}$$

para todo $t > 0$ e então $L_{\mathcal{F}}(u) = K_S(u) = \{v \in \mathbb{R}^2 : \|v\| \leq \|u\|\}$. Seja $\varepsilon > 0$ e tome $w \in \mathrm{B}(u, \varepsilon)$. Com isso $L_{\mathcal{F}}(w) = \{v \in \mathbb{R}^2 : \|v\| \leq \|w\|\}$. Se $v \in L_{\mathcal{F}}(w)$, vale que $\|v\| \leq \|w - u\| + \|u\| < \varepsilon + \|u\|$ e portanto $v \in \mathrm{B}(L_{\mathcal{F}}(u), \varepsilon)$. Isto implica que $L_{\mathcal{F}}(w) \subset \mathrm{B}(L_{\mathcal{F}}(u), \varepsilon)$ e portanto $L_{\mathcal{F}}$ é USC. Por fim, uma vez que $L_{\mathcal{F}} = K_S$ é LSC segue que $L_{\mathcal{F}}$ é H-C.

Conclusão e problemas em aberto

Neste trabalho, em um primeiro momento, mostramos que a estrutura admissível pode ser melhorada com a definição de uma função que amplia o conceito de distância. A então chamada função admissível foi introduzida e, a partir dela, estendemos os conceitos de diâmetro, medida de não-compacidade, módulo de continuidade e distância de Hausdorff. Estas definições não haviam sidos discutidas ainda em espaços não metrizáveis e portanto são novas quando introduzidas nessa generalidade. Com isso, apresentamos teoremas 1.3.1,1.4.1,[1.5.5] e [2.4.1] que não foram tratados previamente em espaços topológicos gerais.

O emprego da função admissível também resultou em generalizações de teoremas clássicos como os teoremas da interseção de Cantor e Cantor-Kuratowski [3]. Esse último teve papel fundamental no estudo dos atratores globais para ações de semigrupos em espaços uniformizáveis [4], trabalho que estendeu e ampliou os resultados do artigo [25] discutindo condições necessárias e suficientes para a existência do atrator global. Em um segundo momento reproduzimos a distância de Hausdorff sobre o hiperespaço de um espaço uniformizável e depois interpretamos de forma alternativa a estrutura uniforme diagonal sobre $\mathcal{H}(X)$ (ver Teorema 2.2.1). Então provamos no Teorema 2.2.3, que no caso de um espaço Hausdorff compacto a topologia induzida pela uniformidade diagonal coincide com a topologia instituída por E. Michael em [21]. Além do mais, a distância de Hausdorff contribuiu para o estudo de outros assuntos ligados à dinâmica topológica. Em especial, relacionamos em [5] as hiperconvergências de Hausdorff e Kuratowski-Painlevé e ainda provamos resultados de estabilidade e continuidade para as aplicações definidas por fecho da órbita, conjunto limite, prolongamento e conjunto limite prolongacional.

A eficiência da função admissível motiva a continuação de seu emprego na solução de outros problemas de topologia geral e dinâmica topológica. Sendo assim, vejamos algumas questões que ainda não obtivemos resposta.

Problema 1 - Ponto fixo para contrações

Seja X munido de uma família admissível de coberturas abertas $\mathcal{O}$. Uma função $f : X \to X$ é dita uma $\mathcal{O}$-contração se para quaisquer $x, y \in X$ distintos se tem

$$\rho(f(x), f(y)) \prec \rho(x, y) \text{ com } \rho(f(x), f(y)) \neq \rho(x, y).$$

Se X é um espaço admissível completo, seria interessante a discussão da existência e unicidade do ponto fixo de f. A estratégia consistiria em mostrar que $(f^n(x))$ é uma sequência de Cauchy relativa à família $\mathcal{O}$, imitando a prova feita em espaços métricos. No caso de X ser compacto Hausdorff, o plano seria mostrar que $\bigcup_{x \in X} \rho(x, f(x)) = \mathcal{O}$ e que existe $x_0 \in X$ com $\rho(x_0, f(x_0)) = \bigcup_{x \in X} \rho(x, f(x))$. Esse problema envolve a discussão de uma topologia em $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ que torna a função admissível $\rho : X \times X \to \mathcal{P}(\mathcal{O})$ contínua. Estabelecida essa topologia sobre $\mathcal{P}(\mathcal{O})$, outras questões serão evidentes, como as que envolvem as noções de valores máximos e mínimos de uma função $h : X \to \mathcal{P}(\mathcal{O})$.

Problema 2 - Atratores e conjuntos transitivos por cadeias

Seja X um espaço compacto Hausdorff munido com a família admissível $\mathcal{O}_f$ de todas as coberturas abertas finitas de X e $\mathcal{H}(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos compactos e não vazios de X munido da topologia Hausdorff. Depois, considere S um semigrupo agindo sobre X. Fixada uma base de filtro $\mathcal{F}$ sobre os subconjuntos de S, um conjunto $\mathcal{A} \subset X$ é um $\mathcal{F}$-atrator se existe uma vizinhança U de $\mathcal{A}$ tal que

$$\mathcal{A} = \omega(U, \mathcal{F}) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{FU}.$$

Além disso, $\mathcal{R} \subset X$ é dito um $\mathcal{F}$-repulsor se existe uma vizinhança U de $\mathcal{R}$ tal que

$$\mathcal{R} = \omega^*(U, \mathcal{F}) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F^{-1}U}.$$

Dados $F \in \mathcal{F}$, $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O}_f)$ e $x, y \in X$, uma $(\mathcal{E}, F)$-cadeia de x até y consiste de sequências $x_0 = x, ..., x_n = y \in X$ e $t_0, ..., t_{n-1} \in F$ tais que $\rho(t_i x_i, x_{i+1}) \prec \mathcal{E}$ para todo $i = 0, ..., n-1$. Um conjunto $E \subset X$ é dito transitivo por cadeias se para quaisquer $F \in \mathcal{F}$, $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O}_f)$ e $x, y \in E$, existe uma $(\mathcal{E}, F)$-cadeia de x até y. Um ponto $x \in X$ é dito recorrente por cadeias se para quaisquer $F \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{O}_f)$ existe uma $(\mathcal{E}, F)$-cadeia de x até x. Por fim, se $\mathcal{F}$ satisfaz uma certa condição de translação, o conjunto $\mathfrak{R}$ de todos os pontos recorrentes por cadeias é caracterizado por

$$\mathfrak{R} = \bigcap \{\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^* : \mathcal{A} \text{ é um } \mathcal{F}\text{-atrator}\}$$

onde $\mathcal{A}^*$ denota o repulsor complementar de $\mathcal{A}$.

Isto posto, uma primeira questão que surge é a análise da convergência de uma rede $(\mathcal{A}_\lambda)$ de $\mathcal{F}$-atratores de (S, X) fazendo uso da função ρ_H no hiperespaço $\mathcal{H}(X)$. Espera-se que o limite de $(\mathcal{A}_\lambda)$ em $\mathcal{H}(X)$ é um $\mathcal{F}$-atrator de (S, X). Em outras palavras, o conjunto dos $\mathcal{F}$-atratores de (S, X) é um subconjunto compacto do hiperespaço $\mathcal{H}(X)$. Outro problema é baseado na conjectura de que um conjunto transitivo por cadeias maximal é internamente transitivo por cadeias, ou seja, restringindo a ação de S a um conjunto transitivo por cadeias maximal $E \subset X$, essa ação é transitiva por cadeias. Esse resultado é verdadeiro no caso de um sistema dinâmico sobre um espaço métrico compacto, e sua prova faz uso da distância de Hausdorff. Isso motiva o uso da função ρ_H para a solução do problema no caso geral.

Problema 3 - Equiestabilidade e função de Lyapunov generalizada

Seja S um semigrupo agindo sobre uma espaço X munido de uma família admissível $\mathcal{O}$. Seja $C \subset X$ um subconjunto não vazio e suponha que existe uma função $\phi : X \to \mathbb{R}^+$ satisfazendo:

1. $\phi(x) = 0$ se, e somente se, $x \in C$;
2. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $\phi(x) \leq \varepsilon$ sempre que $x \in \overline{\mathrm{St}\,[C, \mathcal{U}]}$;
3. ϕ é semicontinua inferiormente;
4. $\phi(sx) \leq \phi(x)$ para todo $s \in S$ e $x \in X$.

Nessas condições, Braga Barros-Rocha-Souza [12, Teorema 3.9] provaram que C é um conjunto equiestável para a ação de S. A recíproca desse resultado foi estabelecida assumindo X metrizável [12, Teorema 3.10]. No entanto, tendo em mãos o recurso da função admissível, presumimos que a recíproca é verdadeira no caso geral. A questão decorre sobre o conjunto de valores de uma função de Lyapunov. No caso geral de um espaço admissível, não é de se esperar que uma função de Lyapunov para um conjunto equiestável seja valorada no conjunto dos números reais. Esse é o ponto central da discussão.

A construção usual de uma função de Lyapunov a valores reais está muito ligada a uma função distância sobre o espaço. Na ausência de uma métrica, uma função de Lyapunov parece ser impossível e sem sentido. Porém, todas as noções de conjunto Lyapunov estável são bem estabelecidas em espaços admissíveis, mesmo sem metrização ([12],[15],[16],[13]). Dessa forma, imaginamos que uma função de Lyapunov generalizada deve ser considerada na questão da equiestabilidade em espaços admissíveis.

No caso geral, pensamos em uma função de Lyapunov valorada em um monóide comutativo preordenado. Um conjunto Λ é chamado de monóide comutativo se possui uma operação binária $\oplus$ associativa e comutativa com elemento neutro $0 \in \Lambda$. Se existir em Λ uma preordem $\leq$ compatível com $\oplus$, ou seja, $0 \leq \lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$, e $\lambda_1 \leq \mu_1$ e $\lambda_2 \leq \mu_2$ implica $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \leq \mu_1 \oplus \mu_2$, então dizemos que $(\Lambda, \leq, \oplus)$ é um monóide comutativo preordenado.

Conjectura-se, portanto, que um conjunto $C \subset X$ é equiestável para a ação de S se, e somente se, existe um monóide comutativo preordenado $(\Lambda, \leq, \oplus)$ e uma função $\phi : X \to \Lambda$ satisfazendo:

1. $\phi(x) = 0$ se, e somente se, $x \in C$;

2. Para todo $\lambda > 0$, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $\phi(x) \leq \lambda$ sempre que $x \in \overline{\mathrm{St}\,[C,\mathcal{U}]}$;

3. Para todo $x \in X$ e $\lambda > 0$, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $\phi(y) \oplus \lambda > \phi(x)$ sempre que $y \in \mathrm{St}\,[x,\mathcal{U}]$;

4. $\phi(sx) \leq \phi(x)$ para todo $s \in S$ e $x \in X$.

Por último, ressaltamos que os problemas acima foram escolhidos tendo em vista o desenvolvimento de trabalhos futuros.

Referências Bibliográficas

[1] Alves, R.W.M.: Aspectos de uniformidade em espaços topológicos admissíveis. Tese de mestrado, Universidade Estadual de Maringá, (2014).

[2] Alves, R.W.M., Rocha,V.H.L. e Souza.J.A.: A characterization of completely regular spaces. International Journal of Mathematics, 26, no. 3, 1550032, (2015).

[3] Alves, R.W.M. e Souza, J. A.: Cantor-Kuratowski theorem in uniformizable spaces. Submitted.

[4] Alves, R.W.M. e Souza, J. A.: Global attractors for semigroup actions on uniformizable spaces. Submitted.

[5] Alves, R.W.M. e Souza, J.A.: Hyperconvergence in topological dynamics. Submitted.

[6] Marques, A.L.: Espaços uniformizáveis: teoria, equivalências e atualização. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Maringá, (2016).

[7] A. Appert et Ky-Fan: Espaces topologiques intermédiaires. Act. sci. et ind., 1121, (1951).

[8] Aragao-Costa, E. R.: Sistemas gradientes, decomposição de Morse e funções de Lyapunov sob pertubação. Tese de Doutorado, USP - São Carlos, (2012).

[9] Braga Barros, C.J. e Souza, J.A.: Attractors and chain recurrence of semigroup actions. J. Dyn. Diff. Equations, 22, 723-740, (2010).

[10] Braga Barros, C.J. e Souza, J.A.: Finest Morse decompositions for semigroup of fiber bundles. J. Dyn. Diff. Equations, 22, 741-760, (2010).

[11] Braga Barros, C.J. e Souza, J.A.: On the number of maximal chain transitive sets in fiber bundles. Forum Math. 25, 363-381, (2013).

[12] Braga Barros, C.J. Rocha, V.H.L. e Souza, J.A: Lyapunov stability for semigroup actions. Semigroup Forum, 88, 227-249, (2014).

[13] Braga Barros, C. J. Rocha, V.H.L. e Souza, J. A.: Lyapunov stability and attraction under equivariant maps, Canad. J.Math., 67, p. 1247-1269, (2015).

[14] Braga Barros, C. J., Rocha, V.H.L. e Souza, J. A.: Lyapunov stability on fiber bundles. Bulletin of Brazilian Mathematical Society, vol. 46, p. 181-204, (2015).

[15] Braga Barros, C.J., Souza, J. A. e Rocha, V. H. L.: On attractors and stability for semigroup actions and control systems, Math. Nachr., vol. 289, p. 272-287, (2016).

[16] Rocha, V.H.L., Souza, J.A. e Tozatti, H.V.M.: On stability and controllability for semigroup actions. Topological Methods in Nonlinear Analysis, vol. 48, p. 1-29, (2016).

[17] Conley, C.: Isolated invariant sets and the Morse index. CBMS Regional Conf. Ser. in Math. 38, American Mathematical Society, (1978).

[18] Kurepa, G.: Sur l'écart abstrait. Glasnik mat. fiz. astr., 11, p. 105-132, (1956).

[19] Kramosil, I., Michelek, J.: Fuzzy Metric and Statical metric spaces, Kybermetyca, vol. 11, p. 336-344, (1975).

[20] Colmez, J.: Sur divers problèmes concernant les espaces topologiques. Les espaces à écarts. Problème de Wiener sur les transformations continues. Portugaliae Mathematica, vol. 6, p. 3-4, (1947).

[21] Michael, E.: Topologies on spaces of subsets. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 71, p. 151-182, (1951).

[22] Howes, N. R.: Modern Analysis and Topology, Universitext, Springer, New York, (1995).

[23] Patrão, M. e San Martin, L.A.B.: Semiflows on topological spaces: chain transitivity and semigroups. J. Dyn. Diff. Equation, vol. 19, p. 155-180, (2007).

[24] Patrão,M.and San Martin, L.A.B. Morse decompositions of semi flows on fiber bundles. Discrete, Contin. Dyn. Syst. Ser. A, vol. 17, p. 113-139, (2007).

[25] Raminelli, S.A.: Atratores globais para ações de semigrupos. Tese de mestrado, Universidade Estadual de Maringá, (2013).

[26] Raminelli, S.A. e Souza, J.A: Global attractors for semigroup actions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 407, n.2, p. 316-327, (2013).

[27] Saperstone, S. H. e M. Nishihama.: Continuity of the limit set maps in semidynamical systems, J. Differential Equations 23, no. 2, 183-199, (1977).

[28] Rocha, H.V.: Estabilidade e ações de semigrupos. Tese de mestrado, Universidade Estadual de Maringá, (2012).

[29] Rocha, H.V.: Estabilidade de Lyapunov em fibrados. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Maringá, (2016).

[30] Souza, J.A.: Lebesgue covering lemma on nonmetric spaces. International Journal of Mathematics, 24, 1350018, 1-12, (2013).

[31] Souza, J.A.: On limit behavior of semigroup actions on noncompact spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 140, 3959-3972, (2012).

[32] Souza, J.A., Tozatti, H.V.M.: Some aspects of stability for semigroup actions and control systems. J. Dyn. Diff. Equations, 26, 631-654, (2014).

[33] Souza, J.A.: Recurrence for semigroup actions. Semigroup Forum, 83, 351-370, (2011).

[34] Tallafha,A.: Some properties of semi-linear uniform spaces. Boletim da sociedade paranaense de matemática, vol 29, No.2, p. 9-14, (2011).

[35] Tozatti, H.V.M.: Dispersividade e recursividade para ações de semigrupos. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Maringá, (2014).

[36] Willard, S.: General topology. Dover Publications, New York, (2004).