

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

RODRIGO ANDRÉ SCHULZ

**CONTROLABILIDADE EXATA INTERNA DO SISTEMA DE BRESSE
COM COEFICIENTES VARIÁVEIS E ESTABILIZAÇÃO DO SISTEMA
DE TERMODIFUSÃO COM DISSIPAÇÕES LOCALIZADAS LINEARES E
NÃO-LINEARES**

Maringá - PR
2014

RODRIGO ANDRÉ SCHULZ

**CONTROLABILIDADE EXATA INTERNA DO SISTEMA DE BRESSE
COM COEFICIENTES VARIÁVEIS E ESTABILIZAÇÃO DO SISTEMA
DE TERMODIFUSÃO COM DISSIPAÇÕES LOCALIZADAS LINEARES E
NÃO-LINEARES**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas, da Universidade Estadual de Maringá como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino

Maringá - PR
2014

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S388c	<p>Schulz, Rodrigo André</p> <p>Controlabilidade exata interna do sistema de Bresse com coeficientes variáveis e estabilização do sistema de termodifusão com dissipações localizadas lineares e não lineares. -- Maringá, 2014. 139 f.</p> <p>Orientador: Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino.</p> <p>Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014.</p> <p>1. Equações diferenciais parciais. 2. Controlabilidade exata. 3. Análise matemática. 4. Sistema de Bresse. 5. Sistema de termodifusão. I. Palomino, Juan Amadeo Soriano, orient. II. Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.</p> <p>CDD 21. ed 515.353</p>
-------	---

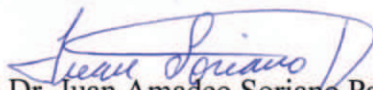
MGC001685

RODRIGO ANDRÉ SCHULZ

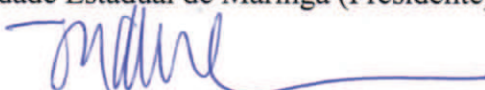
**CONTROLABILIDADE EXATA INTERNA DO SISTEMA DE BRESSE COM
COEFICIENTES VARIÁVEIS E ESTABILIZAÇÃO DO SISTEMA DE
TERMODIFUSÃO COM DISSIPACÕES LOCALIZADAS LINEAR E NÃO-LINEAR**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

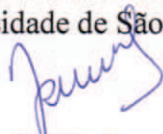
COMISSÃO JULGADORA:



Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)



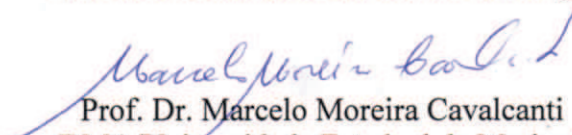
Prof. Dr. Ma To Fu
Universidade de São Paulo



Prof. Dr. Pedro Danizete Damazio
Universidade Federal do Paraná



Profa. Dra. Valéria Neves Domingos Cavalcanti
DMA/Universidade Estadual de Maringá



Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 12 de dezembro de 2014.

Local de defesa: Auditório do Departamento de Matemática - DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

à Mariana.

AGRADECIMENTOS

Poderiam falar que esse trabalho é um fruto do curso de Doutorado em Matemática da Universidade Estadual de Maringá que levou quatro anos para ser concluído.

Poderiam ainda dizer que tudo isso começou quando optei por fazer o curso de Mestrado nesta universidade ou no momento que assinalei a opção “Licenciatura em Matemática” na ficha de inscrição do vestibular da Universidade Estadual do Oeste do Paraná.

No entanto, eu diria que há uma história de vida por trás deste trabalho...

Por esse motivo agradeço a todos que em algum momento estiveram presentes em minha vida, amigos, familiares, professores e tantos outros que, mesmo sendo uma quantidade finita, sou incapaz de enumerá-los.

Em especial agradeço:

Ao meu Senhor que me amou desde antes da fundação do mundo e demonstrou isso dando sua vida por mim;

À minha esposa Mariana, por me amar;

À minha família, por todo apoio e incentivo ao longo desses anos;

Ao Prof. Juan não só pela instrução matemática desde o mestrado, como também pelas lições de vida que me proporcionou;

À Capes pelo suporte financeiro;

E, por fim, a você que está lendo e apreciando esse trabalho. Espero que lhe seja útil!

Nisto conhecemos o amor: que Cristo deu a sua vida por nós; e devemos dar nossa vida pelos irmãos.

1 João 3:16.

CONTEÚDO

1	Introdução	1
1.1	O sistema de Bresse	1
1.2	O sistema de termodifusão	3
2	Preliminares	7
2.1	Espaços Funcionais	7
2.1.1	Distribuições	7
2.1.2	Espaços $L^p(\Omega)$	8
2.1.3	Espaços de Sobolev	11
2.2	Topologias Fracas, Espaços Reflexivos e Separáveis	12
2.3	Espaços de Funcionais à Valores Vetoriais	14
2.4	O Espaço $W(0, T; X, Y)$	15
2.5	Integral de Bochner: definição, convergência e regularização	16
2.6	Mais alguns Resultados	19

2.7	Operador Definido por uma Terna	22
2.8	Semigrupos e Grupos de Operadores Lineares em Espaços de Banach	24
2.9	Operadores Maximais Monótonos em Espaços de Hilbert	28
2.10	Funções escalarmente contínuas	31
3	Controlabilidade exata interna do sistema de Bresse generalizado	33
3.1	Observações iniciais e boa colocação	34
3.2	Desigualdades direta e inversa	48
3.3	Aplicação do Método H.U.M. (Hilbert Uniqueness Method)	69
4	Decaimento exponencial para o sistema de termodifusão	75
4.1	Considerações iniciais e boa colocação	76
4.2	Desigualdade de observabilidade	82
4.3	Decaimento exponencial	93
5	Taxas de decaimento para o sistema de termodifusão não linear	107
5.1	Observações iniciais e boa colocação	108
5.2	Desigualdade de Observabilidade	114
5.3	Taxas de Decaimento	127

RESUMO

Este trabalho diz respeito a controlabilidade exata interna de um sistema de Bresse generalizado com coeficientes variáveis, cujos mecanismos de controle agem em um subintervalo arbitrariamente pequeno (l_1, l_2) de $(0, L)$. Nossos cálculos sugerem um tempo mínimo de controle e uma região onde os controles se tornam mais eficientes. Os coeficientes variáveis podem ser vistos como uma generalização do operador Laplaciano. O principal resultado é obtido aplicando o método HUM (Hilbert Uniqueness Method) devido a Lions [32, 31], sem fazer o uso do teorema da unicidade de Holmgren ou da hipótese de igualdade de velocidade de propagação de ondas.

Também estudamos o sistema de termodifusão do tipo “second sound” em um domínio unidimensional com a ação de mecanismos de dissipação linear e não linear em uma região arbitrariamente pequena. Usamos técnicas envolvendo energias de primeira e segunda ordem, multiplicadores e o método desenvolvido por Lasiecka e Tataru [29] para obter taxas de decaimento. Um resultado de observabilidade interna também foi mostrado para alcançar a estabilidade assintótica mencionada acima.

Palavras chave: sistema de Bresse, método HUM, controlabilidade exata, regularidade escondida, coeficientes variáveis, sistema de termodifusão, desigualdade de observabilidade, lei de Cattaneo.

ABSTRACT

This work is concerned with the internal exact controllability of a generalized Bresse system with variable coefficients, which the control functions acts in an arbitrarily small subinterval (l_1, l_2) of $(0, L)$. Our computation suggests a minimal time control and a region where the controls are more effective. The variable coefficients can be viewed as a generalization of the Laplacian operator. The main result is obtained applying HUM (Hilbert Uniqueness Method) due to Lions [32, 31], without use the Holmgren's Uniqueness Theorem or the hypothesis of equal-speed waves of propagation.

We also consider the thermodiffusion system with second sound in a bounded one-dimensional domain with localized linear and nonlinear damping mechanisms acting on an arbitrarily small region. Through a combination of first and second order energy, multipliers technique and the method developed by Lasiecka and Tataru [29] decay rates are obtained. A result of internal observability was also proved to reach the asymptotic stability above.

Key words: Bresse system, Hilbert Uniqueness Method; exact controllability; hidden regularity; variable coefficients, thermodiffusion system, observability inequality, Cattaneo's law.

Introdução

O presente trabalho trata da controlabilidade exata interna de um sistema de Bresse generalizado e da estabilização de um sistema de termodifusão. No capítulo seguinte, capítulo 2, apresentamos diversos resultados preliminares referente aos espaços de Sobolev, à teoria das distribuições e semigrupos os quais são amplamente utilizados ao longo do texto. Os resultados de controlabilidade e estabilização, ora mencionados, são obtidos nos capítulos posteriores. No que segue, uma breve introdução sobre os problemas abordados.

1.1 O sistema de Bresse

No capítulo 3 consideramos o sistema de Bresse generalizado dado por

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(a(x)\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l[\omega_x - l\varphi] = f_1 \\ \rho_2 \psi_{tt} - (b(x)\psi_x)_x + k(\varphi_x + \psi + l\omega) = f_2 \\ \rho_1 \omega_{tt} - k_0[c(x)\omega_x - l\varphi]_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) = f_3 \end{cases} \quad (1.1)$$

em $Q = (0, L) \times (0, T)$. Assumimos condições de fronteira do tipo Dirichlet, i.e.,

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \omega(0, t) = \omega(L, t) = 0, \quad (1.2)$$

para $t \in (0, T)$, e condições iniciais

$$\begin{cases} \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, & \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \\ \psi(\cdot, 0) = \psi_0, & \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1, \\ \omega(\cdot, 0) = \omega_0, & \omega_t(\cdot, 0) = \omega_1. \end{cases} \quad (1.3)$$

O problema da controlabilidade exata de (1.1)-(1.3) é formulado da seguinte forma: dado $T > 0$, suficientemente grande, precisamos encontrar um espaço de Hilbert \mathcal{H} tal que para cada dado inicial $\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1\} \in \mathcal{H}$ seja possível encontrar controles $f_1 = h_1(x, t)\chi$, $f_2 = h_2(x, t)\chi$ e $f_3 = h_3(x, t)\chi$, $h_1, h_2, h_3 \in L^2(l_1, l_2)$, onde χ é a função característica de $(l_1, l_2) \times (0, T)$ com $(l_1, l_2) \subset (0, L)$, de tal forma que a solução $\{\varphi, \psi, \omega\}$ de (3.1)-(3.3) satisfaça

$$\varphi(x, T) = \varphi_t(x, T) = \psi(x, T) = \psi_t(x, T) = \omega(x, T) = \omega_t(x, T) = 0$$

Primeiramente, observamos que as funções a, b, c estão sendo consideradas de modo a satisfazer $a(x) \geq 1$, $b(x) \geq b_0 > 0$ e $c(x) \geq 1$. Além disso, as constantes consideradas, ρ_1, ρ_2, k, k_0 e l , são positivas. Desta forma, o sistema (1.1)-(1.3), é uma generalização do sistema de Bresse usual, onde $a(x) = c(x) = 1$ e $b(x) = b_0 > 0$.

No sistema de Bresse as constantes $\rho_1, \rho_2, k, k_0, l$ e b_0 estão relacionadas com a composição do material. Já as componentes ω, φ, ψ da solução deste sistema representam os deslocamentos longitudinal, vertical e ângulo de cisalhamento, respectivamente. Algumas estruturas elásticas em forma de arcos e vibrações de vigas são modeladas por (1.1) e são objeto de estudo em diversas áreas como matemática, física e engenharia. Mais detalhes e aplicações podem ser encontrados em [35, 52] assim como em suas referencias.

Existem alguns trabalhos já tratando da existência e da estabilização do sistema de Bresse como, por exemplo, [3, 15, 16, 21, 22, 35, 52] mas não conhecemos nenhum que trate de controlabilidade ou considere coeficientes variáveis.

Parte da motivação deste trabalho vem de [48] onde o autor estudou a controlabilidade do sistema

$$\begin{cases} \psi_{tt} - (a(x)\psi_x)_x + \varphi_x + \psi = f, \\ \varphi_{tt} - (b(x)\varphi_x)_x + \psi_x + \varphi = g, \\ a(x) \geq a_0 > 1, \quad b(x) \geq b_0 > 1. \end{cases} \quad (1.4)$$

Vislumbramos que algumas idéias ali contidas poderiam ser estendidas e outras melhoradas.

Com vistas a controlabilidade, o ponto chave é obter a desigualdade inversa, dada pelo teorema 3.2.6, para a qual se faz necessário provar uma desigualdade de observabilidade (ver teorema 3.2.3). As maiores dificuldades surgem devido ao fato que a presença de coeficientes variáveis impossibilita o uso da continuação única dada pelo

teorema de Holmgren o qual foi usado recentemente em [15, 16] para obter resultados semelhantes. Para contornar isso, somos levados a provar um resultado de regularidade escondida fazendo uma convolução com uma sequência de funções regularizantes (veja lema 3.2.4). Para finalizar, a controlabilidade exata é obtida pela aplicação do método HUM (Hilbert Uniqueness Method) proposto por Lions em [32, 31] e usado em diversos trabalhos como, por exemplo, [2, 13, 19, 20, 26, 27, 28, 30, 38, 41].

É importante enfatizar que nenhuma restrição é feita sobre os coeficientes, a não ser aquelas provenientes da modelagem já mencionadas acima. Portanto, a hipótese da igualdade da velocidade de propagação de ondas

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b_0} \quad \text{e} \quad k = k_0$$

não é exigida aqui. Essa relação foi usada em diversos trabalhos, veja [3, 21, 22, 52], que nos ajudaram a compreender melhor o sistema de Bresse e pôde ser retirada recentemente, em [15, 16], permitindo uma abrangência maior dos resultados obtidos à realidade física do problema.

1.2 O sistema de termodifusão

Nos capítulos 4 e 5 passamos a estudar o problema de termodifusão

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - (\lambda + 2\mu)u_{xx} + \gamma_1\theta_{1x} + \gamma_2\theta_{2x} + \alpha_3(x)g_3(u_t) = 0, \\ c\theta_{1t} + \sqrt{k}q_{1x} + \gamma_1u_{tx} + d\theta_{2t} = 0, \\ n\theta_{2t} + \sqrt{D}q_{2x} + \gamma_2u_{tx} + d\theta_{1t} = 0, \\ \tau_1q_{1t} + \alpha_1(x)g_1(q_1) + \sqrt{k}\theta_{1x} = 0, \\ \tau_2q_{2t} + \alpha_2(x)g_2(q_2) + \sqrt{D}\theta_{2x} = 0, \end{cases}$$

com $g_i(s) = s$ no capítulo 4 e com características não lineares no capítulo 5.

O fenômeno da termodifusão está presente em diversas áreas da ciência como: problemas de mistura, mecânica da fratura e delaminação. O processo de difusão de calor e de massa, em altas e baixas temperaturas desempenha papel fundamental em muitos problemas envolvendo satélites, retorno de veículos espaciais e aterrissagens em água e solo, e atualmente, companhias petrolíferas tem demonstrado interesse em processos de termodifusão visando uma extração mais eficiente destes recursos como pode ser visto em [1]. Os avanços nesta teoria também vão de encontro a descoberta de novos ma-

teriais, especialmente em materiais compostos, e também na influência que a termodifusão exerce em cerâmicas e polímeros, conforme [46].

Em 1971, Nowacki [44], apresentou as equações clássicas da termodifusão

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - (\lambda + 2\mu)u_{xx} + \gamma_1\theta_{1x} + \gamma_2\theta_{2x} = 0 \\ c\theta_{1t} - k\theta_{1xx} + \gamma_1u_{tx} + d\theta_{2t} = 0 \\ n\theta_{2t} - D\theta_{2xx} + \gamma_2u_{tx} + d\theta_{1t} = 0 \end{cases}$$

que modelam este processo em um corpo sólido, como também pode ser visto em [37, 49]. Mais tarde, o mesmo Nowacki [45] expandiu a teoria da difusão termo-elástica explorando o problema da dinâmica da difusão em corpos sólidos por meio de um acoplamento com um modelo termo-elástico.

Além disso, em 2004, mais um passo foi dada no sentido de estender essa teoria, desta vez por Sherief *et al* [51], permitindo velocidades de propagação finita de ondas. Para isso a lei de Fourier para propagação de calor a uma velocidade infinita é substituída pela lei de Cattaneo tornando o sistema 100% hiperbólico e mais realista do ponto de vista físico. Na atualidade estes novos modelos hiperbólicos tem sido aplicados com sucesso na indústria de eletrônicos como, por exemplo, em processos envolvendo a limpeza e remoção de partículas em pequenos componentes (microchips, resistências, etc.) de circuitos elétricos. Nestes casos o novo modelo tem-se comportado de forma satisfatória por dois motivos principais: a delicadeza dos materiais envolvidos e, fundamentalmente, pelos pequenos espaços de tempo considerados para o modelo, que fazem com que o paradoxo da propagação infinita de sinais dado pelo modelo parabólico (Lei de Fourier) seja eliminado.

Concomitantemente, diversos novos modelos de termodifusão foram surgindo o que levou Liu e Reissing [37] a propor uma classificação para estes modelos alternativos baseados na classificação já existente para os modelos termoelásticos, a saber: 1 - modelo clássico, 2 - ondas térmicas e 3 - amortecimento viscoelástico ou modelo “second sound”.

De acordo com esta classificação, Aouadi [1] e Zhang e Qin [54] apresentaram

e estudaram o seguinte modelo do tipo “second sound”

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - (\lambda + 2\mu)u_{xx} + \gamma_1\theta_{1x} + \gamma_2\theta_{2x} = 0, \\ c\theta_{1t} + \sqrt{k}q_{1x} + \gamma_1u_{tx} + d\theta_{2t} = 0, \\ n\theta_{2t} + \sqrt{D}q_{2x} + \gamma_2u_{tx} + d\theta_{1t} = 0, \\ \tau_1q_{1t} + q_1 + \sqrt{k}\theta_{1x} = 0, \\ \tau_2q_{2t} + q_2 + \sqrt{D}\theta_{2x} = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

com diferentes condições de fronteira. Eles mostraram a existência de solução, via teoria de semigrupos, e a estabilização, com decaimento exponencial, via método de Lyapunov combinado com técnicas dos multiplicadores e controle de termos de bordo como feito em [50].

Observemos que os termos que provocam dissipações nos sistemas estudados por Aouadi [1] e Zhang e Qin [54], e conseqüentemente decaimento da energia total, são as parcelas q_1 e q_2 presentes nas duas últimas equações de (1.5). Portanto estas dissipações são efetivas em todo o domínio por eles considerado.

O nosso objetivo é obter taxas de decaimento para o modelo de termodifusão do tipo “second sound” usando apenas dissipações localizadas em uma região arbitrariamente pequena do domínio. Como já mencionamos, no capítulo 4 consideramos dissipações de caracter linear e no capítulo 5 dissipações com características não lineares. Da forma como propomos, os resultados obtidos no capítulo 5 generalizam aqueles obtidos no capítulo 4 e são independentes. No entanto julgamos conveniente apresentar o capítulo 4, sobretudo pelas técnicas utilizadas para se trabalhar com energias de ordem superior, dispensadas no capítulo 5. Em ambos os casos a existência é baseada na teoria de semigrupos, ora linear ora não linear, e a estabilidade no método desenvolvido por Lasiecka e Tataru [29], com suas devidas adaptações, o qual tem sido amplamente utilizado, ver [14, 12, 5, 10, 15, 16].

A grande dificuldade enfrentada, comparada aos trabalhos de Aouadi, Racke, Zhang e Qin [1, 50, 54], surge devido ao fato que a característica local das dissipações impede o uso da desigualdade de Poincaré em diversas estimativas. Para contornar isso utilizamos alguns multiplicadores muito particulares, um deles dado por Tébou [53] e outro que nós introduzimos ao longo do texto. Também é importante enfatizar que, com essas técnicas, os mecanismos de dissipação podem ser considerados em uma região arbitrariamente pequena do intervalo $(0, L)$ dado.

Preliminares

2.1 Espaços Funcionais

2.1.1 Distribuições

Sejam $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ pontos do \mathbb{R}^n e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, n-uplas de números inteiros não negativos. Considerando $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ e $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$ denotaremos o operador derivação em \mathbb{R}^n por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Seja Ω um aberto do \mathbb{R}^n e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos o *suporte* da função φ em Ω e denotamos por $\text{supp}(\varphi)$ o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$. Quando $\text{supp}(\varphi)$ é compacto, dizemos que φ tem suporte compacto em Ω . Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que possuem suporte compacto.

O *espaço das funções testes* de Ω , $\mathcal{D}(\Omega)$, é o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido da seguinte noção de convergência: Dada uma sucessão $\{\varphi_\nu\}$ de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ dizemos que

$$\varphi_\nu \rightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{D}(\Omega) \tag{2.1}$$

se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω tal que

- i) $\text{supp}(\varphi_\nu) \subset K$, $\forall \nu$ e $\text{supp}(\varphi) \subset K$;
- ii) $D^\alpha \varphi_\nu \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente sobre K , $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Uma *distribuição* sobre Ω é uma forma linear sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência dada em 2.1. Chamaremos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o *espaço vetorial das distribuições* sobre Ω . Diremos que $\{T_\nu\}$, uma sucessão de elementos de $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e escreveremos

$$T_\nu \rightarrow T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega)$$

quando

$$\langle T_\nu, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dada uma distribuição T sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a derivada distribucional de ordem α da distribuição T , denotada por $D^\alpha T$, é dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com essa definição, uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ possui derivada distribucional de todas as ordens e $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e além disso a aplicação

$$\begin{aligned} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) &\rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\mapsto D^\alpha T \end{aligned}$$

é linear e contínua.

2.1.2 Espaços $L^p(\Omega)$

Sejam Ω um subconjunto do \mathbb{R}^n e p um número real tal que $1 \leq p < \infty$. Denotaremos por $L^p(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis u , definidas em Ω tais que $|u|^p$ é Lebesgue integrável sobre Ω .

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach.

Se define por $L^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que u é mensurável e existe uma constante C tal que $|u(x)| \leq C$ para quase todo $x \in \Omega$. Uma norma

em $L^\infty(\Omega)$ é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |u(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\}$$

a qual o torna um espaço de Banach.

Em particular, $L^2(\Omega)$, com o produto interno

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) \, dx$$

e a norma $\|u\|^2 = (u, u)$, é um espaço de Hilbert.

Seja $1 \leq p \leq \infty$. Diz-se que p' é o *índice conjugado* de p se $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Proposição 2.1.1 (Desigualdade de Young) *Se a e b são números reais não negativos então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

sempre que $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Demonstração: Ver [7].

□

Proposição 2.1.2 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$ com $1 < p < \infty$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Demonstração: Ver [7].

□

Proposição 2.1.3 (Desigualdade de Minkowski) *Sejam $u, v \in L^p(\Omega)$ e $1 \leq p < \infty$ então*

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [40].

□

Proposição 2.1.4 (Desigualdade de Jensen) *Seja B um hipercubo do \mathbb{R}^n , então para toda função côncava F e toda função integrável $g \in L^1(B)$ temos*

$$F\left(\frac{1}{\text{med}(B)} \int_B g(x) dx\right) \geq \frac{1}{\text{med}(B)} \int_B F(g(x)) dx.$$

Demonstração: Ver [43].

□

Teorema 2.1.5 (Convergência Dominada de Lebesgue) *Se uma sequência $\{f_k\}$ de funções integráveis a Lebesgue num conjunto Ω converge quase sempre em Ω para uma função f , e se $|f_k|_{L^1(\Omega)} \leq \psi$, quase sempre em Ω , $\forall k \in \mathbb{N}$, para uma certa função $\psi \in L^1(\Omega)$, então a integral $\int_{\Omega} f$ existe e*

$$\int_{\Omega} f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k dx$$

Demonstração: Ver [23].

□

Denota-se por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é lebesgue integrável sobre cada subconjunto compacto de Ω .

Proposição 2.1.6 (Du Bois Raymond) *Sejam $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx = 0, \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

então $u = 0$ quase sempre em Ω .

Demonstração: Ver [8].

□

2.1.3 Espaços de Sobolev

Sejam Ω um aberto do \mathbb{R}^n , $1 \leq p \leq \infty$ e $m \geq 1$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é o espaço vetorial de todas as funções de $L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo $|\alpha| \leq m$. Simbolicamente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}.$$

Uma norma em $W^{m,p}(\Omega)$ é dada por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx, \text{ se } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx, \text{ se } p = \infty,$$

a qual o torna um espaço de Banach. No caso $p = 2$, escreve-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ e munindo-o com o produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

temos um espaço de Hilbert.

Define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, ou seja,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Quando Ω é limitado em alguma direção x_i de \mathbb{R}^n e $1 \leq p < \infty$ então a norma em $W_0^{m,p}(\Omega)$ dada por

$$\|u\|^p = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx$$

é equivalente a norma induzida por $W^{m,p}(\Omega)$.

Representa-se por $W^{-m,p'}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$, onde $1 \leq p < \infty$ e p' é o índice conjugado de p . Por $H^{-m}(\Omega)$ denota-se o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$.

2.2 Topologias Fracas, Espaços Reflexivos e Separáveis

Nesta seção temos algumas propriedades das topologias fraca e fraca $*$, assim como resultados de convergência nestas topologias envolvendo a reflexividade e a separabilidade dos espaços.

Considerando E um espaço de Banach, a *topologia fraca* $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E que torna contínuas todas as aplicações $f \in E'$.

Seja $\{x_n\}$ uma sucessão convergente para x na topologia fraca $\sigma(E, E')$. Quando não houver possibilidade de confusão diremos apenas que $\{x_n\}$ converge fraco para x e denotaremos por

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E$$

Proposição 2.2.1 *Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em E , então*

- i) $x_n \rightharpoonup x$ em E se, e somente se, $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$, $\forall f \in E'$;*
- ii) Se $x_n \rightarrow x$ em E , então $x_n \rightharpoonup x$ em E ;*
- iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E , então $\|x\|_E$ é limitada e $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|_E$;*
- iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E e $f_n \rightarrow f$ em E' , então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.*

Demonstração: Ver [7].

□

Sejam E um espaço de Banach e $x \in E$ fixo. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} J_x : E' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \langle J_x, f \rangle = \langle f, x \rangle \end{aligned}$$

que é linear e contínua e portanto $J_x \in E''$, $\forall x \in E$. Deste modo, definamos a aplicação $J : E \rightarrow E''$ tal que $J(x) = J_x$, a qual é chamada de *injeção canônica* de E em E'' .

A topologia fraca $*$, ou $\sigma(E', E)$, é a topologia menos fina sobre E' que faz contínuas todas as aplicações J_x .

Seja $\{f_n\}$ uma sucessão convergente para f na topologia fraca $*$ $\sigma(E, E')$. Com vistas a simplificação das notações escreveremos apenas que $\{f_n\}$ converge fraco $*$ para f , ou simbolicamente

$$f_n \xrightarrow{*} f \text{ em } E'$$

quando não houver possibilidade de confusão.

Proposição 2.2.2 *Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em E' , então*

- i) $f_n \xrightarrow{*} f$ em E' se, e somente se, $\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad \forall x \in E$;
- ii) Se $f_n \rightarrow f$ forte, então $f_n \rightarrow f$ em $\sigma(E', E'')$;
- iii) Se $f_n \rightarrow f$ em $\sigma(E', E'')$, então $f_n \xrightarrow{*} f$ em E' ;
- iv) Se $f_n \xrightarrow{*} f$ em E' , então $\|f_n\|_{E'}$ está limitada e $\|f\|_{E'} \leq \liminf \|f_n\|_{E'}$;
- v) Se $f_n \xrightarrow{*} f$ em E' e $x_n \rightarrow x$ em E , então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Demonstração: Ver [7].

□

Dizemos que um espaço de Banach é *reflexivo* quando a injeção canônica $J : E \rightarrow E''$ é sobrejetora. Um espaço métrico E é dito *separável* quando existe um subconjunto $M \subset E$ enumerável e denso em E .

Teorema 2.2.3 *Seja E um espaço de Banach tal que E' é separável. Então E é separável.*

Demonstração: Ver [7].

□

Teorema 2.2.4 *Seja E um espaço de Banach separável e seja $\{f_n\}$ uma sequência limitada em E' . Então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ que converge na topologia fraca $*$ ($\sigma(E', E)$).*

Demonstração: Ver [7].

□

Teorema 2.2.5 *Seja E um espaço de Banach reflexivo e seja $\{x_n\}$ um seqüência limitada em E . Então existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ que converge na topologia fraca ($\sigma(E, E')$).*

Demonstração: Ver [7].

□

2.3 Espaços de Funcionais à Valores Vetoriais

Seja X um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{D}(0, T; X)$ o espaço localmente convexo completo das funções vetoriais $\varphi : (0, T) \rightarrow X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em $(0, T)$. Dizemos que uma sucessão

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{D}(0, T; X)$$

se

- i) Existe um compacto K de $(0, T)$ tal que $\text{supp}(\varphi_\nu)$ e $\text{supp}(\varphi)$ estão contidos em K , para todo ν ;
- ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\frac{d^k}{dt^k} \varphi_\nu(t) \rightarrow \frac{d^k}{dt^k} \varphi$ em X , uniformemente em $t \in (0, T)$.

O espaço das aplicações lineares contínuas de $\mathcal{D}(0, T) = \mathcal{D}(0, T; \mathbb{R})$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(0, T; X)$, ou seja, $S \in \mathcal{D}'(0, T; X)$ se $S : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow X$ é linear e se $\theta_\nu \rightarrow \theta$ em $\mathcal{D}(0, T)$ implicar que $\langle S, \theta_\nu \rangle \rightarrow \langle S, \theta \rangle$ em X . Diremos que

$$S_\nu \longrightarrow S \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; X)$$

se

$$\langle S_\nu, \theta \rangle \rightarrow \langle S, \theta \rangle \text{ em } X, \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T).$$

O espaço $\mathcal{D}(0, T; X)$ equipado com a convergência acima é denominado espaço das *distribuições vetoriais* de $(0, T)$ com valores em X .

Denota-se por $L^2(0, T; X)$ o espaço das (classes de) funções vetoriais $u : (0, T) \rightarrow X$ mensuráveis em $(0, T)$, $(0, T)$ dotado da medida de Lebesgue, tais que

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^2 dt < \infty.$$

Em particular, se X é um espaço de Hilbert, então $L^2(0, T, X)$ munido do produto interno

$$(u, v)_{L^2(0, T, X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt$$

também é um espaço de Hilbert.

2.4 O Espaço $W(0, T; X, Y)$

Sejam X e Y dois espaços de Hilbert separáveis, $X \subset Y$ com imersão contínua e densa. Definimos um novo espaço de Hilbert

$$W(0, T; X, Y) = \{u \in L^2(0, T; X); u_t \in L^2(0, T; Y)\}$$

com a norma

$$\|u\|_{W(0, T; X, Y)}^2 = \|u\|_{L^2(0, T; X)}^2 + \|u_t\|_{L^2(0, T; Y)}^2.$$

Para mais detalhes ver [18].

Considere o espaço $C([0, T]; E)$ como sendo o conjunto das funções contínuas de $[0, T]$ em E , munido da norma

$$\|u\|_{C([0, T]; E)} = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_E.$$

Com essas notações, temos o

Teorema 2.4.1 *Se $u \in W(0, T; X, Y)$ então $u \in C([0, T]; [X, Y]_{\frac{1}{2}})$, onde $[X, Y]_{\theta}$ denota a interpolação¹ entre os espaços X e Y .*

Demonstração: Ver teorema 3.1, p.19 de [34].

□

¹Para mais detalhes sobre espaços interpolados veja [34].

2.5 Integral de Bochner: definição, convergência e regularização

Consideremos $f : A \rightarrow X$ uma função com valores vetoriais definida em um subconjunto mensurável a Lebesgue $A \subset \mathbb{R}$ em um espaço de Banach, real ou complexo, X de norma $\|\cdot\|_X$.

Definição 2.5.1 Diz-se que $f : A \rightarrow X$ é simples se assume um número finito de valores. Em outras palavras, f é simples se existem A_1, A_2, \dots, A_m subconjuntos mensuráveis de A , dois a dois disjuntos, cada qual tendo medida finita e existem x_1, x_2, \dots, x_m pontos não nulos correspondentes em X tais que

$$f(t) = \sum_{j=1}^m \chi_{A_j}(t)x_j \quad (2.2)$$

onde χ_{A_j} é a função característica de A_j . Assim, se $t \in A_{j_0}$, para algum j_0 então $f(t) = x_{j_0}$, ou seja, f é constante em A_{j_0} . Agora, se $t \in A \setminus \bigcup_{j=1}^m A_j$ então $f(t) = 0$.

Definição 2.5.2 Diz-se que $f : A \rightarrow X$ é fortemente mensurável se existe uma sequência de funções simples $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0, \text{ quase sempre em } A.$$

Definição 2.5.3 Define-se a integral da função simples $f : A \rightarrow X$ dada em (2.2) por:

$$\sum_{j=1}^m \text{med}(A_j)x_j$$

e denota-se por

$$\int_A f(t) dt = \sum_{j=1}^m \text{med}(A_j)x_j$$

Definição 2.5.4 Uma função $f : A \rightarrow X$ é dita integrável à Bochner se existe uma

sequencia de funções simples $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$f_n(t) \rightarrow f(t) \text{ em } X \text{ quase sempre em } A$$

e além disso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \|f_n(t) - f(t)\|_X dt = 0.$$

A integral de f sobre A , que denotaremos por $\int_A f(t) dt$ é definida por

$$\int_A f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(t) dt.$$

Teorema 2.5.5 (Bochner) *Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto mensurável a Lebesgue. Uma função $f : A \rightarrow X$ fortemente mensurável é Bochner integrável se e somente se a aplicação numérica $t \in A \mapsto \|f(t)\|_X$ é integrável a Lebesgue.*

Demonstração: ver [9].

□

Designaremos por $L^p(A; X)$, $1 \leq p \leq \infty$, a classe das funções f fortemente mensuráveis e tais que a função numérica:

$$t \in A \mapsto \|f(t)\|_X$$

pertence a $L^p(A)$.

Proposição 2.5.6 *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^p(\mathbb{R}; X)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então, para quase todo $t \in \mathbb{R}$ a função $s \in \mathbb{R} \mapsto f(t-s)g(s) \in X$ é Bochner integrável e pondo-se*

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s) ds$$

tem-se $(f * g) \in L^p(\mathbb{R}; X)$ e

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}; X)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}; X)}.$$

Demonstração: ver [9].

□

Proposição 2.5.7 *Sejam $f \in C_0^k(\mathbb{R})$ e $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}; X)$, $k \in \mathbb{N}^*$. Então*

$$(f * g) \in C^k(\mathbb{R}; X).$$

Além disso

$$\frac{d^k}{dt^k}(f * g) = \frac{d^k f}{dt^k} * g$$

Demonstração: ver [9].

□

Definição 2.5.8 *Denomina-se sucessão regularizante a toda sucessão $\{\rho_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções reais tais que:*

$$\rho_\nu \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \text{ supp}(\rho_\nu) \subset \overline{B_{\frac{1}{\nu}}(0)}, \int_{\mathbb{R}} \rho_\nu(t) dt = 1 \text{ e } \rho_\nu \geq 1 \text{ em } \mathbb{R}.$$

Proposição 2.5.9 *Seja $f \in C^0(\mathbb{R}; X)$. Então $\rho_\nu * f \rightarrow f$ uniformemente sobre todo compacto de \mathbb{R} .*

Demonstração: ver [9].

□

Proposição 2.5.10 *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}; X)$, com $1 \leq p < \infty$. Então*

$$\rho_\nu * f \rightarrow f \text{ em } L^p(\mathbb{R}; X).$$

Demonstração: ver [9].

□

2.6 Mais alguns Resultados

Devido a dimensão do trabalho, enunciamos nesta seção mais alguns resultados utilizados no texto.

Proposição 2.6.1 (Lema de Gronwall) *Sejam $z \in L^\infty(0, T)$ e $\varphi \in L^1(0, T)$ tais que $z(x) \geq 0$, $\varphi(t) \geq 0$ e seja $c \geq 0$ uma constante. Se*

$$\varphi(t) \leq c + \int_0^t z(s)\varphi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

então

$$\varphi(t) \leq c.e^{\int_0^t z(s)ds}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Demonstração: Ver [39].

□

Teorema 2.6.2 (de Representação de Riesz-Fréchet) *Seja H um espaço de Hilbert. Dada $\varphi \in H'$, existe $f \in H$ único tal que*

$$\langle \varphi, u \rangle = (f, u), \quad \forall u \in H.$$

Além disso,

$$\|f\|_H = \|\varphi\|_{H'}$$

Demonstração: Ver [7].

□

Definição 2.6.3 *Seja H um espaço de Hilbert. Se diz que uma forma bilinear $a(u, v) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ é*

i) contínua se existe uma constante C tal que

$$|a(u, v)| \leq C|u||v|, \quad \forall u, v \in H \text{ e}$$

ii) coerciva se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq \alpha|v|^2, \quad \forall v \in H.$$

Teorema 2.6.4 (Lax-Milgram) *Seja $a(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então para toda $\varphi \in H'$ existe único $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Além disso, se a é simétrica então u se caracteriza pela propriedade

$$u \in H \text{ e } \frac{1}{2}a(u, v) - \langle \varphi, v \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

Demonstração: Ver [7].

□

O seguinte resultado é uma consequência do teorema da aplicação aberta

Teorema 2.6.5 *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ um operador linear contínuo e bijetivo. Então*

i) T^{-1} é um operador linear e contínuo de F sobre E .

ii) Existem $m, M > 0$ tais que $m\|x\|_E \leq \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$, para todo $x \in E$.

Demonstração: ver corolário 2.21 p.75 em [11].

□

Teorema 2.6.6 (Prolongamento por Densidade) *Sejam E e F espaços de Banach e $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ um operador linear e limitado. Se $D(A)$ for denso em E , então A admite um único prolongamento linear limitado \tilde{A} a todo espaço E . Além disso,*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(D(A), F)} = \|\tilde{A}\|_{\mathcal{L}(E, F)}.$$

Demonstração: ver teorema 2.42 p.88 de [11].

□

Teorema 2.6.7 (da Regularidade Elítica) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de classe C^2 com fronteira Γ limitada. Seja $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então, $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}$ onde c é uma constante que só depende de Ω .

Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e $f \in H^m(\Omega)$, então

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \text{ com } \|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c \|f\|_{H^m(\Omega)}.$$

Em particular, se $m > \frac{n}{2}$ então $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Se Ω é de classe C^∞ e $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, então $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Demonstração: Ver [7].

□

Teorema 2.6.8 (de Aubin-Lions) Sejam B_0, B e B_1 espaços de Banach tais que $B_0 \xrightarrow{\text{comp}} B \xrightarrow{\text{cont}} B_1$, onde B_0 e B_1 são reflexivos. Definamos

$$W = \{u \in L^{p_0}(0, T; B_0); u_t \in L^{p_1}(0, T; B_1)\},$$

onde $1 < p_0, p_1 < \infty$. Consideremos W munido da norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|u\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)},$$

a qual o torna um espaço de Banach. Então a imersão de W em $L^{p_0}(0, T; B)$ é compacta.

Proposição 2.6.9 (Lema de Lions) Seja $\{u_\nu\}$ uma sucessão de funções pertencentes a $L^q(Q)$ com $1 < q < \infty$. Se

i) $u_\nu \rightarrow u$ quase sempre em Q e

ii) $\|u_\nu\|_{L^q(Q)} \leq c$, para todo $\nu \in \mathbb{N}$,

então $u_\nu \rightharpoonup u$ fraco em $L^q(Q)$.

2.7 Operador Definido por uma Terna

Desenvolvemos esta seção conforme [11]. Sejam V e H espaços de Hilbert complexos, cujos produtos internos e normas denotaremos, respectivamente, por $((\cdot, \cdot))$, $\|\cdot\|$ e (\cdot, \cdot) , $|\cdot|$, com V tendo imersão contínua e densa em H .

Seja

$$\begin{aligned} a(\cdot, \cdot) : V \times V &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\longmapsto a(u, v) \end{aligned}$$

uma forma sesquilinear contínua.

Definamos

$$D(A) = \{u \in V; \text{ a forma antilinear } v \in V \mapsto a(u, v) \text{ é contínua} \\ \text{com a topologia induzida por } H\}.$$

Em outras palavras, $D(A)$ é o conjunto dos elementos $u \in V$ tais que a forma antilinear

$$\begin{aligned} g_u : V &\longrightarrow \mathbb{C} \\ v &\longmapsto g_u(v) = a(u, v) \end{aligned} \tag{2.3}$$

é contínua quando induzimos em V a topologia de H . Note que $D(A) \neq \emptyset$ pois $0 \in D(A)$. Sendo V denso em H , podemos estender a aplicação (2.3) a uma aplicação

$$\tilde{g}_u : H \longrightarrow \mathbb{C}$$

antilinear e contínua tal que

$$\tilde{g}_u(v) = g_u(v), \quad \forall v \in V.$$

Pelo teorema 2.6.2, existe único $f_u \in H$ tal que

$$\tilde{g}_u(v) = (f_u, v), \quad \forall v \in H.$$

Em particular,

$$a(u, v) = (f_u, v), \quad \forall v \in V.$$

Desta forma, temos definida a aplicação

$$\begin{aligned} A : D(A) &\longrightarrow H \\ u &\longmapsto Au = f_u \end{aligned} \tag{2.4}$$

e, conseqüentemente, chegamos a uma nova caracterização para $D(A)$, a saber,

$$D(A) = \{u \in V; \text{ existe } f \in H \text{ que verifica } a(u, v) = (f, v), \text{ para todo } v \in V\}.$$

Assim, $D(A)$ é subespaço de H e fica definido um operador linear

$$\begin{aligned} A : D(A) &\longrightarrow H \\ u &\longmapsto Au \end{aligned}$$

onde

$$(Au, v) = a(u, v) \text{ para todo } u \in D(A) \text{ e para todo } v \in V.$$

Neste contexto, diremos que o operador A é definido pela terna $\{V, H, a(u, v)\}$ e denotaremos tal fato escrevendo

$$A \leftrightarrow \{V, H, a(u, v)\}.$$

Teorema 2.7.1 *Sejam V e H espaços de Hilbert com $V \hookrightarrow H$ sendo V denso em H . Se $a(u, v)$ é uma forma sesquilinear, contínua e coerciva em V e A é o operador definido pela terna $\{V, H, a(\cdot, \cdot)\}$, então, para cada $f \in H$, existe um único $u \in D(A)$ tal que $Au = f$.*

Demonstração: ver teorema 5.126 em [11].

□

Sendo A o operador definido pela terna $\{V, H, a(u, v)\}$, verifiquemos o que se pode dizer de uma possível extensão deste. Sejam V' e H' os antiduals de V e H , respectivamente. Definamos

$$\begin{aligned} B : V &\longrightarrow V' \\ u &\longmapsto Bu \quad \text{onde } Bu : V \longrightarrow \mathbb{C} \text{ é definido por} \\ &v \longmapsto \langle Bu, v \rangle_{V', V} = a(u, v). \end{aligned}$$

Observe que a aplicação acima está bem definida e é linear. Da continuidade de $a(\cdot, \cdot)$ segue que B é contínua pois

$$\|Bu\|_{V'} = \sup_{v \in V; \|v\| \leq 1} |\langle Bu, v \rangle| = \sup_{v \in V; \|v\| \leq 1} |a(u, v)| \leq \sup_{v \in V; \|v\| \leq 1} C\|u\|\|v\| \leq C\|u\|,$$

ou seja, $B \in \mathcal{L}(V, V')$. Além disso, veja que

$$Bu = Au, \text{ para todo } u \in D(A),$$

ou seja, B é uma extensão de A a todo V .

No caso particular que

$$a(u, v) = ((u, v)) \text{ onde } ((\cdot, \cdot)) \text{ é o produto interno de } V,$$

então, a extensão B do operador A dada acima é uma bijeção isométrica, onde a injetividade resulta do fato que B é isometria e a sobrejetividade é uma consequência do teorema 2.6.4 de Lax-Milgram.

2.8 Semigrupos e Grupos de Operadores Lineares em Espaços de Banach

Definição 2.8.1 *Seja X um espaço de Banach. Uma família a um parâmetro $S(t)$, $0 \leq t < \infty$, de operadores lineares limitados de X em X é um semigrupo de operador linear limitado de X se*

i) $S(0) = I$.

ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ para todo $t, s \geq 0$

O operador linear A definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

e

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+}{dt} S(t)x \right|_{t=0} \text{ para } x \in D(A)$$

é o gerador infinitesimal do semigrupo $S(t)$, onde $D(A)$ é o domínio de A .

Definição 2.8.2 *Um semigrupo $S(t)$, $0 \leq t < \infty$, de operadores limitados de X é fortemente contínuo se*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)x = x \text{ para todo } x \in X.$$

Um semigrupo de operadores limitados fortemente contínuo de X será chamado de semigrupo de classe C_0 .

Definição 2.8.3 *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A o seu gerador infinitesimal. Ponhamos $A^0 = I$, $A^1 = A$ e, supondo que A^{n-1} esteja definido, vamos definir A^n pondo:*

$$D(A^n) = \{x \in X; x \in D(A^{n-1}) \text{ e } A^{n-1}x \in D(A)\}$$

$$A^n x = A(A^{n-1}x), \quad \forall x \in D(A^n).$$

Proposição 2.8.4 *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo, S , de classe C_0 , então, para todo $x \in D(A^n)$, $S(t)x \in C^{n-k}([0, \infty); D(A^k))$, $k = 0, 1, \dots, n$.*

Demonstração: ver proposição 2.18, p. 23 de [24].

□

Para o espaço de Banach X consideremos seu dual X' . Denotamos por $x^* \in X'$ aplicado em $x \in X$ por $\langle x^*, x \rangle$ ou $\langle x, x^* \rangle$. Para cada $x \in X$ definimos o conjunto dualidade

$$F(x) = \{x^* \in X; \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Do teorema de Hahn-Banach segue que $F(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$.

Definição 2.8.5 *Um operador linear A é dissipativo se para cada $x \in D(A)$ existe um $x^* \in F(x)$ tal que $\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$. O operador linear A é dito m -dissipativo se for dissipativo e $\operatorname{Im}(\lambda_0 - A) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$.*

Proposição 2.8.6 *Se A é m -dissipativo com $\operatorname{Im}(\lambda_0 - A) = X$, para algum $\lambda_0 > 0$, então $\operatorname{Im}(\lambda - A) = X$ para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração: ver proposição 4.12, p.38 de [24].

□

Teorema 2.8.7 (Lumer-Phillips) *O operador A é m -dissipativo se, e somente se, A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X .*

Demonstração: ver teorema 4.3, p.14 em [47].

□

Teorema 2.8.8 *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 . Seja B um operador dissipativo com $D(A) \subset D(B)$ satisfazendo*

$$\|Bx\| \leq \alpha\|Ax\| + \beta\|x\|, \quad \text{para todo } x \in D(A),$$

onde $0 \leq \alpha < 1$ e $\beta \geq 0$. Então $A + B$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 .

Demonstração: ver corolário 3.3, p. 82, de [47].

□

Definição 2.8.9 *Uma família a um parâmetro $S(t)$, $-\infty < t < \infty$, de operadores lineares limitados de um espaço de Banach X é um grupo de operadores lineares de classe C_0 se satisfaz seguintes condições*

- i) $S(0) = I$,
- ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ para $-\infty < t, s < \infty$,
- iii) $\lim_{t \rightarrow 0} S(t)x = x$ para $x \in X$.

Definição 2.8.10 *O gerador infinitesimal A de um grupo $S(t)$ é definido por*

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t}$$

sempre que o limite existe. O domínio de A é o conjunto de todos os elementos $x \in X$ para os quais o limite acima existe

Seja $S(t)$ um grupo de operadores lineares limitados de classe C_0 . Das definições propostas segue que para $t \geq 0$, $S(t)$ é um semigrupo de classe C_0 cujo gerador infinitesimal é o operador A . Além disso, para $t \geq 0$, $S'(t) := S(-t)$ é também um semigrupo de classe C_0 de gerador infinitesimal $-A$. Assim, se $S(t)$ é um grupo de operadores limitados de classe C_0 de X , tanto A como $-A$ são geradores infinitesimais de semigrupos de classe C_0

Definição 2.8.11 *Um grupo S de operadores lineares limitados de um espaço de Hilbert é dito grupo unitário se $S(t)^* = S(t)^{-1}$, $\forall t \geq 0$*

Note que $\|S(t)x\| = \|x\|$ para todo grupo unitário, o que implica que $\|S(t)\| = 1$.

Teorema 2.8.12 (Stone) *Um operador linear A de um espaço de Hilbert, X , é o gerador infinitesimal de um grupo unitário de classe C_0 se, e somente se, $A^* = -A$*

Demonstração: ver teorema 5.8, p.55 de [24].

□

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t), & t > 0, \\ u(0) = x \end{cases} \quad (2.5)$$

onde $f : [0, T[\rightarrow X$.

Observação 2.8.13 *Se f é identicamente nula e A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 , $S(t)$, o problema de Cauchy (2.5) tem uma única solução e esta é dada por $u(t) = S(t)x$, para todo $x \in D(A)$ (ver [47], p. 100). Como $D(A^n) \subset D(A)$, $n = 1, 2, \dots$, a regularidade da solução de (2.5) é dada pela proposição 2.8.4.*

Definição 2.8.14 *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 , $S(t)$. Seja $x \in X$ e $f \in L^1(0, T; X)$. A função $u \in C([0, T]; X)$ dada por*

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

é dita solução fraca do problema de valor inicial (2.5) em $[0, T]$.

Teorema 2.8.15 *Se $f \in L^1(0, T; X)$ então para cada $x \in X$ o problema de valor inicial (2.5) tem uma única solução fraca.*

Demonstração: ver corolário 2.2, p.106 de [47].

□

Definição 2.8.16 *Uma função u que é diferenciável quase sempre em $[0, T]$ e com $u' \in L^1(0, T; X)$ é dita solução forte do problema de valor inicial (2.5) se $u(0) = x$ e $u'(t) = Au(t) + f(t)$ q.s. em $[0, T]$.*

Teorema 2.8.17 *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 , $S(t)$. Se f é diferenciável quase sempre em $[0, T]$ e $f' \in L^1(0, T; X)$ então, para cada $x \in D(A)$ o problema de valor inicial (2.5) tem uma única solução forte em $[0, T]$.*

Demonstração: ver corolário 2.10, p.109 de [47].

□

2.9 Operadores Maximais Monótonos em Espaços de Hilbert

Embora aplicaremos os resultados a seguir para operadores unívocos, a teoria é mais geral, valendo para operadores plurivalentes como passamos a descrever baseados em [4, 6].

Seja H um espaço de Hilbert. Um operador plurivalente A será uma aplicação de H em $\mathcal{P}(H)$, conjunto das partes de H . O domínio de A é dado por

$$D(A) = \{x \in H; Ax \neq \emptyset\}$$

e a imagem de A é o conjunto

$$Im(A) = \bigcup_{x \in H} Ax.$$

Se para cada $x \in H$, o conjunto Ax possui no máximo um elemento diremos que A é unívoco.

O operador A pode ser identificado com seu gráfico em $H \times H$, isto é, $\{(x, y); y \in Ax\}$. Assim o conjunto dos operadores é ordenado pela inclusão de seus gráficos, isto é, $A \subset B \Leftrightarrow Ax \subset Bx, \forall x \in H$.

Definição 2.9.1 *Um operador A é dito monótono se*

$$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0, \quad \forall x_1, x_2 \in D(A),$$

ou mais precisamente,

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0, \quad \forall y_1 \in Ax_1 \text{ e } y_2 \in Ax_2.$$

Diremos que A é maximal monótono se for maximal no conjunto dos operadores monótonos.

Proposição 2.9.2 *Seja A um operador de H . São equivalentes as seguintes asserções:*

- i) *A é um operador maximal monótono;*
- ii) *A é monótono e $Im(I + A) = H$.*

Demonstração: ver proposição 2.2, p.23 de [6].

□

Definição 2.9.3 *Um operador unívoco A de H é dito hemicontínuo em H se $A(x + ty) \rightarrow Ax$ fraco em H' quando $t \rightarrow 0$ para cada $x, y \in H$.*

O seguinte resultado pode ser estabelecido também para espaços de Banach reflexivos

Teorema 2.9.4 *Seja B é um operador monótono, hemicontínuo e limitado de H . Suponha que A é um operador maximal monótono de H . Então $A + B$ é maximal monótono.*

Demonstração: ver corolário 1.1, p.39 de [4].

□

Agora considere o seguinte problema de cauchy abstrato:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) + Au(t) \ni 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Teorema 2.9.5 *Seja A um operador maximal monótono de um espaço de Hilbert H . Para cada $u_0 \in D(A)$, existe uma única função $u(t)$ de $[0, \infty)$ em H tal que*

- i) $u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$;
- ii) $u(t)$ é lipschitziana em $[0, \infty)$, isto é, $\frac{d}{dt}u \in L^\infty(0, \infty; H)$;
- iii) $u(t)$ satisfaz o problema de cauchy abstrato (2.6).

Demonstração: ver teorema 3.1, p.54 de [6].

□

Definição 2.9.6 *A função u dada pelo teorema acima é chamada de solução forte de (2.6). Dizemos que $u \in C([0, T]; H)$ é solução fraca da equação $\frac{d}{dt}u + Au \ni 0$ se existir uma sequência $u_n \in C([0, T]; H)$ de soluções fortes de $\frac{d}{dt}u_n + Au_n \ni 0$ tal que $u_n \rightarrow u$ uniformemente em $[0, T]$.*

Teorema 2.9.7 *Seja A um operador maximal monótono de um espaço de Hilbert H . Para todo $u_0 \in \overline{D(A)}$ existe uma única solução fraca de (2.6).*

Demonstração: ver teorema 3.4, p.65 de [6].

□

2.10 Funções escalarmente contínuas

Seja X um espaço de Banach. Definimos o espaço das funções escalarmente contínuas (ou fracamente contínuas) como o conjunto das funções $f \in L^\infty(0, T; X)$ tais que a aplicação $t \mapsto \langle x, f(t) \rangle$ é contínua sobre $[0, T]$, para todo $x \in X'$, onde X' é o dual de X . Denotaremos tal espaço por $C_s(0, T; X)$.

Disto segue que

$$C_s^1(0, T; X) = \{u \in C_s(0, T; X); u' \in C_s(0, T; X)\},$$

onde u' é a derivada distribucional de u . Da mesma forma

$$C_s^2(0, T; X) = \{u \in C_s(0, T; X); u'' \in C_s(0, T; X)\}.$$

Observação 2.10.1 *Se $u \in L^\infty(0, T; X)$ e $u \in C([0, T]; X)$ então $u \in C_s(0, T; X)$.*

Proposição 2.10.2 *Sejam X e Y espaços de Banach, $X \hookrightarrow Y$ e X reflexivo. Então $L^\infty(0, T; X) \cap C_s(0, T; Y) = C_s(0, T; X)$.*

Demonstração: ver [34].

□

Controlabilidade exata interna do sistema de Bresse generalizado

Neste capítulo consideraremos o sistema de Bresse generalizado dado por

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(a(x)\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l[\omega_x - l\varphi] = f_1 \\ \rho_2 \psi_{tt} - (b(x)\psi_x)_x + k(\varphi_x + \psi + l\omega) = f_2 \\ \rho_1 \omega_{tt} - k_0[c(x)\omega_x - l\varphi]_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) = f_3 \end{cases} \quad (3.1)$$

em $Q = (0, L) \times (0, T)$. Assumimos condições de fronteira do tipo Dirichlet, i.e.,

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \omega(0, t) = \omega(L, t) = 0, \quad (3.2)$$

para $t \in (0, T)$, e condições iniciais

$$\begin{cases} \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, & \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \\ \psi(\cdot, 0) = \psi_0, & \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1, \\ \omega(\cdot, 0) = \omega_0, & \omega_t(\cdot, 0) = \omega_1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Como já mencionado, o problema da controlabilidade exata de (3.1)-(3.3) é formulado da seguinte forma: Dado $T > 0$, suficientemente grande, precisamos encontrar um espaço de Hilbert \mathcal{H} tal que para cada dado inicial $\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1\} \in \mathcal{H}$ seja possível encontrar controles $f_1 = h_1(x, t)\chi$, $f_2 = h_2(x, t)\chi$ e $f_3 = h_3(x, t)\chi$, $h_1, h_2, h_3 \in L^2(l_1, l_2)$, onde χ é a função característica de $(l_1, l_2) \times (0, T)$ com $(l_1, l_2) \subset (0, L)$, de tal forma que a solução $\{\varphi, \psi, \omega\}$ de (3.1)-(3.3) satisfaça

$$\varphi(x, T) = \varphi_t(x, T) = \psi(x, T) = \psi_t(x, T) = \omega(x, T) = \omega_t(x, T) = 0$$

Sendo o resultado de controlabilidade descrito acima nosso objetivo principal, organizamos este capítulo da seguinte maneira: na seção 1 temos algumas definições, hipóteses e a boa colocação. A seção 2 é dedicada a encontrar uma desigualdade de observabilidade, dentro da qual se faz necessário provar um resultado de regularidade escondida. Finalizamos esta seção mostrando uma desigualdade inversa. Na seção 3 o método HUM (Hilbert Uniqueness Method) é aplicado para se obter o resultado de controlabilidade descrito pelo Teorema 3.3.2.

3.1 Observações iniciais e boa colocação

Primeiramente, observamos que as funções a, b, c estão sendo consideradas de modo a satisfazer as condições dadas pela hipótese 3.1.1 abaixo.

Hipótese 3.1.1

$$\begin{cases} a, b, c \in W^{1,\infty}(0, L); \\ a(x) \geq 1, \quad \forall x \in (0, L); \\ b(x) \geq b_0 > 0, \quad \forall x \in (0, L) \text{ com } b_0 \in \mathbb{R}; \\ c(x) \geq 1, \quad \forall x \in (0, L). \end{cases} \quad (3.4)$$

Além disso, todas as constantes consideradas, ρ_1, ρ_2, k, k_0 e l , são positivas. A solução do sistema em questão será denotada por ω, φ, ψ .

Para os resultados de observabilidade e controlabilidade, sempre consideraremos $T > 2\alpha R$ onde

$$\alpha := \max \left\{ 1, \frac{\rho_1}{k}, \frac{\rho_2}{b_0}, \frac{\rho_1}{k_0} \right\} \quad (3.5)$$

e

$$R := \max \{l_1, L - l_2\}, \quad (3.6)$$

com (l_1, l_2) sendo o intervalo de ação dos mecanismos de controle atuam.

Também é importante frisar que as inúmeras constantes, $C > 0$, utilizadas ao longo do texto podem ser alteradas a cada passo.

Passemos a discorrer sobre a existência de solução que é uma consequência da teoria de semigrupos que pode ser encontrada em [47] e está resumidamente descrita

nas preliminares. Para isto, consideremos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = [H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)]^3$$

munido da norma

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|\{\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, \Upsilon\}\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \int_0^L \rho_1 |\Phi|^2 + \rho_2 |\Psi|^2 + \rho_1 |\Upsilon|^2 + k(a(x) - 1)|\varphi_x|^2 + b(x)|\psi_x|^2 \\ &\quad + k_0(c(x) - 1)|\omega_x|^2 + k|\varphi_x + \psi + l\omega|^2 + k_0|\omega_x - l\varphi|^2 dx \end{aligned}$$

a qual é equivalente a norma usual de \mathcal{H} (a demonstração pode ser feita usando argumentos de contradição).

Se denotarmos $V(t) = \{\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, \omega, \omega_t\}$ e $F = \{0, f_1, 0, f_2, 0, f_3\}$ o problema de valor inicial (3.1)-(3.3) se torna equivalente a

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}V(t) = \mathcal{A}V(t) + F \\ V(0) = V_0 \end{cases} \quad (3.7)$$

onde $V_0 = \{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1\}$ e o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k\partial_x(a(x)\partial_x(\cdot)) - k_0l^2I}{\rho_1} & 0 & -\frac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 & -\frac{k+k_0}{\rho_1}l\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & -\frac{\partial_x(b(x)\partial_x(\cdot)) - kI}{\rho_2} & 0 & \frac{kl}{\rho_2}I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \\ \frac{k_0+k}{\rho_1}l\partial_x & 0 & \frac{kl}{\rho_1}I & 0 & -\frac{k_0\partial_x(c(x)\partial_x(\cdot)) - kl^2I}{\rho_1} & 0 \end{pmatrix}$$

com $D(\mathcal{A}) = [H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)]^3$.

Note que \mathcal{A} é m-dissipativo. Mostraremos primeiramente que \mathcal{A} é dissipativo. De fato, seja $U = \{\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, \Upsilon\} \in D(\mathcal{A})$. Então

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} \\
&= \int_0^L k(a(x)\varphi_x + \psi + l\omega)_x \Phi + k_0 l[\omega_x - l\varphi] \Phi + (b(x)\phi_x)_x \Psi - k(\varphi_x + \psi + l\omega) \Psi \\
&\quad + k_0[c(x)\omega_x - l\varphi]_x \Upsilon - kl(\varphi_x + \psi + l\omega) \Upsilon + k(a(x) - 1)\varphi_x \Phi_x + b(x)\psi_x \Psi_x \\
&\quad + k_0(c(x) - 1)\omega_x \Upsilon_x + k(\varphi_x + \psi + l\omega)(\Phi_x + \Psi + l\Upsilon) + k_0[\omega_x - l\varphi][\Upsilon_x - l\Phi] \, dx \\
&= \int_0^L -k(a(x)\varphi_x + \psi + l\omega) \Phi_x - (b(x)\phi_x) \Psi_x - k_0[c(x)\omega_x - l\varphi] \Upsilon_x + k(a(x) - 1)\varphi_x \Phi_x \\
&\quad + b(x)\psi_x \Psi_x + k_0(c(x) - 1)\omega_x \Upsilon_x + k(\varphi_x + \psi + l\omega) \Psi_x + k_0[\omega_x - l\varphi] \Upsilon_x \, dx \\
&\quad + [k(a(x)\varphi_x + \psi + l\omega) \Phi]_0^L + [b(x)\psi_x \Psi]_0^L + [k_0(c(x)\omega_x - l\varphi) \Upsilon]_0^L \\
&= 0, \quad U \in D(\mathcal{A}).
\end{aligned}$$

Portanto, $(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = 0$ o que implica que \mathcal{A} é dissipativo.

Mostremos agora que \mathcal{A} é m-dissipativo. Basta observar que $Im(I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$. Com efeito, seja $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\} \in \mathcal{H}$ e portanto é suficiente provar que existe $U \in D(\mathcal{A})$ satisfazendo o problema espectral

$$U - \mathcal{A}U = G. \quad (3.8)$$

Fazendo $U = \{\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, \Upsilon\}$, a equação (3.8) fica equivalente

$$\varphi + \Phi = g_1 \quad \text{em } H_0^1(0, L), \quad (3.9a)$$

$$\rho_1 \Phi + k(a(x)\varphi_x - \psi + l\omega)_x + k_0 l[\omega_x - l\varphi] = \rho_1 g_2 \quad \text{em } L^2(0, L), \quad (3.9b)$$

$$\psi + \Psi = g_3 \quad \text{em } H_0^1(0, L), \quad (3.9c)$$

$$\rho_2 \Psi + (b(x)\psi_x)_x - k(\varphi_x + \psi + l\omega) = \rho_2 g_4 \quad \text{em } L^2(0, L), \quad (3.9d)$$

$$\omega + \Upsilon = g_5 \quad \text{em } H_0^1(0, L), \quad (3.9e)$$

$$\rho_1 \Upsilon + k_0[c(x)\omega_x - l\varphi]_x - kl(\varphi_x + \psi + l\omega) = \rho_1 g_6 \quad \text{em } L^2(0, L). \quad (3.9f)$$

Isolando Φ, Ψ, Υ nas equações (3.9a), (3.9c) e (3.9e) e substituindo em (3.9b), (3.9d) e (3.9f) obtemos

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi - k(a(x)\varphi_x - \psi + l\omega)_x - k_0 l[\omega_x - l\varphi] = G_1 & \text{em } L^2(0, L), \\ \rho_2 \psi - (b(x)\psi_x)_x + k(\varphi_x + \psi + l\omega) = G_2 & \text{em } L^2(0, L), \\ \rho_1 \omega - k_0[c(x)\omega_x - l\varphi]_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) = G_3 & \text{em } L^2(0, L). \end{cases} \quad (3.10)$$

onde

$$G_1 = \rho_1(g_1 - g_2), \quad G_2 = \rho_2(g_3 - g_4) \text{ e } G_3 = \rho_1(g_5 - g_6). \quad (3.11)$$

Assim definimos a forma bilinear

$$\alpha : [H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

de forma que

$$\begin{aligned} & \alpha(\{\varphi, \psi, \omega\}, \{u, v, z\}) \\ &= \int_0^L \rho_1 \varphi u + \rho_2 \psi v + \rho_1 \omega z + (a(x) - 1)\varphi_x u_x + b(x)\psi_x v_x + k_0(c(x) - 1)\omega_x z_x \\ & \quad + k(\varphi_x + \psi + l\omega)(u_x + v + lz) + k_0[\omega_x - l\varphi][z_x - lu] \, dx. \end{aligned}$$

Observe que $\alpha(\{\varphi, \psi, \omega\}, \{\varphi, \psi, \omega\})$ define uma norma, equivalente a usual, em $[H_0^1(0, L)]^3$. Donde segue que α é contínua e coerciva.

Multiplicando (3.10) por u , v e z e integrando em $(0, L)$ obtemos que

$$\begin{aligned} \alpha(\{\varphi, \psi, \omega\}, \{u, v, z\}) &= \int_0^L G_1 u + G_2 v + G_3 z \, dx \\ &= \langle \{G_1, G_2, G_3\}, \{u, v, z\} \rangle_{[H_0^1(0, L)]^3, [H_0^1(0, L)]^3}, \quad \forall \{u, v, z\} \in H_0^1(0, L)^3. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Lax-Milgram, o sistema (3.10) tem única solução $\{\varphi, \psi, \omega\} \in H_0^1(0, L)^3$. Disso, de (3.9) e de (3.11) obtemos $U = \{\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, \Upsilon\}$ em \mathcal{H} satisfazendo (3.8) provando assim que $Im(I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ e, portanto, que \mathcal{A} é m-dissipativo.

Pelo Teorema de Lumer-Phillips \mathcal{A} é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 . Isto implica, em virtude dos teoremas 2.8.17 e 2.8.15, que o problema (3.7) tem única solução forte e única solução fraca dependendo da escolha dos dados iniciais e da não homogeneidade. Equivalentemente, o problema de valor inicial (3.1)-(3.3) tem únicas soluções forte e fraca.

Passemos agora a discussão sobre a solução ultrafraca de (3.1)-(3.3).

Definição 3.1.2 Dizemos que $\{\varphi, \psi, \omega\}$ é uma solução ultrafraca de (3.1) se satisfaz

$$\begin{aligned} & \int_Q \varphi g_1 + \psi g_2 + \omega g_3 \, dx \, dt - \rho_1(\varphi_0, u_t(0)) + \rho_1 \langle \varphi_1(0), u(0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ & - \rho_2(\psi_0, v_t(0)) + \rho_2 \langle \psi_1, v(0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} - \rho_1(\omega_0, z_t(0)) + \rho_1 \langle \omega_1(0), z(0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ & = \int_0^T \langle f_1(t), u(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \, dt + \int_0^T \langle f_2(t), v(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \, dt + \int_0^T \langle f_3(t), z(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \, dt \end{aligned}$$

onde $\{u, v, z\}$ é solução fraca de

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - k(a(x)u_x + v + lz)_x - k_0 l[z_x - lu] = g_1, \\ \rho_2 v_{tt} - (b(x)v_x)_x + k(u_x + v + lz) = g_2, \\ \rho_1 z_{tt} - k_0[c(x)z_x - lu]_x + kl(u_x + v + lz) = g_3, \\ u(x, T) = u_t(x, T) = v(x, T) = v_t(x, T) = z(x, T) = z_t(x, T) = 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = v(0, t) = v(L, t) = z(0, t) = z(L, t) = 0, \end{cases}$$

com $g_1, g_2, g_3 \in L^1(0, T; L^2(0, L))$.

Desta definição temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1.3 Dado $T > 0$, $\varphi_0, \psi_0, \omega_0 \in L^2(0, L)$, $\varphi_1, \psi_1, \omega_1 \in H^{-1}(0, L)$ e $f_1, f_2, f_3 \in L^1(0, T; H^{-1}(0, L))$ existe única solução ultrafraca

$$\{\varphi, \psi, \omega\} \in C([0, T]; L^2(0, L)) \cap C^1([0, T]; H^{-1}(0, L)),$$

de (3.1). Além disso, existe uma constante, $C > 0$, tal que

$$\begin{aligned} & \|\{\varphi, \psi, \omega\}\|_{[L^\infty(0, T; L^2(0, L))]^3} + \|\{\varphi_t, \psi_t, \omega_t\}\|_{[L^\infty(0, T; H^{-1}(0, L))]^3} \\ & \leq C \left[\|\{\varphi_0, \psi_0, \omega_0\}\|_{[L^2(0, L)]^3} + \|\{\varphi_1, \psi_1, \omega_1\}\|_{[H^{-1}(0, L)]^3} + \|\{f_1, f_2, f_3\}\|_{[L^1(0, T; H^{-1}(0, L))]^3} \right]. \end{aligned}$$

Demonstração: Considere a forma bilinear

$$\begin{aligned} a(\cdot, \cdot) : H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto a(u, v) = \int_0^L a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx \end{aligned}$$

Observe que $a(\cdot, \cdot)$ é coerciva pois $a(x) \geq 1 > 0$.

Seja A o operador definido pela terna $\{H_0^1(0, L), L^2(0, L), a(\cdot, \cdot)\}$. Então $A : D(A) \subset H_0^1(0, L) \longrightarrow L^2(0, L)$ e

$D(A) = \{u \in H_0^1(0, L); \text{ existe } f \in L^2(0, L) \text{ que verifica } a(u, v) = (f, v), \forall v \in H_0^1(0, L)\}$.

Assim, se $u \in D(A)$ então

$$(Au, v) = a(u, v) = \int_0^L a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx. \quad (3.12)$$

Pelo teorema 2.7.1 segue que A é uma bijeção.

Agora seja $\varphi \in C_0^\infty(0, L)$. Como $u \in D(A)$ e $C_0^\infty(0, L) \hookrightarrow H_0^1(0, L)$ vale que

$$(Au, \varphi) = \int_0^L a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = - \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \left(a(\cdot) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \varphi \right\rangle_{D', D}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0, L)$$

o que implica que

$$Au = - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(\cdot) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \text{ em } D'(0, L).$$

Mas como $Au \in L^2(0, L)$ vem que

$$Au = - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(\cdot) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \text{ em } L^2(0, L).$$

como esta última vale para todo $u \in D(A)$, temos que

$$A = - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(\cdot) \frac{\partial}{\partial x} \right), \text{ em } D(A).$$

Considere também a extensão de A , ainda denotada por A ,

$$\begin{aligned} A : H_0^1(0, L) &\longrightarrow H^{-1}(0, L) \\ u &\longmapsto Au : H_0^1(0, L) \longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \langle Au, v \rangle = a(u, v) \end{aligned}$$

Note que essa extensão ainda é uma bijeção. De fato, seja $u \in H_0^1(0, L)$ então

$$\|u\|^2 = \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx \leq \int_0^L a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx = a(u, u) = \langle Au, u \rangle \leq \|Au\|_{H^{-1}(0, L)} \|u\|, \quad (3.13)$$

isto é, $\|u\| \leq \|Au\|_{H^{-1}(0, L)}$, de onde segue a injetividade. A sobrejetividade é uma consequência do teorema 2.6.4 de Lax-Milgram.

Com tais informações, definimos o produto interno

$$((\phi, \psi))_{-a} = \langle \phi, A^{-1}\psi \rangle, \quad \phi, \psi \in H^{-1}(0, L).$$

Afirmção: $((\cdot, \cdot))_{-a}$ é um produto interno em $H^{-1}(0, L)$.

De fato,

Simetria:

$$\begin{aligned} ((\phi, \psi))_{-a} &= \langle \phi, A^{-1}\psi \rangle = \langle AA^{-1}\phi, A^{-1}\psi \rangle = a(A^{-1}\phi, A^{-1}\psi) \\ &= a(A^{-1}\psi, A^{-1}\phi) = \langle A^{-1}\psi, AA^{-1}\phi \rangle = \langle A^{-1}\psi, \phi \rangle = ((\psi, \phi))_{-a}. \end{aligned}$$

Linearidade: imediata.

Positividade: note que

$$((\phi, \phi))_{-a} = a(A^{-1}\phi, A^{-1}\phi) = \int_0^L a(x) \left[\frac{\partial}{\partial x} (A^{-1}\phi(x)) \right]^2 dx \geq 0.$$

Além disso,

$$((\phi, \phi))_{-a} = 0 \Leftrightarrow \phi = 0 \text{ em } H^{-1}(0, L).$$

Analogamente, obtemos operadores B e C , produtos internos $((\cdot, \cdot))_{-b}$ e $((\cdot, \cdot))_{-c}$ e normas $\|\cdot\|_{-b}$ e $\|\cdot\|_{-c}$ a partir de

$$\begin{aligned} b(\cdot, \cdot) : H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto b(u, v) = \int_0^L b(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx \end{aligned}$$

e

$$c(\cdot, \cdot) : H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto c(u, v) = \int_0^L c(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

Mostremos que as normas $\|\cdot\|_{-a}$, $\|\cdot\|_{-b}$, $\|\cdot\|_{-c}$ e $\|\cdot\|_{H^{-1}(0,L)}$ são equivalentes. Faremos para $\|\cdot\|_{-a}$ e $\|\cdot\|_{H^{-1}(0,L)}$. As demais seguirão de modo análogo.

Como $A : H_0^1(0, L) \longrightarrow H^{-1}(0, L)$ é contínua, pelo teorema 2.6.5, $A^{-1} : H^{-1}(0, L) \longrightarrow H_0^1(0, L)$ é contínua. Logo

$$\|\phi\|_{-a} = \langle \phi, A^{-1}\phi \rangle = a(A^{-1}\phi, A^{-1}\phi) \leq C\|A^{-1}\phi\|_{H_0^1(0,L)}^2 \leq C\|\phi\|_{H^{-1}(0,L)}^2.$$

Por outro lado, munindo $H_0^1(0, L)$ com o produto interno

$$((u, v))_a = \int_0^L a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx,$$

segue que o operador

$$A : (H_0^1(0, L), ((\cdot, \cdot))_a) \longrightarrow (H^{-1}(0, L), ((\cdot, \cdot))_{-a})$$

é uma isometria. Além disso, quando $H_0^1(0, L)$ está munido com a norma usual e $H^{-1}(0, L)$ com a norma $\|\cdot\|_{H^{-1}(0,L)}$ temos que A é contínuo, pois

$$\frac{1}{\|a\|_\infty} \|u\|_a^2 = \frac{1}{\|a\|_\infty} \int_0^L a(x) u_x^2 dx \leq \int_0^L u_x^2 dx = \|u\|_{H_0^1(0,L)}^2 \leq \int_0^L a(x) u_x^2 dx = \|u\|_a^2.$$

e portanto

$$\|Au\|_{H^{-1}(0,L)} = \sup_{v \neq 0} \frac{|\langle Au, v \rangle|}{\|v\|_{H_0^1(0,L)}} = \sup_{v \neq 0} \frac{|a(u, v)|}{\|v\|_{H_0^1(0,L)}} = \sup_{v \neq 0} \frac{\|u\|_a \|v\|_a}{\|v\|_{H_0^1(0,L)}} \leq C \|u\|_{H_0^1(0,L)}.$$

Assim, considere $\phi \in H^{-1}(0, L)$. Como A é bijeção existe $u \in H_0^1(0, L)$ tal que $Au = \phi$ e

$$\|\phi\|_{H^{-1}(0,L)}^2 = \|Au\|_{H^{-1}(0,L)}^2 \leq C \|u\|_{H_0^1(0,L)}^2 \leq C \|u\|_a^2 = C \|Au\|_{-a}^2 = C \|\phi\|_{-a}^2$$

o que prova a equivalência das normas $\|\cdot\|_{-a}$ e $\|\cdot\|_{H^{-1}(0,L)}$.

Pelas construções, as seguintes imersões

$$\begin{aligned} D(A) &\hookrightarrow H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^2(0, L) \equiv [L^2(0, L)]' \hookrightarrow H^{-1}(0, L) \hookrightarrow [D(A)]', \\ D(B) &\hookrightarrow H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^2(0, L) \equiv [L^2(0, L)]' \hookrightarrow H^{-1}(0, L) \hookrightarrow [D(B)]' \text{ e} \\ D(C) &\hookrightarrow H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^2(0, L) \equiv [L^2(0, L)]' \hookrightarrow H^{-1}(0, L) \hookrightarrow [D(C)]' \end{aligned}$$

são contínuas e densas.

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $\{\varphi_{0n}, \psi_{0n}, \omega_{0n}\} \in [H_0^1(0, L)]^3$, $\{\varphi_{1n}, \psi_{1n}, \omega_{1n}\} \in [L^2(0, L)]^3$ e $\{f_{1n}, f_{2n}, f_{3n}\} \in [L^1(0, T; L^2(0, L))]^3$ tais que

$$\begin{aligned} \{\varphi_{0n}, \psi_{0n}, \omega_{0n}\} &\rightarrow \{\varphi_0, \psi_0, \omega_0\} && \text{em } [L^2(0, L)]^3, \\ \{\varphi_{1n}, \psi_{1n}, \omega_{1n}\} &\rightarrow \{\varphi_1, \psi_1, \omega_1\} && \text{em } [H^{-1}(0, L)]^3, \\ \{f_{1n}, f_{2n}, f_{3n}\} &\rightarrow \{f_1, f_2, f_3\} && \text{em } [L^1(0, T; H^{-1}(0, L))]^3 \end{aligned}$$

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, o problema aproximado

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{ntt} - k(a(x)\varphi_{nx} + \psi_n + l\omega_n)_x - k_0 l[\omega_{nx} - l\varphi_n] = f_{1n} \\ \rho_2 \psi_{ntt} - (b(x)\psi_{nx})_x + k(\varphi_{nx} + \psi_n + l\omega_n) = f_{2n} \\ \rho_1 \omega_{ntt} - k_0[c(x)\omega_{nx} - l\varphi_n]_x + kl(\varphi_{nx} + \psi_n + l\omega_n) = f_{3n} \\ \varphi_n(\cdot, 0) = \varphi_{0n}, \quad \varphi_{nt}(\cdot, 0) = \varphi_{1n}, \\ \psi_n(\cdot, 0) = \psi_{0n}, \quad \psi_{nt}(\cdot, 0) = \psi_{1n}, \\ \omega_n(\cdot, 0) = \omega_{0n}, \quad \omega_{nt}(\cdot, 0) = \omega_{1n}, \end{cases} \quad (3.14)$$

tem única solução fraca $\{\varphi_n, \psi_n, \omega_n\}$ tal que

$$\varphi_n, \psi_n, \omega_n \in C([0, T]; H_0^1(0, L)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, L)).$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \varphi_n, \psi_n, \omega_n &\in L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)) \hookrightarrow L^1(0, T; H^{-1}(0, L)), \\ \varphi_{nx}, \psi_{nx}, \omega_{nx} &\in L^\infty(0, T; L^2(0, L)) \hookrightarrow L^1(0, T; H^{-1}(0, L)), \\ f_{1n}, f_{2n}, f_{3n} &\in L^1(0, T; L^2(0, L)) \hookrightarrow L^1(0, T; H^{-1}(0, L)), \\ (a(\cdot)\varphi_{nx})_x, (b(\cdot)\psi_{nx})_x, (c(\cdot)\omega_{nx})_x &\in L^1(0, T; H^{-1}(0, L)), \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\varphi_{ntt}, \psi_{ntt}, \omega_{ntt} \in L^1(0, T; H^{-1}(0, L)).$$

Daí

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{ntt} - k(a(x)\varphi_{nx} + \psi_n + l\omega_n)_x - k_0 l[\omega_{nx} - l\varphi_n] = f_{1n} \\ \rho_2 \psi_{ntt} - (b(x)\psi_{nx})_x + k(\varphi_{nx} + \psi_n + l\omega_n) = f_{2n} \\ \rho_1 \omega_{ntt} - k_0[c(x)\omega_{nx} - l\varphi_n]_x + kl(\varphi_{nx} + \psi_n + l\omega_n) = f_{3n} \end{cases} \quad (3.15)$$

se verifica para quase todo $t \in (0, T)$ em $H^{-1}(0, L)$.

Estimativa 1:

Como $\varphi_{nt}(t), \psi_{nt}(t), \omega_{nt}(t) \in L^2(0, L) \leftrightarrow H^{-1}(0, L)$ então ficam bem definidos $A^{-1}\varphi_{nt}(t)$, $B^{-1}\psi_{nt}(t)$ e $C^{-1}\omega_{nt}(t)$ como elementos de $H_0^1(0, L)$. Logo podemos compor as equações do sistema (3.15) com $A^{-1}\varphi_{nt}(t)$, $B^{-1}\psi_{nt}(t)$ e $C^{-1}\omega_{nt}(t)$ e obter

$$\begin{aligned} \langle \rho_1 \varphi_{ntt}(t) - k(a(x)\varphi_{nx}(t) + \psi_n(t) + l\omega_n(t))_x - k_0 l[\omega_{nx}(t) - l\varphi_n(t)], A^{-1}\varphi_{nt}(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ = \langle f_{1n}(t), A^{-1}\varphi_{nt}(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \langle \rho_2 \psi_{ntt}(t) - (b(x)\psi_{nx}(t))_x + k(\varphi_{nx}(t) + \psi_n(t) + l\omega_n(t)), B^{-1}\psi_{nt}(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ = \langle f_{2n}(t), B^{-1}\psi_{nt}(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \langle \rho_1 \omega_{ntt}(t) - k_0[c(x)\omega_{nx}(t) - l\varphi_n(t)]_x + kl(\varphi_{nx}(t) + \psi_n(t) + l\omega_n(t)), C^{-1}\omega_{nt}(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ = \langle f_{3n}(t), C^{-1}\omega_{nt}(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Note que

$$\langle \rho_1 \varphi_{ntt}(t), A^{-1}\varphi_{nt}(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = ((\rho_1 \varphi_{ntt}(t), \varphi_{nt}(t)))_{-a} = \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \|\varphi_{nt}(t)\|_{-a}^2,$$

$$\begin{aligned} \langle -k(a(x)\varphi_{nx}(t))_x, A^{-1}\varphi_{nt}(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} &= k \langle A\varphi_n(t), A^{-1}\varphi_{nt}(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ &= k((A\varphi_n(t), \varphi_{nt}(t)))_{-a} = k((\varphi_{nt}(t), A\varphi_n(t)))_{-a} \\ &= k \langle \varphi_{nt}(t), \varphi_n(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = k((\varphi_{nt}(t), \varphi_n(t)))_{L^2(0, L)} = \frac{k}{2} \frac{d}{dt} \|\varphi_n(t)\|_{L^2(0, L)}^2, \end{aligned}$$

e

$$\langle k_0 l^2 \varphi_n(t), A^{-1}\varphi_{nt}(t) \rangle = k_0 l^2 ((\varphi_n(t), \varphi_{nt}(t)))_{-a} = \frac{k_0 l^2}{2} \frac{d}{dt} \|\varphi_n(t)\|_{-a}^2.$$

Com um procedimento análogo para os demais termos de (3.16), (3.17) e (3.18) e somando essas equações obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}K_n(t) = & k \langle (\varphi_n(t) + l\omega_n(t))_x, A^{-1}\varphi_{nt}(t) \rangle + k_0l \langle \omega_{nx}(t), A^{-1}\varphi_{nt}(t) \rangle + \langle f_{1n}(t)A^{-1}\varphi_{nt}(t) \rangle \\ & - k \langle \varphi_{nx}(t) + l\omega(t), B^{-1}\psi_{nt}(t) \rangle + \langle f_{2n}(t), B^{-1}\varphi_{nt}(t) \rangle - k_0l \langle \varphi_{nx}(t), C^{-1}\varphi_{nt}(t) \rangle \\ & - kl \langle \varphi_{nx}(t) + \psi_n(t), C^{-1}\varphi_{nt}(t) \rangle + \langle f_{3n}(t), C^{-1}\varphi_{nt}(t) \rangle \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde

$$\begin{aligned} K_n(t) = & \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_{nt}(t)\|_{-a}^2 + \frac{\rho_2}{2} \|\psi_{nt}(t)\|_{-b}^2 + \frac{\rho_1}{2} \|\omega_{nt}(t)\|_{-c}^2 \\ & + \frac{k}{2} \|\varphi_n(t)\|_{L^2(0,L)}^2 + \frac{1}{2} \|\varphi_n(t)\|_{L^2(0,L)}^2 + \frac{k_0}{2} \|\omega_n(t)\|_{L^2(0,L)}^2 \\ & + \frac{k_0l^2}{2} \|\varphi_n(t)\|_{-a}^2 + \frac{k}{2} \|\psi_n(t)\|_{-b}^2 + \frac{kl^2}{2} \|\omega_n(t)\|_{-c}^2. \end{aligned}$$

Agora vamos estimar cada termo do lado direito de (3.19). Note que

$$\begin{aligned} |\langle (\psi_n(t) + l\omega_n(t))_x, A^{-1}\varphi_{nt}(t) \rangle| &= k |((\psi_n(t) + l\omega_n(t))_x, \varphi_{nt}(t))_{-a}| \\ &\leq k \|(\psi_n(t) + l\omega_n(t))_x\|_{-a} \|\varphi_{nt}(t)\|_{-a} \\ &\leq Ck \|(\psi_n(t) + l\omega_n(t))_x\|_{H^{-1}(0,L)} \|\varphi_{nt}(t)\|_{-a} \\ &\leq \frac{Ck}{2} \|(\psi_n(t) + l\omega_n(t))_x\|_{H^{-1}(0,L)} + \frac{Ck}{2} \|\varphi_{nt}(t)\|_{-a} \\ &\leq C \frac{k}{2} \{ \|\psi_n(t) + l\omega_n(t)\|_{L^2(0,L)} + \|\varphi_{nt}(t)\|_{-a} \} \end{aligned}$$

Analogamente obtemos

$$|kl \langle \varphi_{nx}(t), C^{-1}\omega_{nt}(t) \rangle| \leq C \frac{kl}{2} \left\{ \|\varphi_n(t)\|_{L^2(0,L)}^2 + \|\omega_{nt}(t)\|_{-c}^2 \right\}$$

$$|k_0l \langle \omega_{nx}(t), A^{-1}\varphi_{nt}(t) \rangle| \leq C \frac{k_0l}{2} \left\{ \|\omega_n(t)\|_{L^2(0,L)}^2 + \|\varphi_{nt}(t)\|_{-a}^2 \right\}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
|\langle f_{1n}(t), A^{-1}\varphi_{nt}(t) \rangle| &= |((f_{1n}(t), \varphi_{nt}(t)))_{-a}| \\
&\leq \|f_{1n}(t)\|_{-a} \|\varphi_{nt}(t)\|_{-a} \\
&\leq C \|f_{1n}(t)\|_{H^{-1}(0,L)} \|\varphi_{nt}(t)\|_{-a} \\
&\leq C \|f_{1n}(t)\|_{H^{-1}(0,L)} \sqrt{\|\varphi_{nt}(t)\|_{-a}^2} \\
&\leq C \|f_{1n}(t)\|_{H^{-1}(0,L)} \sqrt{K_n(t)},
\end{aligned}$$

e, de modo análogo,

$$\begin{aligned}
|\langle f_{2n}(t), B^{-1}\psi_{nt}(t) \rangle| &\leq C \|f_{2n}(t)\|_{H^{-1}(0,L)} \sqrt{K_n(t)}, \\
|\langle f_{3n}(t), C^{-1}\omega_{nt}(t) \rangle| &\leq C \|f_{3n}(t)\|_{H^{-1}(0,L)} \sqrt{K_n(t)}.
\end{aligned}$$

Para finalizar estas estimativas, observe ainda que

$$\begin{aligned}
|-k \langle \varphi_{nx}(t) + l\omega_{nt}(t), B^{-1}\varphi_{nt}(t) \rangle| &\leq k |\langle \varphi_{nx}(t), B^{-1}\varphi_{nt}(t) \rangle| + kl |\langle \omega_n, B^{-1}\varphi_{nt}(t) \rangle| \\
&\leq C \frac{k}{2} \left\{ \|\varphi_n(t)\|_{L^2(0,L)}^2 + \|\psi_{nt}(t)\|_{-b}^2 \right\} \\
&\quad + C \frac{kl}{2} \left\{ \|\omega_n(t)\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + \|\psi_n(t)\|_{-b}^2 \right\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|-kl \langle \varphi_{nx}(t) + \psi_n(t), C^{-1}\omega_{nt}(t) \rangle| &\leq C \frac{kl}{2} \left\{ \|\varphi_n(t)\|_{L^2(0,T)}^2 + \|\omega_{nt}(t)\|_{-c}^2 \right\} \\
&\quad + C \frac{kl}{2} \left\{ \|\psi_n(t)\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + \|\omega_n(t)\|_{-c}^2 \right\}
\end{aligned}$$

Destas estimativas e de (3.19) vem que

$$\frac{d}{dt} K_n(t) \leq C \left\{ \sqrt{K_n(t)} + \|f_{1n}(t)\|_{H^{-1}(0,L)} + \|f_{2n}(t)\|_{H^{-1}(0,L)} + \|f_{3n}(t)\|_{H^{-1}(0,L)} \right\} \sqrt{K_n(t)},$$

quase sempre em $(0, T)$. De onde obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \sqrt{K_n(t)} &= \frac{K'_n(t)}{2\sqrt{K_n(t)}} = \frac{1}{2\sqrt{K_n(t)}} \frac{d}{dt} K_n(t) \\
&\leq C \left\{ \sqrt{K_n(t)} + \|f_{1n}(t)\|_{H^{-1}(0,L)} + \|f_{2n}(t)\|_{H^{-1}(0,L)} + \|f_{3n}(t)\|_{H^{-1}(0,L)} \right\}.
\end{aligned}$$

Integrando de 0 a t , $t \leq T$, segue

$$\begin{aligned} & \sqrt{K_n(t)} - \sqrt{K_n(0)} \\ & \leq C \int_0^t \sqrt{K_n(s)} \, ds + C \int_0^t \|f_{1n}(s)\|_{H^{-1}(0,L)} + \|f_{2n}(s)\|_{H^{-1}(0,L)} + \|f_{3n}(s)\|_{H^{-1}(0,L)} \, ds \\ & \leq C \int_0^t \sqrt{K_n(s)} \, ds + C \|f_{1n}\|_{L^1(0,T;H^{-1}(0,L))} + C \|f_{2n}\|_{L^1(0,T;H^{-1}(0,L))} + C \|f_{3n}\|_{L^1(0,T;H^{-1}(0,L))}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\sqrt{K_n(t)} \leq \underbrace{\sqrt{K_n(0)} + C \|\{f_{1n}, f_{2n}, f_{3n}\}\|_{L^1(0,T;H^{-1}(0,L))}^3}_{\text{limitada}} + C \int_0^t \sqrt{K_n(s)} \, ds,$$

e como $\varphi_n, \psi_n, \omega_n \in C([0, T]; H_0^1(0, L)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, L))$ e $L^2(0, L) \hookrightarrow H^{-1}(0, L)$ resulta que $\varphi_n, \psi_n, \omega_n \in C^1([0, T]; H^{-1}(0, L))$ e portanto,

$$\varphi_{nt}, \psi_{nt}, \omega_{nt} \in C([0, T]; H^{-1}(0, L)).$$

Observe ainda que pelas equivalências de normas, podemos considerar em $H^{-1}(0, L)$ a norma usual, $\|\cdot\|_{-a}$, $\|\cdot\|_{-b}$ ou $\|\cdot\|_{-c}$ e obtemos os mesmos resultados. De onde obtemos que K_n é contínua. Daí pela desigualdade de Gronwall vem que

$$\sqrt{K_n(t)} \leq \sqrt{K_n(0)} + C \|\{f_{1n}, f_{2n}, f_{3n}\}\|_{L^1(0,T;H^{-1}(0,L))}^3.$$

Tendo em vista a definição de K_n e a equivalência das normas, elevando ao quadrado a última desigualdade, chegamos a

$$\begin{aligned} & \rho_1 \|\varphi_{nt}(t)\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + \rho_2 \|\psi_{nt}(t)\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + \rho_1 \|\omega_{nt}(t)\|_{H^{-1}(0,L)}^2 \\ & + k \|\varphi_n(t)\|_{L^2(0,L)}^2 + \|\varphi_n(t)\|_{L^2(0,L)}^2 + k_0 \|\omega_n(t)\|_{L^2(0,L)}^2 \\ & + k_0 l^2 \|\varphi_n(t)\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + k \|\psi_n(t)\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + k l^2 \|\omega_n(t)\|_{H^{-1}(0,L)}^2 \\ & \leq \rho_1 \|\varphi_{1n}\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + \rho_2 \|\psi_{1n}\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + \rho_1 \|\omega_{1n}\|_{H^{-1}(0,L)}^2 \\ & + k \|\varphi_{0n}\|_{L^2(0,L)}^2 + \|\varphi_{0n}\|_{L^2(0,L)}^2 + k_0 \|\omega_{0n}\|_{L^2(0,L)}^2 \\ & + k_0 l^2 \|\varphi_{0n}\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + k \|\psi_{0n}\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + k l^2 \|\omega_{0n}\|_{H^{-1}(0,L)}^2 \\ & + C \|\{f_{1n}, f_{2n}, f_{3n}\}\|_{L^1(0,T;H^{-1}(0,L))}^3, \end{aligned} \tag{3.20}$$

para todo $t \in [0, T]$ e $n \in \mathbb{N}$.

Devido a linearidade do problema, fazemos a diferença de Cauchy em m e n obtendo assim uma estimativa análoga a (3.20) para todo $t \in [0, T]$. Usando a convergência dos dados iniciais resulta que

$$\begin{aligned} (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ e } (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ são seqüências de Cauchy em } C([0, T]; L^2(0, L)), \\ (\varphi_{nt})_{n \in \mathbb{N}}, (\psi_{nt})_{n \in \mathbb{N}} \text{ e } (\omega_{nt})_{n \in \mathbb{N}} \text{ são seqüências de Cauchy em } C([0, T]; H^{-1}(0, L)). \end{aligned}$$

Portanto existem $\varphi, \psi, \omega \in C([0, T]; L^2(0, L))$ tais que

$$\begin{cases} \varphi_n \rightarrow \varphi, & \psi_n \rightarrow \psi, & \omega_n \rightarrow \omega & \text{em } C([0, T]; L^2(0, L)) \\ \varphi_{nt} \rightarrow \varphi_t, & \psi_{nt} \rightarrow \psi_t, & \omega_{nt} \rightarrow \omega_t & \text{em } C([0, T]; H^{-1}(0, L)). \end{cases} \quad (3.21)$$

De (3.20), do fato que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $a \geq 0, b \geq 0$ e da imersão $L^2(0, L) \hookrightarrow H^{-1}(0, L)$, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho_1} \|\varphi_{nt}\|_{H^{-1}(0, L)} &= \sqrt{\rho_1 \|\varphi_{nt}\|_{H^{-1}(0, L)}^2} \leq \sqrt{K_n(t)} \\ &\leq C \left\{ K_n(0) + \|\{f_{1n}, f_{2n}, f_{3n}\}\|_{L^1(0, T; H^{-1}(0, L))^3}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left\{ \|\varphi_{1n}\|_{H^{-1}(0, L)} + \|\psi_{1n}\|_{H^{-1}(0, L)} + \|\omega_{1n}\|_{H^{-1}(0, L)} + \|\varphi_{0n}\|_{L^2(0, L)} \right. \\ &\quad + \|\varphi_{0n}\|_{L^2(0, L)} + \|\omega_{0n}\|_{L^2(0, L)} + \|\varphi_{0n}\|_{H^{-1}(0, L)} + \|\psi_{0n}\|_{H^{-1}(0, L)} \\ &\quad \left. + \|\omega_{0n}\|_{H^{-1}(0, L)} + \|\{f_{1n}, f_{2n}, f_{3n}\}\|_{L^1(0, T; H^{-1}(0, L))^3} \right\} \\ &\leq C \left\{ \|\varphi_{1n}\|_{H^{-1}(0, L)} + \|\psi_{1n}\|_{H^{-1}(0, L)} + \|\omega_{1n}\|_{H^{-1}(0, L)} + \|\varphi_{0n}\|_{L^2(0, L)} \right. \\ &\quad \left. + \|\varphi_{0n}\|_{L^2(0, L)} + \|\omega_{0n}\|_{L^2(0, L)} + \|\{f_{1n}, f_{2n}, f_{3n}\}\|_{L^1(0, T; H^{-1}(0, L))^3} \right\}. \end{aligned}$$

Tomando o supremo essencial com $t \in [0, T]$, vem que

$$\begin{aligned} \|\varphi_{nt}\|_{L^\infty(0, T; H^{-1}(0, L))} &\leq C \left\{ \|\varphi_{1n}\|_{H^{-1}(0, L)} + \|\psi_{1n}\|_{H^{-1}(0, L)} + \|\omega_{1n}\|_{H^{-1}(0, L)} + \|\varphi_{0n}\|_{L^2(0, L)} \right. \\ &\quad \left. + \|\varphi_{0n}\|_{L^2(0, L)} + \|\omega_{0n}\|_{L^2(0, L)} + \|\{f_{1n}, f_{2n}, f_{3n}\}\|_{L^1(0, T; H^{-1}(0, L))^3} \right\}. \end{aligned}$$

Repetindo esse procedimento para $\psi_{nt}, \omega_{nt}, \varphi_n, \psi_n, \omega_n$ obtemos

$$\begin{aligned} &\|\{\varphi_{nt}, \psi_{nt}, \omega_{nt}\}\|_{L^\infty(0, T; H^{-1}(0, L))^3} + \|\{\varphi_n, \psi_n, \omega_n\}\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))^3} \\ &\leq C \left\{ \|\varphi_{1n}\|_{H^{-1}(0, L)} + \|\psi_{1n}\|_{H^{-1}(0, L)} + \|\omega_{1n}\|_{H^{-1}(0, L)} + \|\varphi_{0n}\|_{L^2(0, L)} \right. \\ &\quad \left. + \|\varphi_{0n}\|_{L^2(0, L)} + \|\omega_{0n}\|_{L^2(0, L)} + \|\{f_{1n}, f_{2n}, f_{3n}\}\|_{L^1(0, T; H^{-1}(0, L))^3} \right\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Em virtude das convergências dos dados iniciais e de (3.21), podemos tomar o limite quando $n \rightarrow \infty$ na expressão acima e chegar a

$$\begin{aligned} & \|\{\varphi_t, \psi_t, \omega_t\}\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(0,L))}^3 + \|\{\varphi, \psi, \omega\}\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}^3 \\ & \leq C \left\{ \|\varphi_1\|_{H^{-1}(0,L)} + \|\psi_1\|_{H^{-1}(0,L)} + \|\omega_1\|_{H^{-1}(0,L)} + \|\varphi_0\|_{L^2(0,L)} \right. \\ & \quad \left. + \|\psi_0\|_{L^2(0,L)} + \|\omega_0\|_{L^2(0,L)} + \|\{f_1, f_2, f_3\}\|_{L^1(0,T;H^{-1}(0,L))}^3 \right\}, \end{aligned}$$

uma vez que $\|u\|_{C([0,T];H^{-1}(0,L))} = \|u\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(0,L))}$ quando $u \in C([0,T];H^{-1}(0,L))$, provando assim o desejado. □

3.2 Desigualdades direta e inversa

Nesta seção consideraremos o sistema homogêneo associado a (3.1), a saber:

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(a(x)\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l[\omega_x - l\varphi] = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - (b(x)\psi_x)_x + k(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \\ \rho_1 \omega_{tt} - k_0[c(x)\omega_x - l\varphi]_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

O funcional de energia associado a este sistema é definido por

$$\begin{aligned} E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L & \rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 \omega_t^2 + k(a(x) - 1)\varphi_x^2 + b(x)\psi_x^2 \\ & + (c(x) - 1)\omega_x^2 + k(\varphi_x + \psi + l\omega)^2 + k_0[\omega_x - l\varphi]^2 dx. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Por argumentos de contradição obtemos que a norma induzida pela energia é equivalente a norma usual de $\mathcal{H} = [L^2(0,L) \times H_0^1(0,L)]^3$.

Lema 3.2.1 *A solução do problema homogêneo (3.22), $\{\varphi, \psi, \omega\}$, satisfaz*

$$\frac{d}{dt} E(t) = 0$$

Demonstração:[Prova do lema 3.2.1] Multiplicamos a primeira equação de (3.22) por φ_t , a segunda por ψ_t e a terceira equação por ω_t . Somando os resultados e integrando por partes sobre o intervalo $(0, L)$ obtemos o desejado. □

Uma consequência direta do lema 3.2.1 é a conservação da energia do sistema (3.22), isto é,

$$E(t) = E(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.24)$$

Agora, como uma consequência do teorema 3.1.3 que apresenta propriedades da solução ultrafraca, estamos em condições de estabelecer um importante resultado para se obter a controlabilidade desejada, a saber, a desigualdade direta conforme passamos a descrever:

Teorema 3.2.2 (desigualdade direta) *Dado $T > 0$, $\varphi_0, \psi_0, \omega_0 \in L^2(0, L)$ e $\varphi_1, \psi_1, \omega_1 \in H^{-1}(0, L)$, existe uma constante positiva, $C > 0$, tal que a solução $\{\varphi, \psi, \omega\}$ de (3.22) satisfaz*

$$\int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \varphi^2 + \psi^2 + \omega^2 dx dt \leq C \left[\|\{\varphi_0, \psi_0, \omega_0\}\|_{[L^2(0,L)]^3}^2 + \|\{\varphi_1, \psi_1, \omega_1\}\|_{[H^{-1}(0,L)]^3}^2 \right]$$

Demonstração:[Prova do teorema 3.2.2] É uma consequência imediata do teorema 3.1.3 e da imersão $L^\infty(0, T; L^2(0, L)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(l_1, l_2))$.

□

Agora, vamos reunir nossos esforços para obter a desigualdade inversa. O essencial, e talvez mais difícil, é provar a seguinte desigualdade de observabilidade

Teorema 3.2.3 (desigualdade de observabilidade) *Para $T > 2\alpha R$, α e R dados em (3.5) e (3.6), existe uma constante positiva, $C > 0$, tal que a solução fraca de (3.22) satisfaz*

$$\|\{\varphi_0, \psi_0, \omega_0\}\|_{[H_0^1(0,L)]^3}^2 + \|\{\varphi_1, \psi_1, \omega_1\}\|_{[L^2(0,L)]^3}^2 \leq C \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \varphi_t^2 + \psi_t^2 + \omega_t^2 dx dt$$

Demonstração:[Prova do teorema 3.2.3] Primeiramente, considere $T_0 \in \mathbb{R}$ tal que $T > T_0 > 2\alpha R$. Então, escolha $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$ satisfazendo $0 < \varepsilon_0 < \min \left\{ \frac{l_2 - l_1}{2}, \frac{T_0 - 2\alpha R}{2(\alpha + 1)} \right\}$. Para simplificar a notação, considere

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) := & \rho_1 |\varphi_t(x, t)|^2 + \rho_2 |\psi_t(x, t)|^2 + \rho_1 |\omega_t(x, t)|^2 + b(x) |\psi_x(x, t)|^2 + ka(x) |\varphi_x(x, t)|^2 \\ & + k_0 c(x) |\omega_x(x, t)|^2 + k |\psi(x, t) + l\omega(x, t)|^2 + k_0 l^2 |\varphi(x, t)|^2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Considere as funções F_ξ^1 e F_ξ^2 definidas conforme segue.

- Para $T > 0$ e $\xi \in (0, L)$ tal que $T - 2\varepsilon_0 > 2\alpha\xi$, defina

$$F_\xi^1(x) := \frac{1}{2} \int_{\varepsilon_0 + (\xi - x)\alpha}^{T - \varepsilon_0 - (\xi - x)\alpha} \Phi(x, t) dt, \quad x \in [0, \xi].$$

- Para $T > 0$ e $\xi \in (0, L)$ tal que $T - 2\varepsilon_0 > 2\alpha(L - \xi)$, defina

$$F_\xi^2(x) := \frac{1}{2} \int_{\varepsilon_0 + (x - \xi)\alpha}^{T - \varepsilon_0 - (x - \xi)\alpha} \Phi(x, t) dt, \quad x \in [\xi, L].$$

Para $T > 0$ satisfazendo as condições ora mencionadas, segue que

$$F_\xi^1(\xi) = F_\xi^2(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\varepsilon_0}^{T - \varepsilon_0} \Phi(\xi, t) dt.$$

Derivando F_ξ^1 em relação a x vem que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F_\xi^1(x) &= \int_{\varepsilon_0 + (\xi - x)\alpha}^{T - \varepsilon_0 - (\xi - x)\alpha} \rho_1 \varphi_t \varphi_{tx} + \rho_2 \psi_t \psi_{tx} + \rho_1 \omega_t \omega_{tx} + \frac{1}{2} b_x \psi_x^2 + b \psi_x \psi_{xx} + \frac{k}{2} a_x \varphi_x^2 \\ &\quad + k a \varphi_x \varphi_{xx} + \frac{k_0}{2} c_x \omega_x^2 + k_0 c \omega_x \omega_{xx} + k(\psi + l\omega)(\psi + l\omega)_x + k_0 l^2 \varphi \varphi_x dt \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \Phi(x, t) \Big|_{t=T - \varepsilon_0 - (\xi - x)\alpha} + \frac{\alpha}{2} \Phi(x, t) \Big|_{t=\varepsilon_0 + (\xi - x)\alpha}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Integrando por partes as três primeiras parcelas do lado direito da identidade acima resulta em

$$\begin{aligned} &\int_{\varepsilon_0 + (\xi - x)\alpha}^{T - \varepsilon_0 - (\xi - x)\alpha} \rho_1 \varphi_t \varphi_{tx} + \rho_2 \psi_t \psi_{tx} + \rho_1 \omega_t \omega_{tx} \\ &= [\rho_1 \varphi_t \varphi_x + \rho_2 \psi_t \psi_x + \rho_1 \omega_t \omega_x]_{\varepsilon_0 + (\xi - x)\alpha}^{T - \varepsilon_0 - (\xi - x)\alpha} \\ &\quad - \int_{\varepsilon_0 + (\xi - x)\alpha}^{T - \varepsilon_0 - (\xi - x)\alpha} \rho_1 \varphi_{tt} \varphi_x + \rho_2 \psi_{tt} \psi_x + \rho_1 \omega_{tt} \omega_x dt. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Multiplicando a primeira, segunda e terceira equação de (3.22) por φ_x , ψ_x e ω_x , respectivamente, e somando os resultados obtém-se

$$\begin{aligned} & - \int_{\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha}^{T-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha} \rho_1 \varphi_{tt} \varphi_x + \rho_2 \psi_{tt} \psi_x + \rho_1 \omega_{tt} \omega_x \, dt \\ = & \int_{\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha}^{T-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha} -k(a\varphi_x)_x \varphi_x - k(\psi + l\omega)_x - k_0 l[\omega_x - l\varphi] \varphi_x - (b\psi_x)_x \psi_x + k\varphi_x \psi_x \\ & + k(\psi + l\omega) \psi_x - k_0(c\omega_x)_x \omega_x + k_0 l \varphi \omega_x + kl \varphi_x \omega_x + kl(\psi + l\omega) \omega_x \, dt. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Combinando (3.26), (3.27) e (3.28) chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F_\xi^1(x) = & \int_{\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha}^{T-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha} \left[-\frac{k}{2} a_x \varphi_x^2 - k_0 l \omega_x \varphi_x + 2k_0 l^2 \varphi \varphi_x - \frac{1}{2} b_x \psi_x^2 \right. \\ & \left. + 2k(\psi + l\omega)(\psi + l\omega)_x - \frac{k_0}{2} c_x \omega_x^2 + k_0 l \varphi \omega_x \right] dt \\ + \frac{\alpha}{2} \Phi(x, t) \Big|_{t=T-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha} & + \frac{\alpha}{2} \Phi(x, t) \Big|_{t=\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha} + [\rho_1 \varphi_t \varphi_x + \rho_2 \psi_t \psi_x + \rho_1 \omega_t \omega_x]_{\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha}^{T-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Provemos agora que a última linha de (3.29) é maior que zero. De fato, uma simples estimativa associada a hipótese 3.1.1 nos dá

$$\begin{aligned} & |\rho_1 \varphi_t(x, t) \varphi_x(x, t) + \rho_2 \psi_t(x, t) \psi_x(x, t) + \rho_1 \omega_t(x, t) \omega_x(x, t)| \\ \leq & \frac{1}{2} \left[\rho_1 \varphi_t^2(x, t) + \rho_2 \psi_t^2(x, t) + \rho_1 \omega_t^2(x, t) + \frac{\rho_1}{k} ka(x) \varphi_x^2(x, t) \right. \\ & \left. + \frac{\rho_2}{b_0} b(x) \psi_x^2(x, t) + \frac{\rho_1}{k_0} k_0 c(x) \omega_x^2(x, t) \right] \\ \leq & \frac{1}{2} \max \left\{ 1, \frac{\rho_1}{k}, \frac{\rho_2}{b_0}, \frac{\rho_1}{k_0} \right\} \left[\rho_1 \varphi_t^2(x, t) + \rho_2 \psi_t^2(x, t) + \rho_1 \omega_t^2(x, t) \right. \\ & \left. + ka(x) \varphi_x^2(x, t) + b(x) \psi_x^2(x, t) + k_0 c(x) \omega_x^2(x, t) \right] \\ = & \frac{\alpha}{2} \Phi(x, t), \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \end{aligned}$$

o que vem justificar a importante escolha de α em (3.5) e nos permite concluir que

$$\frac{\alpha}{2} \Phi(x, T-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha) + \frac{\alpha}{2} \Phi(x, \varepsilon_0+(\xi-x)\alpha) + [\rho_1 \varphi_t \varphi_x + \rho_2 \psi_t \psi_x + \rho_1 \omega_t \omega_x]_{\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha}^{T-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha} \geq 0.$$

Assim, levando em conta a definição de F_ξ^1 , podemos estimar (3.29), desprezando sua última linha, e obter

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F_\xi^1(x) &\geq \int_{\varepsilon_0 + (\xi - x)\alpha}^{T - \varepsilon_0 - (\xi - x)\alpha} \left[-\frac{k}{2} a_x \varphi_x^2 - k_0 l \omega_x \varphi_x + 2k_0 l^2 \varphi \varphi_x - \frac{1}{2} b_x \psi_x^2 \right. \\ &\quad \left. + 2k(\psi + l\omega)(\psi + l\omega)_x - \frac{k_0}{2} c_x \omega_x^2 + k_0 l \varphi \omega_x \right] dt \\ &\geq -\frac{C}{2} \int_{\varepsilon_0 + (\xi - x)\alpha}^{T - \varepsilon_0 - (\xi - x)\alpha} \Phi(x, t) dt \\ &= -C F_\xi^1(x), \end{aligned}$$

onde $C > 0$ é uma constante positiva. Desta desigualdade segue que $\frac{d}{dx} F_\xi^1(x) + C F_\xi^1(x) \geq 0$ o que implica, quando multiplicada por um fator integrante, que $\frac{d}{dx} [F_\xi^1(x) e^{Cx}] \geq 0$. Integrando esta última em $[x, \xi]$ vem que

$$F_\xi^1(x) \leq C F_\xi^1(\xi), \quad \forall x \in [0, \xi], \quad \xi \in (0, L).$$

Integrando a desigualdade acima em $[0, \xi]$ e usando a definição de F_ξ^1 obtemos

$$\int_0^\xi \int_{\varepsilon_0 + (\xi - x)\alpha}^{T - \varepsilon_0 - (\xi - x)\alpha} \Phi(x, t) dt dx \leq C \int_{\varepsilon_0}^{T - \varepsilon_0} \Phi(\xi, t) dt. \quad (3.30)$$

Usando argumentos análogos para F_ξ^2 chegamos a

$$F_\xi^2(x) \leq C F_\xi^2(\xi), \quad \forall x \in [\xi, L], \quad \xi \in (0, L).$$

Integrando sobre $[\xi, L]$ resulta que

$$\int_\xi^L \int_{\varepsilon_0 + (x - \xi)\alpha}^{T - \varepsilon_0 - (x - \xi)\alpha} \Phi(x, t) dt dx \leq C \int_{\varepsilon_0}^{T - \varepsilon_0} \Phi(\xi, t) dt. \quad (3.31)$$

Agora, fazendo $\tilde{l}_1 := l_1 + \varepsilon_0$ e $\tilde{l}_2 := l_2 - \varepsilon_0$ vem que $(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2) \subset (l_1, l_2)$. Desta forma podemos definir

$$\tilde{R} := \max \left\{ \tilde{l}_1, L - \tilde{l}_2 \right\}.$$

Observe que $\tilde{R} = R + \varepsilon_0$. Então, devido a escolha de ε_0 , segue que $T_0 - 2\varepsilon_0 > 2\alpha\tilde{R}$. Logo, existe $\delta_0 > 0$ tal que $T_0 - 2\varepsilon_0 - 2\alpha\delta_0 > 2\alpha\tilde{R}$. Mais ainda, considere $\delta \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < \delta < \min \left\{ \delta_0, \frac{\tilde{l}_2 - \tilde{l}_1}{2} \right\}$$

e observe que

$$\begin{aligned} \xi \in [\tilde{l}_1, \tilde{l}_1 + \delta] &\Rightarrow T_0 - 2\varepsilon_0 - 2\alpha\delta > T_0 - 2\varepsilon_0 - 2\alpha\delta_0 > 2\alpha\tilde{R} \geq 2\alpha\tilde{l}_1 \\ &\Rightarrow T_0 - 2\varepsilon_0 > 2\alpha(\tilde{l}_1 + \delta) \geq 2\alpha\xi \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \xi \in [\tilde{l}_2 - \delta, \tilde{l}_2] &\Rightarrow T_0 - 2\varepsilon_0 - 2\alpha\delta > T_0 - 2\varepsilon_0 - 2\alpha\delta_0 > 2\alpha\tilde{R} \geq 2\alpha(L - \tilde{l}_2) \\ &\Rightarrow T_0 - 2\varepsilon_0 > 2\alpha(L - (\tilde{l}_2 - \delta)) \geq 2\alpha(L - \xi). \end{aligned}$$

As implicações acima juntamente com as relações (3.30) e (3.31) nos fornecem

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \int_{\varepsilon_0 + (\xi - x)\alpha}^{T_0 - \varepsilon_0 - (\xi - x)\alpha} \Phi(x, t) dt dx &\leq C \int_{\varepsilon_0}^{T_0 - \varepsilon_0} \Phi(\xi, t) dt, \text{ se } \xi \in [\tilde{l}_1, \tilde{l}_1 + \delta], \\ \int_\xi^L \int_{\varepsilon_0 + (x - \xi)\alpha}^{T_0 - \varepsilon_0 - (x - \xi)\alpha} \Phi(x, t) dt dx &\leq C \int_{\varepsilon_0}^{T_0 - \varepsilon_0} \Phi(\xi, t) dt, \text{ se } \xi \in [\tilde{l}_2 - \delta, \tilde{l}_2]. \end{aligned}$$

Integrando as expressões acima nos intervalos a que ξ pertence, a saber, ora em $[\tilde{l}_1, \tilde{l}_1 + \delta]$ ora em $[\tilde{l}_2 - \delta, \tilde{l}_2]$, resulta em

$$\int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_1 + \delta} \int_0^\xi \int_{\varepsilon_0 + (\xi - x)\alpha}^{T_0 - \varepsilon_0 - (\xi - x)\alpha} \Phi(x, t) dt dx d\xi \leq C \int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_1 + \delta} \int_{\varepsilon_0}^{T_0 - \varepsilon_0} \Phi(\xi, t) dt d\xi, \quad (3.32)$$

$$\int_{\tilde{l}_2 - \delta}^{\tilde{l}_2} \int_\xi^L \int_{\varepsilon_0 + (x - \xi)\alpha}^{T_0 - \varepsilon_0 - (x - \xi)\alpha} \Phi(x, t) dt dx d\xi \leq C \int_{\tilde{l}_2 - \delta}^{\tilde{l}_2} \int_{\varepsilon_0}^{T_0 - \varepsilon_0} \Phi(\xi, t) dt d\xi. \quad (3.33)$$

Por outro lado, como $\xi \in [\tilde{l}_1, \tilde{l}_1 + \delta]$, podemos eliminar a dependência de ξ e estimar o lado esquerdo de (3.32) conforme segue

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_1+\delta} \int_0^\xi \int_{\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha}^{T_0-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha} \Phi(x,t) dt dx d\xi &= \int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_1+\delta} \int_0^{\tilde{l}_1} F_\xi^1(x) dx d\xi + \underbrace{\int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_1+\delta} \int_{\tilde{l}_1}^\xi F_\xi^1(x) dx d\xi}_{\geq 0} \\
&\geq \int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_1+\delta} \int_0^{\tilde{l}_1} F_\xi^1(x) dx d\xi \\
&= \int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_1+\delta} \int_0^{\tilde{l}_1} \int_{\varepsilon_0+(\xi-x)\alpha}^{T_0-\varepsilon_0-(\xi-x)\alpha} \Phi(x,t) dt dx d\xi \\
&\geq \int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_1+\delta} \int_0^{\tilde{l}_1} \int_{\varepsilon_0+(\tilde{l}_1+\delta-x)\alpha}^{T_0-\varepsilon_0-(\tilde{l}_1+\delta-x)\alpha} \Phi(x,t) dt dx d\xi \\
&= \int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_1+\delta} \int_0^{\tilde{l}_1} F_{\tilde{l}_1+\delta}^1(x) dx d\xi \\
&= \delta \int_0^{\tilde{l}_1} F_{\tilde{l}_1+\delta}^1(x) dx. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

De forma análoga

$$\int_{\tilde{l}_2-\delta}^{\tilde{l}_2} \int_\xi^L \int_{\varepsilon_0+(x-\xi)\alpha}^{T_0-\varepsilon_0-(x-\xi)\alpha} \Phi(x,t) dt dx d\xi \geq \delta \int_{\tilde{l}_2}^L F_{\tilde{l}_2-\delta}^2(x) dx. \tag{3.35}$$

Combinando (3.32), (3.33), (3.34) e (3.35) e do fato que $\delta < \frac{\tilde{l}_2-\tilde{l}_1}{2}$ segue

$$\int_0^{\tilde{l}_1} F_{\tilde{l}_1+\delta}^1(x) dx \leq \frac{C}{\delta} \int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_1+\delta} \int_{\varepsilon_0}^{T_0-\varepsilon_0} \Phi(\xi,t) dt d\xi \leq \frac{C}{\delta} \int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_2} \int_{\varepsilon_0}^{T_0-\varepsilon_0} \Phi(x,t) dt dx \tag{3.36}$$

$$\int_{\tilde{l}_2}^L F_{\tilde{l}_2-\delta}^2(x) dx \leq \frac{C}{\delta} \int_{\tilde{l}_2-\delta}^{\tilde{l}_2} \int_{\varepsilon_0}^{T_0-\varepsilon_0} \Phi(\xi,t) dt d\xi \leq \frac{C}{\delta} \int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_2} \int_{\varepsilon_0}^{T_0-\varepsilon_0} \Phi(x,t) dt dx. \tag{3.37}$$

A escolha do $T_0 > 0$ nos dá $T_0 - 2\varepsilon_0 - 2\alpha\delta - 2\alpha\tilde{R} > 0$. Da equivalência das normas de $[H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)]^3$ induzida pela energia, $E(t)$, e a norma dada por $\int_0^L \Phi(x,t) dx$, juntamente com a conservação da energia (3.24),

$$(T_0 - 2\varepsilon_0 - 2\alpha\delta - 2\alpha\tilde{R})E(0) = \int_{\varepsilon_0+(\tilde{R}+\delta)\alpha}^{T_0-\varepsilon_0-(\tilde{R}+\delta)\alpha} E(t) dt \leq C \int_{\varepsilon_0+(\tilde{R}+\delta)\alpha}^{T_0-\varepsilon_0-(\tilde{R}+\delta)\alpha} \int_0^L \Phi(x,t) dx dt$$

Da definição de \tilde{R} temos que

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 + (\tilde{R} + \delta)\alpha &\geq \varepsilon_0 + (\tilde{l}_1 + \delta)\alpha \geq \varepsilon_0 + (\tilde{l}_1 + \delta - x)\alpha, & x \in [0, L]; & \quad \text{and} \\ \varepsilon_0 + (\tilde{R} + \delta)\alpha &\geq \varepsilon_0 + (L - \tilde{l}_2 + \delta)\alpha \geq \varepsilon_0 + (x - (\tilde{l}_2 - \delta - x))\alpha, & x \in [0, L], \end{aligned}$$

o que, por sua vez, implica que

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon_0 + (\tilde{R} + \delta)\alpha, T_0 - \varepsilon_0 - (\tilde{R} + \delta)\alpha \right) &\subset \left(\varepsilon_0 + (\tilde{l}_1 + \delta - x)\alpha, T_0 - \varepsilon_0 - (\tilde{l}_1 + \delta - x)\alpha \right) \\ \text{e} \\ \left(\varepsilon_0 + (\tilde{R} + \delta)\alpha, T_0 - \varepsilon_0 - (\tilde{R} + \delta)\alpha \right) &\subset \left(\varepsilon_0 + (x - (\tilde{l}_2 - \delta))\alpha, T_0 - \varepsilon_0 - (x - (\tilde{l}_2 - \delta))\alpha \right). \end{aligned}$$

Assim, aumentando o intervalo de integração da última estimativa e trocando a ordem das integrais chegamos a

$$E(0) \leq C \int_0^{\tilde{l}_1} F_{\tilde{l}_1 + \delta}^1(x) dx + C \int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_2} \int_{\varepsilon_0}^{T_0 - \varepsilon_0} \Phi(x, t) dt dx + C \int_{\tilde{l}_2}^L F_{\tilde{l}_2 - \delta}^2(x) dx$$

A desigualdade acima junto as estimativas (3.36) e (3.37), nos permitem escrever

$$E(0) \leq C \int_{\varepsilon_0}^{T_0 - \varepsilon_0} \int_{l_1 + \varepsilon_0}^{l_2 - \varepsilon_0} \Phi(x, t) dx dt.$$

Portanto, da definição de Φ e do fato que $T > T_0$ segue que

$$\begin{aligned} E(0) \leq C \int_{\varepsilon_0}^{T - \varepsilon_0} \int_{l_1 + \varepsilon_0}^{l_2 - \varepsilon_0} &\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 \omega_t^2 + b(x) \psi_x^2 \\ &+ ka(x) \varphi_x^2 + k_0 c(x) \omega_x^2 + k \psi^2 + l \omega^2 + k_0 l^2 \varphi^2 dx dt. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Nosso próximo passo é eliminar os termos que tem derivada em relação a x na estimativa acima, ou seja, queremos obter uma desigualdade do tipo

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon_0}^{T - \varepsilon_0} \int_{l_1 + \varepsilon_0}^{l_2 - \varepsilon_0} &b(x) \psi_x^2 + ka(x) \varphi_x^2 + k_0 c(x) \omega_x^2 dx dt \\ &\leq C \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \varphi_t^2 + \psi_t^2 + \omega_t^2 + \varphi^2 + \psi^2 + \omega^2 dx dt. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Faremos isto considerando as funções “cut-off” definidas a seguir

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta \in C_0^\infty([0, T]); \\ 0 \leq \eta(t) \leq 1, \forall t \in [0, T]; \\ \eta(0) = \eta(T) = 0; \\ \eta(t) = 1, \text{ em } (\varepsilon_0, T - \varepsilon_0). \end{array} \right. \quad (3.40)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma \in C^\infty([0, L]) \text{ tal que } \text{supp}(\gamma) \subset (0, L); \\ 0 \leq \gamma(x) \leq 1, \forall x \in [0, L]; \\ \gamma(x) = 1 \text{ em } (l_1 + \varepsilon_0, l_2 - \varepsilon_0); \\ \gamma(x) = 0, \text{ em } [0, L] \setminus (l_1, l_2). \end{array} \right. \quad (3.41)$$

Uma vez escolhidas as funções η e γ defina

$$p(x, t) = \gamma^2(x)\eta(t) \in C^\infty([0, L] \times [0, T]).$$

É fácil ver que

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq p(x, t) \leq 1, \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, T]; \\ p(x, t) = 1, \forall (x, t) \in (l_1 + \varepsilon_0, l_2 - \varepsilon_0) \times (\varepsilon_0, T - \varepsilon_0); \\ p(x, t) = p_t(x, t) = p_x(x, t) = 0, \forall (x, t) \in ([0, L] \setminus (l_1, l_2)) \times (0, T); \\ p(x, 0) = p(x, T) = 0 \forall x \in [0, L]. \end{array} \right. \quad (3.42)$$

Multiplicando a primeira, a segunda e a terceira equação de (3.22) por φp , ψp , ωp , respectivamente, e integrando por partes sobre $(0, L) \times (0, T)$, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^L (ka\varphi_x^2 + b\psi_x^2 + k_0c\omega_x^2) p \, dx \, dt \\ \leq & \int_0^T \int_0^L [\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_1\omega_t^2 + k_0l^2\varphi^2 + k\psi^2 + kl^2\omega^2] p \, dx \, dt \\ & + \int_0^T \int_0^L \rho_1|\varphi_t p_t \varphi| + \rho_2|\psi_t p_t \psi| + \rho_1|\omega_t p_t \omega| + 2klp|\psi\omega| \, dx \, dt \\ & + \int_0^T \int_0^L ka|\varphi_x p_x \varphi| + kp|\psi_x \varphi| + klp|\omega_x \varphi| + k_0lp|\omega_x \varphi| \\ & \quad + b|\psi_x p_x \psi| + kp|\varphi_x \psi| + k_0c|\omega_x p_x \omega| + k_0lp|\varphi_x \omega| + klp|\varphi_x \omega| \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Note que os termos com derivada em relação a x do lado esquerdo da estimativa acima podem ser absorvidos pelos termos da direita com uso de desigualdades do tipo $ab \leq$

$\delta a^2 + \frac{1}{4\delta} b^2$, para $\delta > 0$ apropriado, e propriedades da função p dadas em (3.42), o que nos permitem chegar a (3.39). Portanto, de (3.38), vem que

$$E(0) \leq C \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \varphi_t^2 + \psi_t^2 + \omega_t^2 + \psi^2 + \varphi^2 + \omega^2 dx dt. \quad (3.43)$$

Para finalizar a prova da desigualdade de observabilidade basta mostrar que

$$\int_0^T \int_0^L \varphi^2 + \psi^2 + \omega^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \varphi_t^2 + \psi_t^2 + \omega_t^2 dx dt \quad (3.44)$$

Demonstraremos este fato usando argumentos de contradição. De fato, suponha que (3.44) não se verifica. Então, podemos encontrar uma sequência de soluções não nulas de (3.22), denotada por $\{\tilde{\varphi}_n, \tilde{\psi}_n, \tilde{\omega}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, satisfazendo

$$\int_0^T \int_0^L \tilde{\varphi}_n^2 + \tilde{\psi}_n^2 + \tilde{\omega}_n^2 dx dt > n \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \tilde{\varphi}_{nt}^2 + \tilde{\psi}_{nt}^2 + \tilde{\omega}_{nt}^2 dx dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

o que implica que

$$\frac{\int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \tilde{\varphi}_{nt}^2 + \tilde{\psi}_{nt}^2 + \tilde{\omega}_{nt}^2 dx dt}{\int_0^T \int_0^L \tilde{\varphi}_n^2 + \tilde{\psi}_n^2 + \tilde{\omega}_n^2 dx dt} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty.$$

Denotando

$$\begin{aligned} \varphi_n &:= \frac{\tilde{\varphi}_n}{\sqrt{\int_0^T \int_0^L \tilde{\varphi}_n^2 + \tilde{\psi}_n^2 + \tilde{\omega}_n^2 dx dt}} \\ \psi_n &:= \frac{\tilde{\psi}_n}{\sqrt{\int_0^T \int_0^L \tilde{\varphi}_n^2 + \tilde{\psi}_n^2 + \tilde{\omega}_n^2 dx dt}} \\ \omega_n &:= \frac{\tilde{\omega}_n}{\sqrt{\int_0^T \int_0^L \tilde{\varphi}_n^2 + \tilde{\psi}_n^2 + \tilde{\omega}_n^2 dx dt}} \end{aligned}$$

vemos facilmente que

$$\int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \varphi_{nt}^2 + \psi_{nt}^2 + \omega_{nt}^2 dx dt < \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty \quad (3.45)$$

e, além disso,

$$\int_0^T \int_0^L \varphi_n^2 + \psi_n^2 + \omega_n^2 dx dt = 1, \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \quad (3.46)$$

De (3.43), (3.46), (3.45) e da conservação da energia, vem que $E_n(t) = E_n(0)$ é limitada, onde E_n é o funcional de energia associado ao sistema normalizado de solução $\{\varphi_n, \psi_n, \omega_n\}$. Então, por equivalência de normas, resulta que

$$\begin{aligned} \{\varphi_{nt}\}, \{\psi_{nt}\}, \{\omega_{nt}\} &\text{ é limitada em } L^2(0, T, L^2(0, L)) \\ \{\varphi_n\}, \{\psi_n\}, \{\omega_n\} &\text{ é limitada em } L^2(0, T, H_0^1(0, L)) \end{aligned}$$

e conseqüentemente temos a convergência fraca de cada uma das sequências acima. Pelo teorema de Aubin-Lions, passando a subsequências se necessário, temos

$$\begin{aligned} \varphi_n &\rightarrow \varphi \text{ forte em } L^2(0, T, L^2(0, L)), \\ \psi_n &\rightarrow \psi \text{ forte em } L^2(0, T, L^2(0, L)), \\ \omega_n &\rightarrow \omega \text{ forte em } L^2(0, T, L^2(0, L)). \end{aligned} \quad (3.47)$$

As convergências fortes acima juntamente com (3.46) implicam em

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^L \varphi_n^2 + \psi_n^2 + \omega_n^2 dx dt = \int_0^T \int_0^L \varphi^2 + \psi^2 + \omega^2 dx dt. \quad (3.48)$$

Por outro lado, as convergências fracas de $\{\varphi_{nt}\}, \{\psi_{nt}\}, \{\omega_{nt}\}$ em $L^2(0, T, L^2(0, L))$ nos permitem obter

$$\int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \varphi_t^2 + \psi_t^2 + \omega_t^2 dx dt \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \varphi_{nt}^2 + \psi_{nt}^2 + \omega_{nt}^2 dx dt = 0$$

o que implica que

$$\varphi_t = \psi_t = \omega_t = 0, \text{ em } (l_1, l_2) \times (0, T). \quad (3.49)$$

derivando no sentido das distribuições

$$\varphi_{tt} = \psi_{tt} = \omega_{tt} = 0, \text{ em } (l_1, l_2) \times (0, T). \quad (3.50)$$

No que segue, denotaremos $z = \varphi_t$, $u = \psi_t$ e $v = \omega_t$. Note que $\{z, u, v\}$ é solução ultrafraca de

$$\begin{cases} \rho_1 z_{tt} - k(a(x)z_x + u + lv)_x - k_0 l[v_x - lz] = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T) \\ \rho_2 u_{tt} - (b(x)u_x)_x + k(z_x + u + lv) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T) \\ \rho_1 v_{tt} - k_0[c(x)v_x - lz]_x + kl(z_x + u + lv) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T) \\ z = u = v = 0, & \text{em } (l_1, l_2) \times (0, T) \end{cases} \quad (3.51)$$

Antes de chegar a contradição, precisamos do seguinte resultado:

Lema 3.2.4 (Regularidade escondida dos dados iniciais) *A solução ultrafraca $\{z, u, v\}$ de (3.51) satisfaz*

$$\begin{aligned} z(\cdot, 0), u(\cdot, 0), v(\cdot, 0) &\in H_0^1(0, L), \\ z_t(\cdot, 0), u_t(\cdot, 0), v_t(\cdot, 0) &\in L^2(0, L). \end{aligned}$$

Demonstração:[Prova do lema 3.2.4] Considere a sequência de funções regularizantes ρ_ν tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_\nu \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \\ \rho_\nu(t) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ \text{supp}(\rho_\nu) \subset (-\frac{1}{\nu}, 0), \\ \int_{-\frac{1}{\nu}}^0 \rho_\nu(t) dt = 1, \end{array} \right.$$

para cada $\nu \in \mathbb{N}$. Considere também as extensões z , u e v dadas por

$$\tilde{z}(x, t) = \begin{cases} z(x, t), & \text{se } t \in [0, T] \\ z(x, T)[T + 1 - t], & \text{se } t \in (T, T + 1] \\ z(x, 0)[t + 1], & \text{se } t \in [-1, 0) \\ 0, & \text{se } t \in \mathbb{R} \setminus [-1, T + 1] \end{cases}$$

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & \text{se } t \in [0, T] \\ u(x, T)[T + 1 - t], & \text{se } t \in (T, T + 1] \\ u(x, 0)[t + 1], & \text{se } t \in [-1, 0) \\ 0, & \text{se } t \in \mathbb{R} \setminus [-1, T + 1] \end{cases}$$

$$\tilde{v}(x, t) = \begin{cases} v(x, t), & \text{se } t \in [0, T] \\ v(x, T)[T + 1 - t], & \text{se } t \in (T, T + 1] \\ v(x, 0)[t + 1], & \text{se } t \in [-1, 0) \\ 0, & \text{se } t \in \mathbb{R} \setminus [-1, T + 1] \end{cases}$$

Note que $\tilde{z}, \tilde{u}, \tilde{v}$ são elementos de $C(\mathbb{R}; L^2(0, L))$ pois $z, u, v \in C([0, T]; L^2(0, L))$. Consequentemente $\tilde{z}, \tilde{u}, \tilde{v} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; L^2(0, L))$. Fazendo a convolução com a sequência regularizante ρ_ν definimos

$$\tilde{z}_\nu := \tilde{z} * \rho_\nu, \quad \tilde{u}_\nu := \tilde{u} * \rho_\nu, \quad \tilde{v}_\nu := \tilde{v} * \rho_\nu,$$

as quais, por sua vez, pertencem a $C^\infty(\mathbb{R}; L^2(0, L))$, para cada $\nu \in \mathbb{N}$ (veja proposição 2.5.7). Portanto, suas derivadas

$$\frac{d^k}{dt^k}(\tilde{z}_\nu) = \tilde{z} * \frac{d^k}{dt^k}\rho_\nu, \quad \frac{d^k}{dt^k}(\tilde{u}_\nu) = \tilde{u} * \frac{d^k}{dt^k}\rho_\nu, \quad \frac{d^k}{dt^k}(\tilde{v}_\nu) = \tilde{v} * \frac{d^k}{dt^k}\rho_\nu,$$

ainda estão em $C^\infty(\mathbb{R}; L^2(0, L))$ para $k = 1, 2, 3, \dots$

Agora, dado $0 < \varepsilon < T - T_0$, considere $\nu \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de tal forma que $\frac{1}{\nu} < \varepsilon$. Isto nos permite definir as seguintes sequências:

$$z_\nu(x, t) = \int_{-\frac{1}{\nu}}^0 z(t-s)\rho_\nu(s) ds, \quad \forall t \in [0, T - \varepsilon],$$

$$u_\nu(x, t) = \int_{-\frac{1}{\nu}}^0 u(t-s)\rho_\nu(s) ds, \quad \forall t \in [0, T - \varepsilon],$$

$$v_\nu(x, t) = \int_{-\frac{1}{\nu}}^0 v(t-s)\rho_\nu(s) ds, \quad \forall t \in [0, T - \varepsilon].$$

Das definições de $\tilde{z}_\nu, \tilde{u}_\nu, \tilde{v}_\nu$ e z_ν, u_ν, v_ν , acima, vem que

$$\frac{d^k}{dt^k}(z_\nu) = \frac{d^k}{dt^k}(\tilde{z}_\nu), \quad \frac{d^k}{dt^k}(u_\nu) = \frac{d^k}{dt^k}(\tilde{u}_\nu), \quad \frac{d^k}{dt^k}(v_\nu) = \frac{d^k}{dt^k}(\tilde{v}_\nu), \quad (3.52)$$

em $C^\infty([0, T - \varepsilon]; L^2(0, L))$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Desta forma, se $t \in [0, T - \varepsilon]$ e $s \in (-\frac{1}{\nu}, 0)$ temos que $t - s \in [0, T]$. Assim, podemos reescrever o sistema (3.51) primeiro trocando t por $t - s$, depois multiplicando essas novas equações por ρ_ν e integrando com s variando

em $[-\frac{1}{\nu}, 0]$, ou seja, chegamos a

$$\begin{cases} \rho_1 z_{\nu tt} - k(a(x)z_{\nu x} + u_\nu + lv_\nu)_x - k_0 l[v_{\nu x} - lz_\nu] = 0 \\ \rho_2 u_{\nu tt} - (b(x)u_{\nu x})_x + k(z_{\nu x} + u_\nu + lv_\nu) = 0 \\ \rho_1 v_{\nu tt} - k_0[c(x)v_{\nu x} - lz_\nu]_x + kl(z_{\nu x} + u_\nu + lv_\nu) = 0 \end{cases} \quad (3.53)$$

o que implica, em vista das regularidades acima, que

$$(a(\cdot)z_{\nu x})_x, (b(\cdot)u_{\nu x})_x, (c(\cdot)v_{\nu x})_x \in C([0, T - \varepsilon]; H^{-1}(0, L)),$$

e, conseqüentemente,

$$z_\nu, u_\nu, v_\nu \in C([0, T - \varepsilon]; H_0^1(0, L)). \quad (3.54)$$

De fato, faremos apenas para z_ν . Lembre que $(a(\cdot)z_{\nu x})_x = Az_\nu$ e que A é uma isometria de $L^2(0, L)$ em $D(A)'$, extensão da isometria de $H_0^1(0, L) \rightarrow H^{-1}(0, L)$, e tem imagem em $H^{-1}(0, L)$ para cada $t \in [0, T - \varepsilon]$. De onde segue que

$$\begin{aligned} \|z_\nu\|_{C([0, T - \varepsilon]; H_0^1(0, L))} &= \sup_{t \in [0, T - \varepsilon]} \|z_\nu(t)\|_{H_0^1(0, L)} \\ &= \sup_{t \in [0, T - \varepsilon]} \|A^{-1}Az_\nu(t)\|_{H_0^1(0, L)} \\ &\leq \|A^{-1}\| \sup_{t \in [0, T - \varepsilon]} \|Az_\nu(t)\|_{H^{-1}(0, L)} \\ &= \|A^{-1}\| \|(a(\cdot)z_{\nu x})_x\|_{C([0, T - \varepsilon]; H^{-1}(0, L))} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

provando que $z_\nu \in C([0, T - \varepsilon]; H_0^1(0, L))$.

Logo, de 3.52 e 3.54 temos que

$$\begin{aligned} z_\nu(\cdot, 0), u_\nu(\cdot, 0), v_\nu(\cdot, 0) &\in H_0^1(0, L), \\ z_{\nu t}(\cdot, 0), u_{\nu t}(\cdot, 0), v_{\nu t}(\cdot, 0) &\in L^2(0, L). \end{aligned}$$

Desta forma, $\{z_\nu, u_\nu, v_\nu\}$ é solução fraca de (3.53) e por argumentos de densidade satisfaz a estimativa (3.43), i.e.,

$$E_\nu(0) \leq C \int_0^{T-\varepsilon} \int_{l_1}^{l_2} z_{\nu t}^2 + u_{\nu t}^2 + v_{\nu t}^2 + z_\nu^2 + u_\nu^2 + v_\nu^2 \, dx \, dt. \quad (3.55)$$

Observe que o termo da direita de (3.55) é igual a zero. De fato, de (3.49) vem que $z(x, t) = 0$ quase sempre em $(l_1, l_2) \times (0, T)$ e da definição de z_ν temos que

$$z_\nu(x, t) = \int_{-\frac{1}{\nu}}^0 \underbrace{z(x, t-s)}_{=0} \rho_\nu(s) ds = 0, \text{ para todo } (x, t) \in [l_1, l_2] \times [0, T - \varepsilon],$$

e conseqüentemente

$$z_{\nu t}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{z_\nu(x, t)}_{=0} = 0, \text{ para todo } (x, t) \in [l_1, l_2] \times [0, T - \varepsilon].$$

Analogamente, $u_\nu = u_{\nu t} = v_\nu = v_{\nu t} = 0$ em $[l_1, l_2] \times [0, T - \varepsilon]$. Substituindo isto em (3.55) resulta que $E_\nu(0) = 0$. Pela conservação da energia,

$$E_\nu(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T - \varepsilon], \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

e, da definição de E_ν , segue que

$$z_\nu, u_\nu, v_\nu \text{ são limitadas em } L^\infty(0, T - \varepsilon; H_0^1(0, L)), \quad (3.56)$$

$$z_{\nu t}, u_{\nu t}, v_{\nu t} \text{ são limitadas em } L^\infty(0, T - \varepsilon; L^2(0, L)). \quad (3.57)$$

Então, existem $\bar{z}, \bar{u}, \bar{v}$ tais que

$$z_\nu \xrightarrow{*} \bar{z}, \text{ em } L^\infty(0, T - \varepsilon; H_0^1(0, L)) \quad (3.58)$$

$$u_\nu \xrightarrow{*} \bar{u}, \text{ em } L^\infty(0, T - \varepsilon; H_0^1(0, L)) \quad (3.59)$$

$$v_\nu \xrightarrow{*} \bar{v}, \text{ em } L^\infty(0, T - \varepsilon; H_0^1(0, L)) \quad (3.60)$$

$$z_{\nu t} \xrightarrow{*} \bar{z}_t, \text{ em } L^\infty(0, T - \varepsilon; L^2(0, L)) \quad (3.61)$$

$$u_{\nu t} \xrightarrow{*} \bar{u}_t, \text{ em } L^\infty(0, T - \varepsilon; L^2(0, L)) \quad (3.62)$$

$$v_{\nu t} \xrightarrow{*} \bar{v}_t, \text{ em } L^\infty(0, T - \varepsilon; L^2(0, L)) \quad (3.63)$$

Das propriedades de convolução (ver proposição 2.5.9) também sabemos que, para $t \in [0, T - \varepsilon]$,

$$z_\nu = \rho_\nu * \tilde{z} \rightarrow \tilde{z} = \tilde{z}|_{[0, T - \varepsilon]} = z, \quad (3.64)$$

$$u_\nu = \rho_\nu * \tilde{u} \rightarrow \tilde{u} = \tilde{u}|_{[0, T - \varepsilon]} = u, \quad (3.65)$$

$$v_\nu = \rho_\nu * \tilde{v} \rightarrow \tilde{v} = \tilde{v}|_{[0, T - \varepsilon]} = v, \quad (3.66)$$

uniformemente para todo $t \in [0, T - \varepsilon]$ na norma de $L^2(0, L)$ quando $\nu \rightarrow \infty$. Isto implica que as convergências (3.64)-(3.66) ocorrem em $L^\infty(0, T - \varepsilon; L^2(0, L))$. Então, por unicidade de limites, as convergências (3.58)-(3.66) nos permitem concluir que

$$\{\bar{z}, \bar{u}, \bar{v}\} = \{z, u, v\}, \text{ em } [L^\infty(0, T - \varepsilon; H_0^1(0, L))]^3, \quad (3.67)$$

$$\{\bar{z}_t, \bar{u}_t, \bar{v}_t\} = \{z_t, u_t, v_t\}, \text{ em } [L^\infty(0, T - \varepsilon; L^2(0, L))]^3. \quad (3.68)$$

Além disso, a partir do fato que $\{z, u, v\} \in [C([0, T - \varepsilon]; L^2(0, L))]^3$, de (3.67) e da proposição 2.10.2 obtemos que

$$\{z, u, v\} \in [C_s([0, T - \varepsilon]; H_0^1(0, L))]^3,$$

resultando que

$$z(0), u(0), v(0) \in H_0^1(0, L). \quad (3.69)$$

Da limitação (3.56) e das equações do sistema (3.53) vem que

$$z_{\nu tt}, u_{\nu tt}, v_{\nu tt} \text{ são limitadas em } L^\infty(0, T - \varepsilon; H^{-1}(0, L)) \quad (3.70)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} z_{\nu tt} &\xrightarrow{*} z_{tt} \text{ em } L^\infty(0, T - \varepsilon; H^{-1}(0, L)), \\ u_{\nu tt} &\xrightarrow{*} u_{tt} \text{ em } L^\infty(0, T - \varepsilon; H^{-1}(0, L)), \\ v_{\nu tt} &\xrightarrow{*} v_{tt} \text{ em } L^\infty(0, T - \varepsilon; H^{-1}(0, L)). \end{aligned}$$

Estas convergências, associadas a (3.68), nos permitem concluir que

$$z_t, u_t, v_t \in C_s([0, T - \varepsilon]; L^2(0, L)),$$

ou seja,

$$z_t(0), u_t(0), v_t(0) \in L^2(0, L). \quad (3.71)$$

Portanto, de (3.69) e (3.71) concluímos a demonstração do lema 3.2.4. \square

Retornemos agora a demonstração do teorema 3.2.3. Pelo lema 3.2.4, vem que $\{z, u, v\}$ é, na verdade, uma solução fraca do sistema (3.51). Em outras palavras,

podemos usar a desigualdade (3.43) e juntamente com as equações (3.49)-(3.50) obtemos

$$\mathcal{E}(0) \leq C \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} z_t^2 + u_t^2 + v_t^2 + z^2 + u^2 + v^2 dx dt = 0,$$

onde \mathcal{E} denota a energia do sistema (3.51). Logo, $z = u = v = 0$ em $(0, L) \times (0, T)$. Devido ao fato que $z = \varphi_t$, $u = \psi_t$ e $v = \omega_t$, temos que

$$\varphi_t = \psi_t = \omega_t = 0 \text{ quase sempre em } (0, L) \times (0, T),$$

ou seja, as funções φ, ψ, ω não dependem de $t \in (0, T)$ e, portanto, satisfazem

$$\begin{cases} -k(a(x)\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0l[\omega_x - l\varphi] = 0 \\ -(b(x)\psi_x)_x + k(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0 \\ -k_0[c(x)\omega_x - l\varphi]_x + kl(\varphi_x + \psi + \omega) = 0 \\ \varphi(0) = \varphi(L) = \psi(0) = \psi(L) = \omega(0) = \omega(L) = 0 \end{cases}$$

o que implica que

$$\int_0^L k(a(x) - 1)\varphi_x^2 + b(x)\psi_x^2 + k_0(c(x) - 1)\omega_x^2 + k(\varphi_x + \psi + l\omega)^2 + k_0[\omega_x - l\varphi]^2 dx = 0.$$

Agora note que o segundo termo da integral acima, junto com a desigualdade de Poincaré, implica que $\psi = 0$. Assim, os dois últimos termos da integral acima nos fornecem

$$\begin{cases} \varphi_x + l\omega = 0 \\ \omega_x - l\varphi = 0 \\ \varphi, \omega \in H_0^1(0, L) \end{cases}$$

implicando que $\varphi = \omega = 0$. Isto é, $\varphi = \psi = \omega = 0$, o que contradiz (3.48). Em outras palavras, está provada a desigualdade (3.44).

De (3.43) e (3.44) concluímos a demonstração do teorema 3.2.3.

□

Antes de estabelecer a desigualdade inversa, considere o seguinte resultado

Lema 3.2.5 Dados $v^1, u^1, z^1 \in H^{-1}(0, L)$, o problema estacionário

$$\begin{cases} -k(a(x)\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0l[\omega_x - l\varphi] = v^1, & em (0, L) \\ -(b(x)\psi_x)_x + k(\varphi_x + \psi + l\omega) = u^1, & em (0, L) \\ -k_0[c(x)\omega_x - l\varphi]_x + kl(\varphi_x + \psi + \omega) = z^1, & em (0, L) \\ \varphi(0) = \varphi(L) = \psi(0) = \psi(L) = \omega(0) = \omega(L) = 0 & em (0, T) \end{cases} \quad (3.72)$$

tem uma única solução

$$\{\varphi, \psi, \omega\} \in [H_0^1(0, L)]^3.$$

Além disso, essa solução satisfaz

$$\|\{v^1, u^1, z^1\}\|_{[H^{-1}(0, L)]^3} \leq \|\{\varphi, \psi, \omega\}\|_{[H_0^1(0, L)]^3}. \quad (3.73)$$

Demonstração:[Prova do lema 3.2.5] Defina

$$\alpha : [H_0^1(0, L)]^3 \times [H_0^1(0, L)]^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\begin{aligned} & \alpha \left((\varphi, \psi, \omega), (\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}, \widehat{\omega}) \right) \\ := & \int_0^L ka(x)\varphi_x\widehat{\varphi}_x dx - \int_0^L k\psi_x\widehat{\varphi} dx - \int_0^L kl\omega_x\widehat{\varphi} dx - \int_0^L k_0l\omega_x\widehat{\varphi} dx + \int_0^L k_0l^2\varphi\widehat{\varphi} dx \\ & + \int_0^L b(x)\psi_x\widehat{\psi}_x dx + \int_0^L k\varphi_x\widehat{\psi} dx + \int_0^L k\psi\widehat{\psi} dx + \int_0^L kl\omega\widehat{\psi} dx \\ & + \int_0^L k_0c(x)\omega_x\widehat{\omega}_x dx + \int_0^L k_0l\varphi_x\widehat{\omega} dx + \int_0^L kl\psi_x\widehat{\omega} dx + \int_0^L kl\psi\widehat{\omega} dx + \int_0^L kl^2\omega\widehat{\omega} dx. \end{aligned}$$

Note que $\alpha(\cdot, \cdot)$ é uma forma bilinear, simétrica e positiva. Assim, α define um produto interno $(\cdot, \cdot)_\alpha := \alpha(\cdot, \cdot)$ em $[H_0^1(0, L)]^3$ o qual induz uma norma $\|\cdot\|_\alpha$ em $[H_0^1(0, L)]^3$ dada por

$$\begin{aligned} \|\{\varphi, \psi, \omega\}\|_\alpha &= \alpha(\{\varphi, \psi, \omega\}, \{\varphi, \psi, \omega\}) \\ &= \int_0^L k(a(x) - 1)\varphi_x^2 + b(x)\psi_x^2 + k_0(c(x) - 1)\omega_x^2 + k(\varphi_x + \psi + l\omega)^2 + k_0[\omega_x - l\varphi]^2 dx, \end{aligned}$$

que, por sua vez, é equivalente a norma usual de $[H_0^1(0, L)]^3$. As propriedades desse produto interno implicam que $\alpha(\cdot, \cdot)$ é contínua e coerciva.

Compondo a primeira, a segunda e a terceira equação de (3.72) com $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}, \widehat{\omega} \in H_0^1(0, L)$, respectivamente, podemos ver que

$$\begin{aligned} \alpha \left(\{\varphi, \psi, \omega\}, \{\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}, \widehat{\omega}\} \right) \\ = \langle v^1, \widehat{\varphi} \rangle_{H^{-1}(0,L), H_0^1(0,L)} + \langle u^1, \widehat{\psi} \rangle_{H^{-1}(0,L), H_0^1(0,L)} + \langle z^1, \widehat{\omega} \rangle_{H^{-1}(0,L), H_0^1(0,L)}. \end{aligned}$$

Segue do teorema Lax-Milgram a existência de uma única terna $\{\varphi, \psi, \omega\} \in [H_0^1(0, L)]^3$ satisfazendo a identidade acima. Portanto, $\{\varphi, \psi, \omega\}$ é a única solução de (3.72). A continuidade de α implica na desigualdade (3.73). □

Agora estamos em condições de provar a seguinte desigualdade inversa:

Teorema 3.2.6 (Desigualdade Inversa) *Sejam $T > 2\alpha R$, α e R definidos em (3.5) e (3.6), $\varphi_0, \psi_0, \omega_0 \in L^2(0, L)$ e $\varphi_1, \psi_1, \omega_1 \in H^{-1}(0, L)$. Então existe uma constante positiva, $C > 0$, tal que a solução ultrafraca $\{\varphi, \psi, \omega\}$ de (3.22) satisfaz*

$$\|\{\varphi_0, \psi_0, \omega_0\}\|_{[L^2(0,L)]^3}^2 + \|\{\varphi_1, \psi_1, \omega_1\}\|_{[H^{-1}(0,L)]^3}^2 \leq C \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \varphi^2 + \psi^2 + \omega^2 \, dx \, dt$$

Demonstração:[Prova do teorema 3.2.6] Sejam

$$\begin{aligned} \varphi_0, \psi_0, \omega_0 &\in L^2(0, L) \text{ e} \\ \varphi_1, \psi_1, \omega_1 &\in H^{-1}(0, L). \end{aligned}$$

Por argumentos de densidade, existem seqüências

$$\begin{aligned} \varphi_{0n}, \psi_{0n}, \omega_{0n} &\in H_0^1(0, L) \text{ e} \\ \varphi_{1n}, \psi_{1n}, \omega_{1n} &\in L^2(0, L), \end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}$, tais que

$$\{\varphi_{0n}, \psi_{0n}, \omega_{0n}\} \longrightarrow \{\varphi_0, \psi_0, \omega_0\} \text{ em } [L^2(0, L)]^3, \quad (3.74)$$

$$\{\varphi_{1n}, \psi_{1n}, \omega_{1n}\} \longrightarrow \{\varphi_1, \psi_1, \omega_1\} \text{ em } [H^{-1}(0, L)]^3. \quad (3.75)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $\{v^n, u^n, z^n\} \in [H_0^1(0, L)]^3$ a única solução do sistema

$$\begin{cases} -k(a(x)v_x^n + u^n + lz^n)_x - k_0l[z_x^n - lv^n] = \rho_1\varphi_{1n}, & \text{em } (0, L) \\ -(b(x)u_x^n)_x + k(v_x^n + u^n + lz^n) = \rho_2\psi_{1n}, & \text{em } (0, L) \\ -k_0[c(x)z_x^n - lv^n]_x + kl(v_x^n + u^n + z^n) = \rho_1\omega_{1n}, & \text{em } (0, L) \\ v^n(0) = v^n(L) = u^n(0) = u^n(L) = z^n(0) = z^n(L) = 0, & \text{em } (0, T) \end{cases} \quad (3.76)$$

dada pelo lema 3.2.5. Além disso, este mesmo lema garante que

$$\|\{\varphi_{1n}, \psi_{1n}, \omega_{1n}\}\|_{[H^{-1}(0, L)]^3} \leq \|\{v^n, u^n, z^n\}\|_{[H_0^1(0, L)]^3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.77)$$

Defina

$$\begin{cases} \Phi_n(x, t) = -v^n(x) + \int_0^t \varphi_n(x, s) ds, \\ \Psi_n(x, t) = -u^n(x) + \int_0^t \psi_n(x, s) ds, \\ \Upsilon_n(x, t) = -z^n(x) + \int_0^t \omega_n(x, s) ds, \end{cases} \quad (3.78)$$

onde $\{\varphi_n, \psi_n, \omega_n\}$ é a solução fraca de

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(a(x)\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0l[\omega_x - l\varphi] = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T) \\ \rho_2\psi_{tt} - (b(x)\psi_x)_x + k(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T) \\ \rho_1\omega_{tt} - k_0[c(x)\omega_x - l\varphi]_x + kl(\varphi_x + \psi + \omega) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T) \\ \varphi(0) = \varphi(L) = \psi(0) = \psi(L) = \omega(0) = \omega(L) = 0, & \text{em } (0, T) \\ \varphi(x, 0) = \varphi_{0n}(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_{1n}(x), & x \in (0, L) \\ \psi(x, 0) = \psi_{0n}(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_{1n}(x), & x \in (0, L) \\ \omega(x, 0) = \omega_{0n}(x), \quad \omega_t(x, 0) = \omega_{1n}(x), & x \in (0, L) \end{cases}$$

Da definição (3.78) temos que $\{\Phi_n, \Psi_n, \Upsilon_n\}$ é a solução fraca de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_1 \Phi_{tt} - k(a(x)\Phi_x + \Psi + l\Upsilon)_x - k_0 l[\Upsilon_x - l\Phi] = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T) \\ \rho_2 \Psi_{tt} - (b(x)\Psi_x)_x + k(\Phi_x + \Psi + l\Upsilon) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T) \\ \rho_1 \Upsilon_{tt} - k_0[c(x)\Upsilon_x - l\Phi]_x + kl(\Phi_x + \Psi + \Upsilon) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T) \\ \Phi(0) = \Phi(L) = \Psi(0) = \Psi(L) = \Upsilon(0) = \Upsilon(L) = 0 & \text{em } (0, T) \\ \Phi(x, 0) = \Phi_n^0(x) = -v^n(x), \quad \Phi_t(x, 0) = \Phi_n^1(x) = \varphi_{0n}(x), & x \in (0, L) \\ \Psi(x, 0) = \Psi_n^0(x) = -u^n(x), \quad \Psi_t(x, 0) = \Psi_n^1(x) = \psi_{0n}(x), & x \in (0, L) \\ \Upsilon(x, 0) = \Upsilon_n^0(x) = -z^n(x), \quad \Upsilon_t(x, 0) = \Upsilon_n^1(x) = \omega_{0n}(x), & x \in (0, L) \end{array} \right.$$

Então, a desigualdade de observabilidade dada pelo teorema 3.2.3 implica que

$$\begin{aligned} & \|\{\Phi_n^0, \Psi_n^0, \Upsilon_n^0\}\|_{[H_0^1(0,L)]^3}^2 + \|\{\Phi_n^1, \Psi_n^1, \Upsilon_n^1\}\|_{[L^2(0,L)]^3}^2 \\ & \leq C \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \Phi_{nt}^2(x, t) + \Psi_{nt}^2(x, t) + \Upsilon_{nt}^2(x, t) \, dx \, dt. \end{aligned}$$

A partir da estimativa (3.77) e usando novamente a definição (3.78) obtemos que

$$\begin{aligned} & \|\{\varphi_{1n}, \psi_{1n}, \omega_{1n}\}\|_{[H^{-1}(0,L)]^3}^2 + \|\{\varphi_{0n}, \psi_{0n}, \omega_{0n}\}\|_{[L^2(0,L)]^3}^2 \\ & \leq C \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \varphi_n^2(x, t) + \psi_n^2(x, t) + \omega_n^2(x, t) \, dx \, dt. \end{aligned}$$

A dependência da solução ultrafraca com respeito aos dados iniciais e as convergências (3.74)-(3.75) juntamente com desigualdade acima nos remetem a

$$\begin{aligned} & \|\{\varphi_1, \psi_1, \omega_1\}\|_{[H^{-1}(0,L)]^3}^2 + \|\{\varphi_0, \psi_0, \omega_0\}\|_{[L^2(0,L)]^3}^2 \\ & \leq C \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \varphi^2(x, t) + \psi^2(x, t) + \omega^2(x, t) \, dx \, dt, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do teorema 3.2.6. □

3.3 Aplicação do Método H.U.M. (Hilbert Uniqueness Method)

Para chegar ao resultado de controlabilidade, considere o seguinte lema cuja demonstração não será apresentada aqui, mas se baseia em argumentos usuais de Análise Funcional.

Lema 3.3.1 *Seja F um espaço de Hilbert e E um subespaço de F , tal que $\overline{E} = F$. Se $\Lambda : E \rightarrow F'$ é uma aplicação linear satisfazendo*

$$\langle \Lambda f, g \rangle_{F',F} = (f, g)_F, \quad \forall f, g \in E,$$

então podemos estendê-la a uma aplicação linear $\Lambda : F \rightarrow F'$ tal que

$$\langle \Lambda f, g \rangle_{F',F} = (f, g)_F, \quad \forall f, g \in F.$$

Além disso, Λ é um isomorfismo linear que preserva normas.

Demonstração:[Prova do lema 3.3.1] Use o teorema 2.6.6.

□

Agora estamos em condições de estabelecer o principal resultado deste capítulo.

Teorema 3.3.2 (Resultado Principal) *Seja $T > 2\alpha R$, α e R dados em (3.5) e (3.6), $\varphi_0, \psi_0, \omega_0 \in H_0^1(0, L)$ e $\varphi_1, \psi_1, \omega_1 \in L^2(0, L)$. Então existem controles $h_1 = h_1(x, t)$, $h_2 = h_2(x, t)$, $h_3 = h_3(x, t) \in L^2(0, T; L^2(l_1, l_2))$ tal que a solução $\{\varphi, \psi, \omega\}$ do sistema de Bresse*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_1 \varphi_{tt} - k(a(x)\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l[\omega_x - l\varphi] = h_1 \chi, & \text{em } (0, L) \times (0, T) \\ \rho_2 \psi_{tt} - (b(x)\psi_x)_x + k(\varphi_x + \psi + l\omega) = h_2 \chi, & \text{em } (0, L) \times (0, T) \\ \rho_1 \omega_{tt} - k_0[c(x)\omega_x - l\varphi]_x + kl(\varphi_x + \psi + \omega) = h_3 \chi, & \text{em } (0, L) \times (0, T) \\ \varphi(0) = \varphi(L) = \psi(0) = \psi(L) = \omega(0) = \omega(L) = 0 & \text{em } (0, T) \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), & x \in (0, L) \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), & x \in (0, L) \\ \omega(x, 0) = \omega_0(x), \quad \omega_t(x, 0) = \omega_1(x), & x \in (0, L) \end{array} \right. \quad (3.79)$$

onde χ é a função característica do intervalo (l_1, l_2) , verifica

$$\begin{aligned}\varphi(x, T) &= 0, & \varphi_t(x, T) &= 0, \\ \psi(x, T) &= 0, & \psi_t(x, T) &= 0, \\ \omega(x, T) &= 0, & \omega_t(x, T) &= 0.\end{aligned}$$

Demonstração:[Prova do teorema 3.3.2] Considere $\{u, v, z\}$ a solução forte do seguinte problema homogêneo

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_1 v_{tt} - k(a(x)v_x + u + lz)_x - k_0 l[z_x - lv] = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T) \\ \rho_2 u_{tt} - (b(x)u_x)_x + k(v_x + u + lz) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T) \\ \rho_1 z_{tt} - k_0[c(x)z_x - lv]_x + kl(v_x + u + z) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T) \\ v(0) = v(L) = u(0) = u(L) = z(0) = z(L) = 0 & \text{em } (0, T) \\ v(x, 0) = v^0(x), \quad v_t(x, 0) = v^1(x), & x \in (0, L) \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x), & x \in (0, L) \\ z(x, 0) = z^0(x), \quad z_t(x, 0) = z^1(x), & x \in (0, L) \end{array} \right. \quad (3.80)$$

onde $v^0, v^1, u^0, u^1, z^0, z^1$ funções arbitrárias de $C_0^\infty(0, L)$. Além disso, considere o sistema retrógrado

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_1 \theta_{tt} - k(a(x)\theta_x + \zeta + l\vartheta)_x - k_0 l[\vartheta_x - l\theta] = -v\chi, & \text{em } (0, L) \times (0, T) \\ \rho_2 \zeta_{tt} - (b(x)\zeta_x)_x + k(\theta_x + \zeta + l\vartheta) = -u\chi, & \text{em } (0, L) \times (0, T) \\ \rho_1 \vartheta_{tt} - k_0[c(x)\vartheta_x - l\theta]_x + kl(\theta_x + \zeta + \vartheta) = -z\chi, & \text{em } (0, L) \times (0, T) \\ \theta(0) = \theta(L) = \zeta(0) = \zeta(L) = \vartheta(0) = \vartheta(L) = 0 & \text{em } (0, T) \\ \theta(x, T) = 0, \quad \theta_t(x, T) = 0, & x \in (0, L) \\ \zeta(x, T) = 0, \quad \zeta_t(x, T) = 0, & x \in (0, L) \\ \vartheta(x, T) = 0, \quad \vartheta_t(x, T) = 0, & x \in (0, L) \end{array} \right. \quad (3.81)$$

o qual tem uma única solução forte $\{\theta, \zeta, \vartheta\}$. Para encontrar os controles desejados, consideramos o operador Λ ,

$$\begin{aligned}\Lambda : [C_0^\infty(0, L)]^6 &\longrightarrow [L^2(0, L) \times H_0^1(0, L)]^3 \\ \{v^0, v^1, u^0, u^1, z^0, z^1\} &\longmapsto \{\rho_1 \theta_t(\cdot, 0), -\rho_1 \theta(\cdot, 0), \rho_2 \zeta_t(\cdot, 0), -\rho_2 \zeta(\cdot, 0), \rho_1 \vartheta_t(\cdot, 0), -\rho_1 \vartheta(\cdot, 0)\}\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} & \langle \Lambda\{v^0, v^1, u^0, u^1, z^0, z^1\}, \{\gamma^0, \gamma^1, \sigma^0, \sigma^1, \tau^0, \tau^1\} \rangle_{D', D} \\ &= \rho_1(\theta_t(\cdot, 0), \gamma^0) + \rho_2(\zeta_t(\cdot, 0), \sigma^0) + \rho_1(\vartheta_t(\cdot, 0), \tau^0) \\ & \quad - \rho_1(\theta(\cdot, 0), \gamma^1) - \rho_2(\zeta(\cdot, 0), \sigma^1) - \rho_1(\vartheta(\cdot, 0), \tau^1) \end{aligned} \quad (3.82)$$

para cada $\gamma^0, \gamma^1, \sigma^0, \sigma^1, \tau^0, \tau^1 \in C_0^\infty(0, L)$.

Por outro lado, dados $\gamma^0, \gamma^1, \sigma^0, \sigma^1, \tau^0, \tau^1 \in C_0^\infty(0, L)$, multiplicando a primeira, segunda e terceira equação de

$$\begin{cases} \rho_1 \gamma_{tt} - k(a(x)\gamma_x + \sigma + l\tau)_x - k_0 l[\tau_x - l\gamma] = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T) \\ \rho_2 \sigma_{tt} - (b(x)\sigma_x)_x + k(\gamma_x + \sigma + l\tau) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T) \\ \rho_1 \tau_{tt} - k_0[c(x)\tau_x - l\gamma]_x + kl(\gamma_x + \sigma + \tau) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T) \\ \gamma(0) = \gamma(L) = \sigma(0) = \sigma(L) = \tau(0) = \tau(L) = 0 & \text{em } (0, T) \\ \gamma(x, 0) = \gamma^0(x), \quad \gamma_t(x, 0) = \gamma^1(x), & x \in (0, L) \\ \sigma(x, 0) = \sigma^0(x), \quad \sigma_t(x, 0) = \sigma^1(x), & x \in (0, L) \\ \tau(x, 0) = \tau^0(x), \quad \tau_t(x, 0) = \tau^1(x), & x \in (0, L) \end{cases} \quad (3.83)$$

por θ , ζ e ϑ , respectivamente, e integrando por partes sobre $(0, L) \times (0, T)$ obtemos, usando (3.81), que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \gamma v + \sigma u + \tau z \, dx \, dt \\ &= \rho_1(\theta_t(\cdot, 0), \gamma^0) + \rho_2(\zeta_t(\cdot, 0), \sigma^0) + \rho_1(\vartheta_t(\cdot, 0), \tau^0) \\ & \quad - \rho_1(\theta(\cdot, 0), \gamma^1) - \rho_2(\zeta(\cdot, 0), \sigma^1) - \rho_1(\vartheta(\cdot, 0), \tau^1). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Das equações (3.82) e (3.84) resulta que

$$\langle \Lambda\{v^0, v^1, u^0, u^1, z^0, z^1\}, \{\gamma^0, \gamma^1, \sigma^0, \sigma^1, \tau^0, \tau^1\} \rangle_{D', D} = \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \gamma v + \sigma u + \tau z \, dx \, dt. \quad (3.85)$$

Considere também a aplicação

$$(\cdot, \cdot)_F : [C_0^\infty(0, L)]^6 \times [C_0^\infty(0, L)]^6 \longrightarrow \mathbb{R}$$

que a cada $\{\{v^0, v^1, u^0, u^1, z^0, z^1\}, \{\gamma^0, \gamma^1, \sigma^0, \sigma^1, \tau^0, \tau^1\}\} \in [C_0^\infty(0, L)]^6 \times [C_0^\infty(0, L)]^6$ associa o número real

$$(\{v^0, v^1, u^0, u^1, z^0, z^1\}, \{\gamma^0, \gamma^1, \sigma^0, \sigma^1, \tau^0, \tau^1\})_F = \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \gamma v + \sigma u + \tau z \, dx \, dt \quad (3.86)$$

Note que $(\cdot, \cdot)_F$ define um produto interno em $[C_0^\infty(0, L)]^6$. De fato, a simetria é óbvia e a linearidade segue da linearidade e unicidade de solução do sistema de Bresse envolvido na definição de Λ . A positividade é uma consequência da desigualdade inversa apresentada no teorema 3.2.6. Com efeito, se $\{v^0, v^1, u^0, u^1, z^0, z^1\} = 0$ então $\{v, u, z\} = 0$ e portanto

$$(\{v^0, v^1, u^0, u^1, z^0, z^1\}, \{v^0, v^1, u^0, u^1, z^0, z^1\})_F = \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} v^2 + u^2 + z^2 \, dx \, dt = 0.$$

Por outro lado se $(\{v^0, v^1, u^0, u^1, z^0, z^1\}, \{v^0, v^1, u^0, u^1, z^0, z^1\})_F = 0$ então $\int_0^T \int_{l_1}^{l_2} v^2 + u^2 + z^2 \, dx \, dt = 0$. Pelo desigualdade inversa, dada no teorema 3.2.6,

$$\|v^0\|_{L^2(0,L)}^2 + \|u^0\|_{L^2(0,L)}^2 + \|z^0\|_{L^2(0,L)}^2 + \|v^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + \|u^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + \|z^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 = 0$$

e portanto

$$\{v^0, v^1, u^0, u^1, z^0, z^1\} = 0$$

o que prova o desejado.

Desta forma podemos introduzir em $[C_0^\infty(0, L)]^6$ a norma $\|\cdot\|_F$ dada por $\|\cdot\|_F = \sqrt{(\cdot, \cdot)_F}$. Seja F o completado de $[C_0^\infty(0, L)]^6$ com a norma $\|\cdot\|_F$. Então F é um espaço de Hilbert. Mostremos que

$$F = [L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L)]^3. \quad (3.87)$$

De fato, seja $\{v^0, v^1, u^0, u^1, z^0, z^1\} = \Theta \in F$. Então existe uma sequência em $[C_0^\infty(0, L)]^6$, $\{v_n^0, v_n^1, u_n^0, u_n^1, z_n^0, z_n^1\}_{n \in \mathbb{N}} = \{\Theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, que converge para Θ . Logo $\{\Theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em F . Como $[C_0^\infty(0, L)]^6 \hookrightarrow [L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L)]^3$ segue que $\{\Theta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L)]^3$. Desta última contigência, do fato que $\{\Theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em F e do teorema 3.2.6 segue que $\{\Theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $[L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L)]^3$. Como $[L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L)]^3$ é espaço de Banach, vem que $\{\Theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge em $[L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L)]^3$ para algum $\Gamma = \{\varphi^0, \varphi^1, \psi^0, \psi^1, \omega^0, \omega^1\} \in [L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L)]^3$. Pelo teorema 3.2.2 temos que $\Theta_n \rightarrow \Gamma$ em F quando $n \rightarrow \infty$. Da unicidade do limite resulta que $\Theta = \Gamma$ e,

portanto,

$$\Theta \in [L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L)]^3.$$

Por outro lado, seja $\Theta \in [L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L)]^3$. Como $[C_0^\infty(0, L)]^6$ é denso em $[L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L)]^3$ existe $\{\Theta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [C_0^\infty(0, L)]^6$ tal que $\Theta_n \rightarrow \Theta$ na norma de $[L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L)]^3$. Logo $\{\Theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $[L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L)]^3$. Pela desigualdade direta apresentada no teorema 3.2.2 vem que $\{\Theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em F . Como F é completo $\Theta_n \rightarrow \Gamma$ na norma de F para algum $\Gamma \in F$. Pelo teorema 3.2.6 temos que $\Theta_n \rightarrow \Gamma$ na norma de $[L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L)]^3$. Por unicidade de limites $\Theta = \Gamma \in F$ provando a afirmação (3.87).

De (3.85)-(3.86) e do lema 3.3.1, tendo em vista a densidade de $[C_0^\infty(0, L)]^6$ em F , temos que

$$\begin{aligned} \langle \Lambda\{v^0, v^1, u^0, u^1, z^0, z^1\}, \{\gamma^0, \gamma^1, \sigma^0, \sigma^1, \tau^0, \tau^1\} \rangle_{F', F} \\ = (\{v^0, v^1, u^0, u^1, z^0, z^1\}, \{\gamma^0, \gamma^1, \sigma^0, \sigma^1, \tau^0, \tau^1\})_F, \end{aligned}$$

para todo $\{v^0, v^1, u^0, u^1, z^0, z^1\}, \{\gamma^0, \gamma^1, \sigma^0, \sigma^1, \tau^0, \tau^1\} \in F$, onde $\Lambda : F \rightarrow F'$ é a isometria dada pelo lema 3.3.1. Assim, dados $\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1\} \in [H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)]^3$, existem únicos $\{v^0, v^1, u^0, u^1, z^0, z^1\} \in [L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L)]^3$ tais que

$$\Lambda\{v^0, v^1, u^0, u^1, z^0, z^1\} = \{\rho_1\varphi_1, -\rho_1\varphi_0, \rho_2\psi_1, -\rho_2\psi_0, \rho_1\omega_1, -\rho_1\omega_0\}.$$

Da definição de Λ e da identidade acima vem que

$$\begin{cases} \theta(0) = \varphi_0, & \theta_t(0) = \varphi_1, \\ \zeta(0) = \psi_0, & \zeta_t(0) = \psi_1, \\ \vartheta(0) = \omega_0, & \vartheta_t(0) = \omega_1. \end{cases} \quad (3.88)$$

Então, escolhemos os controles

$$h_1 := -v, \quad h_2 := -u, \quad h_3 := -z$$

onde $\{u, v, z\}$ é solução (3.80). Isto implica que o sistema (3.79) tem uma única solução $\{\varphi, \psi, \omega\}$. Entretanto, observe que a solução $\{\theta, \zeta, \vartheta\}$ de (3.81) satisfaz (3.88) que são as

mesmas condições impostas em (3.79). Por unicidade de solução destes sistemas,

$$\begin{aligned}\varphi &= \theta, \text{ em } (0, L) \times (0, T), \\ \psi &= \zeta, \text{ em } (0, L) \times (0, T), \\ \omega &= \vartheta, \text{ em } (0, L) \times (0, T).\end{aligned}$$

Portanto, $\{\varphi, \psi, \omega\}$ satisfaz as mesmas condições finais de $\{\theta, \zeta, \vartheta\}$, a saber,

$$\begin{aligned}\varphi(x, T) &= \theta(x, T) = 0, & \forall x \in (0, L), \\ \psi(x, T) &= \zeta(x, T) = 0, & \forall x \in (0, L), \\ \omega(x, T) &= \vartheta(x, T) = 0, & \forall x \in (0, L), \\ \varphi_t(\cdot, T) &= \theta_t(\cdot, T) = 0, & \text{ em } L^2(0, L), \\ \psi_t(\cdot, T) &= \zeta_t(\cdot, T) = 0, & \text{ em } L^2(0, L), \\ \omega_t(\cdot, T) &= \vartheta_t(\cdot, T) = 0, & \text{ em } L^2(0, L),\end{aligned}$$

o que completa a prova do teorema 3.3.2.

□

Observação 3.3.3 *Os cálculos desenvolvidos ao longo deste capítulo nos mostram que, independente da escolha do intervalo não vazio $(l_1, l_2) \subset (0, L)$ onde os controles agem, o sistema (3.1)-(3.3) pode sempre ser controlado para qualquer que seja o tempo T satisfazendo $T > 2\alpha L$. Por outro lado, a definição de R nos permite concluir que controles agindo no centro do intervalo $(0, L)$ são mais eficientes. O aumento do comprimento de (l_1, l_2) também reduz o tempo de controle do sistema. O ínfimo dos tempos de controle encontrado é $\alpha[L - (l_2 - l_1)]$.*

Decaimento exponencial para o sistema de termodifusão

Neste capítulo consideramos o sistema de termodifusão linear dado por

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - (\lambda + 2\mu)u_{xx} + \gamma_1\theta_{1x} + \gamma_2\theta_{2x} + \alpha_3(x)u_t = 0, \\ c\theta_{1t} + \sqrt{k}q_{1x} + \gamma_1u_{tx} + d\theta_{2t} = 0, \\ n\theta_{2t} + \sqrt{D}q_{2x} + \gamma_2u_{tx} + d\theta_{1t} = 0, \\ \tau_1q_{1t} + \alpha_1(x)q_1 + \sqrt{k}\theta_{1x} = 0, \\ \tau_2q_{2t} + \alpha_2(x)q_2 + \sqrt{D}\theta_{2x} = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

em $(0, 1) \times (0, \infty)$, com condições iniciais

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), & u_t(x, 0) = u_1(x), \\ \theta_1(x, 0) = \theta_{10}(x), & \theta_2(x, 0) = \theta_{20}(x), \\ q_1(x, 0) = q_{10}(x), & q_2(x, 0) = q_{20}(x), \end{cases} \quad (4.2)$$

e ainda sujeito as condições de fronteira

$$u(0, t) = u(1, t) = \theta_1(0, t) = \theta_1(1, t) = \theta_2(0, t) = \theta_2(1, t) = 0. \quad (4.3)$$

onde u , θ_1 , q_1 denotam o deslocamento, a temperatura e o fluxo de calor. As funções θ_2 e q_2 representam o potencial químico e o fluxo associado. Os coeficientes λ e μ são constantes relacionadas a composição do material, ρ é a densidade, γ_1 , γ_2 são a dilatação térmica e difusão, k e D são a condutividade térmica. Além disso, n , c e d são os coeficientes de termodifusão e τ_1 e τ_2 se referem ao tempo de relaxamento. Todos os coeficientes descritos

acima são positivos e satisfazem a seguinte relação de termodifusão:

$$nc - d^2 > 0. \quad (4.4)$$

Este capítulo está estruturado conforme segue: Na seção 1 são feitas algumas considerações sobre as funções localizadoras α_1 , α_2 e α_3 , energia e existencia de soluções. A seção 2 é dedicada a obter uma desigualdade observabilidade para o sistema conservativo associado usando a técnica dos multiplicadores. Na seção 3, usando argumentos por contradição, estendemos a desigualdade de observabilidade para o sistema dissipativo e mostramos o decaimento exponencial.

4.1 Considerações iniciais e boa colocação

Tendo em vista a estabilidade assintótica do sistema de termodifusão linear (4.1)-(4.3), fazemos a seguinte hipótese sobre as funções localizadoras:

Hipótese 4.1.1 *Assuma que $\alpha_i \in L^\infty(0, 1)$, $i = 1, 2, 3$, são funções não negativas tais que*

$$\alpha_i(x) \geq \alpha_{i0} > 0 \text{ em algum intervalo } J_i \subset (0, 1), \quad i = 1, 2, 3$$

e

$$\emptyset \neq (a_1, a_2) = I := \bigcap_{i=1}^3 J_i \subset (0, 1).$$

Como veremos a seguir (lema 4.1.2), essas funções localizam os mecanismos de “damping” em regiões arbitrariamente pequenas.

Suponha que $\{u, \theta_1, \theta_2, q_1, q_2\}$ é uma solução de (4.1)-(4.3). Então a energia associada, denotada por $E(t)$, $t \geq 0$, é dada por

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) \quad (4.5)$$

onde a energia de primeira ordem, $E_1(t)$, é definida por

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \rho u_t^2 + (\lambda + 2\mu) u_x^2 + c\theta_1^2 + n\theta_2^2 + \tau_1 q_1^2 + \tau_2 q_2^2 + 2d\theta_1\theta_2 dx$$

e a energia de segunda ordem por

$$E_2(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \rho u_{tt}^2 + (\lambda + 2\mu) u_{xt}^2 + c\theta_{1t}^2 + n\theta_{2t}^2 + \tau_1 q_{1t}^2 + \tau_2 q_{2t}^2 + 2d\theta_{1t}\theta_{2t} dx$$

Note que a condição (4.4) implica que $E(t) \geq 0$. De fato, basta observar que o termo $c\theta_1^2 + n\theta_2^2 + 2d\theta_1\theta_2$ presente em $E_1(t)$ e o termo $c\theta_{1t}^2 + n\theta_{2t}^2 + 2d\theta_{1t}\theta_{2t}$ presente em $E_2(t)$ são não negativos. Faremos para o primeiro e o segundo seguirá de forma análoga. Com efeito, considere o polinômio P , na variável θ_1 , dado por

$$P(\theta_1) = c\theta_1^2 + n\theta_2^2 + 2d\theta_1\theta_2$$

que representa uma parábola de concavidade voltada para cima. Agora observe que a equação

$$c\theta_1^2 + 2d\theta_2\theta_1 + n\theta_2^2 = 0,$$

na variável θ_1 , tem discriminante Δ menor ou igual a zero. Com efeito

$$\begin{aligned} \Delta &= (2d\theta_2)^2 - 4cn\theta_2^2 \\ &= 4\theta_2^2 \underbrace{(d^2 - nc)}_{<0} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Portanto $P(\theta_1) \geq 0$ o que implica que $E_1(t) \geq 0$. De modo análogo $E_2(t) \geq 0$ e, portanto, $E(t) \geq 0$.

Lema 4.1.2 *O funcional de energia, E , definido por (4.5), satisfaz*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= - \int_0^1 \alpha_1(x) q_1^2 + \alpha_2(x) q_2^2 + \alpha_3(x) u_t^2 dx \\ &\quad - \int_0^1 \alpha_1(x) q_{1t}^2 + \alpha_2(x) q_{2t}^2 + \alpha_3(x) u_{tt}^2 dx \\ &\leq 0, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Demonstração: Multiplique a primeira equação de (4.1) por u_t , a segunda por θ_1 , a terceira por θ_2 , a quarta por q_1 e a quinta por q_2 , e faça integração por partes com $x \in (0, 1)$. Fazendo cálculos análogos para o problema derivado em relação a t , somando os resultados e usando a hipótese 4.1.1 obtemos o desejado.

□

Para a existência de solução, considere o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$$

munido da norma

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &:= \|\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\equiv \int_0^1 \rho u_2^2 + (\lambda + 2\mu)u_{1x}^2 + cu_3^2 + nu_4^2 + \tau_1 u_5^2 + \tau_2 u_6^2 + 2du_3u_4 \, dx \end{aligned}$$

induzida pelo produto interno

$$\begin{aligned} (U, V)_{\mathcal{H}} &:= (\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\})_{\mathcal{H}} \\ &\equiv (\lambda + 2\mu)(u_{1x}, v_{1x}) + \rho(u_2, v_2) + c(u_3, v_3) + d(u_3, v_4) \\ &\quad + n(u_4, v_4) + d(u_4, v_3) + \tau_1(u_5, v_5) + \tau_2(u_6, v_6) \end{aligned}$$

onde (\cdot, \cdot) denota o produto interno usual de $L^2(0, 1)$.

Observe que podemos isolar θ_{1t} e θ_{2t} na segunda e terceira equações de (4.1) e, portanto, o sistema (4.1) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} &= (\lambda + 2\mu)u_{xx} - \gamma_1\theta_{1x} - \gamma_2\theta_{2x} - \alpha_3(x)u_t \\ (nc - d^2)\theta_{1t} &= -n\sqrt{k}q_{1x} + d\sqrt{D}q_{2x} - (n\gamma_1 - d\gamma_2)u_{tx} \\ (nc - d^2)\theta_{2t} &= -c\sqrt{D}q_{2x} + d\sqrt{k}q_{1x} - (c\gamma_2 - d\gamma_1)u_{tx} \\ \tau_1 q_{1t} &= -\alpha_1(x)q_1 - \sqrt{k}\theta_{1x} \\ \tau_2 q_{2t} &= -\alpha_2(x)q_2 - \sqrt{D}\theta_{2x} \end{aligned}$$

Então, denotando $Y(t) = \{u, u_t, \theta_1, \theta_2, q_1, q_2\}$, segue que o sistema (4.1)-(4.2) é equivalente a

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Y(t) + \mathcal{A}Y(t) = 0 \\ Y(0) = Y_0 \end{cases},$$

onde $Y(0) = \{u_0, u_1, \theta_{10}, \theta_{20}, q_{10}, q_{20}\}$ e o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é dado por $\mathcal{A} = -(A_1 + A_2)$ cujos domínios são

$$D(A_1) = H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \times H^1(0, 1),$$

$$D(A_2) = \mathcal{H}$$

e as componentes A_1 e A_2 são definidas por

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda+2\mu}{\rho} \partial_{xx} & 0 & -\frac{\gamma_1}{\rho} \partial_x & -\frac{\gamma_2}{\rho} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{n\gamma_1-d\gamma_2}{nc-d^2} \partial_x & 0 & 0 & -\frac{n\sqrt{k}}{nc-d^2} \partial_x & \frac{d\sqrt{D}}{nc-d^2} \partial_x \\ 0 & -\frac{c\gamma_2-d\gamma_1}{nc-d^2} \partial_x & 0 & 0 & \frac{d\sqrt{k}}{nc-d^2} \partial_x & -\frac{c\sqrt{D}}{nc-d^2} \partial_x \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{k}}{\tau_1} \partial_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{D}}{\tau_2} \partial_x & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_3(x)}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_1(x)}{\tau_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_2(x)}{\tau_2} \end{pmatrix}.$$

Note que $D(\mathcal{A}) = D(A_1)$ e A_1 é anti-adjunto, isto é, $(A_1 U, V)_{\mathcal{H}} = (U, -A_1 V)_{\mathcal{H}}$ para todo $U, V \in D(A_1)$. De fato, como

$$A_1 U = \begin{pmatrix} u_2 \\ \frac{\lambda+2\mu}{\rho} u_{1xx} - \frac{\gamma_1}{\rho} u_{3x} - \frac{\gamma_2}{\rho} u_{4x} \\ -\frac{n\gamma_1-d\gamma_2}{nc-d^2} u_{2x} - \frac{n\sqrt{k}}{nc-d^2} u_{5x} + \frac{d\sqrt{D}}{nc-d^2} u_{6x} \\ -\frac{c\gamma_2-d\gamma_1}{nc-d^2} u_{2x} + \frac{d\sqrt{k}}{nc-d^2} u_{5x} - \frac{c\sqrt{D}}{nc-d^2} u_{6x} \\ -\frac{\sqrt{k}}{\tau_1} u_{3x} \\ -\frac{\sqrt{D}}{\tau_2} u_{4x} \end{pmatrix}$$

segue que

$$\begin{aligned}
(A_1U, V)_{\mathcal{H}} = & (\lambda + 2\mu)(u_{2x}, v_{1x}) + \rho \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} u_{1xx} - \frac{\gamma_1}{\rho} u_{3x} - \frac{\gamma_2}{\rho} u_{4x}, v_2 \right) \\
& + c \left(-\frac{n\gamma_1 - d\gamma_2}{nc - d^2} u_{2x} - \frac{n\sqrt{k}}{nc - d^2} u_{5x} + \frac{d\sqrt{D}}{nc - d^2} u_{6x}, v_3 \right) \\
& + d \left(-\frac{c\gamma_2 - d\gamma_1}{nc - d^2} u_{2x} + \frac{d\sqrt{k}}{nc - d^2} u_{5x} - \frac{c\sqrt{D}}{nc - d^2} u_{6x}, v_3 \right) \\
& + n \left(-\frac{c\gamma_2 - d\gamma_1}{nc - d^2} u_{2x} + \frac{d\sqrt{k}}{nc - d^2} u_{5x} - \frac{c\sqrt{D}}{nc - d^2} u_{6x}, v_4 \right) \\
& + d \left(-\frac{n\gamma_1 - d\gamma_2}{nc - d^2} u_{2x} - \frac{n\sqrt{k}}{nc - d^2} u_{5x} + \frac{d\sqrt{D}}{nc - d^2} u_{6x}, v_4 \right) \\
& + \tau_1 \left(-\frac{\sqrt{k}}{\tau_1} u_{3x}, v_5 \right) + \tau_2 \left(-\frac{\sqrt{D}}{\tau_2} u_{4x}, v_6 \right)
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
(A_1U, V)_{\mathcal{H}} = & -(\lambda + 2\mu)(u_2, v_{1xx}) - (\lambda + 2\mu)(u_{1x}, v_{2x}) \\
& + \gamma_1(u_3, v_{2x}) + \gamma_2(u_4, v_{2x}) + c \frac{n\gamma_1 - d\gamma_2}{nc - d^2} (u_2, v_{3x}) \\
& + \frac{cn\sqrt{k}}{nc - d^2} (u_5, v_{3x}) - \frac{cd\sqrt{D}}{nc - d^2} (u_6, v_{3x}) + d \frac{c\gamma_2 - d\gamma_1}{nc - d^2} (u_2, v_{3x}) \\
& - \frac{d^2\sqrt{k}}{nc - d^2} (u_5, v_{3x}) + \frac{dc\sqrt{D}}{nc - d^2} (u_6, v_{3x}) + n \frac{c\gamma_2 - d\gamma_1}{nc - d^2} (u_2, v_{4x}) \\
& - \frac{nd\sqrt{k}}{nc - d^2} (u_5, v_{4x}) + \frac{nc\sqrt{D}}{nc - d^2} (u_6, v_{4x}) + d \frac{n\gamma_1 - d\gamma_2}{nc - d^2} (u_2, v_{4x}) \\
& + \frac{dn\sqrt{k}}{nc - d^2} (u_5, v_{4x}) - \frac{d^2\sqrt{D}}{nc - d^2} (u_6, v_{4x}) \\
& + \sqrt{k}(u_3, v_{5x}) + \sqrt{D}(u_4, v_{6x}),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
(A_1 U, V)_{\mathcal{H}} &= -(\lambda + 2\mu)(u_{1x}, v_{2x}) + \left[\underbrace{c \frac{n\gamma_1 - d\gamma_2}{nc - d^2} + d \frac{c\gamma_2 - d\gamma_1}{nc - d^2}}_{=\gamma_1} \right] (u_2, v_{3x}) \\
&+ \left[\underbrace{n \frac{c\gamma_2 - d\gamma_1}{nc - d^2} + d \frac{n\gamma_1 - d\gamma_2}{nc - d^2}}_{=\gamma_2} \right] (u_2, v_{4x}) + (u_2, -(\lambda + 2\mu)v_{1xx}) \\
&+ (u_3, \gamma_1 v_{2x} + \sqrt{k}v_{5x}) + (u_4, \gamma_2 v_{2x} + \sqrt{D}v_{6x}) \\
&+ (u_5, \sqrt{k}v_{3x}) + (u_6, \sqrt{D}v_{4x})
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
(A_1 U, V)_{\mathcal{H}} &= (u_{1x}, -(\lambda + 2\mu)v_{2x}) + (u_2, -(\lambda + 2\mu)v_{1xx} + \gamma_1 v_{3x} + \gamma_2 v_{4x}) \\
&+ (u_3, \gamma_1 v_{2x} + \sqrt{k}v_{5x}) + (u_4, \gamma_2 v_{2x} + \sqrt{D}v_{6x}) \\
&+ (u_5, \sqrt{k}v_{3x}) + (u_6, \sqrt{D}v_{4x})
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Por outro lado, veja que

$$\begin{aligned}
(U, -A_1 V)_{\mathcal{H}} &= (\lambda + 2\mu)(u_{1x}, -v_{2x}) \\
&+ \rho \left(u_2, -\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} v_{1xx} + \frac{\gamma_1}{\rho} v_{3x} + \frac{\gamma_2}{\rho} v_{4x} \right) \\
&+ c \left(u_3, \frac{n\gamma_1 - d\gamma_2}{nc - d^2} v_{2x} + \frac{n\sqrt{k}}{nc - d^2} v_{5x} - \frac{d\sqrt{D}}{nc - d^2} v_{6x} \right) \\
&+ d \left(u_3, \frac{c\gamma_2 - d\gamma_1}{nc - d^2} v_{2x} - \frac{d\sqrt{k}}{nc - d^2} v_{5x} + \frac{c\sqrt{D}}{nc - d^2} v_{6x} \right) \\
&+ n \left(u_4, \frac{c\gamma_2 - d\gamma_1}{nc - d^2} v_{2x} - \frac{d\sqrt{k}}{nc - d^2} v_{5x} + \frac{c\sqrt{D}}{nc - d^2} v_{6x} \right) \\
&+ d \left(u_4, \frac{n\gamma_1 - d\gamma_2}{nc - d^2} v_{2x} + \frac{n\sqrt{k}}{nc - d^2} v_{5x} - \frac{d\sqrt{D}}{nc - d^2} v_{6x} \right) \\
&+ \tau_1 \left(u_5, \frac{\sqrt{k}}{\tau_1} v_{3x} \right) + \tau_2 \left(u_6, \frac{\sqrt{D}}{\tau_2} v_{4x} \right),
\end{aligned}$$

o que nos leva a

$$\begin{aligned} (U, -A_1 V)_{\mathcal{H}} &= (u_{1x}, -(\lambda + 2\mu)v_{2x}) + (u_2, -(\lambda - 2\mu)v_{1xx} + \gamma_1 v_{3x} + \gamma_2 v_{4x}) \\ &\quad \left(u_3, \gamma_1 v_{2x} + \sqrt{k}v_{5x} \right) + \left(u_4, \gamma_2 v_{2x} + \sqrt{D}v_{6x} \right) \\ &\quad + \left(u_5, \sqrt{k}v_{3x} \right) + \left(u_6, \sqrt{D}v_{4x} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

De (4.6) e (4.7) vem que $(A_1 U, V) = (U, -A_1 V)$ o que mostra que $A_1^* = -A_1$.

Pelo Teorema 2.8.12 (de Stone) A_1 é o gerador infinitesimal de um grupo unitário de classe C_0 , em particular, A_1 é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 .

Por outro lado,

$$(-A_2 U, U)_{\mathcal{H}} = \int_0^1 \alpha_1(x) u_5^2 + \alpha_2(x) u_6^2 + \alpha_3(x) u_2^2 \geq 0$$

o que implica que A_2 é dissipativo. Da definição de A_2 vem que

$$\begin{aligned} \| -A_2 U \|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_0^1 \rho \left| \frac{\alpha_3(x)}{\rho} u_2 \right|^2 + \tau_1 \left| \frac{\alpha_1(x)}{\tau_1} u_5 \right|^2 + \tau_2 \left| \frac{\alpha_2(x)}{\tau_2} u_6 \right|^2 dx \\ &\leq C \| U \|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Pelo teorema 2.8.8 vem que $-\mathcal{A} = A_1 + A_2$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 . Da observação 2.8.13 temos o seguinte resultado de existência e regularidade de solução

Teorema 4.1.3 *Dado $Y_0 = \{u_0, u_1, \theta_{10}, \theta_{20}, q_{10}, q_{20}\} \in D(\mathcal{A})$, o problema (4.1)-(4.3) tem uma única solução $Y \in C([0, \infty); D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, \infty); \mathcal{H})$.*

Além disso, se o dado inicial $Y_0 = \{u_0, u_1, \theta_{10}, \theta_{20}, q_{10}, q_{20}\} \in D(\mathcal{A}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, a solução, Y , do problema (4.1)-(4.3) pertence a classe $C^{n-k}([0, \infty); D(\mathcal{A}^k))$, $k = 1, 2, \dots, n$.

4.2 Desigualdade de observabilidade

Nesta seção, consideraremos o sistema conservativo

$$\rho u_{tt} - (\lambda + 2\mu)u_{xx} + \gamma_1\theta_{1x} + \gamma_2\theta_{2x} = 0 \quad (4.8)$$

$$c\theta_{1t} + \sqrt{k}q_{1x} + \gamma_1u_{tx} + d\theta_{2t} = 0 \quad (4.9)$$

$$n\theta_{2t} + \sqrt{D}q_{2x} + \gamma_2u_{tx} + d\theta_{1t} = 0 \quad (4.10)$$

$$\tau_1q_{1t} + \sqrt{k}\theta_{1x} = 0 \quad (4.11)$$

$$\tau_2q_{2t} + \sqrt{D}\theta_{2x} = 0 \quad (4.12)$$

em $(0, 1) \times (0, \infty)$ com as mesmas condições iniciais e de fronteira de (4.2)-(4.3). Afim de evitar confusão, lembramos que a energia do sistema dissipativo e do conservativo é definida pela mesma expressão.

Teorema 4.2.1 *Seja $I = (a_1, a_2)$ um intervalo aberto contido em $(0, 1)$. Para $T > 0$ suficientemente grande, existe uma constante positiva C_0 tal que qualquer solução $\{u, \theta_1, \theta_2, q_1, q_2\}$ de (4.8)-(4.12) satisfaz*

$$E(0) \leq C_0 \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} q_1^2 + q_{1t}^2 + q_2^2 + q_{2t}^2 + u_t^2 + u_{tt}^2 dx dt.$$

Demonstração:[*Prova do teorema 4.2.1*] Dado $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno, satisfazendo

$$\varepsilon_0 < \frac{a_2 - a_1}{2},$$

escolhemos de forma recursiva

$$\varepsilon_i = \frac{\varepsilon_{i-1}}{2}, \text{ para } i = 1, 2, 3. \quad (4.13)$$

Denotemos por I_i o intervalo $(a_1 + \varepsilon_i, a_2 - \varepsilon_i)$. Consideremos g_η uma função contínua e C^1 por partes dada por

$$g_\eta(x) = \begin{cases} (\eta - 1)x, & \text{if } x \in [0, a_1 + \varepsilon_0], \\ \eta(x - a_1 - \varepsilon_0) + (a_1 - a_2 + 2\varepsilon_0)(a_1 + \varepsilon_0), & \text{if } x \in [a_1 + \varepsilon_0, a_2 - \varepsilon_0], \\ (\eta - 1)(x - 1), & \text{if } x \in (a_2 - \varepsilon_0, 1). \end{cases} \quad (4.14)$$

com $\eta := 1 - (a_2 - a_1 - 2\varepsilon_0) \in [0, 1)$. Esta função foi introduzida por Ho em [25].

Multiplicando a equação (4.8) por $u_x g_\eta$, fazendo integração por partes e usando as equações (4.11) e (4.12) obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \int_0^1 \rho u_t u_x g_\eta dx - \int_0^1 \rho u_t u_{tx} g_\eta + (\lambda + 2\mu) u_{xx} u_x g_\eta - \left[\frac{\gamma_1 \tau_1}{\sqrt{k}} q_{1t} u_x + \frac{\gamma_2 \tau_2}{\sqrt{D}} q_{2t} u_x \right] g_\eta dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^1 \rho u_t u_x g_\eta dx + \int_0^1 \frac{\rho}{2} u_t^2 g'_\eta + \frac{\lambda + 2\mu}{2} u_x^1 g'_\eta dx - \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{\gamma_1 \tau_1}{\sqrt{k}} q_{1t} u_x g_\eta dx \\ &\quad + \int_0^1 \frac{\gamma_1 \tau_1}{\sqrt{k}} q_{1t} u_{tx} g_\eta dx - \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{\gamma_2 \tau_2}{\sqrt{D}} q_{2t} u_x g_\eta dx + \int_0^1 \frac{\gamma_2 \tau_2}{\sqrt{D}} q_{2t} u_{tx} g_\eta dx \end{aligned}$$

Desta última relação e das equações (4.9) e (4.10) chegamos a

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left[\frac{\rho}{2} u_t^2 + \frac{\lambda + 2\mu}{2} u_x^1 \right] g'_\eta dx + \frac{d}{dt} \int_0^1 \left[\rho u_t u_x - \frac{\gamma_1 \tau_1}{\sqrt{k}} q_{1t} u_x - \frac{\gamma_2 \tau_2}{\sqrt{D}} q_{2t} u_x \right] g_\eta dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{\tau_1}{\sqrt{k}} q_{1t} (c\theta_1 + d\theta_2) g_\eta + \frac{\tau_2}{\sqrt{D}} q_{2t} (n\theta_2 + d\theta_1) g_\eta dx \\ &\quad - \int_0^1 \underbrace{\frac{\tau_1}{\sqrt{k}} q_{1t}}_{-\theta_{1x}} (c\theta_1 + d\theta_2) g_\eta + \underbrace{\frac{\tau_2}{\sqrt{D}} q_{2t}}_{-\theta_{2x}} (n\theta_2 + d\theta_1) g_\eta dx + \int_0^1 \tau_1 q_{1t} q_{1x} g_\eta + \tau_2 q_{2t} q_{2x} g_\eta dx \end{aligned}$$

o que nos fornece

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left[\frac{\rho}{2} u_t^2 + \frac{\lambda + 2\mu}{2} u_x^2 + \frac{c}{2} \theta_1^2 + \frac{n}{2} \theta_2^2 + \frac{\tau_1}{2} q_1^2 + \frac{\tau_2}{2} q_2^2 + d\theta_1 \theta_2 \right] g'_\eta dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^1 \rho u_t u_x g_\eta + \frac{\tau_1}{\sqrt{k}} (-c\theta_1 - \gamma_1 u_x - d\theta_2) q_{1t} g_\eta \\ &\quad + \frac{\tau_2}{\sqrt{D}} (-n\theta_2 - \gamma_2 u_x - d\theta_1) q_{2t} g_\eta dx. \quad (4.15) \end{aligned}$$

Derivando (4.8) em relação a t , depois multiplicando por $u_{tx} g_\eta$ e integrando com $x \in (0, 1)$, semelhantemente ao que foi feita acima, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left[\frac{\rho}{2} u_{tt}^2 + \frac{\lambda + 2\mu}{2} u_{tx}^2 + \frac{c}{2} \theta_{1t}^2 + \frac{n}{2} \theta_{2t}^2 + \frac{\tau_1}{2} q_{1t}^2 + \frac{\tau_2}{2} q_{2t}^2 + d\theta_{1t} \theta_{2t} \right] g'_\eta dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^1 \rho u_{tt} u_{tx} g_\eta + \frac{\tau_1}{\sqrt{k}} (-c\theta_{1t} - \gamma_1 u_{tx} - d\theta_{2t}) q_{1t} g_\eta \\ &\quad + \frac{\tau_2}{\sqrt{D}} (-n\theta_{2t} - \gamma_2 u_{tx} - d\theta_{1t}) q_{2t} g_\eta dx. \quad (4.16) \end{aligned}$$

Como

$$g'_\eta(x) = \begin{cases} \eta, & \text{if } x \in I_0 \\ \eta - 1, & \text{if } x \in [0, 1] \setminus I_0 \end{cases}$$

as identidades (4.15) e (4.16) nos remetem a

$$\begin{aligned} (1 - \eta)E(t) &= -\frac{d}{dt}M(t) \\ &+ \int_{I_0} \frac{\rho}{2}u_t^2 + \frac{\lambda + 2\mu}{2}u_x^2 + \frac{c}{2}\theta_1^2 + \frac{n}{2}\theta_2^2 + \frac{\tau_1}{2}q_1^2 + \frac{\tau_2}{2}q_2^2 + d\theta_1\theta_2 \, dx \\ &+ \int_{I_0} \frac{\rho}{2}u_{tt}^2 + \frac{\lambda + 2\mu}{2}u_{tx}^2 + \frac{c}{2}\theta_{1t}^2 + \frac{n}{2}\theta_{2t}^2 + \frac{\tau_1}{2}q_{1t}^2 + \frac{\tau_2}{2}q_{2t}^2 + d\theta_{1t}\theta_{2t} \, dx \quad (4.17) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} M(t) &= \int_0^1 \rho u_t u_x g_\eta + \frac{\tau_1}{\sqrt{k}} (-c\theta_1 - \gamma_1 u_x - d\theta_2) q_1 g_\eta + \frac{\tau_2}{\sqrt{D}} (-n\theta_2 - \gamma_2 u_x - d\theta_1) q_2 g_\eta \, dx \\ &+ \frac{d}{dt} \int_0^1 \rho u_{tt} u_{tx} g_\eta + \frac{\tau_1}{\sqrt{k}} (-c\theta_{1t} - \gamma_1 u_{tx} - d\theta_{2t}) q_{1t} g_\eta \\ &+ \frac{\tau_2}{\sqrt{D}} (-n\theta_{2t} - \gamma_2 u_{tx} - d\theta_{1t}) q_{2t} g_\eta \, dx. \end{aligned}$$

Note que $\int_0^T \frac{d}{dt}M(t)dt \leq CE(0)$.

Para estimar a última parte de (4.17) consideremos as funções “cut-off” $\xi_i \in C_0^\infty(0, 1)$, $i = 1, 2, 3$, satisfazendo

$$\begin{cases} 0 \leq \xi_i(x) \leq 1, \quad \forall x \in (0, 1) \\ \xi_i(x) = 0, \quad \text{em } (0, 1) \setminus I_i \\ \xi_i(x) = 1, \quad \text{em } I_{i-1} \end{cases} \quad (4.18)$$

Multiplicando (4.8) por $u_{xx}\xi_1$ e integrando sobre $(0, 1)$ vem que

$$0 = \int_0^1 \rho u_{tt} u_{xx} \xi_1 - (\lambda + 2\mu) u_{xx}^2 \xi_1 + \gamma_1 \theta_1 u_{xx} \xi_1 + \gamma_2 \theta_2 u_{xx} \xi_1 \, dx,$$

o que implica em

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \int_0^1 u_{xx}^2 \xi_1 dx + \frac{d}{dt} \left[\int_0^1 \rho u_{tx} u_x \xi_1 + \rho u_t u_x \xi_1' dx \right] \\ &= \rho \int_0^1 u_{tx}^2 \xi_1 dx - \frac{\rho}{2} \int_0^1 u_t^2 \xi_1'' dx + \int_0^1 (\gamma_1 \theta_{1x} + \gamma_2 \theta_{2x}) u_{xx} \xi_1 dx. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Young e das equações (4.11) e (4.12) obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{(\lambda + 2\mu)}{2} \int u_{xx}^2 \xi_1 dx + \frac{d}{dt} \left[\int_0^1 \rho u_{tx} u_x \xi_1 + \rho u_t u_x \xi_1' dx \right] \quad (4.19) \\ & \leq \rho \int_0^1 u_{tx}^2 \xi_1 dx + \frac{\rho \|\xi_1''\|_\infty}{2} \int_{I_1} u_t^2 dx + \frac{\gamma_1^2 \tau_1^2}{(\lambda + 2\mu)k} \int_{I_1} q_{1t}^2 dx + \frac{\gamma_2^2 \tau_2^2}{(\lambda + 2\mu)k} \int_{I_1} q_{2t}^2 dx. \end{aligned}$$

Multiplicando (4.9) e (4.10) por $u_{tx} \xi_1$ e integrando por partes vem que

$$\begin{aligned} (\gamma_1 + \gamma_2) \int_0^1 u_{tx}^2 \xi_1 dx &= -[c + d] \int_0^1 u_t \theta_{1tx} \xi_1 + u_t \theta_{1t} \xi_1' dx + [n + d] \int_0^1 u_t \theta_{2tx} \xi_1 + u_t \theta_{2t} \xi_1' dx \\ &+ \sqrt{k} \int_0^1 q_1 u_{txx} \xi_1 + q_1 u_{tx} \xi_1' dx + \sqrt{D} \int_0^1 q_2 u_{txx} \xi_1 + q_2 u_{tx} \xi_1' dx. \quad (4.20) \end{aligned}$$

A regra do produto combinada com as equações (4.8), (4.11) e (4.12) nos fornece

$$\theta_{1tx} u_t = \frac{d}{dt} \left(-\frac{\tau_1}{\sqrt{k}} q_{1t} u_t \right) - \frac{1}{\rho} \theta_{1x} ((\lambda + 2\mu) u_{xx} - \gamma_1 \theta_{1x} - \gamma_2 \theta_{2x}), \quad (4.21)$$

$$\theta_{2tx} u_t = \frac{d}{dt} \left(-\frac{\tau_2}{\sqrt{D}} q_{2t} u_t \right) - \frac{1}{\rho} \theta_{2x} ((\lambda + 2\mu) u_{xx} - \gamma_1 \theta_{1x} - \gamma_2 \theta_{2x}), \quad (4.22)$$

$$q_1 u_{txx} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\lambda + 2\mu} q_1 \left(\rho u_{tt} - \frac{\gamma_1 \tau_1}{\sqrt{k}} q_{1t} - \frac{\gamma_2 \tau_2}{\sqrt{D}} q_{2t} \right) \right] - q_{1t} u_{xx}, \quad (4.23)$$

$$q_2 u_{txx} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\lambda + 2\mu} q_2 \left(\rho u_{tt} - \frac{\gamma_1 \tau_1}{\sqrt{k}} q_{1t} - \frac{\gamma_2 \tau_2}{\sqrt{D}} q_{2t} \right) \right] - q_{2t} u_{xx}. \quad (4.24)$$

Substituindo (4.21)-(4.24) em (4.20) e usando a desigualdade de Young chegamos a

$$\begin{aligned} (\gamma_1 + \gamma_2) \int_0^1 u_{tx}^2 \xi_1 dx &\leq \frac{d}{dt} N_{u_{tx}}(t) + \frac{(\lambda + 2\mu)(\gamma_1 + \gamma_2)}{8\rho} \int_0^1 u_{xx}^2 \xi_1 dx \quad (4.25) \\ &+ \varepsilon \int_{I_1} \theta_{1t}^2 + \theta_{2t}^2 dx + \int_{I_1} u_x^2 dx + C_\varepsilon \int_{I_1} u_t^2 dx + C \int_{I_1} q_{1t}^2 + q_{2t}^2 dx, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} N_{u_{tx}}(t) &:= \int_0^1 (c+d) \left(-\frac{\tau_1}{\sqrt{k}} q_{1t} u_t \xi_1 \right) + (n+d) \left(-\frac{\tau_2}{\sqrt{D}} q_{2t} u_t \xi_1 \right) \\ &+ \frac{1}{\lambda+2\mu} \left(\sqrt{k} q_1 + \sqrt{D} q_2 \right) \left(\rho u_{tt} - \frac{\gamma_1 \tau_1}{\sqrt{k}} q_{1t} - \frac{\gamma_2 \tau_2}{\sqrt{D}} q_{2t} \right) \xi_1 + (q_1 + q_2) u_x \xi_1' dx. \end{aligned}$$

Fazendo uma soma ponderada das estimativas (4.19) e (4.25) segue que

$$\begin{aligned} &\frac{(\lambda+2\mu)(\gamma_1+\gamma_2)}{8\rho} \int_0^1 u_{xx}^2 \xi_1 dx + \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} \int_0^1 u_{tx}^2 \xi_1 dx \\ &\leq \frac{d}{dt} N_1(t) + \varepsilon \int_{I_1} \theta_{1t}^2 + \theta_{2t}^2 dx + \int_{I_1} u_x^2 dx + C_\varepsilon \int_{I_1} u_t^2 dx + C \int_{I_1} q_{1t}^2 + q_{2t}^2 dx, \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde

$$N_1(t) := N_{u_{tx}}(t) - \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} \int_0^1 u_{tx} u_x \xi_1 + u_t u_x \xi_1' dx.$$

De (4.8),(4.11) e (4.12) é obtido que

$$\frac{\rho}{2} \int_0^1 u_{tt}^2 \xi_1 dx \leq \frac{3(\lambda+2\mu)^2}{2\rho} \int_0^1 u_{xx}^2 \xi_1 dx + \frac{3\gamma_1^2 \tau_1^2}{2\rho k} \int_0^1 q_{1t}^2 \xi_1 dx + \frac{3\gamma_2^2 \tau_2^2}{2\rho D} \int_0^1 q_{2t}^2 \xi_1 dx,$$

o implica, juntamente com a estimativa (4.26), em

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} \int_0^1 u_{tt}^2 \xi_1 dx &\leq C \frac{d}{dt} N_1(t) + \varepsilon C \int_{I_1} \theta_{1t}^2 + \theta_{2t}^2 dx \\ &+ C_\varepsilon \int_{I_1} u_t^2 dx + C \int_{I_1} q_{1t}^2 + q_{2t}^2 + u_x^2 dx. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Lembre que as equações (4.9) e (4.10) podem ser reescritas como

$$(nc - d^2) \theta_{1t} = -n\sqrt{k} q_{1x} + d\sqrt{D} q_{2x} - (n\gamma_1 - d\gamma_2) u_{tx} \quad (4.28)$$

$$(nc - d^2) \theta_{2t} = -c\sqrt{D} q_{2x} + d\sqrt{k} q_{1x} - (c\gamma_2 - d\gamma_1) u_{tx}. \quad (4.29)$$

Multiplicando (4.28) por $\theta_{1t}\xi_1$ obtemos que

$$(nc - d^2) \int_0^1 \theta_{1t}^2 \xi_1 dx = -n\sqrt{k} \int_0^1 q_{1x} \theta_{1t} \xi_1 dx + d\sqrt{D} \int_0^1 q_{2x} \theta_{1t} \xi_1 dx - (n\gamma_1 - d\gamma_2) \int_0^1 u_{tx} \theta_{1t} \xi_1 dx. \quad (4.30)$$

Os termos do lado direito de (4.30) são estimados conforme segue

$$-n\sqrt{k} \int_0^1 q_{1x} \theta_{1t} \xi_1 dx \leq \frac{d}{dt} \left[\int_{I_1} -n\tau_1 q_{1t} \xi_1 + n\sqrt{k} q_{1t} \theta_{1t} \xi_1' dx \right] + C \int_{I_1} q_{1t}^2 + \theta_{1t}^2 dx, \quad (4.31)$$

$$d\sqrt{D} \int_0^1 q_{2x} \theta_{1t} \xi_1 dx \leq \frac{d}{dt} \left[d\sqrt{D} \int_{I_1} \frac{\tau_1}{\sqrt{k}} q_{2t} \xi_1 - q_{2t} \theta_{1t} \xi_1' \right] + C \int_{I_1} q_{1t}^2 + q_{2t}^2 + \theta_{1t}^2 dx, \quad (4.32)$$

$$-(n\gamma_1 - d\gamma_2) \int_0^1 u_{tx} \theta_{1t} \xi_1 dx \leq \frac{nc - d^2}{2} \int_{I_1} \theta_{1t}^2 \xi_1 dx + \frac{d}{dt} \left[\frac{(n\gamma_1 - d\gamma_2)^2}{(\gamma_1 + \gamma_2)(nc - d^2)} N_1(t) \right] + \varepsilon C \int_{I_1} \theta_{1t}^2 + \theta_{2t}^2 dx + C_\varepsilon \int_{I_1} u_t^2 dx + C \int_{I_1} q_{1t}^2 + q_{2t}^2 + u_x^2 dx. \quad (4.33)$$

As expressões (4.30)-(4.33), e cálculos análogos para θ_{2t} , nos permitem concluir que

$$\int_0^1 \theta_{1t}^2 \xi_1 + \theta_{2t}^2 \xi_1 dx \leq \frac{d}{dt} N_2(t) + \varepsilon C \int_{I_1} \theta_{1t}^2 + \theta_{2t}^2 dx + C_\varepsilon \int_{I_1} u_t^2 dx + C \int_{I_1} q_{1t}^2 + q_{2t}^2 + \theta_{1t}^2 + \theta_{2t}^2 + u_x^2 dx, \quad (4.34)$$

onde $N_2(t)$ é tal que $\int_0^T N_2(t) dt \leq CE(0)$.

A partir de agora trabalharemos para obter estimativas para os termos da energia de primeira ordem, isto é, para θ_1, θ_2 e u_x . Começemos com θ_1 . Para obter a estimativa desejada, usaremos o multiplicador

$$\int_0^x \xi_2 \theta_1 dy. \quad (4.35)$$

Note que as derivadas, espacial e temporal, deste multiplicador satisfazem

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \xi_2 \theta_1 dy = \xi_2(x) \theta_1(x, t)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \xi_2 \theta_1 dy = \int_0^x \xi_2(y) \theta_{1t}(y, t) dy.$$

Multiplicando (4.11) por (4.35) e integrando com $x \in [0, 1]$ obtemos,

$$\begin{aligned} \sqrt{k} \int_0^1 \theta_1^2 \xi_2 dx - \frac{d}{dt} \left[\int_0^1 \tau_1 q_1 \int_0^x \xi_2 \theta_1 dy dx \right] \\ \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 \tau_1^2 q_1^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^1 \left(\int_0^x \xi_2 \theta_{1t} dy \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (4.36)$$

O ponto chave nestes cálculos é estimar o último termo da desigualdade acima, o que será possível ao usarmos (4.28), integração por partes, desigualdade de Hölder e o fato que x

pertence a um intervalo limitado, a saber,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left(\int_0^x \xi_2 \theta_{1t} dy \right)^2 dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{-1}{nc - d^2} \left[n\sqrt{k}q_{1y} - d\sqrt{D}q_{2y} + (n\gamma_1 - d\gamma_2)u_{ty} \right] \xi_2 dy \right)^2 dx \\
&= \frac{1}{(nc - d^2)^2} \int_0^1 \left(\left[(n\sqrt{k}q_1 - d\sqrt{D}q_2 + (n\gamma_1 - d\gamma_2)u_t) \xi_2 \right]_0^x \right. \\
&\quad \left. - \int_0^x \left[n\sqrt{k}q_1 - d\sqrt{D}q_2 + (n\gamma_1 - d\gamma_2)u_t \right] \xi_2'(y) dy \right)^2 dx \\
&\leq \frac{2}{(nc - d^2)^2} \int_0^1 \left[n\sqrt{k}q_1 - d\sqrt{D}q_2 + (n\gamma_1 - d\gamma_2)u_t \right]^2 \xi_2^2(x) dx \\
&\quad + \frac{2}{(nc - d^2)^2} \int_0^1 \left(\int_0^x \left[n\sqrt{k}q_1 - d\sqrt{D}q_2 + (n\gamma_1 - d\gamma_2)u_t \right] \xi_2'(y) dy \right)^2 dx \\
&\leq \frac{2}{(nc - d^2)^2} \int_0^1 \left[n\sqrt{k}q_1 - d\sqrt{D}q_2 + (n\gamma_1 - d\gamma_2)u_t \right]^2 \xi_2^2(x) dx \\
&\quad + \frac{2}{(nc - d^2)^2} \int_0^1 \left(\int_0^x 1^2 dx \right) \left(\int_0^x \left[n\sqrt{k}q_1 - d\sqrt{D}q_2 + (n\gamma_1 - d\gamma_2)u_t \right]^2 \xi_2'^2(y) dy \right) dx \\
&\leq \frac{2}{(nc - d^2)^2} \int_0^1 \left[n\sqrt{k}q_1 - d\sqrt{D}q_2 + (n\gamma_1 - d\gamma_2)u_t \right]^2 \xi_2^2(x) dx \\
&\quad + \frac{2}{(nc - d^2)^2} \int_0^1 \left[n\sqrt{k}q_1 - d\sqrt{D}q_2 + (n\gamma_1 - d\gamma_2)u_t \right]^2 \xi_2'^2(y) dy \\
&\leq \frac{6(1 + \|\xi_2'\|_\infty^2)}{(nc - d^2)^2} \int_{I_2} n^2 k q_1^2 + d^2 D q_2^2 + (c\gamma_1 - d\gamma_2)^2 u_t^2 dx. \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Combinando (4.37) com (4.36) chegamos a

$$\int_0^1 \theta_1^2 \xi_2 dx \leq \varepsilon C \int_0^1 q_1^2 dx + C_\varepsilon \int_{I_2} q_1^2 + q_2^2 + u_t^2 dx + \frac{d}{dt} \int_0^1 \tau_1 q_1 \int_0^x \xi_2 \theta_1 dy dx. \tag{4.38}$$

Semelhantemente, para θ_2 , obtemos

$$\int_0^1 \theta_2^2 \xi_2 dx \leq \varepsilon C \int_0^1 q_2^2 dx + C_\varepsilon \int_{I_2} q_1^2 + q_2^2 + u_t^2 dx + \frac{d}{dt} \int_0^1 \tau_2 q_2 \int_0^x \xi_2 \theta_2 dy dx. \tag{4.39}$$

Observe que tanto

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \int_0^1 \tau_1 q_1 \int_0^x \xi_2 \theta_1 dy dx dt$$

como

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \int_0^1 \tau_2 q_2 \int_0^x \xi_2 \theta_2 dy dx dt$$

podem ser estimados por $CE(0)$ usando a desigualdade de Hölder.

Para estimar u_x , multiplicamos (4.8) por $u\xi_2$ chegando a

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \int_0^1 u_x^2 \xi_2 dx \\ = & -\frac{d}{dt} \left[\int_0^1 \rho u_t u \xi_2 dx \right] + \int_0^1 \rho u_t^2 \xi_2 dx + \int_0^1 \frac{\lambda + 2\mu}{2} u^2 \xi_2'' dx - \int_0^1 (\gamma_1 \theta_{1x} + \gamma_2 \theta_{2x}) u \xi_2 dx \\ \leq & -\frac{d}{dt} \left[\int_0^1 \rho u_t u \xi_2 dx \right] + C \int_{I_2} q_{1t}^2 + q_{2t}^2 + u_t^2 + u^2 dx. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Para completar nosso objetivo, precisamos uma estimativa para u . Encontramos uma maneira olhando para o trabalho de Tébou [53] e adaptando para o nosso caso. Assim considere o multiplicador $z(t) \in H_0^1(0, 1)$ solução de

$$\begin{cases} -z_{xx} = \xi_3 u \text{ in } (0, 1) \\ z(0, t) = z(1, t) = 0 \end{cases} . \quad (4.41)$$

Não é difícil de ver que $z_t(t) \in H_0^1(0, 1)$ e é solução de

$$\begin{cases} -z_{txx} = \xi_3 u_t \text{ in } (0, 1) \\ z_t(0, t) = z_t(1, t) = 0 \end{cases} . \quad (4.42)$$

Multiplicando (4.41) por z e usando as desigualdades de Poincaré e Young chegamos a

$$\int_0^1 z_x^2 dx \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \xi_3 u^2 dx. \quad (4.43)$$

Semelhantemente, a partir de (4.42) obtemos

$$\int_0^1 z_{tx}^2 dx \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \xi_3 u_t^2 dx. \quad (4.44)$$

A multiplicação de (4.41) por u nos fornece

$$\int_0^1 z_x u_x dx = \int_0^1 \xi_3 u^2 dx. \quad (4.45)$$

Então, compondo (4.8) com z e usando (4.45) deduzimos que

$$0 = \frac{d}{dt} \left[\int_0^1 \left(\rho u_t - \frac{\gamma_1 \tau_1}{\sqrt{k}} q_1 - \frac{\gamma_2 \tau_2}{\sqrt{D}} q_2 \right) z dx \right] \\ - \rho \int_0^1 u_t z_t dx + (\lambda + 2\mu) \int_0^1 \xi_3 u^2 dx + \int_0^1 \left(\frac{\gamma_1 \tau_1}{\sqrt{k}} q_1 + \frac{\gamma_2 \tau_2}{\sqrt{D}} q_2 \right) z_t dx.$$

Aplicando as desigualdades de Young e Poincaré obtemos

$$(\lambda + 2\mu) \int_0^1 \xi_3 u^2 dx \leq -\frac{d}{dt} \left[\int_0^1 \left(\rho u_t - \frac{\gamma_1 \tau_1}{\sqrt{k}} q_1 - \frac{\gamma_2 \tau_2}{\sqrt{D}} q_2 \right) z dx \right] \\ + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 \rho u_t^2 + 2 \frac{\gamma_1^2 \tau_1^2}{k} q_1^2 - \frac{\gamma_2^2 \tau_2^2}{D} q_2^2 dx + \frac{1}{\varepsilon \pi^2} \int_0^1 z_{tx}^2 dx.$$

Esta última estimativa combinada com (4.44) nos fornece

$$\int_0^1 u^2 \xi_3 dx \leq \frac{d}{dt} N_3(t) + \varepsilon C \int_0^1 u_t^2 + q_1^2 + q_2^2 dx + C_\varepsilon \int_0^1 u_t^2 \xi_3 dx, \quad (4.46)$$

de tal forma que o termo $\int_0^T \frac{d}{dt} N_3(t) dt$ pode ser estimado por $CE(0)$ usando (4.43).

De (4.17), (4.26), (4.27), (4.34), (4.38), (4.40) e (4.46) vem que

$$(1 - \eta)E(t) \leq \frac{d}{dt} N(t) + \varepsilon CE(t) + C_\varepsilon \int_{I_3} q_1^2 + q_{1t}^2 + q_2^2 + q_{2t}^2 + u_t^2 dx.$$

Escolhendo $\varepsilon = \frac{1-\eta}{2C}$ implica que $(1 - \eta - \varepsilon C) > 0$ e, portanto,

$$E(t) \leq \frac{2}{1 - \eta} \frac{d}{dt} N(t) + C \int_{I_3} q_1^2 + q_{1t}^2 + q_2^2 + q_{2t}^2 + u_t^2 dx.$$

Integrando com $t \in [0, T]$, $T \geq T_0$ suficientemente grande, usando o fato que $\int_0^T \frac{d}{dt} N(t) dt \leq CE(0)$, $E(t) = E(0)$, para todo $t \geq 0$, e que $I_3 \subset (a_1, a_2)$ obtemos

$$E(0) \leq C \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} q_1^2 + q_{1t}^2 + q_2^2 + q_{2t}^2 + u_t^2 dx dt,$$

o que conclui a demonstração do teorema 4.2.1. □

4.3 Decaimento exponencial

Nosso principal resultado é obter taxas de decaimento exponencial para o sistema dissipativo (4.1)-(4.3). Portanto, o próximo passo é estender o resultado da desigualdade de observabilidade para para o sistema de Termo-difusão com “damping” conforme segue:

Teorema 4.3.1 *Dados $T \geq T_0$ e $M > 0$ é possível encontrar uma constante positiva $C > 0$ tais que*

$$E(0) \leq C \int_0^T \int_0^1 \alpha_1(x) [q_1^2 + q_{1t}^2] + \alpha_2(x) [q_2^2 + q_{2t}^2] + \alpha_3(x) [u_t^2 + u_{tt}^2] dx dt, \quad (4.47)$$

para toda solução $\{u, \theta_1, \theta_2, q_1, q_2\}$ de (4.1)-(4.3) satisfazendo $0 < E(0) \leq M$.

Demonstração: Argumentaremos por contradição. Suponha que o teorema 4.3.1 não é válido. Logo existe uma sequência de soluções $\{u_\nu, \theta_{1\nu}, \theta_{2\nu}, q_{1\nu}, q_{2\nu}\}$ de (4.1) associada a uma sequência de dados iniciais

$$\{u_{0\nu}, u_{1\nu}, \theta_{10\nu}, \theta_{20\nu}, q_{10\nu}, q_{20\nu}\} \quad (4.48)$$

satisfazendo $0 < E_\nu(0) \leq M$ e

$$\frac{\int_0^T \int_0^1 \alpha_1(x) [q_{1\nu}^2 + q_{1\nu t}^2] + \alpha_2(x) [q_{2\nu}^2 + q_{2\nu t}^2] + \alpha_3(x) [u_{\nu t}^2 + u_{\nu tt}^2] dx dt}{E_\nu(0)} < \frac{1}{\nu}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}. \quad (4.49)$$

Em outras palavras, existe uma sequência de problemas

$$\rho u_{\nu tt} - (\lambda + 2\mu)u_{\nu xx} + \gamma_1 \theta_{1\nu x} + \gamma_2 \theta_{2\nu x} + \alpha_3(x)u_{\nu t} = 0 \quad (4.50)$$

$$c\theta_{1\nu t} + \sqrt{k}q_{1\nu x} + \gamma_1 u_{\nu tx} + d\theta_{2\nu t} = 0 \quad (4.51)$$

$$n\theta_{2\nu t} + \sqrt{D}q_{2\nu x} + \gamma_2 u_{\nu tx} + d\theta_{1\nu t} = 0 \quad (4.52)$$

$$\tau_1 q_{1\nu t} + \alpha_1(x)q_{1\nu} + \sqrt{k}\theta_{1\nu x} = 0 \quad (4.53)$$

$$\tau_2 q_{2\nu t} + \alpha_2(x)q_{2\nu} + \sqrt{D}\theta_{2\nu x} = 0 \quad (4.54)$$

$$u_\nu(0, t) = u_\nu(1, t) = \theta_{1\nu}(0, t) = \theta_{1\nu}(1, t) = \theta_{2\nu}(0, t) = \theta_{2\nu}(1, t) = 0 \quad (4.55)$$

$$u_\nu(x, 0) = u_{0\nu}(x), \quad u_{\nu t}(x, 0) = u_{1\nu}(x), \quad (4.56)$$

$$\theta_{1\nu}(x, 0) = \theta_{1\nu}^0(x), \quad \theta_{2\nu}(x, 0) = \theta_{2\nu}^0(x), \quad (4.57)$$

$$q_{1\nu}(x, 0) = q_{1\nu}^0(x), \quad q_{2\nu}(x, 0) = q_{2\nu}^0(x), \quad (4.58)$$

satisfazendo (4.49). Como $(E_\nu(0))_{\nu \in \mathbb{N}}$ é limitado, a desigualdade (4.49) implica que

$$\begin{cases} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^1 \alpha_1(x) [q_{1\nu}^2 + q_{1\nu t}^2] dx dt = 0 \\ \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^1 \alpha_2(x) [q_{2\nu}^2 + q_{2\nu t}^2] dx dt = 0 \\ \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^1 \alpha_3(x) [u_{\nu t}^2 + u_{\nu t t}^2] dx dt = 0 \end{cases} \quad (4.59)$$

Da hipótese 4.1.1, obtemos

$$0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{J_1} \alpha_1 q_{1\nu}^2 dx dt = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{J_2} \alpha_2 q_{2\nu}^2 dx dt = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{J_3} \alpha_3 u_{\nu t}^2 dx dt \quad (4.60)$$

e também que a família dos funcionais de energia $(E_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $(0, T)$. E, portanto, as seguintes convergências ocorrem em $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$:

$$\begin{cases} u_{\nu t t} \rightharpoonup u_{t t} & u_{\nu x x} \rightharpoonup u_{x x} \\ \theta_{1\nu x} \rightharpoonup \theta_{1x} & \theta_{2\nu x} \rightharpoonup \theta_{2x} \\ \theta_{1\nu t} \rightharpoonup \theta_{1t} & \theta_{2\nu t} \rightharpoonup \theta_{2t} \\ q_{1\nu x} \rightharpoonup q_{1x} & q_{2\nu x} \rightharpoonup q_{2x} \\ q_{1\nu t} \rightharpoonup q_{1t} & q_{2\nu t} \rightharpoonup q_{2t} \\ u_{\nu t x} \rightharpoonup u_{t x} \end{cases} \quad (4.61)$$

Pelo teorema de Aubin Lions segue que

$$\begin{cases} u_{\nu t} \rightarrow u_t \text{ in } L^2(0, T; L^2(0, 1)) \\ q_{1\nu} \rightarrow q_1 \text{ in } L^2(0, T; L^2(0, 1)) \\ q_{2\nu} \rightarrow q_2 \text{ in } L^2(0, T; L^2(0, 1)) \end{cases} \quad (4.62)$$

Devido as convergências (4.60) e (4.61) podemos tomar o limite em (4.50)-(4.54) quando $\nu \rightarrow \infty$ chegamos a

$$\rho u_{t t} - (\lambda + 2\mu)u_{x x} + \gamma_1 \theta_{1x} + \gamma_2 \theta_{2x} = 0 \quad (4.63)$$

$$c \theta_{1t} + \sqrt{k} q_{1x} + \gamma_1 u_{t x} + d \theta_{2t} = 0 \quad (4.64)$$

$$n \theta_{2t} + \sqrt{D} q_{2x} + \gamma_2 u_{t x} + d \theta_{1t} = 0 \quad (4.65)$$

$$\tau_1 q_{1t} + \sqrt{k} \theta_{1x} = 0 \quad (4.66)$$

$$\tau_2 q_{2t} + \sqrt{D} \theta_{2x} = 0 \quad (4.67)$$

$$q_1 = q_{1t} = q_2 = q_{2t} = u_t = u_{t t} = 0 \text{ quase sempre em } (a_1, a_2) \times (0, T). \quad (4.68)$$

Do teorema 4.2.1 e de (4.68) vem que

$$0 \leq E(t) \leq C \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} q_1^2 + q_{1t}^2 + q_2^2 + q_{2t}^2 + u_t^2 = 0,$$

e juntamente com a desigualdade de Poincaré obtemos

$$u = \theta_1 = \theta_2 = q_1 = q_2 = 0 \text{ quase sempre em } (0, 1) \times (0, T).$$

Agora, considerando $k_\nu := \sqrt{E_\nu(0)}$, definimos

$$\begin{cases} \tilde{u}_\nu := \frac{u_\nu}{k_\nu}; \\ \tilde{\theta}_{1\nu} := \frac{\theta_{1\nu}}{k_\nu}; & \tilde{\theta}_{2\nu} := \frac{\theta_{2\nu}}{k_\nu}; \\ \tilde{q}_{1\nu} := \frac{q_{1\nu}}{k_\nu}; & \tilde{q}_{2\nu} := \frac{q_{2\nu}}{k_\nu}. \end{cases} \quad (4.69)$$

Não é difícil ver que $\{\tilde{u}_\nu, \tilde{\theta}_{1\nu}, \tilde{\theta}_{2\nu}, \tilde{q}_{1\nu}, \tilde{q}_{2\nu}\}$ é solução de

$$\rho \tilde{u}_{\nu tt} - (\lambda + 2\mu) \tilde{u}_{\nu xx} + \gamma_1 \tilde{\theta}_{1\nu x} + \gamma_2 \tilde{\theta}_{2\nu x} + \alpha_3(x) \tilde{u}_{\nu t} = 0 \quad (4.70)$$

$$c \tilde{\theta}_{1\nu t} + \sqrt{k} \tilde{q}_{1\nu x} + \gamma_1 \tilde{u}_{\nu tx} + d \tilde{\theta}_{2\nu t} = 0 \quad (4.71)$$

$$n \tilde{\theta}_{2\nu t} + \sqrt{D} \tilde{q}_{2\nu x} + \gamma_2 \tilde{u}_{\nu tx} + d \tilde{\theta}_{1\nu t} = 0 \quad (4.72)$$

$$\tau_1 \tilde{q}_{1\nu t} + \alpha_1(x) \tilde{q}_{1\nu} + \sqrt{k} \tilde{\theta}_{1\nu x} = 0 \quad (4.73)$$

$$\tau_2 \tilde{q}_{2\nu t} + \alpha_2(x) \tilde{q}_{2\nu} + \sqrt{D} \tilde{\theta}_{2\nu x} = 0 \quad (4.74)$$

$$\tilde{u}_\nu(0, t) = \tilde{u}_\nu(1, t) = \tilde{\theta}_{1\nu}(0, t) = \tilde{\theta}_{1\nu}(1, t) = \tilde{\theta}_{2\nu}(0, t) = \tilde{\theta}_{2\nu}(1, t) = 0 \quad (4.75)$$

$$\tilde{u}_\nu(x, 0) = \frac{u_\nu(x, 0)}{k_\nu}, \quad \tilde{u}_{\nu t}(x, 0) = \frac{u_{\nu t}(x, 0)}{k_\nu}, \quad (4.76)$$

$$\tilde{\theta}_{1\nu}(x, 0) = \frac{\theta_{1\nu}(x, 0)}{k_\nu}, \quad \tilde{\theta}_{2\nu}(x, 0) = \frac{\theta_{2\nu}(x, 0)}{k_\nu}, \quad (4.77)$$

$$\tilde{q}_{1\nu}(x, 0) = \frac{q_{1\nu}(x, 0)}{k_\nu}, \quad \tilde{q}_{2\nu}(x, 0) = \frac{q_{2\nu}(x, 0)}{k_\nu}, \quad (4.78)$$

cuja energia associada é denotada por $\tilde{E}_\nu(t)$. Olhando para a desigualdade (4.49), também concluímos que

$$0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^1 \alpha_1(x) [\tilde{q}_{1\nu}^2 + \tilde{q}_{1\nu t}^2] + \alpha_2(x) [\tilde{q}_{2\nu}^2 + \tilde{q}_{2\nu t}^2] + \alpha_3(x) [\tilde{u}_{\nu t}^2 + \tilde{u}_{\nu tt}^2] dx dt. \quad (4.79)$$

Como $\tilde{E}_\nu(t) = \frac{E_\nu(t)}{E_\nu(0)}$ obtemos

$$\tilde{E}_\nu(0) = 1, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}, \quad (4.80)$$

o que implica, juntamente com o fato de $E_\nu(t) \leq E_\nu(0)$, que

$$\tilde{E}_\nu(t) = \frac{E_\nu(t)}{E_\nu(0)} \leq 1, \quad (4.81)$$

em outras palavras, $\tilde{E}_\nu(t)$ é uniformemente limitada por 1, para todo $\nu \in \mathbb{N}$ e $t \geq 0$. Então, cada termo de $\tilde{E}_\nu(t)$ é limitado em $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ e, passando a uma subsequência se necessário, chegamos as seguintes convergências fracas-* em $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{u}_{\nu t} \xrightarrow{*} \tilde{u}_t & \tilde{u}_{\nu x} \xrightarrow{*} \tilde{u}_x \\ \tilde{\theta}_{1\nu} \xrightarrow{*} \tilde{\theta}_1 & \tilde{\theta}_{2\nu} \xrightarrow{*} \tilde{\theta}_2 \\ \tilde{q}_{1\nu} \xrightarrow{*} \tilde{q}_1 & \tilde{q}_{2\nu} \xrightarrow{*} \tilde{q}_2 \\ \tilde{\theta}_{1\nu t} \xrightarrow{*} \tilde{\theta}_{1t} & \tilde{\theta}_{2\nu t} \xrightarrow{*} \tilde{\theta}_{2t} \\ \tilde{q}_{1\nu t} \xrightarrow{*} \tilde{q}_{1t} & \tilde{q}_{2\nu t} \xrightarrow{*} \tilde{q}_{2t} \\ \tilde{u}_{\nu tt} \xrightarrow{*} \tilde{u}_{tt} & \tilde{u}_{\nu tx} \xrightarrow{*} \tilde{u}_{tx} \end{array} \right. \quad (4.82)$$

Destas convergências e de (4.79) deduzimos todas as convergências necessárias para tomar o limite em (4.70)-(4.74) e obter

$$\begin{aligned} \rho \tilde{u}_{tt} - (\lambda + 2\mu) \tilde{u}_{xx} + \gamma_1 \tilde{\theta}_{1x} + \gamma_2 \tilde{\theta}_{2x} &= 0 \\ c \tilde{\theta}_{1t} + \sqrt{k} \tilde{q}_{1x} + \gamma_1 \tilde{u}_{tx} + d \tilde{\theta}_{2t} &= 0 \\ n \tilde{\theta}_{2t} + \sqrt{D} \tilde{q}_{2x} + \gamma_2 \tilde{u}_{tx} + d \tilde{\theta}_{1t} &= 0 \\ \tau_1 \tilde{q}_{1t} + \sqrt{k} \tilde{\theta}_{1x} &= 0 \\ \tau_2 \tilde{q}_{2t} + \sqrt{D} \tilde{\theta}_{2x} &= 0 \\ \tilde{u}_t = \tilde{q}_1 = \tilde{q}_{1t} = \tilde{q}_2 = \tilde{q}_{2t} &= 0 \text{ a.e. in } (a_1, a_2) \times (0, T). \end{aligned}$$

Aplicando novamente o teorema 4.2.1 segue que

$$\tilde{u}_t = \tilde{\theta}_1 = \tilde{\theta}_2 = \tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = 0, \text{ quase sempre em } (0, 1) \times (0, T).$$

Para chegar a uma contradição, considere $\{\bar{u}_\nu, \bar{\theta}_{1\nu}, \bar{\theta}_{2\nu}, \bar{q}_{1\nu}, \bar{q}_{2\nu}\}$, a solução do sistema conservativo

$$\rho \bar{u}_{\nu tt} - (\lambda + 2\mu) \bar{u}_{\nu xx} + \gamma_1 \bar{\theta}_{1\nu x} + \gamma_2 \bar{\theta}_{2\nu x} = 0 \quad (4.83)$$

$$c \bar{\theta}_{1\nu t} + \sqrt{k} \bar{q}_{1\nu x} + \gamma_1 \bar{u}_{\nu tx} + d \bar{\theta}_{2\nu t} = 0 \quad (4.84)$$

$$n \bar{\theta}_{2\nu t} + \sqrt{D} \bar{q}_{2\nu x} + \gamma_2 \bar{u}_{\nu tx} + d \bar{\theta}_{1\nu t} = 0 \quad (4.85)$$

$$\tau_1 \bar{q}_{1\nu t} + \sqrt{k} \bar{\theta}_{1\nu x} = 0 \quad (4.86)$$

$$\tau_2 \bar{q}_{2\nu t} + \sqrt{D} \bar{\theta}_{2\nu x} = 0 \quad (4.87)$$

$$\bar{u}_\nu(0, t) = \bar{u}_\nu(1, t) = \bar{\theta}_{1\nu}(0, t) = \bar{\theta}_{1\nu}(1, t) = \bar{\theta}_{2\nu}(0, t) = \bar{\theta}_{2\nu}(1, t) = 0 \quad (4.88)$$

$$\bar{u}_\nu(x, 0) = \tilde{u}_\nu(x, 0), \quad \bar{u}_{\nu t}(x, 0) = \tilde{u}_{\nu t}(x, 0), \quad (4.89)$$

$$\bar{\theta}_{1\nu}(x, 0) = \tilde{\theta}_{1\nu}(x, 0), \quad \bar{\theta}_{2\nu}(x, 0) = \tilde{\theta}_{2\nu}(x, 0), \quad (4.90)$$

$$\bar{q}_{1\nu}(x, 0) = \tilde{q}_{1\nu}(x, 0), \quad \bar{q}_{2\nu}(x, 0) = \tilde{q}_{2\nu}(x, 0), \quad (4.91)$$

com energia denotada por $\bar{E}_\nu(t)$.

Para prosseguir na demonstração do teorema 4.3.1, precisaremos do seguinte resultado:

Lema 4.3.2 *Usando as notações precedentes, existem constantes positivas C_1 e C_2 , independentes de ν , tais que*

$$C_1 \bar{E}_\nu(0) \leq \tilde{E}_\nu(0) \leq C_2 \bar{E}_\nu(0), \quad \forall \nu \in \mathbb{N}, \quad (4.92)$$

Demonstração: [Prova do lema 4.3.2] De (4.89) vem que

$$\bar{u}_{\nu x}(x, 0) = \tilde{u}_{\nu x}(x, 0). \quad (4.93)$$

Esta última relação associada a (4.89)-(4.91) e as expressões de $\bar{E}_\nu(0)$ e $\tilde{E}_\nu(0)$ nos levam a

$$\bar{E}_{1\nu}(0) = \tilde{E}_{1\nu}(0). \quad (4.94)$$

Assim, só nos resta examinar os termos da energia de segunda ordem, a saber,

$$\begin{aligned} \bar{E}_{2\nu}(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 & \rho \bar{u}_{\nu tt}^2(0) + (\lambda + 2\mu) \bar{u}_{\nu xt}^2(0) + c \bar{\theta}_{1\nu t}^2(0) + n \bar{\theta}_{2\nu t}^2(0) \\ & + \tau_1 \bar{q}_{1\nu t}^2(0) + \tau_2 \bar{q}_{2\nu t}^2(0) + 2d \bar{\theta}_{1\nu t}(0) \bar{\theta}_{2\nu t}(0) dx. \end{aligned}$$

As expressões (4.83), (4.89), (4.90) e (4.70) nos fornecem

$$\begin{aligned}
\rho^2 \bar{u}_{\nu tt}^2(0) &= \left((\lambda + 2\mu) \bar{u}_{\nu xx}(0) - \gamma_1 \bar{\theta}_{1\nu x}(0) - \gamma_2 \bar{\theta}_{2\nu x}(0) \right)^2 \\
&= \left((\lambda + 2\mu) \tilde{u}_{\nu xx}(0) - \gamma_1 \tilde{\theta}_{1\nu x}(0) - \gamma_2 \tilde{\theta}_{2\nu x}(0) \right)^2 \\
&= (\rho \tilde{u}_{\nu tt}(0) + \alpha_3 \tilde{u}_{\nu t}(0))^2 \\
&\leq 2\rho^2 \tilde{u}_{\nu tt}^2(0) + 2\alpha_3^2 \tilde{u}_{\nu t}^2(0).
\end{aligned} \tag{4.95}$$

De modo semelhante, ou de forma ainda mais simples, deduzimos que

$$\bar{u}_{\nu tx}(0) = \tilde{u}_{\nu tx}(0) \tag{4.96}$$

$$\bar{\theta}_{1\nu t}(0) = \tilde{\theta}_{1\nu t}(0) \tag{4.97}$$

$$\bar{\theta}_{2\nu t}(0) = \tilde{\theta}_{2\nu t}(0) \tag{4.98}$$

$$\bar{q}_{1\nu t}^2(0) \leq C (\tilde{q}_{1\nu t}^2(0) + \tilde{q}_{1\nu}^2(0)) \tag{4.99}$$

$$\bar{q}_{2\nu t}^2(0) \leq C (\tilde{q}_{2\nu t}^2(0) + \tilde{q}_{2\nu}^2(0)). \tag{4.100}$$

As estimativas (4.95) a (4.100) implicam que $\bar{E}_{2\nu}(0) \leq C \tilde{E}_\nu(0)$. Juntado esta desigualdade a (4.94) resulta que $\bar{E}_\nu(0) \leq C \tilde{E}_\nu(0)$. Escolhendo $C_1 := \frac{1}{C}$ provamos a primeira desigualdade de (4.92). A outra desigualdade se prova de forma análoga, donde se conclui a prova do lema 4.3.2.

□

Retornemos a prova do teorema 4.3.1. Defina

$$\begin{cases} U_\nu := \tilde{u}_\nu - \bar{u}_\nu, \\ \Theta_{1\nu} := \tilde{\theta}_{1\nu} - \bar{\theta}_{1\nu}, \\ \Theta_{2\nu} := \tilde{\theta}_{2\nu} - \bar{\theta}_{2\nu}, \\ Q_{1\nu} := \tilde{q}_{1\nu} - \bar{q}_{1\nu}, \\ Q_{2\nu} := \tilde{q}_{2\nu} - \bar{q}_{2\nu}. \end{cases} \tag{4.101}$$

Note que $\{U_\nu, \Theta_{1\nu}, \Theta_{2\nu}, Q_{1\nu}, Q_{2\nu}\}$ é solução do seguinte problema não homogêneo

$$\begin{cases} \rho U_{\nu tt} - (\lambda + 2\mu) U_{\nu xx} + \gamma_1 \Theta_{1\nu x} + \gamma_2 \Theta_{2\nu x} = -\alpha_3 \tilde{u}_{\nu t}, \\ c \Theta_{1\nu t} + \sqrt{k} Q_{1\nu x} + \gamma_1 U_{\nu tx} + d \Theta_{2\nu t} = 0, \\ n \Theta_{2\nu t} + \sqrt{D} Q_{2\nu x} + \gamma_2 U_{\nu tx} + d \Theta_{1\nu t} = 0, \\ \tau_1 Q_{1\nu t} + \sqrt{k} \Theta_{1\nu x} = -\alpha_1 \tilde{q}_{1\nu}, \\ \tau_2 Q_{2\nu t} + \sqrt{D} \Theta_{2\nu x} = -\alpha_2 \tilde{q}_{1\nu}, \end{cases} \tag{4.102}$$

com condições iniciais e de fronteira dadas por

$$\begin{aligned} U_\nu(0, t) = U_\nu(1, t) = \Theta_{1\nu}(0, t) = \Theta_{1\nu}(1, t) = \Theta_{2\nu}(0, t) = \Theta_{2\nu}(1, t) = 0 \\ U_\nu(x, 0) = U_{\nu t}(x, 0) = \Theta_{1\nu}(x, 0) = \Theta_{2\nu}(x, 0) = Q_{1\nu}(x, 0) = Q_{2\nu}(x, 0) = 0, \end{aligned} \quad (4.103)$$

e cuja energia denotaremos por $\mathcal{E}_\nu(t)$. Para prosseguir considere a afirmação dada pelo seguinte resultado:

Lema 4.3.3 *A família de funcionais de energia $\mathcal{E}_\nu(t)$ satisfaz*

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{E}_\nu(0) = 0.$$

Demonstração: [*Prova do lema 4.3.3*] Relembre que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\nu(0) &= \mathcal{E}_{1\nu}(0) + \mathcal{E}_{2\nu}(0) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho U_{\nu t}^2(0) + (\lambda + 2\mu) U_{\nu x}(0)^2 c \Theta_{1\nu}^2(0) + n \Theta_{2\nu}^2(0) \\ &\quad + \tau_1 Q_{1\nu}^2(0) + \tau_2 Q_{2\nu}^2(0) + 2d \Theta_{1\nu}(0) \Theta_{2\nu}(0) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \rho U_{\nu tt}^2(0) + (\lambda + 2\mu) U_{\nu xt}(0)^2 c \Theta_{1\nu t}^2(0) + n \Theta_{2\nu t}^2(0) \\ &\quad + \tau_1 Q_{1\nu t}^2(0) + \tau_2 Q_{2\nu t}^2(0) + 2d \Theta_{1\nu t}(0) \Theta_{2\nu t}(0) dx. \end{aligned}$$

As condições iniciais (4.103) nos remetem a $\mathcal{E}_{1\nu}(0) = 0$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Além disso, esta mesma condição juntamente com a segunda e terceira equações de (4.102) implica que $U_{\nu tx}(0) = Q_{1\nu t}(0) = Q_{2\nu t}(0) = 0$. Assim

$$\mathcal{E}_\nu(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 \rho U_{\nu tt}^2(0) + \tau_1 Q_{1\nu t}^2(0) + \tau_2 Q_{2\nu t}^2(0) dx. \quad (4.104)$$

A primeira, a quarta e a quinta equação de (4.102) e as condições iniciais (4.103) nos levam a

$$\rho U_{\nu tt}^2(0) = -\alpha_3 \tilde{u}_{\nu t}(0), \quad (4.105)$$

$$\tau_1 Q_{1\nu t}^2(0) = -\alpha_1 \tilde{q}_{1\nu}(0), \quad (4.106)$$

$$\tau_2 Q_{2\nu t}^2(0) = -\alpha_2 \tilde{q}_{2\nu}(0). \quad (4.107)$$

Agora note que as identidades (4.104)-(4.107) implicam em

$$\mathcal{E}_\nu(0) \leq C \int_0^1 \alpha_3 \tilde{u}_{\nu t}^2(0) + \alpha_1 \tilde{q}_{1\nu}^2(0) + \alpha_2 \tilde{q}_{2\nu}^2(0) dx. \quad (4.108)$$

Como $\tilde{E}_\nu(0) = 1$, juntamente com as equações (4.70)-(4.74), vem que

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\nu t}(0), \tilde{\theta}_{1\nu}(0), \tilde{\theta}_{2\nu}(0) &\text{ são limitadas em } H_0^1(0, 1), \\ \tilde{u}_{\nu x}(0), \tilde{q}_{1\nu}(0), \tilde{q}_{2\nu}(0) &\text{ são limitadas em } H^1(0, 1). \end{aligned}$$

Estas limitações e a imersão compacta $H^1(0, 1) \xhookrightarrow{c} C([0, 1])$ garantem a existência de funções $\Gamma, \Upsilon, \Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2 \in C([0, 1])$ tais que

$$\tilde{u}_\nu(0) \longrightarrow \Gamma, \text{ forte em } C([0, 1]) \quad (4.109)$$

$$\tilde{u}_{\nu x}(0) \longrightarrow \Upsilon, \text{ forte em } C([0, 1]) \quad (4.110)$$

$$\tilde{q}_{1\nu}(0) \longrightarrow \Phi_1, \text{ forte em } C([0, 1]) \quad (4.111)$$

$$\tilde{q}_{2\nu}(0) \longrightarrow \Phi_2, \text{ forte em } C([0, 1]) \quad (4.112)$$

$$\tilde{\theta}_{1\nu}(0) \longrightarrow \Psi_1, \text{ forte em } C([0, 1]) \quad (4.113)$$

$$\tilde{\theta}_{2\nu}(0) \longrightarrow \Psi_2, \text{ forte em } C([0, 1]) \quad (4.114)$$

Fazendo a diferença de Cauchy dos problemas (4.70)-(4.74) em $\nu, \iota \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\tilde{u}_\nu - \tilde{u}_\iota)_{tt} - (\lambda + 2\mu)(\tilde{u}_\nu - \tilde{u}_\iota)_{xx} \\ \quad + \gamma_1(\tilde{\theta}_{1\nu} - \tilde{\theta}_{1\iota})_x + \gamma_2(\tilde{\theta}_{2\nu} - \tilde{\theta}_{2\iota})_x + \alpha_3(x)(\tilde{u}_{\nu t} - \tilde{u}_{\iota t}) = 0 \\ c(\tilde{\theta}_{1\nu} - \tilde{\theta}_{1\iota})_t + \sqrt{k}(\tilde{q}_{1\nu} - \tilde{q}_{1\iota})_x + \gamma_1(\tilde{u}_\nu - \tilde{u}_\iota)_{tx} + d(\tilde{\theta}_{2\nu} - \tilde{\theta}_{2\iota})_t = 0 \\ n(\tilde{\theta}_{2\nu} - \tilde{\theta}_{2\iota})_t + \sqrt{D}(\tilde{q}_{2\nu} - \tilde{q}_{2\iota})_x + \gamma_2(\tilde{u}_\nu - \tilde{u}_\iota)_{tx} + d(\tilde{\theta}_{1\nu} - \tilde{\theta}_{1\iota})_t = 0 \\ \tau_1(\tilde{q}_{1\nu} - \tilde{q}_{1\iota})_t + \alpha_1(x)(\tilde{q}_{1\nu} - \tilde{q}_{1\iota}) + \sqrt{k}(\tilde{\theta}_{1\nu} - \tilde{\theta}_{1\iota})_x = 0 \\ \tau_2(\tilde{q}_{2\nu} - \tilde{q}_{2\iota})_t + \alpha_2(x)(\tilde{q}_{2\nu} - \tilde{q}_{2\iota}) + \sqrt{k}(\tilde{\theta}_{2\nu} - \tilde{\theta}_{2\iota})_x = 0 \end{array} \right. \quad (4.115)$$

cuja energia é denotada por $\tilde{E}_{\nu,\iota}(t)$. Multiplicando as equações de (4.115) por $(\tilde{u}_\nu - \tilde{u}_\iota)_t$, $(\tilde{\theta}_{1\nu} - \tilde{\theta}_{1\iota})$, $(\tilde{\theta}_{2\nu} - \tilde{\theta}_{2\iota})$, $(\tilde{q}_{1\nu} - \tilde{q}_{1\iota})$ e $(\tilde{q}_{2\nu} - \tilde{q}_{2\iota})$ e integrando sobre $(0, t) \times (0, 1)$, $t \in (0, T)$, obtemos a seguinte estimativa

$$\tilde{E}_{\nu,\iota}(t) \leq \tilde{E}_{\nu,\iota}(0) + C \int_0^T \int_0^1 \alpha_1 \tilde{q}_{1\nu}^2 + \alpha_1 \tilde{q}_{1\iota}^2 + \alpha_2 \tilde{q}_{2\nu}^2 + \alpha_2 \tilde{q}_{2\iota}^2 + \alpha_3 \tilde{u}_{\nu t}^2 + \alpha_3 \tilde{u}_{\iota t}^2 dx dt.$$

A imersão contínua $C([0, 1]) \hookrightarrow L^2(0, 1)$ nos permite estimar $\tilde{E}_{1\nu,\iota}(0)$ na norma das funções contínuas e obter

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{1\nu,\iota}(t) \leq C & \left[\|\tilde{u}_\nu(0) - \tilde{u}_\iota(0)\|_{C([0,1])}^2 + \|\tilde{u}_{\nu x}(0) - \tilde{u}_{\iota x}(0)\|_{C([0,1])}^2 + \|\tilde{\theta}_{1\nu x}(0) - \tilde{\theta}_{1\iota x}(0)\|_{C([0,1])}^2 \right. \\ & \left. + \|\tilde{\theta}_{2\nu x}(0) - \tilde{\theta}_{2\iota x}(0)\|_{C([0,1])}^2 + \|\tilde{q}_{1\nu x}(0) - \tilde{q}_{1\iota x}(0)\|_{C([0,1])}^2 + \|\tilde{q}_{2\nu x}(0) - \tilde{q}_{2\iota x}(0)\|_{C([0,1])}^2 \right] \\ & + C \int_0^T \int_0^1 \alpha_1(\tilde{q}_{1\nu}^2 + \tilde{q}_{1\iota}^2) + \alpha_2(\tilde{q}_{2\nu}^2 + \tilde{q}_{2\iota}^2) + \alpha_3(\tilde{u}_{\nu t}^2 + \tilde{u}_{\iota t}^2). \end{aligned}$$

Consequentemente, as convergências (4.79) e (4.109)-(4.114) implicam que $\tilde{E}_{1\nu,\iota}(t) \rightarrow 0$ quando $\nu, \iota \rightarrow \infty$, para todo $t \geq 0$. Em outras palavras, $\tilde{u}_{\nu t}, \tilde{q}_{1\nu}, \tilde{q}_{2\nu}$ são sequências de Cauchy em $C(0, T; L^2(0, 1))$. Assim, existem funções $\tilde{u}_t, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2$ tais que

$$\begin{cases} \sqrt{\alpha_1} \tilde{q}_{1\nu} \rightarrow \sqrt{\alpha_1} \tilde{q}_1 \text{ em } C([0, T]; L^2(0, 1)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(0, 1)), \\ \sqrt{\alpha_2} \tilde{q}_{2\nu} \rightarrow \sqrt{\alpha_2} \tilde{q}_2 \text{ em } C([0, T]; L^2(0, 1)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(0, 1)), \\ \sqrt{\alpha_3} \tilde{u}_{\nu t} \rightarrow \sqrt{\alpha_3} \tilde{u}_t \text{ em } C([0, T]; L^2(0, 1)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(0, 1)). \end{cases} \quad (4.116)$$

De (4.116), (4.79) e da unicidade do limite vem que

$$\begin{cases} \sqrt{\alpha_1} \tilde{q}_{1\nu} \rightarrow 0 \text{ in } C([0, T]; L^2(0, 1)), \\ \sqrt{\alpha_2} \tilde{q}_{2\nu} \rightarrow 0 \text{ in } C([0, T]; L^2(0, 1)), \\ \sqrt{\alpha_3} \tilde{u}_{\nu t} \rightarrow 0 \text{ in } C([0, T]; L^2(0, 1)), \end{cases}$$

e, portanto,

$$\begin{cases} \sqrt{\alpha_1} \tilde{q}_{1\nu}(0) \rightarrow 0 \text{ in } L^2(0, 1), \\ \sqrt{\alpha_2} \tilde{q}_{2\nu}(0) \rightarrow 0 \text{ in } L^2(0, 1), \\ \sqrt{\alpha_3} \tilde{u}_{\nu t}(0) \rightarrow 0 \text{ in } L^2(0, 1), \end{cases}$$

o que implica, juntamente com (4.108), que $\mathcal{E}_\nu(0) \rightarrow 0$ quando $\nu \rightarrow \infty$, completando a prova do lema 4.3.3. □

Agora retornamos para finalizar a demonstração do teorema 4.3.1. Note que

$$2\mathcal{E}_\nu(t) \geq \int_I \rho U_{\nu t}^2 + \tau_1 Q_{1\nu}^2 + \tau_1 Q_{1\nu t}^2 + \tau_2 Q_{2\nu}^2 + \tau_2 Q_{2\nu t}^2 dx.$$

Usando (4.101) vem que

$$\begin{aligned}
2\mathcal{E}_\nu(t) &\geq \int_I \rho \tilde{u}_{\nu t}^2 + \tau_1 \tilde{q}_{1\nu}^2 + \tau_1 \tilde{q}_{1\nu t}^2 + \tau_2 \tilde{q}_{2\nu}^2 + \tau_2 \tilde{q}_{2\nu t}^2 dx \\
&\quad + \int_I \rho \bar{u}_{\nu t}^2 + \tau_1 \bar{q}_{1\nu}^2 + \tau_1 \bar{q}_{1\nu t}^2 + \tau_2 \bar{q}_{2\nu}^2 + \tau_2 \bar{q}_{2\nu t}^2 dx \\
&\quad - 2 \int_I \rho \tilde{u}_{\nu t} \bar{u}_{\nu t} + \tau_1 \tilde{q}_{1\nu} \bar{q}_{1\nu} + \tau_1 \tilde{q}_{1\nu t} \bar{q}_{1\nu t} + \tau_2 \tilde{q}_{2\nu} \bar{q}_{2\nu} + \tau_2 \tilde{q}_{2\nu t} \bar{q}_{2\nu t} dx. \quad (4.117)
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, a última linha da desigualdade acima pode ser estimada conforme segue:

$$\begin{aligned}
&\int_I \rho \tilde{u}_{\nu t} \bar{u}_{\nu t} + \tau_1 \tilde{q}_{1\nu} \bar{q}_{1\nu} + \tau_1 \tilde{q}_{1\nu t} \bar{q}_{1\nu t} + \tau_2 \tilde{q}_{2\nu} \bar{q}_{2\nu} + \tau_2 \tilde{q}_{2\nu t} \bar{q}_{2\nu t} dx \\
&\leq \left(\int_I \rho \tilde{u}_{\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I \rho \bar{u}_{\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_I \tau_1 \tilde{q}_{1\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I \tau_1 \bar{q}_{1\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_I \tau_1 \tilde{q}_{1\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I \tau_1 \bar{q}_{1\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left(\int_I \tau_2 \tilde{q}_{2\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I \tau_2 \bar{q}_{2\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_I \tau_2 \tilde{q}_{2\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I \tau_2 \bar{q}_{2\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.118)
\end{aligned}$$

Do lema 4.3.2 e da identidade (4.80) temos

$$\bar{E}_\nu(t) \leq \frac{1}{C_1} \tilde{E}_\nu(0) = \frac{1}{C_1}. \quad (4.119)$$

Com esta estimativa podemos escrever

$$\left(\int_I \rho \bar{u}_{\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \rho \bar{u}_{\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq (2\bar{E}_\nu(t))^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{C_1} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.120)$$

O mesmo argumento nos permite concluir que os termos

$$\int_I \tau_1 \bar{q}_{1\nu}^2, \int_I \tau_1 \bar{q}_{1\nu t}^2, \int_I \tau_2 \bar{q}_{2\nu}^2, \int_I \tau_2 \bar{q}_{2\nu t}^2 \text{ são limitados por } \frac{2}{C_1}. \quad (4.121)$$

Desta forma, as desigualdades (4.117), (4.118), (4.120) e (4.121) implicam

$$\int_I \rho \bar{u}_{\nu t}^2 + \tau_1 \bar{q}_{1\nu}^2 + \tau_1 \bar{q}_{1\nu t}^2 + \tau_2 \bar{q}_{2\nu}^2 + \tau_2 \bar{q}_{2\nu t}^2 dx \leq 2\mathcal{E}_\nu(t) \\ + 2 \left(\frac{2}{C_1} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\int_I \rho \tilde{u}_{\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_I \tau_1 \tilde{q}_{1\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_I \tau_1 \tilde{q}_{1\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_I \tau_2 \tilde{q}_{2\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_I \tau_2 \tilde{q}_{2\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Como $\mathcal{E}_\nu(t) \leq \sup_{t \in [0, T]} \mathcal{E}_\nu(t)$, integrando a desigualdade acima em $[0, T]$ obtemos

$$\int_0^T \int_I \rho \bar{u}_{\nu t}^2 + \tau_1 \bar{q}_{1\nu}^2 + \tau_1 \bar{q}_{1\nu t}^2 + \tau_2 \bar{q}_{2\nu}^2 + \tau_2 \bar{q}_{2\nu t}^2 dx dt \\ \leq 2T \sup_{t \in [0, T]} \mathcal{E}_\nu(t) + \int_0^T 2 \left(\frac{2}{C_1} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\int_I \rho \tilde{u}_{\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_I \tau_1 \tilde{q}_{1\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_I \tau_1 \tilde{q}_{1\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ \left. + \left(\int_I \tau_2 \tilde{q}_{2\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_I \tau_2 \tilde{q}_{2\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] dt. \quad (4.122)$$

Cálculos análogos aqueles da prova do lema 4.1.2 podem ser realizados para se obter a seguinte identidade

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_\nu(t) = - \int_0^1 \alpha_1 \tilde{q}_{1\nu} Q_{1\nu} + \alpha_2 \tilde{q}_{2\nu} Q_{2\nu} + \alpha_3 \tilde{u}_{\nu t} U_{\nu t} dx \\ - \int_0^1 \alpha_1 \tilde{q}_{1\nu t} Q_{1\nu t} + \alpha_2 \tilde{q}_{2\nu t} Q_{2\nu t} + \alpha_3 \tilde{u}_{\nu t t} U_{\nu t t} dx.$$

Integrando esta sobre $(0, t)$, $t \in (0, T]$, a desigualdade de Hölder nos remete a

$$\mathcal{E}_\nu(t) \leq \mathcal{E}_\nu(0) + C \int_0^t \left(\int_0^1 \alpha_1 \tilde{q}_{1\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \alpha_1 Q_{1\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 \alpha_2 \tilde{q}_{2\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \alpha_2 Q_{2\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \left(\int_0^1 \alpha_3 \tilde{u}_{\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \alpha_3 U_{\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 \alpha_1 \tilde{q}_{1\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \alpha_1 Q_{1\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \left(\int_0^1 \alpha_2 \tilde{q}_{2\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \alpha_2 Q_{2\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 \alpha_3 \tilde{u}_{\nu t t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \alpha_3 U_{\nu t t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt. \quad (4.123)$$

Assim, estendendo o intervalo de integração com $t \in [0, T]$ em (4.123), tomando o supremo e usando a limitação de $\tilde{E}_\nu(t)$ e de $\bar{E}_\nu(t)$ resulta que

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \mathcal{E}_\nu(t) &\leq \mathcal{E}_\nu(0) + C \int_0^T \left(\int_0^1 \alpha_1 \tilde{q}_{1\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 \alpha_2 \tilde{q}_{2\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\int_0^1 \alpha_3 \tilde{u}_{\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 \alpha_1 \tilde{q}_{1\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 \alpha_2 \tilde{q}_{2\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 \alpha_3 \tilde{u}_{\nu t t}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.124)$$

Devido a (4.79), (4.124) e ao lema 4.3.3 chegamos a

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[\sup_{t \in [0, T]} \mathcal{E}_\nu(t) \right] = 0. \quad (4.125)$$

De (4.122), (4.79) e (4.125) concluímos que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^T \int_I \rho \bar{u}_{\nu t}^2 + \tau_1 \bar{q}_{1\nu}^2 + \tau_1 \bar{q}_{1\nu t}^2 + \tau_2 \bar{q}_{2\nu}^2 + \tau_2 \bar{q}_{2\nu t}^2 dx dt = 0. \quad (4.126)$$

Mas, de (4.80), do lema 4.3.2 e do teorema 4.2.1 obtemos

$$1 = \tilde{E}_\nu(0) \leq C_2 \bar{E}_\nu(0) \leq C_2 C \int_0^T \int_I \rho \bar{u}_{\nu t}^2 + \tau_1 \bar{q}_{1\nu}^2 + \tau_1 \bar{q}_{1\nu t}^2 + \tau_2 \bar{q}_{2\nu}^2 + \tau_2 \bar{q}_{2\nu t}^2 dx dt.$$

Tomando o limite na expressão acima quando ν tende ao infinito e usando (4.126) resulta que

$$1 \leq 0,$$

o que é um absurdo. Donde se conclui a demonstração do teorema 4.3.1. \square

Observação 4.3.4 *É importante observar que a constante C do teorema 4.3.1 não depende da solução ou dos dados iniciais do problema (4.1)-(4.3). Então, usando a propriedade do semigrupo e teorema 4.3.1 obtemos que*

$$E(nT) \leq C \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^1 \alpha_1(x) [q_1^2 + q_{1t}^2] + \alpha_2(x) [q_2^2 + q_{2t}^2] + \alpha_3(x) [u_t^2 + u_{tt}^2] dx dt, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.127)$$

onde C é a mesma constante apresentada no teorema 4.3.1, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora estamos em condições de demonstrar o decaimento exponencial conforme segue.

Teorema 4.3.5 *Seja $\{u, \theta_1, \theta_2, q_1, q_2\}$ a solução de (4.1)-(4.3). Então existe $C_0 > 0$ e $\eta_0 > 0$ tais que*

$$E(t) \leq C_0 e^{-\eta_0 t} E(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.128)$$

Demonstração: [Prova do teorema 4.3.5] Do lema 4.1.2, integrando com $t \in [0, T_0]$, vem que

$$\begin{aligned} E(T_0) - E(0) &= - \int_0^{T_0} \int_0^1 \alpha_1(x) q_1^2 + \alpha_2(x) q_2^2 + \alpha_3(x) u_t^2 dx \\ &\quad + \int_0^1 \alpha_1(x) q_{1t}^2 + \alpha_2(x) q_{2t}^2 + \alpha_3(x) u_{tt}^2 dx dt. \end{aligned} \quad (4.129)$$

A observação 4.3.4 juntamente com o fato que o funcional de energia, E , é não crescente resulta em

$$\begin{aligned} E(T_0) \leq E(0) &\leq C \int_0^{T_0} \int_0^1 \alpha_1(x) q_1^2 + \alpha_2(x) q_2^2 + \alpha_3(x) u_t^2 dx \\ &\quad + \int_0^1 \alpha_1(x) q_{1t}^2 + \alpha_2(x) q_{2t}^2 + \alpha_3(x) u_{tt}^2 dx dt. \end{aligned} \quad (4.130)$$

A desigualdade (4.130) implica

$$\begin{aligned} C \int_0^{T_0} \int_0^1 \alpha_1(x) q_1^2 + \alpha_2(x) q_2^2 + \alpha_3(x) u_t^2 dx \\ + \int_0^1 \alpha_1(x) q_{1t}^2 + \alpha_2(x) q_{2t}^2 + \alpha_3(x) u_{tt}^2 dx dt &\leq -E(T_0). \end{aligned} \quad (4.131)$$

De (4.129) e (4.131) vem que $C [E(T_0) - E(0)] \leq -E(T_0)$ e, portanto,

$$E(T_0) \leq \frac{C}{C+1} E(0). \quad (4.132)$$

Analogamente, integrando a equação do lema 4.1.2 em $[T, 2T]$ e usando a observação 4.3.4, para $n = 1$, obtemos

$$E(2T_0) \leq \frac{C}{C+1} E(T_0). \quad (4.133)$$

Substituindo (4.132) em (4.133) chegamos a

$$E(2T_0) \leq \left(\frac{C}{C+1} \right)^2 E(0).$$

Repetindo este procedimento n vezes resulta em

$$E(nT_0) \leq \left(\frac{C}{C+1} \right)^n E(0). \quad (4.134)$$

Agora, considere $t \geq 0$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ satisfazendo $0 \leq r < T_0$ tais que $t = nT_0 + r$. Como $t - r \leq t$, de (4.134) segue que

$$E(t) \leq E(t - r) = E(nT_0) \leq \left(\frac{C}{C+1} \right)^n E(0)$$

e como $n = \frac{t-r}{T_0} = \frac{t}{T_0} - \frac{r}{T_0}$ deduzimos que

$$E(t) \leq \left(\frac{C+1}{C} \right)^{\frac{r}{T_0}} \left[\left(\frac{C+1}{C} \right)^{\frac{1}{T_0}} \right]^{-t} E(0). \quad (4.135)$$

Tendo em consideração que $\left(\frac{C+1}{C} \right)^{\frac{r}{T_0}} \leq \frac{C+1}{C}$ e escolhendo $\eta_0 := \frac{1}{T_0} \ln \left(\frac{C+1}{C} \right)$ e $C_0 := \frac{C+1}{C}$, de (4.135) concluímos a demonstração do teorema 4.3.5.

□

Taxas de decaimento para o sistema de termodifusão não linear

Neste capítulo vamos considerar o sistema de termodifusão não linear dado por

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - (\lambda + 2\mu)u_{xx} + \gamma_1\theta_{1x} + \gamma_2\theta_{2x} + \alpha_3(x)g_3(u_t) = 0, \\ c\theta_{1t} + \sqrt{k}q_{1x} + \gamma_1u_{tx} + d\theta_{2t} = 0, \\ n\theta_{2t} + \sqrt{D}q_{2x} + \gamma_2u_{tx} + d\theta_{1t} = 0, \\ \tau_1q_{1t} + \alpha_1(x)g_1(q_1) + \sqrt{k}\theta_{1x} = 0, \\ \tau_2q_{2t} + \alpha_2(x)g_2(q_2) + \sqrt{D}\theta_{2x} = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

em $(0, L) \times (0, \infty)$, com condições iniciais

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), & u_t(x, 0) = u_1(x), \\ \theta_1(x, 0) = \theta_{10}(x), & \theta_2(x, 0) = \theta_{20}(x), \\ q_1(x, 0) = q_{10}(x), & q_2(x, 0) = q_{20}(x), \end{cases} \quad (5.2)$$

de modo que na fronteira se verifique

$$u(0, t) = u(L, t) = \theta_1(0, t) = \theta_1(L, t) = \theta_2(0, t) = \theta_2(L, t) = 0 \quad (5.3)$$

e as funções α_i e g_i , $i = 1, 2, 3$, satisfaçam as hipóteses 5.1.1 e 5.1.2.

Conforme descrito no capítulo anterior, as funções u , θ_1 e q_1 denotam o deslocamento, a temperatura e o fluxo de calor. As funções θ_2 e q_2 representam o potencial químico e o fluxo associado. Os coeficientes λ e μ são constantes relacionadas a composição do material, ρ é a densidade, γ_1 e γ_2 são a dilatação térmica e difusão, k e D representam a condutividade térmica. Além disso, n , c e d são os coeficientes de termodifusão e τ_1 e τ_2 se referem ao tempo de relaxamento. Todos os coeficientes descritos acima são positivos

e satisfazem a seguinte relação de termodifusão

$$nc - d^2 > 0. \quad (5.4)$$

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: na seção 1 são feitas algumas considerações sobre as funções localizadoras, tipo da não linearidade, energia e existência de solução. A seção 2 é dedicada a obtenção da desigualdade de observabilidade, primeiramente para o sistema conservativo por meio da técnica dos multiplicadores e depois estendida para o sistema não conservativo via argumentos por contradição. A seção 4 é destinada a apresentar as taxas de decaimento para o sistema de termodifusão não linear.

5.1 Observações iniciais e boa colocação

Tendo em vista a estabilização do sistema de termodifusão, as seguintes hipóteses são consideradas

Hipótese 5.1.1 *Assumimos que $\alpha_i \in L^\infty(0, L)$, $i = 1, 2, 3$ são funções não negativas tais que*

$$\alpha_i(x) \geq \alpha_{i0} > 0 \text{ em algum intervalo } J_i \subset (0, L), \quad i = 1, 2, 3$$

e, além disso,

$$\emptyset \neq (a_1, a_2) = I := \bigcap_{i=1}^3 J_i \subset (0, L).$$

Como veremos no texto, essas funções podem localizar os mecanismos dissipativos em regiões arbitrariamente pequenas.

Hipótese 5.1.2 *As funções g_i , $i = 1, 2, 3$, são contínuas e monótonas crescentes e, além disso satisfazem:*

- $g_i(s)s > 0$ para $s \neq 0$,
- $k_i s \leq g_i(s) \leq K_i s$, para $|s| > 1$, onde k_i e K_i são constantes positivas.

Se $\{u, \theta_1, \theta_2, q_1, q_2\}$ é uma solução de (5.1)-(5.3), a energia associada, $E(t)$, $t \geq 0$ é definida por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho u_t^2 + (\lambda + 2\mu)u_x^2 + c\theta_1^2 + n\theta_2^2 + \tau_1 q_1^2 + \tau_2 q_2^2 + 2d\theta_1\theta_2 dx \quad (5.5)$$

De modo semelhante ao apresentado no capítulo anterior, a condição (5.4) implica que $E(t) \geq 0$.

Lema 5.1.3 *O funcional de energia, E , definido em (5.5), verifica:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= - \int_0^L \alpha_1(x)g_1(q_1)q_1 + \alpha_2(x)g_2(q_2)q_2 + \alpha_3(x)g_3(u_t)u_t dx \\ &\leq 0, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Demonstração: Basta multiplicar a primeira equação de (5.1) por u_t , a segunda por θ_1 , a terceira por θ_2 , a quarta por q_1 e a quinta por q_2 . Em seguida, some os resultados, integre por partes sobre $(0, L)$ e use as hipóteses 5.1.1 e 5.1.2 para obter a última desigualdade. □

Para a existência de solução, considere o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(0, L)$$

munido da norma

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &:= \|\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\equiv \int_0^L \rho u_2^2 + (\lambda + 2\mu)u_{1x}^2 + cu_3^2 + nu_4^2 + \tau_1 u_5^2 + \tau_2 u_6^2 + 2du_3u_4 dx \end{aligned}$$

a qual é induzida pelo produto interno

$$\begin{aligned} (U, V)_{\mathcal{H}} &:= (\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\})_{\mathcal{H}} \\ &\equiv (\lambda + 2\mu)(u_{1x}, v_{1x}) + \rho(u_2, v_2) + c(u_3, v_3) + d(u_3, v_4) \\ &\quad + n(u_4, v_4) + d(u_4, v_3) + \tau_1(u_5, v_5) + \tau_2(u_6, v_6) \end{aligned}$$

onde (\cdot, \cdot) denota o produto interno usual de $L^2(0, L)$.

Observe que podemos isolar θ_{1t} e θ_{2t} a partir da segunda e terceira equações de (5.1) e, portanto, (5.1) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}\rho u_{tt} &= (\lambda + 2\mu)u_{xx} - \gamma_1\theta_{1x} - \gamma_2\theta_{2x} - \alpha_3(x)u_t \\ (nc - d^2)\theta_{1t} &= -n\sqrt{k}q_{1x} + d\sqrt{D}q_{2x} - (n\gamma_1 - d\gamma_2)u_{tx} \\ (nc - d^2)\theta_{2t} &= -c\sqrt{D}q_{2x} + d\sqrt{k}q_{1x} - (c\gamma_2 - d\gamma_1)u_{tx} \\ \tau_1 q_{1t} &= -\alpha_1(x)q_1 - \sqrt{k}\theta_{1x} \\ \tau_2 q_{2t} &= -\alpha_2(x)q_2 - \sqrt{D}\theta_{2x}\end{aligned}$$

Então, denotando $Y(t) = \{u, u_t, \theta_1, \theta_2, q_1, q_2\}$, vem que o sistema (5.1)-(5.2) é equivalente a

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Y(t) + \mathcal{A}Y(t) = 0 \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}, \quad (5.6)$$

quando $Y_0 = \{u_0, u_1, \theta_{10}, \theta_{20}, q_{10}, q_{20}\}$ e o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é dado por $\mathcal{A} = -(A_1 + A_2)$ cujas domínios são

$$\begin{aligned}D(A_1) &= H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \times H^1(0, 1), \\ D(A_2) &= \mathcal{H}\end{aligned}$$

e as componentes A_1 e A_2 são definidas por

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda+2\mu}{\rho}\partial_{xx} & 0 & -\frac{\gamma_1}{\rho}\partial_x & -\frac{\gamma_2}{\rho}\partial_x & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{n\gamma_1-d\gamma_2}{nc-d^2}\partial_x & 0 & 0 & -\frac{n\sqrt{k}}{nc-d^2}\partial_x & \frac{d\sqrt{D}}{nc-d^2}\partial_x \\ 0 & -\frac{c\gamma_2-d\gamma_1}{nc-d^2}\partial_x & 0 & 0 & \frac{d\sqrt{k}}{nc-d^2}\partial_x & -\frac{c\sqrt{D}}{nc-d^2}\partial_x \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{k}}{\tau_1}\partial_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{D}}{\tau_2}\partial_x & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_3(x)}{\rho}g_3(\cdot) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_1(x)}{\tau_1}g_1(\cdot) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_2(x)}{\tau_2}g_2(\cdot) \end{pmatrix}.$$

Note que $D(\mathcal{A}) = D(A_1)$ e A_1 é anti-adjunto, isto é, $(A_1U, V)_{\mathcal{H}} = (U, -A_1V)_{\mathcal{H}}$ para todo $U, V \in D(A_1)$, ou seja, $A^* = -A_1$. A demonstração deste fato é tal qual feita no capítulo anterior.

Pelo Teorema 2.8.12 (de Stone) A_1 é o gerador infinitesimal de um grupo unitário de classe C_0 , em particular, A_1 é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 . Pelo teorema (2.8.7) (de Lumer-Phillips) segue que A_1 é m-dissipativo e, portanto,

$$(A_1U, U) \leq 0 \text{ e } \operatorname{Im}(\lambda I - A_1) = \mathcal{H} \quad (5.7)$$

para algum $\lambda > 0$. As afirmativas (5.7) implicam em

$$(-A_1U, U) \geq 0 \text{ e } \operatorname{Im}(I - A_1) = \mathcal{H}$$

culminando no fato que

$$-A_1 \text{ é um operador maximal monótono.}$$

Agora mostraremos que $-A_2$ é monótono, hemicontínuo e leva conjuntos limitados em conjuntos limitados. De fato

- $-A_2$ é monótono: com efeito, note que

$$-A_2U + A_2V = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha_3(x)}{\rho} [g_3(u_2) - g_3(v_2)] \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\alpha_1(x)}{\tau_1} [g_1(u_5) - g_1(v_5)] \\ \frac{\alpha_2(x)}{\tau_2} [g_2(u_6) - g_2(v_6)] \end{pmatrix}$$

e

$$U - V = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3, u_4 - v_4, u_5 - v_5, u_6 - v_6).$$

Portanto

$$\begin{aligned} (-A_2U + A_2V, U - V)_{\mathcal{H}} &= \rho \left(\frac{\alpha_3(x)}{\rho} [g_3(u_2) - g_3(v_2)], u_2 - v_2 \right) \\ &\quad + \tau_1 \left(\frac{\alpha_1(x)}{\tau_1} [g_1(u_5) - g_1(v_5)], u_5 - v_5 \right) \\ &\quad + \tau_2 \left(\frac{\alpha_2(x)}{\tau_2} [g_2(u_6) - g_2(v_6)], u_6 - v_6 \right) \\ &= \int_0^L \alpha_3(x) [g_3(u_2) - g_3(v_2)] (u_2 - v_2) dx \\ &\quad + \int_0^L \alpha_1(x) [g_1(u_5) - g_1(v_5)] (u_5 - v_5) dx \\ &\quad + \int_0^L \alpha_2(x) [g_2(u_6) - g_2(v_6)] (u_6 - v_6) dx \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade se deve ao fato que g_i crescente implica que $[g_i(u_j) - g_i(v_j)]$ tem o mesmo sinal de $(u_j - v_j)$. Logo $[g_i(u_j) - g_i(v_j)] (u_j - v_j)$ é não negativo. Desta desigualdade segue que $-A_2$ é monótono.

✓

- $-A_2$ é hemicontínuo: com efeito, considere também

$W = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6) \in \mathcal{H}$ e $t > 0$. Então

$$\begin{aligned} (-A_2(U + tV), W)_{\mathcal{H}} &= \rho \left(\frac{\alpha_3(x)}{\rho} g_3(u_2 + tv_2), w_2 \right) \\ &\quad + \tau_1 \left(\frac{\alpha_1(x)}{\tau_1} g_1(u_5 + tv_5), w_5 \right) + \tau_2 \left(\frac{\alpha_2(x)}{\tau_2} g_2(u_6 + tv_6), w_6 \right). \end{aligned}$$

Queremos mostrar que

$$(-A_2(U + tV), W)_{\mathcal{H}} \rightarrow (-A_2U, W)_{\mathcal{H}}, \text{ quando } t \rightarrow 0^+.$$

Então é suficiente provar que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} (\alpha_1(x)g_1(u_5 + tv_5), w_5) &= (\alpha_1(x)g_1(u_5), w_5), \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} (\alpha_2(x)g_2(u_6 + tv_6), w_6) &= (\alpha_2(x)g_2(u_6), w_6), \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} (\alpha_3(x)g_3(u_2 + tv_2), w_2) &= (\alpha_3(x)g_3(u_2), w_2). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Mostraremos que (5.8) se verifica. As demais seguirão de forma análoga. Para isso considere a função integrável

$$f(x) = \alpha_1(x)g_1(u_5(x))w_5(x)$$

e defina a sequência

$$f_n(x) = \alpha_1(x)g_1\left(u_5(x) + \frac{1}{n}v_5(x)\right)w_5(x).$$

Daí, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ quase sempre em $(0, L)$. Além disso, f_n é integrável e dominada. De fato,

$$\begin{aligned} \int_0^L f_n(x) dx &= \int_0^L \alpha_1(x)g_1\left(u_5(x) + \frac{1}{n}v_5(x)\right)w_5(x) dx \\ &\leq \|\alpha_1\|_\infty \int_0^L \underbrace{\max\{K_1, K_1(|u_5(x)| + |v_5(x)|)\}}_{\in L^2(0,L)} \underbrace{|w_5(x)|}_{\in L^2(0,L)} dx \\ &< \infty \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$f(x) \leq \|\alpha_1\|_\infty \max\{K_1, K_1(|u_5(x)| + |v_5(x)|)\} |w_5(x)|.$$

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, vem que

$$\int_0^L f_n(x) dx \rightarrow \int_0^L f(x) dx, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

isto é, (5.8) se verifica. Assim $-A_2$ é hemicontínuo.

✓

• $-A_2$ leva conjunto limitado em conjunto limitado: com efeito, seja $U \in D(A_2) = \mathcal{H}$ tal que $\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq M_1$. Então,

$$\begin{aligned} \| -A_2 U \|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_0^L \rho \left| \frac{\alpha_3(x)}{\rho} g_3(u_2(x)) \right|^2 + \tau_1 \left| \frac{\alpha_1(x)}{\tau_1} g_1(u_5(x)) \right|^2 + \tau_2 \left| \frac{\alpha_2(x)}{\tau_2} g_2(u_6(x)) \right|^2 dx \\ &\leq C_1 \int_0^L \max \{ K_3^2 + K_1^2 + K_2^2, (K_3^2 + K_1^2 + K_2^2) (u_2^2(x) + u_5^2(x) + u_6^2(x)) \} \\ &\leq C + C \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq M_2, \end{aligned}$$

onde

$$C_1 = \max \left\{ \frac{\|\alpha_3\|_{\infty}^2}{\rho}, \frac{\|\alpha_1\|_{\infty}^2}{\tau_1}, \frac{\|\alpha_2\|_{\infty}^2}{\tau_2} \right\},$$

provando assim que $-A_2$ leva limitados em limitados. ✓

Como $-A_1$ é maximal monótono e $-A_2$ é monótono, hemicontínuo e limitado vem, pelo teorema 2.9.4, que \mathcal{A} é maximal monótono. Então, dos teoremas 2.9.5 e 2.9.7 temos o seguinte resultado de existência

Teorema 5.1.4 *Considere que as hipóteses 5.1.1 e 5.1.2 se verificam. Dado $Y_0 \in D(\mathcal{A})$ existe única solução forte de (5.6). Além disso, se $Y_0 \in \mathcal{H}$ então (5.6) admite uma única solução fraca.*

5.2 Desigualdade de Observabilidade

Nesta seção, primeiramente provaremos uma desigualdade de observabilidade para o sistema conservativo

$$\rho u_{tt} - (\lambda + 2\mu)u_{xx} + \gamma_1 \theta_{1x} + \gamma_2 \theta_{2x} = 0 \quad (5.9)$$

$$c\theta_{1t} + \sqrt{k}q_{1x} + \gamma_1 u_{tx} + d\theta_{2t} = 0 \quad (5.10)$$

$$n\theta_{2t} + \sqrt{D}q_{2x} + \gamma_2 u_{tx} + d\theta_{1t} = 0 \quad (5.11)$$

$$\tau_1 q_{1t} + \sqrt{k}\theta_{1x} = 0 \quad (5.12)$$

$$\tau_2 q_{2t} + \sqrt{D}\theta_{2x} = 0 \quad (5.13)$$

em $(0, L) \times (0, \infty)$ com as mesmas condições iniciais e de fronteira de (5.2)-(5.3) e em seguida estenderemos este resultado para o problema não conservativo (5.1)-(5.3). Ob-

servamos que a energia dos sistemas dissipativo e conservativo são dadas pela mesma expressão. As estimativas aqui são muito semelhantes com aquelas apresentadas no capítulo 4, no entanto, aqui estamos considerando um intervalo $(0, L)$ com L podendo ser diferente de 1, diferenciado do capítulo anterior. Também menos estimativas são necessárias uma vez que somente energia de primeira ordem é considerada, entretanto, isto nos obriga a estimar cada termo em função de u_t , q_1 e q_2 , não permitindo derivadas destes termos, gerando alguma dificuldade adicional.

Teorema 5.2.1 *Seja $I = (a_1, a_2)$ o intervalo aberto contido em $(0, L)$. Para $T > 0$ suficientemente grande, existe uma constante positiva, $C > 0$, tal que qualquer solução $\{u, \theta_1, \theta_2, q_1, q_2\}$ de (5.9)-(5.13) satisfaz*

$$E(0) \leq C \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} q_1^2 + q_2^2 + u_t^2 dx dt.$$

Demonstração:[Prova do teorema 5.2.1] Dado $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno, satisfazendo

$$\varepsilon_0 < \frac{a_2 - a_1}{2},$$

de forma recorrente, escolha

$$\varepsilon_i = \frac{\varepsilon_{i-1}}{2}, \text{ for } i = 1, 2. \quad (5.14)$$

Denote por I_i o intervalo $(a_1 + \varepsilon_i, a_2 - \varepsilon_i)$. Defina a função contínua e C^1 por partes

$$g_\eta(x) = \begin{cases} (\eta - 1)x, & \text{se } x \in [0, a_1 + \varepsilon_0), \\ \eta(x - a_1 - \varepsilon_0) + \frac{(a_1 - a_2 + 2\varepsilon_0)}{L}(a_1 + \varepsilon_0), & \text{se } x \in [a_1 + \varepsilon_0, a_2 - \varepsilon_0], \\ (\eta - 1)(x - L), & \text{se } x \in (a_2 - \varepsilon_0, L]. \end{cases} \quad (5.15)$$

com $\eta := \frac{L - (a_2 - a_1 - 2\varepsilon_0)}{L} \in [0, 1)$. Esta função foi introduzida por Ho [25] e recentemente usada em [10, 15].

Multiplicando a equação (5.9) por $u_x g_\eta$, integrando por partes e usando as equações (5.12) e (5.13) obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \int_0^L \rho u_t u_x g_\eta dx + \int_0^L \rho u_t u_{tx} g_\eta + (\lambda + 2\mu) u_{xx} u_x g_\eta dx - \int_0^L \left[\frac{\gamma_1 \tau_1}{\sqrt{k}} q_{1t} u_x + \frac{\gamma_2 \tau_2}{\sqrt{D}} q_{2t} u_x \right] g_\eta dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^L \rho u_t u_x g_\eta dx + \int_0^L \frac{\rho}{2} u_t^2 g'_\eta + \frac{\lambda + 2\mu}{2} u_x^1 g'_\eta dx - \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{\gamma_1 \tau_1}{\sqrt{k}} q_1 u_x g_\eta dx \\ &\quad + \int_0^L \frac{\gamma_1 \tau_1}{\sqrt{k}} q_1 u_{tx} g_\eta dx - \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{\gamma_2 \tau_2}{\sqrt{D}} q_2 u_x g_\eta dx + \int_0^L \frac{\gamma_2 \tau_2}{\sqrt{D}} q_2 u_{tx} g_\eta dx. \end{aligned}$$

Dessa identidade e das equações (5.10) e (5.11) chegamos a

$$\begin{aligned} &\int_0^L \left[\frac{\rho}{2} u_t^2 + \frac{\lambda + 2\mu}{2} u_x^1 \right] g'_\eta dx + \frac{d}{dt} \int_0^L \left[\rho u_t u_x - \frac{\gamma_1 \tau_1}{\sqrt{k}} q_1 u_x - \frac{\gamma_2 \tau_2}{\sqrt{D}} q_2 u_x \right] g_\eta dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{\tau_1}{\sqrt{k}} q_1 (c\theta_1 + d\theta_2) g_\eta + \frac{\tau_2}{\sqrt{D}} q_2 (n\theta_2 + d\theta_1) g_\eta dx - \int_0^L \underbrace{\frac{\tau_1}{\sqrt{k}} q_{1t}}_{-\theta_{1x}} (c\theta_1 + d\theta_2) g_\eta \\ &\quad - \underbrace{\frac{\tau_2}{\sqrt{D}} q_{2t}}_{-\theta_{2x}} (n\theta_2 + d\theta_1) g_\eta dx + \int_0^L \tau_1 q_1 q_{1x} g_\eta + \tau_2 q_2 q_{2x} g_\eta \end{aligned}$$

que nos remete a

$$\begin{aligned} &\int_0^L \left[\frac{\rho}{2} u_t^2 + \frac{\lambda + 2\mu}{2} u_x^2 + \frac{c}{2} \theta_1^2 + \frac{n}{2} \theta_2^2 + \frac{\tau_1}{2} q_1^2 + \frac{\tau_2}{2} q_2^2 + d\theta_1 \theta_2 \right] g'_\eta dx \quad (5.16) \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^L \rho u_t u_x g_\eta + \frac{\tau_1}{\sqrt{k}} (-c\theta_1 - \gamma_1 u_x - d\theta_2) q_1 g_\eta + \frac{\tau_2}{\sqrt{D}} (-n\theta_2 - \gamma_2 u_x - d\theta_1) q_2 g_\eta dx. \end{aligned}$$

Como

$$g'_\eta(x) = \begin{cases} \eta, & \text{se } x \in I_0, \\ \eta - 1, & \text{se } x \in [0, L] \setminus I_0, \end{cases}$$

da identidade (5.16) vem que

$$\begin{aligned} (1 - \eta)E(t) &= -\frac{d}{dt} M(t) \\ &\quad + \int_{I_0} \left[\frac{\rho}{2} u_t^2 + \frac{\lambda + 2\mu}{2} u_x^2 + \frac{c}{2} \theta_1^2 + \frac{n}{2} \theta_2^2 + \frac{\tau_1}{2} q_1^2 + \frac{\tau_2}{2} q_2^2 + d\theta_1 \theta_2 \right] dx \quad (5.17) \end{aligned}$$

onde

$$M(t) = \int_0^L \rho u_t u_x g_\eta + \frac{\tau_1}{\sqrt{k}} (-c\theta_1 - \gamma_1 u_x - d\theta_2) q_1 g_\eta + \frac{\tau_2}{\sqrt{D}} (-n\theta_2 - \gamma_2 u_x - d\theta_1) q_2 g_\eta dx.$$

Note que $\int_0^T \frac{d}{dt} M(t) dt \leq CE(0)$. Para estimar a última parte de (5.17) consideremos as funções “cut-off” $\xi_i \in C_0^\infty(0, L)$, $i = 1, 2$, satisfazendo

$$\begin{cases} 0 \leq \xi_i(x) \leq 1, \quad \forall x \in (0, L), \\ \xi_i(x) = 0, \quad \text{em } (0, L) \setminus I_i, \\ \xi_i(x) = 1, \quad \text{em } I_{i-1}. \end{cases} \quad (5.18)$$

Para obter a observabilidade desejada precisamos estimar θ_1, θ_2 e u_x em termos de u_t, q_1 e q_2 . Começemos por θ_1 . Com vistas a alcançar o nosso objetivo, considere o multiplicador

$$\int_0^x \xi_1 \theta_1 dy. \quad (5.19)$$

Veja que as derivadas deste multiplicador satisfazem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \xi_1 \theta_1 dy &= \xi_1(x) \theta_1(x, t) \text{ e} \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \xi_1 \theta_1 dy &= \int_0^x \xi_1(y) \theta_{1t}(y, t) dy. \end{aligned}$$

Multiplicando (5.12) por (5.19) e integrando com x variando em $[0, L]$ resulta em

$$\begin{aligned} \sqrt{k} \int_0^L \theta_1^2 \xi_1 dx - \frac{d}{dt} \left[\int_0^L \tau_1 q_1 \int_0^x \xi_1 \theta_1 dy dx \right] \\ \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^L \tau_1^2 q_1^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^L \left(\int_0^x \xi_1 \theta_{1t} dy \right)^2 dx \quad (5.20) \end{aligned}$$

A beleza deste multiplicador pode ser contemplada ao estimar o último termo da desigualdade acima. Primeiramente, veja que as equações (5.10) e (5.11) podem ser reescritas como

$$(nc - d^2) \theta_{1t} = -n\sqrt{k} q_{1x} + d\sqrt{D} q_{2x} - (n\gamma_1 - d\gamma_2) u_{tx} \quad (5.21)$$

$$(nc - d^2) \theta_{2t} = -c\sqrt{D} q_{2x} + d\sqrt{k} q_{1x} - (c\gamma_2 - d\gamma_1) u_{tx}. \quad (5.22)$$

Em seguida, substituindo (5.21) em (5.20), integrando por partes, usando a desigualdade de Hölder e o fato que x pertence a um intervalo limitado, obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left(\int_0^x \xi_1 \theta_{1t} dy \right)^2 dx \\
&= \int_0^L \left(\int_0^x \frac{-1}{nc - d^2} \left[n\sqrt{k}q_{1y} - d\sqrt{D}q_{2y} + (n\gamma_1 - d\gamma_2)u_{ty} \right] \xi_1 dy \right)^2 dx \\
&= \frac{1}{(nc - d^2)^2} \int_0^L \left(\left[(n\sqrt{k}q_1 - d\sqrt{D}q_2 + (n\gamma_1 - d\gamma_2)u_t)\xi_1 \right]_0^x \right. \\
&\quad \left. - \int_0^x \left[n\sqrt{k}q_1 - d\sqrt{D}q_2 + (n\gamma_1 - d\gamma_2)u_t \right] \xi_1'(y) dy \right)^2 dx \\
&\leq \frac{2}{(nc - d^2)^2} \int_0^L \left[n\sqrt{k}q_1 - d\sqrt{D}q_2 + (n\gamma_1 - d\gamma_2)u_t \right]^2 \xi_1^2(x) dx \\
&\quad + \frac{2}{(nc - d^2)^2} \int_0^L \left(\int_0^x \left[n\sqrt{k}q_1 - d\sqrt{D}q_2 + (n\gamma_1 - d\gamma_2)u_t \right] \xi_1'(y) dy \right)^2 dx \\
&\leq \frac{2}{(nc - d^2)^2} \int_0^L \left[n\sqrt{k}q_1 - d\sqrt{D}q_2 + (n\gamma_1 - d\gamma_2)u_t \right]^2 \xi_1^2(x) dx \\
&\quad + \frac{2}{(nc - d^2)^2} \int_0^L \left(\int_0^x 1^2 dx \right) \left(\int_0^x \left[n\sqrt{k}q_1 - d\sqrt{D}q_2 + (n\gamma_1 - d\gamma_2)u_t \right]^2 \xi_1'^2(y) dy \right) dx \\
&\leq \frac{2}{(nc - d^2)^2} \int_0^L \left[n\sqrt{k}q_1 - d\sqrt{D}q_2 + (n\gamma_1 - d\gamma_2)u_t \right]^2 \xi_1^2(x) dx \\
&\quad + \frac{2}{(nc - d^2)^2} L^2 \int_0^L \left[n\sqrt{k}q_1 - d\sqrt{D}q_2 + (n\gamma_1 - d\gamma_2)u_t \right]^2 \xi_1'^2(y) dy \\
&\leq \frac{6(1 + L^2 \|\xi_1'\|_\infty^2)}{(nc - d^2)^2} \int_{a_1 + \varepsilon_0}^{a_2 - \varepsilon_0} n^2 k q_1^2 + d^2 D q_2^2 + (c\gamma_1 - d\gamma_2)^2 u_t^2 dx. \tag{5.23}
\end{aligned}$$

Associando (5.23) com (5.20) conseguimos que

$$\int_0^L \theta_1^2 \xi_1 dx \leq \varepsilon C \int_0^L q_1^2 dx + C_\varepsilon \int_{a_1 + \varepsilon_0}^{a_2 - \varepsilon_0} q_1^2 + q_2^2 + u_t^2 dx + \frac{d}{dt} \int_0^L \tau_1 q_1 \int_0^x \xi_1 \theta_1 dy dx. \tag{5.24}$$

Cálculos análogos para θ_2 nos remetem

$$\int_0^L \theta_2^2 \xi_1 dx \leq \varepsilon C \int_0^L q_2^2 dx + C_\varepsilon \int_{a_1 + \varepsilon_0}^{a_2 - \varepsilon_0} q_1^2 + q_2^2 + u_t^2 dx + \frac{d}{dt} \int_0^L \tau_2 q_2 \int_0^x \xi_1 \theta_2 dy dx. \tag{5.25}$$

Observe que $\int_0^T \frac{d}{dt} \int_0^L \tau_1 q_1 \int_0^x \xi_1 \theta_1 dy dx dt$ e $\int_0^T \frac{d}{dt} \int_0^L \tau_2 q_2 \int_0^x \xi_1 \theta_2 dy dx dt$ também podem ser estimadas por $CE(0)$ usando para isso a desigualdade de Hölder.

Para estimar u_x multiplicamos (5.9) por $u\xi_1$ obtendo

$$\begin{aligned}
& (\lambda + 2\mu) \int_0^L u_x^2 \xi_1 dx \\
= & -\frac{d}{dt} \left[\int_0^L \rho u_t u \xi_1 dx \right] + \int_0^L \rho u_t^2 \xi_1 dx \\
& + \int_0^L \frac{\lambda + 2\mu}{2} u^2 \xi_1'' dx + \int_0^L (\gamma_1 \theta_1 + \gamma_2 \theta_2) (u_x \xi_1 + u \xi_1') dx \\
\leq & -\frac{d}{dt} \left[\int_0^L \rho u_t u \xi_1 dx \right] + \varepsilon C \int_0^L \theta_1^2 + \theta_2^2 dx + C_\varepsilon \int_{a_1+\varepsilon_0}^{a_2-\varepsilon_0} u_t^2 + u^2 dx \\
& + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \int_0^L \theta_1^2 \xi_1 + \theta_2^2 \xi_1 dx + \frac{\lambda + 2\mu}{2} \int_0^L u_x^2 \xi_1 dx
\end{aligned}$$

Usando (5.24) e (5.25) na estimativa acima, chegamos a

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda + 2\mu}{2} \int_0^L u_x^2 \xi_1 dx \leq & \frac{d}{dt} \left[\int_0^L -\rho u_t u \xi_1 + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \left(\tau_1 q_1 \int_0^x \theta_1 \xi_1 dy + \tau_2 q_2 \int_0^x \theta_2 \xi_1 dy \right) dx \right] \\
& + \varepsilon C \int_0^L \theta_1^2 + \theta_2^2 + q_1^2 + q_2^2 dx + C_\varepsilon \int_{a_1+\varepsilon_0}^{a_2-\varepsilon_0} q_1^2 + q_2^2 + u_t^2 + u^2 dx. \quad (5.26)
\end{aligned}$$

Desta forma, resta estimar apenas u em termos de u_t , q_1 e q_2 . Então lembramos o trabalho de Tébou [53] e adaptamos ao nosso caso. Ou seja, considere o multiplicador $z(t) \in H_0^1(0, L)$, solução de

$$\begin{cases} -z_{xx} = \xi_2 u \text{ em } (0, L), \\ z(0, t) = z(L, t) = 0, \end{cases} \quad (5.27)$$

e além disso, sua derivada $z_t(t) \in H_0^1(0, L)$ é solução de

$$\begin{cases} -z_{txx} = \xi_2 u_t \text{ em } (0, L), \\ z_t(0, t) = z_t(L, t) = 0. \end{cases} \quad (5.28)$$

Multiplicando (5.27) por z e usando as desigualdade de Poincaré e de Young conseguimos ver que

$$\int_0^L z_x^2 dx \leq \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^L \xi_2 u^2 dx. \quad (5.29)$$

Analogamente, de (5.28) obtemos

$$\int_0^L z_{tx}^2 dx \leq \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^L \xi_2 u_t^2 dx. \quad (5.30)$$

Multiplicando (5.27) por u resulta em

$$\int_0^L z_x u_x dx = \int_0^L \xi_2 u^2 dx. \quad (5.31)$$

Então, compondo (5.9) com z e usando (5.31) vem que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left[\int_0^L \left(\rho u_t - \frac{\gamma_1 \tau_1}{\sqrt{k}} q_1 - \frac{\gamma_2 \tau_2}{\sqrt{D}} q_2 \right) z dx \right] \\ &\quad - \rho \int_0^L u_t z_t dx + (\lambda + 2\mu) \int_0^L \xi_2 u^2 dx + \int_0^L \left(\frac{\gamma_1 \tau_1}{\sqrt{k}} q_1 + \frac{\gamma_2 \tau_2}{\sqrt{D}} q_2 \right) z_t dx \end{aligned}$$

Da desigualdade de Young e de Poincaré resulta que

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \int_0^L \xi_2 u^2 dx &\leq -\frac{d}{dt} \left[\int_0^L \left(\rho u_t - \frac{\gamma_1 \tau_1}{\sqrt{k}} q_1 - \frac{\gamma_2 \tau_2}{\sqrt{D}} q_2 \right) z dx \right] \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^L \rho u_t^2 + 2 \frac{\gamma_1^2 \tau_1^2}{k} q_1^2 + \frac{\gamma_2^2 \tau_2^2}{D} q_2^2 dx + \frac{L^2}{\varepsilon \pi^2} \int_0^L z_{tx}^2 dx \end{aligned}$$

Associando esta última estimativa a (5.30) obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L u^2 \xi_2 dx &\leq \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\lambda + 2\mu} \int_0^L \left(-\rho u_t + \frac{\gamma_1 \tau_1}{\sqrt{k}} q_1 + \frac{\gamma_2 \tau_2}{\sqrt{D}} q_2 \right) z dx \right] \\ &\quad + \varepsilon C \int_0^L u_t^2 + q_1^2 + q_2^2 dx + C_\varepsilon \int_0^L u_t^2 \xi_2 dx. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Observe ainda que $\int_0^T \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\lambda + 2\mu} \int_0^L \left(-\rho u_t + \frac{\gamma_1 \tau_1}{\sqrt{k}} q_1 + \frac{\gamma_2 \tau_2}{\sqrt{D}} q_2 \right) z dx \right] dt$ pode ser estimado por $CE(0)$ usando (5.29).

Integrando (5.17), com $t \in [0, T]$, usando (5.24), (5.25), (5.26), (5.32) e as estimativas dos termos de “bracketing” $\int_0^T \frac{d}{dt}[\cdot] dt \leq CE(0)$, obtemos

$$(1 - \eta) \int_0^T E(t) dt \leq CE(0) + \varepsilon C \int_0^T E(t) dt + C_\varepsilon \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} q_1^2 + q_2^2 + u_t^2 dx dt.$$

Escolhendo $\varepsilon = \frac{1-\eta}{2C}$ resulta que $(1 - \eta - \varepsilon C) > 0$ e, portanto,

$$\int_0^T E(t) dt \leq CE(0) + C \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} q_1^2 + q_2^2 + u_t^2 dx dt.$$

Para $T \geq T_0$, T_0 suficientemente grande, juntamente com a conservação da energia segue que

$$E(0) \leq C \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} q_1^2 + q_2^2 + u_t^2 dx dt, \quad \forall T \geq T_0,$$

o que completa a prova do teorema 5.2.1. □

Como nosso principal resultado está relacionado a obter taxas de decaimento para o sistema dissipativo (5.1)-(5.3), o próximo passo é estender o resultado da desigualdade de observabilidade para o sistema de termodifusão não conservativo (5.1) conforme segue

Teorema 5.2.2 *Sejam $T \geq T_0$, T_0 suficientemente grande, e $M > 0$. Então existe uma constante $\bar{C} > 0$ tal que*

$$E(0) \leq \bar{C} \int_0^T \int_0^L \alpha_1(x) [q_1^2 + g_1^2(q_1)] + \alpha_2(x) [q_2^2 + g_2^2(q_2)] + \alpha_3(x) [u_t^2 + g_3^2(u_t)] dx dt \quad (5.33)$$

para toda solução $\{u, \theta_1, \theta_2, q_1, q_2\}$ de (5.1)-(5.3).

Demonstração:[Prova do teorema 5.2.2] Se os dados iniciais são nulos, não há nada o que provar. Então, suponha que os dados iniciais são não nulos e, por argumentos de contradição, suponha que o teorema 5.2.2 é falso. Logo, existe uma sequência de soluções,

$$\{u_\nu, \theta_{1\nu}, \theta_{2\nu}, q_{1\nu}, q_{2\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}},$$

de (5.1) associada a uma sequência de dados iniciais não nulos

$$\{u_{0\nu}, u_{1\nu}, \theta_{10\nu}, \theta_{20\nu}, q_{10\nu}, q_{20\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$$

satisfazendo

$$\frac{\int_0^T \int_0^L \alpha_1(x) [q_{1\nu}^2 + g_1^2(q_{1\nu})] + \alpha_2(x) [q_{2\nu}^2 + g_2^2(q_{2\nu})] + \alpha_3(x) [u_{t\nu}^2 + g_3^2(u_{t\nu})] dx dt}{E_\nu(0)} < \frac{1}{\nu}, \quad (5.34)$$

para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, existe uma sequência de problemas

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u_{tvt} - (\lambda + 2\mu)u_{\nu xx} + \gamma_1 \theta_{1\nu x} + \gamma_2 \theta_{2\nu x} + \alpha_3(x)g_3(u_{\nu t}) = 0 \\ c\theta_{1\nu t} + \sqrt{k}q_{1\nu x} + \gamma_1 u_{t\nu x} + d\theta_{1\nu t} = 0 \\ n\theta_{2\nu t} + \sqrt{D}q_{2\nu x} + \gamma_2 u_{t\nu x} + d\theta_{2\nu t} = 0 \\ \tau_1 q_{1\nu t} + \alpha_1(x)g_1(q_{1\nu}) + \sqrt{k}\theta_{1\nu x} = 0 \\ \tau_2 q_{2\nu t} + \alpha_2(x)g_2(q_{2\nu}) + \sqrt{D}\theta_{2\nu x} = 0 \\ u_\nu(0, t) = u_\nu(1, t) = \theta_{1\nu}(0, t) = \theta_{1\nu}(1, t) = \theta_{2\nu}(0, t) = \theta_{2\nu}(1, t) = 0 \\ u_\nu(x, 0) = u_{0\nu}(x), \quad u_{\nu t}(x, 0) = u_{1\nu}(x), \\ \theta_{1\nu}(x, 0) = \theta_{10\nu}(x), \quad \theta_{2\nu}(x, 0) = \theta_{20\nu}(x), \\ q_{1\nu}(x, 0) = q_{10\nu}(x), \quad q_{2\nu}(x, 0) = q_{20\nu}(x), \end{array} \right. \quad (5.35)$$

satisfazendo (5.34).

Defina $k_\nu := \sqrt{E_\nu(0)}$ e

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{u}_\nu := \frac{u_\nu}{k_\nu}, & \tilde{u}_{t\nu} := \frac{u_{t\nu}}{k_\nu}, \\ \tilde{\theta}_{1\nu} := \frac{\theta_{1\nu}}{k_\nu}, & \tilde{\theta}_{2\nu} := \frac{\theta_{2\nu}}{k_\nu}, \\ \tilde{q}_{1\nu} := \frac{q_{1\nu}}{k_\nu}, & \tilde{q}_{2\nu} := \frac{q_{2\nu}}{k_\nu}. \end{array} \right. \quad (5.36)$$

Não é difícil ver que $\{\tilde{u}_\nu, \tilde{\theta}_{1\nu}, \tilde{\theta}_{2\nu}, \tilde{q}_{1\nu}, \tilde{q}_{2\nu}\}$ é a solução de

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \tilde{u}_{tvt} - (\lambda + 2\mu) \tilde{u}_{\nu xx} + \gamma_1 \tilde{\theta}_{1\nu x} + \gamma_2 \tilde{\theta}_{2\nu x} + \frac{\alpha_3(x) g_3(\tilde{u}_{\nu t} k_\nu)}{k_\nu} = 0, \\ c \tilde{\theta}_{1\nu t} + \sqrt{k} \tilde{q}_{1\nu x} + \gamma_1 \tilde{u}_{t\nu x} + d \tilde{\theta}_{1\nu t} = 0, \\ n \tilde{\theta}_{2\nu t} + \sqrt{D} \tilde{q}_{2\nu x} + \gamma_2 \tilde{u}_{t\nu x} + d \tilde{\theta}_{2\nu t} = 0, \\ \tau_1 \tilde{q}_{1\nu t} + \frac{\alpha_1(x) g_1(\tilde{q}_{1\nu} k_\nu)}{k_\nu} + \sqrt{k} \tilde{\theta}_{1\nu x} = 0, \\ \tau_2 \tilde{q}_{2\nu t} + \frac{\alpha_2(x) g_2(\tilde{q}_{2\nu} k_\nu)}{k_\nu} + \sqrt{D} \tilde{\theta}_{2\nu x} = 0, \\ \tilde{u}_\nu(0, t) = \tilde{u}_\nu(L, t) = \tilde{\theta}_{1\nu}(0, t) = \tilde{\theta}_{1\nu}(L, t) = \tilde{\theta}_{2\nu}(0, t) = \tilde{\theta}_{2\nu}(L, t) = 0, \\ \tilde{u}_\nu(x, 0) = \frac{u_\nu(x, 0)}{k_\nu}, \quad \tilde{u}_{\nu t}(x, 0) = \frac{u_{\nu t}(x, 0)}{k_\nu}, \\ \tilde{\theta}_{1\nu}(x, 0) = \frac{\theta_{1\nu}(x, 0)}{k_\nu}, \quad \tilde{\theta}_{2\nu}(x, 0) = \frac{\theta_{2\nu}(x, 0)}{k_\nu}, \\ \tilde{q}_{1\nu}(x, 0) = \frac{q_{1\nu}(x, 0)}{k_\nu}, \quad \tilde{q}_{2\nu}(x, 0) = \frac{q_{2\nu}(x, 0)}{k_\nu}. \end{array} \right. \quad (5.37)$$

Da desigualdade (5.34) obtemos que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^L \alpha_1(x) \left[\tilde{q}_{1\nu}^2 + \frac{g_1^2(\tilde{q}_{1\nu} k_\nu)}{k_\nu^2} \right] + \alpha_2(x) \left[\tilde{q}_{2\nu}^2 + \frac{g_2^2(\tilde{q}_{2\nu} k_\nu)}{k_\nu^2} \right] + \alpha_3(x) \left[\tilde{u}_{\nu t}^2 + \frac{g_3^2(\tilde{u}_{\nu t} k_\nu)}{k_\nu^2} \right] dx dt = 0. \quad (5.38)$$

Pondo $\tilde{E}_\nu(t) := \frac{E_\nu(t)}{E_\nu(0)}$ vem que

$$\tilde{E}_\nu(0) = 1, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}, \quad (5.39)$$

e juntamente com o fato que E_ν é não crescente resulta que

$$\tilde{E}_\nu(t) \leq 1, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.40)$$

Para obter a contradição, considere $\{\bar{u}_\nu, \bar{\theta}_{1\nu}, \bar{\theta}_{2\nu}, \bar{q}_{1\nu}, \bar{q}_{2\nu}\}$ a solução do sistema conservativo

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \bar{u}_{\nu t} - (\lambda + 2\mu) \bar{u}_{\nu xx} + \gamma_1 \bar{\theta}_{1\nu x} + \gamma_2 \bar{\theta}_{2\nu x} = 0, \\ c \bar{\theta}_{1\nu t} + \sqrt{k} \bar{q}_{1\nu x} + \gamma_1 \bar{u}_{\nu tx} + d \bar{\theta}_{1\nu t} = 0, \\ n \bar{\theta}_{2\nu t} + \sqrt{D} \bar{q}_{2\nu x} + \gamma_2 \bar{u}_{\nu tx} + d \bar{\theta}_{2\nu t} = 0, \\ \tau_1 \bar{q}_{1\nu t} + \sqrt{k} \bar{\theta}_{1\nu x} = 0, \\ \tau_2 \bar{q}_{2\nu t} + \sqrt{D} \bar{\theta}_{2\nu x} = 0, \\ \bar{u}_\nu(0, t) = \bar{u}_\nu(L, t) = \bar{\theta}_{1\nu}(0, t) = \bar{\theta}_{1\nu}(L, t) = \bar{\theta}_{2\nu}(0, t) = \bar{\theta}_{2\nu}(L, t) = 0, \\ \bar{u}_\nu(x, 0) = \tilde{u}_\nu(x, 0), \quad \bar{u}_{\nu t}(x, 0) = \tilde{u}_{\nu t}(x, 0), \\ \bar{\theta}_{1\nu}(x, 0) = \tilde{\theta}_{1\nu}(x, 0), \quad \bar{\theta}_{2\nu}(x, 0) = \tilde{\theta}_{2\nu}(x, 0), \\ \bar{q}_{1\nu}(x, 0) = \tilde{q}_{1\nu}(x, 0), \quad \bar{q}_{2\nu}(x, 0) = \tilde{q}_{2\nu}(x, 0), \end{array} \right.$$

cuja energia será denotada por $\bar{E}_\nu(t)$. Observemos que

$$\bar{E}_\nu(t) = \bar{E}_\nu(0) = \tilde{E}_\nu(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (5.41)$$

Defina

$$\left\{ \begin{array}{l} U_\nu := \tilde{u}_\nu - \bar{u}_\nu, \\ \Theta_{1\nu} := \tilde{\theta}_{1\nu} - \bar{\theta}_{1\nu}, \\ \Theta_{2\nu} := \tilde{\theta}_{2\nu} - \bar{\theta}_{2\nu}, \\ Q_{1\nu} := \tilde{q}_{1\nu} - \bar{q}_{1\nu}, \\ Q_{2\nu} := \tilde{q}_{2\nu} - \bar{q}_{2\nu}. \end{array} \right. \quad (5.42)$$

Também é fácil ver que $\{U_\nu, \Theta_{1\nu}, \Theta_{2\nu}, Q_{1\nu}, Q_{2\nu}\}$ é a solução do seguinte sistema não homogêneo

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho U_{\nu tt} - (\lambda + 2\mu) U_{\nu xx} + \gamma_1 \Theta_{1\nu x} + \gamma_2 \Theta_{2\nu x} = -\alpha_3(x) \frac{g_3(\tilde{u}_{\nu t} k_\nu)}{k_\nu}, \\ c \Theta_{1\nu t} + \sqrt{k} Q_{1\nu x} + \gamma_1 U_{\nu tx} + d \Theta_{1\nu t} = 0, \\ n \Theta_{2\nu t} + \sqrt{D} Q_{2\nu x} + \gamma_2 U_{\nu tx} + d \Theta_{2\nu t} = 0, \\ \tau_1 Q_{1\nu t} + \sqrt{k} \Theta_{1\nu x} = -\alpha_1(x) \frac{g_1(\tilde{q}_{1\nu} k_\nu)}{k_\nu}, \\ \tau_2 Q_{2\nu t} + \sqrt{D} \Theta_{2\nu x} = -\alpha_2(x) \frac{g_1(\tilde{q}_{1\nu} k_\nu)}{k_\nu}, \\ U_\nu(0, t) = U_\nu(L, t) = \Theta_{1\nu}(0, t) = \Theta_{1\nu}(L, t) = \Theta_{2\nu}(0, t) = \Theta_{2\nu}(L, t) = 0, \\ U_\nu(x, 0) = U_{\nu t}(x, 0) = \Theta_{1\nu}(x, 0) = \Theta_{2\nu}(x, 0) = Q_{1\nu}(x, 0) = Q_{2\nu}(x, 0) = 0, \end{array} \right.$$

de energia denotada por $\mathcal{E}_\nu(t)$ que satisfaz

$$\mathcal{E}_\nu(0) = 0, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Além disso, a partir da definição de energia do sistema de termodifusão, se verifica que

$$2\mathcal{E}_\nu(t) \geq \int_{a_1}^{a_2} \rho U_{t\nu}^2 + \tau_1 Q_{1\nu}^2 + \tau_2 Q_{2\nu}^2 dx.$$

Usando (5.42) na expressão acima resulta em

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}_\nu(t) \geq & \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} \rho \tilde{u}_{t\nu}^2 + \tau_1 \tilde{q}_{1\nu}^2 + \tau_2 \tilde{q}_{2\nu}^2 dx}_{\geq 0} + \int_{a_1}^{a_2} \rho \bar{u}_{t\nu}^2 + \tau_1 \bar{q}_{1\nu}^2 + \tau_2 \bar{q}_{2\nu}^2 dx \\ & - 2 \int_{a_1}^{a_2} \rho \tilde{u}_{\nu t} \bar{u}_{t\nu} + \tau_1 \tilde{q}_{1\nu} \bar{q}_{1\nu} + \tau_2 \tilde{q}_{2\nu} \bar{q}_{2\nu} dx. \end{aligned} \quad (5.43)$$

A última integral da estimativa acima pode ser estimada usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz como segue

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{a_2} \rho \tilde{u}_{\nu t} \bar{u}_{t\nu} + \tau_1 \tilde{q}_{1\nu} \bar{q}_{1\nu} + \tau_2 \tilde{q}_{2\nu} \bar{q}_{2\nu} dx \\ \leq & \left(\int_{a_1}^{a_2} \rho \tilde{u}_{t\nu}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{a_1}^{a_2} \rho \bar{u}_{\nu t}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{a_1}^{a_2} \tau_1 \tilde{q}_{1\nu}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{a_1}^{a_2} \tau_1 \bar{q}_{1\nu}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & + \left(\int_{a_1}^{a_2} \tau_2 \tilde{q}_{2\nu}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{a_1}^{a_2} \tau_2 \bar{q}_{2\nu}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.44)$$

e cada um dos termos

$$\left(\int_{a_1}^{a_2} \rho \bar{u}_{\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \left(\int_{a_1}^{a_2} \tau_1 \bar{q}_{1\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \left(\int_{a_1}^{a_2} \tau_2 \bar{q}_{2\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

pode ser estimado por $(2\bar{E}_\nu(t))^{\frac{1}{2}} = (2\bar{E}_\nu(0))^{\frac{1}{2}} = (2\tilde{E}_\nu(0))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. Então, de (5.43) e (5.44) chegamos a

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{a_2} \rho \bar{u}_{t\nu}^2 + \tau_1 \bar{q}_{1\nu}^2 + \tau_2 \bar{q}_{2\nu}^2 dx \\ & \leq 2\mathcal{E}_\nu(t) + 2\sqrt{2} \left[\left(\int_{a_1}^{a_2} \rho \tilde{u}_{\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{a_1}^{a_2} \tau_1 \tilde{q}_{1\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{a_1}^{a_2} \tau_2 \tilde{q}_{2\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{E}_\nu(t) \leq \sup_{t \in [0, T]} \mathcal{E}_\nu(t)$, integrando a expressão acima sobre $[0, T]$, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} \rho \bar{u}_{t\nu}^2 + \tau_1 \bar{q}_{1\nu}^2 + \tau_2 \bar{q}_{2\nu}^2 dx dt \\ & \leq 2T \sup_{t \in [0, T]} \mathcal{E}_\nu(t) + 2\sqrt{2} \int_0^T \left[\left(\int_{a_1}^{a_2} \rho \tilde{u}_{\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{a_1}^{a_2} \tau_1 \tilde{q}_{1\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{a_1}^{a_2} \tau_2 \tilde{q}_{2\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] dt. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Cálculos análogos aqueles da prova do lema 5.1.3 nos fornecem a identidade

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_\nu(t) = - \int_0^L \alpha_1(x) \frac{g_1(\tilde{q}_{1\nu} k_\nu)}{k_\nu} Q_{1\nu} + \alpha_2(x) \frac{g_2(\tilde{q}_{2\nu} k_\nu)}{k_\nu} Q_{2\nu} + \alpha_3(x) \frac{g_3(\tilde{u}_{\nu t} k_\nu)}{k_\nu} U_{\nu t} dx$$

que uma vez integrada em $(0, t)$, $t \in (0, T]$ e aplicada a desigualdade de Hölder, acarreta em

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\nu(t) & \leq \underbrace{\mathcal{E}_\nu(0)}_{=0} + C \int_0^t \left(\int_0^L \alpha_1 \frac{g_1^2(\tilde{q}_{1\nu} k_\nu)}{k_\nu^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L \alpha_1 Q_{1\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad + \left(\int_0^L \alpha_2 \frac{g_2^2(\tilde{q}_{2\nu} k_\nu)}{k_\nu^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L \alpha_2 Q_{2\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^L \alpha_3 \frac{g_3^2(\tilde{u}_{\nu t} k_\nu)}{k_\nu^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L \alpha_3 U_{\nu t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} ds. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Assim, estendendo o intervalo de integração com $s \in [0, T]$ em (5.46), tomando o supremo e usando a limitação de $\tilde{E}_\nu(t)$ e $\bar{E}_\nu(t)$ dadas por (5.40) e (5.41) conseguimos

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathcal{E}_\nu(t) \leq C \int_0^T \left(\int_0^L \alpha_1 \frac{g_1^2(\tilde{q}_{1\nu} k_\nu)}{k_\nu^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^L \alpha_2 \frac{g_2^2(\tilde{q}_{2\nu} k_\nu)}{k_\nu^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^L \alpha_3 \frac{g_3^2(\tilde{u}_{\nu t} k_\nu)}{k_\nu^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Devido a (5.38) e a estimativa acima segue que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[\sup_{t \in [0, T]} \mathcal{E}_\nu(t) \right] = 0.$$

Logo, de (5.38), (5.45), (5.46) e da identidade acima podemos concluir que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} \rho \bar{u}_{\nu t}^2 + \tau_1 \bar{q}_{1\nu}^2 + \tau_2 \bar{q}_{2\nu}^2 dx dt = 0. \quad (5.47)$$

Mas, de (5.39), (5.41) e do teorema 5.2.1, temos que

$$1 = \tilde{E}_\nu(0) = \bar{E}_\nu(0) \leq C \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} \rho \bar{u}_{\nu t}^2 + \tau_1 \bar{q}_{1\nu}^2 + \tau_2 \bar{q}_{2\nu}^2 dx dt.$$

Tomando o limite na expressão acima quando ν tende ao infinito e usando (5.47) resulta que

$$1 \leq 0,$$

o que é um absurdo. Assim encerramos a prova do teorema 5.2.2.

□

5.3 Taxas de Decaimento

Nesta seção utilizaremos o método desenvolvido por Lasiecka and Tataru [29] para obter taxas de decaimento para o sistema de termodifusão (5.1)-(5.3). Então, defina

$$h(x) = h_1(x) + h_2(x) + h_3(x)$$

com $h_i(0) = 0$, $i = 1, 2, 3$, onde h_i são funções côncavas e estritamente crescentes satisfazendo

$$h_i(sg_i(s)) \geq s^2 + g_i^2(s), \quad \text{para } |s| \leq 1. \quad (5.48)$$

Estas funções podem ser construídas a partir das hipóteses sobre as funções g_i , $i = 1, 2, 3$.

O próximo passo é considerar

$$r(x) = h\left(\frac{x}{LT}\right).$$

Como r é monótona crescente, vem que $C'I + r$ é invertível para qualquer que seja a constante $C' \geq 0$. Então, dado $M > 0$, defina

$$p(x) = (C'I + r)^{-1}(Mx)$$

a qual é uma função positiva, contínua e estritamente crescente com $p(0) = 0$.

Finalmente, considere

$$q(x) = x - (I + p)^{-1}(x). \quad (5.49)$$

O seguinte resultado é devido a Lasiecka and Tataru [29].

Lema 5.3.1 *Considere as funções p e q como definidas acima. Se (s_n) é uma sequência de números positivos satisfazendo*

$$s_{m+1} + p(s_{m+1}) \leq s_m,$$

então $s_m \leq S(m)$ onde $S(t)$ é a solução da equação diferencial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0, \\ S(0) = s_0. \end{cases} \quad (5.50)$$

Além disso, como $p(x) > 0$, para $x > 0$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0.$$

As taxas de decaimento são dadas pelo seguinte teorema

Teorema 5.3.2 *Considerando as hipóteses 5.1.2 e 5.1.1, se os dados iniciais são limitados, então existe $T_0 > 0$ tal que a energia $E(t)$ de (5.1)-(5.3) satisfaz*

$$E(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right), \quad \forall t > T_0,$$

com $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$, onde $S(t)$ é a solução da seguinte equação diferencial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0, \\ S(0) = E(0). \end{cases}$$

e q é dada em (5.49).

Observação 5.3.3 Se $g_i(s) = s$ a taxa de decaimento é exponencial, isto é, existem constantes $C > 0$ e $\gamma > 0$ tais que

$$E(t) \leq Ce^{-\gamma t}E(0).$$

Demonstração:[Prova do teorema 5.3.2] Considere $\{u, \theta_1, \theta_2, q_1, q_2\}$ a solução de (5.1)-(5.3) com dados iniciais limitados $\{u_0, u_1, \theta_{10}, \theta_{20}, q_{10}, q_{20}\}$. Defina

$$\Pi_1 = \{(x, t) \in (0, L) \times (0, T); |q_1(x, t)| > 1\} \text{ e } \Gamma_1 = (0, L) \times (0, T) \setminus \Pi_1,$$

$$\Pi_2 = \{(x, t) \in (0, L) \times (0, T); |q_2(x, t)| > 1\} \text{ e } \Gamma_2 = (0, L) \times (0, T) \setminus \Pi_2,$$

$$\Pi_3 = \{(x, t) \in (0, L) \times (0, T); |u_t(x, t)| > 1\} \text{ e } \Gamma_3 = (0, L) \times (0, T) \setminus \Pi_3.$$

Tendo em mente a desigualdade de observabilidade dada pelo teorema 5.2.2, estimaremos o lado direito de (5.33). Primeiramente, observe que

$$\int_0^T \int_0^L \alpha_1(x)(q_1^2 + g_1^2(q_1))dxdt = \int_{\Pi_1} \alpha_1(x)(q_1^2 + g_1^2(q_1))dxdt + \int_{\Gamma_1} \alpha_1(x)(q_1^2 + g_1^2(q_1))dxdt \quad (5.51)$$

A Primeira integral do lado direito de (5.51) é estimada por

$$\int_{\Pi_1} \alpha_1(x)(q_1^2 + g_1^2(q_1))dxdt \leq (k_1^{-1} + K_1) \int_{\Pi_1} \alpha_1(x)q_1g_1(q_1)dxdt, \quad (5.52)$$

e a segunda, utilizando as propriedades da função h_1 , estimamos conforme segue

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \alpha_1(x)(q_1^2 + g_1^2(q_1)) dx dt &\leq \int_{\Gamma_1} \alpha_1(x) h_1(q_1 g_1(q_1)) dx dt \\
&\leq \int_{\Gamma_1} (1 + \|\alpha_1\|_\infty) h_1 \left(\frac{\alpha_1(x)}{1 + \|\alpha_1\|_\infty} q_1 g_1(q_1) \right) dx dt \\
&\leq (1 + \|\alpha_1\|_\infty) \int_{\Gamma_1} h_1(\alpha_1(x) q_1 g_1(q_1)) dx dt \\
&\leq (1 + \|\alpha_1\|_\infty) LT \frac{1}{LT} \int_0^T \int_0^L h_1(\alpha_1(x) q_1 g_1(q_1)) dx dt \\
&\leq (1 + \|\alpha_1\|_\infty) LT h_1 \left(\frac{1}{LT} \int_0^T \int_0^L \alpha_1(x) q_1 g_1(q_1) dx dt \right),
\end{aligned} \tag{5.53}$$

onde o último passo é devido a desigualdade de Jensen. Então, (5.51), (5.52) e (5.53) implicam

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L \alpha_1(x)(q_1^2 + g_1^2(q_1)) dx dt \\
\leq (k_1^{-1} + K_1) \int_0^T \int_0^L \alpha_1(x) q_1 g_1(q_1) dx dt \\
+ (1 + \|\alpha_1\|_\infty) LT h_1 \left(\frac{1}{LT} \int_0^T \int_0^L \alpha_1(x) q_1 g_1(q_1) dx dt \right).
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Analogamente, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L \alpha_2(x)(q_2^2 + g_2^2(q_2)) dx dt \\
\leq (k_2^{-1} + K_2) \int_0^T \int_0^L \alpha_2(x) q_2 g_2(q_2) dx dt \\
+ (1 + \|\alpha_2\|_\infty) LT h_2 \left(\frac{1}{LT} \int_0^T \int_0^L \alpha_2(x) q_2 g_2(q_2) dx dt \right)
\end{aligned} \tag{5.55}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L \alpha_3(x)(u_t^2 + g_3^2(u_t)) dx dt \\ \leq (k_3^{-1} + K_3) \int_0^T \int_0^L \alpha_3(x) u_t g_3(u_t) dx dt \\ + (1 + \|\alpha_3\|_\infty) L T h_3 \left(\frac{1}{L T} \int_0^T \int_0^L \alpha_3(x) u_t g_3(u_t) dx dt \right). \end{aligned} \quad (5.56)$$

Do teorema 5.2.2 e das estimativas (5.54), (5.55) e (5.56) chegamos a

$$\begin{aligned} E(T) \leq \bar{C} \sum_{i=1}^3 (k_i^{-1} + K_i) \int_0^T \int_0^L \alpha_1(x) q_1 g_1(q_1) + \alpha_2(x) q_2 g_2(q_2) + \alpha_3(x) u_t g_3(u_t) dx dt \\ M^{-1} r \left(\int_0^T \int_0^L \alpha_1(x) q_1 g_1(q_1) + \alpha_2(x) q_2 g_2(q_2) + \alpha_3(x) u_t g_3(u_t) dx dt \right), \end{aligned}$$

onde

$$M = \frac{1}{\bar{C} L T \max_{i=1,2,3} \{(1 + \|\alpha_i\|_\infty)\}}.$$

Fixando

$$C' := \frac{\sum_{i=1}^3 (k_i^{-1} + K_i)}{L T \max_{i=1,2,3} \{(1 + \|\alpha_i\|_\infty)\}}$$

e usando o lema 5.1.3 chegamos a

$$\begin{aligned} ME(T) &\leq C' \int_0^T \int_0^L \alpha_1(x) q_1 g_1(q_1) + \alpha_2(x) q_2 g_2(q_2) + \alpha_3(x) u_t g_3(u_t) dx dt \\ &\quad + r \left(\int_0^T \int_0^L \alpha_1(x) q_1 g_1(q_1) + \alpha_2(x) q_2 g_2(q_2) + \alpha_3(x) u_t g_3(u_t) dx dt \right) \\ &= (C' I + r) \left(\int_0^T \int_0^L \alpha_1(x) q_1 g_1(q_1) + \alpha_2(x) q_2 g_2(q_2) + \alpha_3(x) u_t g_3(u_t) dx dt \right) \\ &= (C' I + r) \left(\int_0^T -\frac{d}{dt} E(t) dt \right) \\ &= (C' I + r) (E(0) - E(T)). \end{aligned}$$

As propriedades da função p apresentadas no início desta seção combinadas

a última estimativa nos fornecem

$$E(T) + p(E(T)) \leq E(0)$$

Trocando T e 0 por $(m+1)T$ e mT , respectivamente, na desigualdade acima obtemos

$$E((m+1)T) + p(E((m+1)T)) \leq E(mT), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Aplicando o lema 5.3.1 para $s_m = E(mT)$ resulta que

$$E(mT) \leq S(m), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Daí, para $t = mT + \tau$, $\tau \in [0, T)$, devido ao lema 5.1.3 e o fato que $S(\cdot)$ é dissipativo chegamos a

$$E(t) \leq E(T) \leq S(m) \leq S\left(\frac{t-\tau}{T}\right) \leq S\left(\frac{t}{T} - 1\right),$$

o que completa a prova do teorema 5.3.2.

□

Observação 5.3.4 *Exemplos para as não linearidades g_i 's com suas respectivas taxas explícitas para o decaimento podem ser encontrados em [12].*

ÍNDICE

Índice conjugado, 9

Desigualdade

de Gronwall, 19

de Young, 9

de Hölder, 9

de Jensen, 10

de Minkowski, 9

Distribuição, 8

Distribuições vetoriais, 14

Du Bois Raymond, 10

Espaço

$C([0, T]; E)$, 15

$L^2(0, T; X)$, 15

$W(0, T; X, Y)$, 15

$\mathcal{D}'(0, T; X)$, 14

$\mathcal{D}(0, T; X)$, 14

$L^p(\Omega)$, 8

das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$, 8

de Sobolev, 11

reflexivo, 13

das funções teste, 7

separável, 13

Função

teste, 7

função

escalarmente contínua, 31

fortemente mensurável, 16

integrável à Bochner, 16

simples, 16

grupo unitário, 27

Injeção canônica, 12

Lema

de Gronwall, 19

de Lions, 21

operador

dissipativo, 25

hemicontínuo, 29

m-dissipativo, 25

maximal monótono, 29

monótono, 29

semigrupo de operador linear, 24

solução forte, 28

solução fraca, 28

Suporte de uma função, 7

Teorema

de Aubin-Lions, 21

de Lumer-Phillips, 26

de Stone, 27

Convergência Dominada de Lebesgue, 10

de Representação de Riesz, 19

Lax-Milgram, 20

Teorema da Regularidade Elítica, 21

Topologia Fraca, 12

Topologia fraca *, 13

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. Aouadi, Exponential stability in hyperbolic thermoelastic diffusion problem with second sound, *Int. J. Differ. Equ.*, 2011.
- [2] F. Alabau-Boussouira e M. Léautaud, Indirect controllability of locally coupled wave-type systems and applications. *J. Math. Pures Appl.*, (9)**99**, 2013, no. 5, 544-576.
- [3] F. Alabau-Boussouira, J. E. Muñoz Rivera e D. S. Almeida Júnior, Stability to weak dissipative Bresse system. *J. Math. Anal. Appl.*, **374**, 2011, no. 2, 481-498.
- [4] V. Barbu, Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. Translated from the Romanian. Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucharest; Noordhoff International Publishing, Leiden, 1976, 352 pp.
- [5] C. A. Bortot, M. M. Cavalcanti, W. J. Corrêa, V. N. Domingos Cavalcanti, Uniform decay rate estimates for Schrödinger and plate equations with nonlinear locally distributed damping. *J. Differential Equations*, **254**, 2013, no. 9, 3729-3764.
- [6] H. Brézis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50). North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973. vi+183 pp.
- [7] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications *Collection Science Sup*, Dunod, Paris, 2005.
- [8] M. M. Cavalcanti e V. N. Domingos Cavalcanti, Iniciação à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev, Eduem, Maringá, Brasil, 2009.
- [9] M. M. Cavalcanti e V. N. Domingos Cavalcanti, A integral de Bochner, notas de aula, Brasil.

-
- [10] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, F. A. Falcão Nascimento, I. Lasiecka e J. H. Rodrigues, Uniform decay rates for the energy of Timoshenko system with the arbitrary speeds of propagation and localized nonlinear damping. *Z. Angew. Math. Phys.*, **65**, 2014, no. 6, 1189-1206.
- [11] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti e V. Komornik, Introdução à análise funcional, Eduem, Maringá, Brasil, 2011.
- [12] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, I. Lasiecka, Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction, *J. Differential Equations*, **236**, 2007, no. 2, 407-459.
- [13] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, A. Rocha, e J. A. Soriano, Exact controllability of a second-order integro-differential equation with a pressure term. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 1998, no. 9, 18 pp.
- [14] M. M. Cavalcanti, A. Khemmoudj e M. Medjden, Uniform stabilization of the damped Cauchy-Ventcel problem with variable coefficients and dynamic boundary conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, **328**, 2007, no. 2, 900-930.
- [15] W. Charles, J. A. Soriano, F. A. Falcão Nascimento, e J. H. Rodrigues, Decay rates for Bresse system with arbitrary nonlinear localized damping. *Journal of Differential Equations*, **255**, 2013, no. 8, 2267-2290.
- [16] W. Charles, J. A. Soriano e R. A. Schulz, Asymptotic stability for Bresse system *J. Math. Anal. Appl.*, **412**, 2014, no. 1, 369-380.
- [17] E. Coddington e N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, Mac Graw-Hill, New York, 1955.
- [18] R. Dautray e J. L. Lions, Analyse Mathématique et Calcul Numérique Pour les Sciences et les Techniques, Vol. 8 (Evolution: semi-groupe, variationnel), Masson, Paris, 1984.
- [19] C. Fabre, Comportement au voisinage du bord de quelques équations d'évolution linéaire. Thèse de Doctorat d l'université Pierre et Marie Curie, Paris, 1990.
- [20] C. Fabre e J.-P. Puel, Behavior near the boundary for solutions of the wave equation. *J. Differential Equations*, **106**, 1993, no. 1, 186-213.
- [21] L. H. Fatori e R. N. Monteiro, The optimal decay rate for a weak dissipative Bresse system. *Appl. Math. Lett.*, **25**, 2012, no. 3, 600-604.

-
- [22] L. H. Fatori e J. E. Muñoz Rivera, Rates of decay to weak thermoelastic Bresse system. *IMA J. Appl. Math.*, **75**, 2010, no. 6, 881-904.
- [23] H. Frid, Introdução a Integral de Lebesgue, IMCA - Instituto de Matemáticas y Ciéncias Afines, Universidad Nacional de Ingeniería, Peru.
- [24] A. M. Gomes, Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às equações de Evolução, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2ed., 2000.
- [25] L. F. Ho, Exact controlability of the one-dimensional wave equations with locally distributed control. *SIAM J. Control and Optimization*, **28**, 1990, no 3, 733-748.
- [26] B. V. Kapitonov e M. A. Raupp, Exact boundary controllability in problems of transmission for the system of electromagneto-elasticity, *Math. Methods Appl. Sci.*, **24**, 2001, no. 4, 193-207.
- [27] V. Komornik, Exact controllability in short time for the wave equation. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **6**, 1989, no. 2, 153-164.
- [28] H. Lange e H. Teismann, Controllability of the nonlinear Schrödinger equation in the vicinity of the ground state, *Math. Methods Appl. Sci.*, **30**, 2007, no. 13, 1483-1505.
- [29] I. Lasiecka e D. Tataru, Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping. *Differential and Integral Equations*, **6**, 1993, no. 3, 507-533.
- [30] G. Lebeau e E. Zuazua, Null-controllability of a system of linear thermoelasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **141**, 1998, no. 4, 297-329.
- [31] J.-L. Lions, Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1. *Recherches en Mathématiques Appliquées*, **8**, 1988, Masson, Paris.
- [32] J.-L. Lions, Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems, *SIAM Rev.* **30**, 1988, no. 1, 1-68.
- [33] J.-L. Lions, Remarques sur la Contrôlabilité Approchée, Jornadas Hispano-Francesas sobre Controle de Sistemas Distribuídos, University of Málaga, Málaga, Spain, p.77-87, 1991.
- [34] J.-L. Lions e E. Magenes, Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Vol.1, Springer Verlag, Berlin, 1972.

-
- [35] Z. Liu e B. Rao, Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system, *Z. Angew. Math. Phys.*, **60**, 2009, no. 1, 54-69.
- [36] Z. Liu e S. Zheng, Semigroups associated with dissipative systems. *Research Notes in Mathematics*, **389**, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.
- [37] Y. Liu e M. Reissig, Models of thermodiffusion in 1D. *Math. Meth. Appl. Sci.*, **37**, 2014, no. 6, 817-837.
- [38] L. A. Medeiros, Exact controllability for a Timoshenko model of vibrations of beams. *Adv. Math. Sci. Appl.*, **2**, 1993, no. 1, 47-61.
- [39] L. A. Medeiros, Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações, Textos de Métodos Matemáticos, Vol. 16, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1983.
- [40] L. A. Medeiros e E. A. de Mello, A Integral de Lebesgue, Textos de Métodos Matemáticos, Vol. 18, ed. 4, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1989.
- [41] M. Milla Miranda, Contrôlabilité exacte de l'équation des ondes dans des domaines non cylindriques., *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **317**, 1993, no. 5, 495-499.
- [42] M. Milla Miranda, Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev, Instituto de Matemática - UFRJ.
- [43] J. E. Muñoz Rivera, Teoria de Distribuições e Equações Diferenciais Parciais. *Textos Avançados*, LNCC, Petrópolis - RJ, 1999.
- [44] W. Nowacki, Certain problems of thermodiffusion in solids. *Arch. Mech.*, **23**, 1971, 731-754.
- [45] W. Nowacki, Dynamical problem of thermodiffusion in solids. I, II, III. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Tech.*, **22**, 1974, 55-64; *ibid.* **22**, 1974, 205-211; *ibid.* **22**, 1974, 257-266.
- [46] Z. S. Olesiak, Problems of thermodiffusion of deformable solids, *Material Science*, **34**, 1998, no. 3.
- [47] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, *Springer-Verlag*, New York, 1983.
- [48] J. S. Prates Filho, Estabilização de um sistema de Timoshenko, Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1993.

-
- [49] Y. Qin, M. Zhang, B. Feng e H. Li, Global existence and asymptotic behavior of solutions for thermodiffusion equations. *J. Math. Anal. Appl.*, **408**, 2013, no. 1, 140-153.
- [50] R. Racke, Thermoelasticity with second sound - exponential stability in linear and non-linear 1-d. *Math. Methods Appl. Sci.*, **25**, 2002, no. 5, 409-441.
- [51] H. H. Sherief, F. A. Hamza e H. A. Saleh, The theory of generalized thermoelastic diffusion. *International Journal of Engineering Science*, **42**, 2004, no. 5-6, 591-608.
- [52] J. A. Soriano, J. E. Muñoz Rivera e L. H. Fatori, Bresse system with indefinite damping, *J. Math. Anal. Appl.*, **387**, 2011, no. 1, 284-290.
- [53] L. R. T. Tébou, Stabilization of the wave equation with localized nonlinear damping. *Journal of Differential Equations*, **145**, 1998, no. 2, 502-524.
- [54] M. Zhang e Yuming Qin, Global existence and uniform decay for the one-dimensional model of thermodiffusion with second sound. *Boundary Value Problems*, 2013, 2013:222.

