UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

VICTOR HUGO LOURENÇO DA ROCHA

Estabilidade de Lyapunov em fibrados

Maringá-PR
2016

VICTOR HUGO LOURENÇO DA ROCHA

Estabilidade de Lyapunov em fibrados

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas, da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.
Área de concentração: Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Dr. Carlos José Braga Barros.

Maringá

2016

Estabilidade de Lyapunov em fibrados

Victor Hugo Lourenço da Rocha

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Carlos José Braga Barros - UEM ....
(Orientador)

Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos - IME/USP ....

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin - UNICAMP ....

Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali - UEM ....

Prof. Dr. Josiney Alves de Souza - UEM ....

Maringá

2016

2 E te lembrarás de todo o caminho pelo qual o SENHOR, teu Deus, te guiou no
deserto estes quarenta anos, para te humilhar, para te provar, para saber o que estava no teu
coração, se guardarias os seus mandamentos ou não. **3** E te humilhou, e te deixou ter fome,
e te sustentou com o maná, que tu não conheceste, nem teus pais o conheceram, para te dar a
entender que o homem não viverá só de pão, mas que de tudo o que sai da boca do SENHOR
viverá o homem. **5** Sabes, pois, no teu coração que, como um homem castiga a seu filho,
assim te castiga o SENHOR, teu Deus. **6** E guarda os mandamentos do SENHOR, teu Deus,
para andares nos seus caminhos e para o temeres. **11** Guarda-te que não te esqueças do
SENHOR, teu Deus, deixando de guardar os seus mandamentos, e os seus juízos, e os seus
estatutos que hoje te ordeno, **12** para não suceder que, havendo tu comido e estando farto,
e havendo edificado boas casas e habitando-as, **13** e se tiverem aumentado os teus gados e
os teus rebanhos, e se acrescentar a prata e o ouro, e se multiplicar tudo quanto tens, **14**
se não eleve o teu coração e te esqueças do SENHOR, teu Deus, que te tirou da terra do
Egito, da casa da servidão, **15** que te guiou por aquele grande e terrível deserto de serpentes
ardentes, e de escorpiões, e de terra seca, em que não havia água, e tirou água para ti da
rocha do seixal, **16** que no deserto te sustentou com maná, que teus pais não conheceram,
para te humilhar e para te provar, para no fim te fazer bem, **17** e digas no teu coração: a
minha força e a fortaleza da minha mão me adquiriram este poder. **18** Antes, te lembrarás
do SENHOR, teu Deus, que ele é o que te dá força para adquirires poder, para confirmar a
sua aliança que jurou a teus pais, como se vê neste dia.

Trecho do Capítulo 8 do livro de Deuteronômio, Bíblia Sagrada

A minha família.

Agradecimentos

Agradeço ao meu Senhor Jesus Cristo, o Deus todo-poderoso, por tornar possível o que era impossível para mim.

Agradeço aos meus pais, Marli e Ademir, e à minha avó Clarice, pelo apoio incondicional em todos os momentos da minha vida.

Agradeço ao Professor Carlos José Braga Barros pela sobre-excelente orientação no mestrado e no doutorado. Agradeço ao Professor Josiney Alves de Souza pela sua cooperação ao longo do mestrado e do doutorado e pelas valiosas sugestões e correções propostas ao participar da banca examinadora desta tese. Agradeço também aos demais membros da banca examinadora, Professores Eduardo do Nascimento Marcos, Fábio Matheus Amorin Natali e Luiz Antonio Barrera San Martin, pelas valiosas sugestões e correções apresentadas.

Agradeço aos meus amigos do doutorado. Em especial, agradeço ao amigo e companheiro de pesquisa Hélio Tozatti.

Agradeço à secretária Lúcia Kato pelo apoio ao longo do mestrado e do doutorado.

Agradeço à CAPES e à Fundação Araucária pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos resultados sobre estabilidade de Lyapunov para ações de semigrupos em fibrados principais e associados. Introduzimos o conceito de aplicação que preserva órbitas e estudamos o comportamento de conjuntos estáveis e atratores por essas aplicações. Os resultados obtidos para aplicações que preservam órbitas são aplicados para estudar conjuntos estáveis e atratores no contexto de fibrados principais e associados. Apresentamos também alguns resultados que relacionam conjuntos estáveis e atratores no espaço total de um fibrado associado com os respectivos conceitos nas fibras. Por fim, relacionamos os conceitos de conjuntos estáveis e atratores para a seção zero de um fibrado vetorial no contexto de semifluxos n-dimensionais e sistemas de controle.

Palavras-chave: Estabilidade de Lyapunov, atração, ações de semigrupos, aplicações que preservam órbitas, fibrados principais e associados.

Abstract

In this work, we present some results on Lyapunov stability for semigroup actions on principal and associated bundles. We introduce the concept of orbit preserving map and study the behavior of stable sets and attractors under such maps. We use the results obtained for orbit preserving maps to study stable sets and attractors in the setting of principal and associated bundles. In addition, we present some result that relate stable sets and attractors in the total space of an associated bundle to the corresponding concepts in the fibers. Finally, we relate the concepts of stable sets and attractors for the zero section of a vector bundle in the context of n-time semiflows and control systems.

Key-words: Lyapunov stability, attraction, semigroup actions, orbit preserving maps, principal and associated bundles.

Sumário

Introdução

Em 1892, o matemático russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) defendeu sua tese de doutorado intitulada "*A general task about the stability of motion*". Com uma notação um pouco diferente da atual, ele introduziu os conceitos de estabilidade que hoje conhecemos por *estabilidade de Lyapunov*. A teoria de estabilidade de Lyapunov tornou-se clássica na literatura. Em [5, 6], Bhatia e Szegö apresentam um estudo aprofundado sobre estabilidade de Lyapunov para fluxos contínuos em espaços métricos. Essa teoria também foi largamente estudada no contexto de semifluxos contínuos e discretos em espaços topológicos ([4, 23]). Recentemente, Braga Barros, Souza e Rocha em [16] desenvolveram uma teoria de estabilidade de Lyapunov para ações de semigrupos em espaços topológicos que generaliza e unifica as teorias de estabilidade de Lyapunov para fluxos e semifluxos.

Uma vez que a teoria de estabilidade de Lyapunov está posta no contexto de ações de semigrupos em espaços topológicos, surge a possibilidade de se relacionar essa teoria com outras questões já consideradas nesse contexto. Em [53], Souza, Tozatti e Rocha estudam a relação entre estabilidade de Poisson, controlabilidade e estabilidade de Lyapunov no contexto de ações de semigrupos. Já em [19], Braga Barros, Souza e Rocha relacionam a teoria de atratores de Conley para ações de semigrupos em espaços topológicos (veja [12]) com a teoria de estabilidade de Lyapunov.

Fibrados principais e associados aparecem frequentemente como espaços de fase de ações de semigrupos. Por exemplo, se G é um grupo de Lie e L é um subgrupo fechado de G, então a projeção $\pi : G \longrightarrow G/L$ pode ser vista como um fibrado principal. Além disso, se $L_1 \subset L_2$ são dois subgrupos fechados de G tais que L_1 é normal em L_2, então a fibração equivariante $\rho : G/L_1 \longrightarrow G/L_2$ dada por $\rho(gL_1) = gL_2$ pode ser vista como um fibrado associado. Esses fibrados são considerados no estudo de ações de subsemigrupos de grupos de Lie (veja [41]). Outros exemplos nesse sentido são fibrados vetoriais e fibrados flag (veja [10, 44, 38, 42]). Questões relativas à dinâmica da ação de um semigrupo, tais como controlabilidade, recorrência e transitividade por cadeias e decomposições de Morse, foram estudadas no contexto de ações de semigrupos em fibrados principais e associados (veja [11, 14, 15, 49]).

Neste trabalho, apresentamos um estudo de estabilidade de Lyapunov para ações de semigrupos em fibrados principais e associados. Consideramos fibrados principais e associados que admitem famílias admissíveis de coberturas abertas. Espaços topológicos que admitem famílias admissíveis de coberturas abertas (veja a Seção 1.2) formam uma classe de espaços topológicos que possuem propriedades semelhantes às propriedades dos espaços métricos, de modo que o estudo da dinâmica da ação de um semigrupo em um espaço que admite uma família admissível de coberturas abertas pode ser desenvolvido.

No primeiro capítulo, elucidamos, de maneira detalhada, os elementos da teoria de ações de semigrupos que são necessários ao entendimento desta tese. Na primeira seção, fixamos a notação empregada ao longo desta tese e apresentamos os conceitos básicos da teoria, tais como órbitas, conjuntos invariantes e subsemigrupos. Apresentamos também diversos exemplos de objetos matemáticos que são, na verdade, definidos em termos da ação de um semigrupo. A segunda seção trata dos espaços de Tychonoff, que são os espaços de Hausdorff que admitem famílias admissíveis de coberturas abertas. Nessa seção, apresentamos os conceitos e os resultados básicos da teoria de espaços que admitem famílias admissíveis de coberturas abertas e apresentamos alguns exemplos. Apresentamos ainda alguns resultados envolvendo redes em espaços de Tychonoff que são decorrentes da existência de uma família admissível de coberturas abertas. Na terceira seção, apresentamos os conceitos de conjuntos limite, prolongamentos e conjuntos limite prolongacionais para ações de semigrupos. Esses objetos dinâmicos são as ferramentas básicas do estudo da dinâmica da ação de um semigrupo. Começamos apresentando a definição de conjuntos limite para a ação de um semigrupo em um espaço de Tychonoff. A definição é ilustrada com diversos exemplos. Os conjuntos limite para ações de semigrupos dependem de uma família de subconjuntos do semigrupo em questão. Alguns resultados precisam de hipóteses adicionais sobre a família de subconjuntos do semigrupo para serem obtidos. Apresentamos as hipóteses adicionais que são utilizadas ao longo desta tese e mostramos exemplos de famílias de subconjuntos de semigrupos que satisfazem tais hipóteses. Apresentamos também condições suficientes para a invariância dos conjuntos limite. Na sequência, apresentamos as definições de prolongamentos e conjuntos limite prolongacionais para ações de semigrupos. Esses conceitos dependem de uma família admissível de coberturas abertas fixada e os conjuntos limite prolongacionais dependem ainda de uma família de subconjuntos do semigrupo em questão. Apresentamos também alguns exemplos concretos e condições suficientes para a invariância dos prolongamentos e conjuntos limite prolongacionais. Em seguida, demonstramos alguns resultados que caracterizam os conjuntos limite, os prolongamentos e os conjuntos limite prolongacionais em termos de redes. Aqui, os resultados sobre redes em espaços de Tychonoff demonstrados na seção anterior são fundamentais. Encerramos essa seção apresentando um resultado que relaciona conjuntos limite, prolongamentos e conjuntos limite prolongacionais para conjuntos compactos e conjuntos abertos. A quarta seção apresenta as definições e algumas propriedades básicas das regiões de atração, dos domínios de atração e dos atratores para ações de semigrupos. Começamos apresentando a definição de regiões de atração para ações de semigrupos. Em seguida, apresentamos exemplos concretos desse conceito e demonstramos um resultado sobre a invariância das regiões de atração. Em seguida, fazemos o mesmo para os domínios de atração. Um resultado que relaciona regiões e domínios de atração também é apresentado. Por fim, apresentamos diversas noções de semiatratores e atratores para ações de semigrupos. Depois de apresentar alguns exemplos, elencamos alguns resultados sobre atratores que são úteis ao longo desta tese. A quinta e última seção do primeiro capítulo dedica-se à estabilidade de Lyapunov para ações de semigrupos. Apresentamos diversas noções de conjuntos estáveis nesse contexto. Apresentamos também alguns exemplos e alguns resultados sobre conjuntos estáveis e atratores que são utilizados nesta tese.

O segundo capítulo trata das aplicações que preservam órbitas. Essa classe de aplicações constitui uma das principais ferramentas no estudo da dinâmica de ações de semigrupos em fibrados principais e associados, aparecendo de forma abundante nesse contexto. Na primeira seção, introduzimos o conceito de aplicações que preservam órbitas. Se M e N são espaços topológicos e $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ são semigrupos que agem em M e em N, respectivamente, então uma aplicação $p : M \longrightarrow N$ *preserva as órbitas da ação de* $\mathcal{S}$ *com relação à ação de* $\mathcal{T}$ se p leva órbitas da ação de $\mathcal{S}$ em órbitas da ação de $\mathcal{T}$, isto é, se $p(\mathcal{S}x) = \mathcal{T}p(x)$, para todo $x \in M$. Essa propriedade de "levar órbitas em órbitas"é o que permite relacionar conjuntos estáveis e atratores referentes à ação de $\mathcal{S}$ em M com os mesmos conceitos para a ação de $\mathcal{T}$ em N. Ainda na primeira seção, apresentamos diversos exemplos de aplicações que preservam órbitas e provamos algumas propriedades básicas dessas aplicações. As outras duas seções deste capítulo contém os resultados sobre o comportamento de conjuntos estáveis e atratores por aplicações que preservam órbitas. Os resultados nelas apresentados são generalizações dos resultados obtidos por Braga Barros, Souza e Rocha em [18], onde estudou-se o comportamento de conjuntos estáveis e atratores por aplicações equivariantes, que são um caso particular de aplicações que preservam órbitas (veja o Exemplo 2.3). Na segunda seção, estuda-se o comportamento de conjuntos estáveis e atratores por aplicações contínuas que preservam órbitas. Para isso, é necessário obter informações sobre o comportamento dos conjuntos limite, dos prolongamentos, dos conjuntos limite prolongacionais, das regiões de atração e dos domínios de atração. Por esse motivo, a segunda seção começa apresentando resultados nessa direção. Depois, são apresentados os resultados sobre a relação entre conjuntos estáveis e atratores referentes às ações de $\mathcal{S}$ em M e de $\mathcal{T}$ em N. A terceira seção trata do comportamento de conjuntos estáveis e atratores por aplicações uniformemente contínuas que preservam órbitas. Ocorre que alguns resultados envolvendo aplicações contínuas que preservam órbitas exigem a compacidade do conjunto em questão. Em alguns casos, a compacidade do conjunto em questão pode ser retirada se considerarmos aplicações uniformemente contínuas que preservam órbitas. Assim, alguns resultados adicionais são apresentados nessa seção. Eles se aplicam a fibrados cuja projeção é uma aplicação uniformemente contínua (veja o Exemplo 3.13).

Os Capítulos 3 e 4 contém os principais resultados desta tese. No Capítulo 3, aplicamos todos os resultados obtidos no Capítulo 2 para estudar o comportamento de conjuntos estáveis e atratores no contexto de ações de semigrupos principais e associados. Na primeira seção, estabelecemos a notação básica da teoria de ações de semigrupos em fibrados e provamos alguns resultados básicos necessários à seção subsequente. Consideramos um fibrado principal ξ e um fibrado associado a ξ, $\xi[F]$. Consideramos ainda um semigrupo $\mathcal{S}$ que age no espaço total de ξ e, através dessa ação, induzimos ações de $\mathcal{S}$ no espaço base de ξ e no espaço total de $\xi[F]$. Através dessa última ação, induzimos ações de semigrupos nas fibras de

$\xi[F]$ e na fibra típica F. Os semigrupos $\mathcal{S}_q$, que agem na fibra típica F, foram introduzidos por Braga Barros e San Martin em [11], onde são utilizados para estudar controlabilidade em fibrados. Já os semigrupos $\mathcal{H}_q$, que são semigrupos que agem nas fibras de $\xi[F]$, foram introduzidos em [17]. As ações desses semigrupos são duais, no sentido que suas ações "coincidem" através de uma certa relação de equivalência (veja 3.6). Ainda nessa seção, apresentamos condições suficientes para que os semigrupos $\mathcal{S}_q$ e $\mathcal{H}_q$ sejam isomorfos. Na segunda seção, apresentamos os resultados sobre o comportamento de conjuntos estáveis e atratores no contexto de fibrados principais e associados. Obtemos resultados sobre conjuntos estáveis e atratores para ação de $\mathcal{S}$ no espaço total de ξ em termos do grupo estrutural de ξ. Estudamos o comportamento de conjuntos estáveis e atratores com respeito às projeções dos fibrados ξ e $\xi[F]$. Relacionamos os conceitos de conjuntos estáveis e atratores referentes às ações dos semigrupos $\mathcal{S}_q$ e $\mathcal{H}_q$ e, por fim, relacionamos os conceitos de conjuntos estáveis e atratores no espaço total de $\xi[F]$ com os mesmos conceitos nas fibras de $\xi[F]$.

No Capítulo 4, particularizamos o estudo de estabilidade de Lyapunov em fibrados aos fibrados vetoriais, que são casos particulares de fibrados associados (veja a Seção A.5). Considerando um fibrado vetorial cujo espaço base é compacto, estudamos a relação entre os conceitos de conjuntos estáveis e atratores para semifluxos n-dimensionais e sistemas de controle. A primeira seção apresenta o Lema de Fenichel no contexto de fluxos lineares em fibrados vetoriais. Obter versões desse resultado para semifluxos n-dimensionais e sistemas de controle é a chave para a obtenção dos resultados principais. Na segunda seção, provamos, de maneira direta, uma versão do Lema de Fenichel para semifluxos n-dimensionais (veja o Teorema 4.4). Tal resultado permite obter uma relação entre conjuntos estáveis e atratores para a seção zero do fibrado vetorial em questão (veja o Corolário 4.6). Na terceira seção, consideramos um sistema de controle definido no espaço total de um fibrado vetorial. Definimos os conceitos de região de atração exponencial e de atrator exponencial com respeito à seção zero do fibrado vetorial em questão. Através desses conceitos, provamos, sob certas hipóteses, uma versão do Lema de Fenichel no contexto de sistemas de controle em fibrados vetoriais (veja o Corolário 4.13 e o Teorema 4.14). Tal resultado fornece uma relação entre os conceitos de conjuntos estáveis e atratores com relação à seção zero do fibrado vetorial em questão (veja o Teorema 4.15). Os resultados obtidos nessa seção compõem o artigo [8].

A obtenção de resultados como o Corolário 4.6 e o Teorema 4.15 no contexto geral de ações lineares em fibrados vetoriais continua sendo um problema em aberto.

Por fim, o Apêndice A tem o objetivo de fornecer aos leitores os pré-requisitos da teoria de fibrados principais e associados necessários ao entendimento dos Capítulos 3 e 4. A primeira seção trata de notações e conceitos básicos comuns a qualquer fibrado. Na segunda seção, apresentamos as definições básicas da teoria de fibrados principais. Apresentamos alguns exemplos e demonstramos que a fibra de um fibrado principal é o seu grupo estrutural. Na terceira seção, apresentamos os conceitos básicos e alguns exemplos de fibrados associados. Demonstramos que a fibra de um fibrado associado é a sua fibra típica. Na quarta seção, nos restringimos aos fibrados principais e associados localmente triviais. Na quinta seção, nos restringimos aos fibrados vetoriais. Demonstramos que todo fibrado vetorial pode ser visto como um fibrado associado a algum fibrado principal. Apresentamos também algumas propriedades de fibrados vetoriais cujo espaço base é compacto que são úteis no Capítulo 4.

Capítulo 1

Ações de semigrupos

A teoria de ações de semigrupos engloba diversas áreas da Matemática, tais como sistemas dinâmicos contínuos e discretos, semifluxos contínuos e discretos, sistemas de controle cujas funções de controle são constantes por partes, ações de subsemigrupos de grupos de Lie, entre outras. O presente capítulo tem por objetivo apresentar alguns resultados da teoria de ações de semigrupos necessários ao estudo de estabilidade de Lyapunov. Apresentamos as definições de órbitas, conjuntos invariantes, conjuntos limite, prolongamentos e conjuntos limite prolongacionais para ações de semigrupos e algumas de suas propriedades. Apresentamos também diversos tipos de estabilidade de Lyapunov e algumas de suas propriedades básicas. A teoria apresentada aqui é ilustrada com diversos exemplos. Este capítulo tem como principais referências [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 37, 47, 48, 49, 51, 54, 55].

1.1 Conceitos básicos

Nesta seção, apresentamos as notações e os conceitos básicos da teoria de ações de semigrupos utilizados ao longo desta tese. Nos referimos a [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 37, 47, 48, 49, 51, 54, 55] para a teoria de ações de semigrupos e a [32, 40] para a teoria de ações de grupos.

1.1.1 Órbitas e conjuntos invariantes

No que segue, $\mathcal{S}$ denota um semigrupo e M denota um espaço topológico.

Definição 1.1. *Uma* ***ação à esquerda*** *de $\mathcal{S}$ em M é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \mu \ : \ \mathcal{S} \times M &\longrightarrow M \\ (s,x) &\longmapsto \mu(s,x) = sx \end{aligned}$$

que satisfaz $s(tx) = (st)x$, para quaisquer $x \in M$ e $s,t \in \mathcal{S}$. Neste caso, dizemos que $\mathcal{S}$ ***age à esquerda*** *em M. Analogamente, uma* ***ação à direita*** *de $\mathcal{S}$ em M é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \mu \ : \ M \times \mathcal{S} &\longrightarrow M \\ (x,s) &\longmapsto \mu(x,s) = xs \end{aligned}$$

que satisfaz $(xs)t = x(st)$, para quaisquer $x \in M$ e $s,t \in \mathcal{S}$. Neste caso, dizemos que $\mathcal{S}$ ***age à direita*** *em M.*

Daqui em diante, a palavra "ação", a menos de menção explícita em contrário, sempre significa "ação à esquerda".

Uma ação μ de $\mathcal{S}$ em M induz as seguintes aplicações:

$$\begin{array}{rccc} \mu_x : & \mathcal{S} & \longrightarrow & M \\ & s & \longmapsto & \mu_x(s) = \mu(s,x) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \mu_s : & M & \longrightarrow & M \\ & x & \longmapsto & \mu_s(x) = \mu(s,x) \end{array}$$

Uma ação μ de $\mathcal{S}$ em M também é indicada por $(\mathcal{S}, M, \mu)$. Neste caso, dizemos que $(\mathcal{S}, M, \mu)$ é um **semigrupo de transformações** de M. Essa nomenclatura vem do fato que a ação do semigrupo $\mathcal{S}$ pode ser identificada com a ação do semigrupo $\mathbf{S} = \{\mu_s : s \in \mathcal{S}\}$ munido da composição de aplicações.

Se μ é uma ação de $\mathcal{S}$ em M, dizemos que M é o **espaço de fase** de μ. Além disso, é usual omitir a aplicação μ sempre que não houver risco de confusão e simplesmente referir-se a μ como sendo "a ação de $\mathcal{S}$ em M" ou "o semigrupo de transformações $(\mathcal{S}, M)$".

A hipótese mais básica a ser assumida sobre uma ação μ de um semigrupo $\mathcal{S}$ em um espaço topológico M é que μ_s é uma aplicação contínua, para todo $s \in \mathcal{S}$. Em toda esta tese, assumimos pelo menos essa hipótese, isto é, para qualquer ação (à esquerda ou à direita) μ considerada, assumimos que as aplicações μ_s são contínuas. As duas hipóteses a seguir também aparecem com frequência:

1. (*Ação contínua*) Dizemos que uma ação μ é **contínua** se $\mathcal{S}$ é um semigrupo topológico e a aplicação $\mu : \mathcal{S} \times M \longrightarrow M$ é contínua quando se considera em $\mathcal{S} \times M$ a topologia produto.

2. (*Ação aberta*) Dizemos que uma ação μ é **aberta** se μ_s é uma aplicação aberta, para todo $s \in \mathcal{S}$.

Note que se μ é uma ação contínua, então as aplicações μ_s, com $s \in \mathcal{S}$, e μ_x, com $x \in M$, são contínuas.

A topologia de $\mathcal{S}$ nem sempre é importante para a obtenção dos resultados. Por isso, a menos de menção explícita em contrário, ao longo desta tese, não assumimos que $\mathcal{S}$ é um semigrupo topológico. Na verdade, isso é equivalente a considerar em $\mathcal{S}$ a topologia discreta. Neste caso, toda ação μ de $\mathcal{S}$ em M é contínua.

No que segue, assumimos que o semigrupo $\mathcal{S}$ age em M. Sejam A e X subconjuntos de $\mathcal{S}$ e M, respectivamente. Definimos

$$AX = \{y \in M : \text{existem } s \in A \text{ e } x \in X \text{ tais que } sx = y\} \text{ e}$$
$$A^*X = \{y \in M : \text{existem } s \in A \text{ e } x \in X \text{ tais que } sy = x\}.$$

Dado $x \in M$, os conjuntos

$$\mathcal{S}x = \{y \in M : \text{ existe } s \in \mathcal{S} \text{ tal que } sx = y\} \text{ e}$$
$$\mathcal{S}^*x = \{y \in M : \text{ existe } s \in \mathcal{S} \text{ tal que } sy = x\}$$

são chamados, respectivamente, **$\mathcal{S}$-órbita** e **$\mathcal{S}$-órbita regressiva** de x em M. Num contexto onde está claro o semigrupo em questão, os conjuntos $\mathcal{S}x$ e $\mathcal{S}^*x$ são chamados, respectivamente, de órbita e órbita regressiva de x em M. Em alguns casos, a órbita e a órbita regressiva de um ponto $x \in M$ são também denotadas por $\mathcal{S} \cdot x$ e $\mathcal{S}^* \cdot x$, respectivamente. Agora, seja X um subconjunto de M. Dizemos que X é **$\mathcal{S}$-progressivamente invariante** (ou **progressivamente invariante** por $\mathcal{S}$) se $\mathcal{S}X \subset X$, **$\mathcal{S}$-regressivamente invariante** (ou **regressivamente invariante** por $\mathcal{S}$) se $\mathcal{S}^*X \subset X$ e **$\mathcal{S}$-invariante** (ou **invariante** por $\mathcal{S}$) se $\mathcal{S}X \subset X$ e $\mathcal{S}^*X \subset X$. Por fim, dizemos que X é **$\mathcal{S}$-invariante isolado** (ou **invariante isolado** por $\mathcal{S}$) se X é $\mathcal{S}$-invariante e existe uma vizinhança V de X em M, chamada **vizinhança isolante** de X, tal que se $x \in V$ e $\mathcal{S}x \cup \mathcal{S}^*x \subset V$, então $x \in X$.

Observação 1.2. *Todos os conceitos definidos até aqui para ações à esquerda tem seus análogos para ações à direita, bastando adaptar as notações: se* $A \subset \mathcal{S}$ *e* $X \subset M$*, então*

$$XA = \{y \in M : \textit{existem } s \in A \textit{ e } x \in X \textit{ tais que } xs = y\} \textit{ e}$$
$$XA^* = \{y \in M : \textit{existem } s \in A \textit{ e } x \in X \textit{ tais que } ys = x\}.$$

A seguir, destacamos algumas propriedades das órbitas e de seus fechos.

Proposição 1.3. *Seja* X *um subconjunto de* M *e suponha que* $\mathcal{S}^*X$ *é não-vazio*[1]*. Então,*

1. $\mathcal{S}X = \bigcup_{x \in X} \mathcal{S}x$ *e* $\mathcal{S}^*X = \bigcup_{x \in X} \mathcal{S}^*x$.
2. $\mathcal{S}X$ *e* $\overline{\mathcal{S}X}$ *são* $\mathcal{S}$*-progressivamente invariantes.*
3. $\mathcal{S}^*X$ *é* $\mathcal{S}$*-regressivamente invariante.*
4. $\overline{\mathcal{S}^*X}$ *é* $\mathcal{S}$*-regressivamente invariante se a ação de* $\mathcal{S}$ *em* M *é aberta.*

Demonstração: Veja [37, Proposição 3.4]. □

1.1.2 Ações de grupos e subsemigrupos

Os grupos constituem uma classe muito importante de semigrupos. Naturalmente, ações de grupos tem mais propriedades que ações de semigrupos que não são grupos. De fato, seja G um grupo e denote por 1 o elemento neutro de G. No caso de ações de grupos, acrescentamos à definição de ação a exigência de que $1x = x$, para todo $x \in M$. Logo, uma ação de G em M satisfaz as seguintes propriedades:

1. $1x = x$, para todo $x \in M$, e
2. $g(hx) = (gh)x$, para quaisquer $g, h \in G$ e $x \in M$.

A propriedade "$1x = x$, para todo $x \in M$" significa que o elemento neutro 1 de G fixa todos os pontos $x \in M$. Se $g_1, g_2 \in G$ são dois elementos de G que fixam um certo $x \in M$,

[1]Pode acontecer de $\mathcal{S}^*X$ ser vazio. Veja [54, Exemplo 2.6].

não é difícil verificar que $g_1(g_2)^{-1}$ também fixa x. Logo, o subconjunto $G_x \subset G$ de todos os elementos de G que fixam x é um subgrupo de G, chamado **subgrupo de isotropia** ou **estabilizador** de x.

As órbitas da ação de um grupo G em M determinam uma relação de equivalência em M dada por

$$x \sim y \text{ se e somente se existe } g \in G \text{ tal que } gx = y. \tag{1.1}$$

Logo, as órbitas da ação de um grupo G em M particionam o espaço de fase M (o que não acontece para ações de semigrupos em geral). Desse fato, segue que

$$GX = G^*X, \text{ para todo subconjunto } X \subset M.$$

Uma ação de G em M é **livre** se, para cada $x \in M$, a aplicação $g \longmapsto xg$ é injetora, ou seja, se $xg = xh$ implica $g = h$, para quaisquer $x \in M$ e $g, h \in G$. Observe que isso é equivalente a dizer que $xg = x$ implica $g = 1$, para quaisquer $x \in M$ e $g \in G$. Assim, uma ação de um grupo G em M é livre se e somente se seus subgrupos de isotropia se reduzem ao elemento neutro de G.

Uma ação de G em M é **transitiva** se M é uma órbita da ação de G em M, ou seja, se existe $x \in M$ tal que $Gx = M$. É fácil demonstrar que as seguintes afirmações sobre uma ação de G em M são equivalentes:

1. a ação de G em M é transitiva.

2. $Gx = M$, para todo $x \in M$.

3. para quaisquer $x, y \in M$, existe $g \in G$ tal que $gx = y$.

No caso de ações de grupos, é usual denotar a aplicação μ_g simplesmente por g, para todo $g \in G$, ou seja,

$$g(x) = \mu_g(x) = gx, \text{ para todo } g \in G. \tag{1.2}$$

Note que a inversa da aplicação g é a aplicação g^{-1}, para todo $g \in G$. Como ambas são contínuas, segue que as aplicações g, com $g \in G$, são homeomorfismos de M.

Um **subsemigrupo** de um grupo G é um subconjunto $\mathcal{S} \subset G$ tal que $\mathcal{S}\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$, isto é, um subsemigrupo de G é um subconjunto de G que é fechado pela operação de G. Note que todo elemento s de um subsemigrupo $\mathcal{S} \subset G$ possui um elemento inverso $s^{-1} \in G$ que não necessariamente pertence a $\mathcal{S}$. O conjunto de todos os elementos inversos dos elementos de um subsemigrupo $\mathcal{S}$ de G,

$$\mathcal{S}^{-1} = \{s^{-1} : s \in \mathcal{S}\},$$

também é um subsemigrupo de G. No estudo se ações de subsemigrupos, as órbitas regressivas da ação de $\mathcal{S}$ coincidem com as órbitas de ação de $\mathcal{S}^{-1}$. Com efeito, suponha que $\mathcal{S}$ é um subsemigrupo de um grupo G que age em M. Restringindo a ação de G a $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}^{-1}$, obtemos ações de $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}^{-1}$ em M. Então, não é difícil verificar que

$$\mathcal{S}^{*}X = \mathcal{S}^{-1}X, \text{ para todo subconjunto } X \subset M.$$

Para cada $g \in G$, a aplicação $g : M \longrightarrow M$, $g(x) = gx$, é um homeomorfismo de M. Note que, como a ação de $\mathcal{S}$ provém da restrição da ação de G, então, para cada $s \in \mathcal{S}$, a aplicação $s : M \longrightarrow M$, $s(x) = sx$, é um homeomorfismo de M, e o mesmo vale ao considerarmos os elementos $s^{-1} \in \mathcal{S}^{-1}$. Por isso, ações de subsemigrupos também são chamadas de **ações de semigrupos de homeomorfismos** (veja, por exemplo, [13]).

1.1.3 Exemplos

A seguir, apresentamos diversos exemplos de contextos nos quais os objetos matemáticos estudados são definidos em termos da ação de um semigrupo. Em cada caso, deixamos claro quais são os semigrupos envolvidos e apresentamos exemplos concretos.

Fluxos contínuos e discretos

Seja M um espaço topológico e denote por $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$. Um **fluxo** ou **sistema dinâmico** em M é uma aplicação contínua $\phi : \mathbb{T} \times M \longrightarrow M$ satisfazendo:

1. $\phi(0, x) = x$, para todo $x \in M$, e

2. $\phi(t + s, x) = \phi(t, \phi(s, x))$, para quaisquer $t, s \in \mathbb{T}$ e $x \in M$.

Em outras palavras, um fluxo em M é uma ação do grupo aditivo dos reais ou do grupo aditivo dos inteiros em M. Dizemos que um fluxo ϕ em M é um **fluxo contínuo** se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Por sua vez, dizemos que um fluxo ϕ em M é um **fluxo discreto** se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$.

Para mais detalhes da teoria de fluxos, veja [4, 5, 6, 7, 23, 28, 37, 50].

Semifluxos contínuos e discretos

Assim como na seção anterior, seja $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ e denote por $\mathbb{T}^+ = \{t \in \mathbb{T} : t \geqslant 0\}$. Seja também M um espaço topológico. Um **semifluxo** em M é uma aplicação contínua $\phi : \mathbb{T}^+ \times M \longrightarrow M$ que satisfaz:

1. $\phi(0, x) = x$, para todo $x \in M$, e

2. $\phi(t + s, x) = \phi(t, \phi(s, x))$, para quaisquer $t, s \in \mathbb{T}^+$ e $x \in M$.

Portanto, um semifluxo em M é uma ação do semigrupo aditivo dos reais, $\mathbb{R}^+$, ou do semigrupo aditivo dos inteiros, $\mathbb{Z}^+$, em M. Dizemos que um semifluxo ϕ em M é um **semifluxo contínuo** se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ e dizemos que um semifluxo ϕ em M é um **semifluxo discreto** se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.4. ([55, Exemplo 12]) Seja M uma variedade diferenciável de classe C^∞ e seja BM o conjunto dos referenciais de M (veja o Exemplo A.23). Então, a aplicação

$$\begin{aligned} \phi \quad : \quad & \mathbb{R}_+ \times BM \longrightarrow BM \\ & (t, \sigma_x) \quad \longmapsto \quad \phi(t, \sigma_x) = e^{-t}\sigma_x \end{aligned}$$

é um semifluxo contínuo em BM. $\diamond$

Exemplo 1.5. ([22, Definição 1.20], [36, Definição 2.1]) Seja X um espaço de Banach e seja $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares e limitados de X. Então, uma aplicação $S : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ é um **semigrupo de operadores limitados** de X se

1. $S(0) = \mathrm{id}_X$ e

2. $S(t + s) = S(t)S(s)$, para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}_+$.

Considere

$$\begin{aligned} \phi \ : \ \mathbb{R}^+ \times X &\longrightarrow X \\ (t,x) &\longmapsto \phi(t,x) = S(t)x. \end{aligned}$$

Segue imediatamente dos itens 1 e 2 acima que ϕ é um semifluxo em X. Portanto, semigrupos de operadores limitados em espaços de Banach podem ser vistos como semifluxos em espaços de Banach. ◇

Fluxos e semifluxos n-dimensionais

Seja M um espaço topológico. Um **fluxo n-dimensional** em M é uma ação do grupo aditivo $\mathbb{R}^n$ em M. Se Ψ um fluxo n-dimensional em M, é usual utilizar-se a notação $(t_1,\ldots,t_n)\cdot x = \Psi((t_1,\ldots,t_n),x)$, para quaisquer $(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n$ e $x\in M$.

Fluxos n-dimensionais aparecem naturalmente na teoria de ações de grupos de Lie.

Exemplo 1.6. Seja G um grupo de Lie real de dimensão finita e de classe C^∞ com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e suponha que M é uma variedade diferenciável de classe C^∞. Seja $\alpha : M\times G \longrightarrow M$ uma ação diferenciável à direita de G em M e sejam

$$X_1,\ldots,X_n \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X\in\mathfrak{g} : [X,Y]=0, \text{ para todo } Y\in\mathfrak{g}\}$$

campos de vetores invariantes à direita. Para cada $i=1,\ldots,n$, defina

$$X^i(x) = \frac{d}{dt}(x\exp(tX_i))\bigg|_{t=0}, \text{ com } x\in M.$$

A trajetória de X^i através de x é dada por $X^i_t = x\exp(tX_i)$. Então, temos que

$$X^i_t\circ X^j_s = X^j_s\circ X^i_t, \text{ para quaisquer } i,j\in\{1,\ldots,n\} \text{ e } t,s\in\mathbb{R}.$$

Dessa forma,

$$(t_1,\ldots,t_n)\cdot x = X^1_{t_1}\circ\cdots\circ X^n_{t_n}(x), \text{ com } (t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n \text{ e } x\in M$$

define um fluxo n-dimensional em M. ◇

Note que um fluxo n-dimensional em M é a ação de um grupo de Lie conexo e abeliano em M, a saber, $\mathbb{R}^n$.

Um **semifluxo n-dimensional** em M é a ação de um subsemigrupo de $\mathbb{R}^n$ da forma

$$\mathcal{S}_i = \{(t_1, \ldots, t_n) : t_i \geqslant 0\}, \text{ para algum } i = 1, \ldots, n.$$

Note que a ação de $\mathcal{S}_i$ em M é simplesmente a restrição da ação de $\mathbb{R}^n$ a $\mathcal{S}_i$.

Podemos considerar ainda a ação do semigrupo dado pela interseção dos semigrupos $\mathcal{S}_i$, isto é, a ação de

$$\mathcal{S} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{S}_i.$$

Novamente, a ação de $\mathcal{S}$ em M é a restrição da ação de $\mathbb{R}^n$ a $\mathcal{S}$.

Sistemas de controle

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão finita e classe C^∞.

Definição 1.7. *Sejam U um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{U}$ um conjunto de funções de $\mathbb{R}$ em U e $X : M \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TM$ uma aplicação de classe C^∞. Denote por $\mathfrak{D}$ a família das equações diferenciais ordinárias da forma $x'(t) = X(x(t), u(t))$, com $u \in \mathcal{U}$. Então, a quádrupla $(M, U, \mathcal{U}, \mathfrak{D})$ é chamada **sistema de controle** sobre M. A variedade M é chamada **espaço de fase** do sistema, o conjunto U é chamado **conjunto de controle** do sistema, o conjunto $\mathcal{U}$ é chamado **conjunto das funções de controle** do sistema e a família $\mathfrak{D}$ é chamada **dinâmica** do sistema.*

Por simplicidade, denotamos um sistema de controle apenas por Σ, ficando subentendidos todos os elementos da Definição 1.7.

Assumimos que, num sistema de controle Σ, fixado $v \in U$, a aplicação $X_v : M \longrightarrow TM$ dada por $X_v(p) = X(p, v)$ é um campo de vetores completo de classe C^∞ em M. Assumimos também que, fixados $x(0) = x_0 \in M$ e $u \in \mathcal{U}$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = X(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

possui uma única solução $\varphi(t, x_0, u)$ definida em todo tempo $t \in \mathbb{R}$. Por *solução*, entendemos uma aplicação de classe C^∞ *por partes* (ou suave por partes) $\varphi(\cdot, x_0, u) : \mathbb{R} \longrightarrow M$ tal que $\varphi(0, x_0, u) = x_0$ e que satisfaz

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, x_0, u) = X(\varphi(t, x_0, u), u(t))$$

em todo $t \in \mathbb{R}$ no qual $\varphi(\cdot, x_0, u)$ é diferenciável. Logo, se duas curvas suaves por partes satisfazem o mesmo problema de valor inicial, elas coincidem (veja [30, Capitulo 1] para alguns resultados de existência e unicidade de soluções para sistemas de controle).

Dois conceitos fundamentais na teoria de sistemas de controle são os conceitos de translação e concatenação de funções de controle.

Definição 1.8. *Seja Σ um sistema de controle.*

1. *Dados $u \in \mathcal{U}$ e $s \in \mathbb{R}$, a s-**translação** de u é a função $u(\cdot + s) : \mathbb{R} \longrightarrow U$ dada por $u(\cdot + s)(t) = u(t + s)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

2. *Dados $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ e $s \in \mathbb{R}$, a s-**concatenação** de u_1 e u_2 é a função $u : \mathbb{R} \longrightarrow U$ dada por*

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & \text{se } t \leqslant s \\ u_2(t - s), & \text{se } t > s. \end{cases}$$

Com relação ao conjunto das funções de controle $\mathcal{U}$ de um sistema de controle Σ, assumimos que:

1. as funções de controle $u \in \mathcal{U}$ são **localmente integráveis**, ou seja, são integráveis em cada subconjunto de $\mathbb{R}$ cujo fecho é compacto.

2. dados $u \in \mathcal{U}$ e $s \in \mathbb{R}$, a s-translação de u pertence a $\mathcal{U}$.

3. dados $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ e $s \in \mathbb{R}$, a s-concatenação de u_1 e u_2 pertence a $\mathcal{U}$.

A escolha do conjunto das funções de controle é determinante para um sistema de controle. Na literatura, aparecem com mais frequência os conjuntos de funções de controle dados a seguir.

1. $\mathcal{U}_{cp}$: conjunto das funções $u : \mathbb{R} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ que são constantes por partes;

2. $\mathcal{U}_b$: subconjunto das funções de $\mathcal{U}_{cp}$ cujas coordenadas assumem somente os valores 1 e -1. Esse conjunto é conhecido como o conjunto das funções de controle "**bang-bang**";

3. $\mathcal{U}_l$: conjunto das funções limitadas e mensuráveis com valores em $\mathbb{R}^n$, chamado conjunto das funções de controle **irrestritas**;

4. $\mathcal{U}_r$: subconjunto das funções de $\mathcal{U}_l$ que assumem valores no cubo

$$\{x \in \mathbb{R}^n : -1 \leqslant |x_i| \leqslant 1, i = 1, \dots, n\},$$

chamado conjunto das funções de controle **restritas**.

O próximo resultado apresenta a **propriedade do cociclo** para sistemas de controle.

Proposição 1.9. *Seja Σ um sistema de controle e fixe $u \in \mathcal{U}$ e $t, s \in \mathbb{R}$. As soluções que dependem das funções de controle u e $u(\cdot + s)$ satisfazem*

$$\varphi(t + s, x, u) = \varphi(t, \varphi(s, x, u), u(\cdot + s)),$$

para todo $x \in M$.

Demonstração: Veja [30, Proposição 1.2.8] ou [50, Proposição 2.3]. □

Geometricamente, a propriedade do cociclo significa que atingir um ponto y a partir de x usando uma função de controle u no tempo $t + s$ é equivalente a atingir y a partir de $\varphi(s, x, u)$ usando a função de controle $u(\cdot + s)$ no tempo t.

Vejamos alguns exemplos de sistemas de controle.

Exemplo 1.10. Sejam A uma matriz real $m \times m$ e B uma matriz real $m \times n$. Note que, dados $x \in \mathbb{R}^m$ e $u \in \mathbb{R}^n$, $Ax + Bu \in \mathbb{R}^m$. Assim, fixando conjuntos de controle U e $\mathcal{U}$, a família de equações diferenciais

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad u \in \mathcal{U},$$

determina um sistema de controle em $\mathbb{R}^m$. Um sistema desse tipo é chamado **sistema de controle linear**. ◇

Exemplo 1.11. Sejam $A_0, A_1, \ldots, A_n$ matrizes reais $m \times m$ e $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Note que a aplicação $X : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dada por

$$X(x,u) = A_0 x + \sum_{i=1}^{n} u_i A_i x$$

é diferenciável. Assim, escolhendo conjuntos de controle U e $\mathcal{U}$, a equação diferencial

$$x'(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) A_i x(t)$$

define um sistema de controle em $\mathbb{R}^m$, chamado **sistema de controle bilinear**. $\diamond$

Exemplo 1.12. Sejam $X_0, X_1, \ldots, X_n : M \longrightarrow TM$ campos de vetores completos de classe C^∞ sobre uma variedade diferenciável M de classe C^∞. Tome $U = \mathbb{R}^n$ e fixe um conjunto de funções de controle. O sistema de controle definido por

$$x' = X_0(x) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) X_i(x),$$

com $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t)) \in \mathbb{R}^n$, é chamado **sistema de controle afim** (ou **bilinear**). $\diamond$

A seguir, apresentamos as definições de órbita positiva e órbita negativa de um sistema de controle Σ.

Definição 1.13. *Seja Σ um sistema de controle. A **órbita positiva** de Σ e a **órbita negativa** de Σ são, respectivamente, definidas por*

$$\mathcal{O}^+_\Sigma(x) = \{y \in M : \text{ existem } u \in \mathcal{U} \text{ e } t \geqslant 0 \text{ tais que } \varphi(t,x,u) = y\} \text{ e}$$
$$\mathcal{O}^-_\Sigma(x) = \{y \in M : \text{ existem } u \in \mathcal{U} \text{ e } t \geqslant 0 \text{ tais que } \varphi(t,y,u) = x\}.$$

No que segue, apresentamos condições suficientes para que as órbitas positiva e negativa de um sistema de controle Σ sejam descritas em termos da ação de um semigrupo.

Seja Σ um sistema de controle. Fixado $u_0 \in U$, temos que X_{u_0} é um campo de vetores completo de classe C^∞ em M. Logo, do teorema de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais autônomas, dado $x \in M$, existe uma única solução $\varphi^{u_0}_x(t)$ (definida em todo t real) do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = X_{u_0}(x) \\ x(0) = x \end{cases} \tag{1.3}$$

de modo que o fluxo definido por X_{u_0}, a saber, $\varphi^{u_0}(t,x) = \varphi_x^{u_0}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in M$, está definido em $\mathbb{R} \times M$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, o fluxo φ^{u_0} define o difeomorfismo $\varphi_t^{u_0}(x) = \varphi^{u_0}(t,x)$. Seja

$$\mathcal{G}_\Sigma = \{\varphi_{t_n}^{u_n} \circ \varphi_{t_{n-1}}^{u_{n-1}} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}^{u_1} : u_i \in U, t_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\} \tag{1.4}$$

o conjunto de todas as composições finitas de difeomorfismos da forma φ_t^u, com $t \in \mathbb{R}$ e $u \in U$. Temos que $\mathcal{G}_\Sigma$ é um grupo quando munido da composição de aplicações. Agora, seja

$$\mathcal{S}_\Sigma = \{\varphi_{t_n}^{u_n} \circ \varphi_{t_{n-1}}^{u_{n-1}} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}^{u_1} : u_i \in U, t_i \geqslant 0, n \in \mathbb{N}\} \tag{1.5}$$

o conjunto de todas as composições finitas de difeomorfismos da forma φ_t^u para tempos positivos. Temos que $\mathcal{S}_\Sigma$ é um semigrupo quando munido da composição de aplicações. Na verdade, $\mathcal{S}_\Sigma$ é um subsemigrupo de $\mathcal{G}_\Sigma$.

Sendo assim, está bem posta a próxima definição.

Definição 1.14. *Seja Σ um sistema de controle. O **grupo do sistema** Σ e o **semigrupo do sistema** Σ são, respectivamente, os conjuntos $\mathcal{G}_\Sigma$ e $\mathcal{S}_\Sigma$ definidos em (1.4) e (1.5).*

O grupo do sistema $\mathcal{G}_\Sigma$ age naturalmente em M através das composições dos difeomorfismos φ_t^u, ou seja, a aplicação

$$\begin{aligned} \mu_\Sigma : \mathcal{G}_\Sigma \times M &\longrightarrow M \\ (\phi, x) &\longmapsto \mu_\Sigma(\phi, x) = \phi(x) \end{aligned}$$

é uma ação de $\mathcal{G}_\Sigma$ em M. Dado $x \in M$, dizemos que a $\mathcal{G}_\Sigma$-órbita de x, $\mathcal{G}_\Sigma x$, é a **órbita do grupo do sistema** a partir de x (ou através de x). Podemos restringir a ação μ_Σ a $\mathcal{S}_\Sigma \times M$ e, assim, considerar somente a ação de $\mathcal{S}_\Sigma$ em M. Dado $x \in M$, dizemos que a $\mathcal{S}_\Sigma$-órbita de x, $\mathcal{S}_\Sigma x$, é a **órbita do semigrupo do sistema** a partir de x (ou através de x). Para todo $x \in M$, as órbitas $\mathcal{S}_\Sigma x$ e $\mathcal{S}_\Sigma^{-1} x = \mathcal{S}_\Sigma^* x$ também são chamadas, respectivamente, **órbita positiva do semigrupo do sistema** Σ e **órbita negativa do semigrupo do sistema** Σ.

No caso de um sistema de controle Σ em que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{cp}$, as órbitas positiva e negativa do sistema Σ possuem uma caracterização em termos de $\mathcal{S}_\Sigma$ e $\mathcal{S}_\Sigma^{-1}$, respectivamente. Tal caracterização depende do seguinte resultado.

Proposição 1.15. *Seja Σ um sistema de controle tal que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{cp}$. Dados $t_1, \ldots, t_n > 0$ e $u_1, \ldots, u_n \in U$, existe $u \in U$ tal que*

$$\varphi_{t_n}^{u_n} \circ \varphi_{t_{n-1}}^{u_{n-1}} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}^{u_1} = \varphi_{t_n + \cdots + t_1}^{u}.$$

Demonstração: Veja [50, Corolário 2.9]. □

Como consequência, temos o

Corolário 1.16. *Seja Σ um sistema de controle tal que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{cp}$. Então, dado $x \in M$,*

$$\mathcal{S}_\Sigma x = \{y \in M : \text{ existem } u \in \mathcal{U}_{cp} \text{ e } t > 0 \text{ tais que } \varphi(t,x,u) = y\} = \mathcal{O}^+_\Sigma(x) \text{ e}$$
$$\mathcal{S}^{-1}_\Sigma x = \{y \in M : \text{ existem } u \in \mathcal{U}_{cp} \text{ e } t > 0 \text{ tais que } \varphi(t,y,u) = x\} = \mathcal{O}^-_\Sigma(x).$$

Demonstração: Fixe $x \in M$. Se $y \in \mathcal{S}_\Sigma x$, existem $t_1, \ldots, t_n \geqslant 0$ e $u_1, \ldots, u_n \in U$ tais que $y = \varphi^{u_n}_{t_n} \circ \cdots \circ \varphi^{u_1}_{t_1}(x)$. Pela Proposição 1.15, existe $u \in U$ tal que $y = \varphi^u_{t_1+\cdots+t_n}(x)$. Fazendo $t = t_1 + \cdots + t_n$, temos que $y = \varphi^u_t(x) = \varphi(t,x,v)$, onde $v \in \mathcal{U}_{cp}$ é constante igual a u em algum intervalo de $\mathbb{R}$ que contém t. Logo, $y \in \mathcal{O}^+_\Sigma(x)$. Por outro lado, se $y \in \mathcal{O}^+_\Sigma(x)$, então existem $t \geqslant 0$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$ tais que $y = \varphi(t,x,u)$. Como u é uma função constante por partes, existe $u_0 \in U$ tal que u é constante igual a u_0 em algum intervalo de $\mathbb{R}$ que contém t, de modo que $y = \varphi(t,x,u) = \varphi^u_t(x)$ e, portanto, $y \in \mathcal{S}_\Sigma x$. □

Portanto, as órbitas positiva e negativa de um sistema de controle Σ cujo conjunto das funções de controle é $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{cp}$ coincidem com as órbitas positiva e negativa do semigrupo do sistema Σ, respectivamente.

Para mais detalhes da teoria de sistemas de controle, veja [20, 24, 50].

Polissistemas dinâmicos

Seja $\mathfrak{P} = \{\phi^i\}_{i\in I}$ um **polissistema dinâmico**, isto é, uma família de sistemas dinâmicos, todos definidos em um mesmo espaço topológico M. Denote por Homeo(M) o conjunto de todos os homeomorfismos de M. Seja

$$\mathcal{G}_\mathfrak{P} = \langle\{(t,\phi_t) : \phi \in \mathfrak{P}, t \in \mathbb{R}\}\rangle$$

o subgrupo de $\mathbb{R} \times \text{Homeo}(M)$ gerado por $\{(t,\phi_t) : \phi \in \mathfrak{P}, t \in \mathbb{R}\}$ e

$$\mathcal{S}_\mathfrak{P} = \langle\{(t,\phi_t) : \phi \in \mathfrak{P}, t \geqslant 0\}\rangle$$

o subsemigrupo de $\mathcal{G}_{\mathfrak{P}}$ gerado por $\{(t, \phi_t) : \phi \in \mathfrak{P}, t \geqslant 0\}$.

Um elemento de $\mathcal{G}_{\mathfrak{P}}$ é da forma

$$g = (t_1 + \cdots + t_k, \phi^1_{t_1} \circ \cdots \circ \phi^k_{t_k}),$$

com $t_i \in \mathbb{R}$ e $\phi^i \in \mathfrak{P}$, com $0 \leqslant i \leqslant k$, e um elemento de $\mathcal{S}_{\mathfrak{P}}$ é da forma

$$s = (t_1 + \cdots + t_k, \phi^1_{t_1} \circ \cdots \circ \phi^k_{t_k}),$$

com $t_i \geqslant 0$ e $\phi^i \in \mathfrak{P}$, com $0 \leqslant i \leqslant k$.

O grupo $\mathcal{G}_{\mathfrak{P}}$ age em M de uma forma natural:

$$\begin{aligned} \mu_{\mathfrak{P}} \ : \ & \mathcal{G}_{\mathfrak{P}} \times M \longrightarrow M \\ & ((t,h),x) \ \longmapsto \ \mu((t,h),x) = h(x). \end{aligned}$$

Restringindo a ação de $\mathcal{G}_{\mathfrak{P}}$ a $\mathcal{S}_{\mathfrak{P}}$, obtemos uma ação de $\mathcal{S}_{\mathfrak{P}}$ em M. Observe que, se Σ é um sistema de controle sobre (uma variedade diferenciável de classe C^∞) M, então $\mathfrak{P}_\Sigma = \{\varphi^u_t : u \in \mathcal{U}_{cp} \text{ e } t \in \mathbb{R}\}$ é um polissistema dinâmico em M tal que $\mu_{\mathfrak{P}_\Sigma} = \mu_\Sigma$. Logo, se Σ é um sistema de controle tal que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{cp}$, então a dinâmica de Σ fica completamente determinada por $\mu_{\mathfrak{P}_\Sigma}$. Portanto, a teoria de polissistemas dinâmicos generaliza a teoria de sistemas de controle com funções de controle constantes por partes.

Nos referimos a [21, 56] para a teoria de polissistemas dinâmicos.

Semigrupos de bitransformações

Um **semigrupo de bitransformações** é um par de semigrupos de transformações $(\mathcal{S}, M)$ e $(M, \mathcal{T})$ com o mesmo espaço de fase M tais que $s(xt) = (sx)t$, para quaisquer $x \in M$, $s \in \mathcal{S}$ e $t \in \mathcal{T}$. Denotamos por $(\mathcal{S}, M, \mathcal{T})$ o semigrupo de bitransformações constituído pelo par de semigrupos de transformações $(\mathcal{S}, M)$ e $(M, \mathcal{T})$.

Semigrupos de bitransformações aparecem naturalmente na teoria de sistemas de controle em grupos de Lie, como vemos no exemplo a seguir.

Exemplo 1.17. (Veja [47, Seção 2.3]) Seja G um grupo de Lie de dimensão finita com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e elemento neutro 1. Identifique $\mathfrak{g}$ com o conjunto dos campos de vetores invariantes à direita de G. Seja Σ um sistema de controle em G dado pela família de equações diferenciais

$$g'(t) = X(g(t), u(t))$$

com um conjunto de controle $U \subset \mathbb{R}^n$ e com o conjunto das funções de controle $\mathcal{U}_{cp}$. Denote por X_u o campo de vetores $X_u(\cdot) = X(\cdot, u)$, com $u \in U$, e suponha que $F = \{X_u : u \in U\} \subset \mathfrak{g}$. Esse fato implica que

$$\varphi(t, g, u) = \varphi(t, 1, u)g, \text{ para quaisquer } t \in \mathbb{R},\ g \in G \text{ e } u \in \mathcal{U}_{cp}, \tag{1.6}$$

de modo que $(\mathcal{S}_\Sigma, G, G)$ é um semigrupo de bitransformações.

Agora, seja H um subgrupo normal e fechado de G e considere o grupo quociente G/H com projeção canônica $\pi : G \longrightarrow G/H$. Seja $\alpha : G \times G/H \longrightarrow G/H$ a ação de G em G/H dada por $\alpha(g, \pi(h)) = \pi(gh)$ ou, numa notação mais resumida, $\alpha(g, x) = gx$. Considere

$$\begin{aligned} \widetilde{X} \ &: \ G/H \times \mathbb{R}^n \longrightarrow T(G/H) \\ (x, u) \ &\longmapsto \ \widetilde{X}(x, u) = d(\alpha_x)_1(X(1, u)) = \left.\frac{d}{dt}\varphi(t, 1, u)x\right|_{t=0} \end{aligned}$$

e denote por $\widetilde{\Sigma}$ o sistema de controle em G/H dado pela família de equações diferenciais

$$x'(t) = \widetilde{X}(x(t), u(t))$$

com o mesmo conjunto de controle e o mesmo conjunto das funções de controle de Σ, a saber, U e $\mathcal{U}_{cp}$, respectivamente. Para cada $x \in G/H$, a função $t \in \mathbb{R} \longmapsto \varphi(t, 1, u)x = \alpha(\varphi(t, 1, u), x) \in G/H$ é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = \widetilde{X}(x(t), u(t)) \\ x(0) = x \end{cases}$$

em G/H. Para cada $t \in \mathbb{R}$ e $u \in U$, denote por $\widetilde{\varphi}_t^u$ o difeomorfismo de G/H dado por $\widetilde{\varphi}_t^u(x) = \varphi(t, 1, u)x$. Então,

$$\mathcal{S}_{\widetilde{\Sigma}} = \{\widetilde{\varphi}_{t_n}^{u_n} \circ \cdots \circ \widetilde{\varphi}_{t_1}^{u_1} : u_i \in U, t_i \geqslant 0, n \in \mathbb{N}\}$$

é o semigrupo do sistema $\widetilde{\Sigma}$. Agora, seja $\beta : G/H \times G \longrightarrow G/H$ a ação à direita de G em G/H dada por $\beta(\pi(h), g) = \pi(hg)$ ou simplesmente $\beta(x, g) = xg$. Para quaisquer $x \in G/H$,

$\widetilde{\varphi}_t^u \in \mathcal{S}_{\widetilde{\Sigma}}$ e $g \in G$, temos que

$$\widetilde{\varphi}_t^u(x)g = (\varphi(t,1,u)x)g = \varphi(t,1,u)(xg) = \varphi(t,xg,u) = \widetilde{\varphi}_t^u(xg).$$

Portanto, $(\mathcal{S}_{\widetilde{\Sigma}}, G/\,H, G)$ é um semigrupo de bitransformações. $\diamond$

Semigrupos de bitransformações também aparecem no estudo de ações de semigrupos em fibrados principais e associados (veja a Seção 3.1).

Nos referimos a [47] para a teoria de semigrupos de bitranformações.

1.2 Espaços de Tychonoff

Os espaços métricos são fundamentais na teoria clássica de sistemas dinâmicos. As propriedades decorrentes da métrica em um espaço métrico proporcionam ferramentas que facilitam o trabalho. Os espaços de Tychonoff são espaços topológicos que, apesar de não serem necessariamente metrizáveis, possuem propriedades análogas aos espaços métricos de modo a ser possível o estudo de ações de semigrupos nessa classe de espaço. Essas propriedades são decorrentes da existência de famílias admissíveis de coberturas abertas. Nesta seção, apresentamos a definição de família admissível de coberturas abertas. Apresentamos também o conceito de $\mathcal{U}$-vizinhança de um conjunto referente a uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ e o relacionamos com a definição de família admissível. Mostramos que um espaço de Hausdorff admite uma família admissível de coberturas abertas se e somente se ele é um espaço de Tychonoff. Algumas propriedades e exemplos de espaços que admitem famílias admissíveis são estudados, incluindo resultados que tratam de convergência de redes. Nos referimos a [1, 2, 16, 35, 37, 46, 54, 55] para a teoria de espaços que admitem famílias admissíveis de coberturas abertas. Para os leitores que nunca tiveram contato com a teoria de famílias admissíveis de coberturas abertas, a referência [2] é especialmente indicada.

1.2.1 Famílias admissíveis de coberturas abertas

O conceito de família admissível de coberturas abertas foi introduzido por Patrão e San Martin em [35] para estudar transitividade por cadeias no contexto de semifluxos em espaços topológicos. A partir daí, esse conceito tem sido usado no estudo de diversos aspectos da dinâmica de um semigrupo, tais como estabilidade de Lyapunov, estabilidade de Poisson, transitividade e recorrência por cadeias, atratores, repulsores, entre outros (veja [12, 14, 15, 16, 47, 48]). Na sequência, apresentamos os conceitos e resultados básicos da teoria de famílias admissíveis de coberturas abertas.

Seja M um espaço topológico. Dadas duas coberturas abertas $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ de M, escrevemos $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{U}$ se $\mathcal{V}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$, isto é, se dado $V \in \mathcal{V}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subset U$. Além disso, escrevemos $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$ se, para quaisquer $V, V' \in \mathcal{V}$, com $V \cap V' \neq \varnothing$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \cup V' \subset U$. É claro que $\leqslant$ é uma pré-ordem no conjunto das coberturas abertas de M, isto é, $\leqslant$ é uma relação reflexiva e transitiva. Dado um subconjunto compacto $K \subset M$, escrevemos

$$[\mathcal{U}, K] = \{U \in \mathcal{U} : K \cap U \neq \varnothing\}.$$

Seja V um subconjunto aberto de M e seja K um subconjunto compacto de M contido em V. Dizemos que uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de M é K-**subordinada** a V se todo elemento de $\mathcal{U}$ que intersepta K está contido em V, ou seja, se $U \in [\mathcal{U}, K]$, então $U \subset V$.

Tendo estabelecido estas notações, podemos apresentar a definição de família admissível de coberturas abertas.

Definição 1.18. *Uma família $\mathcal{O}$ de coberturas abertas de M é* ***admissível*** *se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$;*

2. *se V é um subconjunto aberto de M e se K é um subconjunto compacto de M contido em V, então existe uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ que é K-subordinada a V.*

3. *dadas $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ que refina $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ simultaneamente.*

Se existe uma família admissível de coberturas abertas em M, dizemos que $(M, \mathcal{O})$ é um ***espaço admissível****.*

Originalmente, a Definição 1.18 não apresentava o item 3 (ver [35], Definição 3.1). Essa condição foi acrescentada por Braga Barros e Souza em [12, 14] para que a família

$\mathcal{O}$ pudesse ser usada para indexar redes em M. A nomenclatura "espaço admissível" foi introduzida por Souza em [46, Definição 2]. Quando não houver confusão sobre a família admissível em questão, um espaço admissível $(M, \mathcal{O})$ é indicado simplesmente por M.

Antes de apresentar algumas propriedades de espaços admissíveis, precisamos introduzir o conceito de $\mathcal{U}$-vizinhança.

Definição 1.19. *Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de M. A $\mathcal{U}$-**vizinhança** de $X \subset M$ é o conjunto*

$$\begin{aligned} \mathrm{B}(X,\mathcal{U}) &= \{y \in M : \textit{existem } x \in X \textit{ e } U \in \mathcal{U} \textit{ tais que } x, y \in U\} \\ &= \bigcup \{U \in \mathcal{U} : U \cap X \neq \varnothing\}. \end{aligned}$$

Note que $\mathrm{B}(X,\mathcal{U})$ é um conjunto aberto por se tratar de uma união de conjuntos abertos de M. Dado $x \in M$, é usual denotar $\mathrm{B}(\{x\},\mathcal{U})$ por $\mathrm{B}(x,\mathcal{U})$. Em algumas referências (por exemplo, [1, 46]), a $\mathcal{U}$-vizinhança de um subconjunto $X \subset M$ é também chamada de **estrela** de X com respeito a $\mathcal{U}$ é denotada por $\mathrm{St}(X,\mathcal{U})$.

É imediato que o segundo item da Definição 1.18 pode ser reescrito em termos de $\mathcal{U}$-vizinhanças, da seguinte forma:

2'. se V é um subconjunto aberto de M e se K é um subconjunto compacto de M contido em V, então existe uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathrm{B}(K,\mathcal{U}) \subset V$.

Daqui em diante, quando nos referirmos ao item 2 da Definição 1.18, estaremos nos referindo ao item 2'.

Não é difícil verificar que a coleção de todas as $\mathcal{U}$-vizinhanças $\mathrm{B}(x,\mathcal{U})$, com $x \in M$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, forma uma base para a topologia de M. Consequentemente, um subconjunto U de M é aberto em M se e somente se, para cada $x \in U$, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathrm{B}(x, \mathcal{V}) \subset U$. Esse fato se assemelha ao fato que, num espaço métrico (N, d), a coleção de todas as ε-bolas $B(x, \varepsilon)$, com $x \in N$ e $\varepsilon > 0$, forma uma base para a topologia de (N, d). Ao longo desta seção ficará claro que as $\mathcal{U}$-vizinhanças de um espaço admissível $(M, \mathcal{O})$, com $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, se comportam de maneira análoga às ε-vizinhanças[2] de um espaço métrico e, portanto, as

[2]Para cada $\varepsilon > 0$, a ε-**vizinhança** de um subconjunto X de um espaço métrico (M, d) é o subconjunto de M dado por $B(X, \varepsilon) = \{y \in M : d(y, X) < \varepsilon\}$.

técnicas e a argumentação que são próprias dos espaços métricos podem ser "traduzidas" em termos de $\mathcal{U}$-vizinhanças, permitindo a obtenção dos resultados no estudo de ações de semigrupos.

A seguir, apresentamos algumas propriedades dos espaços admissíveis.

Proposição 1.20. *Seja $(M, \mathcal{O})$ um espaço admissível. Se M é um espaço* T_0[3]*, então M é um espaço de Hausdorff.*

Demonstração: Veja [46, Proposição 1]. □

Segue da Proposição 1.20 que espaços admissíveis que não são Hausdorff são espaços considerados "patológicos", no sentido em que eles não possuem as mais básicas propriedades de separação. Logo, não há nenhuma perda de generalidade em trabalhar-se com espaços de Hausdorff admissíveis.

A existência de uma família admissível de coberturas abertas em um espaço topológico está relacionada com o fato desse espaço satisfazer um axioma de separação, a saber, o axioma de espaço completamente regular. Dizemos que M é um espaço **completamente regular** se um ponto pode ser separado de um conjunto fechado que não o contém por uma função contínua, no sentido que se F é um subconjunto fechado de M e $x \in M$ não pertence a F, então existe uma função contínua $f : M \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 1$ e $f(F) = 0$. Um espaço de Hausdorff completamente regular é chamado **espaço de Tychonoff** (ou **espaço** $T_{3\frac{1}{2}}$). Unindo [58, Teorema 38.2] (M é uniformizável se e somente se M é completamente regular) com [1, Teorema 1] (M é admisível se e somente se M é uniformizável), concluímos que um espaço topológico M é admissível se e somente se M é completamente regular. Portanto, M é um espaço de Hausdorff admissível se e somente se M é um espaço de Tychonoff. Temos, assim, o seguinte resultado.

Teorema 1.21. *Seja M um espaço de Hausdorff. Então, M é um espaço admissível se e somente se M é um espaço de Tychonoff.*

[3]Dizemos que M é um **espaço de Kolmogorov** (ou **espaço** T_0) se quaisquer dois pontos distintos $x, y \in M$ são **topologicamente distinguíveis**, isto é, se existe uma vizinhança U de x em M que não contém y.

Não é difícil verificar que $\mathrm{B}(x,\mathcal{V}) \subset \mathrm{B}(x,\mathcal{U})$ se $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{U}$, para todo $x \in M$. No caso em que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.22. *Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ duas coberturas abertas de M tais que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$ e seja X um subconjunto de M. Então, $\overline{\mathrm{B}(X,\mathcal{V})} \subset \mathrm{B}(X,\mathcal{U})$.*

Demonstração: Veja [16, Proposição 2.5] (ou [37, Lema 2.4]). □

A seguir, relacionamos famílias admissíveis de coberturas abertas e funções contínuas.

Proposição 1.23. *Sejam M e N espaços topológicos, $f : M \longrightarrow N$ um homeomorfismo, X um subconjunto de M e $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de M. Então,*

$$f(\mathrm{B}(X,\mathcal{U})) = \mathrm{B}(f(X), f(\mathcal{U})), \tag{1.7}$$

onde $f(\mathcal{U}) = \{f(U) : U \in \mathcal{U}\}$. Além disso, se $\mathcal{O}$ é uma família admissível de coberturas abertas de M, então $f(\mathcal{O}) = \{f(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathcal{O}\}$ é uma família admissível de coberturas abertas de N.

Demonstração: O fato de f ser um homeomorfismo implica imediatamente que $f(\mathcal{U})$ é uma cobertura aberta de N. Agora, seja $y \in \mathrm{B}(X,\mathcal{U})$. Tome $x \in X$ e $U \in \mathcal{U}$ tais que $y, x \in U$. Temos que $f(y), f(x) \in f(U)$ e, assim, $f(y) \in \mathrm{B}(f(X), f(\mathcal{U}))$. Reciprocamente, tome $y \in \mathrm{B}(f(X), f(\mathcal{U}))$. Então, existem $x \in X$ e $U \in \mathcal{U}$ tais que $y, f(x) \in f(U)$. Daí, segue que $f^{-1}(y), x \in U$, de modo que $f^{-1}(y) \in \mathrm{B}(X,\mathcal{U})$. Portanto, $y \in f(\mathrm{B}(X,\mathcal{U}))$.

Agora, mostremos que $f(\mathcal{O})$ é uma família admissível de coberturas abertas de N. Fixe $f(\mathcal{U}) \in f(\mathcal{O})$. Tome $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Se $f(V), f(V') \in f(\mathcal{V})$ são tais que $f(V) \cap f(V') \neq \varnothing$, então $V \cap V' \neq \varnothing$, pois $f(V) \cap f(V') = f(V \cap V')$. Tome $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \cup V' \subset U$. Então, $f(V) \cap f(V') = f(V \cap V') \subset f(U)$, de modo que $f(\mathcal{V}) \leqslant \frac{1}{2} f(\mathcal{U})$. Agora, seja K um subconjunto compacto de N e seja V um subconjunto aberto de N tais que $K \subset V$. Tome uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathrm{B}(f^{-1}(K),\mathcal{U}) \subset f^{-1}(V)$. Segue que

$$\mathrm{B}(K, f(\mathcal{U})) = f(\mathrm{B}(f^{-1}(K),\mathcal{U})) \subset f(f^{-1}(V)) = V.$$

Por fim, sejam $f(\mathcal{U}), f(\mathcal{V}) \in f(\mathcal{O})$. Existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{U}$ e $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$. Para cada $f(W) \in f(\mathcal{W})$, podemos escolher $U \in \mathcal{U}$ e $V \in \mathcal{V}$ tais que $W \subset U$ e $W \subset V$. Logo,

$f(W) \subset f(U)$ e $f(W) \subset f(V)$, mostrando que $f(\mathcal{W}) \leqslant f(\mathcal{U})$ e $f(\mathcal{W}) \leqslant f(\mathcal{V})$. □

O conceito de aplicação uniformemente contínua pode ser naturalmente estendido para o contexto de espaços admissíveis.

Definição 1.24. *Sejam $(M, \mathcal{O}_M)$ e $(N, \mathcal{O}_N)$ dois espaços admissíveis. Dizemos que uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é* ***uniformemente contínua*** *se para qualquer cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_N$, existe uma cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_M$ tal que $f(\mathrm{B}(x, \mathcal{V})) \subset \mathrm{B}(f(x), \mathcal{U})$, para todo $x \in M$. Uma aplicação uniformemente contínua $f : M \longrightarrow N$ é um* ***homeomorfismo uniforme*** *se f^{-1} é uma aplicação uniformemente contínua.*

O seguinte resultado nos diz que aplicações uniformemente contínuas "levam" $\mathcal{U}$-vizinhanças em $\mathcal{U}$-vizinhanças.

Proposição 1.25. *Sejam $(M, \mathcal{O}_M)$ e $(N, \mathcal{O}_N)$ dois espaços admissíveis e $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação uniformemente contínua. Então, para qualquer cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_N$, existe uma cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_M$ tal que $f(\mathrm{B}(X, \mathcal{V})) \subset \mathrm{B}(f(X), \mathcal{U})$, para todo $X \subset M$.*

Demonstração: Fixe uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_N$ e $X \subset M$. Como f é uniformemente contínua, existe uma cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_M$ tal que $f(\mathrm{B}(x, \mathcal{V})) \subset \mathrm{B}(f(x), \mathcal{U})$, para todo $x \in M$. Portanto,

$$f(\mathrm{B}(X, \mathcal{V})) = f(\bigcup_{x \in X} \mathrm{B}(x, \mathcal{V})) = \bigcup_{x \in X} f(\mathrm{B}(x, \mathcal{V})) \subset \bigcup_{x \in X} \mathrm{B}(f(x), \mathcal{U}) = \mathrm{B}(f(X), \mathcal{U}).$$

□

O conceito de aplicação uniformemente contínua apresentado na Definição 1.24 coincide com o conceito de aplicação uniformemente contínua para espaços uniformizáveis (veja [46, Teorema 7]). Para mais propriedades de aplicações uniformemente contínuas, veja [46, Subseção 4.1] e [58, Capítulo 9].

A seguinte proposição nos diz que subespaços topológicos de espaços admissíveis são espaços admissíveis.

Proposição 1.26. *Sejam $Y \subset X \subset M$ e $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de M. Então,*

$$\mathrm{B}(Y, \mathcal{U}_X) = \mathrm{B}(Y, \mathcal{U}) \cap X, \tag{1.8}$$

onde $\mathcal{U}_X = \{U \cap X : U \in \mathcal{U}\}$*. Além disso, se* $\mathcal{O}$ *é uma família admissível de coberturas abertas de* M*, então* $\mathcal{O}_X = \{\mathcal{U}_X : \mathcal{U} \in \mathcal{O}\}$ *é uma família admissível de coberturas abertas de* X*.*

Demonstração: É claro que $\mathcal{U}_X$ é uma cobertura aberta de X. Se $z \in \mathrm{B}(Y,\mathcal{U}_X)$, existem $y \in Y$ e $U \in \mathcal{U}$ tais que $z, y \in U \cap X$. Logo, $z \in \mathrm{B}(Y,\mathcal{U}) \cap X$. Reciprocamente, se $z \in \mathrm{B}(Y,\mathcal{U}) \cap X$, existem $y \in Y$ e $U \in \mathcal{U}$ tais que $z, y \in U$. Segue que $z, y \in U \cap X$ e, portanto, $z \in \mathrm{B}(Y,\mathcal{U}_X)$.

Agora, mostremos que $\mathcal{O}_X$ é uma família admissível de coberturas abertas de X. Seja $\mathcal{U}_X \in \mathcal{O}_X$. Tome $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Se $V \cap X, V' \cap X \in \mathcal{V}_X$ são tais que $(V \cap X) \cap (V' \cap X) \neq \varnothing$, então $V \cap V' \neq \varnothing$, pois $(V \cap X) \cap (V' \cap X) = (V \cap V') \cap X$. Assim, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \cup V' \subset U$, de modo que $(V \cap X) \cup (V' \cap X) = (V \cup V') \cap X \subset U \cap X$. Isso mostra que $\mathcal{V}_X \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}_X$. Agora, seja K um subconjunto compacto de X e V um subconjunto aberto de X tais que $K \subset V$. Seja U um subconjunto aberto de M tal que $V = U \cap X$ e seja $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathrm{B}(K,\mathcal{U}) \subset U$. Então,

$$\mathrm{B}(K,\mathcal{U}_X) = \mathrm{B}(K,\mathcal{U}) \cap X \subset U \cap X = V.$$

Por fim, fixe $\mathcal{U}_X, \mathcal{V}_X \in \mathcal{O}_X$ e tome $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{U}$ e $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$. Dado $W \cap X \in \mathcal{W}_X$, existem $U \in \mathcal{U}$ e $V \in \mathcal{V}$ tais que $W \subset U$ e $W \subset V$. Logo, $W \cap X \subset U \cap X$ e $W \cap X \subset V \cap X$ e, portanto, $\mathcal{W}_X \leqslant \mathcal{U}_X$ e $\mathcal{W}_X \leqslant \mathcal{V}_X$. □

Apresentamos agora alguns exemplos de espaços admissíveis.

Exemplo 1.27. (Espaços métricos) Espaços métricos admitem famílias admissíveis de coberturas abertas. Com efeito, suponha que (M, d) é um espaço métrico. Para cada $\varepsilon > 0$, seja

$$\mathcal{U}_\varepsilon = \{B(x,\varepsilon) : x \in M\}$$

a cobertura aberta de M dada por todas as ε-bolas de M e considere a seguinte família de coberturas abertas de M:

$$\mathcal{O} = \{\mathcal{U}_\varepsilon : \varepsilon > 0\}.$$

Em [37, Lema 2.8] (veja também [16, Proposição 2.2]), prova-se que, para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $X \subset M$,

$$\mathrm{B}(X,\mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{2}}) \subset B(X,\varepsilon) \subset \mathrm{B}(X,\mathcal{U}_\varepsilon). \tag{1.9}$$

Com essas inclusões estabelecidas, pode-se provar que a família $\mathcal{O}$ é admissível. De fato, se $\varepsilon > 0$, resulta da desigualdade triangular que $\mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{2}} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}_{\varepsilon}$. Se V é um subconjunto aberto de M e K é um subconjunto compacto de M contido em V, então existe $\delta > 0$ tal que $B(K, \delta) \subset V$.[4] Logo, segue de (1.9) que $\mathrm{B}(K, \mathcal{U}_{\frac{\delta}{2}}) \subset V$. Por fim, dadas $\mathcal{U}_{\varepsilon}, \mathcal{U}_{\delta} \in \mathcal{O}$, a cobertura $\mathcal{U}_{\xi} \in \mathcal{O}$, com $\xi = \min\{\varepsilon, \delta\}$, satisfaz $\mathcal{U}_{\xi} \leqslant \mathcal{U}_{\varepsilon}$ e $\mathcal{U}_{\xi} \leqslant \mathcal{U}_{\delta}$. Para os detalhes, veja [37, Teorema 2.9]. $\diamond$

Exemplo 1.28. (Espaços de Hausdorff paracompactos) Se M é um espaço de Hausdorff paracompacto, então a família de todas as coberturas abertas de M é admissível ([46, Teorema 2]). Em particular, a família de todas as coberturas abertas de um espaço de Hausdorff compacto é admissível. Um outro exemplo de família admissível em espaços de Hausdorff compactos é a família de todas as coberturas abertas finitas ([46, Exemplo 1]). $\diamond$

Exemplo 1.29. (Grupos topológicos e espaços homogêneos [48, Subseção 4.1]) Seja $\mathfrak{V}$ um sistema de vizinhanças simétricas da identidade em um grupo topológico de Hausdorff G com elemento neutro 1. Para cada $V \in \mathfrak{V}$, considere a cobertura aberta $\mathcal{U}_V = \{Vg : g \in G\}$ de G. A família de todas as coberturas abertas dadas dessa forma,

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{V}} = \{\mathcal{U}_V : V \in \mathfrak{V}\}$$

é admissível. Agora, assuma que G é localmente compacto e que H é um subgrupo fechado de G. Seja $\pi : G \longrightarrow G/H$ a projeção. Para cada $V \in \mathfrak{V}$, considere a cobertura aberta de G/H dada por $\pi(\mathcal{U}_V) = \{\pi(Vg) : g \in G\}$. Então, família de coberturas abertas de G/H dada por

$$\mathcal{O}_{\pi} = \{\pi(\mathcal{U}_V) : V \in \mathfrak{V}\}$$

é admissível. $\diamond$

1.2.2 Redes em espaços de Tychonoff

O fato de um espaço topológico admitir uma família admissível de coberturas abertas permite descrever sua topologia em termos de redes indexadas pela família admissível, assim como a topologia de um espaço métrico é caracterizada por sequências. Nesta seção,

[4] Esse é um exercício usual na teoria de espaços métricos. Veja [33, Seção 27, Exercício 2].

apresentamos algumas definições, notações e resultados sobre redes e subredes em espaços de Tychonoff.

Para começar, estabeleçamos algumas notações. Seja Λ um conjunto e $<$ uma pré-ordem em Λ. Dizemos que $(\Lambda, <)$ é um **conjunto dirigido** se, para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\lambda > \lambda_1$ e $\lambda > \lambda_2$. Neste caso, dizemos que $<$ é uma **direção** em $(\Lambda, <)$. Em geral, um conjunto dirigido $(\Lambda, <)$ é apenas denotado por Λ, ficando subentendida a direção com a qual Λ está munido. Uma **rede** em um conjunto M é uma aplicação $x : \Lambda \to M$. Denotamos uma rede $x : \Lambda \to M$ por $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, onde $x(\lambda) = x_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Uma **subrede** de $x : \Lambda \to M$ é uma rede da forma $x \circ \phi : \Sigma \to M$, onde Σ é um conjunto dirigido e $\phi : \Sigma \to \Lambda$ é uma aplicação **crescente** e **cofinal**, isto é,

1. dados $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$, com $\sigma_1 < \sigma_2$, então $\phi(\sigma_1) < \phi(\sigma_2)$ (ϕ é crescente) e

2. dado $\lambda \in \Lambda$, existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $\lambda < \phi(\sigma)$ (ϕ é cofinal).

Se $x \circ \phi : \Sigma \to M$ é uma subrede de uma rede $x : \Lambda \to M$, então usamos a notação $\phi(\sigma) = \lambda_\sigma$, para todo $\sigma \in \Sigma$, e denotamos a subrede $x \circ \phi$ por $(x_{\lambda_\sigma})_{\sigma \in \Sigma}$. Nessa notação, as propriedades de subredes podem ser reescritas da seguinte forma:

1'. dados $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$, com $\sigma_1 < \sigma_2$, então $\lambda_{\sigma_1} < \lambda_{\sigma_2}$ e

2'. dado $\lambda \in \Lambda$, existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $\lambda < \lambda_\sigma$.

Agora, seja $\mathcal{O}$ uma família admissível de coberturas abertas de um espaço de Tychonoff M. Dizemos que uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ **converge** a $x \in M$, e indicamos esse fato por $x_\lambda \longrightarrow x$, se, para qualquer vizinhança U de x em M, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que, se $\lambda > \lambda_0$, então $x_\lambda \in U$. Uma consequência imediata da Definição 1.18 é que uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ em M converge para $x \in M$ se e somente se, para qualquer cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que, se $\lambda > \lambda_0$, então $x_\lambda \in \mathrm{B}(x, \mathcal{U})$. Além disso, não é difícil demonstrar que se X é um subconjunto de M, então $x \in \overline{X}$ se e somente se existe uma rede $(x_\mathcal{V})_{\mathcal{V} \in \mathcal{O}} \subset X$ tal que $x_\mathcal{V} \to x$.

Toda família admissível admite uma direção natural induzida pelos refinamentos de suas coberturas abertas. Tal direção é a ordem contrária a dada por refinamentos, isto é,

$$\mathcal{U} < \mathcal{V} \text{ se e somente se } \mathcal{V} \leqslant \mathcal{U}, \text{ com } \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}. \tag{1.10}$$

Em toda esta tese, sempre que trabalharmos com redes indexadas por uma família admissível de coberturas abertas, consideraremos a direção dada em (1.10).

A proposição a seguir é muito utilizada no estudo da estabilidade de Lyapunov de conjuntos compactos.

Proposição 1.30. *Seja K um subconjunto compacto de M. Para cada $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, tome $x_{\mathcal{V}} \in \mathrm{B}(K, \mathcal{V})$. Então, existe uma subrede $(x_{\mathcal{V}_\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ de $(x_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V} \in \mathcal{O}}$ que converge a algum ponto de K.*

Demonstração: Veja [16, Proposição 2.6] (ou [37, Lema 2.7]). □

Como consequência, temos o seguinte resultado.

Corolário 1.31. *Seja $x \in M$. Suponha que, para cada $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, existe $x_{\mathcal{V}} \in \mathrm{B}(x, \mathcal{V})$. Então, $x_{\mathcal{V}} \longrightarrow x$.*

O próximo resultado é sobre a convergência de subredes de redes indexadas por uma família admissível de coberturas abertas.

Proposição 1.32. *Sejam $(x_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V} \in \mathcal{O}}$ e $(y_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V} \in \mathcal{O}}$ redes em M tais que $y_{\mathcal{V}} \in \mathrm{B}(x_{\mathcal{V}}, \mathcal{V})$, para toda cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$. Suponha que existe uma subrede $(x_{\mathcal{V}_\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ de $(x_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V} \in \mathcal{O}}$ tal que $x_{\mathcal{V}_\lambda} \longrightarrow x$ em M. Então, $y_{\mathcal{V}_\lambda} \longrightarrow x$ em M.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{U}, \mathcal{W} \in \mathcal{O}$ coberturas abertas tais que $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Tome $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_{\mathcal{V}_\lambda} \in \mathrm{B}(x, \mathcal{W})$ se $\lambda > \lambda_0$. Agora, seja $\lambda_1 \in \Lambda$ tal que $\lambda_1 > \lambda_0$ e $\mathcal{V}_{\lambda_1} \leqslant \mathcal{W}$. Se $\lambda > \lambda_1$, então existe $W_1 \in \mathcal{W}$ tal que $x_{\mathcal{V}_\lambda}, x \in W_1$ e existe $V_\lambda \in \mathcal{V}_\lambda$ tal que $y_{\mathcal{V}_\lambda}, x_{\mathcal{V}_\lambda} \in V_\lambda$. Como $\mathcal{V}_\lambda \leqslant \mathcal{V}_{\lambda_1} \leqslant \mathcal{W}$, existe $W_2 \in \mathcal{W}$ tal que $y_{\mathcal{V}_\lambda}, x_{\mathcal{V}_\lambda} \in V_\lambda \subset W_2$ e, como $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $W_1 \cup W_2 \subset U$. Logo, $y_{\mathcal{V}_\lambda}, x \in U$, ou seja, $y_{\mathcal{V}_\lambda} \in \mathrm{B}(x, \mathcal{U})$. Portanto, $y_{\mathcal{V}_\lambda} \longrightarrow x$. □

No resultado a seguir, apresentamos condições suficientes para a convergência de redes cujo conjunto dirigido envolve famílias admissíveis de coberturas abertas.

Proposição 1.33. *Seja $(\Lambda, <)$ um conjunto dirigido. Considere a seguinte direção em $\Lambda \times \mathcal{O}$:*

$$(\mu, \mathcal{U}) < (\lambda, \mathcal{V}) \text{ se } \mu < \lambda \text{ e } \mathcal{U} < \mathcal{V}. \tag{1.11}$$

Sejam $(x_{(\lambda,\mathcal{V})})_{(\lambda,\mathcal{V})\in\Lambda\times\mathcal{O}}$ *e* $(y_{(\lambda,\mathcal{V})})_{(\lambda,\mathcal{V})\in\Lambda\times\mathcal{O}}$ *duas redes em* M *tais que* $y_{(\lambda,\mathcal{V})} \in \mathrm{B}(x_{(\lambda,\mathcal{V})}, \mathcal{V})$, *para toda cobertura aberta* $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$. *Suponha que* $x_{(\lambda,\mathcal{V})} \longrightarrow x$ *em* M. *Então,* $y_{(\lambda,\mathcal{V})} \longrightarrow x$.

Demonstração: Seja $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ uma cobertura aberta e escolha uma cobertura aberta $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Como $x_{(\lambda,\mathcal{V})} \longrightarrow x$, existe $(\lambda_0, \mathcal{V}_0) \in \Lambda \times \mathcal{O}$ tal que $x_{(\lambda,\mathcal{V})} \in \mathrm{B}(x, \mathcal{W})$ se $(\lambda, \mathcal{V}) > (\lambda_0, \mathcal{V}_0)$. Agora, tome uma cobertura aberta $\mathcal{V}_1 \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V}_1 \leqslant \mathcal{V}_0$ e $\mathcal{V}_1 \leqslant \mathcal{W}$. Então, se $(\lambda, \mathcal{V}) \geqslant (\lambda_0, \mathcal{V}_1)$, temos que $x_{(\lambda,\mathcal{V})} \in \mathrm{B}(x, \mathcal{W})$ e $y_{(\lambda,\mathcal{V})} \in \mathrm{B}(x_{(\lambda,\mathcal{V})}, \mathcal{V}) \subset \mathrm{B}(x_{(\lambda,\mathcal{V})}, \mathcal{W})$. Isto significa que existem $W_1, W_2 \in \mathcal{W}$ tais que $x_{(\lambda,\mathcal{V})}, x \in W_1$ e $y_{(\lambda,\mathcal{V})}, x_{(\lambda,\mathcal{V})} \in W_2$. Como $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $W_1 \cup W_2 \in U$. Daí, $y_{(\lambda,\mathcal{V})}, x \in U$, ou seja, $y_{(\lambda,\mathcal{V})} \in \mathrm{B}(x, \mathcal{U})$. Portanto, $y_{(\lambda,\mathcal{V})} \longrightarrow x$, como queríamos demonstrar. □

A Proposição 1.33 implica o seguinte resultado.

Corolário 1.34. *Seja* $(\Lambda, <)$ *um conjunto dirigido e considere em* $\Lambda \times \mathcal{O}$ *a direção dada em (1.11). Seja* $(y_{(\lambda,\mathcal{V})})_{(\lambda,\mathcal{V})\in\Lambda\times\mathcal{O}}$ *uma rede em* M *tal que* $y_{(\lambda,\mathcal{V})} \in \mathrm{B}(x, \mathcal{V})$, *para toda cobertura aberta* $\mathcal{V} \in \mathcal{V}$, *com* $x \in M$. *Então,* $y_{(\lambda,\mathcal{V})} \longrightarrow x$.

Demonstração: Para cada $(\lambda, \mathcal{V}) \in \Lambda \times \mathcal{O}$, seja $x_{(\lambda,\mathcal{V})} = x$. Temos que $y_{(\lambda,\mathcal{V})} \in \mathrm{B}(x_{(\lambda,\mathcal{V})}, \mathcal{V})$, para toda cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, e que $x_{(\lambda,\mathcal{V})} \longrightarrow x$. Segue da Proposição 1.33 que $y_{(\lambda,\mathcal{V})} \longrightarrow x$. □

1.3 Conjuntos limite e prolongamentos

Nesta seção, apresentamos os objetos dinâmicos básicos que são necessários ao estudo do comportamento assintótico da ação de um semigrupo em um espaço de Tychonoff: os conjuntos limite, os prolongamentos e os conjuntos limite prolongacionais. Elencamos também alguns resultados necessários aos demais capítulos desta tese. Toda a teoria é ilustrada com diversos exemplos.

Ao longo desta seção, $\mathcal{S}$ denota um semigrupo que age em um espaço de Tychonoff M. Além disso, $\mathcal{O}$ denota uma família admissível de coberturas abertas de M e $\mathcal{F}$ denota uma família de subconjuntos de $\mathcal{S}$.

Os conjuntos limite para ações de semigrupos foram introduzidos em [12, 14]. A seguir, apresentamos a definição de conjuntos limite para ações de semigrupos.

Definição 1.35. *Seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de $\mathcal{S}$ e seja X um subconjunto de M. Os conjuntos*

$$\omega(X,\mathcal{F}) = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} \overline{AX} \quad e \quad \omega^*(X,\mathcal{F}) = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} \overline{A^*X}$$

são chamados, respectivamente, ***conjunto*** ω***-limite*** *e* ***conjunto*** ω^****-limite*** *de X por $\mathcal{F}$. Esses dois conjuntos são chamados* ***conjuntos limite*** *de X por $\mathcal{F}$.*

Note que cada família de subconjuntos de $\mathcal{S}$ determina um comportamento assintótico para ação de $\mathcal{S}$ em M.

A seguir, apresentamos alguns exemplos de conjuntos limite.

Exemplo 1.36. Seja ϕ um fluxo contínuo em um espaço métrico (M, d) e seja $X \subset M$. Para quaisquer $t \in \mathbb{R}$ e $x \in M$, seja $tx = \phi(t, x)$. O **conjunto ω-limite** e o **conjunto ω^*-limite** (ou **conjunto α-limite**) de um subconjunto $X \subset M$ são definidos, respectivamente, como sendo

$$\omega(X) = \bigcap_{t\geqslant 0} \overline{(t,+\infty)X} \quad \text{e} \quad \omega^*(X) = \bigcap_{t\geqslant 0} \overline{(-\infty,-t)X}. \tag{1.12}$$

Grosso modo, enquanto as órbitas positivas de ϕ partindo de um subconjunto $X \subset M$ descrevem exatamente o "caminho percorrido" pelos pontos $x \in X$ sob a ação de ϕ, o conjunto ω-limite de X indica "para onde vão" as órbitas positivas de ϕ partindo de X quando se avança arbitrariamente no "futuro". Semelhantemente, enquanto as órbitas negativas de ϕ referentes a X descrevem exatamente o "caminho" dos pontos de M que atingem X, o conjunto ω^*-limite de X indica "a origem" dos pontos de M que atingem X, indicando, portanto, o "passado" de tais pontos.

Considere a família

$$\mathcal{F} = \{(t,+\infty) : t \geqslant 0\}.$$

É imediato verificar que $\omega(X,\mathcal{F}) = \omega(X)$. Além disso, como

$$\begin{aligned}(t,+\infty)^*X &= \{y \in M : \text{ existem } s > t \text{ e } x \in X \text{ tal que } sy = x\}\\ &= \{y \in M : \text{ existem } s > t \text{ e } x \in X \text{ tal que } -sx = y\}\\ &= (-\infty,-t)X,\end{aligned}$$

para todo $t \geqslant 0$, segue que $\omega^*(X, \mathcal{F}) = \omega^*(X)$. Portanto, os conjuntos limite para fluxos dados em (1.12) são casos particulares da Definição 1.35.

O mesmo ocorre no caso de fluxos discretos: se ϕ é um fluxo discreto em um espaço métrico (M, d), os conjuntos limite usuais são os conjuntos limite da ação de $\mathbb{Z}$ em M (induzida pelo fluxo ϕ) considerando a família $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} = \{(t, +\infty) \cap \mathbb{Z} : t \geqslant 0\}$. Para mais detalhes sobre conjuntos limite de fluxos, veja [5, 6, 7, 23, 25, 26, 28, 37]. $\diamond$

Exemplo 1.37. Seja ϕ um semifluxo contínuo em um espaço topológico M. Para quaisquer $t \in \mathbb{R}^+$ e $x \in M$, seja $tx = \phi(t, x)$. Os conjuntos limite de um subconjunto $X \subset M$ pelo semifluxo ϕ são definidos[5] como sendo

$$\omega(X) = \bigcap_{t \geqslant 0} \overline{(t, +\infty)X} \quad \text{e} \quad \omega^*(X) = \bigcap_{t \geqslant 0} \overline{(t, +\infty)^* X}.$$

Não é difícil verificar que os conjuntos limite de X pelo semifluxo ϕ coincidem com os conjuntos limite da ação de $\mathbb{R}^+$ em M (induzida por ϕ) considerando a família $\mathcal{F} = \{(t, +\infty) : t \geqslant 0\}$. O mesmo acontece no caso de semifluxos discretos. Para mais detalhes sobre conjuntos limite de semifluxos, veja [7, 23, 28, 34, 35, 55]. $\diamond$

Exemplo 1.38. Seja Ψ um fluxo n-dimensional em M. Fixe $i \in \{1, \ldots, n\}$ e considere o semifluxo n-dimensional em M definido por $\mathcal{S}_i$. Para cada $t \geqslant 0$, seja

$$A_i(t) = \{(t_1, \ldots, t_n) : t_i \geqslant t\}$$

e considere a seguinte família de subconjuntos de $\mathcal{S}_i$:

$$\mathcal{F}_i = \{A_i(t) : t \geqslant 0\}.$$

A família $\mathcal{F}_i$ é considerada em [12, Exemplo 2.6] para o estudo do comportamento assintótico do semifluxo n-dimensional determinado por $\mathcal{S}_i$. Além disso, a família

$$\mathcal{F} = \{A(t) : t \geqslant 0\}, \text{ onde } A(t) = \bigcap_{i=1}^{n} A_i(t), \text{ com } t \geqslant 0,$$

é uma família de subconjuntos do semigrupo $\mathcal{S} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{S}_i$. $\diamond$

[5] Veja [34, 35].

Exemplo 1.39. Em [24], Colonius e Kliemann apresentam o conceito de fluxo de controle ([24, Seção 4.3]). Para um sistema de controle Σ cujo conjunto das funções de controle é denotado por $\mathcal{U}$, o fluxo de controle é um fluxo contínuo em $\mathcal{U} \times M$ definido em termos de Σ. Através da projeção $\pi_M : \mathcal{U} \times M \longrightarrow M$, pode-se obter propriedades do sistema de controle Σ em termos do seu fluxo de controle associado. Esse fato relaciona as teorias de sistemas dinâmicos e de sistemas de controle. Com o advento da definição de conjuntos limite para ações de semigrupos, pode-se estudar a dinâmica de um sistema de controle pensando no próprio sistema como sendo o "sistema dinâmico" em questão. Mais precisamente, seja Σ um sistema de controle em uma variedade diferenciável M de classe C^∞ cujo conjunto das funções de controle é $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{cp}$. Então, segue do Corolário 1.16 que $\mathcal{S}_\Sigma x = \mathcal{O}^+_\Sigma(x)$ e $\mathcal{S}^{-1}_\Sigma x = \mathcal{O}^-_\Sigma(x)$. Dessa forma, o estudo da dinâmica do sistema de controle Σ se resume ao estudo da dinâmica da ação do semigrupo do sistema $\mathcal{S}_\Sigma$ em M. Em [9], introduziu-se a seguinte família de subconjuntos de $\mathcal{S}_\Sigma$: dado $t \geqslant 0$, seja

$$\mathcal{S}_{\geqslant t} = \{\varphi^{u_n}_{t_n} \circ \cdots \circ \varphi^{u_1}_{t_1} : t_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} t_i \geqslant t, u_i \in U, n \in \mathbb{N}\}.$$

Então,

$$\mathcal{F}_{\mathrm{ctr}} = \{\mathcal{S}_{\geqslant t} : t \geqslant 0\}.$$

Em [12, 13], Braga Barros e Souza utilizaram a família $\mathcal{F}_{\mathrm{ctr}}$ para definir conjuntos limite para ações de semigrupos. O **conjunto ω-limite** $\omega(X)$ e o **conjunto ω^*-limite** $\omega^*(X)$ de um subconjunto $X \subset M$ pelo sistema de controle Σ são definidos, respectivamente, por $\omega(X) = \omega(X, \mathcal{F}_{\mathrm{ctr}})$ e $\omega^*(X) = \omega^*(X, \mathcal{F}_{\mathrm{ctr}})$. Os conjuntos limite para sistemas de controle foram utilizados em [13, 45, 49, 51, 52, 55] para estudar diversas propriedades de sistemas de controle. $\diamond$

Exemplo 1.40. Seja $\mathfrak{P} = \{\phi^i\}_{i \in I}$ um polissistema dinâmico em um espaço topológico M e seja $\mathcal{S}_\mathfrak{P}$ o semigrupo associado a $\mathfrak{P}$. Em [21, página 21], considera-se a seguinte família de subconjuntos de $\mathcal{S}_\mathfrak{P}$: para cada $t \geqslant 0$, denote por

$$(\mathcal{S}_\mathfrak{P})_{\geqslant t} = \{(t_n + \cdots + t_1, \phi^n_{t_n} \circ \cdots \circ \phi^1_{t_1}) : t_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} t_i \geqslant t, n \in \mathbb{N}\}$$

e considere

$$\mathcal{F}_\mathfrak{P} = \{(\mathcal{S}_\mathfrak{P})_{\geqslant t} : t \geqslant 0\}.$$

Os **conjuntos limite** de um subconjunto $X \subset M$ referentes ao polissistema dinâmico $\mathfrak{P}$ são definidos como sendo os conjuntos limite de X pela ação de $\mathcal{S}_{\mathfrak{P}}$ em M referente a família $\mathcal{F}_{\mathfrak{P}}$. ◇

Exemplo 1.41. ([12, Exemplo 2.7]) Suponha que $\mathcal{S}$ é um semigrupo topológico agindo em M. Seja $\mathcal{F}_{\infty}$ a família das vizinhanças de ∞ na compactificação a um ponto de $\mathcal{S}$, isto é, $\mathcal{F}_{\infty} = \{\mathcal{S} \setminus K : K \subset \mathcal{S} \text{ é compacto}\}$. Dados $A = (\mathcal{S} \setminus K) \in \mathcal{F}$ e $X \subset M$, temos que

$$AX = \{y \in M : \text{ existem } s \in (\mathcal{S} \setminus K) \text{ e } x \in X \text{ tais que } sx = y\}.$$

Logo, $\omega(X, \mathcal{F}_{\infty})$ mede o comportamento limite da ação de $\mathcal{S}$ em M no "infinito" do semigrupo partindo de X. ◇

Exemplo 1.42. ([12, Exemplo 2.8]) Para um semigrupo arbitrário $\mathcal{S}$ que age em M, pode-se considerar as seguintes famílias: $\mathcal{F}_{\text{te}} = \{s\mathcal{S} : s \in \mathcal{S}\}$, $\mathcal{F}_{\text{td}} = \{\mathcal{S}s : s \in \mathcal{S}\}$ e $\mathcal{F}_{\text{t}} = \{s\mathcal{S}s : s \in \mathcal{S}\}$. Note que se $\mathcal{S}$ é um semigrupo **cêntrico**, ou seja, se $s\mathcal{S} = \mathcal{S}s$, para todo $s \in \mathcal{S}$, então $\mathcal{F}_{\text{te}} = \mathcal{F}_{\text{td}} = \mathcal{F}_{\text{t}}$ e, portanto, os conjuntos limite determinados por elas coincidem. ◇

Exemplo 1.43. Suponha que $\mathcal{S}$ é um subsemigrupo de um grupo G que age em M e considere uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $\mathcal{S}$. Note que $\mathcal{F}^{-1} = \{A^{-1} : A \in \mathcal{F}\}$ é uma família de subconjuntos do subsemigrupo $\mathcal{S}^{-1} = \{s^{-1} : s \in \mathcal{S}\}$. Uma vez que G age em M, podemos considerar as ações de $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}^{-1}$ em M induzidas da ação de G em M. Além disso, tendo fixado a família $\mathcal{F}$, temos a família $\mathcal{F}^{-1}$. Os comportamentos assintóticos determinados pelas famílias $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{-1}$ se relacionam da seguinte maneira: para quaisquer $X \subset M$ e $A \in \mathcal{F}$, vale que $A^*X = A^{-1}X$. Então,

$$\omega(X, \mathcal{F}) = \omega^*(X, \mathcal{F}^{-1}) \quad \text{e} \quad \omega^*(X, \mathcal{F}) = \omega(X, \mathcal{F}^{-1}). \tag{1.13}$$

◇

Em muitas situações, é necessário acrescentar algumas hipóteses sobre a família $\mathcal{F}$ (ou sobre objetos que envolvem a família $\mathcal{F}$). As seguintes hipóteses são utilizadas ao longo desta tese:

1. (*Base de filtro*) Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **base de filtro** de subconjuntos de $\mathcal{S}$ se

$$\varnothing \notin \mathcal{F} \text{ e se dados } A, B \in \mathcal{F}, \text{ existe } F \in \mathcal{F} \text{ tal que } F \subset A \cap B. \tag{1.14}$$

2. (*Base de filtro livre*) Seja $\mathcal{F}$ uma base de filtro de subconjuntos de $\mathcal{S}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é **livre** se
$$\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A = \varnothing. \tag{1.15}$$

3. (*Hipóteses de translação*) Dizemos que $\mathcal{F}$ satisfaz a
$$\begin{aligned}
&\textbf{hipótese } \mathrm{H}_1 \text{ se dados } A \in \mathcal{F} \text{ e } s \in \mathcal{S}, \text{ existe } B \in \mathcal{F} \text{ tal que } sB \subset A.\\
&\textbf{hipótese } \mathrm{H}_2 \text{ se dados } A \in \mathcal{F} \text{ e } s \in \mathcal{S}, \text{ existe } B \in \mathcal{F} \text{ tal que } Bs \subset A.\\
&\textbf{hipótese } \mathrm{H}_3 \text{ se dados } A \in \mathcal{F} \text{ e } s \in \mathcal{S}, \text{ existe } B \in \mathcal{F} \text{ tal que } B \subset As.\\
&\textbf{hipótese } \mathrm{H}_4 \text{ se dados } A \in \mathcal{F} \text{ e } s \in \mathcal{S}, \text{ existe } B \in \mathcal{F} \text{ tal que } B \subset sA.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

4. (*Divergência de redes*) Dizemos que uma rede $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ em $\mathcal{S}$ é **$\mathcal{F}$-divergente**, e indicamos este fato por $t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$, se
$$\text{para todo } A \in \mathcal{F}, \text{ existe } \lambda_0 \in \Lambda \text{ tal que } t_\lambda \in A \text{ sempre que } \lambda > \lambda_0. \tag{1.17}$$

A seguir, ilustramos esses conceitos com alguns exemplos.

Exemplo 1.44. É fácil verificar que as famílias consideradas nos Exemplos 1.36 e 1.37 satisfazem as quatro hipóteses de translação e são bases de filtro livres. Além disso, para a família $\mathcal{F}$ considerada no caso de fluxos e semifluxos contínuos, o conceito de $\mathcal{F}$-divengência de sequências coincide com o conceito usual de sequência divergente. ◇

Exemplo 1.45. Seja Φ um fluxo n-dimensional em M. Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, considere o semifluxo n-dimensional determinado por $\mathcal{S}_i$ e a família $\mathcal{F}_i$ como no Exemplo 1.38. Considere também o semigrupo $\mathcal{S} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{S}_i$ e a família $\mathcal{F}$ como no Exemplo 1.38. Temos que as famílias $\mathcal{F}_i$ e $\mathcal{F}$ satisfazem as hipóteses de translação e são bases de filtro livres. ◇

Exemplo 1.46. As famílias consideradas nos Exemplos 1.39 e 1.40 satisfazem as hipóteses H_1 e H_2 e são bases de filtro livres (veja [12, Seção 5]). Além disso, se a família $\mathcal{F}_{\mathrm{ctr}}$ referente a um sistema de controle Σ satisfaz a hipótese H_3 (respectivamente H_4), dizemos que **o sistema Σ satisfaz a hipótese** H_3 (respectivamente H_4). ◇

Exemplo 1.47. ([13, Exemplo 3]) Seja Σ um sistema de controle. O conjunto
$$\mathcal{G}_\Sigma^+ = \{\varphi_{t_n}^{u_n} \circ \varphi_{t_{n-1}}^{u_{n-1}} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}^{u_1} : u_i \in U, t_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n t_i \geqslant 0, n \in \mathbb{N}\} \tag{1.18}$$

é um subsemigrupo do grupo do sistema $\mathcal{G}_\Sigma$. Suponha que $\mathcal{S}_\Sigma = \mathcal{G}_\Sigma^+$. Então, o sistema Σ satisfaz as hipóteses H_3 e H_4. $\diamond$

Exemplo 1.48. ([13, Exemplo 4]) Seja G um grupo de Lie conexo com centro não-trivial e seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G. Denote por $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ o centro de $\mathfrak{g}$ e considere um subespaço (vetorial) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Fixe um campo de vetores (não-nulo) $X \in \mathfrak{g}$. Seja Σ_F o sistema de controle definido pelas concatenações dos campos de vetores do conjunto $F = \{X + Y : Y \in \mathfrak{a}\}$. O semigrupo do sistema $\mathcal{S}_{\Sigma_F}$ é dado por

$$\mathcal{S}_{\Sigma_F} = \{\exp t(X+Y) : t \geqslant 0, Y \in \mathfrak{a}\}.$$

Então, o sistema Σ satisfaz as hipóteses H_3 e H_4. $\diamond$

Exemplo 1.49. (Veja [51, Exemplo 4]) Seja $Gl(n,\mathbb{R})^+$ o grupo das matrizes reais $n \times n$ com determinate positivo. Dado $r > 0$, seja $A_r = \{g \in Gl(n,\mathbb{R})^+ : \det g \geqslant r\}$. Então, a família $\mathcal{F} = \{A_r : r > 0\}$ é uma base de filtro de subconjuntos de $Gl(n,\mathbb{R})^+$ e $t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$ significa que $\det t_\lambda \longrightarrow +\infty$. Além disso, $\mathcal{F}$ satisfaz as hipóteses H_1, H_2, H_3 e H_4. $\diamond$

Exemplo 1.50. ([12, página 728]) Voltemos ao Exemplo 1.42. Em geral, a família $\mathcal{F}_{\mathrm{td}}$ satisfaz as hipóteses H_1 e H_3. Além disso, a família $\mathcal{F}_{\mathrm{te}}$ satisfaz a hipótese H_2 e a família $\mathcal{F}_{\mathrm{t}}$ satisfaz a hipótese H_3. Se $\mathcal{S}$ é um semigrupo **reversível à esquerda**, isto é, se $s\mathcal{S} \cap t\mathcal{S} \neq \varnothing$, para quaisquer $s, t \in \mathcal{S}$, então as famílias $\mathcal{F}_{\mathrm{te}}$ e $\mathcal{F}_{\mathrm{t}}$ satisfazem a hipótese H_1. Se $\mathcal{S}$ é um semigrupo **reversível à direita**, isto é, se $\mathcal{S}s \cap \mathcal{S}t \neq \varnothing$, para quaisquer $s, t \in \mathcal{S}$, então as famílias $\mathcal{F}_{\mathrm{td}}$ e $\mathcal{F}_{\mathrm{t}}$ satisfazem a hipótese H_2. $\diamond$

Exemplo 1.51. Suponha que $\mathcal{F}$ é uma base de filtro. Então, $\mathcal{F}$ torna-se um conjunto dirigido com a seguinte direção:

$$A < B \text{ se } B \subset A. \tag{1.19}$$

Agora, seja $(\Lambda, <)$ um conjunto dirigido e considere em $\mathcal{F} \times \Lambda$ a direção dada por

$$(A,\lambda) < (B,\mu) \text{ se } A < B \text{ e } \lambda < \mu. \tag{1.20}$$

Se $(t_{(A,\lambda)})_{(A,\lambda)\in\mathcal{F}\times\Lambda}$ é uma rede em $\mathcal{S}$ tal que $t_{(A,\lambda)} \in A$, para todo $A \in \mathcal{F}$, então $t_{(A,\lambda)} \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$. De fato, para cada $A \in \mathcal{F}$, existe $(A,\lambda_0) \in \mathcal{F} \times \Lambda$, onde $\lambda_0 \in \Lambda$ é fixado arbitrariamente, tal que, se $(F, \lambda) > (A, \lambda_0)$, então $t_{(F,\lambda)} \in F \subset A$.

Em particular, se $(t_{(A,\mathcal{V})})_{(A,\mathcal{V}) \in \mathcal{F} \times \mathcal{O}}$ é uma rede em $\mathcal{S}$ tal que $t_{(A,\mathcal{V})} \in A$, para todo $A \in \mathcal{F}$, então $t_{(A,\mathcal{V})} \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$. $\diamond$

Exemplo 1.52. Seja $\mathcal{S}$ um subsemigrupo de um grupo G que age em M e considere uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $\mathcal{S}$. Então, $\mathcal{F}^{-1} = \{A^{-1} : A \in \mathcal{F}\}$ é uma família de subconjuntos de $\mathcal{S}^{-1}$. Temos que a família $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_1 (respectivamente, H_2, H_3 e H_4) se e somente se a família $\mathcal{F}^{-1}$ satisfaz a hipótese H_2 (respectivamente, H_1, H_4 e H_3) e $\mathcal{F}$ é uma base de filtro de subconjuntos de $\mathcal{S}$ se e somente se $\mathcal{F}^{-1}$ é uma base de filtro de subconjuntos de $\mathcal{S}^{-1}$. $\diamond$

É imediato a partir da Definição 1.35 que os conjuntos limite de um subconjunto $X \subset M$ pela família $\mathcal{F}$ são conjuntos fechados. Além disso, se X é $\mathcal{S}$-progressivamente invariante e fechado, então $\omega(X, \mathcal{F}) \subset X$ e se X é $\mathcal{S}$-regressivamente invariante e fechado, então $\omega^*(X, \mathcal{F}) \subset X$.

A seguinte proposição apresenta condições suficientes para a existência de conjuntos ω-limite.

Proposição 1.53.

1. *Seja X um subconjunto de M tal que $\overline{\mathcal{S}X}$ é compacto. Suponha que $\mathcal{F}$ é uma base de filtro de subconjuntos de $\mathcal{S}$. Então, $\omega(X, \mathcal{F})$ é não-vazio.*

2. *Seja Σ um sistema de controle sobre uma variedade diferenciável M de classe C^∞ cujo conjunto de controle $U \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e convexo e cujo conjunto das funções de controle é $\mathcal{U}_{cp}$. Então, $\overline{\mathcal{S}_\Sigma x}$ é compacto se e somente se $\omega(x)$ é não-vazio e compacto, para todo $x \in M$.*

Demonstração: Veja [12, Seção 3] e [52, Teorema 2.1]. $\square$

Com relação à invariância dos conjuntos limite, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.54. *Seja X um subconjunto de M tal que $\omega(X, \mathcal{F})$ e $\omega^*(X, \mathcal{F})$ são não-vazios. Então,*

1. *$\omega(X, \mathcal{F})$ é $\mathcal{S}$-progressivamente invariante se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_1.

2. *$\omega(X, \mathcal{F})$ é $\mathcal{S}$-regressivamente invariante se $\mathcal{S}$ é um subsemigrupo de um grupo e $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_4.

3. *$\omega^*(X, \mathcal{F})$ é $\mathcal{S}$-progressivamente invariante se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_3.

4. *$\omega^*(X, \mathcal{F})$ é $\mathcal{S}$-regressivamente invariante se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_2 *e a ação de $\mathcal{S}$ em M é aberta.*

Demonstração: As Proposições 2.10, 2.12 e 2.13 de [12] são, respectivamente, os itens 1, 3 e 4. O item 2 é uma consequência do item 3 e do Exemplo 1.43: se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_4, então $\mathcal{F}^{-1}$ satisfaz a hipótese H_3, de modo que $\omega^*(X, \mathcal{F}^{-1})$ é $\mathcal{S}^{-1}$-progressivamente invariante, ou seja, $\mathcal{S}^{-1}\omega^*(X, \mathcal{F}^{-1}) \subset \omega^*(X, \mathcal{F}^{-1})$. Portanto, $\mathcal{S}^*\omega(X, \mathcal{F}) \subset \omega(X, \mathcal{F})$, isto é, $\omega(X, \mathcal{F})$ é $\mathcal{S}$-regressivamente invariante. □

O próximo resultado apresenta outras propriedades dos conjuntos limite.

Proposição 1.55. *Sejam $x \in M$ e $s \in \mathcal{S}$. Então,*

1. *$\omega(x, \mathcal{F}) \subset \omega(sx, \mathcal{F})$ se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_3.

2. *$\omega(sx, \mathcal{F}) \subset \omega(x, \mathcal{F})$ se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_2.

Demonstração: Veja [16, Proposição 2.1]. □

Os prolongamentos e os conjuntos limite prolongacionais para ações de semigrupos em espaços de Tychonoff foram introduzidos em [16, 37] para estudar estabilidade de Lyapunov nesse contexto. A seguir, apresentamos as definições desses conceitos e algumas de suas propriedades.

Definição 1.56. *Sejam $x \in M$ e $A \subset \mathcal{S}$. O **primeiro A-prolongamento progressivo** e o **primeiro A-prolongamento regressivo** de x são, respectivamente, os conjuntos*

$$\mathrm{D}(x, A) = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}} \overline{A\mathrm{B}(x, \mathcal{U})} \quad e \quad \mathrm{D}^*(x, A) = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}} \overline{A^*\mathrm{B}(x, \mathcal{U})}$$

Agora, seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de $\mathcal{S}$. O ***primeiro $\mathcal{F}$-conjunto limite progressivo prolongacional*** *e o* ***primeiro $\mathcal{F}$-conjunto limite regressivo prolongacional*** *de x são definidos, respectivamente, como sendo*

$$\mathrm{J}(x,\mathcal{F}) = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} D(x,A) \quad e \quad \mathrm{J}^*(x,\mathcal{F}) = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} D^*(x,A).$$

O ***primeiro A-prolongamento progressivo****, o* ***primeiro A-prolongamento regressivo****, o* ***primeiro $\mathcal{F}$-conjunto limite progressivo prolongacional*** *e o* ***primeiro $\mathcal{F}$-conjunto limite regressivo prolongacional*** *de um subconjunto $X \subset M$ são, respectivamente, os conjuntos*

$$\mathrm{D}(X,A) = \bigcup_{x\in X} \mathrm{D}(x,A), \qquad \mathrm{D}^*(X,A) = \bigcup_{x\in X} \mathrm{D}^*(x,A)$$
$$\mathrm{J}(X,\mathcal{F}) = \bigcup_{x\in X} \mathrm{J}(x,\mathcal{F}) \quad e \quad \mathrm{J}^*(X,\mathcal{F}) = \bigcup_{x\in X} \mathrm{J}^*(x,\mathcal{F})$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.57. Seja ϕ um fluxo contínuo em um espaço métrico (M,d). Dados $t \in \mathbb{R}$ e $x \in M$, seja $tx = \phi(t,x)$. Dado $x \in M$, o **primeiro prolongamento positivo** e o **primeiro prolongamento negativo** de x são, respectivamente, os conjuntos

$$D^+(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\mathbb{R}^+ B(x,\varepsilon)} \quad \text{e} \quad D^-(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\mathbb{R}^- B(x,\varepsilon)}.$$

A órbita positiva de um ponto $x \in M$ nos dá informação a respeito da ação de ϕ em x para tempos positivos. Contudo, ela não nos diz nada a respeito dos pontos "ao redor" de x. Logo, ao estudarmos questões que envolvam vizinhanças de x, a órbita de x não nos dá informação suficiente. O primeiro prolongamento positivo de x, por sua vez, nos dá tal informação, pois é definido em termos das vizinhanças de x. Intuitivamente falando, $D^+(x)$ "capta" a informação comum a todas as órbitas positivas de todas as vizinhanças de x. De forma análoga, o primeiro prolongamento negativo de x nos dá informação para tempos negativos.

O **primeiro conjunto limite positivo prolongacional** e o **primeiro conjunto limite negativo prolongacional** de x são, respectivamente, definidos como sendo

$$J^+(x) = \bigcap_{t\geqslant 0} D^+(tx) \quad \text{e} \quad J^-(x) = \bigcap_{t\geqslant 0} D^-(tx).$$

O primeiro conjunto limite positivo prolongacional de $x \in M$ "capta" a informação de todos os primeiros prolongamentos positivos dos pontos tx da órbita positiva de x, indicando o comportamento assintótico "ao redor" de x. Note que isso é exatamente o que o conjunto ω-limite faz, só que sem considerar vizinhanças de x. De fato, para quaisquer $t \geqslant 0$ e $x \in M$, temos que $(t, +\infty)x = \mathbb{R}^+ tx$. Dessa forma, $\omega(x) = \bigcap_{t \geqslant 0} \overline{\mathbb{R}^+ tx}$, que é a mesma expressão para o primeiro conjunto limite positivo prolongacional de x considerando $\overline{\mathbb{R}^+ tx}$ ao invés de $D^+(tx)$, para todo $t \geqslant 0$. Portanto, $J^+(x)$ está para $D^+(x)$ assim como o conjunto $\omega(x)$ está para $\overline{\mathbb{R}^+ x}$. O mesmo vale para tempos negativos.

Temos que $D^+(x) = \mathrm{D}(x, \mathbb{R}^+)$ e que $D^-(x) = \mathrm{D}^*(x, \mathbb{R}^+)$, para qualquer $x \in M$. Além disso, considerando a família $\mathcal{F} = \{(t, +\infty) : t \geqslant 0\}$, temos que $J^+(x) = \mathrm{J}(x, \mathcal{F})$ e que $J^-(x) = \mathrm{J}^*(x, \mathcal{F})$, para todo $x \in M$ (para os detalhes, veja [16, Seção 4]).

O mesmo vale para fluxos discretos e semifluxos contínuos e discretos. $\diamond$

Exemplo 1.58. Seja Φ um fluxo n-dimensional em M. Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, considere o semifluxo n-dimensional induzido por $\mathcal{S}_i$ e a família $\mathcal{F}_i$ como no Exemplo 1.38. Os **prolongamentos** e os **conjuntos limite prolongacionais** de um elemento $x \in M$ pelo semifluxo n-dimensional definido por $\mathcal{S}_i$ são definidos, respectivamente, como sendo os prolongamentos e os conjuntos limite prolongacionais da ação de $\mathcal{S}_i$ em M. $\diamond$

Exemplo 1.59. (Veja [52]) Seja Σ um sistema de controle em uma variedade diferenciável metrizável M de classe C^∞ com métrica d cujo conjunto das funções de controle é $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{cp}$. Dados $x \in M$ e $t \geqslant 0$, o **primeiro t-prolongamento positivo** e o **primeiro t-prolongamento negativo** de x são respectivamente os conjuntos

$$D^+(x, t) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{(\mathcal{S}_\Sigma)_{\geqslant t} B(x, \varepsilon)} \quad \text{e} \quad D^-(x, t) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{((\mathcal{S}_\Sigma)_{\geqslant t})^{-1} B(x, \varepsilon)},$$

onde $B(x, \varepsilon)$ denota a bola de centro em $x \in M$ e raio $\varepsilon > 0$ com respeito à métrica d. Para $t = 0$, usamos as notações $D^+(x) = D^+(x, 0)$ e $D^-(x) = D^-(x, 0)$, para todo $x \in M$.

Dado $x \in M$, o **primeiro conjunto limite positivo prolongacional** e o **primeiro conjunto limite negativo prolongacional** de x são, respectivamente, dados por

$$J^+(x) = \bigcap_{t \geqslant 0} D^+(x, t) \quad \text{e} \quad J^-(x) = \bigcap_{t \geqslant 0} D^-(x, t).$$

É imediato verificar que $D^+(x,t) = \mathrm{D}(x, (\mathcal{S}_\Sigma)_{\geqslant t})$, $D^-(x,t) = \mathrm{D}^*(x, (\mathcal{S}_\Sigma)_{\geqslant t})$, $J^+(x) = \mathrm{J}(x, \mathcal{F}_{\mathrm{ctr}})$ e $J^-(x) = \mathrm{J}^*(x, \mathcal{F}_{\mathrm{ctr}})$, para todo $x \in M$. $\diamond$

Exemplo 1.60. Seja $\mathcal{S}$ um subsemigrupo de um grupo G que age em M e seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de $\mathcal{S}$. Sabemos que o comportamento assintótico de $\mathcal{S}$ determinado pela família $\mathcal{F}$ está relacionado com o comportamento assintótico de $\mathcal{S}^{-1}$ determinado pela família $\mathcal{F}^{-1}$. No caso de prolongamentos e conjuntos limite prolongacionais, temos que

$$\mathrm{D}(x, A) = \mathrm{D}^*(x, A^{-1}) \text{ e } \mathrm{D}^*(x, A) = \mathrm{D}(x, A^{-1}), \text{ para quaisquer } x \in M \text{ e } A \subset \mathcal{S}$$

e

$$\mathrm{J}(x, \mathcal{F}) = \mathrm{J}^*(x, \mathcal{F}^{-1}) \text{ e } \mathrm{J}^*(x, \mathcal{F}) = \mathrm{J}(x, \mathcal{F}^{-1}), \text{ para todo } x \in M.$$

$\diamond$

Para quaisquer $x \in M$ e $A \subset \mathcal{S}$, temos que $\mathrm{D}(x, A)$ e $\mathrm{D}^*(x, A)$ são fechados, por serem interseções de conjuntos fechados. Pelo mesmo motivo, $\mathrm{J}(x, \mathcal{F})$ e $\mathrm{J}^*(x, \mathcal{F})$ também são fechados. Além disso, temos que $\overline{AX} \subset \mathrm{D}(x, A)$, $\overline{A^*X} \subset \mathrm{D}^*(x, A)$, $\mathrm{D}(x, \mathcal{S})$ é $\mathcal{S}$-progressivamente invariante e, se a ação de $\mathcal{S}$ em M é aberta, $\mathrm{D}^*(x, \mathcal{S})$ é $\mathcal{S}$-regressivamente invariante ([16, Proposição 2.7]). Já a invariância dos conjuntos limite prolongacionais depende de algumas hipóteses sobre a família $\mathcal{F}$, como vemos a seguir.

Proposição 1.61. *Seja x um elemento de M tal que $\mathrm{J}(x, \mathcal{F})$ e $\mathrm{J}^*(x, \mathcal{F})$ são não-vazios. Então,*

1. $\mathrm{J}(x, \mathcal{F})$ *é $\mathcal{S}$-progressivamente invariante se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_1.

2. $\mathrm{J}(x, \mathcal{F})$ *é $\mathcal{S}$-regressivamente invariante se $\mathcal{S}$ é um subsemigrupo de um grupo e $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_4.

3. $\mathrm{J}^*(x, \mathcal{F})$ *é $\mathcal{S}$-progressivamente invariante se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_3.

4. $\mathrm{J}^*(x, \mathcal{F})$ *é $\mathcal{S}$-regressivamente invariante se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_2 *e a ação de $\mathcal{S}$ em M é aberta.*

Demonstração: Os itens 1, 3 e 4 são exatamente a Proposição 2.10 de [16]. Para provar o item 2, suponha que a família $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_4. Segue do Exemplo 1.43 que $\mathcal{F}^{-1}$ satisfaz a hipótese H_3. Logo, $\mathrm{J}^*(x,\mathcal{F}^{-1})$ é $\mathcal{S}^{-1}$-progressivamente invariante, ou seja, $\mathcal{S}^{-1}\mathrm{J}^*(x,\mathcal{F}^{-1}) \subset \mathrm{J}^*(x,\mathcal{F}^{-1})$. Portanto, $\mathcal{S}^*\mathrm{J}(x,\mathcal{F}) \subset \mathrm{J}(x,\mathcal{F})$, ou seja, $\mathrm{J}(x,\mathcal{F})$ é $\mathcal{S}$-regressivamente invariante. □

O seguinte resultado é uma versão da Proposição 1.55 para conjuntos limite prolongacionais.

Proposição 1.62. *Sejam $x \in M$ e $s \in \mathcal{S}$. Então,*

1. $\mathrm{J}(x,\mathcal{F}) \subset \mathrm{J}(sx,\mathcal{F})$ *se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_3.

2. $\mathrm{J}(sx,\mathcal{F}) \subset \mathrm{J}(x,\mathcal{F})$ *se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_2 *e a ação de $\mathcal{S}$ em M é aberta.*

Demonstração: Suponha que $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_3 e tome $y \in \mathrm{J}(x,\mathcal{F})$, $A \in \mathcal{F}$ e uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Da continuidade da aplicação μ_s, segue que existe uma cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $s\mathrm{B}(x,\mathcal{V}) \subset \mathrm{B}(sx,\mathcal{U})$. Por outro lado, segue da hipótese H_3 que existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset As$. Logo, temos que

$$y \in \overline{F\mathrm{B}(x,\mathcal{V})} \subset \overline{As\mathrm{B}(x,\mathcal{V})} \subset \overline{A\mathrm{B}(sx,\mathcal{U})}$$

e, portanto, $y \in \mathrm{J}(sx,\mathcal{F})$. Para provar o item 2, suponha que a ação de $\mathcal{S}$ em M é aberta e que $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_2. Fixe $y \in \mathrm{J}(sx,\mathcal{F})$, $A \in \mathcal{F}$ e uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Segue das hipóteses que existe uma cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathrm{B}(sx,\mathcal{V}) \subset s\mathrm{B}(x,\mathcal{U})$ e que existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $Fs \subset A$. Daí,

$$y \in \overline{F\mathrm{B}(sx,\mathcal{V})} \subset \overline{Fs\mathrm{B}(x,\mathcal{U})} \subset \overline{A\mathrm{B}(x,\mathcal{U})},$$

mostrando que $y \in \mathrm{J}(x,\mathcal{F})$, como queríamos. □

Os conjuntos limite, os prolongamentos e os conjuntos limite prolongacionais podem ser caracterizados em termos de redes, como vemos nos resultados a seguir.

Proposição 1.63. *Seja $X \subset M$. Então,*

$$\begin{aligned}\omega(X,\mathcal{F}) &= \left\{ y \in M : \begin{array}{c} \textit{para todo } F \in \mathcal{F}, \textit{existem redes } (t_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}} \subset F \textit{ e } (x_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}} \subset X \\ \textit{tais que } t_{\mathcal{V}}x_{\mathcal{V}} \longrightarrow y \end{array} \right\} \\ &= \left\{ y \in M : \begin{array}{c} \textit{para todo } F \in \mathcal{F}, \textit{existem redes } (t_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \subset F \textit{ e } (x_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \subset X \\ \textit{tais que } t_{\lambda}x_{\lambda} \longrightarrow y \end{array} \right\}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\omega^*(X,\mathcal{F}) &= \left\{ y \in M : \begin{array}{c} \textit{para todo } F \in \mathcal{F}, \textit{existem redes } (t_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}} \subset F \textit{ e } (x_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}} \subset M \\ \textit{tais que } (t_{\mathcal{V}}x_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}} \subset X \textit{ e } x_{\mathcal{V}} \longrightarrow y \end{array} \right\} \\ &= \left\{ y \in M : \begin{array}{c} \textit{para todo } F \in \mathcal{F}, \textit{existem redes } (t_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \subset F \textit{ e } (x_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \subset M \\ \textit{tais que } (t_{\lambda}x_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \subset X \textit{ e } x_{\lambda} \longrightarrow y \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

Demonstração: Mostremos as igualdades envolvendo $\omega(X,\mathcal{F})$. Se $y \in \omega(X,\mathcal{F})$, então $y \in \overline{FX}$, para todo $F \in \mathcal{F}$. Fixe $F \in \mathcal{F}$. Para cada $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, podemos escolher $t_{\mathcal{V}} \in F$ e $x_{\mathcal{V}} \in X$ de modo que $t_{\mathcal{V}}x_{\mathcal{V}} \in \mathrm{B}(y,\mathcal{V})$. Do Corolário 1.31, segue que $t_{\mathcal{V}}x_{\mathcal{V}} \longrightarrow y$, o que mostra a primeira inclusão[6] referente a primeira igualdade. A primeira inclusão referente a segunda igualdade é imediata. Agora, seja $y \in M$ tal que para cada $F \in \mathcal{F}$, existem redes $(t_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \subset F$ e $(x_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \subset X$ tais que $t_{\lambda}x_{\lambda} \longrightarrow y$. Fixando $F \in \mathcal{F}$, podemos escolher redes $(t_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \subset F$ e $(x_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \subset X$ tais que $t_{\lambda}x_{\lambda} \longrightarrow y$. Como $x_{\lambda} \in X$, para todo $\lambda \in \Lambda$, segue que $t_{\lambda}x_{\lambda} \in FX$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Como $t_{\lambda}x_{\lambda} \longrightarrow y$, concluímos que $y \in \overline{FX}$. A arbitrariedade na escolha de F garante que $y \in \omega(X,\mathcal{F})$ e, portanto, ficam demonstradas as duas igualdades referentes a $\omega(X,\mathcal{F})$. Mostremos, agora, as igualdades envolvendo $\omega^*(X,\mathcal{F})$. Sejam $y \in \omega^*(X,\mathcal{F})$ e $F \in \mathcal{F}$. Para cada $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, existe $x_{\mathcal{V}} \in \mathrm{B}(y,\mathcal{V}) \cap F^*X$. Logo, para cada $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, existem $t_{\mathcal{V}} \in F$ e $x_{\mathcal{V}} \in M$ tais que $x_{\mathcal{V}} \in \mathrm{B}(y,\mathcal{V})$ e $t_{\mathcal{V}}x_{\mathcal{V}} \in X$. Do Corolário 1.31, segue que $x_{\mathcal{V}} \longrightarrow y$, de modo que vale a primeira inclusão referente a primeira igualdade. Por fim, seja y um elemento de M tal que para cada $F \in \mathcal{F}$, existem $(t_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \subset F$ e $(x_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \subset M$ tais que $(t_{\lambda}x_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \subset X$ e $x_{\lambda} \longrightarrow y$. Tome $F \in \mathcal{F}$ e escolha redes $(t_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \subset F$ e $(x_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \subset M$ tais que $(t_{\lambda}x_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \subset X$ e $x_{\lambda} \longrightarrow y$. Note que $x_{\lambda} \in F^*X$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Daí, como $x_{\lambda} \longrightarrow y$, concluímos que $y \in \overline{F^*X}$ e, portanto, $y \in \omega^*(X,\mathcal{F})$. □

[6]Por primeira inclusão, queremos dizer a inclusão da esquerda para a direita.

Proposição 1.64. *Sejam $x \in M$ e $A \subset \mathcal{S}$. Então,*

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(x,A) &= \left\{ y \in M : \begin{array}{c} \text{existem redes } (t_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}} \subset A \text{ e } (x_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}} \subset M \text{ tais que} \\ x_{\mathcal{V}} \longrightarrow x \text{ e } t_{\mathcal{V}}x_{\mathcal{V}} \longrightarrow y \end{array} \right\} \\ &= \left\{ y \in M : \begin{array}{c} \text{existem redes } (t_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \subset A \text{ e } (x_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \subset M \text{ tais que} \\ x_{\lambda} \longrightarrow x \text{ e } t_{\lambda}x_{\lambda} \longrightarrow y \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^*(x,A) &= \left\{ y \in M : \begin{array}{c} \text{existem redes } (t_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}} \subset A \text{ e } (x_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}} \subset M \text{ tais que} \\ x_{\mathcal{V}} \longrightarrow y \text{ e } t_{\mathcal{V}}x_{\mathcal{V}} \longrightarrow x \end{array} \right\} \\ &= \left\{ y \in M : \begin{array}{c} \text{existem redes } (t_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \subset A \text{ e } (x_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \subset M \text{ tais que} \\ x_{\lambda} \longrightarrow y \text{ e } t_{\lambda}x_{\lambda} \longrightarrow x \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Demonstração: As primeiras igualdades de ambos os casos constituem a Proposição 2.8 de [16]. Logo, para demonstrar o resultado, basta demonstrar as segundas inclusões[7] referentes às segundas igualdades em ambos os casos. Sejam $y \in M$ para o qual existem redes $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset A$ e $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset M$ tais que $x_\lambda \longrightarrow x$ e $t_\lambda x_\lambda \longrightarrow y$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ uma cobertura aberta de M. Seja $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in \mathrm{B}(x,\mathcal{U})$ se $\lambda > \lambda_0$. Então, $t_\lambda x_\lambda \in A\mathrm{B}(x,\mathcal{U})$ se $\lambda > \lambda_0$. Como $t_\lambda x_\lambda \longrightarrow y$, segue que $y \in \overline{A\mathrm{B}(x,\mathcal{U})}$ e, portanto, $y \in \mathrm{D}(x,A)$. Por fim, seja $y \in M$ para o qual existem redes $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset A$ e $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset M$ tais que $x_\lambda \longrightarrow y$ e $t_\lambda x_\lambda \longrightarrow x$ e fixe uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Tome $\lambda_0, \lambda_1 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in \mathrm{B}(y,\mathcal{U})$ se $\lambda > \lambda_0$ e $t_\lambda x_\lambda \in \mathrm{B}(x,\mathcal{U})$ se $\lambda > \lambda_1$. Note que $x_\lambda \in A^*\mathrm{B}(x,\mathcal{U})$ se $\lambda > \lambda_1$. Seja $\lambda_2 \in \Lambda$ tal que $\lambda_2 > \lambda_0$ e $\lambda_2 > \lambda_1$. Como a subrede $(x_\lambda)_{\lambda>\lambda_2}$ converge a y, segue que $y \in \overline{A^*\mathrm{B}(x,\mathcal{U})}$ e, portanto, $y \in \mathrm{D}^*(x,A)$. □

Proposição 1.65. *Seja $x \in M$. Então,*

$$\begin{aligned} \mathrm{J}(x,\mathcal{F}) &= \left\{ y \in M : \begin{array}{c} \text{para todo } F \in \mathcal{F}, \text{existem redes } (t_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}} \subset F \text{ e } (x_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}} \subset M \\ \text{tais que } x_{\mathcal{V}} \longrightarrow x \text{ e } t_{\mathcal{V}}x_{\mathcal{V}} \longrightarrow y \end{array} \right\} \\ &= \left\{ y \in M : \begin{array}{c} \text{para todo } F \in \mathcal{F}, \text{existem redes } (t_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \subset F \text{ e } (x_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda} \subset M \\ \text{tais que } x_{\lambda} \longrightarrow x \text{ e } t_{\lambda}x_{\lambda} \longrightarrow y \end{array} \right\} \end{aligned}$$

[7] Por segunda inclusão, queremos dizer a inclusão da direita para a esquerda.

e

$$\begin{aligned}\mathrm{J}^*(x,\mathcal{F}) &= \left\{ y \in M : \begin{array}{c} \textit{para todo } F \in \mathcal{F}, \textit{existem redes } (t_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}} \subset F \textit{ e } (x_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}} \subset M \\ \textit{tais que } x_{\mathcal{V}} \longrightarrow y \textit{ e } t_{\mathcal{V}}x_{\mathcal{V}} \longrightarrow x \end{array} \right\} \\ &= \left\{ y \in M : \begin{array}{c} \textit{para todo } F \in \mathcal{F}, \textit{existem redes } (t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset F \textit{ e } (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset M \\ \textit{tais que } x_\lambda \longrightarrow y \textit{ e } t_\lambda x_\lambda \longrightarrow x \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

Demonstração: A Proposição 2.11 de [16] é exatamente a junção das duas primeiras igualdades. A demonstração das segundas igualdades é análoga à demonstração das segundas igualdades da Proposição 1.64. □

Se a família $\mathcal{F}$ é um base de filtro, as Proposições 1.63 e 1.65 podem ser simplificadas da seguinte forma.

Proposição 1.66. *Suponha que $\mathcal{F}$ é uma base de filtro. Seja $X \subset M$. Então,*

$$\begin{aligned}\omega(X,\mathcal{F}) &= \left\{ y \in M : \begin{array}{c} \textit{existem redes } (t_{(A,\mathcal{V})})_{(A,\mathcal{V})\in\mathcal{F}\times\mathcal{O}} \subset \mathcal{S} \textit{ e } (x_{(A,\mathcal{V})})_{(A,\mathcal{V})\in\mathcal{F}\times\mathcal{O}} \subset X \\ \textit{tais que } t_{(A,\mathcal{V})} \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty \textit{ e } t_{(A,\mathcal{V})}x_{(A,\mathcal{V})} \longrightarrow y \end{array} \right\} \\ &= \left\{ y \in M : \begin{array}{c} \textit{existem redes } (t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{S} \textit{ e } (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset X \textit{ tais que} \\ t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty \textit{ e } t_\lambda x_\lambda \longrightarrow y \end{array} \right\}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\omega^*(X,\mathcal{F}) &= \left\{ y \in M : \begin{array}{c} \textit{existem redes } (t_{(A,\mathcal{V})})_{(A,\mathcal{V})\in\mathcal{F}\times\mathcal{O}} \subset \mathcal{S} \textit{ e } (x_{(A,\mathcal{V})})_{(A,\mathcal{V})\in\mathcal{F}\times\mathcal{O}} \subset M \\ \textit{tais que } t_{(A,\mathcal{V})} \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty, (t_{(A,\mathcal{V})}x_{(A,\mathcal{V})})_{(A,\mathcal{V})\in\mathcal{F}\times\mathcal{O}} \subset X \textit{ e } x_{(A,\mathcal{V})} \longrightarrow y \end{array} \right\} \\ &= \left\{ y \in M : \begin{array}{c} \textit{existem redes } (t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{S} \textit{ e } (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset M \textit{ tais que} \\ t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty, (t_\lambda x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset X \textit{ e } x_\lambda \longrightarrow y \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

Demonstração: Comecemos por $\omega(X,\mathcal{F})$. Seja $y \in \omega(X,\mathcal{F})$. Então, para quaisquer $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, podemos escolher $t_{(A,\mathcal{V})} \in A$ e $x_{(A,\mathcal{V})} \in X$ tais que $t_{(A,\mathcal{V})}x_{(A,\mathcal{V})} \in \mathrm{B}(y,\mathcal{V})$. Segue do Exemplo 1.51 que $t_{(A,\mathcal{V})} \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$ e do Corolário 1.34 que $t_{(A,\mathcal{V})}x_{(A,\mathcal{V})} \longrightarrow y$. Por outro lado, se y é um elemento de M para o qual existem redes $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{S}$ e $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset X$ tais que $t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$ e $t_\lambda x_\lambda \longrightarrow y$ e se $A \in \mathcal{F}$, então existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $t_\lambda \in A$ se $\lambda > \lambda_0$. Logo, $t_\lambda x_\lambda \in AX$ se $\lambda > \lambda_0$. Como a subrede $(t_\lambda x_\lambda)_{\lambda>\lambda_0}$ de $(t_\lambda x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a y, concluímos que $y \in \overline{AX}$. Portanto, $y \in \omega(X, \mathcal{F})$. Agora, mostremos as igualdades para $\omega^*(X, \mathcal{F})$. Tome $y \in \omega^*(X, \mathcal{F})$. Dados $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, escolha $x_{(A,\mathcal{V})} \in \mathrm{B}(y, \mathcal{V}) \cap A^*X$ e escolha $t_{(A,\mathcal{V})} \in A$ tal que $t_{(A,\mathcal{V})}x_{(A,\mathcal{V})} \in X$. Segue do Exemplo 1.51 que $t_{(A,\mathcal{V})} \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$ e do Corolário 1.34 que $x_{(A,\mathcal{V})} \longrightarrow y$. Por fim, seja $y \in M$ tal que existem redes $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{S}$ e $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset M$ tais que $t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$, $(t_\lambda x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset X$ e $x_\lambda \longrightarrow y$. Para cada $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, existem $\lambda_0, \lambda_1 \in \Lambda$ tais que $t_\lambda \in A$ se $\lambda > \lambda_0$ e $x_\lambda \in \mathrm{B}(y, \mathcal{V})$ se $\lambda > \lambda_1$. Agora, tome $\lambda_2 \in \Lambda$ tal que $\lambda_2 > \lambda_0$ e $\lambda_2 > \lambda_1$. Se $\lambda > \lambda_2$, então $t_\lambda \in A$, $x_\lambda \in \mathrm{B}(y, \mathcal{V})$ e $t_\lambda x_\lambda \in X$, de modo que $x_\lambda \in \mathrm{B}(y, \mathcal{V}) \cap A^*X$. Logo, $y \in \overline{A^*X}$ e, portanto, $y \in \omega^*(X, \mathcal{F})$, como queríamos demonstrar. □

Proposição 1.67. *Suponha que $\mathcal{F}$ é uma base de filtro. Seja $x \in M$. Então,*

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}(x, \mathcal{F}) &= \left\{ y \in M : \begin{array}{c} \text{existem redes } (t_{(A,\mathcal{V})})_{(A,\mathcal{V})\in\mathcal{F}\times\mathcal{O}} \subset \mathcal{S} \text{ e } (x_{(A,\mathcal{V})})_{(A,\mathcal{V})\in\mathcal{F}\times\mathcal{O}} \subset M \\ \text{tais que } t_{(A,\mathcal{V})} \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty, x_{(A,\mathcal{V})} \longrightarrow x \text{ e } t_{(A,\mathcal{V})}x_{(A,\mathcal{V})} \longrightarrow y \end{array} \right\} \\
&= \left\{ y \in M : \begin{array}{c} \text{existem redes } (t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{S} \text{ e } (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset M \text{ tais que} \\ t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty, x_\lambda \longrightarrow x \text{ e } t_\lambda x_\lambda \longrightarrow y \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}^*(x, \mathcal{F}) &= \left\{ y \in M : \begin{array}{c} \text{existem redes } (t_{(A,\mathcal{V})})_{(A,\mathcal{V})\in\mathcal{F}\times\mathcal{O}} \subset \mathcal{S} \text{ e } (x_{(A,\mathcal{V})})_{(A,\mathcal{V})\in\mathcal{F}\times\mathcal{O}} \subset M \\ \text{tais que } t_{(A,\mathcal{V})} \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty, x_{(A,\mathcal{V})} \longrightarrow y \text{ e } t_{(A,\mathcal{V})}x_{(A,\mathcal{V})} \longrightarrow x \end{array} \right\} \\
&= \left\{ y \in M : \begin{array}{c} \text{existem redes } (t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{S} \text{ e } (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset M \text{ tais que} \\ t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty, x_\lambda \longrightarrow y \text{ e } t_\lambda x_\lambda \longrightarrow x \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Demonstração: Primeiramente, mostremos as igualdades referentes a $\mathrm{J}(x, \mathcal{F})$. Fixe $y \in \mathrm{J}(x, \mathcal{F})$. Para quaisquer $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$, existem $t_{(A,\mathcal{U},\mathcal{V})} \in A$ e $x_{(A,\mathcal{U},\mathcal{V})} \in \mathrm{B}(x, \mathcal{U})$ tais que $t_{(A,\mathcal{U},\mathcal{V})}x_{(A,\mathcal{U},\mathcal{V})} \in \mathrm{B}(y, \mathcal{V})$. Para cada $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, sejam $t_{(A,\mathcal{V})} = t_{(A,\mathcal{V},\mathcal{V})}$ e $x_{(A,\mathcal{V})} = x_{(A,\mathcal{V},\mathcal{V})}$. Temos que $t_{(A,\mathcal{V})} \in A$, $x_{(A,\mathcal{V})} \in \mathrm{B}(x, \mathcal{V})$ e $t_{(A,\mathcal{V})}x_{(A,\mathcal{V})} \in \mathrm{B}(y, \mathcal{V})$, para quaisquer $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$. Logo, segue do Exemplo 1.51 que $t_{(A,\mathcal{V})} \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$ e do Corolário 1.34 que $x_{(A,\mathcal{V})} \longrightarrow x$ e $t_{(A,\mathcal{V})}x_{(A,\mathcal{V})} \longrightarrow y$. Agora, seja $y \in M$ para o qual existem redes $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{S}$ e $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset M$ tais que $t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$, $x_\lambda \longrightarrow x$ e $t_\lambda x_\lambda \longrightarrow y$ e fixe $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$. Segue que existem $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ tais que $t_\lambda \in A$ se $\lambda > \lambda_0$, $x_\lambda \in \mathrm{B}(x, \mathcal{U})$ se $\lambda > \lambda_1$ e $t_\lambda x_\lambda \in \mathrm{B}(y, \mathcal{V})$ se $\lambda > \lambda_2$. Seja $\lambda_3 \in \Lambda$ tal que se $\lambda_3 > \lambda_0$, $\lambda_3 > \lambda_1$ e $\lambda_3 > \lambda_2$. Então, se $\lambda > \lambda_3$, temos que $t_\lambda \in A$, $x_\lambda \in \mathrm{B}(x, \mathcal{U})$ e $t_\lambda x_\lambda \in \mathrm{B}(y, \mathcal{V})$. Logo, $t_\lambda x_\lambda \in \mathrm{B}(y, \mathcal{V}) \cap A\mathrm{B}(x, \mathcal{U})$

se $\lambda > \lambda_3$, de modo que $y \in \overline{A\mathrm{B}(x,\mathcal{U})}$. Portanto, $y \in \mathrm{J}(x,\mathcal{F})$. Mostremos, agora, as igualdades referentes a $\mathrm{J}^*(x,\mathcal{F})$. Se $y \in \mathrm{J}^*(x,\mathcal{F})$, $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U},\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, então podemos escolher $x_{(A,\mathcal{U},\mathcal{V})} \in \mathrm{B}(y,\mathcal{V}) \cap A^*\mathrm{B}(x,\mathcal{U})$ e $t_{(A,\mathcal{U},\mathcal{V})} \in A$ tais que $t_{(A,\mathcal{U},\mathcal{V})}x_{(A,\mathcal{U},\mathcal{V})} \in \mathrm{B}(x,\mathcal{U})$. Denotando por $t_{(A,\mathcal{V})} = t_{(A,\mathcal{V},\mathcal{V})}$ e $x_{(A,\mathcal{V})} = x_{(A,\mathcal{V},\mathcal{V})}$, com $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, concluímos a partir do Exemplo 1.51 que $t_{(A,\mathcal{V})} \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$ e do Corolário 1.34 que $x_{(A,\mathcal{V})} \longrightarrow y$ e $t_{(A,\mathcal{V})}x_{(A,\mathcal{V})} \longrightarrow x$. Por fim, se y é um elemento de M tal que existem redes $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{S}$ e $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset M$ tais que $t_\lambda \longrightarrow_{\mathcal{F}} \infty$, $x_\lambda \longrightarrow y$ e $t_\lambda x_\lambda \longrightarrow x$ e se $a \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U},\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, então existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $t_\lambda \in A$, $x_\lambda \in \mathrm{B}(y,\mathcal{V})$ e $t_\lambda x_\lambda \in \mathrm{B}(x,\mathcal{U})$ se $\lambda > \lambda_0$. Logo, se $\lambda > \lambda_0$, então $x_\lambda \in \mathrm{B}(y,\mathcal{V}) \cap A^*\mathrm{B}(x,\mathcal{U})$. Logo, $y \in \overline{A^*\mathrm{B}(x,\mathcal{U})}$ e, portanto, $y \in \mathrm{J}^*(x,\mathcal{F})$, como queríamos demonstrar. □

Na sequência, apresentamos mais um resultado envolvendo conjuntos limite, prolongamentos e conjuntos limite prolongacionais.

Proposição 1.68. *Sejam K um subconjunto compacto de M, U um subconjunto aberto de M e A um subconjunto de $\mathcal{S}$. Então,*

$$\mathrm{D}(K,A) = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}} \overline{A\mathrm{B}(K,\mathcal{U})}, \qquad \omega(K,\mathcal{F}) \subset \mathrm{J}(K,\mathcal{F}) \quad e \quad \mathrm{J}(U,\mathcal{F}) \subset \omega(U,\mathcal{F}).$$

Além disso, se $\mathcal{F}$ é uma base de filtro, então

$$\mathrm{J}(K,\mathcal{F}) = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \mathrm{D}(K,F).$$

Demonstração: Dado $k \in K$, temos que

$$\mathrm{D}(k,A) = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}} \overline{A\mathrm{B}(k,\mathcal{U})} \subset \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}} \overline{A\mathrm{B}(K,\mathcal{U})}$$

Logo,

$$\mathrm{D}(K,A) = \bigcup_{k\in K} \mathrm{D}(k,A) \subset \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}} \overline{A\mathrm{B}(K,\mathcal{U})}$$

Reciprocamente, fixe $y \in \cap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}}\overline{A\mathrm{B}(K,\mathcal{U})}$. Para cada cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, existem $t_\mathcal{V} \in A$ e $x_\mathcal{V} \in \mathrm{B}(K,\mathcal{V})$ tais que

$$t_\mathcal{V} x_\mathcal{V} \in \mathrm{B}(y,\mathcal{V}) \cap A\mathrm{B}(K,\mathcal{V})$$

Segue da Proposição 1.30 que existem subredes $(t_{\mathcal{V}_\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ e $(x_{\mathcal{V}_\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ de $(t_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}}$ e $(x_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}}$, respectivamente, tais que $x_{\mathcal{V}_\lambda} \longrightarrow k$, para algum $k \in K$, e $t_{\mathcal{V}_\lambda}x_{\mathcal{V}_\lambda} \longrightarrow y$. Portanto, segue da Proposição 1.64 que $y \in \mathrm{D}(k, A) \subset \mathrm{D}(K, A)$.

Mostremos, agora, que $\omega(K, \mathcal{F}) \subset \mathrm{J}(K, \mathcal{F})$. Sejam $y \in \omega(K, \mathcal{F})$ e $F \in \mathcal{F}$. Segue da Proposição 1.63 que existem redes $(t_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}} \subset F$ e $(x_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}} \subset K$ tais que $t_{\mathcal{V}}x_{\mathcal{V}} \longrightarrow y$. Como K é compacto, segue que existe uma subrede $(x_{\mathcal{V}_\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ de $(x_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}}$ tal que $x_{\mathcal{V}_\lambda} \longrightarrow x$, para algum $x \in K$. Como $t_{\mathcal{V}_\lambda}x_{\mathcal{V}_\lambda} \longrightarrow y$, segue da Proposição 1.65 que $y \in \mathrm{J}(x, \mathcal{F}) \subset \mathrm{J}(K, \mathcal{F})$.

Agora, sejam $y \in \mathrm{J}(U, \mathcal{F})$ e $F \in \mathcal{F}$. Então, $y \in \mathrm{J}(z, \mathcal{F})$, para algum $z \in U$. Da Proposição 1.65, segue que existem redes $(t_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}} \subset F$ e $(x_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}} \subset M$ tais que $x_{\mathcal{V}} \longrightarrow z$ e $t_{\mathcal{V}}x_{\mathcal{V}} \longrightarrow y$. Como U é aberto, existe $\mathcal{V}_0 \in \mathcal{O}$ tal que $x_{\mathcal{V}} \in U$ se $\mathcal{V} > \mathcal{V}_0$, ou seja, $(x_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}>\mathcal{V}_0} \subset U$. Como a subrede $(t_{\mathcal{V}}x_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}>\mathcal{V}_0} \subset FU$ de $(t_{\mathcal{V}}x_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}}$ converge a y, concluímos que $y \in \overline{FU}$, de modo que $y \in \omega(U, \mathcal{F})$. Portanto, $\mathrm{J}(U, \mathcal{F}) \subset \omega(U, \mathcal{F})$.

Por fim, suponha que $\mathcal{F}$ é uma base de filtro e tome $y \in \mathrm{J}(K, \mathcal{F})$. Então, existe $z \in K$ tal que $y \in \mathrm{J}(z, \mathcal{F})$. Assim,

$$y \in \mathrm{J}(z, \mathcal{F}) = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \mathrm{D}(z, F) \subset \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \mathrm{D}(K, F).$$

Reciprocamente, suponha que $y \in \mathrm{D}(K, F)$, para todo $F \in \mathcal{F}$. Então, para cada $F \in \mathcal{F}$, existe $k_F \in K$ tal que $y \in \mathrm{D}(k_F, F)$. Como K é compacto, existe uma subrede $(k_{F_\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ de $(k_F)_{F\in\mathcal{F}}$ tal que $k_{F_\lambda} \longrightarrow k$, para algum $k \in K$. Mostremos que $y \in \mathrm{J}(k, \mathcal{F})$. Fixe $F \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Tome $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $F_{\lambda_0} \subset F$. Então, $F_\lambda \subset F_{\lambda_0} \subset F$ se $\lambda > \lambda_0$. Tome ainda $\lambda_1 \in \Lambda$ tal que $k_{F_\lambda} \in \mathrm{B}(k, \mathcal{U})$ se $\lambda > \lambda_1$. Tomando $\lambda_2 \in \Lambda$ tal que $\lambda_2 > \lambda_0$ e $\lambda_2 > \lambda_1$, temos que $F_\lambda \subset F$ e $k_{F_\lambda} \in \mathrm{B}(k, \mathcal{U})$ se $\lambda > \lambda_2$. Fixado $\lambda > \lambda_2$, tome uma cobertura aberta $\mathcal{V}_\lambda \in \mathcal{O}$ tal que $\mathrm{B}(k_{F_\lambda}, \mathcal{V}_\lambda) \subset \mathrm{B}(k, \mathcal{U})$. Segue que $y \in \overline{F_\lambda \mathrm{B}(k_{F_\lambda}, \mathcal{V}_\lambda)} \subset \overline{F\mathrm{B}(k, \mathcal{U})}$. Portanto, $y \in \mathrm{J}(k, \mathcal{F})$, como queríamos demonstrar. □

1.4 Regiões e domínios de atração. Atratores

Nesta seção, apresentamos as definições e os conceitos básicos das regiões de atração, dos domínios de atração e dos atratores para ações de semigrupos.

Seja $\mathcal{S}$ um semigrupo. Suponha que $\mathcal{S}$ age em um espaço de Tychonoff M. Sejam $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de $\mathcal{S}$ e $\mathcal{O}$ uma família admissível de coberturas abertas de M.

Começamos apresentando os conceitos de regiões de atração para ações de semigrupos introduzidos em [18].

Definição 1.69. *Seja X um subconjunto de M.*

1. *A* ***região de $\mathcal{F}$-atração fraca*** *de X é definida por*

$$\mathfrak{A}_w(X,\mathcal{F}) = \{x \in M : Ax \cap \mathrm{B}(X,\mathcal{U}) \neq \varnothing, \ \textit{para quaisquer}\ A \in \mathcal{F}\ \textit{e}\ \mathcal{U} \in \mathcal{O}\}.$$

2. *A* ***região de $\mathcal{F}$-atração*** *de X é definida por*

$$\mathfrak{A}(X,\mathcal{F}) = \{x \in M : \ \textit{para cada}\ \mathcal{U} \in \mathcal{O}, \ \textit{existe}\ A \in \mathcal{F}\ \textit{tal que}\ Ax \subset \mathrm{B}(X,\mathcal{U})\}.$$

3. *A* ***região de $\mathcal{F}$-atração uniforme fraca*** *de X é definida por*

$$\mathfrak{A}_{wu}(X,\mathcal{F}) = \{x \in M : A\mathrm{B}(x,\mathcal{V}) \cap \mathrm{B}(X,\mathcal{U}) \neq \varnothing, \ \textit{para quaisquer}\ A \in \mathcal{F}\ \textit{e}\ \mathcal{U},\mathcal{V} \in \mathcal{O}\}.$$

4. *A* ***região de $\mathcal{F}$-atração uniforme*** *de X é definida por*

$$\mathfrak{A}_u(X,\mathcal{F}) = \left\{ x \in M : \begin{array}{c} \textit{para cada}\ \mathcal{U} \in \mathcal{O}, \ \textit{existem}\ A \in \mathcal{F}\ \textit{e}\ \mathcal{V} \in \mathcal{O}\ \textit{tais que} \\ A\mathrm{B}(x,\mathcal{V}) \subset \mathrm{B}(X,\mathcal{U}) \end{array} \right\}.$$

A seguir, apresentamos alguns exemplos.

Exemplo 1.70. (Ações de semigrupos em espaços métricos) Suponha que $\mathcal{S}$ age em um espaço métrico (M,d) e fixe um subconjunto $X \subset M$. Devido a (1.9), temos que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_w(X,\mathcal{F}) &= \{x \in M : Ax \cap \mathrm{B}(X,\varepsilon) \neq \varnothing, \ \text{para quaisquer}\ A \in \mathcal{F}\ \text{e}\ \varepsilon > 0\} \\
\mathfrak{A}(X,\mathcal{F}) &= \{x \in M : \ \text{para cada}\ \varepsilon > 0, \ \text{existe}\ A \in \mathcal{F}\ \text{tal que}\ Ax \subset \mathrm{B}(X,\varepsilon)\} \\
\mathfrak{A}_{wu}(X,\mathcal{F}) &= \{x \in M : A\mathrm{B}(x,\delta) \cap \mathrm{B}(X,\varepsilon) \neq \varnothing, \ \text{para quaisquer}\ A \in \mathcal{F}\ \text{e}\ \varepsilon,\delta > 0\} \\
\mathfrak{A}_u(X,\mathcal{F}) &= \left\{ x \in M : \begin{array}{c} \text{para cada}\ \varepsilon > 0, \ \text{existem}\ A \in \mathcal{F}\ \text{e}\ \delta > 0\ \text{tais que} \\ A\mathrm{B}(x,\delta) \subset \mathrm{B}(X,\varepsilon) \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

$\diamond$

Exemplo 1.71. Seja ϕ um fluxo contínuo (semifluxo contínuo) em um espaço métrico (M, d). Para quaisquer $t \in \mathbb{R}$ ($t \in \mathbb{R}^+$) e $x \in M$, seja $tx = \phi(t, x)$. A **região de atração fraca**, a **região de atração**, a **região de atração uniforme fraca** e a **região de atração uniforme** de $X \subset M$ com respeito ao fluxo ϕ são, respectivamente, os conjuntos

$$A_w(X) = \left\{ x \in M : \begin{array}{c} \text{existe uma sequência } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+ \text{ tal que } t_n \longrightarrow +\infty \\ \text{e } \lim_{n\to+\infty} d(t_n x, X) = 0 \end{array} \right\},$$

$$A(X) = \left\{ x \in M : \lim_{t\to+\infty} d(tx, X) = 0 \right\},$$

$$A_{wu}(X) = \left\{ x \in M : \begin{array}{c} \text{existem sequências } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+ \text{ e } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M \text{ tais que} \\ t_n \longrightarrow +\infty, x_n \longrightarrow x \text{ e } \lim_{n\to+\infty} d(t_n x_n, X) = 0 \end{array} \right\},$$

$$A_u(X) = \left\{ x \in M : \begin{array}{c} \text{para todo } \varepsilon > 0, \text{ existem } T \geqslant 0 \text{ e } \delta > 0 \text{ tais que} \\ (T, +\infty)B(x, \delta) \subset B(X, \varepsilon) \end{array} \right\}.$$

Seja $\mathcal{F} = \{(t, +\infty) : t \geqslant 0\}$. Não é difícil verificar que $A_w(X) = \mathfrak{A}_w(X, \mathcal{F})$, $A(X) = \mathfrak{A}(X, \mathcal{F})$, $A_{wu}(X) = \mathfrak{A}_{wu}(X, \mathcal{F})$ e $A_u(X) = \mathfrak{A}_u(X, \mathcal{F})$.[8] $\diamond$

Exemplo 1.72. Seja Φ um fluxo n-dimensional em um espaço métrico (M, d). Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, considere o subsemigrupo $\mathcal{S}_i$ de $\mathbb{R}^n$ e a família $\mathcal{F}_i$ de subconjuntos de $\mathcal{S}_i$ como no Exemplo 1.38 e denote por $(t_1, \ldots, t_n) \cdot x = \Phi((t_1, \ldots, t_n), x)$, com $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{S}_i$ e $x \in M$, o semifluxo n-dimensional em M definido por $\mathcal{S}_i$. As regiões de atração de um subconjunto $X \subset M$ referentes ao semifluxo n-dimensional definido por $\mathcal{S}_i$ com respeito à família $\mathcal{F}_i$ são

[8] Em [5, 6], Bathia e Szegö não consideram a região de atração uniforme fraca. Esse tipo de região de atração foi introduzido em [53] para estudar conjuntos controláveis prolongacionais.

dadas por

$$\mathfrak{A}_w(X,\mathcal{F}_i)=\left\{x\in M:\begin{array}{c}\text{existe uma sequência } ((t_1^m,\ldots,t_n^m))_{m\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}_i \text{ tal que}\\ t_i^m\longrightarrow+\infty \text{ e } \lim\limits_{m\to+\infty}d((t_1^m,\ldots,t_n^m)\cdot x,X)=0\end{array}\right\},$$

$$\mathfrak{A}(X,\mathcal{F}_i)=\left\{x\in M:\lim_{t_i\to+\infty}d((t_1,\ldots,t_n)\cdot x,X)=0\right\},$$

$$\mathfrak{A}_{wu}(X,\mathcal{F}_i)=\left\{x\in M:\begin{array}{c}\text{existem sequências } ((t_1^m,\ldots,t_n^m))_{m\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}_i \text{ e } (x_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ tais que}\\ t_i^m\longrightarrow+\infty, x_m\longrightarrow x \text{ e } \lim\limits_{m\to+\infty}d((t_1^m,\ldots,t_n^m)\cdot x_m,X)=0\end{array}\right\},$$

$$\mathfrak{A}_u(X,\mathcal{F}_i)=\left\{x\in M:\begin{array}{c}\text{para todo } \varepsilon>0, \text{ existem } T,\delta>0 \text{ tais que}\\ A_i(T)B(x,\delta)\subset B(X,\varepsilon)\end{array}\right\}.$$

Agora, considere o semigrupo $\mathcal{S}$ e a família $\mathcal{S}$ de subconjuntos de $\mathcal{S}$ como no Exemplo 1.38. As regiões de atração de um subconjunto $X\subset M$ referentes à ação de $\mathcal{S}$ em M com respeito à família $\mathcal{F}$ são dadas por

$$\mathfrak{A}_w(X,\mathcal{F})=\left\{x\in M:\begin{array}{c}\text{existe uma sequência } ((t_1^m,\ldots,t_n^m))_{m\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S} \text{ tal que}\\ t_i^m\longrightarrow+\infty, \text{ para todo } i=1,\ldots,n, \text{ e}\\ \lim\limits_{m\to+\infty}d((t_1^m,\ldots,t_n^m)\cdot x,X)=0\end{array}\right\},$$

$$\mathfrak{A}(X,\mathcal{F})=\left\{x\in M:\lim_{t_i\to+\infty}d((t_1,\ldots,t_n)\cdot x,X)=0, \text{ para todo } i=1,\ldots,n,\right\},$$

$$\mathfrak{A}_{wu}(X,\mathcal{F})=\left\{x\in M:\begin{array}{c}\text{existem sequências } ((t_1^m,\ldots,t_n^m))_{m\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S} \text{ e } (x_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ tais que}\\ t_i^m\longrightarrow+\infty, \text{ para todo } i=1,\ldots,n, x_m\longrightarrow x \text{ e}\\ \lim\limits_{m\to+\infty}d((t_1^m,\ldots,t_n^m)\cdot x_m,X)=0\end{array}\right\},$$

$$\mathfrak{A}_u(X,\mathcal{F})=\left\{x\in M:\begin{array}{c}\text{para todo } \varepsilon>0, \text{ existem } T,\delta>0 \text{ tais que}\\ A(T)B(x,\delta)\subset B(X,\varepsilon)\end{array}\right\}.$$

$\diamond$

Exemplo 1.73. Seja Σ um sistema de controle em uma variedade diferenciável metrizável M de classe C^∞ com métrica d. As **regiões de atração** $A_w(X)$, $A(X)$, $A_{wu}(X)$ e $A_u(X)$ de $X\subset M$ com respeito ao sistema Σ são definidas como sendo as $\mathcal{F}_{\text{ctr}}$-regiões de atração $\mathfrak{A}_w(X,\mathcal{F}_{\text{ctr}})$, $\mathfrak{A}(X,\mathcal{F}_{\text{ctr}})$, $\mathfrak{A}_{wu}(X,\mathcal{F}_{\text{ctr}})$ e $\mathfrak{A}_u(X,\mathcal{F}_{\text{ctr}})$ com respeito a ação de $\mathcal{S}_\Sigma$ considerando a família $\mathcal{F}_{\text{ctr}}$, respectivamente. Não é difícil verificar que, para qualquer $X \subset M$,

$$A_w(X) = \left\{ x \in M : \begin{array}{c} \text{existem sequências } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+ \text{ e } u_n \in \mathcal{U}_{cp} \text{ tais que } t_n \longrightarrow +\infty \\ \text{e } \lim\limits_{n\to+\infty} d(\varphi(t_n, x, u_n), X) = 0 \end{array} \right\},$$

$$A(X) = \left\{ x \in M : \lim_{t\to+\infty} d(\varphi(t, x, u), X) = 0, \text{ para qualquer } u \in \mathcal{U}_{cp} \right\},$$

$$A_{wu}(X) = \left\{ x \in M : \begin{array}{c} \text{existem sequências } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M \text{ e } u_n \in \mathcal{U}_{cp} \\ \text{tais que } t_n \longrightarrow +\infty, x_n \longrightarrow x \text{ e } \lim\limits_{n\to+\infty} d(\varphi(t_n, x_n, u_n), X) = 0 \end{array} \right\},$$

$$A_u(X) = \left\{ x \in M : \begin{array}{c} \text{para todo } \varepsilon > 0, \text{ existem } t \geqslant 0 \text{ e } \delta > 0 \text{ tais que} \\ (\mathcal{S}_\Sigma)_{\geqslant t} B(x, \delta) \subset B(X, \varepsilon) \end{array} \right\}.$$

$\diamond$

A próxima proposição apresenta condições suficientes para a invariância das regiões de atração.

Proposição 1.74. *Seja X um subconjunto de M. Suponha que as regiões de atração de X são não-vazias. Então,*

1. $\mathfrak{A}_w(X, \mathcal{F})$ *é $\mathcal{S}$-progressivamente invariante se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_3.
2. $\mathfrak{A}_w(X, \mathcal{F})$ *é $\mathcal{S}$-regressivamente invariante se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_2.
3. $\mathfrak{A}(X, \mathcal{F})$ *é $\mathcal{S}$-progressivamente invariante se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_2.
4. $\mathfrak{A}(X, \mathcal{F})$ *é $\mathcal{S}$-regressivamente invariante se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_3.
5. $\mathfrak{A}_{wu}(X, \mathcal{F})$ *é $\mathcal{S}$-progressivamente invariante se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_3.
6. $\mathfrak{A}_{wu}(X, \mathcal{F})$ *é $\mathcal{S}$-regressivamente invariante se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_2 *e a ação de $\mathcal{S}$ em M é aberta.*
7. $\mathfrak{A}_u(X, \mathcal{F})$ *é $\mathcal{S}$-progressivamente invariante se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_2 *e a ação de $\mathcal{S}$ em M é aberta.*
8. $\mathfrak{A}_u(X, \mathcal{F})$ *é $\mathcal{S}$-regressivamente invariante se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_3.

Demonstração:

1. Sejam $s \in \mathcal{S}$, $z \in \mathfrak{A}_w(X,\mathcal{F})$, $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Pela hipótese H_3, temos que existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset As$ e, assim, $Bz \subset Asz$. Como $Bz \cap \mathrm{B}(X,\mathcal{U}) \neq \varnothing$, segue que $Asz \cap \mathrm{B}(X,\mathcal{U}) \neq \varnothing$ e, portanto, $sz \in \mathfrak{A}_w(X,\mathcal{F})$.

2. Tome $y \in \mathcal{S}^*\mathfrak{A}_w(X,\mathcal{F})$, $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Então, existe $s \in \mathcal{S}$ tal que $sy \in \mathfrak{A}_w(X,\mathcal{F})$. Por outro lado, segue da hipótese H_2 que existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $Bs \subset A$. Logo, $Bsy \subset Ay$. Como $Bsy \cap \mathrm{B}(X,\mathcal{U}) \neq \varnothing$, temos que $Ay \cap \mathrm{B}(X,\mathcal{U}) \neq \varnothing$. Portanto, $y \in \mathfrak{A}_w(X,\mathcal{F})$.

3. Fixe $s \in \mathcal{S}$, $z \in \mathfrak{A}(X,\mathcal{F})$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Segue que existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $Az \subset \mathrm{B}(X,\mathcal{U})$. A hipótese H_2 implica a existência de um $B \in \mathcal{F}$ tal que $Bs \subset A$. Assim, $Bsz \subset Az \subset \mathrm{B}(X,\mathcal{U})$. Portanto, $sz \in \mathfrak{A}(X,\mathcal{F})$.

4. Se $y \in \mathcal{S}^*\mathfrak{A}(X,\mathcal{F})$, então existe $s \in \mathcal{S}$ tal que $sy \in \mathfrak{A}(X,\mathcal{F})$. Logo, se $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $Asy \subset \mathrm{B}(X,\mathcal{U})$. Por outro lado, segue da hipótese H_3 que existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset As$. Logo, $By \subset Asy \subset \mathrm{B}(X,\mathcal{U})$ e, portanto, $y \in \mathfrak{A}(X,\mathcal{F})$.

5. Sejam $s \in \mathcal{S}$, $z \in \mathfrak{A}_{wu}(X,\mathcal{F})$, $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U},\mathcal{V} \in \mathcal{O}$. Pela continuidade da aplicação μ_s, existe uma cobertura aberta $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que $s\mathrm{B}(z,\mathcal{W}) \subset \mathrm{B}(sz,\mathcal{V})$. Pela hipótese H_3, existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset As$. Como $B\mathrm{B}(z,\mathcal{W}) \cap \mathrm{B}(X,\mathcal{U}) \neq \varnothing$, concluímos que $As\mathrm{B}(z,\mathcal{W}) \cap \mathrm{B}(X,\mathcal{U}) \neq \varnothing$ e, assim, $A\mathrm{B}(sz,\mathcal{V}) \cap \mathrm{B}(X,\mathcal{U}) \neq \varnothing$. Portanto, temos que $sz \in \mathfrak{A}_{wu}(X,\mathcal{F})$.

6. Tome $y \in \mathcal{S}^*\mathfrak{A}_{wu}(X,\mathcal{F})$, $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U},\mathcal{V} \in \mathcal{O}$. Segue das hipóteses que existem $s \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tais que $sy \in \mathfrak{A}_{wu}(X,\mathcal{F})$, $Bs \subset A$ e $\mathrm{B}(sy,\mathcal{W}) \subset s\mathrm{B}(y,\mathcal{V})$. Como $B\mathrm{B}(sy,\mathcal{W}) \cap \mathrm{B}(X,\mathcal{U}) \neq \varnothing$, temos que $Bs\mathrm{B}(y,\mathcal{V}) \cap \mathrm{B}(X,\mathcal{U}) \neq \varnothing$ e, portanto, $A\mathrm{B}(y,\mathcal{W}) \cap \mathrm{B}(X,\mathcal{U}) \neq \varnothing$, ou seja, $y \in \mathfrak{A}_{wu}(X,\mathcal{F})$.

7. Se $s \in \mathcal{S}$, $z \in \mathfrak{A}_u(X,\mathcal{F})$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, então existem $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tais que $A\mathrm{B}(z,\mathcal{W}) \subset \mathrm{B}(X,\mathcal{U})$. Da hipótese H_2 e do fato de que a ação de $\mathcal{S}$ em M é aberta, segue que existem $B \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tais que $Bs \subset A$ e $\mathrm{B}(sz,\mathcal{V}) \subset s\mathrm{B}(z,\mathcal{W})$. Logo, $B\mathrm{B}(sz,\mathcal{V}) \subset Bs\mathrm{B}(z,\mathcal{W}) \subset A\mathrm{B}(z,\mathcal{W}) \subset \mathrm{B}(X,\mathcal{U})$ e, portanto, $sz \in \mathfrak{A}_u(X,\mathcal{F})$.

8. Fixe $y \in \mathcal{S}^*\mathfrak{A}_u(X,\mathcal{F})$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e escolha $s \in \mathcal{S}$ tal que $sy \in \mathfrak{A}_u(X,\mathcal{F})$. Então, existem $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tais que $A\mathrm{B}(sy,\mathcal{W}) \subset \mathrm{B}(X,\mathcal{U})$. Segue da continuidade da aplicação μ_s que existe uma cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $s\mathrm{B}(y,\mathcal{V}) \subset \mathrm{B}(sy,\mathcal{W})$ e da hipótese H_3 que existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset As$. Logo, $B\mathrm{B}(y,\mathcal{V}) \subset As\mathrm{B}(y,\mathcal{V}) \subset A\mathrm{B}(sy,\mathcal{W}) \subset \mathrm{B}(X,\mathcal{U})$. Portanto, $y \in \mathfrak{A}_u(X,\mathcal{F})$.

□

A seguir, apresentamos os conceitos de domínios de atração para ações de semigrupos introduzidos em [16, 18].

Definição 1.75. *Seja X um subconjunto de M.*

1. *O* ***domínio de $\mathcal{F}$-atração fraca*** *de X é definido por*

$$\mathrm{Atr}_w(X,\mathcal{F}) = \{x \in M : \omega(x,\mathcal{F}) \cap X \neq \varnothing\}.$$

2. *O* ***domínio de $\mathcal{F}$-atração*** *de X é definido por*

$$\mathrm{Atr}(X,\mathcal{F}) = \{x \in M : \omega(x,\mathcal{F}) \neq \varnothing \text{ e } \omega(x,\mathcal{F}) \subset X\}.$$

3. *O* ***domínio de $\mathcal{F}$-atração uniforme fraca*** *de X é definido por*

$$\mathrm{Atr}_{wu}(X,\mathcal{F}) = \{x \in M : \mathrm{J}(x,\mathcal{F}) \cap X \neq \varnothing\}.$$

4. *O* ***domínio de $\mathcal{F}$-atração uniforme*** *de X é definido por*

$$\mathrm{Atr}_u(X,\mathcal{F}) = \{x \in M : \mathrm{J}(x,\mathcal{F}) \neq \varnothing \text{ e } \mathrm{J}(x,\mathcal{F}) \subset X\}.$$

No que segue, exibimos alguns exemplos.

Exemplo 1.76. Seja ϕ um fluxo contínuo (semifluxo contínuo) em um espaço métrico (M,d). Para quaisquer $t \in \mathbb{R}$ ($t \in \mathbb{R}^+$) e $x \in M$, seja $tx = \phi(t,x)$. O **domínio de atração fraca**, o

domínio de atração, o **domínio de atração uniforme fraca** e o **domínio de atração uniforme** de $X \subset M$ com respeito ao fluxo ϕ são, respectivamente, os conjuntos

$$\begin{aligned} Atr_w(X) &= \{x \in M : \omega(x) \cap X \neq \varnothing\}, \\ Atr(X) &= \{x \in M : \omega(x) \neq \varnothing \text{ e } \omega(x) \subset X\}, \\ Atr_{wu}(X) &= \{x \in M : J(x) \cap X \neq \varnothing\}, \\ Atr_u(X) &= \{x \in M : J(x) \neq \varnothing \text{ e } J(x) \subset X\}, \end{aligned}$$

É imediato verificar que $Atr_w(X) = \mathrm{Atr}_w(X, \mathcal{F})$, $Atr(X) = \mathrm{Atr}(X, \mathcal{F})$, $Atr_{wu}(X) = \mathrm{Atr}_{wu}(X, \mathcal{F})$ e $Atr_u(X) = \mathrm{Atr}_u(X, \mathcal{F})$, onde $\mathcal{F} = \{(t, +\infty) : t \geqslant 0\}$. $\diamond$

Exemplo 1.77. Seja Σ um sistema de controle em uma variedade diferenciável metrizável M de classe C^∞ com métrica d. Os **domínios de atração** $Atr_w(X)$, $Atr(X)$, $Atr_{wu}(X)$ e $Atr_u(X)$ de $X \subset M$ com respeito ao sistema Σ são definidas como sendo os $\mathcal{F}_{\mathrm{ctr}}$-domínios de atração $\mathrm{Atr}_w(X, \mathcal{F}_{\mathrm{ctr}})$, $\mathrm{Atr}(X, \mathcal{F}_{\mathrm{ctr}})$, $\mathrm{Atr}_{wu}(X, \mathcal{F}_{\mathrm{ctr}})$ e $\mathrm{Atr}_u(X, \mathcal{F}_{\mathrm{ctr}})$ com respeito a ação de $\mathcal{S}_\Sigma$ considerando a família $\mathcal{F}_{\mathrm{ctr}}$, respectivamente. $\diamond$

Com relação à invariância dos domínios de atração, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.78. *Seja X um subconjunto de M cujos domínios de atração são não-vazios. Então,*

1. $\mathrm{Atr}_w(X, \mathcal{F})$ *é $\mathcal{S}$-progressivamente invariante se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_3.
2. $\mathrm{Atr}_w(X, \mathcal{F})$ *é $\mathcal{S}$-regressivamente invariante se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_2.
3. $\mathrm{Atr}(X, \mathcal{F})$ *é $\mathcal{S}$-invariante se $\mathcal{F}$ satisfaz as hipóteses* H_2 *e* H_3.
4. $\mathrm{Atr}_{wu}(X, \mathcal{F})$ *é $\mathcal{S}$-progressivamente invariante se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_3.
5. $\mathrm{Atr}_{wu}(X, \mathcal{F})$ *é $\mathcal{S}$-regressivamente invariante se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese* H_2 *e a ação de $\mathcal{S}$ em M é aberta.*
6. $\mathrm{Atr}_u(X, \mathcal{F})$ *é $\mathcal{S}$-invariante se $\mathcal{F}$ satisfaz as hipóteses* H_2 *e* H_3 *e a ação de $\mathcal{S}$ em M é aberta.*

Demonstração: Para a demonstração dos itens 1, 2 e 3, veja [16, Proposição 2.15]. Provemos os demais itens. Sejam $s \in \mathcal{S}$ e $z \in \mathrm{Atr}_{wu}(X, \mathcal{F})$. Segue que $\mathrm{J}(z, \mathcal{F}) \cap X \neq \varnothing$. A Proposição 1.62 implica que $\mathrm{J}(sz, \mathcal{F}) \cap X \neq \varnothing$ e, portanto, $sz \in \mathrm{Atr}_{wu}(X, \mathcal{F})$, o que mostra o item 4. Para ver o item 5, fixe $y \in \mathcal{S}^*\mathrm{Atr}_{wu}(X, \mathcal{F})$ Então existe $s \in \mathcal{S}$ tal que $sy \in \mathrm{Atr}_{wu}(X, \mathcal{F})$. Isso significa que $\mathrm{J}(sy, \mathcal{F}) \cap X \neq \varnothing$. Segue da Proposição 1.62 que $\mathrm{J}(y, \mathcal{F}) \cap X \neq \varnothing$. Portanto, $y \in \mathrm{Atr}_{wu}(X, \mathcal{F})$. Por fim, tome $s \in \mathcal{S}$ e $z \in \mathrm{Atr}_{u}(X, \mathcal{F})$. Então, $\mathrm{J}(z, \mathcal{F}) \neq \varnothing$ e $\mathrm{J}(z, \mathcal{F}) \subset X$. Da Proposição 1.62, segue que $\mathrm{J}(z, \mathcal{F}) = \mathrm{J}(sz, \mathcal{F})$, de modo que $\mathrm{J}(sz, \mathcal{F}) \neq \varnothing$ e $\mathrm{J}(sz, \mathcal{F}) \subset X$. Portanto, $sz \in \mathrm{Atr}_{u}(X, \mathcal{F})$. agora, se $y \in \mathcal{S}^*\mathrm{Atr}_{u}(X, \mathcal{F})$, então existe $s \in \mathcal{S}$ tal que $sy \in \mathrm{Atr}_{u}(X, \mathcal{F})$. Logo, $\mathrm{J}(sy, \mathcal{F}) \neq \varnothing$ e $\mathrm{J}(sy, \mathcal{F}) \subset X$. A Proposição 1.62 nos diz que $\mathrm{J}(sy, \mathcal{F}) = \mathrm{J}(y, \mathcal{F})$. Assim, $\mathrm{J}(y, \mathcal{F}) \neq \varnothing$ e $\mathrm{J}(y, \mathcal{F}) \subset X$ e, portanto, $y \in \mathrm{Atr}_{u}(X, \mathcal{F})$.

□

O próximo resultado nos dá uma relação entre as regiões e os domínios de atração de conjuntos compactos.

Proposição 1.79. *Suponha que $\mathcal{F}$ é uma base de filtro e que K é um subconjunto compacto de M. Então, $\mathfrak{A}_w(K, \mathcal{F}) = \mathrm{Atr}_w(K, \mathcal{F})$, $\mathfrak{A}(K, \mathcal{F}) \subset \mathrm{Atr}(K, \mathcal{F})$, $\mathfrak{A}_{wu}(K, \mathcal{F}) = \mathrm{Atr}_{wu}(K, \mathcal{F})$ e $\mathfrak{A}_u(K, \mathcal{F}) \subset \mathrm{Atr}_u(K, \mathcal{F})$. Além disso, se M é localmente compacto e Ax é conexo, para quaisquer $x \in M$ e $A \in \mathcal{F}$, então $\mathfrak{A}(K, \mathcal{F}) = \mathrm{Atr}(K, \mathcal{F})$ e $\mathfrak{A}_u(K, \mathcal{F}) = \mathrm{Atr}_u(K, \mathcal{F})$.*

Demonstração: Veja [18, Teoremas 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8]. □

Na sequência, apresentamos os conceitos de atratores para ações de semigrupos introduzidos em [12, 16, 18].

Definição 1.80. *Seja X um subconjunto de M. Dizemos que X é um*

1. *$\mathcal{F}$-**semiatrator fraco** se $\mathfrak{A}_w(X, \mathcal{F})$ é uma vizinhança de X em M.*

2. *$\mathcal{F}$-**atrator fraco** se existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathrm{B}(X, \mathcal{U}) \subset \mathfrak{A}_w(X, \mathcal{F})$.*

3. *$\mathcal{F}$-**semiatrator** se $\mathfrak{A}(X, \mathcal{F})$ é uma vizinhança de X em M.*

4. *$\mathcal{F}$-**atrator** se existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathrm{B}(X, \mathcal{U}) \subset \mathfrak{A}(X, \mathcal{F})$.*

5. $\mathcal{F}$-***semiatrator uniforme fraco*** *se* $\mathfrak{A}_{wu}(X,\mathcal{F})$ *é uma vizinhança de* X *em* M.

6. $\mathcal{F}$-***atrator uniforme fraco*** *se existe* $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ *tal que* $\mathrm{B}(X,\mathcal{U}) \subset \mathfrak{A}_{wu}(X,\mathcal{F})$.

7. $\mathcal{F}$-***semiatrator uniforme*** *se* $\mathfrak{A}_{u}(X,\mathcal{F})$ *é uma vizinhança de* X *em* M.

8. $\mathcal{F}$-***atrator uniforme*** *se existe* $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ *tal que* $\mathrm{B}(X,\mathcal{U}) \subset \mathfrak{A}_{u}(X,\mathcal{F})$.

9. $\mathcal{F}$-***atrator fraco global*** *se* $\mathfrak{A}_{w}(X,\mathcal{F}) = M$.

10. $\mathcal{F}$-***atrator global*** *se* $\mathfrak{A}(X,\mathcal{F}) = M$.

11. $\mathcal{F}$-***atrator uniforme fraco global*** *se* $\mathfrak{A}_{wu}(X,\mathcal{F}) = M$.

12. $\mathcal{F}$-***atrator uniforme global*** *se* $\mathfrak{A}_{u}(X,\mathcal{F}) = M$.

13. $\mathcal{F}$-***atrator de Conley*** *se existe uma vizinhança* V *de* X *em* M *tal que* $\omega(V,\mathcal{F}) = X$.

Alguns esclarecimentos com relação à nomenclatura dos domínios e regiões de atração e dos atratores devem ser feitos. Em [16, 17], os domínios de atração são utilizados para definir atratores e não as regiões de atração. Já em [18], as regiões de atração são utilizadas para definir os atratores, sendo, contudo, chamadas de domínios de atração. Nesta tese, seguimos a nomenclatura de [37] e utilizamos os termos “região de atração” e “domínio de atração”. Além disso, os conceitos de atratores utilizados em [17] correspondem aos conceitos de semiatratores da Definição 1.80. O uso da nomenclatura “semiatrator” ainda não havia sido utilizado no contexto de ações de semigrupos em espaços topológicos, apesar de ser empregado no caso de fluxos em espaços métricos (veja [5, 6]). Por fim, o conceito de “atrator de Conley” da Definição 1.80 é conhecido simplesmente como “atrator” na teoria de Conley (veja [12, 13, 14, 25, 26]). Nesta tese, seguimos a nomenclatura de [8, 19] e utilizamos o termo “atrator de Conley” para diferenciar os atratores da teoria de Conley dos atratores da teoria clássica de sistemas dinâmicos em espaços métricos.

Seja X um subconjunto de M. É claro que se existe uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathrm{B}(X,\mathcal{U}) \subset \mathfrak{A}_{w}(X,\mathcal{F})$, então $\mathfrak{A}_{w}(X,\mathcal{F})$ é uma vizinhança de X, ou seja, é claro que X é um semiatrator fraco se ele é um atrator fraco. A recíproca desse fato vale para conjuntos compactos: se K é um subconjunto compacto de M e $\mathfrak{A}_{w}(K,\mathcal{F})$ é uma vizinhança de K em

M, segue do item 2 da Definição 1.18 que existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathrm{B}(K,\mathcal{U}) \subset \mathfrak{A}_w(K,\mathcal{F})$, ou seja, K é um atrator fraco se ele é um semiatrator fraco. O mesmo vale para os demais tipos de atratores.

A seguir, apresentamos alguns exemplos.

Exemplo 1.81. Seja ϕ um fluxo contínuo (semifluxo contínuo) em um espaço métrico (M,d). Para quaisquer $t \in \mathbb{R}$ ($t \in \mathbb{R}^+$) e $x \in M$, seja $tx = \phi(t,x)$. Seja ainda $\mathcal{F}$ a família de subconjuntos de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^+$) dada no Exemplo 1.36. A partir dos Exemplos 1.36, 1.57, 1.71 e 1.76, é imediato verificar que os diversos tipos de atratores para o fluxo (semifluxo) ϕ coincidem com os respectivos conceitos de $\mathcal{F}$-atratores para a ação de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^+$) em M com respeito à família $\mathcal{F}$. $\diamond$

Exemplo 1.82. Seja Σ um sistema de controle sobre uma variedade diferenciável M de classe C^∞ cujo conjunto das funções de controle é $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{cp}$. Um subconjunto $X \subset M$ é um **semiatrator fraco** para o sistema Σ (respectivamente um **semiatrator** para o sistema Σ, um **semiatrator uniforme fraco** para o sistema Σ, um **semiatrator uniforme** para o sistema Σ) se X é um $\mathcal{F}_{\mathrm{ctr}}$-semiatrator fraco (respectivamente um $\mathcal{F}_{\mathrm{ctr}}$-semiatrator, um $\mathcal{F}_{\mathrm{ctr}}$-semiatrator uniforme fraco, um $\mathcal{F}_{\mathrm{ctr}}$-semiatrator uniforme) para a ação de $\mathcal{S}_\Sigma$ em M. Da mesma forma, X é um **atrator fraco** para o sistema Σ (respectivamente um **atrator** para o sistema Σ, um **atrator uniforme fraco** para o sistema Σ, um **atrator uniforme** para o sistema Σ) se X é um $\mathcal{F}_{\mathrm{ctr}}$-atrator fraco (respectivamente um $\mathcal{F}_{\mathrm{ctr}}$-atrator, um $\mathcal{F}_{\mathrm{ctr}}$-atrator uniforme fraco, um $\mathcal{F}_{\mathrm{ctr}}$-atrator uniforme) para a ação de $\mathcal{S}_\Sigma$ em M. Por fim, X é um **atrator de Conley** para o sistema Σ se X é um $\mathcal{F}_{\mathrm{ctr}}$-atrator de Conley para a ação de $\mathcal{S}_\Sigma$ em M. $\diamond$

Os seguintes resultados são utilizados ao longo desta tese.

Proposição 1.83. *Seja X um subconjunto de M. Então,*

1. *X é um $\mathcal{F}$-atrator uniforme fraco se X é um $\mathcal{F}$-atrator uniforme.*

2. *X é um $\mathcal{F}$-atrator se X é um $\mathcal{F}$-atrator uniforme.*

3. *X é um $\mathcal{F}$-atrator fraco se X é um $\mathcal{F}$-atrator.*

Demonstração: O resultado segue imediatamente das definições de região de atração. □

Proposição 1.84. *Assuma que $\mathcal{S}$ é um subsemigrupo de um grupo. Suponha que X é um $\mathcal{F}$-atrator de Conley que é $\mathcal{S}$-invariante. Então, X é $\mathcal{S}$-invariante isolado.*

Demonstração: Veja [19, Proposição 3.9]. □

1.5 Estabilidade de Lyapunov

Nesta seção, apresentamos os conceitos e os resultados de estabilidade de Lyapunov para ações de semigrupos necessários aos demais capítulos desta tese. Começamos apresentando as conceitos de conjuntos estáveis e de conjunto assintoticamente estável (no sentido de Lyapunov). Em seguida, apresentamos alguns exemplos e resultados que são utilizados nos demais capítulos desta tese.

Assim como nas seções anteriores, seja $\mathcal{S}$ um semigrupo que age em um espaço de Tychonoff M. Sejam $\mathcal{O}$ uma família admissível de coberturas abertas de M e $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de $\mathcal{S}$.

Definição 1.85. *Seja X um subconjunto de M. Dizemos que X é*

1. *$\mathcal{S}$-**estável** se para quaisquer $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $x \in X$, existe uma cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{S}\mathrm{B}(x, \mathcal{V}) \subset \mathrm{B}(X,\mathcal{U})$.*

2. *$\mathcal{S}$-**uniformemente estável** se para toda cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{S}\mathrm{B}(X, \mathcal{V}) \subset \mathrm{B}(X,\mathcal{U})$.*

3. *$\mathcal{S}$-**equiestável** se para todo ponto $z \notin X$, existe uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $z \notin \overline{\mathcal{S}\mathrm{B}(X,\mathcal{U})}$.*

4. *$\mathcal{S}$-**orbitalmente estável** se para toda vizinhança U de X em M, existe uma vizinhança V de X em M tal que $\mathcal{S}V \subset V \subset U$.*

5. *$\mathcal{F}$-**assintoticamente estável** se X é um $\mathcal{F}$-atrator que é $\mathcal{S}$-uniformemente estável.*

Apresentamos na sequência alguns exemplos de conjuntos estáveis.

Exemplo 1.86. (Ações de semigrupos em espaços métricos) Suponha que $\mathcal{S}$ age em um espaço métrico (M, d) e fixe um subconjunto $X \subset M$. É possível reescrever as definições de conjuntos estáveis, uniformemente estáveis e equiestáveis em termos das ε-vizinhanças de (M, d). De fato, devido a (1.9), temos que

1. X é $\mathcal{S}$-estável se e somente se para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{S}\mathrm{B}(x, \delta) \subset \mathrm{B}(X, \varepsilon)$.

2. X é $\mathcal{S}$-uniformemente estável se e somente se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{S}\mathrm{B}(X, \delta) \subset \mathrm{B}(X, \varepsilon)$.

3. X é $\mathcal{S}$-equiestável se e somente se para todo ponto $z \notin X$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $z \notin \overline{\mathcal{S}\mathrm{B}(X, \varepsilon)}$. ◇

Exemplo 1.87. (Veja [5, 6] e [16, Seção 4]) Seja ϕ um fluxo contínuo (semifluxo contínuo) em um espaço métrico (M, d). Para quaisquer $t \in \mathbb{R}$ ($t \in \mathbb{R}^+$) e $x \in M$, seja $tx = \phi(t, x)$. Seja ainda $\mathcal{F}$ a família de subconjuntos de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^+$) dada no Exemplo 1.36. Um subconjunto $X \subset M$ é

1. **estável** pelo fluxo (semifluxo) ϕ se para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, existe $\delta > 0$ tal que $\mathbb{R}^+ B(x, \delta) \subset B(X, \varepsilon)$.

2. **uniformemente estável** pelo fluxo (semifluxo) ϕ se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\mathbb{R}^+ B(X, \delta) \subset B(X, \varepsilon)$.

3. **equiestável** pelo fluxo (semifluxo) ϕ se para todo $z \notin X$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $z \notin \overline{\mathbb{R}^+ B(X, \varepsilon)}$.

4. **orbitalmente estável** pelo fluxo (semifluxo) ϕ se para toda vizinhança U de X em M, existe uma vizinhança V de X em M tal que $\mathbb{R}^+ V \subset V \subset U$.

5. **assintoticamente estável** pelo fluxo (semifluxo) ϕ se X é um atrator que é estável pelo fluxo (semifluxo) ϕ.

Não é difícil verificar que os conceitos de conjuntos estáveis definidos para o fluxo (semifluxo) ϕ coincidem com os conceitos de conjuntos $\mathbb{R}^+$-estáveis para a ação de $\mathbb{R}^+$ em M[9] com respeito à família $\mathcal{F}$. ◇

Exemplo 1.88. Seja Σ um sistema de controle sobre uma variedade diferenciável de classe C^∞ cujo conjunto das funções de controle é $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{cp}$. Um subconjunto X de M é **estável** para o sistema Σ (respectivamente **uniformemente estável** para o sistema Σ, **equiestável** para o sistema Σ, **orbitalmente estável** para o sistema Σ, **assintoticamente estável** para o sistema Σ) se X é $\mathcal{S}_\Sigma$-estável (respectivamente $\mathcal{S}_\Sigma$-uniformemente estável, $\mathcal{S}_\Sigma$-equiestável, $\mathcal{S}_\Sigma$-orbitalmente estável, $\mathcal{F}_{\mathrm{ctr}}$-assintoticamente estável). ◇

O seguinte resultado apresenta algumas propriedades básicas de conjuntos estáveis.

Proposição 1.89. *1. Seja X um subconjunto de M. Então, X é $\mathcal{S}$-progressivamente invariante se X é $\mathcal{S}$-estável e fechado ou $\mathcal{S}$-equiestável.*

2. Suponha que K é um subconjunto compacto de M tal que $x \in \overline{\mathcal{S}x}$, para todo $x \in K$. Então, K é $\mathcal{S}$-equiestável se e somente se $\mathrm{D}(K, \mathcal{S}) = K$.

Demonstração: Veja [16, Proposição 3.1 e Corolário 3.1]. □

Em [5, 6], Bhatia e Szegö apresentam resultados que relacionam os diversos tipos de estabilidade de Lyapunov no contexto de fluxos em espaços métricos. No contexto de ações de semigrupos, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.90. *Seja X um subconjunto de M.*

1. *Suponha que X é compacto. Então, X é $\mathcal{S}$-estável se e somente se X é $\mathcal{S}$-uniformemente estável.*

2. *Se X é fechado e $\mathcal{S}$-uniformemente estável, então X é $\mathcal{S}$-equiestável.*

[9] Observe que, mesmo na teoria de fluxos, os conceitos clássicos de estabilidade de Lyapunov são definidos em termos da ação de $\mathbb{R}^+$ em M. Essa ação é obviamente a ação obtida por meio da restrição da ação de $\mathbb{R}$ em M induzida pelo fluxo ϕ.

3. *Suponha que M é localmente compacto, que X é compacto, que $x \in \overline{\mathcal{S}x}$, para todo $x \in X$ e que $\overline{\mathcal{S}x}$ é conexo, para todo $x \in M$. Então, X é $\mathcal{S}$-uniformemente estável se X é $\mathcal{S}$-equiestável.*

4. *Suponha que X é compacto. Então, X é $\mathcal{S}$-estável se X é $\mathcal{S}$-orbitalmente estável. A recíproca é válida se a ação de $\mathcal{S}$ em M é aberta e $x \in \mathcal{S}x$, para todo $x \in X$.*

Demonstração: Veja [16, Teoremas 3.2, 3.3 e 3.4] e [37, Proposição 4.15]. □

Conjuntos estáveis e assintoticamente estáveis também podem ser relacionados com atratores, como vemos no resultado a seguir.

Proposição 1.91. *Seja K um subconjunto compacto de M.*

1. *Suponha que M é localmente compacto, que Ax é conexo, para quaisquer $A \in \mathcal{F}$ e $x \in M$, e que $\mathcal{F}$ é uma base de filtro de subconjuntos de $\mathcal{S}$ que satisfaz a hipótese* H_3.

   (a) *Suponha que K é um $\mathcal{F}$-atrator fraco que é $\mathcal{S}$-estável. Então, K é um $\mathcal{F}$-atrator (e, portanto, K é $\mathcal{F}$-assintoticamente estável).*

   (b) *Suponha que K é $\mathcal{F}$-assintoticamente estável. Então, K é um $\mathcal{F}$-atrator uniforme.*

2. *Assuma que $\mathcal{S}$ é um semigrupo topológico tal que $\mathcal{S} \setminus A$ é compacto, para todo $A \in \mathcal{F}$. Suponha que $x \in \overline{\mathcal{S}x}$ e que $\mathcal{S}x$ é conexo, para todo $x \in M$. Suponha ainda que $\mathcal{F}$ é uma base de filtro livre de subconjuntos de $\mathcal{S}$ e que K é $\mathcal{S}$-progressivamente invariante.*

   (a) *Assuma que K é um $\mathcal{F}$-atrator de Conley. Então, K é um $\mathcal{F}$-atrator uniforme que é $\mathcal{S}$-estável (e, portanto, K é $\mathcal{F}$-assintoticamente estável).*

   (b) *Assuma que K é um $\mathcal{F}$-atrator uniforme. Então, K é $\mathcal{F}$-assintoticamente estável.*

Demonstração: Veja [16, Teoremas 3.5 e 3.6] e [19, Proposições 3.3, 3.4 e 3.6]. □

Por fim, apresentamos uma caracterização de atratores de Conley no contexto de sistemas de controle.

Proposição 1.92. *Seja* Σ *um sistema de controle sobre uma variedade diferenciável* M *de classe* C^∞ *cujo conjunto de controle* $U \subset \mathbb{R}^n$ *é compacto e convexo e cujo conjunto das funções de controle é* $\mathcal{U}_{cp}$*. Suponha que a família* $\mathcal{F}_{\mathrm{ctr}}$ *referente a* Σ *satisfaz as hipóteses* H_3 *e* H_4*. Então, um subconjunto compacto* $K \subset M$ *é um atrator de Conley para o sistema* Σ *se e somente se* K *é um conjunto invariante isolado que é estável para o sistema* Σ*.*

Demonstração: Veja [19, Teorema 4.3]. □

Capítulo 2

Aplicações que preservam órbitas

Neste capítulo, estudamos o comportamento de conjuntos limite, prolongamentos, conjuntos limite prolongacionais, atratores e conjuntos estáveis por aplicações que preservam órbitas. Num primeiro momento, introduzimos o conceito de aplicação que preserva órbitas e apresentamos algumas de suas propriedades. São apresentados também diversos exemplos de aplicações que preservam órbitas. Depois, apresentamos os resultados referentes ao comportamento de conjuntos limite, prolongamentos, conjuntos limite prolongacionais, atratores e conjuntos estáveis por aplicações que preservam órbitas, dividindo os resultados em duas seções: primeiramente, tratando de aplicações contínuas e, depois, tratando de aplicações uniformemente contínuas. Os resultados apresentados ao longo deste capítulo generalizam os resultados de [18].

2.1 Conceitos básicos

Nesta seção, introduzimos o conceito de aplicação que preserva órbitas. Apresentamos as propriedades básicas e exemplos de tais aplicações.

Sejam M e N espaços de Tychonoff munidos de famílias admissíveis de coberturas abertas $\mathcal{O}_M$ e $\mathcal{O}_N$, respectivamente. Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ semigrupos tais que $\mathcal{S}$ age em M e $\mathcal{T}$ age em N. Seja ainda $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de $\mathcal{S}$, isto é, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathcal{S})$, onde $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ denota o conjunto das partes de $\mathcal{S}$.

Definição 2.1. *Seja $p : M \longrightarrow N$ uma aplicação. Dizemos que p* ***preserva as órbitas da ação de $\mathcal{S}$ com relação à ação de $\mathcal{T}$*** *ou simplesmente que p* ***preserva órbitas*** *(quando* *não houver risco de confusão com os semigrupos em questão) se*

$$p(\mathcal{S}x) = \mathcal{T}p(x), \text{ para todo } x \in M.$$

Se p preserva órbitas, dizemos que p é uma

1. ***semiconjugação orbital*** *se p é contínua e sobrejetora.*

2. ***conjugação orbital*** *se p é um homeomorfismo.*

3. ***semiconjugação orbital uniforme*** *se p é uniformemente contínua e sobrejetora.*

4. ***conjugação orbital uniforme*** *se p é um homeomorfismo uniforme.*

Note que, se $p : M \longrightarrow N$ é uma conjugação orbital, então p^{-1} preserva as órbitas da ação de $\mathcal{T}$ com relação à ação de $\mathcal{S}$, pois, dado $y = p(x) \in N$,

$$p^{-1}(\mathcal{T}y) = p^{-1}(\mathcal{T}p(x)) = p^{-1}(p(\mathcal{S}x)) = \mathcal{S}x = \mathcal{S}p^{-1}(y).$$

A seguir, destacamos um tipo especial de aplicação que preserva órbitas.

Definição 2.2. *Seja $p : M \longrightarrow N$ uma aplicação que preserva órbitas. Seja também $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{T})$ uma aplicação. Dizemos que p* ***preserva $\mathcal{F}$ com relação à*** *φ se*

$$p(Ax) = \varphi(A)p(x), \text{ para quaisquer } A \in \mathcal{F} \text{ e } x \in M.$$

Se p preserva $\mathcal{F}$ com relação à φ, então

1. *a família*

$$\mathcal{F}_{\varphi p} = \{\varphi(A) : A \in \mathcal{F}\}$$

   é chamada ***família induzida por*** *φ, p* ***e*** *$\mathcal{F}$* ***em*** *$\mathcal{T}$.*

2. *dizemos que p é uma $\mathcal{F}$-**semiconjugação com relação à** φ se p é contínua e sobrejetora.*

3. *dizemos que p é uma $\mathcal{F}$-**conjugação com relação à** φ se p é um homeomorfismo e φ é bijetora.*

4. *dizemos que p é uma $\mathcal{F}$-**semiconjugação uniforme com relação à** φ se p é uniformemente contínua e sobrejetora.*

5. *dizemos que p é uma $\mathcal{F}$-**conjugação uniforme com relação à** φ se p é um homeomorfismo uniforme e φ é bijetora.*

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.3. (Aplicações $\mathcal{S}$-equivariantes) Seja $p : M \longrightarrow N$ uma aplicação. Dizemos que p é $\mathcal{S}$-**equivariante** se $\mathcal{S} = \mathcal{T}$ e

$$p(sx) = sp(x), \text{ para quaisquer } s \in \mathcal{S} \text{ e } x \in M.$$

Dizemos que p é uma

1. $\mathcal{S}$-**semiconjugação topológica** se p é contínua e sobrejetora.

2. $\mathcal{S}$-**conjugação topológica** se p é um homeomorfismo.

3. $\mathcal{S}$-**semiconjugação topológica uniforme** se p é uniformemente contínua e sobrejetora.

4. $\mathcal{S}$-**conjugação topológica uniforme** se p é um homeomorfismo uniforme.

Assuma que p é $\mathcal{S}$-equivariante. É imediato verificar que p preserva as órbitas da ação de $\mathcal{S}$ (em M) com relação à ação de $\mathcal{S}$ (em N). Além disso, considerando $\varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(\mathcal{S})}$, isto é,

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ \mathcal{P}(\mathcal{S}) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{S}) \\ A \ &\longmapsto \ \varphi(A) = A \end{aligned}$$

temos que p preserva $\mathcal{F}$ com relação a φ e $\mathcal{F}_{\varphi p} = \mathcal{F}$. $\diamond$

Exemplo 2.4. (Translações à direita em grupos topológicos) Seja G um grupo topológico de Hausdorff com elemento neutro 1. Para cada $g \in G$, a translação à direita por g é a aplicação $D_g : G \longrightarrow G$ definida por $D_g(h) = hg$, para todo $h \in G$. Para quaisquer $g, g', h \in G$, temos que

$$D_g(g'h) = (g'h)g = g'(hg) = g'D_g(h).$$

Considerando em G a ação dada pela multiplicação, temos que D_g é uma G-conjugação topológica, para todo $g \in G$.

Agora, considere em G a família admissível de coberturas abertas $\mathcal{O}_{\mathfrak{V}}$ como no Exemplo 1.29. Mostremos que, para quaisquer $g \in G$ e $V \in \mathfrak{V}$,

$$\mathrm{B}(x,\mathcal{U}_V)g \subset \mathrm{B}(xg,\mathcal{U}_V), \text{ para todo } x \in G.$$

Fixe $x, g \in G$ e $V \in \mathfrak{V}$. Se $y \in \mathrm{B}(x,\mathcal{U}_V)g$, então $yg^{-1} \in \mathrm{B}(x,\mathcal{U}_V)$. Daí, existe $h \in G$ tal que $yg^{-1}, x \in Vh$. Logo, $y, xg \in Vhg$ e, dessa forma, $y \in \mathrm{B}(xg,\mathcal{U}_V)$.

Isso significa que as translações à direita D_g, com $g \in G$, são aplicações uniformemente contínuas. Portanto, considerando em G a ação dada pela multiplicação, as translações à direita D_g, com $g \in G$, são G-conjugações topológicas uniformes. $\diamond$

Exemplo 2.5. (Fluxos invariantes à direita em espaços homogêneos) Seja G um grupo topológico de Hausdorff. Um **fluxo invariante à direita** em G é um fluxo contínuo ϕ definido em G que comuta com as translações à direita de G, isto é,

$$\phi_t(hg) = \phi_t(h)g, \text{ para quaisquer } t \in \mathbb{R} \text{ e } g, h \in G.$$

Fluxos invariantes à direita aparecem naturalmente na teoria de Lie (se G é um grupo de Lie e X é um campo de vetores invariante à direita em G, então o fluxo X_t, com $t \in \mathbb{R}$, associado a X satisfaz $X_t(hg) = X_t(h)g$, para quaisquer $t \in \mathbb{R}$ e $g, h \in G$).

Seja ϕ um fluxo invariante à direita em G. Seja também H um subgrupo fechado de G e considere o espaço homogêneo G/H com projeção canônica $\pi : G \longrightarrow G/H$. Então,

$$\begin{aligned} \phi_H \ : \ \mathbb{R} \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (t, \pi(g)) &\longmapsto \phi_H(t, \pi(g)) = \pi(\phi(t, g)) \end{aligned}$$

é um fluxo contínuo em G/H. Por construção, segue que π é uma aplicação $\mathbb{R}$-equivariante. Como π é contínua e aberta, segue que π é uma $\mathbb{R}$-semiconjugação topológica aberta. Agora, dado $g \in G$, a aplicação

$$\begin{aligned} g \ : \ G/H &\longrightarrow G/H \\ \pi(h) &\longmapsto g(\pi(h)) = \pi(hg) \end{aligned} \tag{2.1}$$

é a aplicação induzida em G/H pela translação à direita D_g em G e pela projeção canônica π. Dessa forma, g é um homeomorfismo de G/H e $g \circ \pi = \pi \circ D_g$. O fluxo ϕ_H comuta com os homeomorfismos g, ou seja, $(\phi_H)_t(xg) = (\phi_H)_t(x)g$, para quaisquer $t \in \mathbb{R}$, $x \in G/H$ e $g \in G$. Portanto, os homeomorfismos g são $\mathbb{R}$-conjugações topológicas. $\diamond$

Exemplo 2.6. (Ações de subsemigrupos em espaços homogêneos) Seja G um grupo topológico de Hausdorff e seja H um subgrupo fechado de G. Considere o espaço homogêneo G/H com projeção canônica $\pi : G \longrightarrow G/H$. Seja $\mathcal{S} \subset G$ um subsemigrupo de G e considere a ação natural de $\mathcal{S}$ em G/H:

$$s\pi(g) = \pi(sg), \text{ para quaisquer } s \in \mathcal{S} \text{ e } \pi(g) \in G/H. \tag{2.2}$$

Note que (2.2) significa que π é uma aplicação $\mathcal{S}$-equivariante. Logo, π é uma $\mathcal{S}$-semiconjugação topológica aberta. Agora, para cada $g \in G$, considere a aplicação $g : G/H \longrightarrow G/H$ definida em (2.1). Não é difícil verificar que

$$g(s\pi(h)) = sg(\pi(h)), \text{ para quaisquer } s \in \mathcal{S} \text{ e } g, h \in G.$$

Portanto, cada aplicação g é uma $\mathcal{S}$-conjugação topológica. $\diamond$

Exemplo 2.7. (Fibração equivariante) Sejam G um grupo topológico de Hausdorff e $H_1, H_2 \subset G$ dois subgrupos fechados de G tais que H_1 é um subgrupo normal de H_2. Sejam π_1 e π_2 as respectivas projeções canônicas e considere a **fibração equivariante**

$$\begin{aligned} \rho \ : \ G/H_1 &\longrightarrow G/H_2 \\ \pi_1(g) &\longmapsto \rho(\pi_1(g)) = \pi_2(g). \end{aligned}$$

1. Seja ϕ um fluxo invariante à direita em G e considere os fluxos ϕ_{H_1} e ϕ_{H_2} induzidos em G/H_1 e G/H_2, respectivamente, como no Exemplo 2.5. Como $\rho \circ \pi_1 = \pi_2$, segue que

   $$\rho((\phi_{H_1})_t(\pi_1(g)) = (\phi_{H_2})_t(\rho(\pi_1(g))), \text{ para quaisquer } t \in \mathbb{R} \text{ e } g \in G,$$

   de modo que ρ é uma $\mathbb{R}$-semiconjugação topológica aberta.

2. Seja $\mathcal{S}$ um subsemigrupo de G e considere as ações naturais de $\mathcal{S}$ em G/H_1 e G/H_2 definidas como em (2.2). Como $\rho \circ \pi_1 = \pi_2$, temos que

   $$\rho(s\pi_1(g)) = s\rho(\pi_1(g)), \text{ para quaisquer } s \in \mathcal{S} \text{ e } g \in G.$$

Portanto, ρ é uma $\mathcal{S}$-semiconjugação topológica aberta. $\diamond$

Exemplo 2.8. (Semigrupos de bitransformações) Seja $(\mathcal{S}, M, \mathcal{T})$ um semigrupo de bitransformações. Para cada $t \in \mathcal{T}$, a aplicação $t : M \longrightarrow M$ definida por $t(x) = xt$ é uma aplicação $\mathcal{S}$-equivariante contínua. Logo, se $\mathcal{T}$ é um grupo, temos que cada aplicação t é uma $\mathcal{S}$-conjugação topológica. $\diamond$

Exemplo 2.9. (Gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0) Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e seja $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares e limitados de X. Seja $S : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ um semigrupo de operadores limitados como no Exemplo 1.5. Dizemos que o semigrupo S é **de classe** C_0 se

$$\lim_{t\to 0^+} \|(S(t) - I)x\| = 0, \text{ para todo } x \in X.$$

Suponha que S é um semigrupo de classe C_0. O operador linear $A : D(A) \longrightarrow X$ definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{h\to 0} \left(\frac{S(h) - I}{h} \right) x \text{ existe} \right\}$$

e

$$Ax = \lim_{h\to 0} \left(\frac{S(h) - I}{h} \right) x, \text{ para todo } x \in D(A),$$

é chamado **gerador infinitesimal** do semigrupo S (veja [22, Definição 1.27]). Em [22, Proposição 1.29], prova-se que $S(t)x \in D(A)$ se $x \in D(A)$ e $t \in \mathbb{R}^+$ e que

$$AS(t)x = S(t)Ax, \text{ para quaisquer } x \in D(A) \text{ e } t \in \mathbb{R}^+.$$

Agora, considere o semifluxo induzido em $D(A)$ pelo semigrupo S, isto é, $tx = S(t)x$, para quaisquer $x \in D(A)$ e $t \in \mathbb{R}^+$. Temos que

$$Atx = tAx, \text{ para quaisquer } x \in D(A) \text{ e } t \in \mathbb{R}^+.$$

Portanto, o operador linear A é $\mathbb{R}^+$-equivariante. $\diamond$

Exemplo 2.10. (Aplicações f-equivariantes) Seja $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ um homomorfismo sobrejetor de semigrupos[1] e seja $p : M \longrightarrow N$ uma aplicação. Dizemos que p é f-**equivariante** se

$$p(sx) = f(s)p(x), \text{ para quaisquer } s \in \mathcal{S} \text{ e } x \in M.$$

[1] Como a imagem direta de um semigrupo por um homomorfismo de semigrupos é um semigrupo, não há perda de generalidade em considerar-se um homomorfismo sobrejetor de semigrupos.

Dizemos que p é uma

1. f-**semiconjugação topológica** se p é contínua e sobrejetora.

2. f-**conjugação topológica** se p é um homeomorfismo e f é um isomorfismo de semigrupos.

3. f-**semiconjugação topológica uniforme** se p é uniformemente contínua e sobrejetora.

4. f-**conjugação topológica uniforme** se p é um homeomorfismo uniforme e f é um isomorfismo de semigrupos.

Suponha que p é f-equivariante. Não é difícil provar que

$$p(\mathcal{S}x) = \mathcal{T}p(x), \text{ para todo } x \in M.$$

Ou seja, temos que p preserva as órbitas da ação de $\mathcal{S}$ com relação à ação de $\mathcal{T}$. Agora, seja

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ \mathcal{P}(\mathcal{S}) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{T}) \\ A \ &\longmapsto \ \varphi(A) = f(A). \end{aligned}$$

Temos que

$$p(Ax) = f(A)p(x) = \varphi(A)p(x), \text{ para quaisquer } A \in \mathcal{F} \text{ e } x \in M.$$

Logo, p preserva $\mathcal{F}$ com relação à φ e $\mathcal{F}_{\varphi p} = f(\mathcal{F})$. Além disso, se f é bijetora, então φ é bijetora. Portanto, se p é uma f-conjugação topológica, então p é uma $\mathcal{F}$-conjugação com relação à φ. $\diamond$

Exemplo 2.11. Aplicações $\mathcal{S}$-equivariantes podem ser vistas como aplicações f-equivariantes. De fato, seja $p : M \longrightarrow N$ uma aplicação $\mathcal{S}$-equivarinate. Não é difícil ver que p é uma aplicação $\mathrm{id}_{\mathcal{S}}$-equivariante. $\diamond$

Exemplo 2.12. Sejam G um grupo de Lie de dimensão finita com elemento neutro 1 e H um subgrupo fechado e normal de G e considere sistemas de controle Σ e $\widetilde{\Sigma}$ em G e G/H

como no Exemplo 1.17.

Considere a seguinte função sobrejetora:

$$\begin{aligned} f \ &: \ \mathcal{S}_{\Sigma} \longrightarrow \mathcal{S}_{\widetilde{\Sigma}} \\ \varphi_{t_n}^{u_n} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}^{u_1} \ &\longmapsto \ f(\varphi_{t_n}^{u_n} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}^{u_1}) = \widetilde{\varphi}_{t_n}^{u_n} \circ \cdots \circ \widetilde{\varphi}_{t_1}^{u_1}. \end{aligned}$$

Mostremos que f é um homomorfismo de semigrupos. Para quaisquer $u_1, u_2 \in U$ e $t_1, t_2 \geqslant 0$, temos que

$$f(\varphi_{t_2}^{u_2} \circ \varphi_{t_1}^{u_1}) = \widetilde{\varphi}_{t_2}^{u_2} \circ \widetilde{\varphi}_{t_1}^{u_1} = f(\varphi_{t_2}^{u_2}) \circ f(\varphi_{t_1}^{u_1}).$$

Agora, sejam $\varphi_{t_n}^{u_n} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}^{u_1}, \varphi_{s_m}^{v_m} \circ \cdots \circ \varphi_{s_1}^{v_1} \in \mathcal{S}_{\Sigma}$. Como o conjunto das funções de controle de Σ é $\mathcal{U}_{cp}$, segue da Proposição 1.15 que existem $u, v \in U$ tais que

$$\varphi_{t_n}^{u_n} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}^{u_1} = \varphi_{t_n + \cdots + t_1}^{u} \text{ e } \varphi_{s_m}^{v_m} \circ \cdots \circ \varphi_{s_1}^{v_1} = \varphi_{s_n + \cdots + s_1}^{v}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} f((\varphi_{t_n}^{u_n} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}^{u_1}) \circ (\varphi_{s_m}^{v_m} \circ \cdots \circ \varphi_{s_1}^{v_1})) &= f(\varphi_{t_n + \cdots + t_1}^{u} \circ \varphi_{s_n + \cdots + s_1}^{v}) \\ &= f(\varphi_{t_n + \cdots + t_1}^{u}) \circ f(\varphi_{s_n + \cdots + s_1}^{v}) \\ &= f(\varphi_{t_n}^{u_n} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}^{u_1}) \circ f(\varphi_{s_m}^{v_m} \circ \cdots \circ \varphi_{s_1}^{v_1}), \end{aligned}$$

mostrando que f é um homomorfismo sobrejetor de semigrupos.

Agora, mostremos que $\pi : G \longrightarrow G/\,H$ é f-equivariante. De (1.6), seque que, para quaisquer $u \in U$, $t \in \mathbb{R}$ e $gH \in G/\,H$,

$$\widetilde{\varphi}_t^u(gH) = \varphi(t, 1, u)gH = \varphi(t, g, u)H.$$

Logo, para quaisquer $u \in U$, $t \in \mathbb{R}$ e $g \in G$,

$$\pi(\varphi_t^u(g)) = \varphi(t, g, u)H = \widetilde{\varphi}_t^u(gH) = \widetilde{\varphi}_t^u(\pi(g))$$

Portanto, para quaisquer $g \in G$ e $\varphi_{t_n}^{u_n} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}^{u_1} \in \mathcal{S}_{\Sigma}$,

$$\pi(\varphi_{t_n}^{u_n} \circ \cdots \circ \varphi_{t_1}^{u_1}(g)) = \widetilde{\varphi}_{t_n}^{u_n} \circ \cdots \circ \widetilde{\varphi}_{t_1}^{u_1}(\pi(g)),$$

o que significa que π é f-equivariante. $\diamond$

Exemplo 2.13. (Fibrados principais e associados) Aplicações que preservam órbitas aparecem de maneira abundante no contexto de fibrados principais e associados. Para ver exemplos de aplicações contínuas e uniformemente contínuas que preservam órbitas nesse contexto, veja o Capítulo 3. $\diamond$

No que segue, apresentamos alguns resultados básicos que são utilizados ao longo das demais seções deste capítulo.

Proposição 2.14. *Sejam $p : M \longrightarrow N$ e $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{T})$ aplicações. Suponha que p preserva $\mathcal{F}$ com relação à φ. Então,*

1. *$p(AX) = \varphi(A)p(X)$, para quaisquer $A \in \mathcal{F}$ e $X \subset M$.*

2. *$p(A^*X) \subset \varphi(A)^*p(X)$, para quaisquer $A \in \mathcal{F}$ e $X \subset M$.*

Demonstração: Sejam $A \in \mathcal{F}$ e $X \subset M$. Então,

$$p(AX) = p\left(\bigcup_{x\in X} Ax\right) = \bigcup_{x\in X} p(Ax) = \bigcup_{x\in X} \varphi(A)p(x) = \varphi(A)p(X).$$

Agora, provemos que $p(A^*x) \subset \varphi(A)^*p(x)$, para quaisquer $A \in \mathcal{F}$ e $x \in M$. Fixe $A \in \mathcal{F}$ e $x \in M$ e tome $y \in p(A^*x)$. Então, $y = p(z)$, com $z \in A^*x$. Seja $s \in A$ tal que $sz = x$. Logo,

$$p(x) = p(sz) \in p(Az) = \varphi(A)p(z) = \varphi(A)y,$$

de modo que $y \in \varphi(A)^*p(x)$ e $p(A^*x) \subset \varphi(A)^*p(x)$. Assim, para quaisquer $A \in \mathcal{F}$ e $X \subset M$, temos que

$$p(A^*X) = p\left(\bigcup_{x\in X} A^*x\right) = \bigcup_{x\in X} p(A^*x) \subset \bigcup_{x\in X} \varphi(A)^*p(x) = \varphi(A)^*p(X),$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Com relação a $\mathcal{F}$-conjugações, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.15. *Sejam $p : M \longrightarrow N$ e $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{T})$ aplicações. Suponha que p é uma $\mathcal{F}$-conjugação com relação à φ. Então, p^{-1} preserva a família $\mathcal{F}_{\varphi p}$ com relação a φ^{-1} e $(\mathcal{F}_{\varphi p})_{\varphi^{-1}p^{-1}} = \mathcal{F}$.*

Demonstração: Para quaisquer $B = \varphi(A) \in \mathcal{F}_{\varphi p}$, com $A \in \mathcal{F}$, e $y = p(x) \in N$, com $x \in M$,

$$p^{-1}(By) = p^{-1}(\varphi(A)p(x)) = p^{-1}(p(Ax)) = Ax = \varphi^{-1}(B)p^{-1}(y).$$

Esse fato conclui a prova. □

2.2 Aplicações contínuas que preservam órbitas

Nesta seção, apresentamos condições suficientes para que conjuntos limite, prolongamentos, conjuntos limite prolongacionais, domínios e regiões de atração, atratores e conjuntos estáveis sejam preservados por aplicações contínuas que preservam órbitas. Os resultados apresentados generalizam os resultados de [18, Seção 4.3].

Aqui, M e N denotam espaços de Tychonoff munidos de famílias admissíveis de coberturas abertas $\mathcal{O}_M$ e $\mathcal{O}_N$, respectivamente, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ denotam semigrupos tais que $\mathcal{S}$ age em M e $\mathcal{T}$ age em N, $\mathcal{F}$ denota uma família de subconjuntos de $\mathcal{S}$ e $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{T})$ denota uma aplicação entre os conjuntos das partes de $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$, respectivamente.

Começamos estudando o comportamento de conjuntos limite, prolongamentos e conjuntos limite prolongacionais.

Teorema 2.16. *Suponha que $p : M \longrightarrow N$ é uma aplicação contínua que preserva $\mathcal{F}$ com relação à φ. Então, para todo subconjunto $X \subset M$,*

1. $p(\omega(X, \mathcal{F})) \subset \omega(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p})$ *e* $p(\omega^*(X, \mathcal{F})) \subset \omega^*(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p})$.
2. $p(\mathrm{J}(X, \mathcal{F})) \subset \mathrm{J}(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p})$ *e* $p(\mathrm{J}^*(X, \mathcal{F})) \subset \mathrm{J}^*(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p})$.
3. $p(\mathrm{D}(X, A)) \subset \mathrm{D}(p(X), \varphi(A))$ *e* $p(\mathrm{D}^*(X, A)) \subset \mathrm{D}^*(p(X), \varphi(A))$, *para todo subconjunto não-vazio* $A \subset \mathcal{S}$.

Demonstração: Segue da Proposição 2.14 que

$$\begin{aligned} p(\omega(X, \mathcal{F})) &= p\left(\bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{AX}\right) \subset \bigcap_{A \in \mathcal{F}} p(\overline{AX}) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{p(AX)} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{\varphi(A)p(X)} \\ &= \omega(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p}). \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} p(\omega^*(X,\mathcal{F})) &= p\left(\bigcap_{A\in\mathcal{F}} \overline{A^*X}\right) \subset \bigcap_{A\in\mathcal{F}} p(\overline{A^*X}) = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} \overline{p(A^*X)} \subset \bigcap_{A\in\mathcal{F}} \overline{\varphi(A)^*p(X)} \\ &= \omega^*(p(X),\mathcal{F}_{\varphi p}). \end{aligned}$$

Isso prova o item 1. Agora, sejam $z \in \mathrm{J}(X,\mathcal{F})$, $\varphi(A) \in \mathcal{F}_{\varphi p}$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_N$. Tome $x \in X$ de modo que $z \in \mathrm{J}(x,\mathcal{F})$. Segue da continuidade de p que existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_M$ tal que $p(\mathrm{B}(x,\mathcal{V})) \subset \mathrm{B}(p(x),\mathcal{U})$. Logo,

$$p(z) \in p(\overline{A\mathrm{B}(x,\mathcal{V})}) \subset \overline{p(A\mathrm{B}(x,\mathcal{V}))} = \overline{\varphi(A)p(\mathrm{B}(x,\mathcal{V}))} \subset \overline{\varphi(A)\mathrm{B}(p(x),\mathcal{U})}.$$

Portanto, $p(z) \in \mathrm{J}(p(x),\mathcal{F}_{\varphi p}) \subset \mathrm{J}(p(X),\mathcal{F}_{\varphi p})$. Analogamente, prova-se a inclusão para o conjunto limite regressivo prolongacional. Por fim, o item 3 é consequência imediata do item 2, uma vez que $\mathrm{D}(X,A) = \mathrm{J}(X,\{A\})$ e $\mathrm{D}^*(X,A) = \mathrm{J}^*(X,\{A\})$. □

Na sequência, apresentamos condições suficientes para que se verifiquem as igualdades no Teorema 2.16.

Corolário 2.17. *Suponha que $p : M \longrightarrow N$ é uma $\mathcal{F}$-conjugação com relação à φ. Então, para todo subconjunto $X \subset M$,*

1. $p(\omega(X,\mathcal{F})) = \omega(p(X),\mathcal{F}_{\varphi p})$ *e* $p(\omega^*(X,\mathcal{F})) = \omega^*(p(X),\mathcal{F}_{\varphi p})$.

2. $p(\mathrm{J}(X,\mathcal{F})) = \mathrm{J}(p(X),\mathcal{F}_{\varphi p})$ *e* $p(\mathrm{J}^*(X,\mathcal{F})) = \mathrm{J}^*(p(X),\mathcal{F}_{\varphi p})$.

3. $p(\mathrm{D}(X,A)) = \mathrm{D}(p(X),\varphi(A))$ *e* $p(\mathrm{D}^*(X,A)) = \mathrm{D}^*(p(X),\varphi(A))$, *para todo* $A \subset \mathcal{S}$.

Demonstração: Como p é uma $\mathcal{F}$-conjugação com relação à φ, segue da Proposição 2.15 que p^{-1} preserva $\mathcal{F}_{\varphi p}$ com relação à φ^{-1} e que $(\mathcal{F}_{\varphi p})_{\varphi^{-1}p^{-1}} = \mathcal{F}$. Logo, segue do Teorema 2.16 que

$$p^{-1}(\omega(p(X),\mathcal{F}_{\varphi p})) \subset \omega(p^{-1}(p(X)),(\mathcal{F}_{\varphi p})_{\varphi^{-1}p^{-1}}) \subset \omega(X,\mathcal{F}).$$

Portanto, $\omega(p(X),\mathcal{F}_{\varphi p}) \subset p(\omega(X,\mathcal{F}))$. De maneira análoga prova-se as demais igualdades. □

Teorema 2.18. *Suponha que M é compacto e que $\mathcal{F}$ é uma base de filtro. Seja $p : M \longrightarrow N$ uma aplicação contínua que preserva $\mathcal{F}$ com relação à φ e seja X um subconjunto de M. Então,*

$$p(\omega(X, \mathcal{F})) = \omega(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p}).$$

Além disso, se p é aberta, então

$$p(\mathrm{J}(X, \mathcal{F})) = \mathrm{J}(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p}).$$

Demonstração: Inicialmente, note que

$$\omega(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p}) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{\varphi(A)p(X)} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} p(\overline{AX}). \tag{2.3}$$

Logo, dado $y \in \omega(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p})$, então, para cada $A \in \mathcal{F}$,

$$y = p(x_A), \text{ com } x_A \in \overline{AX}.$$

Como M é compacto e $\mathcal{F}$ é uma base de filtro de subconjuntos de $\mathcal{S}$, existe uma subrede $(x_{A_\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ de $(x_A)_{A \in \mathcal{F}}$ em M tal que $x_{A_\lambda} \longrightarrow x$ em M. Agora, fixe $A \in \mathcal{F}$. Tome $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $A_{\lambda_0} \subset A$. Assim, se $\lambda > \lambda_0$,

$$x_{A_\lambda} \in \overline{A_\lambda X} \subset \overline{A_{\lambda_0} X} \subset \overline{AX}.$$

Dessa forma, $x \in \overline{AX}$. Pela arbitrariedade de A, segue que $x \in \omega(X, \mathcal{F})$. Como $p(x_{A_\lambda}) = y$, para todo $\lambda \in \Lambda$, e p é contínua, segue que

$$y = p(x) \in p(\omega(X, \mathcal{F}))$$

e $\omega(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p}) \subset p(\omega(X, \mathcal{F}))$. Como a outra inclusão já foi demonstrada, segue a igualdade.

Agora, suponha que p é aberta. Mostremos que $p(\mathrm{J}(X, \mathcal{F})) = \mathrm{J}(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p})$. Note que só resta mostrar que $\mathrm{J}(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p}) \subset p(\mathrm{J}(X, \mathcal{F}))$. Para isso, seja $x \in X$. Afirmamos que

$$\mathrm{J}(p(x), \mathcal{F}_{\varphi p}) = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}_M} \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{\varphi(A)p(\mathrm{B}(x, \mathcal{U}))} = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}_M} \bigcap_{A \in \mathcal{F}} p(\overline{A\mathrm{B}(x, \mathcal{U})}). \tag{2.4}$$

Com efeito, a segunda igualdade em (2.4) ocorre devido as hipóteses sobre a aplicação p, da mesma forma como em (2.3). Agora, tome $y \in \mathrm{J}(p(x), \mathcal{F}_{\varphi p})$ e fixe $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_M$.

Como p é uma aplicação aberta, existe uma cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_N$ tal que $\mathrm{B}(p(x), \mathcal{V}) \subset p(\mathrm{B}(x, \mathcal{U}))$. Assim,

$$y \in \overline{\varphi(A)\mathrm{B}(p(x), \mathcal{V})} \subset \overline{\varphi(A)p(\mathrm{B}(x, \mathcal{U}))}.$$

Por outro lado, seja $y \in M$ tal que $y \in \overline{\varphi(A)p(\mathrm{B}(x, \mathcal{U}))}$, para quaisquer $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_M$. Fixe $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{W} \in \mathcal{O}_N$. Da continuidade de p, segue que existe uma cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_M$ tal que $p(\mathrm{B}(x, \mathcal{V})) \subset \mathrm{B}(p(x), \mathcal{W})$. Portanto,

$$y \in \overline{\varphi(A)p(\mathrm{B}(x, \mathcal{V}))} \subset \overline{\varphi(A)\mathrm{B}(p(x), \mathcal{W})},$$

de modo que $y \in \mathrm{J}(p(x), \mathcal{F}_{\varphi p})$. Agora, mostremos que $\mathrm{J}(p(x), \mathcal{F}_{\varphi p}) \subset p(\mathrm{J}(x, \mathcal{F}))$. Seja $y \in \mathrm{J}(p(x), \mathcal{F}_{\varphi p})$. Para cada $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_M$, temos de (2.4) que

$$y = p(z_{(A,\mathcal{U})})_{(A,\mathcal{U}) \in \mathcal{F} \times \mathcal{O}_M}, \text{ com } z_{(A,\mathcal{U})} \in \overline{A\mathrm{B}(x, \mathcal{U})}.$$

Como M é compacto, existe uma subrede $(z_{(A_\lambda,\mathcal{U}_\lambda)})_{\lambda \in \Lambda}$ de $(z_{(A,\mathcal{U})})_{(A,\mathcal{U}) \in \mathcal{F} \times \mathcal{O}_M}$ em M tal que $z_{(A_\lambda,\mathcal{U}_\lambda)} \longrightarrow z$ em M. Agora, fixe $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_M$ e tome $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $A_\lambda \subset A$ e $\mathcal{U}_\lambda \leqslant \mathcal{U}$, se $\lambda > \lambda_0$. Então, se $\lambda > \lambda_0$,

$$z_{(A_\lambda,\mathcal{U}_\lambda)} \in \overline{A_\lambda \mathrm{B}(x, \mathcal{U}_\lambda)} \subset \overline{A\mathrm{B}(x, \mathcal{U})},$$

de maneira que $z \in \overline{A\mathrm{B}(x, \mathcal{U})}$ e, assim, $z \in \mathrm{J}(x, \mathcal{F})$. Como $p(z_{(A_\lambda,\mathcal{U}_\lambda)}) = y$, para todo $\lambda \in \Lambda$, e p é contínua, segue que $p(z) = y$. Daí,

$$y = p(z) \in p(\mathrm{J}(x, \mathcal{F})),$$

de modo que $\mathrm{J}(p(x), \mathcal{F}_{\varphi p}) \subset p(\mathrm{J}(x, \mathcal{F}))$. Dessa forma, temos que

$$\mathrm{J}(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p}) = \bigcup_{x \in X} \mathrm{J}(p(x), \mathcal{F}_{\varphi p}) \subset \bigcup_{x \in X} p(\mathrm{J}(x, \mathcal{F})) = p(\mathrm{J}(X, \mathcal{F})),$$

como queríamos demonstrar. □

Como consequência, temos o seguinte resultado para prolongamentos.

Corolário 2.19. *Suponha que M é compacto. Seja $p : M \longrightarrow N$ uma aplicação contínua e aberta que preserva $\mathcal{F}$ com relação à φ, seja X um subconjunto de M e seja A um subconjunto não-vazio de $\mathcal{S}$. Então,*

$$p(\mathrm{D}(X, A)) = \mathrm{D}(p(X), \varphi(A)).$$

Demonstração: Basta ver que $\mathrm{D}(X, A) = \mathrm{J}(X, \{A\})$ e que a família $\{A\}$ é uma base de filtro e aplicar o Teorema 2.18. $\square$

Agora, apresentamos resultados sobre o comportamento de domínios e regiões de atração por aplicações que preservam órbitas.

Teorema 2.20. *Seja $p : M \longrightarrow N$ uma aplicação contínua que preserva $\mathcal{F}$ com relação à φ e seja X um subconjunto de M. Então,*

1. $p(\mathrm{Atr}_w(X, \mathcal{F})) \subset \mathrm{Atr}_w(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p})$ *e* $p(\mathrm{Atr}_{wu}(X, \mathcal{F})) \subset \mathrm{Atr}_{wu}(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p})$.
2. $p(\mathrm{Atr}(X, \mathcal{F})) \subset \mathrm{Atr}(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p})$ *se M é compacto.*
3. $p(\mathrm{Atr}_u(X, \mathcal{F})) \subset \mathrm{Atr}_u(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p})$ *se M é compacto e p é aberta.*

Demonstração: Seja $z \in \mathrm{Atr}_w(X, \mathcal{F})$. Então, $\omega(z, \mathcal{F}) \cap X \neq \varnothing$ e $p(\omega(z, \mathcal{F}) \cap X) \neq \varnothing$. Por outro lado, segue do Teorema 2.16 que

$$p(\omega(z, \mathcal{F}) \cap X) \subset p(\omega(z, \mathcal{F})) \cap p(X) \subset \omega(p(z), \mathcal{F}_{\varphi p}) \cap p(X).$$

Logo, $\omega(p(z), \mathcal{F}_{\varphi p}) \cap p(X) \neq \varnothing$ e $p(z) \in \mathrm{Atr}_w(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p})$. Portanto, $p(\mathrm{Atr}_w(X, \mathcal{F})) \subset \mathrm{Atr}_w(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p})$. O caso uniforme fraco é análogo.

Agora, suponha que M é compacto e tome $z \in \mathrm{Atr}(X, \mathcal{F})$. Então, $\omega(z, \mathcal{F}) \neq \varnothing$ e $\omega(z, \mathcal{F}) \subset X$. Daí, $p(\omega(z, \mathcal{F})) \neq \varnothing$ e $p(\omega(z, \mathcal{F})) \subset p(X)$. Logo, o Teorema 2.18 implica que $\omega(p(z), \mathcal{F}_{\varphi p}) \neq \varnothing$ e $\omega(p(z), \mathcal{F}_{\varphi p}) \subset p(X)$, de maneira que $p(z) \in \mathrm{Atr}(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p})$ e $p(\mathrm{Atr}(X, \mathcal{F})) \subset \mathrm{Atr}(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p})$. Assumindo que p é aberta, uma argumentação análoga permite demonstrar o caso uniforme. $\square$

Teorema 2.21. *Seja $p : M \longrightarrow N$ uma $\mathcal{F}$-conjugação com relação à φ e seja X um subconjunto de M. Então,*

$$p(\mathrm{Atr}_w(X, \mathcal{F})) = \mathrm{Atr}_w(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p}), \qquad p(\mathrm{Atr}_{wu}(X, \mathcal{F})) = \mathrm{Atr}_{wu}(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p})$$
$$p(\mathrm{Atr}(X, \mathcal{F})) = \mathrm{Atr}(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p}) \qquad e \qquad p(\mathrm{Atr}_u(X, \mathcal{F})) = \mathrm{Atr}_u(p(X), \mathcal{F}_{\varphi p}).$$

Demonstração: Como p é um homeomorfismo, temos que

$$\omega(z,\mathcal{F})\cap X\neq\varnothing \text{ se e somente se } p(\omega(z,\mathcal{F}))\cap p(X)\neq\varnothing, \text{ para todo } z\in M.$$

Além disso, segue do Corolário 2.17 que

$$p(\omega(z,\mathcal{F}))\cap p(X)\neq\varnothing \text{ se e somente se } \omega(p(z),\mathcal{F}_{\varphi p})\cap p(X), \text{ para todo } z\in M.$$

Logo,

$$\omega(z,\mathcal{F})\cap X\neq\varnothing \text{ se e somente se } \omega(p(z),\mathcal{F}_{\varphi p})\cap p(X), \text{ para todo } z\in M.$$

Isso implica que $p(\mathrm{Atr}_w(X,\mathcal{F}))=\mathrm{Atr}_w(p(X),\mathcal{F}_{\varphi p})$. Os demais casos podem ser verificados de maneira análoga. □

Com relação as regiões de atração, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.22. *Seja $p:M\longrightarrow N$ uma aplicação contínua que preserva $\mathcal{F}$ com relação à φ e seja K um subconjunto compacto de M. Então,*

$$p(\mathfrak{A}_w(K,\mathcal{F}))\subset\mathfrak{A}_w(p(K),\mathcal{F}_{\varphi p}),\qquad p(\mathfrak{A}(K,\mathcal{F}))\subset\mathfrak{A}(p(K),\mathcal{F}_{\varphi p})$$

$$e\quad p(\mathfrak{A}_{wu}(K,\mathcal{F}))\subset\mathfrak{A}_{wu}(p(K),\mathcal{F}_{\varphi p}).$$

Além disso, se p é aberta, então $p(\mathfrak{A}_u(K,\mathcal{F}))\subset\mathfrak{A}_u(p(K),\mathcal{F}_{\varphi p})$.

Demonstração: Fixe $z\in\mathfrak{A}_w(K,\mathcal{F})$, $\mathcal{U}\in\mathcal{O}_N$ e $\varphi(A)\in\mathcal{F}_{\varphi p}$. Temos que $p^{-1}(\mathrm{B}(p(K),\mathcal{U}))$ é uma vizinhança de K em M. Como K é compacto, existe uma cobertura aberta $\mathcal{V}\in\mathcal{O}_M$ tal que $\mathrm{B}(K,\mathcal{V})\subset p^{-1}(\mathrm{B}(p(K),\mathcal{U}))$, de maneira que $p(\mathrm{B}(K,\mathcal{V}))\subset\mathrm{B}(p(K),\mathcal{U})$. Por outro lado, como $z\in\mathfrak{A}_w(K,\mathcal{F})$, temos que $Az\cap\mathrm{B}(K,\mathcal{V})\neq\varnothing$. Daí,

$$\varnothing\neq p(Az\cap\mathrm{B}(K,\mathcal{V}))\subset p(Az)\cap p(\mathrm{B}(K,\mathcal{V}))\subset\varphi(A)p(z)\cap\mathrm{B}(p(K),\mathcal{U}).$$

Logo, $p(z)\in\mathfrak{A}_w(p(K),\mathcal{F}_{\varphi p})$ e $p(\mathfrak{A}_w(X,\mathcal{F}))\subset\mathfrak{A}_w(p(K),\mathcal{F}_{\varphi p})$. Agora, fixe $z\in\mathfrak{A}(K,\mathcal{F})$ e $\mathcal{U}\in\mathcal{O}_N$. Tome uma cobertura aberta $\mathcal{V}\in\mathcal{O}_M$ tal que $p(\mathrm{B}(K,\mathcal{V}))\subset\mathrm{B}(p(K),\mathcal{U})$. Uma vez que $z\in\mathfrak{A}(K,\mathcal{F})$, existe $A\in\mathcal{F}$ tal que $Az\subset\mathrm{B}(K,\mathcal{V})$. Logo,

$$\varphi(A)p(z)=p(Az)\subset p(\mathrm{B}(K,\mathcal{V}))\subset\mathrm{B}(p(K),\mathcal{U}),$$

de modo que $p(z) \in \mathfrak{A}(p(K), \mathcal{F}_{\varphi p})$ e $p(\mathfrak{A}(K, \mathcal{F})) \subset \mathfrak{A}(p(K), \mathcal{F}_{\varphi p})$. Para mostrar que $p(\mathfrak{A}_{wu}(K, \mathcal{F})) \subset \mathfrak{A}_{wu}(p(K), \mathcal{F}_{\varphi p})$, fixe $z \in \mathfrak{A}_{wu}(K, \mathcal{F})$, $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}_N$ e $\varphi(A) \in \mathcal{F}_{\varphi p}$. Segue da continuidade de p que existem coberturas abertas $\mathcal{U}', \mathcal{V}' \in \mathcal{O}_M$ tais que $p(\mathrm{B}(z, \mathcal{V}')) \subset \mathrm{B}(p(z), \mathcal{V})$ e $p(\mathrm{B}(K,\mathcal{U}')) \subset \mathrm{B}(p(K),\mathcal{U})$. Então,

$$\begin{aligned}\varnothing \neq p(A\mathrm{B}(z, \mathcal{V}') \cap \mathrm{B}(K,\mathcal{U}')) &\subset p(A\mathrm{B}(z, \mathcal{V}')) \cap p(\mathrm{B}(K,\mathcal{U}')) \\ &\subset \varphi(A)p(\mathrm{B}(z, \mathcal{V}')) \cap p(\mathrm{B}(K,\mathcal{U}')) \subset \varphi(A)\mathrm{B}(p(z), \mathcal{V}) \cap \mathrm{B}(p(K),\mathcal{U}),\end{aligned}$$

mostrando que $p(z) \in \mathfrak{A}_{wu}(p(K), \mathcal{F}_{\varphi p})$ e, portanto, $p(\mathfrak{A}_{wu}(K, \mathcal{F})) \subset \mathfrak{A}_{wu}(p(K), \mathcal{F}_{\varphi p})$. Por fim, suponha que p é aberta e fixe $z \in \mathfrak{A}_u(K, \mathcal{F})$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_N$. Sejam $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U}', \mathcal{V}' \in \mathcal{O}_M$ tais que $p(\mathrm{B}(K,\mathcal{U}')) \subset \mathrm{B}(p(K),\mathcal{U})$ e $A\mathrm{B}(z, \mathcal{V}') \subset \mathrm{B}(K,\mathcal{U}')$ e $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_N$ tal que $\mathrm{B}(p(z), \mathcal{V}) \subset p(\mathrm{B}(z, \mathcal{V}'))$. Então,

$$\varphi(A)\mathrm{B}(p(z), \mathcal{V}) \subset \varphi(A)p(\mathrm{B}(z, \mathcal{V}')) = p(A\mathrm{B}(z, \mathcal{V}')) \subset p(\mathrm{B}(K,\mathcal{U}')) \subset \mathrm{B}(p(K),\mathcal{U}).$$

Portanto, $p(\mathfrak{A}_u(K, \mathcal{F})) \subset \mathfrak{A}_u(p(K), \mathcal{F}_{\varphi p})$. □

O seguinte resultado é uma consequência do Teorema 2.22.

Corolário 2.23. *Seja $p : M \longrightarrow N$ uma $\mathcal{F}$-conjugação com relação à φ e K um subconjunto compacto de M. Então,*

$$\begin{aligned}p(\mathfrak{A}_w(K, \mathcal{F})) &= \mathfrak{A}_w(p(K), \mathcal{F}_{\varphi p}), & p(\mathfrak{A}(K, \mathcal{F})) &= \mathfrak{A}(p(K), \mathcal{F}_{\varphi p}), \\ p(\mathfrak{A}_{wu}(K, \mathcal{F})) &= \mathfrak{A}_{wu}(p(K), \mathcal{F}_{\varphi p}) \quad e & p(\mathfrak{A}_u(K, \mathcal{F})) &= \mathfrak{A}_u(p(K), \mathcal{F}_{\varphi p}).\end{aligned}$$

Demonstração: Segue da Proposição (2.15) e do Teorema 2.22 que

$$p^{-1}(\mathfrak{A}_w(p(K), \mathcal{F}_{\varphi p})) \subset \mathfrak{A}_w(p^{-1}(p(K)), (\mathcal{F}_{\varphi p})_{\varphi^{-1}p^{-1}}) = \mathfrak{A}_w(K, \mathcal{F}).$$

Logo, $\mathfrak{A}_w(p(K), \mathcal{F}_{\varphi p}) \subset p(\mathfrak{A}_w(K, \mathcal{F}))$. Como a outra inclusão já foi demonstrada, segue que $p(\mathfrak{A}_w(K, \mathcal{F})) = \mathfrak{A}_w(p(K), \mathcal{F}_{\varphi p})$. A demonstração das igualdades para as demais regiões de atração é análoga. □

O próximo teorema descreve o comportamento de atratores por aplicações que preservam órbitas.

Teorema 2.24. *Seja $p : M \longrightarrow N$ uma aplicação contínua e aberta que preserva $\mathcal{F}$ com relação à φ e seja K um subconjunto compacto de M. Então,*

1. *$p(K)$ é um $\mathcal{F}_{\varphi p}$-atrator fraco se K é um $\mathcal{F}$-atrator fraco.*
2. *$p(K)$ é um $\mathcal{F}_{\varphi p}$-atrator se K é um $\mathcal{F}$-atrator.*
3. *$p(K)$ é um $\mathcal{F}_{\varphi p}$-atrator uniforme fraco se K é um $\mathcal{F}$-atrator uniforme fraco.*
4. *$p(K)$ é um $\mathcal{F}_{\varphi p}$-atrator uniforme se K é um $\mathcal{F}$-atrator uniforme.*

Demonstração: Vamos demonstrar somente o item 1, pois os demais itens seguem de maneira análoga. Se K é um $\mathcal{F}$-atrator fraco, então existe uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_M$ tal que $\mathrm{B}(K,\mathcal{U}) \subset \mathfrak{A}_w(K,\mathcal{F})$. Como $p(K)$ é compacto, existe uma cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_N$ tal que $\mathrm{B}(p(K),\mathcal{V}) \subset p(\mathrm{B}(K,\mathcal{U}))$. Logo, segue do Teorema 2.22 que

$$\mathrm{B}(p(K),\mathcal{V}) \subset p(\mathrm{B}(K,\mathcal{U})) \subset p(\mathfrak{A}_w(K,\mathcal{F})) \subset \mathfrak{A}_w(p(K),\mathcal{F}_{\varphi p}),$$

e, portanto, $p(K)$ é um $\mathcal{F}_{\varphi p}$-atrator fraco. $\square$

Para uma $\mathcal{F}$-conjugação com relação à φ, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.25. *Seja $p : M \longrightarrow N$ uma $\mathcal{F}$-conjugação com relação à φ e K um subconjunto compacto de M. Então,*

1. *K é um $\mathcal{F}$-atrator fraco se e somente se $p(K)$ é um $\mathcal{F}_{\varphi p}$-atrator fraco.*
2. *K é um $\mathcal{F}$-atrator se e somente se $p(K)$ é um $\mathcal{F}_{\varphi p}$-atrator.*
3. *K é um $\mathcal{F}$-atrator uniforme fraco se e somente se $p(K)$ é um $\mathcal{F}_{\varphi p}$-atrator uniforme fraco.*
4. *K é um $\mathcal{F}$-atrator uniforme se e somente se $p(K)$ é um $\mathcal{F}_{\varphi p}$-atrator uniforme.*

Demonstração: Novamente, vamos demonstrar somente o item 1, visto que os demais itens podem ser demonstrados de maneira semelhante. Se $p(K)$ é um $\mathcal{F}_{\varphi p}$-atrator fraco, segue da Proposição 2.15 e do Teorema 2.24 que $p^{-1}(p(K)) = K$ é um $(\mathcal{F}_{\varphi p})_{\varphi^{-1}p^{-1}} = \mathcal{F}$-atrator fraco.

Portanto, K é um $\mathcal{F}$-atrator fraco se e somente se $p(K)$ é um $\mathcal{F}_{\varphi p}$-atrator fraco. $\square$

Por fim, apresentamos resultados envolvendo o comportamento de conjuntos estáveis por aplicações que preservam órbitas.

Teorema 2.26. *Seja $p : M \longrightarrow N$ uma aplicação contínua e aberta que preserva $\mathcal{F}$ com relação à φ e seja K um subconjunto compacto de M. Suponha que M é compacto, que $\varphi(\mathcal{S}) = \mathcal{T}$, que $x \in \overline{\mathcal{S}x}$, para todo $x \in K$, e que K é $\mathcal{S}$-equiestável. Então, $p(K)$ é $\mathcal{T}$-equiestável.*

Demonstração: Como K é $\mathcal{S}$-equiestável, segue da Proposição 1.89 que $\mathrm{D}(K, \mathcal{S}) = K$. Logo, do Corolário 2.19, temos que

$$\mathrm{D}(p(K), \mathcal{T}) = \mathrm{D}(p(K), \varphi(\mathcal{S})) = p(\mathrm{D}(K, \mathcal{S})) = p(K).$$

Utilizando novamente a Proposição 1.89, concluímos que $p(K)$ é $\mathcal{T}$-equiestável. $\square$

Teorema 2.27. *Seja $p : M \longrightarrow N$ uma conjugação orbital e seja K um subconjunto compacto de M. Então, K é $\mathcal{S}$-equiestável se e somente se $p(K)$ é $\mathcal{T}$-equiestável.*

Demonstração: Suponha que K é $\mathcal{S}$-equiestável e tome $y \notin p(K)$. Seja $x \in M$ tal que $p(x) = y$. Segue que $x \notin K$. Da $\mathcal{S}$-equiestabilidade de K, segue que existe uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_M$ tal que $x \notin \overline{\mathcal{S}\mathrm{B}(K,\mathcal{U})}$. Logo, $y \notin p(\overline{\mathcal{S}\mathrm{B}(K,\mathcal{U})})$. Assim,

$$y \notin p(\overline{\mathcal{S}\mathrm{B}(K,\mathcal{U})}) = \overline{p(\mathcal{S}\mathrm{B}(K,\mathcal{U}))} = \overline{\mathcal{T}p(\mathrm{B}(K,\mathcal{U}))} = \overline{\mathcal{T}\mathrm{B}(p(K), p(\mathcal{U}))},$$

onde $p(\mathcal{U}) = \{p(U) : U \in \mathcal{U}\}$ (veja a Proposição 1.23). Como $p(K)$ é compacto, existe uma cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_N$ tal que $\mathrm{B}(p(K), \mathcal{V}) \subset \mathrm{B}(p(K), p(\mathcal{U}))$. Logo, $\mathcal{T}\mathrm{B}(p(K), \mathcal{V}) \subset \mathcal{T}\mathrm{B}(p(K), p(\mathcal{U}))$, de modo que $y \notin \overline{\mathcal{T}\mathrm{B}(p(K), \mathcal{V})}$, ou seja, $p(K)$ é $\mathcal{T}$-equiestável.

Reciprocamente, suponha que $p(K)$ é $\mathcal{T}$-equiestável. Como p é uma conjugação orbital, segue que p^{-1} também o é. Sendo $p(K)$ compacto, um raciocínio semelhante ao anterior mostra que $p^{-1}(p(K)) = K$ é $\mathcal{S}$-equiestável. $\square$

Teorema 2.28. *Seja $p : M \longrightarrow N$ uma aplicação contínua e aberta que preserva órbitas e sejam X e K subconjuntos de M, com K compacto. Então,*

1. *$p(X)$ é $\mathcal{T}$-orbitalmente estável se K é $\mathcal{S}$-orbitalmente estável.*

2. *$p(K)$ é $\mathcal{T}$-estável se K é $\mathcal{S}$-estável.*

   Além disso, se p preserva $\mathcal{F}$ com relação à φ, então

3. *$p(K)$ é $\mathcal{F}_{\varphi p}$-assintoticamente estável se K e $\mathcal{F}$-assintoticamente estável.*

Demonstração: Seja U uma vizinhança de $p(X)$ em N. Então, $p^{-1}(U)$ é uma vizinhança de X em M. Como X é $\mathcal{S}$-orbitalmente estável, existe uma vizinhança V de X em M tal que $\mathcal{S}V \subset V \subset p^{-1}(U)$. Logo,

$$\mathcal{T}p(V) = p(\mathcal{S}V) \subset p(V) \subset p(p^{-1}(U)) \subset U.$$

Como p é aberta, segue que $p(V)$ é uma vizinhança de $p(X)$ em N e, portanto, $p(X)$ é $\mathcal{T}$-orbitalmente estável. Para provar o item 2, suponha que K é $\mathcal{S}$-estável e fixe uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_N$. Tome uma cobertura aberta $\mathcal{U}' \in \mathcal{O}_M$ tal que $p(\mathrm{B}(K,\mathcal{U}')) \subset \mathrm{B}(p(K),\mathcal{U})$. Como K é $\mathcal{S}$-estável, existe uma cobertura aberta $\mathcal{U}'' \in \mathcal{O}_M$ tal que $\mathcal{S}\mathrm{B}(K,\mathcal{U}'') \subset \mathrm{B}(K,\mathcal{U}')$, de forma que

$$\mathcal{T}p(\mathrm{B}(K,\mathcal{U}'')) = p(\mathcal{S}\mathrm{B}(K,\mathcal{U}'')) \subset p(\mathrm{B}(K,\mathcal{U}')) \subset \mathrm{B}(p(K),\mathcal{U}).$$

Agora, seja $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_N$ tal que $\mathrm{B}(p(K),\mathcal{V}) \subset p(\mathrm{B}(K,\mathcal{U}''))$. Então,

$$\mathcal{T}\mathrm{B}(p(K),\mathcal{V}) \subset \mathcal{T}p(\mathrm{B}(K,\mathcal{U}'')) \subset \mathrm{B}(p(K),\mathcal{U}),$$

o que mostra que $p(K)$ é $\mathcal{T}$-estável. Por fim, o item 3 é uma consequência imediata do item 2 e do item 2 do Teorema 2.24. □

No caso de uma conjugação orbital, o comportamento de conjuntos orbitalmente estáveis, estáveis e assintoticamente estáveis é descrito pelo resultado a seguir.

Corolário 2.29. *Seja $p : M \longrightarrow N$ uma conjugação orbital e sejam X e K subconjuntos de M, com K compacto. Então,*

1. *X é $\mathcal{S}$-orbitalmente estável se e somente se $p(X)$ é $\mathcal{T}$-orbitalmente estável.*

2. *K é $\mathcal{S}$-estável se e somente se $p(K)$ é $\mathcal{T}$-estável.*

   Além disso, se p é uma $\mathcal{F}$-conjugação com relação à φ, então

3. *K é $\mathcal{F}$-assintoticamente estável se e somente se $p(K)$ é $\mathcal{F}_{\varphi p}$-assintoticamente estável.*

Demonstração: Temos que p^{-1} é uma conjugação orbital. Logo, segue do Teorema 2.28 que $p^{-1}(p(X)) = X$ é $\mathcal{T}$-orbitalmente estável se X é $\mathcal{S}$-orbitalmente estável. Isso prova o item 1. Os demais itens podem ser demonstrados de forma análoga. □

2.3 Aplicações uniformemente contínuas que preservam órbitas

Na seção anterior, analisamos o comportamento de conjuntos limite, prolongamentos, conjuntos limite prolongacionais, domínios e regiões de atração, atratores e conjuntos estáveis por aplicações contínuas que preservam órbitas. É possível melhorar alguns desses resultados considerando aplicações uniformemente contínuas. A seguir, apresentamos resultados nessa direção. Os resultados apresentados generalizam os resultados de [18, Seção 4.2].

Assim como na seção anterior, M e N denotam espaços de Tychonoff munidos de famílias admissíveis de coberturas abertas $\mathcal{O}_M$ e $\mathcal{O}_N$, respectivamente, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ denotam semigrupos tais que $\mathcal{S}$ age em M e $\mathcal{T}$ age em N, $\mathcal{F}$ denota uma família de subconjuntos de $\mathcal{S}$ e $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{T})$ denota uma aplicação entre os conjuntos das partes de $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$, respectivamente.

Nos Teoremas 2.22 e 2.28, apresentamos resultados sobre o comportamento das regiões de atração e de conjuntos estáveis por aplicações que preservam órbitas. Um elemento chave na argumentação foi que, se $p : M \longrightarrow N$ é uma aplicação contínua e K é um subconjunto compacto de M, então para cada cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_N$, existe uma cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_M$ tal que

$$p(\mathrm{B}(K, \mathcal{V})) \subset \mathrm{B}(p(K), \mathcal{U}). \tag{2.5}$$

De fato, para uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_N$, temos que $p^{-1}(\mathrm{B}(p(K),\mathcal{U}))$ é uma vizinhança de K em M. Daí, a compacidade de K e a continuidade de p implicam a existência de uma cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_M$ tal que $\mathrm{B}(K,\mathcal{V}) \subset p^{-1}(\mathrm{B}(p(K),\mathcal{U}))$, de modo que $p(\mathrm{B}(K,\mathcal{V})) \subset \mathrm{B}(p(K),\mathcal{U})$.

No caso de aplicações uniformemente contínuas, podemos obter uma expressão semelhante a (2.5) sem precisar assumir que K é um conjunto compacto. De fato, foi provado na Proposição 1.25 que para qualquer cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_N$, existe uma cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_M$ tal que $f(\mathrm{B}(X,\mathcal{V})) \subset \mathrm{B}(f(X),\mathcal{U})$, para todo $X \subset M$.

Logo, seguindo uma argumentação análoga à utilizada nos Teoremas 2.22 e 2.28 e considerando a Proposição 1.25, podemos obter os seguintes resultados.

Teorema 2.30. *Seja $p : M \longrightarrow N$ uma aplicação uniformemente contínua que preserva $\mathcal{F}$ com relação à φ e seja $X \subset M$. Então,*

$$p(\mathfrak{A}_w(X,\mathcal{F})) \subset \mathfrak{A}_w(p(X),\mathcal{F}_{\varphi p}), \qquad p(\mathfrak{A}(X,\mathcal{F})) \subset \mathfrak{A}(p(X),\mathcal{F}_{\varphi p})$$
$$e \quad p(\mathfrak{A}_{wu}(X,\mathcal{F})) \subset \mathfrak{A}_{wu}(p(X),\mathcal{F}_{\varphi p}).$$

Além disso, se p é aberta, então $p(\mathfrak{A}_u(X,\mathcal{F})) \subset \mathfrak{A}_u(p(X),\mathcal{F}_{\varphi p})$.

Teorema 2.31. *Seja $p : M \longrightarrow N$ uma aplicação uniformemente contínua e aberta que preserva órbitas e seja X um subconjunto $\mathcal{S}$-estável de M. Então, $p(X)$ é $\mathcal{T}$-estável.*

Teorema 2.32. *Seja $p : M \longrightarrow N$ uma aplicação uniformemente contínua e aberta que preserva órbitas e seja X um subconjunto $\mathcal{S}$-uniformemente estável de M tal que $p(X)$ é compacto em N. Então, $p(X)$ é $\mathcal{T}$-uniformemente estável.*

Teorema 2.33. *Seja $p : M \longrightarrow N$ uma conjugação orbital uniforme e seja X um subconjunto de M. Então, X é $\mathcal{S}$-uniformemente estável se e somente se $p(X)$ é $\mathcal{T}$-uniformemente estável.*

Como consequência, temos os seguintes resultados sobre regiões de atração e atratores.

Corolário 2.34. *Seja $p : M \longrightarrow N$ uma $\mathcal{F}$-conjugação uniforme com relação à φ e X um subconjunto de M. Então,*

$$p(\mathfrak{A}_w(X,\mathcal{F})) = \mathfrak{A}_w(p(X),\mathcal{F}_{\varphi p}), \qquad p(\mathfrak{A}(X,\mathcal{F})) = \mathfrak{A}(p(X),\mathcal{F}_{\varphi p}),$$
$$p(\mathfrak{A}_{wu}(X,\mathcal{F})) = \mathfrak{A}_{wu}(p(X),\mathcal{F}_{\varphi p}) \quad e \quad p(\mathfrak{A}_u(X,\mathcal{F})) = \mathfrak{A}_u(p(X),\mathcal{F}_{\varphi p}).$$

Demonstração: Tendo em vista o Teorema 2.30, a demonstração deste resultado é análoga à demonstração do Corolário 2.23. □

Teorema 2.35. *Seja $p : M \longrightarrow N$ uma aplicação uniformemente contínua que preserva $\mathcal{F}$ com relação à φ e seja X um subconjunto de M tal que $p(X)$ é compacto em N. Então,*

1. *$p(X)$ é um $\mathcal{F}_{\varphi p}$-atrator fraco se X é um $\mathcal{F}$-atrator fraco.*

2. *$p(X)$ é um $\mathcal{F}_{\varphi p}$-atrator se X é um $\mathcal{F}$-atrator.*

3. *$p(X)$ é um $\mathcal{F}_{\varphi p}$-atrator uniforme fraco se X é um $\mathcal{F}$-atrator uniforme fraco.*

4. *$p(X)$ é um $\mathcal{F}_{\varphi p}$-atrator uniforme se X é um $\mathcal{F}$-atrator uniforme.*

Demonstração: A demonstração deste resultado é análoga à demonstração do Teorema 2.24, uma vez que é válido o Teorema 2.30. □

Por fim, o Teorema 2.31 implica o seguinte resultado sobre conjuntos estáveis.

Corolário 2.36. *Seja $p : M \longrightarrow N$ uma conjugação orbital uniforme e seja X um subconjunto de M. Então, X é $\mathcal{S}$-estável se e somente se $p(X)$ é $\mathcal{T}$-estável.*

Capítulo 3

Estabilidade de Lyapunov em fibrados principais e associados

Neste capítulo, apresentamos resultados sobre estabilidade de Lyapunov para ações de semigrupos em fibrados principais e associados. Na primeira seção, fixamos a notação básica da teoria de ações de semigrupos em fibrados principais e associados, demonstramos alguns resultados básicos que são úteis ao estudo de estabilidade de Lyapunov e atração em fibrados principais e associados e introduzimos o conceito dos semigrupos $\mathcal{H}_q$, mostrando como esses semigrupos se relacionam com os semigrupos $\mathcal{S}_q$ que já são conhecidos na literatura. Na segunda seção, os resultados mais importantes são apresentados. Começamos com resultados sobre estabilidade de Lyapunov e atração em um fibrado principal. Depois, consideramos um fibrado associado e apresentamos resultados sobre estabilidade de Lyapunov e atração no espaço total, na fibra típica e nas fibras do fibrado associado em questão.

As notações e os conceitos básicos de fibrados principais e associados utilizadas neste capítulo podem ser encontrados no Apêndice A.

3.1 Ações de semigrupos em fibrados

Nesta seção, consideramos a ação de um semigrupo no espaço total de um fibrado principal e, a partir dela, construímos ações no espaço base e nos fibrados associados ao fibrado principal em questão.

Seja $\xi = (Q, \pi, B)$ um G-fibrado principal e seja $\xi[F] = (E, \pi_E, B)$ um fibrado associado a ξ com fibra típica F. Seja $\mathcal{S}$ um semigrupo que age em Q tal que

$$s(qg) = (sq)g, \text{ para quaisquer } s \in \mathcal{S}, q \in Q \text{ e } g \in G.^1 \tag{3.1}$$

A condição (3.1) permite definir uma ação de $\mathcal{S}$ em B a partir da ação de $\mathcal{S}$ em Q. De fato, dados $s \in \mathcal{S}$ e $b \in B$, defina

$$sb = \pi(sq), \text{ onde } b = \pi(q), \text{ com } q \in Q. \tag{3.2}$$

Se $\pi(q_1) = \pi(q_2)$, existe $g \in G$ tal que $q_2 = q_1 g$ e, assim,

$$sq_2 = s(q_1 g) = (sq_1)g,$$

de modo que $\pi(sq_1) = \pi(sq_1)$, ou seja, $s\pi(q_1) = s\pi(q_2)$, o que significa que a ação de $\mathcal{S}$ em B dada em (3.2) está bem definida.

Devido a (3.1), temos também que a ação de $\mathcal{S}$ em Q induz uma ação de $\mathcal{S}$ em E, da seguinte forma:

$$s[q, v] = [sq, v], \text{ onde } s \in \mathcal{S} \text{ e } [q, v] \in E. \tag{3.3}$$

Se $[q_1, v_1] = [q_2, v_2]$, então existe $g \in G$ tal que $q_2 = q_1 g$ e $v_2 = g^{-1}v_1$. Daí, dado $s \in \mathcal{S}$,

$$sq_2 = s(q_1 g) = (sq_1)g,$$

de forma que $(sq_1, v_1) \sim (sq_2, v_2)$ e, assim,

$$s[q_1, v_1] = [sq_1, v_1] = [sq_2, v_2] = s[q_2, v_2],$$

ou seja, a ação de $\mathcal{S}$ em E dada em (3.3) está bem definida.

Através da ação de $\mathcal{S}$ em Q, podemos ainda construir ações nas fibras $\pi_E^{-1}(b)$, com $b \in B$, e na fibra típica F. Sejam $q \in Q$ e $b \in B$ tais que $\pi(q) = b$. Em [11], considera-se o conjunto

$$\mathcal{S}_q = \mathcal{S}q \cap \pi^{-1}(b).$$

Através da identificação de G com $\pi^{-1}(b)$ via o homeomorfismo dado em (A.11), $\mathcal{S}_q$ pode ser visto como o seguinte subconjunto de G:

$$\mathcal{S}_q = \{g \in G : \text{existe } s = s(g) \in \mathcal{S} \text{ tal que } sq = qg\}.$$

Não é difícil verificar que $\mathcal{S}_q$ é um subsemigrupo de G sempre que $\mathcal{S}_q \neq \varnothing$[2]. Por

[1] Note que (3.1) significa que $(\mathcal{S}, Q, G)$ é um semigrupo de bitransformações.

[2] Para mais detalhes sobre o semigrupo $\mathcal{S}_q$, veja [11].

exemplo, o semigrupo $\mathcal{S}_q$ é não-vazio sempre que $\mathcal{S}$ é um monoide, isto é, sempre que $\mathcal{S}$ admite um elemento neutro[3]. Isso inclui fluxos, fluxos lineares (veja a Definição 4.1), semifluxos, fluxos n-dimensionais e sistemas de controle.

A partir de agora, assumimos que $\mathcal{S}_q \neq \varnothing$. Neste caso, $\mathcal{S}_q$ age à esquerda em F pela restrição da ação de G em F a $\mathcal{S}_q$.

Agora, introduzimos um semigrupo que, ao invés de agir na fibra típica F, age na fibra $\pi_E^{-1}(b)$. Tal semigrupo é dado por

$$\mathcal{H}_q = \{s \in \mathcal{S} : \text{existe } g = g(s) \in G \text{ tal que } sq = qg\}.$$

Note que $\mathcal{H}_q \neq \varnothing$ se e somente se $\mathcal{S}_q \neq \varnothing$. Como estamos assumindo que $\mathcal{S}_q \neq \varnothing$, segue que $\mathcal{H}_q \neq \varnothing$. Nesse caso, não é difícil mostrar que $\mathcal{H}_q$ é um semigrupo contido em $\mathcal{S}$ quando munido da mesma operação de $\mathcal{S}$.

Segue imediatamente da definição do semigrupo $\mathcal{H}_q$ que $s\pi(q) = \pi(q)$ se e somente se $s \in \mathcal{H}_q$. Logo, $\mathcal{H}_q$ é o semigrupo de isotropia de $\pi(q)$ com respeito à ação de $\mathcal{S}$ em B.

Os diferentes semigrupos $\mathcal{H}_q$ obtidos a partir das fibras de $\xi[F]$ se relacionam da seguinte forma:

Proposição 3.1. *Suponha que $\mathcal{S}$ é um subsemigrupo de um grupo. Então, para quaisquer $s \in \mathcal{S}$ e $q \in Q$, $\mathcal{H}_{sq} = s\mathcal{H}_q s^{-1}$.*

Demonstração: Seja $t \in \mathcal{H}_{sq}$. Então, existe $g \in G$ tal que $t(sq) = (sq)g$. Logo, $(ts)q = s(qg)$ e, assim, $(s^{-1}ts)q = qg$. Daí, $s^{-1}ts \in \mathcal{H}_q$, de modo que $t \in s\mathcal{H}_q s^{-1}$. Para a recíproca, basta ver que

$$s\mathcal{H}_q s^{-1} = s\mathcal{H}_{s^{-1}(sq)} s^{-1} \subset s(s^{-1}\mathcal{H}_{sq} s)s^{-1} = \mathcal{H}_{sq}.$$

□

Existe um homomorfismo natural entre os semigrupos $\mathcal{H}_q$ e $\mathcal{S}_q$, como vemos no resultado a seguir.

[3]Se existe um elemento neutro $1 \in \mathcal{S}$, então acrescenta-se à Definição 1.1 a seguinte propriedade: $1x = x$, para todo $x \in M$.

Proposição 3.2. *A aplicação*

$$\begin{aligned} f \ : \ \mathcal{H}_q &\longrightarrow \mathcal{S}_q \\ s &\longmapsto f(s) = g(s) \end{aligned}$$

é um homomorfismo sobrejetor de semigrupos.

Demonstração: Mostremos, inicialmente, que f está bem definida. Seja $s \in \mathcal{H}_q$ e suponha que existem $g_1, g_2 \in G$ tais que $sq = qg_1 = qg_2$. Então, $g_1 = g_2$, pois a ação de G em Q é livre. Isso mostra que f está bem definida. A sobrejetividade de f é imediata. Agora, para mostrar que f é um homomorfismo de semigrupos, fixe $s_1, s_2 \in \mathcal{H}_q$. Então, existem $g_1 = g(s_1), g_2 = g(s_2) \in \mathcal{S}_q$ tais que $s_1q = qg_1$ e $s_2q = qg_2$. Logo,

$$(s_1s_2)q = s_1(s_2q) = s_1(qg_2) = (s_1q)g_2 = (qg_1)g_2 = q(g_1g_2),$$

de modo que $g(s_1s_2) = g_1g_2$. Portanto,

$$f(s_1s_2) = g(s_1s_2) = g_1g_2 = f(s_1)f(s_2),$$

como queríamos demonstrar. □

Nem sempre o homomorfismo f da Proposição 3.2 é um isomorfismo. A seguir, apresentamos uma condição necessária e suficiente para que isso aconteça.

Proposição 3.3. *O homomorfismo f entre $\mathcal{H}_q$ e $\mathcal{S}_q$ da Proposição 3.2 é injetor (e, portanto, f é um isomorfismo de semigrupos) se e somente se a ação de $\mathcal{H}_q$ em Q é livre em q.*[4]

Demonstração: Suponha que f é injetor. Dados $s_1, s_2 \in \mathcal{H}_q$ tais que $s_1q = s_2q$, tome $g_1, g_2 \in \mathcal{S}_q$ tais que $s_1q = qg_1$ e $s_2q = qg_2$. Então,

$$qg_1 = s_1q = s_2q = qg_2.$$

Como a ação de G em Q é livre, segue que $g_1 = g_2$, ou seja, $f(s_1) = f(s_2)$. A injetividade de f garante que $s_1 = s_2$. Reciprocamente, suponha que a ação de $\mathcal{H}_q$ em Q é livre

[4] A ação de $\mathcal{H}_q$ em Q é livre em q se $s_1q = s_2q$ implica que $s_1 = s_2$.

em q e tome $s_1, s_2 \in \mathcal{H}_q$ tais que $f(s_1) = f(s_2)$. Então, existe $g \in G$ tal que $s_1 q = qg = s_2 q$. Segue da hipótese que $s_1 = s_2$. Portanto, f é injetor. $\square$

Ou seja, a Proposição 3.3 significa que a aplicação inversa de f,

$$\begin{aligned} f^{-1} \quad : \quad & \mathcal{S}_q \longrightarrow \mathcal{H}_q \\ g \quad \longmapsto \quad & f^{-1}(g) = s(g) \end{aligned} \tag{3.4}$$

está bem definida (e, consequentemente, é um homomorfismo de semigrupos) se e somente se a ação de $\mathcal{H}_q$ em Q é livre em q.

O semigrupo $\mathcal{H}_q$ age em Q, B e E através das restrições das ações de $\mathcal{S}$ em Q, B e E a $\mathcal{H}_q$, respectivamente. Além disso, através da restrição da ação de $\mathcal{S}$ em E a $\mathcal{H}_q$, segue que $\mathcal{H}_q$ também age em $\pi_E^{-1}(b)$, pois $\pi_E^{-1}(b)$ é $\mathcal{H}_q$-progressivamente invariante. Com efeito, sejam $s \in \mathcal{H}_q$ e $[q, v] \in \pi_E^{-1}(b)$. Tome $g \in G$ de modo que $sq = qg$. Como $sq = qg$ e $v = g^{-1}(gv)$, segue que

$$(sq, v) \sim (q, gv), \text{ ou seja, } [sq, v] = [q, gv] \tag{3.5}$$

e, assim, $s[q, v] = [sq, v] = [q, gv] \in \pi_E^{-1}(b)$, ou seja, $\pi_E^{-1}(b)$ é $\mathcal{H}_q$-progressivamente invariante.

Em alguns casos, $\pi_E^{-1}(b)$ é também $\mathcal{H}_q$-regressivamente invariante, como vemos no resultado a seguir.

Proposição 3.4. *Denote por μ a ação de $\mathcal{H}_q$ em E. Se μ_s é injetora, para todo $s \in \mathcal{H}_q$, então $\pi_E^{-1}(b)$ é $\mathcal{H}_q$-invariante.*

Demonstração: Resta mostrar que $\pi_E^{-1}(b)$ é $\mathcal{H}_q$-regressivamente invariante. Para isso, tome $[q', v] \in E$ tal que $[q', v] \in (\mathcal{H}_q)^* \pi_E^{-1}(b)$. Então, existe $s \in \mathcal{H}_q$ tal que $s[q', v] \in \pi_E^{-1}(b)$. Segue que $[sq', v] \in \pi_E^{-1}(b)$, ou seja, $\pi_E([sq', v]) = b$. Logo, $\pi(sq') = b = \pi(q)$ e, portanto, existe $g \in G$ tal que $sq' = qg$. Por outro lado, como $s \in \mathcal{H}_q$, existe $g' \in G$ tal que $sq = qg'$. Dessa forma,

$$sq' = qg = (qg')((g')^{-1}g) = (sq)((g')^{-1}g) = s(q(g')^{-1}g)$$

de modo que $q' = q(g')^{-1}g$, uma vez que μ_s é injetora. Portanto, $\pi(q') = \pi(q) = b$, $\pi_E([q', v]) = \pi_E([q, v]) = b$ e

$$[q', v] \in \pi_E^{-1}(b),$$

o que mostra que $\pi_E^{-1}(b)$ é $\mathcal{H}_q$-regressivamente invariante. $\square$

As ações de $\mathcal{S}_q$ em F e de $\mathcal{H}_q$ em $\pi_E^{-1}(b)$ são "duais", no sentido que

$$[\mathcal{H}_q q, Y] = [q, \mathcal{S}_q Y], \text{ para todo subconjunto } Y \subset F, \tag{3.6}$$

o que pode ser verificado, sem maior dificuldade, utilizando um argumento análogo ao de (3.5). É essa dualidade que permite identificar as ações de $\mathcal{S}_q$ em F e de $\mathcal{H}_q$ em $\pi_E^{-1}(b)$, como foi feito, por exemplo, em [11], onde se estuda a ação de $\mathcal{S}_q$ em $\pi_E^{-1}(b)$.

Agora, seja $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathcal{S})$ uma família de subconjuntos de $\mathcal{S}$. Para cada $A \in \mathcal{F}$, sejam

$$A_q = \{g \in G : \text{ existe } s \in A \text{ tal que } sq = qg\} \quad \text{e} \quad A'_q = A \cap \mathcal{H}_q$$

A família $\mathcal{F}$ determina, portanto, as famílias

$$\mathcal{F}_q = \{A_q : A \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{S}_q) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}'_q = \{A'_q : A \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{H}_q). \tag{3.7}$$

A família $\mathcal{F}_q$ é dual à família $\mathcal{F}'_q$, no sentido que $A_q \neq \varnothing$ se e somente se $A'_q \neq \varnothing$ e

$$[A'_q q, Y] = [q, A_q Y], \text{ para quaisquer } A \in \mathcal{F} \text{ e } Y \subset F. \tag{3.8}$$

Em todo este capítulo, são considerados somente os elementos $q \in Q$ e $b \in B$, com $\pi(q) = b$, tais que $A_q \neq \varnothing$, para todo $A \in \mathcal{F}$.

Lembremos, agora, que a identificação entre a fibra $\pi_E^{-1}(b)$ e a fibra típica F é estabelecida (na Proposição A.14) através do homeomorfismo

$$\begin{aligned} p \quad : \quad & F \longrightarrow \pi_E^{-1}(b) \\ & v \longmapsto p(v) = [q, v]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

O homeomorfismo inverso de p é dado por

$$\begin{aligned} p^{-1} \quad : \quad & \pi_E^{-1}(b) \longrightarrow F \\ & [q', v] \longmapsto p^{-1}([q', v]) = \tau(q, q')v, \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde τ é a função de translação de ξ.

Agora, seja

$$\begin{aligned} \varphi \quad : \quad & \mathcal{P}(\mathcal{S}_q) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H}_q) \\ & B \longmapsto \varphi(B) = \{s \in \mathcal{H}_q : \text{existe } g \in B \text{ tal que } sq = qg\}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Temos que $\varphi(A) = f^{-1}(A)$, para todo $A \subset \mathcal{P}(\mathcal{S}_q)$. Dessa forma, temos que φ é bijetora se f^{-1} é bijetora. Assim, segue da Proposição 3.3 que φ é bijetora se a ação de $\mathcal{H}_q$ em Q é livre em q.

Assim sendo, o seguinte resultado se verifica.

Proposição 3.5. *A aplicação p dada em (3.9) preserva as órbitas da ação de $\mathcal{S}_q$ com relação à ação de $\mathcal{H}_q$. Além disso, p é uma f^{-1}-conjugação topológica se e somente se a ação de $\mathcal{H}_q$ em Q é livre em q (e, portanto, p é uma $\mathcal{F}_q$-conjugação com relação à φ se e somente se a ação de $\mathcal{H}_q$ em Q é livre em q).*

Demonstração: De (3.6), temos que

$$p(\mathcal{S}_q v) = [q, \mathcal{S}_q v] = [\mathcal{H}_q q, v] = \mathcal{H}_q[q, v] = \mathcal{H}_q p(v).$$

para todo $v \in F$. Logo, p preserva as órbitas da ação de $\mathcal{S}_q$ com relação à ação de $\mathcal{H}_q$. Agora, suponha que a ação de $\mathcal{H}_q$ em Q é livre em q. De (3.5), temos que

$$p(gv) = [q, gv] = [s(g)q, v] = [f^{-1}(g)q, v] = f^{1}(g)[q, v] = f^{-1}(g)p(v),$$

para quaisquer $g \in \mathcal{S}_q$ e $v \in F$. Portanto, p é f^{-1}-conjugação topológica. □

O seguinte resultado discute condições necessárias e suficientes para que p^{-1} preserve órbitas.

Proposição 3.6. *Seja f o homomorfismo sobrejetor de semigrupos da Proposição 3.2. A aplicação p^{-1} é uma f-semiconjugação topológica. Além disso, p^{-1} é uma f-conjugação topológica se e somente se a ação de $\mathcal{H}_q$ em Q é livre em q.*

Demonstração: Seja τ a função de translação de ξ e fixe $s \in \mathcal{H}_q$ e $[q', v] \in \pi_E^{-1}(b)$. Então,

$$\begin{aligned} sq' &= s(q\tau(q, q')) = (sq)\tau(q, q') = (qg(s))\tau(q, q') \\ &= (q\tau(q, q')\tau(q', q)g(s))\tau(q, q') \\ &= q'\tau(q', q)g(s)\tau(q, q'). \end{aligned}$$

Isso implica que

$$[sq', v] = [q', \tau(q', q)g(s)\tau(q, q')v].$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
p^{-1}(s[q',v]) &= p^{-1}([sq',v]) = p^{-1}([q',\tau(q',q)g(s)\tau(q,q')v]) \\
&= \tau(q,q')\tau(q',q)g(s)\tau(q,q')v = g(s)\tau(q,q')v \\
&= f(s)p^{-1}([q',v]),
\end{aligned}
$$

mostrando que p^{-1} é f-equivariante. Uma vez que p^{-1} é um homeomorfismo, segue imediatamente que p^{-1} é uma f-semiconjugação topológica. Além disso, segue da Proposição 3.3 que p^{-1} é uma f-conjugação topológica se e somente se a ação de $\mathcal{H}_q$ em Q é livre em q. □

Suponha, agora, que E admite uma família admissível de coberturas abertas, digamos, $\mathcal{O}_E$. A partir de $\mathcal{O}_E$, podemos construir famílias admissíveis de coberturas abertas em $\pi_E^{-1}(b)$ e F. De fato, seja $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_E$. Defina $\mathcal{U}_b = \{U_b : U \in \mathcal{U}\}$, onde $U_b = U \cap \pi_E^{-1}(b)$. Segue da Proposição 1.26 que

$$
\mathcal{O}_b = \{\mathcal{U}_b : \mathcal{U} \in \mathcal{O}_E\} \tag{3.12}
$$

é uma família admissível de coberturas abertas de $\pi_E^{-1}(b)$. Por sua vez, a família $\mathcal{O}_b$ induz uma família admissível de coberturas abertas na fibra típica F. Com efeito, como vimos, a aplicação p dada em (3.9) é um homeomorfismo. Logo, segue da Proposição 1.23 que a família $p^{-1}(\mathcal{O}_b)$ é uma família admissível de coberturas abertas de F.

Ao longo deste capítulo, utilizamos as seguintes notações: dada $\mathcal{U}_b \in \mathcal{O}_b$ e $U_b \in \mathcal{U}_b$, então $U_q = p^{-1}(U_b)$, $\mathcal{U}_q = \{U_q : U_b \in \mathcal{U}_b\}$ e

$$
\mathcal{O}_q = \{\mathcal{U}_q : \mathcal{U} \in \mathcal{O}_E\} = p^{-1}(\mathcal{O}_b). \tag{3.13}
$$

É natural que as $\mathcal{U}_b$-vizinhanças em $\pi_E^{-1}(b)$ estejam relacionadas com as $\mathcal{U}_q$-vizinhanças em F, uma vez que a família $\mathcal{O}_q$ foi obtida da família $\mathcal{O}_b$ através do homeomorfismo p. Especificamente, segue de (1.7) que

$$
\mathrm{B}([q,Y],\mathcal{U}_b) = [q, \mathrm{B}(Y,\mathcal{U}_q)], \text{ para quaisquer } Y \subset F \text{ e } \mathcal{U} \in \mathcal{O}_E. \tag{3.14}
$$

Além disso, segue de (1.8) que

$$
\mathrm{B}([q,Y],\mathcal{U}_b) = \mathrm{B}([q,Y],\mathcal{U}) \cap \pi_E^{-1}(b), \text{ para quaisquer } Y \subset F \text{ e } \mathcal{U} \in \mathcal{O}_E. \tag{3.15}
$$

Uma outra relação entre as $\mathcal{U}$-vizinhanças em E e as $\mathcal{U}_b$-vizinhanças em $\pi_E^{-1}(b)$ é dada no lema a seguir.

Lema 3.7. *Sejam $Y \subset F$ e $K \subset E$, onde K é um subconjunto compacto de E, tais que $K \cap \pi_E^{-1}(b) = [q, Y]$. Então, para toda vizinhança aberta U de Y em F, existe uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_E$ tal que $\mathrm{B}(K,\mathcal{U}) \cap \pi_E^{-1}(b) \subset [q, U]$.*

Demonstração: Suponha por absurdo que existe uma vizinhança aberta U de Y em F tal que, para cada cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_E$, é possível escolher $[q, x_{\mathcal{U}}] \in \pi_E^{-1}(b)$ de modo que $[q, x_{\mathcal{U}}] \in \mathrm{B}(K,\mathcal{U}) \setminus [q, U]$. Seja N um conjunto aberto de E tal que $N \cap \pi_E^{-1}(b) = [q, U]$. Então, $[q, x_{\mathcal{U}}] \in \mathrm{B}(K,\mathcal{U}) \setminus N$, para toda cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_E$. Agora, para cada cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_E$, tome $k_{\mathcal{U}} \in K$ tal que $[q, x_{\mathcal{U}}] \in \mathrm{B}(k_{\mathcal{U}},\mathcal{U})$. Segue da Proposição 1.30 que existe uma subrede $(k_{\mathcal{U}_\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ de $(k_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}_E}$ tal que $k_{\mathcal{U}_\lambda} \longrightarrow k$, para algum $k \in K$. Logo, segue da Proposição 1.32 que $[q, x_{\mathcal{U}_\lambda}] \longrightarrow k$. Como a fibra $\pi_E^{-1}(b)$ é fechada, temos que $k \in K \cap \pi_E^{-1}(b) = [q, Y] \subset N$, de modo que existe $\lambda_2 \in \Lambda$ tal que $[q, x_{\mathcal{U}_\lambda}] \in N$ se $\lambda > \lambda_2$. Esse absurdo encerra a prova. $\square$

Todas as considerações anteriores sobre famílias admissíveis de coberturas abertas podem ser resumidas no resultado a seguir.

Teorema 3.8. *Seja ξ um G-fibrado principal e seja $\xi[F]$ um fibrado associado a ξ com fibra típica F. Suponha que o espaço total de $\xi[F]$ é um espaço admissível. Então, a fibra típica e as fibras de $\xi[F]$ são espaços admissíveis. Além disso, as $\mathcal{U}$-vizinhanças desses espaços são compatíveis, no sentido que elas satisfazem (3.14) e (3.15) e o Lema 3.7.*

O Teorema 3.8 se aplica ao fibrado associado considerado no Exemplo 3.13.

3.2 Estabilidade de Lyapunov e atração

Nesta seção, estudamos estabilidade de Lyapunov e atração para ações de semigrupos em fibrados principais e associados. Inicialmente, apresentamos resultados sobre conjuntos estáveis e atratores definidos no espaço total de um fibrado principal. Depois, consideramos um fibrado associado a um fibrado principal e apresentamos resultados sobre conjuntos estáveis e atratores em seu espaço total e em suas fibras.

Seja $\xi = (Q, \pi, B)$ um G-fibrado principal e seja $\mathcal{S}$ um semigrupo agindo em Q que satisfaz (3.1). Ao longo desta seção, assumimos que Q e B são espaços de Tychonoff munidos de famílias admissíveis $\mathcal{O}_Q$ e $\mathcal{O}_B$, respectivamente. Assumimos ainda que $\mathcal{F}$ é uma família de subconjuntos de $\mathcal{S}$.

Para cada $g \in G$, temos o homeomorfismo

$$\begin{aligned} g \ : \ & Q \longrightarrow Q \\ & q \longmapsto g(q) = qg. \end{aligned}$$

Para um subconjunto X de Q, utilizamos a notação $g(X) = Xg$, para todo $g \in G$.

Note que, para quaisquer $g \in G$, $s \in \mathcal{S}$ e $q \in Q$, vale que

$$g(sq) = (sq)g = s(qg) = sg(q),$$

de modo que as aplicações g são $\mathcal{S}$-conjugações topológicas. Dessa forma, temos o resultado a seguir.

Teorema 3.9. *Sejam X e K subconjuntos de Q. Assuma que K é compacto. Então,*

1. $\omega(X, \mathcal{F})g = \omega(Xg, \mathcal{F})$ *e* $\omega^*(X, \mathcal{F})g = \omega^*(Xg, \mathcal{F})$, *para todo* $g \in G$.

2. $\mathrm{J}(X, \mathcal{F})g = \mathrm{J}(Xg, \mathcal{F})$ *e* $\mathrm{J}^*(X, \mathcal{F})g = \mathrm{J}^*(Xg, \mathcal{F})$, *para todo* $g \in G$.

3. $\mathrm{D}(X, A)g = \mathrm{D}(Xg, A)$ *e* $\mathrm{D}^*(X, A)g = \mathrm{D}^*(Xg, A)$, *para quaisquer* $g \in G$ *e* $A \subset \mathcal{S}$.

4. $\mathrm{Atr}_w(X, \mathcal{F})g = \mathrm{Atr}_w(Xg, \mathcal{F})$, $\mathrm{Atr}(X, \mathcal{F})g = \mathrm{Atr}(Xg, \mathcal{F})$, $\mathrm{Atr}_{wu}(X, \mathcal{F})g = \mathrm{Atr}_{wu}(Xg, \mathcal{F})$ *e* $\mathrm{Atr}_u(X, \mathcal{F})g = \mathrm{Atr}_u(Xg, \mathcal{F})$, *para todo* $g \in G$.

5. $\mathfrak{A}_w(X, \mathcal{F})g = \mathfrak{A}_w(Xg, \mathcal{F})$, $\mathfrak{A}(X, \mathcal{F})g = \mathfrak{A}(Xg, \mathcal{F})$, $\mathfrak{A}_{wu}(X, \mathcal{F})g = \mathfrak{A}_{wu}(Xg, \mathcal{F})$ *e* $\mathfrak{A}_u(X, \mathcal{F})g = \mathfrak{A}_u(Xg, \mathcal{F})$, *para todo* $g \in G$.

6. *O conjunto X é um $\mathcal{F}$-atrator fraco (respectivamente um $\mathcal{F}$-atrator, um $\mathcal{F}$-atrator uniforme fraco, um $\mathcal{F}$-atrator uniforme) se e somente se Xg é um $\mathcal{F}$-atrator fraco (respectivamente um $\mathcal{F}$-atrator, um $\mathcal{F}$-atrator uniforme fraco, um $\mathcal{F}$-atrator uniforme), para todo $g \in G$.*

7. *O conjunto* X *é* $\mathcal{S}$*-orbitalmente estável se e somente se* Xg *é* $\mathcal{S}$*-orbitalmente estável, para todo* $g \in G$*.*

8. *O conjunto* K *é* $\mathcal{S}$*-estável se e somente se* Kg *é* $\mathcal{S}$*-estável, para todo* $g \in G$*.*

9. *O conjunto* K *é* $\mathcal{S}$*-equiestável se e somente se* Kg *é* $\mathcal{S}$*-equiestável, para todo* $g \in G$*.*

10. *O conjunto* K *é* $\mathcal{F}$*- assintoticamente estável se e somente se* Kg *é* $\mathcal{F}$*-assintoticamente estável, para todo* $g \in G$*.*

Demonstração: Uma vez que as aplicações g são $\mathcal{S}$-conjugações topológicas, o resultado segue dos Corolários 2.17, 2.23, 2.25 e 2.29 e dos Teoremas 2.21 e 2.27. □

Agora, considere a ação induzida de $\mathcal{S}$ em B dada em (3.2):

$$s\pi(q) = \pi(sq), \text{ para quaisquer } s \in \mathcal{S} \text{ e } q \in Q. \tag{3.16}$$

Como a projeção π do G-fibrado principal ξ é uma aplicação contínua, sobrejetora e aberta, segue de (3.16) que π é uma $\mathcal{S}$-semiconjugação topológica aberta. Assim, se verificam os seguintes resultados.

Teorema 3.10. *Sejam* X *e* K *subconjuntos de* Q*. Assuma que* K *é compacto. Então,*

1. $\pi(\omega(X,\mathcal{F})) \subset \omega(\pi(X),\mathcal{F})$ *e* $\pi(\omega^*(X,\mathcal{F})) \subset \omega^*(\pi(X),\mathcal{F})$*.*

2. $\pi(\mathrm{J}(X,\mathcal{F})) \subset \mathrm{J}(\pi(X),\mathcal{F})$ *e* $\pi(\mathrm{J}^*(X,\mathcal{F})) \subset \mathrm{J}^*(\pi(X),\mathcal{F})$*.*

3. $\pi(\mathrm{D}(X,A)) \subset \mathrm{D}(\pi(X),A)$ *e* $\pi(\mathrm{D}^*(X,A)) \subset \mathrm{D}^*(\pi(X),A)$*, para todo* $A \subset \mathcal{S}$*.*

4. $\pi(\mathrm{Atr}_w(X,\mathcal{F})) \subset \mathrm{Atr}_w(\pi(X),\mathcal{F})$ *e* $\pi(\mathrm{Atr}_{wu}(X,\mathcal{F})) \subset \mathrm{Atr}_{wu}(\pi(X),\mathcal{F})$*.*

5. $\pi(\mathfrak{A}_w(K,\mathcal{F})) \subset \mathfrak{A}_w(\pi(K),\mathcal{F})$, $\pi(\mathfrak{A}(K,\mathcal{F})) \subset \mathfrak{A}(\pi(K),\mathcal{F})$, $\pi(\mathfrak{A}_{wu}(K,\mathcal{F})) \subset \mathfrak{A}_{wu}(\pi(K),\mathcal{F})$ *e* $\pi(\mathfrak{A}_u(K,\mathcal{F})) \subset \mathfrak{A}_u(\pi(K),\mathcal{F})$*.*

6. $\pi(K)$ *é um* $\mathcal{F}$*-atrator fraco (respectivamente um* $\mathcal{F}$*-atrator, um* $\mathcal{F}$*-atrator uniforme fraco, um* $\mathcal{F}$*-atrator uniforme) se* K *é um* $\mathcal{F}$*-atrator fraco (respectivamente um* $\mathcal{F}$*-atrator, um* $\mathcal{F}$*-atrator uniforme fraco, um* $\mathcal{F}$*-atrator uniforme).*

7. *$\pi(X)$ é $\mathcal{S}$-orbitalmente estável se X é $\mathcal{S}$-orbitalmente estável.*

8. *$\pi(K)$ é $\mathcal{S}$-estável se K é $\mathcal{S}$-estável.*

9. *$\pi(K)$ é $\mathcal{F}$-assintoticamente estável se K é $\mathcal{F}$-assintoticamente estável.*

Demonstração: Como vimos, a projeção π é uma $\mathcal{S}$-semiconjugação orbital aberta. Logo, o resultado segue do Corolário 2.16 e dos Teoremas 2.20, 2.22, 2.24 e 2.28. □

Para um fibrado principal cujo espaço total é compacto, temos o teorema a seguir.

Teorema 3.11. *Sejam X e K subconjuntos de Q. Suponha que Q e K são compactos e que $\mathcal{F}$ é uma base de filtro de subconjuntos de $\mathcal{S}$. Então,*

1. $\pi(\omega(X,\mathcal{F})) = \omega(\pi(X),\mathcal{F})$ *e* $\pi(\omega^*(X,\mathcal{F})) = \omega^*(\pi(X),\mathcal{F})$.

2. $\pi(\mathrm{J}(X,\mathcal{F})) = \mathrm{J}(\pi(X),\mathcal{F})$ *e* $\pi(\mathrm{J}^*(X,\mathcal{F})) = \mathrm{J}^*(\pi(X),\mathcal{F})$.

3. $\pi(\mathrm{D}(X,A)) = \mathrm{D}(\pi(X),A)$ *e* $\pi(\mathrm{D}^*(X,A)) = \mathrm{D}^*(\pi(X),A)$, *para todo* $A \subset \mathcal{S}$.

4. $\pi(\mathrm{Atr}(X,\mathcal{F})) \subset \mathrm{Atr}(\pi(X),\mathcal{F})$ *e* $\pi(\mathrm{Atr}_u(X,\mathcal{F})) \subset \mathrm{Atr}_u(\pi(X),\mathcal{F})$.

5. *$\pi(K)$ é $\mathcal{S}$-equiestável se K é $\mathcal{S}$-equiestável e $q \in \overline{\mathcal{S}q}$, para todo $q \in K$.*

Demonstração: Da mesma forma como no Teorema 3.10, uma vez que π é uma $\mathcal{S}$-semiconjugação topológica aberta, o resultado segue do Corolário 2.19 e dos Teoremas 2.18, 2.20 e 2.26. □

Agora, seja $\xi[F] = (E, \pi_E, B)$ um fibrado associado ao G-fibrado principal ξ com fibra típica F. Suponha que E é um espaço de Tychonoff com família admissível $\mathcal{O}_E$. Considere a ação induzida de $\mathcal{S}$ em E dada em (3.3). Note que, para quaisquer $s \in \mathcal{S}$ e $[q,v] \in E$,

$$\pi_E(s[q,v]) = \pi_E([sq,v]) = \pi(sq) = s\pi(q) = s\pi_E([q,v]),$$

ou seja, a projeção π_E do fibrado associado $\xi[F]$ é uma aplicação $\mathcal{S}$-equivariante e, portanto, é uma $\mathcal{S}$-semiconjugação topológica aberta. Logo, os Teoremas 3.10 e 3.11 também são válidos para π_E.

Teorema 3.12. *Os Teoremas 3.10 e 3.11 também são válidos se considerarmos a projeção $\pi_E : E \longrightarrow B$ do fibrado associado $\xi[F]$.*

Há fibrados associados cuja projeção é uma aplicação uniformemente contínua. Para esses fibrados, se aplicam os resultados da Seção 2.3. A seguir, apresentamos uma classe de fibrados associados cuja projeção é uniformemente contínua.

Exemplo 3.13. (Fibrados cuja projeção é uma semiconjugação topológica uniforme) Seja $\xi = (Q, \pi, B)$ um G-fibrado principal localmente trivial (veja a Seção A.4). Seja $\{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta do espaço base B tal que, para cada $i \in I$, existe um homeomorfismo $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times G$, $\psi_i = (\pi, u_i)$, onde $u_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow G$ é uma aplicação G-equivariante contínua (ou seja, $u_i(qg) = u_i(q)g$, para quaisquer $q \in \pi^{-1}(U_i)$ e $g \in G$). O conjunto $\Psi = \{U_i, \psi_i\}_{i \in I}$ é chamado **atlas** de ξ.

Agora, assuma que B é um espaço de Hausdorff paracompacto. Seja $\xi[F] = (E, \pi_E, B)$ um fibrado associado a ξ com fibra típica metrizável F. Para cada $i \in I$, a aplicação $u_i^E : \pi_E^{-1}(U_i) \longrightarrow F$ dada por $u_i^E([q, v]) = u_i(q)v$ é aberta e $\psi_i^E : \pi_E^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times F$ dada por $\psi_i^E = (\pi_E, u_i^E)$ é um homeomorfismo. Como $\xi[F]$ é localmente trivial e F é compacto, temos que E é localmente compacto. Seja $\mathcal{O}$ a família de todas as coberturas abertas de B. Como B é paracompacto Hausdorff, temos que $\mathcal{O}$ é admissível.

Agora, fixe $\varepsilon > 0$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. A **cobertura Ψ-adaptada** de E com respeito a ε e $\mathcal{U}$ é a cobertura aberta $\mathcal{U}_\varepsilon$ de E definida por

$$\mathcal{U}_\varepsilon = \left\{ (\psi^E)^{-1}((U \cap U_i) \times B(v, \varepsilon)) : U \in \mathcal{U}, v \in F, i \in I \right\}.$$

Seja $\mathcal{O}_\Psi(E)$ a família de todas as coberturas Ψ-adaptadas de E. A família $\mathcal{O}_\Psi(E)$ é uma família admissível de coberturas abertas de E (veja [34, Seção 3.2]). Considere agora um semigrupo $\mathcal{S}$ que age em Q satisfazendo (3.1). Considere a ação de $\mathcal{S}$ em E como em (3.3). Mostremos que $\pi_E : E \longrightarrow B$ é uma aplicação uniformemente contínua com respeito a $\mathcal{O}_\Psi(E)$ e $\mathcal{O}$. Dada uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, tome qualquer $\varepsilon > 0$ e considere a cobertura Ψ-adaptada $\mathcal{U}_\varepsilon$. Se $[q, v], [q', v'] \in (\psi^E)^{-1}((U \cap U_i) \times B(v'', \varepsilon))$, então $\psi_i^E([q, v]), \psi_i^E([q', v']) \in (U \cap U_i) \times B(u, \varepsilon)$. Mas isso implica que $\pi_E([q, v]), \pi_E([q', v']) \in U$. Ou seja, temos que para toda cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe uma cobertura aberta $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Psi(E)$ tal que se

$[q', v'] \in \mathrm{B}([q, v], \mathcal{U}_\varepsilon)$, então $\pi_E([q', v']) \in \mathrm{B}(\pi_E([q, v]), \mathcal{U})$, para quaisquer $[q, v], [q', v'] \in E$, o que significa que π_E é uniformemente contínua. Portanto, π_E é uma $\mathcal{S}$-semiconjugação topológica uniforme aberta. $\diamond$

Agora, sejam $q \in Q$ e $b \in B$ tais que $\pi(q) = b$ e considere as ações dos semigrupos $\mathcal{S}_q$ e $\mathcal{H}_q$ na fibra típica F e na fibra $\pi_E^{-1}(b)$, respectivamente. Considere também as famílias admissíveis $\mathcal{O}_b$ e $\mathcal{O}_q$ em $\pi_E^{-1}(b)$ e F dadas em (3.12) e (3.13), respectivamente.

No que segue, apresentamos resultados que relacionam conjuntos estáveis e atratores referentes as ações de $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_q$ e $\mathcal{H}_q$.

Começamos relacionando os conjuntos limite, prolongamentos e conjuntos limite prolongacionais das ações de $\mathcal{S}_q$ e $\mathcal{H}_q$ com respeito as famílias $\mathcal{F}_q$ e $\mathcal{F}'_q$ dadas em (3.7).

Teorema 3.14. *Seja Y um subconjunto de F. Então,*

$$[q, \omega(Y, \mathcal{F}_q)] = \omega([q, Y], \mathcal{F}'_q) \quad e \quad [q, \mathrm{J}(Y, \mathcal{F}_q)] = \mathrm{J}([q, Y], \mathcal{F}'_q)$$

Além disso, para todo $A_q \subset \mathcal{S}_q$, com $A \neq \varnothing$,

$$[q, \mathrm{D}(Y, A_q)] = \mathrm{D}([q, Y], \varphi(A_q)),$$

onde φ é a aplicação dada em (3.11).

Demonstração: Lembrando que a identificação de F com $\pi_E^{-1}(b)$, a aplicação p dada em (3.9), é um homeomorfismo, e que os elementos das famílias $\mathcal{F}_q$ e $\mathcal{F}'_q$ satisfazem (3.8), temos que

$$\begin{aligned}
[q, \omega(Y, \mathcal{F}_q)] &= \left[q, \bigcap_{A_q \in \mathcal{F}_q} \overline{A_q Y}\right] = \bigcap_{A_q \in \mathcal{F}_q} [q, \overline{A_q Y}] = \bigcap_{A_q \in \mathcal{F}_q} \overline{[q, A_q Y]} \\
&= \bigcap_{A'_q \in \mathcal{F}'_q} \overline{[A'_q q, Y]} = \bigcap_{A'_q \in \mathcal{F}'_q} \overline{A'_q [q, Y]} \\
&= \omega([q, Y], \mathcal{F}'_q).
\end{aligned}$$

Agora, fixe $v \in Y$. Então, segue de (3.14) que

$$\begin{aligned}
[q, \mathrm{J}(v, \mathcal{F}_q)] &= \left[q, \bigcap_{\mathcal{U}_q \in \mathcal{O}_q} \bigcap_{A_q \in \mathcal{F}_q} \overline{A_q \mathrm{B}(v, \mathcal{U}_q)} \right] = \bigcap_{\mathcal{U}_q \in \mathcal{O}_q} \bigcap_{A_q \in \mathcal{F}_q} [q, \overline{A_q \mathrm{B}(v, \mathcal{U}_q)}] \\
&= \bigcap_{\mathcal{U}_q \in \mathcal{O}_q} \bigcap_{A_q \in \mathcal{F}_q} \overline{[q, A_q \mathrm{B}(v, \mathcal{U}_q)]} = \bigcap_{\mathcal{U}_q \in \mathcal{O}_q} \bigcap_{A'_q \in \mathcal{F}'_q} \overline{[A'_q q, \mathrm{B}(v, \mathcal{U}_q)]} \\
&= \bigcap_{\mathcal{U}_q \in \mathcal{O}_q} \bigcap_{A'_q \in \mathcal{F}'_q} \overline{A'_q [q, \mathrm{B}(v, \mathcal{U}_q)]} = \bigcap_{\mathcal{U}_q \in \mathcal{O}_q} \bigcap_{A'_q \in \mathcal{F}'_q} \overline{A'_q \mathrm{B}([q, v], \mathcal{U}_b)} \\
&= \mathrm{J}([q, v], \mathcal{F}'_q).
\end{aligned}$$

Daí,

$$[q, \mathrm{J}(Y, \mathcal{F}_q)] = \left[q, \bigcup_{v \in Y} \mathrm{J}(v, \mathcal{F}_q) \right] = \bigcup_{v \in Y} [q, \mathrm{J}(v, \mathcal{F}_q)] = \bigcup_{v \in Y} \mathrm{J}([q, v], \mathcal{F}'_q) = \mathrm{J}([q, Y], \mathcal{F}'_q).$$

Por fim, dado $A_q \subset \mathcal{S}$, com $A_q \neq \varnothing$, temos que

$$[q, \mathrm{D}(Y, A_q)] = [q, \mathrm{J}(Y, \{A_q\})] = \mathrm{J}([q, Y], \{\varphi(A_q)\}) = \mathrm{D}([q, Y], \varphi(A_q)),$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Os próximos resultados demonstram que a dualidade entre os semigrupos $\mathcal{S}_q$ e $\mathcal{H}_q$ também ocorre no que diz respeito a atração e estabilidade de Lyapunov.

Teorema 3.15. *Seja Y um subconjunto de F. Então,*

1. $[q, \mathrm{Atr}_w(Y, \mathcal{F}_q)] = \mathrm{Atr}_w([q, Y], \mathcal{F}'_q)$, $[q, \mathrm{Atr}(Y, \mathcal{F}_q)] = \mathrm{Atr}([q, Y], \mathcal{F}'_q)$, $[q, \mathrm{Atr}_{wu}(Y, \mathcal{F}_q)] = \mathrm{Atr}_{wu}([q, Y], \mathcal{F}'_q)$ *e* $[q, \mathrm{Atr}_u(Y, \mathcal{F}_q)] = \mathrm{Atr}_u([q, Y], \mathcal{F}'_q)$.

2. $[q, \mathfrak{A}_w(Y, \mathcal{F}_q)] = \mathfrak{A}_w([q, Y], \mathcal{F}'_q)$, $[q, \mathfrak{A}(Y, \mathcal{F}_q)] = \mathfrak{A}([q, Y], \mathcal{F}'_q)$, $[q, \mathfrak{A}_{wu}(Y, \mathcal{F}_q)] = \mathfrak{A}_{wu}([q, Y], \mathcal{F}'_q)$ *e* $[q, \mathfrak{A}_u(Y, \mathcal{F}_q)] = \mathfrak{A}_u([q, Y], \mathcal{F}'_q)$.

3. *o conjunto Y é um $\mathcal{F}_q$-semiatrator fraco (respectivamente um $\mathcal{F}_q$-semiatrator, um $\mathcal{F}_q$-semiatrator uniforme fraco, um $\mathcal{F}_q$-semiatrator uniforme) se e somente se $[q, Y]$ é um $\mathcal{F}'_q$-semiatrator fraco (respectivamente um $\mathcal{F}'_q$-semiatrator, um $\mathcal{F}'_q$-semiatrator uniforme fraco, um $\mathcal{F}'_q$-semiatrator uniforme).*

4. o conjunto Y é um $\mathcal{F}_q$-atrator fraco (respectivamente um $\mathcal{F}_q$-atrator, um $\mathcal{F}_q$-atrator uniforme fraco, um $\mathcal{F}_q$-atrator uniforme) se e somente se $[q,Y]$ é um $\mathcal{F}'_q$-atrator fraco (respectivamente um $\mathcal{F}'_q$-atrator, um $\mathcal{F}'_q$-atrator uniforme fraco, um $\mathcal{F}'_q$-atrator uniforme).

Demonstração: Mostremos que $[q, \mathrm{Atr}_w(Y,\mathcal{F}_q)] = \mathrm{Atr}_w([q,Y],\mathcal{F}'_q)$. Dado $v \in \mathrm{Atr}_w(Y,\mathcal{F}_q)$, então $\omega(v,\mathcal{F}_q) \cap Y \neq \varnothing$. Como a aplicação p dada em (3.9) é um homeomorfismo, segue que $[q,\omega(v,\mathcal{F}_q)] \cap [q,Y] \neq \varnothing$. Do Teorema 3.14, temos que $\omega([q,v],\mathcal{F}'_q) \cap [q,Y] \neq \varnothing$, de modo que $[q,v] \in \mathrm{Atr}_w([q,Y],\mathcal{F}'_q)$ e, portanto, $[q,\mathrm{Atr}_w(Y,\mathcal{F}_q)] \subset \mathrm{Atr}_w([q,Y],\mathcal{F}'_q)$. A inclusão contrária é análoga. As igualdades dos demais domínios de atração podem ser provadas de modo análogo.

Agora, sejam $v \in \mathfrak{A}_w(Y,\mathcal{F}_q)$, $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_E$. Como p é um homeomorfismo, segue que $A_q v \cap \mathrm{B}(Y,\mathcal{U}_q) \neq \varnothing$ se e somente se $[q,A_q v] \cap [q,\mathrm{B}(Y,\mathcal{U}_q)] \neq \varnothing$. Devido a (3.8) e (3.14), essa expressão é equivalente a $A'_q[q,v] \cap \mathrm{B}([q,Y],\mathcal{U}_b) \neq \varnothing$. Logo, temos que $[q,v] \in [q,\mathfrak{A}_w(Y,\mathcal{F}_q)]$ se e somente se $[q,v] \in \mathfrak{A}_w([q,Y],\mathcal{F}'_q)$, e, portanto, $[q,\mathfrak{A}_w(Y,\mathcal{F}_q)] = \mathfrak{A}_w([q,Y],\mathcal{F}'_q)$. Agora, mostremos que $[q,\mathfrak{A}(Y,\mathcal{F}_q)] = \mathfrak{A}([q,Y],\mathcal{F}'_q)$. Sejam $v \in \mathfrak{A}(Y,\mathcal{F}_q)$ e $\mathcal{U}_b \in \mathcal{O}_b$. Existe $A_q \in \mathcal{F}_q$ tal que $A_q v \subset \mathrm{B}(Y,\mathcal{U}_q)$. De (3.8) e (3.14), segue que $A'_q[q,v] \subset \mathrm{B}([q,Y],\mathcal{U}_b)$, de modo que $[q,v] \in \mathfrak{A}([q,Y],\mathcal{F}'_q)$ e $[q,\mathfrak{A}(Y,\mathcal{F}_q)] \subset \mathfrak{A}([q,Y],\mathcal{F}'_q)$. A outra inclusão é análoga. A igualdade para o domínio de atração uniforme fraca é análoga à igualdade para o domínio de atração fraca e a igualdade para o domínio de atração uniforme é análoga à igualdade para o domínio de atração.

Mostremos, agora, o item 3. Se Y é um $\mathcal{F}_q$-semiatrator fraco, então $\mathfrak{A}_w(Y,\mathcal{F}_q)$ é uma vizinhança de Y em F. Segue do item 2 e do fato de p ser um homeomorfismo que $\mathfrak{A}_w([q,Y],\mathcal{F}'_q)$ é uma vizinhança de $[q,Y]$ em $\pi_E^{-1}(b)$. Portanto, $[q,Y]$ é um $\mathcal{F}'_q$-semiatrator fraco. A recíproca é provada analogamente. Tendo em vista o item 2, as demonstrações para os demais tipos de atratores é análoga.

Por fim, mostremos o item 4. Se Y é um $\mathcal{F}_q$-atrator fraco, existe uma cobertura aberta $\mathcal{U}_q \in \mathcal{O}_q$ tal que $\mathrm{B}(Y,\mathcal{U}_q) \subset \mathfrak{A}_w(Y,\mathcal{F}_q)$. Segue de (3.14) e do item 2 que $\mathrm{B}([q,Y],\mathcal{U}_b) \subset \mathfrak{A}_w([q,Y],\mathcal{F}'_q)$, o que significa que $[q,Y]$ é um $\mathcal{F}'_q$-atrator fraco. A recíproca é obtida a partir de uma argumentação análoga. Uma argumentação análoga também permite obter o resultado para os demais tipos de atratores. □

Teorema 3.16. *Seja Y um subconjunto de F. Então,*

1. *Y é $\mathcal{S}_q$-estável se e somente se $[q,Y]$ é $\mathcal{H}_q$-estável.*
2. *Y é $\mathcal{S}_q$-uniformemente estável se e somente se $[q,Y]$ é $\mathcal{H}_q$-uniformemente estável.*
3. *Y é $\mathcal{S}_q$-equiestável se e somente se $[q,Y]$ é $\mathcal{H}_q$-equiestável.*
4. *Y é $\mathcal{S}_q$-orbitalmente estável se e somente se $[q,Y]$ é $\mathcal{H}_q$-orbitalmente estável.*
5. *Y é $\mathcal{F}_q$-assintoticamente estável se e somente se $[q,Y]$ é $\mathcal{F}'_q$-assintoticamente estável.*

Demonstração: Suponha que Y é $\mathcal{S}_q$-estável e fixe $v \in F$ e $\mathcal{U}_b \in \mathcal{O}_b$. Como Y é $\mathcal{S}_q$-estável, existe uma cobertura aberta $\mathcal{V}_q \in \mathcal{O}_q$ satisfazendo $\mathcal{S}_q\mathrm{B}(v,\mathcal{V}_q) \subset \mathrm{B}(Y,\mathcal{U}_q)$. Logo, segue de (3.6) e (3.14) que $\mathcal{H}_q\mathrm{B}([q,v],\mathcal{V}_b) \subset \mathrm{B}([q,Y],\mathcal{U}_b)$. Portanto, $[q,Y]$ é $\mathcal{H}_q$-estável. Analogamente, prova-se a recíproca. O item 2 é análogo ao item 1.

Agora, suponha que Y é $\mathcal{S}_q$-equiestável. Se $v \notin F$, existe uma cobertura aberta $\mathcal{U}_q \in \mathcal{O}_q$ tal que $v \notin \overline{\mathcal{S}_q\mathrm{B}(Y,\mathcal{U}_q)}$. Tendo em vista (3.6) e (3.14), concluímos que $[q,v] \notin \overline{\mathcal{H}_q\mathrm{B}([q,Y],\mathcal{U}_b)}$, de modo que $[q,Y]$ é $\mathcal{H}_q$-equiestável. A recíproca segue de (3.6) e (3.14).

Suponha, agora, que Y é $\mathcal{S}_q$-orbitalmente estável e fixe uma vizinhança U de $[q,Y]$ em $\pi_E^{-1}(b)$. Tome uma vizinhança U_F de Y em F tal que $[q,U_F]=U$. Como Y é $\mathcal{S}_q$-orbitalmente estável, existe uma vizinhança V_F de Y em F tal que $\mathcal{S}_qV_F \subset V_F \subset U_F$. De (3.6), segue que $\mathcal{H}_q[q,V_F] \subset [q,V_F] \subset U$, mostrando que $[q,Y]$ é $\mathcal{H}_q$-orbitalmente estável. Analogamente, mostra-se que Y é $\mathcal{S}_q$-orbitalmente estável se $[q,Y]$ é $\mathcal{H}_q$-orbitalmente estável.

Por fim, o item 5 é uma consequência imediata do item 2 deste teorema e do item 4 do Teorema 3.15. $\square$

Observação 3.17. *Se a ação de $\mathcal{H}_q$ em Q é livre em q, então segue da Proposição 3.5 que a aplicação p dada em (3.9) é uma f^{-1}-conjugação topológica, onde f^{-1} é o homomorfismo de semigrupos dado em (3.4). Neste caso, os Teoremas 3.14, 3.15 e 3.16 podem ser obtidos imediatamente a partir dos resultados da Seção 2.2 do Capítulo 2.*

Agora, sejam $X \subset E$ e $Y \subset F$ tais que que $X \cap \pi_E^{-1}(b) = [q, Y]$. Note que

$$A'_q \subset A, \text{ para todo } A \in \mathcal{F}. \tag{3.17}$$

Além disso, temos de (3.15) que, para toda cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_E$,

$$\mathrm{B}([q,Y],\mathcal{U}_b) = \mathrm{B}([q,Y],\mathcal{U}) \cap \pi_E^{-1}(b) \subset \mathrm{B}(X,\mathcal{U}) \cap \pi_E^{-1}(b). \tag{3.18}$$

Esses fatos nos permitem demonstrar os seguintes resultados.

Teorema 3.18. *Sejam $X \subset E$ e $Y \subset F$ tais que que $X \cap \pi_E^{-1}(b) = [q, Y]$. Então,*

$$\omega([q,Y],\mathcal{F}'_q) \subset \omega(X,\mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b), \qquad \mathrm{J}([q,Y],\mathcal{F}'_q) \subset \mathrm{J}(X,\mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b)$$

$$\textit{e } \mathrm{D}([q,Y],\varphi(A_q)) \subset \mathrm{D}(X,A) \cap \pi_E^{-1}(b), \ \textit{para todo } A \subset \mathcal{S}.$$

Demonstração: De (3.17), temos que

$$\omega([q,Y],\mathcal{F}'_q) = \bigcap_{A'_q \in \mathcal{F}'_q} \overline{A'_q[q,Y]} \subset \left(\bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{AX} \right) \cap \pi_E^{-1}(b) = \omega(X,\mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b).$$

Agora, dado $v \in F$, temos, de (3.17) e (3.18), que

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}([q,v],\mathcal{F}'_q) &= \bigcap_{\mathcal{U}_b \in \mathcal{O}_b} \bigcap_{A'_q \in \mathcal{F}'_q} \overline{A'_q \mathrm{B}([q,v],\mathcal{U}_b)} \\
&\subset \left(\bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}} \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A\mathrm{B}([q,v],\mathcal{U})} \right) \cap \pi_E^{-1}(b) \\
&= \mathrm{J}([q,v],\mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b) \\
&\subset \mathrm{J}(X,\mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\mathrm{J}([q,Y],\mathcal{F}'_q) = \bigcup_{v \in Y} \mathrm{J}([q,v],\mathcal{F}'_q) \subset \mathrm{J}(X,\mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b). \tag{3.19}$$

Por fim, uma vez que, para todo $A \subset \mathcal{S}$ não-vazio,

$$\mathrm{D}([q,Y],\varphi(A_q)) = \mathrm{J}([q,Y],\{\varphi(A_q)\}) \quad \text{e} \quad \mathrm{D}(X,A) = \mathrm{J}(X,\{A\}),$$

o resultado para os prolongamentos segue imediatamente de (3.19). □

Com relação à domínios e regiões de atração e atratores, temos os teoremas a seguir.

Teorema 3.19. *Sejam $X \subset E$ e $Y \subset F$ tais que $X \cap \pi_E^{-1}(b) = [q, Y]$. Então,*

1. $\mathrm{Atr}_w([q,Y], \mathcal{F}'_q) \subset \mathrm{Atr}_w(X, \mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b)$ *e* $\mathrm{Atr}_{wu}([q,Y], \mathcal{F}'_q) \subset \mathrm{Atr}_{wu}(X, \mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b)$.

2. $\mathfrak{A}_w([q,Y], \mathcal{F}'_q) \subset \mathfrak{A}_w(X, \mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b)$ *e* $\mathfrak{A}_{wu}([q,Y], \mathcal{F}'_q) \subset \mathfrak{A}_{wu}(X, \mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b)$.

Demonstração: Para provar o item 1, seja $[q,v] \in \mathrm{Atr}_w([q,Y], \mathcal{F}'_q)$. Então, $\omega([q,v], \mathcal{F}'_q) \cap [q,Y] \neq \varnothing$. Isso implica que $\omega([q,v], \mathcal{F}'_q) \cap X \neq \varnothing$. Como $\omega([q,v], \mathcal{F}'_q) \subset \omega([q,v], \mathcal{F})$, concluímos que $\omega([q,v], \mathcal{F}) \cap X \neq \varnothing$. Portanto, $[q,v] \in \mathrm{Atr}_w(X, \mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b)$. Analogamente mostra-se que $\mathrm{Atr}_{wu}([q,Y], \mathcal{F}'_q) \subset \mathrm{Atr}_{wu}(X, \mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b)$.

Agora, tome $[q,v] \in \mathfrak{A}_w([q,Y], \mathcal{F}'_q)$. Então, $A'_q[q,v] \cap \mathrm{B}([q,Y], \mathcal{U}_b) \neq \varnothing$, para quaisquer $A'_q \in \mathcal{F}'_q$ e $\mathcal{U}_b \in \mathcal{O}_b$. Segue de (3.17) e (3.18) que $A[q,v] \cap \mathrm{B}(X, \mathcal{U}) \neq \varnothing$, para quaisquer $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_E$. Isso significa que $[q,v] \in \mathfrak{A}_w(X, \mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b)$ e, portanto, $\mathfrak{A}_w([q,Y], \mathcal{F}'_q) \subset \mathfrak{A}_w(X, \mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b)$. A inclusão $\mathfrak{A}_{wu}([q,Y], \mathcal{F}'_q) \subset \mathfrak{A}_{wu}(X, \mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b)$ pode ser demonstrada de maneira análoga. □

Teorema 3.20. *Suponha que a fibra típica F de $\xi[F]$ é compacta e que $\mathcal{F}$ é uma base de filtro de subconjuntos de $\mathcal{S}$. Sejam $X \subset E$ e $Y \subset F$ tais que $X \cap \pi_E^{-1}(b) = [q, Y]$. Então,* $\mathrm{Atr}(X, \mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b) \subset \mathrm{Atr}([q,Y], \mathcal{F}'_q)$ *e* $\mathrm{Atr}_u(X, \mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b) \subset \mathrm{Atr}_u([q,Y], \mathcal{F}'_q)$.

Demonstração: Inicialmente, mostremos que $\mathcal{F}'_q$ é uma base de filtro de subconjuntos de $\mathcal{H}_q$. Segue das hipóteses sobre $\mathcal{F}'_q$ assumidas na Seção 3.1 que $A'_q \neq \varnothing$, para todo $A \in \mathcal{F}$. Além disso, dados $A'_q, B'_q \in \mathcal{F}'_q$, existe $C \in \mathcal{F}$ tal que $C \subset A \cap B$. Assim, $C'_q \subset A'_q \cap B'_q$, de modo que $\mathcal{F}'_q$ é uma base de filtro de subconjuntos de $\mathcal{H}_q$. Esse fato, somado ao fato de que F é compacto, nos permite concluir, a partir da Proposição 1.53, que $\omega([q,v], \mathcal{F}'_q) \neq \varnothing$, para todo $[q,v] \in \pi_E^{-1}(b)$. Como $\omega([q,v], \mathcal{F}'_q) \subset \mathrm{J}([q,v], \mathcal{F}'_q)$, para todo $[q,v] \in \pi_E^{-1}(b)$, temos que $\mathrm{J}([q,v], \mathcal{F}'_q) \neq \varnothing$, para todo $[q,v] \in \pi_E^{-1}(b)$. Agora, tome $[q,v] \in \mathrm{Atr}(X, \mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b)$. Então, $\omega([q,v], \mathcal{F}'_q) \subset X$. Daí, segue do Teorema 3.18 que

$$\omega([q,v], \mathcal{F}'_q) \subset \omega([q,v], \mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b) \subset X \cap \pi_E^{-1}(b) = [q, Y],$$

mostrando que $[q,v] \in \mathrm{Atr}([q,Y], \mathcal{F}'_q)$. Portanto, $\mathrm{Atr}(X, \mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b) \subset \mathrm{Atr}([q,Y], \mathcal{F}'_q)$. Analogamente mostra-se que $\mathrm{Atr}_u(X, \mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b) \subset \mathrm{Atr}_u([q,Y], \mathcal{F}'_q)$. □

Teorema 3.21. *Sejam $K \subset E$ e $Y \subset F$, com K compacto, tais que $K \cap \pi_E^{-1}(b) = [q, Y]$. Então,*

1. *$\mathfrak{A}(K, \mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b) \subset \mathfrak{A}([q, Y], \mathcal{F}'_q)$ e $\mathfrak{A}_u(K, \mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b) \subset \mathfrak{A}_u([q, Y], \mathcal{F}'_q)$.*

2. *$[q, Y]$ é um $\mathcal{F}'_q$-atrator (respectivamente um $\mathcal{F}'_q$-atrator uniforme) se K é um $\mathcal{F}$-atrator (respectivamente um $\mathcal{F}$-atrator uniforme).*

Demonstração: Seja $[q, v] \in \mathfrak{A}(K, \mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b)$ e fixe $\mathcal{U}_b \in \mathcal{O}_b$. Do Lema 3.7, temos que existe uma cobertura aberta $\mathcal{W} \in \mathcal{O}_E$ tal que

$$\mathrm{B}(K, \mathcal{W}) \cap \pi_E^{-1}(b) \subset [q, \mathrm{B}(Y, \mathcal{U}_q)] = \mathrm{B}([q, Y], \mathcal{U}_b).$$

Como $[q, v] \in \mathfrak{A}(K, \mathcal{F})$, existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $A[q, v] \subset \mathrm{B}(K, \mathcal{W})$. Logo,

$$A'_q[q, v] \subset A[q, v] \cap \pi_E^{-1}(b) \subset \mathrm{B}(K, \mathcal{W}) \cap \pi_E^{-1}(b) \subset \mathrm{B}([q, Y], \mathcal{U}_b),$$

de modo que $[q, v] \in \mathfrak{A}([q, Y], \mathcal{F}'_q)$ e $\mathfrak{A}(K, \mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b) \subset \mathfrak{A}([q, Y], \mathcal{F}'_q)$. Agora, se K é um $\mathcal{F}$-atrator, existe uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_E$ tal que $\mathrm{B}(K, \mathcal{U}) \subset \mathfrak{A}(K, \mathcal{F})$. Note que $\mathrm{B}(K, \mathcal{U}) \cap \pi_E^{-1}(b)$ é uma vizinhança de $[q, Y]$ em $\pi_E^{-1}(b)$. Uma vez que Y é compacto, existe uma cobertura aberta $\mathcal{W}_b \in \mathcal{O}_b$ tal que $\mathrm{B}([q, Y], \mathcal{W}_b) \subset \mathrm{B}(K, \mathcal{U}) \cap \pi_E^{-1}(b)$. Logo,

$$\mathrm{B}([q, Y], \mathcal{W}_b) \subset \mathrm{B}(K, \mathcal{U}) \cap \pi_E^{-1}(b) \subset \mathfrak{A}(K, \mathcal{F}) \cap \pi_E^{-1}(b) \subset \mathfrak{A}([q, Y], \mathcal{F}'_q),$$

o que mostra que $[q, Y]$ é um $\mathcal{F}'_q$-atrator. O caso uniforme é análogo. □

Por fim, apresentamos alguns resultados sobre conjuntos estáveis no espaço total e nas fibras de $\xi[F]$.

Teorema 3.22. *Sejam $X \subset E$ e $Y \subset F$ tais que $X \cap \pi_E^{-1}(b) = [q, Y]$. Então, $[q, Y]$ é $\mathcal{H}_q$-equiestável se X é $\mathcal{S}$-equiestável.*

Demonstração: Suponha que X é $\mathcal{S}$-equiestável e fixe $[q, v] \in \pi_E^{-1}(b)$ tal que $[q, v] \notin [q, Y]$. Então, $[q, v] \notin X$. Logo, existe uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_E$ de modo que $[q, v] \notin \overline{\mathcal{S}\mathrm{B}(X, \mathcal{U})}$. Por outro lado, temos, de (3.15), que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_q \mathrm{B}([q, Y], \mathcal{U}_b) = \mathcal{H}_q \left(\mathrm{B}([q, Y], \mathcal{U}) \cap \pi_E^{-1}(b) \right) &\subset \mathcal{H}_q \mathrm{B}([q, Y], \mathcal{U}) \cap \mathcal{H}_q \pi_E^{-1}(b) \\ &\subset \mathcal{H}_q \mathrm{B}([q, Y], \mathcal{U}) \cap \pi_E^{-1}(b) \subset \mathcal{S}\mathrm{B}(X, \mathcal{U}). \end{aligned}$$

Daí, resulta que $[q,v] \notin \overline{\mathcal{H}_q \mathrm{B}([q,Y],\mathcal{U}_b)}$ e $[q,Y]$ é $\mathcal{H}_q$-equiestável. □

Teorema 3.23. *Sejam $K \subset E$ e $Y \subset F$, com K compacto, tais que $K \cap \pi_E^{-1}(b) = [q,Y]$. Então,*

1. *$[q,Y]$ é $\mathcal{H}_q$-orbitalmente estável se K é $\mathcal{S}$-orbitalmente estável.*

2. *$[q,Y]$ é $\mathcal{H}_q$-estável se K é $\mathcal{S}$-estável.*

3. *$[q,Y]$ é $\mathcal{F}'_q$-assintoticamente estável se K é $\mathcal{F}$-assintoticamente estável.*

Demonstração: Suponha que K é $\mathcal{S}$-orbitalmente estável. Seja U uma vizinhança de Y em F. Do Lema 3.7, temos que existe uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_E$ tal que $\mathrm{B}(K,\mathcal{U}) \cap \pi_E^{-1}(b) \subset [q,U]$. Como K é $\mathcal{S}$-orbitalmente estável, existe uma vizinhança V de K em E tal que $\mathcal{S}V \subset V \subset \mathrm{B}(K,\mathcal{U})$. Assim, $V \cap \pi_E^{-1}(b)$ é uma vizinhança de $[q,Y]$ em $\pi_E^{-1}(b)$ tal que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_q\left(V \cap \pi_E^{-1}(b)\right) &\subset \mathcal{H}_q V \cap \mathcal{H}_q \pi_E^{-1}(b) \subset \mathcal{H}_q V \cap \pi_E^{-1}(b)\\ &\subset \mathcal{S}V \cap \pi_E^{-1}(b) \subset V \cap \pi_E^{-1}(b)\\ &\subset \mathrm{B}(K,\mathcal{U}) \cap \pi_E^{-1}(b) \subset [q,U],\end{aligned}$$

de modo que $[q,Y]$ é $\mathcal{H}_q$-orbitalmente estável.

Para mostrar o item 2, suponha que K é $\mathcal{S}$-estável e fixe uma cobertura aberta $\mathcal{U}_b \in \mathcal{O}_b$. O Lema 3.7 garante a existência de uma cobertura aberta $\mathcal{W} \in \mathcal{O}_E$ tal que $\mathrm{B}(K,\mathcal{W}) \cap \pi_E^{-1}(b) \subset [q,\mathrm{B}(Y,\mathcal{U}_q)] = \mathrm{B}([q,Y],\mathcal{U}_b)$. Por sua vez, a $\mathcal{S}$-estabilidade de K implica a existência de uma cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_E$ tal que $\mathcal{S}\mathrm{B}(K,\mathcal{V}) \subset \mathrm{B}(K,\mathcal{W})$. Daí, segue de (3.18) que

$$\mathcal{H}_q \mathrm{B}([q,Y],\mathcal{V}_b) \subset \mathcal{S}\mathrm{B}(K,\mathcal{V}) \cap \pi_E^{-1}(b) \subset \mathrm{B}(K,\mathcal{W}) \cap \pi_E^{-1}(b) \subset \mathrm{B}([q,Y],\mathcal{U}_b),$$

o que mostra que $[q,Y]$ é $\mathcal{H}_q$-estável.

O item 3 é uma consequência imediata do item 2 e do item 2 do Teorema 3.21. □

Os resultados obtidos neste capítulo podem ser aplicados nos exemplos de fibrados principais, associados e vetoriais apresentados no Exemplo 4.7 e no Apêndice A.

Capítulo 4

Lema da uniformidade de Fenichel

Em [5, 6], Bhatia e Szegö apresentam um estudo detalhado sobre estabilidade de Lyapunov no contexto de fluxos em espaços métricos. Parte desse estudo consiste em relacionar os diversos conceitos de conjuntos estáveis e atratores. Em [19], Braga Barros, Souza e Rocha apresentam generalizações desses resultados no contexto de ações de semigrupos e sistemas de controle. Além disso, são apresentados também resultados que relacionam estabilidade de Lyapunov e atração com os atratores da teoria de Conley.

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados que complementam os resultados obtidos em [19]. Tendo como espaço de fase o espaço total de um fibrado vetorial, apresentamos resultados sobre a relação entre os conceitos de conjuntos estáveis e atratores para semifluxos n-dimensionais e sistemas de controle. Em ambos os casos, os resultados são obtidos para a seção zero do fibrado vetorial em questão.

Os resultados são obtidos em fibrados vetoriais cujo espaço base é compacto. A notação e os resultados básicos sobre essa classe de fibrados vetoriais podem ser encontrados na Subseção A.5.2.

4.1 Introdução

É natural, no contexto de fibrados vetoriais, estudar fluxos ϕ cujas aplicações ϕ_t, com $t \in \mathbb{R}$, são lineares. Tais fluxos são chamados *fluxos lineares*.

Definição 4.1. ([24, Definição 5.1.1]) *Seja $\pi : E \longrightarrow B$ um fibrado vetorial de dimensão finita. Um **fluxo linear** em E é um fluxo contínuo ϕ em E tal que, para quaisquer $\lambda, t \in \mathbb{R}$*

e $e_1, e_2 \in E$, *com* $\pi(e_1) = \pi(e_2)$,

$$\begin{cases} \pi(\phi(t, e_1)) = \pi(\phi(t, e_2)) \\ \phi(t, \lambda e_1 + e_2) = \lambda\phi(t, e_1) + \phi(t, e_2). \end{cases}$$

O Lema da uniformidade de Fenichel para fluxos lineares em fibrados vetoriais relaciona atração com estabilidade exponencial.

Teorema 4.2. ([24, Lema 5.2.7]) *Seja* $\pi : E \longrightarrow B$ *um fibrado vetorial de dimensão finita cujo espaço base é compacto e seja* ϕ *um fluxo linear em* E. *Suponha que*

$$\limsup_{t \to +\infty} \|\phi(t, e)\| = 0, \text{ para todo } e \in E,$$

Então, existem constantes $C, \mu > 0$ *tais que*

$$\|\phi(t, e)\| \leqslant C \exp(-\mu t)\|e\|, \text{ para quaisquer } t \geqslant 0 \text{ e } e \in E.$$

Neste capítulo, apresentamos versões do Lema da uniformidade de Fenichel nos contextos de semifluxos n-dimensionais e sistemas de controle. Em ambos os casos, o Lema da uniformidade de Fenichel nos permite provar que os conceitos de atratores e de estabilidade assintótica são equivalentes para a seção zero Z de E.

4.2 Semifluxos n-dimensionais

Seja $\pi : E \longrightarrow B$ um fibrado vetorial de dimensão finita cujo espaço base é compacto e metrizável como na Subseção A.5.2. Seja Φ um fluxo n-dimensional em E. Denote por

$$(t_1, \ldots, t_n) \cdot e = \Phi((t_1, \ldots, t_n), e), \text{ onde } (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n \text{ e } e \in E.$$

Ao longo desta seção, assumimos que, para quaisquer $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $e_1, e_2 \in E$ tais que $\pi(e_1) = \pi(e_2)$,

$$\begin{cases} \pi((t_1, \ldots, t_n) \cdot e_1) = \pi((t_1, \ldots, t_n) \cdot e_2) \\ (t_1, \ldots, t_n) \cdot (\lambda e_1 + e_2) = \lambda(t_1, \ldots, t_n) \cdot e_1 + (t_1, \ldots, t_n) \cdot e_2. \end{cases} \tag{4.1}$$

Note que (4.1) implica que, para quaisquer $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ e $e \in E$ e $b \in B$ tais que $\pi(e) = b$, a aplicação

$$\begin{aligned} (t_1, \ldots, t_n)|_{E_b} \;:\; & E_b \longrightarrow E_{\pi((t_1,\ldots,t_n)\cdot e)} \\ & e' \;\longmapsto\; (t_1, \ldots, t_n)|_{E_b}\, e' = (t_1, \ldots, t_n) \cdot e' \end{aligned}$$

está bem definida e é linear.

Fixe $i \in \{1, \ldots, n\}$ e considere o subsemigrupo de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\mathcal{S}_i = \{(t_1, \ldots, t_n) : t_i \geqslant 0\}.$$

A interseção de todos os subsemigrupos $\mathcal{S}_j$, com $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathcal{S} = \bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{S}_j,$$

também é um subsemigrupo de $\mathbb{R}^n$. A restrição de Φ a cada subsemigrupo $\mathcal{S}_j$ determina um semifluxo n-dimensional em E. Logo, a ação de $\mathcal{S}$ em E é a "interseção"dos semifluxos n-dimensionais determinados pelos subsemigrupos $\mathcal{S}_j$.

Agora, para cada $t > 0$, denote por

$$A_i(t) = \{(t_1, \ldots, t_n) : t_i \geqslant t\}.$$

Temos, assim, uma família de subconjuntos de $\mathcal{S}_i$, a saber,

$$\mathcal{F}_i = \{A_i(t) : t > 0\}.$$

Temos ainda a família $\mathcal{F} = \{A(t) : t > 0\}$ de subconjuntos de $\mathcal{S}$, onde

$$A(t) = \bigcap_{j=1}^{n} A_j(t), \text{ com } t > 0.$$

Agora, seja Z a seção zero de E. Como Z é um conjunto compacto e os conjuntos B_ε definidos em (A.23) formam uma base de vizinhanças para Z, podemos trocar as ε-vizinhanças $B(Z, \varepsilon)$ de Z pelos conjuntos B_ε nas definições de atratores e conjuntos estáveis para Z. Dessa forma, as $\mathcal{F}$-regiões de atração da seção zero Z são dados por

$$\mathfrak{A}_w(Z,\mathcal{F}) = \left\{ e \in E : \begin{array}{c} \text{para quaisquer } t, \varepsilon > 0, \text{ existem } t_1, \dots, t_n \geqslant t \\ \text{tais que } \|(t_1, \dots, t_n) \cdot e\| \leqslant \varepsilon \end{array} \right\},$$

$$\mathfrak{A}(Z,\mathcal{F}) = \left\{ e \in E : \begin{array}{c} \text{para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } t > 0 \text{ tal que} \\ \|(t_1, \dots, t_n) \cdot e\| \leqslant \varepsilon, \text{ para quaisquer } t_1, \dots, t_n \geqslant t \end{array} \right\},$$

$$\mathfrak{A}_{wu}(Z,\mathcal{F}) = \left\{ e \in E : \begin{array}{c} \text{para quaisquer } t, \varepsilon, \delta > 0, \text{ existem } t_1, \dots, t_n \geqslant t \text{ e } x \in \mathrm{B}_\delta \\ \text{tais que } \|(t_1, \dots, t_n) \cdot x\| \leqslant \varepsilon \end{array} \right\},$$

$$\mathfrak{A}_u(Z,\mathcal{F}) = \left\{ e \in E : \begin{array}{c} \text{para todo } \varepsilon > 0, \text{ existem } t, \delta > 0 \text{ tais que} \|(t_1, \dots, t_n) \cdot x\| \leqslant \varepsilon, \\ \text{para quaisquer } t_1, \dots, t_n \geqslant t \text{ e } x \in \mathrm{B}_\delta \end{array} \right\}.$$

Logo, segue de maneira imediata que

$$e \in \mathfrak{A}(Z,\mathcal{F}) \text{ se e somente se } \lim_{t_i \to +\infty} \|(t_1, \dots, t_n) \cdot e\| = 0, \text{ para todo } i = 1, \dots, n. \tag{4.2}$$

Com relação à $\mathcal{S}$-estabilidade, temos que Z é $\mathcal{S}$-estável se e somente se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|(t_1, \dots, t_n) \cdot e\| \leqslant \varepsilon$, para quaisquer $t_1, \dots, t_n \geqslant 0$ e $e \in \mathrm{B}_\delta$.

O seguinte resultado é uma útil consequência da condição de linearidade (4.1).

Proposição 4.3. *Suponha que a seção zero $Z \subset E$ é um $\mathcal{F}$-atrator fraco. Então, Z é um $\mathcal{F}$-atrator fraco global. O mesmo vale se Z é um $\mathcal{F}$-atrator, um $\mathcal{F}$-atrator uniforme fraco ou um $\mathcal{F}$-atrator uniforme.*

Demonstração: Se Z é um $\mathcal{F}$-atrator fraco, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\mathrm{B}_{\varepsilon_0} \subset \mathfrak{A}_w(Z,\mathcal{F})$. Fixando um elemento $e \in E \setminus Z$, considere $\alpha = \frac{\varepsilon_0}{\|e\|}$. Como $\alpha e \in \mathrm{B}_{\varepsilon_0}$, segue que, para quaisquer $t, \varepsilon > 0$, existem $t_1, \dots, t_n \geqslant t$ tais que $\|(t_1, \dots, t_n) \cdot \alpha e\| \leqslant \alpha\varepsilon$. Logo,

$$\|(t_1, \dots, t_n) \cdot e\| = \frac{1}{\alpha} \|(t_1, \dots, t_n) \cdot \alpha e\| \leqslant \varepsilon.$$

Portanto, $\mathfrak{A}_w(Z,\mathcal{F}) = E$. Se Z é um $\mathcal{F}$-atrator, um $\mathcal{F}$-atrator uniforme fraco ou um $\mathcal{F}$-atrator uniforme, a demonstração é análoga. $\square$

Tendo estabelecido os conceitos e os resultados básicos da teoria de semifluxos n-dimensionais em fibrados vetoriais, podemos estudar estabilidade de Lyapunov e atração nesse contexto. Começamos demonstrando a seguinte generalização do Teorema 4.2.

Teorema 4.4. *Suponha que existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que*

$$\limsup_{t_i \longrightarrow +\infty} \|(t_1, \ldots, t_n) \cdot e\| = 0, \text{ para quaisquer } t_j \geqslant 0, \text{ com } j \neq i, \text{ e } e \in E.$$

Então, existe $p \in \{1, \ldots, n\}$ e existem constantes $C, \mu > 0$ tais que

$$\|(t_1, \ldots, t_n) \cdot e\| \leqslant C \exp(-\mu t_p)\|e\|, \text{ para quaisquer } t_l \geqslant 0, \text{ com } l \in \{1, \ldots, n\}, \text{ e } e \in E.$$

Demonstração: Por hipótese, dado $e \in \mathbb{S}(E) = \{e \in E : \|e\| = 1\}$, existe $(T_1(e), ..., T_n(e)) \in \mathcal{S}_i$ tal que

$$\left\| (T_1(e), ..., T_n(e))|_{E_b} e \right\| < \frac{1}{2}.$$

Por continuidade, existe uma vizinhança $N = N(e, (T_1(e), ..., T_n(e)))$ de e em $\mathbb{S}(E)$ tal que

$$\left\| (T_1(e), ..., T_n(e))|_{E_b} w \right\| < \frac{1}{2}, \text{ para todo } w \in N.$$

Como $\mathbb{S}(E)$ é compacto, existe uma cobertura aberta finita $\{N_1, ..., N_m\}$ de $\mathbb{S}(E)$ e existem n-uplas $(T_1^k, ..., T_n^k) \in \mathcal{S}_i$, com $k \in \{1, ..., m\}$, tais que

$$\left\| (T_1^k, ..., T_n^k)\big|_{E_b} w \right\| < \frac{1}{2}, \text{ para todo } w \in N_k, \text{ com } k \in \{1, ..., m\}.$$

De (4.1), segue que

$$\left\| (T_1^k, ..., T_n^k)\big|_{E_b} w \right\| < \frac{1}{2}\|w\|, \text{ para todo } w \in E \text{ tal que } \frac{w}{\|w\|} \in N_k, \text{ com } k \in \{1, ..., m\}.$$

Agora, seja $w \in \mathbb{S}(E_b)$, onde $b = \pi(w) \in B$. Escolha inteiros positivos i_k tais que

$$\begin{gathered} w \in N_{i_1} \\ \frac{(T_1^{i_1}, ..., T_n^{i_1})\big|_{E_b} w}{\left\| (T_1^{i_1}, ..., T_n^{i_1})\big|_{E_b} w \right\|} \in N_{i_2} \\ \vdots \\ \frac{(T_1^{i_1} + \cdots + T_1^{i_{k-1}}, ..., T_n^{i_1} + \cdots + T_n^{i_{k-1}})\big|_{E_b} w}{\left\| (T_1^{i_1} + \cdots + T_1^{i_{k-1}}, ..., T_n^{i_1} + \cdots + T_n^{i_{k-1}})\big|_{E_b} w \right\|} \in N_{i_k} \end{gathered}$$

Dados $j \in \{1, ..., n\}$ e $k \in \{1, ..., m\}$, seja

$$\tau_j^k = \sum_{l=1}^{k} T_j^{i_l}.$$

Dados $t_1, ..., t_n > 0$ e $j \in \{1, ..., n\}$, existe $k_j \geqslant 0$ tal que

$$t_j = r_j + \tau_j^{k_j}, \text{ com } 0 \leqslant r_j \leqslant T = \max T_j^{i_l}.$$

Então, denotando por $p = \min\{k_j\}$, resulta que

$$t_j = s_j + \tau_j^p,$$

onde

$$s_j = r_j + (\tau_j^{k_j} - \tau_j^p) \leqslant q_j T, \text{ para algum } q_j \in \mathbb{N} \text{ suficientemente grande.}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\left\| (t_1, ..., t_n)|_{E_b} w \right\| &= \left\| (s_1, ..., s_n)(\tau_1^p, ..., \tau_n^p)|_{E_b} w \right\| \qquad (4.3)\\
&\leqslant \left\| (s_1, ..., s_n)|_{E_{\pi\left((\tau_1^p, ..., \tau_n^p)w\right)}} \right\| \left\| (\tau_1^p, ..., \tau_n^p)|_{E_b} w \right\| \\
&= \left\| (s_1, ..., s_n)|_{E_{\pi\left((\tau_1^p, ..., \tau_n^p)w\right)}} \right\| \left\| (T_1^{i_p}, ..., T_n^{i_p})(\tau_1^{i_p-1}, ..., \tau_n^{i_p-1})\Big|_{E_b} w \right\| \\
&\leqslant \left\| (s_1, ..., s_n)|_{E_{\pi\left((\tau_1^p, ..., \tau_n^p)w\right)}} \right\| \frac{1}{2} \left\| (\tau_1^{i_p-1}, ..., \tau_n^{i_p-1})\Big|_{E_b} w \right\| \\
&\vdots \\
&\leqslant \left\| (s_1, ..., s_n)|_{E_{\pi\left((\tau_1^p, ..., \tau_n^p)w\right)}} \right\| \left(\frac{1}{2}\right)^p \|w\|.
\end{aligned}$$

Por outro lado, note que $t_p = r_p + \tau_p^{k_p} \leqslant r_p + pT$ implica que $p \geqslant \frac{(t_p - r_p)}{T}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)^p &= \exp(-p \ln 2) \leqslant \exp(-p) \qquad (4.4)\\
&\leqslant \exp\left(-\frac{(t_p - r_p)}{T}\right) = \exp\left(-\frac{t_p}{T}\right) \exp\left(\frac{r_p}{T}\right) \\
&\leqslant \mathrm{e} \exp\left(-\frac{t_p}{T}\right)
\end{aligned}$$

De (4.3) e (4.4), segue que

$$\left\| (t_1, ..., t_n)|_{E_b} w \right\| \leqslant \left\| (s_1, ..., s_n)|_{E_{\pi\left((\tau_1^p, ..., \tau_n^p)w\right)}} \right\| \mathrm{e} \exp(-\frac{t_p}{T}) \|w\|,$$

para todo $w \in \mathbb{S}(E_b)$, com $b = \pi(w) \in B$. Daí, para todo $w \in \mathbb{S}(E)$, vale que

$$\left\| (t_1, ..., t_n)|_{E_{\pi(w)}} w \right\| \leqslant C \exp(-\mu t_p) \|w\|, \text{ para quaisquer } t_l > 0, \text{ com } l \in \{1, \dots, n\},$$

onde $\mu = \frac{1}{T}$ e $C = \mathrm{e} \max_{-qT \leqslant s_1, \dots, s_n \leqslant qT} \max_{b \in B} \left\| (s_1, ..., s_n)|_{E_b} \right\|$, com $q = \max q_j$.

Dessa forma,

$$\left\| (t_1, ..., t_n)|_{E_{\pi(e)}} e \right\| \leqslant C \exp(-\mu t_p) \|e\|, \text{ para quaisquer } t_l > 0, \text{ com } l \in \{1, \dots, n\}, \text{ e } e \in E.$$

□

O Teorema 4.4 tem os seguintes corolários.

Corolário 4.5. *Suponha que a seção zero $Z \subset E$ é um $\mathcal{F}$-atrator. Então, Z é $\mathcal{F}$-assintoticamente estável.*

Demonstração: Basta mostrar que Z é $\mathcal{S}$-estável. Segue da Proposição 4.3 que Z é um $\mathcal{F}$-atrator global. Assim, temos de (4.2) que, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\lim_{t_i \longrightarrow +\infty} \|(t_1, \dots, t_n)e\| = 0, \text{ para quaisquer } t_j \geqslant 0, \text{ com } j \neq i, \text{ e } e \in E.$$

Logo, segue do Teorema 4.4 que existe $p \in \{1, \dots, n\}$ e existem constantes $C, \mu > 0$ tais que

$$\|(t_1, \dots, t_n) \cdot e\| \leqslant C \exp(-\mu t_p) \|e\|, \text{ para quaisquer } t_l \geqslant 0, \text{ com } l \in \{1, \dots, n\}, \text{ e } e \in E.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\varepsilon}{C} > 0$ tal que, se $\|e\| < \delta$ e $(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}$, então

$$\|(t_1, \dots, t_n) \cdot e\| \leqslant C\|e\| \leqslant C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

Portanto, Z é $\mathcal{S}$-estável. □

Corolário 4.6. *As seguintes afirmações sobre a seção zero Z de E são equivalentes:*

1. *Z é um $\mathcal{F}$-atrator.*

2. *Z é um $\mathcal{F}$-atrator global.*

3. *Z é um $\mathcal{F}$-atrator uniforme.*

4. *Z é $\mathcal{F}$-assintoticamente estável.*

Demonstração: Segue do item 1b da Proposição 1.91 que o item 4 implica o item 3 e do item 2 da Proposição 1.83 que o item 3 implica o item 1. Pelo Corolário 4.5, temos que o item 1 implica o item 4. Por fim, segue da Proposição 4.3 que o item 1 é equivalente ao item 2. □

4.3 Sistemas de controle

Seja $\pi : E \longrightarrow B$ um fibrado vetorial de dimensão finita cujo espaço base é compacto como na Subseção A.5.2. Nesta seção, assumimos que $\pi : E \longrightarrow B$ é um fibrado vetorial de classe C^∞, ou seja, $\pi : E \longrightarrow B$ é um fibrado vetorial tal que E e B são variedades diferenciáveis de classe C^∞, $\pi : E \longrightarrow B$ é uma submersão de classe C^∞ e as demais aplicações envolvendo $\pi : E \longrightarrow B$ são de classe C^∞.

Considere um sistema de controle bilinear Σ em E cuja dinâmica é dada por uma família de equações diferenciais da forma

$$e'(t) = X_0(e(t)) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)X_i(e(t)), \text{ com } u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{U}_{cp},$$

onde $X_0, \dots, X_n$ são campos de vetores completos de classe C^∞ em E. Assumimos que o conjunto de controle U de Σ é um subconjunto compacto e convexo de $\mathbb{R}^n$. Assim, o fecho de $\mathcal{U}_{pc}$ com respeito à topologia fraca* de $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, o qual denotamos por $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}_{pc}}$, é um espaço de Hausdorff compacto e a **função solução**

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \times \mathcal{U} \longrightarrow M, \quad (t, x, u) \longmapsto \varphi\,(t, x, u)$$

é contínua, onde $\varphi(t, x, u)$ é a solução única do sistema Σ com respeito à condição inicial $x(0) = x$ e à função $u \in \mathcal{U}$ no tempo t (veja [24, Seções 4.2 e 4.3]).

Assumimos também que a função solução φ satisfaz a seguinte condição de linearidade:

para quaisquer $e_1, e_2 \in E$ tais que $\pi(e_1) = \pi(e_2)$, $\lambda, t \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$,

$$\begin{cases} \pi(\varphi(t, e_1, u)) = \pi(\varphi(t, e_2, u)) \\ \varphi(t, \lambda e_1 + e_2, u) = \lambda\varphi(t, e_1, u) + \varphi(t, e_2, u). \end{cases} \tag{4.5}$$

Exemplo 4.7. ([24, Capítulo 6]). O exemplo mais simples de sistema de controle bilinear satisfazendo (4.5) é um sistema de controle bilinear em $E = \mathbb{R}^n$ da forma

$$e'(t) = \left(A_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)A_i\right) e(t),$$

onde $A_0, \ldots, A_n$ são matrizes constantes $n \times n$. Note que, se $U = \{0\}$, obtemos uma equação diferencial linear

$$e'(t) = A_0 e(t).$$

Outro exemplo é um sistema obtido por linearização: seja M uma variedade diferenciável de dimensão finita e classe C^∞ e considere um sistema de controle em M dado por

$$y'(t) = Y_0(y(t)) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)Y_i(y(t)), \text{ com } u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{U}_{cp},$$

onde $Y_0, \ldots, Y_n$ são campos de vetores completos de classe C^∞ em M. Fazendo a linearização das trajetórias, obtemos um sistema de controle bilinear no fibrado tangente $\pi : \mathrm{T}M \longrightarrow M$ descrito por

$$\frac{d}{dt}\mathrm{T}y(t) = \mathrm{T}Y_0(\mathrm{T}y(t)) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\mathrm{T}Y_i(\mathrm{T}y(t)), \text{ com } u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{U}_{cp},$$

onde $\mathrm{T}Y_i$ denota a linearização do campo de vetores Y_i, para cada $i = 1, \ldots, n$. $\diamond$

A condição de linearidade (4.5) implica que

$$\varphi(t, \cdot, u)|_{E_b} : E_b \longrightarrow E_{\pi(\varphi(t,e,u))}$$

é uma aplicação linear, para quaisquer $t \in \mathbb{R}$, $b = \pi(e) \in B$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$. Assim, segue que Z é um conjunto invariante, pois todo elemento de Z é o elemento neutro de alguma fibra E_b, com $b \in B$. Temos também que $e \in Z$ se e somente se $ce \in Z$, para toda constante $c > 0$, uma vez que $e \in Z$ se e somente se $\|e\| = 0$. Além disso, como Z é um conjunto compacto e os conjuntos B_ε definidos em (A.23) formam uma base de vizinhanças para Z, podemos substituir as ε-vizinhanças $B(Z,\varepsilon)$ de Z pelos conjuntos B_ε nas definições de atratores e conjuntos estáveis para Z. Logo, as regiões de atração da seção zero são dadas por

$$\mathfrak{A}_w(Z) = \left\{ e \in E : \begin{array}{c} \text{para quaisquer } \varepsilon > 0 \text{ e } t \geqslant 0, \text{ existem } s \geqslant t \text{ e } u \in \mathcal{U}_{cp} \\ \text{tais que } \|\varphi(s,e,u)\| \leqslant \varepsilon \end{array} \right\},$$

$$\mathfrak{A}(Z) = \left\{ e \in E : \begin{array}{c} \text{para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } t \geqslant 0 \text{ tal que } \|\varphi(s,e,u)\| \leqslant \varepsilon, \\ \text{para quaisquer } s \geqslant t \text{ e } u \in \mathcal{U}_{cp} \end{array} \right\},$$

$$\mathfrak{A}_{wu}(Z) = \left\{ e \in E : \begin{array}{c} \text{para quaisquer } t \geqslant 0 \text{ e } \varepsilon, \delta > 0, \text{ existem } s \geqslant t, x \in \mathrm{B}_\delta \text{ e } u \in \mathcal{U}_{cp} \\ \text{tais que } \|\varphi(s,x,u)\| \leqslant \varepsilon \end{array} \right\},$$

$$\mathfrak{A}_u(Z) = \left\{ e \in E : \begin{array}{c} \text{para todo } \varepsilon > 0, \text{ existem } t \geqslant 0 \text{ e } \delta > 0 \text{ tais que } \|\varphi(s,x,u)\| \leqslant \varepsilon, \\ \text{para quaisquer } s \geqslant t, x \in \mathrm{B}_\delta \text{ e } u \in \mathcal{U}_{cp} \end{array} \right\}.$$

Um argumento semelhante ao empregado na Proposição 4.9 mostra que os elementos da região de atração fraca tem a seguinte propriedade: $e \in \mathfrak{A}_w(Z)$ se e somente se $ce \in \mathfrak{A}_w(Z)$, para toda constante $c > 0$. O mesmo é válido para $\mathfrak{A}(Z)$, $\mathfrak{A}_{wu}(Z)$ e $\mathfrak{A}_u(Z)$. Temos ainda que

$$e \in \mathfrak{A}(Z) \text{ se e somente se } \lim_{t \to +\infty} \|\varphi(t,e,u)\| = 0, \text{ para qualquer } u \in \mathcal{U}_{cp}. \tag{4.6}$$

Com relação à estabilidade, temos que Z é estável se e somente se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|\varphi(t,e,u)\| \leqslant \varepsilon$, para quaisquer $t \geqslant 0$, $u \in \mathcal{U}_{cp}$ e $e \in \mathrm{B}_\delta$.

Na sequência, introduzimos os conceitos de região de atração exponencial e atrator exponencial para a seção zero Z.

Definição 4.8. *Sejam $K, \varepsilon > 0$. A (K,ε)-**região de atração exponencial** da seção zero $Z \subset E$ é definida como sendo*

$$\mathfrak{A}_e(Z,K,\varepsilon) = \{e \in E : \|\varphi(t,e,u)\| \leqslant K \exp(-\varepsilon t)\|e\|, \ \textit{para quaisquer } t \geqslant 0 \textit{ e } u \in \mathcal{U}_{cp}\}.$$

*Dizemos que Z é um **atrator exponencial** para o sistema Σ se existem $K, \varepsilon, \delta > 0$ tais que $\mathrm{B}_\delta \subset \mathfrak{A}_e(Z,K,\varepsilon)$. Além disso, dizemos que Z é um **atrator exponencial global** para o sistema Σ se existem $K, \varepsilon > 0$ tais que $\mathfrak{A}_e(Z,K,\varepsilon) = E$.*

O próximo resultado é uma útil propriedade da seção zero que segue de (4.5).

Proposição 4.9. *Suponha que a seção zero $Z \subset E$ é um atrator fraco (respectivamente um atrator, um atrator uniforme fraco, um atrator uniforme, um atrator exponencial). Então, Z é um atrator fraco global (respectivamente um atrator global, um atrator uniforme fraco global, um atrator uniforme global, um atrator exponencial global).*

Demonstração: Suponha que Z é um atrator fraco. Então, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\mathrm{B}_{\varepsilon_0} \subset \mathfrak{A}_w(Z)$. Tendo fixado um elemento $e \in E\setminus Z$, tome $\alpha = \frac{\varepsilon_0}{\|e\|}$. Como $\alpha e \in \mathrm{B}_{\varepsilon_0}$, segue que, para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $t \geqslant 0$, existe $s \geqslant t$ tal que $\|\varphi(s, \alpha e, u)\| \leqslant \alpha\varepsilon$, para todo $u \in \mathcal{U}_{cp}$. Assim, para $u \in \mathcal{U}_{cp}$, obtemos

$$\|\varphi(s, e, u)\| = \frac{1}{\alpha} \|\varphi(s, \alpha e, u)\| \leqslant \varepsilon.$$

Portanto, $\mathfrak{A}_w(Z) = E$. As demonstrações dos casos em que Z é um atrator, um atrator uniforme fraco, um atrator uniforme ou um atrator exponencial são análogas. □

A próxima proposição relaciona atração exponencial e estabilidade assintótica para a seção zero.

Proposição 4.10. *Suponha que a seção zero $Z \subset E$ é um atrator exponencial. Então, Z é um atrator uniforme que é estável (e, portanto, é assintoticamente estável).*

Demonstração: Tome $K, \varepsilon, \delta > 0$ tais que $\mathrm{B}_\delta \subset \mathfrak{A}_e(Z, K, \varepsilon)$. Fixando arbitrariamente $\alpha > 0$, escolha $\eta > 0$ tal que $\eta \leqslant \frac{\alpha}{K}$ e $\eta < \delta$. Então, para quaisquer $t \geqslant 0$, $e \in \mathrm{B}_\eta$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$, temos que

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, e, u)\| &\leqslant K \exp(-\varepsilon t)\|e\| \leqslant K\|e\| \\ &\leqslant K\eta \leqslant \alpha. \end{aligned}$$

Dessa desigualdade, segue que $\mathrm{B}_\eta \subset \mathfrak{A}_u(Z)$ e $\mathcal{S}_\Sigma \mathrm{B}_\eta \subset \mathrm{B}_\alpha$. Portanto, Z é um atrator uniforme que é estável. □

Os lemas apresentados a seguir são utilizados na demonstração do Lema da uniformidade de Fenichel para sistemas de controle. Eles generalizam os Lema 2.4 e 2.5 de [38].

Lema 4.11. *Assuma que a seção zero $Z \subset E$ é um conjunto invariante isolado. Então,*

1. $\sup\{\|\varphi(t,e,u)\| : t \in \mathbb{R} \text{ e } u \in \mathcal{U}_{cp}\} < \infty$ *se e somente se* $e \in Z$.

2. *Suponha que o sistema* Σ *satisfaz a hipótese* H_4. *Então,*

$$\sup\{\|\varphi(t,e,u)\| : t \geqslant 0 \text{ e } u \in \mathcal{U}_{cp}\} < \infty$$

se e somente se $e \in \mathfrak{A}(Z)$.

Demonstração: Seja N uma vizinhança isolada compacta de Z e tome $\varepsilon > 0$ tais que $\mathrm{B}_\varepsilon \subset N$.

1. Suponha que existe uma constante $K > 0$ tal que $\|\varphi(t,e,u)\| \leqslant K$, para quaisquer $t \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$. Tome $t \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$. Para $c = \frac{\varepsilon}{K} > 0$, temos que

$$\|\varphi(t,ce,u)\| = c\,\|\varphi(t,e,u)\| \leqslant \varepsilon.$$

Dessa forma, concluímos que $\mathcal{S}_\Sigma ce \cup \mathcal{S}_\Sigma^{-1} ce \subset N$. Como N é uma vizinhança isolada de Z, segue que $ce \in Z$ e, portanto, $e \in Z$.

2. Assuma que existe uma constante $K > 0$ tal que $\|\varphi(t,e,u)\| \leqslant K$, para quaisquer $t \geqslant 0$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$. Prova-se, assim como no item anterior, que, para $c = \frac{\varepsilon}{K} > 0$, $\mathcal{S}_\Sigma ce \subset N$. Logo, $\mathrm{cl}(\mathcal{S}_\Sigma ce) \subset N$ e $\mathrm{cl}(\mathcal{S}_\Sigma ce)$ é compacto. Assim, segue da Proposição 1.53 que $\omega(ce) \neq \emptyset$. Como é válida a hipótese H_4, temos ainda pela Proposição 1.54 que $\omega(ce)$ é invariante. A escolha de N implica que $\omega(ce) \subset Z$. Logo, $ce \in \mathfrak{A}(Z)$ e, portanto, $e \in \mathfrak{A}(Z)$. Reciprocamente, segue da Proposição 1.53 que $\mathrm{cl}(\mathcal{S}_\Sigma e)$ é limitado em E se $\emptyset \neq \omega(e) \subset Z$. Portanto, $\sup\{\|\varphi(t,e,u)\| : t \geqslant 0 \text{ e } u \in \mathcal{U}_{cp}\} < \infty$.

□

Lema 4.12. *Suponha que o sistema* Σ *satisfaz a hipótese* H_4. *Assuma que a seção zero $Z \subset E$ é um conjunto invariante isolado. Então, existem constantes $K, \varepsilon > 0$ tais que $\mathfrak{A}(Z) \subset \mathfrak{A}_e(Z,K,\varepsilon)$, ou seja,*

$$\|\varphi(t,e,u)\| \leqslant K\exp(-\varepsilon t)\|e\|,$$

para quaisquer $e \in \mathfrak{A}(Z)$, $t \geqslant 0$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$.

Demonstração: Inicialmente, mostremos que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\|\varphi(t, e, u)\| \leqslant K\|e\|, \tag{4.7}$$

para quaisquer $e \in \mathfrak{A}(Z)$, $t \geqslant 0$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$. Suponha por absurdo que, para cada $k \in \mathbb{N}$ existem $t_k \geqslant 0$, $e_k \in \mathfrak{A}(Z)$ e $u_k \in \mathcal{U}_{cp}$ tais que $\|\varphi(t_k, e_k, u_k)\| > k\|e_k\|$. De (4.5) e do Lema 4.11, segue que podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\|e_k\| = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e

$$\|\varphi(t_k, e_k, u_k)\| \geqslant \|\varphi(t, e_k, u)\|\,, \tag{4.8}$$

para quaisquer $t \geqslant 0$ e $u \in \mathcal{U}_{pc}$, respectivamente. Além disso, temos que $\|\varphi(t_k, e_k, u_k)\| \longrightarrow \infty$ quando $k \to +\infty$. Agora, considere a sequência

$$\left(\frac{\varphi(t_k, e_k, u_k)}{\|\varphi(t_k, e_k, u_k)\|}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{S}(E).$$

Como $\mathbb{S}(E)$ é compacto, podemos assumir, sem perda de generalidade, que

$$\frac{\varphi(t_k, e_k, u_k)}{\|\varphi(t_k, e_k, u_k)\|} \longrightarrow x, \text{ para algum } x \in \mathbb{S}(E). \tag{4.9}$$

Temos duas possibilidades: se $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada, podemos assumir que $t_k \longrightarrow s$, com $s \geqslant 0$. Logo, para todo $v \in \mathcal{U}_{cp}$,

$$\begin{aligned} \|\varphi(-s, x, v)\| &= \lim_{k\to\infty} \left\|\varphi\left(-t_k, \frac{\varphi(t_k, e_k, u_k)}{\|\varphi(t_k, e_k, u_k)\|}, v\right)\right\| \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\|\varphi(t_k, e_k, u_k)\|} = 0 \end{aligned}$$

e, portanto, $\varphi(-s, x, v) \in Z$. Esse fato implica que $x \in Z$, o que contradiz (4.9). Por outro lado, se $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ não é limitada, então afirmamos que

$$\|\varphi(t, x, u)\| \leqslant 1, \text{ para quaisquer } t \in \mathbb{R} \text{ e } u \in \mathcal{U}_{cp}. \tag{4.10}$$

De fato, suponha por absurdo que existem $t' \in \mathbb{R}$ e $u' \in \mathcal{U}_{cp}$ tais que $\|\varphi(t', x, u')\| > 1$. Se $t' \geqslant 0$, então

$$\begin{aligned} 1 &< \lim_{k\to\infty} \frac{\|\varphi(t', \varphi\,(t_k, e_k, u_k)\,, u')\|}{\|\varphi(t_k, e_k, u_k)\|} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{\|\varphi(t' + t_k, e_k, u_k')\|}{\|\varphi(t_k, e_k, u_k)\|}, \end{aligned}$$

onde $u'_k \in \mathcal{U}_{cp}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Então, segue que existe $k' \in \mathbb{N}$ tal que $t' + t_{k'} > 0$ e

$$\|\varphi(t' + t_{k'}, e_{k'}, u'_{k'})\| > \|\varphi(t_k, e_k, u_k)\| . \tag{4.11}$$

De (4.8) e (4.11), obtemos

$$\|\varphi(t' + t_{k'}, e_{k'}, u'_{k'})\| > \|\varphi(t' + t_{k'}, e_{k'}, u'_{k'})\| . \tag{4.12}$$

o que é uma contradição. Se $t' \leqslant 0$, segue da hipótese H_4 que existe $\tau \geqslant 0$ tal que

$$\varphi(t', \cdot, u'(\cdot + t))\mathcal{S}_{\geqslant\tau} \subset \mathcal{S}_{\Sigma}.$$

Assuma, sem perda de generalidade, que $t_k \geqslant \tau$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, existem $\tau_k \geqslant 0$ e $u'_k \in \mathcal{U}_{cp}$ tais que

$$\varphi(t', \varphi(t_k, e_k, u_k), u'(\cdot + t)) = \varphi(\tau_k, e_k, u'_k).$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1 &< \lim_{k\to\infty} \frac{\|\varphi(t', \varphi(t_k, e_k, u_k), u'(\cdot + t))\|}{\|\varphi(t_k, e_k, u_k)\|} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{\|\varphi(\tau_k, e_k, u'_k)\|}{\|\varphi(t_k, e_k, u_k)\|}, \end{aligned}$$

Logo, existe $k' \in \mathbb{N}$ tal que $\tau_{k'} > 0$ e

$$\|\varphi(\tau_{k'}, e_{k'}, u'_{k'})\| > \|\varphi(t_k, e_k, u_k)\| . \tag{4.13}$$

De (4.8) e (4.13), obtemos

$$\|\varphi(\tau_{k'}, e_{k'}, u'_{k'})\| > \|\varphi(\tau_{k'}, e_{k'}, u'_{k'})\| , \tag{4.14}$$

o que é uma contradição. Isso mostra que (4.10) vale. Portanto,

$$\sup\{\|\varphi(t, x, u)\| : t \in \mathbb{R} \text{ e } u \in \mathcal{U}_{cp}\} < \infty$$

e o Lema 4.11 implica que $x \in Z$, o que contradiz (4.9). Portanto, (4.7) é válido.

Agora, mostremos que, para cada $\alpha > 0$, existe $T > 0$ tal que

$$\|\varphi(t, e, u)\| \leqslant \alpha\|e\|, \tag{4.15}$$

para quaisquer $e \in \mathfrak{A}(Z)$, $t \geqslant T$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$. Suponha por absurdo que existe $\alpha > 0$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos escolher $e_k \in \mathfrak{A}(Z)$, $t_k \geqslant k$ e $u_k \in \mathcal{U}_{cp}$ de modo que

$$\|\varphi(t_k, e_k, u_k)\| > \alpha \|e_k\|. \tag{4.16}$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$\frac{\varphi(t_k, e_k, u_k)}{\|\varphi(t_k, e_k, u_k)\|} \longrightarrow x, \text{ para algum } x \in \mathbb{S}(E).$$

Fixe $t \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$. Se $t \geqslant 0$, segue de (4.16) que

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, x, u)\| &= \lim_{k\to\infty} \frac{\|\varphi(t + t_k, e_k, u_k')\|}{\|\varphi(t_k, e_k, u_k)\|} \\ &< \lim_{k\to\infty} \frac{\|\varphi(t + t_k, e_k, u_k')\|}{\alpha\|e_k\|} \\ &\leqslant \frac{K}{\alpha}. \end{aligned}$$

Se $t \leqslant 0$, segue da hipótese H_4 que existe $\tau \geqslant 0$ tal que

$$\varphi(t, \cdot, u(\cdot + t))\mathcal{S}_{\geqslant\tau} \subset \mathcal{S}_{\Sigma}.$$

Assuma, sem perda de generalidade, que $t_k \geqslant \tau$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, existem $\tau_k \geqslant 0$ e $u_k' \in \mathcal{U}_{cp}$ tais que

$$\varphi(t, \varphi(t_k, e_k, u_k), u(\cdot + t)) = \varphi(\tau_k, e_k, u_k').$$

Daí, segue de (4.16) que

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, x, u)\| &= \lim_{k\to\infty} \frac{\|\varphi(t, \varphi(t_k, e_k, u_k), u(\cdot + t))\|}{\|\varphi(t_k, e_k, u_k)\|} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{\|\varphi(\tau_k, e_k, u_k')\|}{\|\varphi(t_k, e_k, u_k)\|} \\ &< \lim_{k\to\infty} \frac{\|\varphi(\tau_k, e_k, u_k')\|}{\alpha\|e_k\|} \\ &\leqslant \frac{K}{\alpha}. \end{aligned}$$

Assim, obtemos do Lema 4.11 que

$$\sup\{\|\varphi(t, x, u)\| : t \in \mathbb{R} \text{ e } u \in \mathcal{U}_{cp}\}$$

existe e, portanto, $x \in Z$. Essa contradição mostra que (4.15) se verifica.

Agora, tome $\alpha < 1$ e $T > 0$ tais que $\|\varphi(t,e,u)\| \leqslant \alpha\|e\|$, para quaisquer $e \in \mathfrak{A}(Z)$, $t \geqslant T$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$. Seja

$$\varepsilon = \frac{-(\ln \alpha)}{T} > 0. \tag{4.17}$$

Então, $\alpha = \exp(-\varepsilon T)$. Agora, fixe $k \in \mathbb{N}$ e tome t de modo que $kT \leqslant t \leqslant (k+1)T$. Temos que $t = r + kT$, para algum $r \geqslant 0$. Assim, se $e \in \mathfrak{A}(Z)$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$, então segue de (4.7) e (4.15) que

$$\begin{aligned} \|\varphi(t,e,u)\| &= \|\varphi(r,\varphi(kT,e,u),u')\| \\ &\leqslant K\,\|\varphi(kT,e,u)\| \\ &\leqslant K\alpha^k\|e\|. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Como $t \leqslant (k+1)T$, temos que

$$\exp(-\varepsilon(k+1)T) \leqslant \exp(-\varepsilon t).$$

Além disso, temos que $\alpha^{k+1} = \exp(-\varepsilon(k+1)T)$. Logo, (4.18) implica que

$$\begin{aligned} \|\varphi(t,e,u)\| &\leqslant K\alpha^{-1}\alpha^{k+1}\|e\| \\ &= K\alpha^{-1}\exp(-\varepsilon(k+1)T)\|e\| \\ &\leqslant K\alpha^{-1}\exp(-\varepsilon t)\|e\|. \end{aligned}$$

Portanto, considerando $K' = K\alpha^{-1}$ e ε com em (4.17), temos que

$$\|\varphi(t,e,u)\| \leqslant K'\exp(-\varepsilon t)\|e\|, \tag{4.19}$$

para quaisquer $e \in \mathfrak{A}(Z)$, $t \geqslant 0$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$. □

Como uma consequência, temos o seguinte resultado.

Corolário 4.13. *Suponha que o sistema Σ satisfaz a hipótese* H_4 *e assuma que a seção zero $Z \subset E$ é um conjunto invariante isolado que é um atrator. Então, Z é um atrator exponencial global.*

Demonstração: Segue da Proposição 4.9 que $\mathfrak{A}(Z) = E$. Logo, temos do Lema 4.12 que existem constantes $K, \varepsilon > 0$ tais que $\mathfrak{A}_e(Z, K, \varepsilon) = E$. Portanto, Z é um atrator exponencial global. □

O seguinte resultado, que é uma consequência imediata de (4.6) e do Corolário 4.13, é uma versão do Lema da uniformidade de Fenichel para sistemas de controle.

Teorema 4.14. *Suponha que o sistema* Σ *satisfaz a hipótese* H_4 *e assuma que a seção zero* $Z \subset E$ *é um conjunto invariante isolado. Assuma também que*

$$\lim_{t\to\infty} \|\varphi(t,e,u)\| = 0, \text{ para quaisquer } e \in E \text{ e } u \in \mathcal{U}_{cp}.$$

Então, existem constantes $K, \varepsilon > 0$ *tais que*

$$\|\varphi(t,e,u)\| \leqslant K \exp(-\varepsilon t)\|e\|,$$

para quaisquer $e \in E$, $t \geqslant 0$ *e* $u \in \mathcal{U}_{cp}$.

Por fim, apresentamos uma equivalência entre os conceitos de atratores e conjuntos estáveis para a seção zero.

Teorema 4.15. *Suponha que o sistema* Σ *satisfaz as hipóteses* H_3 *e* H_4 *e assuma que a seção zero* $Z \subset E$ *é um conjunto invariante isolado. Então, as seguintes afirmações sobre* Z *são equivalentes:*

1. *Z é um atrator de Conley.*
2. *Z é um atrator uniforme.*
3. *Z é um atrator exponencial.*
4. *Z é um atrator.*
5. *Z é um atrator fraco que é estável.*
6. *Z é assintoticamente estável.*

7. *Z é estável.*

Demonstração: Segue do item 1a da Proposição 1.91 que os itens 5 e 6 são equivalentes. Pelo mesmo motivo, o item 5 implica o item 4. O item 1b da Proposição 1.91 mostra que o item 6 implica o item 2. O item 2 da Proposição 1.83 mostra que o item 2 implica o item 4. O item 2b da Proposição 1.91 garante que o item 2 implica o item 6. Além disso, temos do Corolário 4.13 que o item 4 implica o item 3, temos da Proposição 4.10 que o item 3 implica o item 6 e temos do item 2b da Proposição 1.91 que o item 1 implica o item 6. Por fim, as Proposições 1.84, 1.92 e 4.10 implicam que o item 3 implica o item 1 e a Proposição 1.92 garante que o item 1 é equivalente ao item 7. □

Apêndice A

Fibrados topológicos

Neste apêndice, apresentamos os conceitos básicos da teoria de fibrados principais e associados que são necessários para o entendimento desta tese. Nos referimos a [29] e [31] para a teoria de fibrados principais e associados. Começamos fixando algumas notações da teoria de fibrados topológicos, que englobam tanto fibrados principais quanto associados. Depois, estudamos os fibrados principais a partir do estudo dos G-espaços. Por fim, apresentamos o conceito de fibrado associado a um fibrado principal, dando ênfase aos fibrados vetoriais.

A.1 Generalidades

Esta seção tem o objetivo de estabelecer as notações e nomenclaturas básicas que são comuns a fibrados principais e associados. Neste sentido, trabalhamos com o conceito de fibrado topológico, que engloba tanto fibrados principais quanto associados.

Um **fibrado topológico** é uma terna $\xi = (E, \pi, B)$, onde E e B são espaços topológicos e $\pi : E \longrightarrow B$ é uma aplicação contínua. Os espaços E e B são chamados, respectivamente, **espaço total** e **espaço base** do fibrado topológico ξ. A aplicação π é chamada **projeção** do fibrado topológico ξ. A menos de menção explícita em contrário, ao longo desta seção, ξ denota um fibrado topológico com espaço total E, espaço base B e projeção $\pi : E \longrightarrow B$. Além disso, por simplicidade, dizemos apenas que ξ é um *fibrado*, ficando subentendido que ξ é um fibrado topológico.

Sejam $\xi_1 = (E_1, \pi_1, B_1)$ e $\xi_2 = (E_2, \pi_2, B_2)$ dois fibrados. Dizemos que ξ_2 é um **subfibrado** de ξ_1 se $E_2 \subset E_1$, $B_2 \subset B_1$ e $\pi_2 = \pi_1|_{E_2} : E_2 \longrightarrow B_2$. Um **homomorfismo de fibrados** é um par de aplicações contínuas (u, f), com $u : E_1 \longrightarrow E_2$ e $f : B_1 \longrightarrow B_2$, tais que $\pi_2 \circ u = f \circ \pi_1$. Um homomorfismo entre os fibrados ξ_1 e ξ_2 torna comutativo o diagrama a seguir:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{u} & E_2 \\ \pi_1 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi_2 \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array} \tag{A.1}$$

Homomorfismos de fibrados "levam fibras em fibras", isto é,

$$u((\pi_1)^{-1}(b)) \subset (\pi_2)^{-1}(f(b)), \text{ para todo } b \in B. \tag{A.2}$$

De fato, se $x \in u((\pi_1)^{-1}(b))$, existe $y \in (\pi_1)^{-1}(b)$ tal que $x = u(y)$. Daí, $\pi_2(x) = \pi_2(u(y)) = f(\pi_1(y)) = f(b)$, de modo que $x \in (\pi_2)^{-1}(f(b))$.

Um homomorfismo de fibrados (u, f) também é indicado por $(u, f) : \xi_1 \longrightarrow \xi_2$. Se existe um homomorfismo de fibrados $(v, g) : \xi_2 \longrightarrow \xi_1$ tal que $v = u^{-1}$ e $g = f^{-1}$, dizemos que (u, f) é um **isomorfismo de fibrados** e que os fibrados ξ_1 e ξ_2 são **isomorfos**.

Se $B_1 = B_2 = B$ e $f = \mathrm{id_B}$, dizemos que $u = (u, \mathrm{id_B}) : \xi_1 \longrightarrow \xi_2$ é um B-**homomorfismo de fibrados**. Neste caso, temos que $\pi_1 = \pi_2 \circ u$ e, portanto, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{u} & E_2 \\ \pi_1 \searrow & \circlearrowleft & \swarrow \pi_2 \\ & B & \end{array} \tag{A.3}$$

Para um B-homomorfismo de fibrados $u : \xi_1 \longrightarrow \xi_2$, a inclusão (A.2) se resume a $u((\pi_1)^{-1}(b)) \subset (\pi_2)^{-1}(b)$, para todo $b \in B$.

Se ξ é um fibrado, então $\mathrm{id}_\xi = (\mathrm{id_E}, \mathrm{id_B})$ é claramente um B-homomorfismo de fibrados. Um outro exemplo envolve o conceito de *seção* de um fibrado. Uma **seção** (ou **seção global**) de ξ é uma aplicação contínua $s : B \longrightarrow E$ tal que $\pi(s(b)) = b$, para todo $b \in B$, ou seja, $\pi \circ s = \mathrm{id_B}$. Em outras palavras, s é uma seção de ξ se $s(b) \in \pi^{-1}(b)$, para todo $b \in B$. Note que as seções de ξ são exatamente os B-homomorfismos da forma $s : (B, \mathrm{id_B}, \mathrm{B}) \longrightarrow \xi$.

Dado $b \in B$, o conjunto $\pi^{-1}(b)$ é chamado **fibra** de E sobre b. Também usamos a notação $E_b = \pi^{-1}(b)$. Se todas as fibras $\pi^{-1}(b)$ são homeomorfas a um espaço topológico F, dizemos que F é a **fibra típica** do fibrado ξ. O exemplo mais simples de fibrado é $(B \times F, \pi_1, B)$, onde B e F são espaços topológicos e $\pi_1 : B \times F \longrightarrow B$ é a projeção na primeira coordenada. Tal fibrado é chamado de **fibrado produto**. Um fibrado ξ é um **fibrado trivial com fibra** F se ξ é B-isomorfo ao fibrado produto $(B \times F, \pi_1, B)$.

Agora, tome um subconjunto $A \subset B$. A **restrição** de ξ a A, denotada por $\xi|_A$, é o fibrado (E', π', A), onde $E' = \pi^{-1}(A)$ e $\pi' = \pi|_{E'}$. É imediato verificar que $\xi|_B = \xi$, $(\mathrm{id}_\xi)|_A = \mathrm{id}_{\xi|_A}$ e que, se $A_1 \subset A \subset B$, então $\xi|_{A_1} = (\xi|_A)|_{A_1}$. Também não é difícil ver que, para o fibrado trivial $\xi = (B \times F, \pi_1, B)$, tem-se que $\xi|_A = (A \times F, \pi_1, A)$.

Dois fibrados $\xi_1 = (E_1, \pi_1, B)$ e $\xi_2 = (E_2, \pi_2, B)$ com mesmo espaço base B são **localmente isomorfos** se, para cada $b \in B$, existe uma vizinhança U de b em B tal que os fibrados $\xi_1|_U$ e $\xi_2|_U$ são U-isomorfos. Em outras palavras, os fibrados ξ_1 e ξ_2 são localmente isomorfos se dado $b \in B$, existe uma vizinhança U de b em B e existe um U-isomorfismo de fibrados $u : ((\pi_1)^{-1}(U), (\pi_1)|_U, U) \longrightarrow ((\pi_2)^{-1}(U), (\pi_2)|_U, U)$. É claro que dois fibrados isomorfos são localmente isomorfos. Um fibrado ξ com espaço base B é **localmente trivial com fibra** F se ξ é localmente isomorfo ao fibrado produto $(B \times F, \pi_1, B)$.

Na classe de todos os fibrados sobre B, considere a seguinte relação:

$$\xi_1 \sim \xi_2 \text{ se e somente se } \xi_1 \text{ e } \xi_2 \text{ são localmente isomorfos.} \tag{A.4}$$

Se ξ é um fibrado sobre B, é claro que ξ é localmente isomorfo a si mesmo. Se ξ_1 é localmente isomorfo a ξ_2, segue imediatamente da definição que ξ_2 é localmente isomorfo a ξ_1. Por fim, se $\xi_1 \sim \xi_2$ e $\xi_2 \sim \xi_3$, então, dado $b \in B$, existem vizinhanças U e V de b em B tais que $\xi_1|_U$ é U-isomorfo a $\xi_2|_U$ e $\xi_2|_V$ é V-isomorfo a $\xi_3|_V$. Logo, $\xi_1|_{U\cap V}$ é $U \cap V$-isomorfo a $\xi_3|_{U\cap V}$, o que mostra que $\xi_1 \sim \xi_3$. Portanto, (A.4) é uma relação de equivalência na classe de todos os fibrados sobre B. Como consequência, fibrados localmente isomorfos a fibrados localmente triviais são localmente triviais.

A.2 Fibrados principais

Nesta seção, apresentamos os conceitos básicos sobre fibrados principais que são utilizados nesta tese.

Seja G um grupo topológico com elemento neutro 1.

Definição A.1. *Um G-**espaço à direita** é um espaço topológico M munido de uma ação à direita de G que é contínua.*

Analogamente, define-se G-espaço à esquerda. No que segue, vamos sempre trabalhar com G-espaços à direita, aos quais nos referiremos apenas como G-espaços.

Seja M um G-espaço. As órbitas da ação de G em M determinam uma relação de equivalência em M dada por

$$x \sim y \text{ se e somente se existe } g \in G \text{ tal que } xg = y. \tag{A.5}$$

Denotamos por M/G o espaço das órbitas xG, $x \in M$, munido da topologia quociente dada pela projeção canônica $\pi : M \longrightarrow M/G$. A projeção canônica é claramente uma aplicação sobrejetora e contínua. Ela é também uma aplicação aberta. De fato, seja W um aberto de M. Afirmamos que

$$\pi^{-1}(\pi(W)) = WG = \bigcup_{g \in G} Wg.$$

Com efeito, se $x \in \bigcup_{g\in G} Wg$, existe $g \in G$ tal que $x \in Wg$ e, assim, $x = wg$, para algum $w \in W$. Logo, $x \in wG$ e $\pi(x) = \pi(w) \in \pi(W)$. Portanto, $x \in \pi^{-1}(\pi(W))$. Reciprocamente, tome $x \in \pi^{-1}(\pi(W))$. Então, $\pi(x) \in \pi(W)$ e podemos escolher um elemento $w \in W$ tal que $\pi(x) = \pi(w)$. Assim, $x \in wG$ e existe $g \in G$ tal que $x = wg$, de modo que $x \in Wg$. Portanto, $x \in \bigcup_{g\in G} Wg$, como queríamos demonstrar.

Agora, seja M um G-espaço livre e considere

$$M^* = \{(x, xg) : x \in M, g \in G\}. \tag{A.6}$$

Dado $(x, x') \in M^*$, existe um único $\tau(x, x') \in G$ tal que $x\tau(x, x') = x'$. De fato, dado $(x, x') \in M^*$, então $x' = xg$, para algum $g \in G$. Logo, basta fazer $g = \tau(x, x')$. Tal g é único, uma vez que M é um G-espaço livre. Desta forma, está bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} \tau \quad : \quad & M^* \longrightarrow G \\ & (x, x') \longmapsto \tau(x, x') \end{aligned} \tag{A.7}$$

A função τ dada em (A.7) é chamada **função de translação** do G-espaço M. A função de translação tem as seguintes propriedades:

1. $\tau(x,x) = 1$, para todo $x \in M$.

2. $\tau(x,x')\tau(x',x'') = \tau(x,x'')$, para quaisquer $x, x', x'' \in M$.

3. $\tau(x',x) = \tau(x,x')^{-1}$, para quaisquer $x, x' \in M$.

A função de translação de um G-espaço dada em (A.7) não necessariamente é contínua. Dizemos que M é um G-**espaço principal** se a função de translação de M é contínua.

A próxima definição apresenta o conceito de homomorfismo entre G-espaços.

Definição A.2. *Sejam M e N dois G-espaços. Uma aplicação contínua $p : M \longrightarrow N$ é um G-**homomorfismo** se $p(xg) = p(x)g$, para quaisquer $x \in M$ e $g \in G$. Além disso, se p é um homeomorfismo, dizemos que p é um G-**isomorfismo**.*

Ou seja, os G-homomorfismos entre M e N são exatamente as aplicações G-equivariantes entre M e N e os G-isomorfismos entre M e N são exatamente as G-conjugações topológicas entre M e N.

Se $p : M \longrightarrow N$ é um G-homomorfismo entre dois G-espaços, então $p(xG) \subset p(x)G$, para todo $x \in M$, ou seja, um G-homomorfismo "preserva órbitas". Além disso, p induz a aplicação $f : M/G \longrightarrow N/G$ dada por $f(xG) = p(x)G$, que é a aplicação que torna comutativo o diagrama a seguir:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{p} & N \\ \pi_M \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi_N \\ M/G & \xrightarrow{f} & N/G \end{array} \tag{A.8}$$

Na sequência, apresentamos o conceito de G-fibrado.

Definição A.3. *Seja $\xi = (Q, \pi, B)$ um fibrado. Dizemos que ξ é um G-**fibrado** se existe uma estrutura de G-espaço em Q e existe um homeomorfismo $f : Q/G \longrightarrow B$ de modo que $(\mathrm{id}_Q, f) : (Q, \pi_Q, Q/G) \longrightarrow \xi$ é um isomorfismo de fibrados (ou seja, $\pi = f \circ \pi_Q$).*

$$\begin{array}{ccc} & Q & \\ {}^{\pi_Q}\swarrow & \circlearrowleft & \searrow^{\pi} \\ Q/G & \xrightarrow{f} & B \end{array} \tag{A.9}$$

*Dizemos que ξ é um G-**fibrado principal** se ξ é um G-fibrado cujo espaço total é um G-espaço principal. Neste caso, também dizemos que G é o **grupo estrutural** do G-fibrado principal ξ.*

Note que todo G-espaço Q determina um G-fibrado $\alpha(Q) = (Q, \pi, Q/G)$. A projeção π_Q de $\alpha(Q)$ também é indicada por π sempre que não houver risco de confusão. Se Q é um G-espaço principal, então o G-fibrado $\alpha(Q)$ determinado por Q é obviamente um G-fibrado principal. Outros exemplos são dados a seguir.

Exemplo A.4. O G-espaço produto $Q = B \times G$, onde a ação de G em Q é $(b, g)h = (b, gh)$, com $b \in B$ e $g, h \in G$, é um G-fibrado principal. De fato, não é difícil verificar que a ação de G em Q é livre. Observe também que $((b, g), (b', g'))$ pertence a Q^* se e somente se $(b', g') = (b, gh)$, para algum $h \in G$. Isso, por sua vez, é equivalente a $b' = b$ e $h = g^{-1}g'$.

Assim, a função de translação $\tau : Q^* \longrightarrow G$ é dada por $\tau((b, g), (b', g')) = g^{-1}g'$, que é contínua. Agora, seja $\alpha(Q) = (Q, \pi, Q/G)$. Neste caso, temos que $Q/G = \{b \times G : b \in B\}$ e a aplicação $f : b \times G \in Q/G \longmapsto b \in B$ é um homeomorfismo. Além disso, temos que

$$f(\pi(b, g)) = f(b \times G) = b = \pi_1(b, g), \text{ para todo } (b, g) \in Q.$$

Portanto, $(B \times G, \pi_1, B)$ é um G-fibrado principal, chamado **G-fibrado principal produto**. ◇

Exemplo A.5. Seja H um subgrupo fechado de um grupo topológico G. Então, H age à direita em G através do produto de G (essa ação é claramente livre). Note que $(x, x') \in G^*$ se e somente se $x' = xg$, para algum $g \in G$ e, assim, $g = x^{-1}x'$. Logo, $\tau(x, x') = x^{-1}x'$ é contínua e G é um H-espaço principal. Portanto, $\alpha(G) = (G, \pi, G/H)$ é um H-fibrado principal, onde $G/H = \{gH : g \in G\}$ e $\pi(g) = gH$. ◇

Exemplo A.6. Este exemplo é uma generalização do anterior. Sejam L_1 e L_2 dois subgrupos fechados de G tais que L_1 é normal em L_2. Então, L_2/L_1 é um grupo topológico com a multiplicação usual de grupo quociente (veja [40, Subseção 2.7.1]). Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \pi \ : \ G/L_1 &\longrightarrow G/L_2 \\ gL_1 &\longmapsto gL_2 \end{aligned}$$

Afirmamos que $(G/L_1, \pi, G/L_2, L_2/L_1)$ é um L_2/L_1-fibrado principal. Com efeito,

$$\begin{aligned} \mu \ : \ G/L_1 \times L_2/L_1 &\longrightarrow G/L_1 \\ (gL_1, hL_1) &\longmapsto ghL_1 \end{aligned} \tag{A.10}$$

é uma ação livre de L_2/L_1 em G/L_1. Além disso, temos que

$$(G/L_1)^* = \{(gL_1, gL_1hL_1) : gL_1 \in G/L_1 \text{ e } hL_1 \in L_2/L_1\}$$

e que $(gL_1, g'L_1) \in (G/L_1)^*$ se e somente se existe $h \in L_2$ tal que $g^{-1}g'L_1 = hL_1$. Logo, está bem definida e é contínua a aplicação

$$\begin{aligned} \tau \ : \ (G/L_1)^* &\longrightarrow L_2/L_1 \\ (gL_1, g'L_1) &\longmapsto \tau(gL_1, g'L_1) = g^{-1}g'L_1. \end{aligned}$$

Por fim, denotando por π_{L_2/L_1} a projeção canônica relativa a ação (A.10) e considerando o homeomorfismo

$$\begin{aligned} f \ : \ (G/L_1)/(L_2/L_1) &\longrightarrow G/L_2 \\ gL_1(L_2/L_1) &\longmapsto gL_2, \end{aligned}$$

temos que $f \circ \pi_{L_2/L_1} = \pi$. $\diamond$

Exemplo A.7. Seja $G = \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ munido da multiplicação. Considere em $\mathbb{S}^n$ a estrutura de $\mathbb{Z}_2$-espaço na qual a ação é dada por $x(\pm 1) = \pm x$. Então, os elementos de $(\mathbb{S}^n)^*$ são da forma $(x, \pm x)$, com $x \in \mathbb{S}^n$, e a função de translação é $\tau(x, \pm x) = \pm 1$, que é contínua. Logo, $\mathbb{S}^n$ é um $\mathbb{Z}_2$-espaço principal, cujo $\mathbb{Z}_2$-fibrado principal é $\alpha(\mathbb{S}^n) = (\mathbb{S}^n, \pi, \mathbb{P}^n)$.

Exemplo A.8. O fibrado dos referenciais de um fibrado vetorial $\xi = (E, \pi, B)$ é um fibrado principal (veja a Seção A.5). $\diamond$

A seguir, mostramos que a fibra de um G-fibrado principal é o grupo estrutural G.

Proposição A.9. *Seja $\xi = (Q, \pi, B)$ um G-fibrado principal. Então, o grupo estrutural G é a fibra de ξ.*

Demonstração: Seja $b \in B$. Se $q \in \pi^{-1}(b)$, então $qg \in \pi^{-1}(b)$, para todo $g \in G$, uma vez que $\pi(qg) = f(\pi_Q(qg)) = f(\pi_Q(q)) = \pi(q)$, para todo $g \in G$, onde $f : Q/G \longrightarrow B$ é a aplicação que faz o diagarama (A.9) comutar. Dessa forma, podemos definir a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} u \ : \ & G \longrightarrow \pi^{-1}(b) \\ & g \longmapsto u(g) = qg \end{aligned} \tag{A.11}$$

Considerando em $\pi^{-1}(b)$ a topologia induzida de Q, resulta que u é contínua. A inversa de u é a aplicação

$$\begin{aligned} v \ : \ & \pi^{-1}(b) \longrightarrow G \\ & q' \longmapsto v(q') = \tau(q, q') \end{aligned}$$

Como ξ é um G-fibrado principal, a função de translação τ de ξ é contínua e, assim, v é contínua. Portanto, u é um homeomorfismo. □

A próxima definição apresenta o conceito de homomorfismo de G-fibrados principais.

Definição A.10. *Sejam $\xi_1 = (Q_1, \pi_1, B_1)$ e $\xi_2 = (Q_2, \pi_2, B_2)$ dois G-fibrados principais. Um* ***homomorfismo de fibrados principais*** *é um homomorfismo de fibrados $(u, f) : \xi_1 \longrightarrow \xi_2$ no qual a aplicação $u : Q_1 \longrightarrow Q_2$ é um G-homomorfismo entre os G-espaços Q_1 e Q_2, isto é, $u(xg) = u(x)g$, para quaisquer $x \in Q_1$ e $g \in G$.*

$$\begin{array}{ccc} Q_1 & \xrightarrow{u} & Q_2 \\ \pi_1 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi_2 \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array} \tag{A.12}$$

Se $B_1 = B_2 = B$ e $f = \mathrm{id_B}$, dizemos que u é um B-***homomorfismo principal***.

Seja $(u, f) : \xi_1 \longrightarrow \xi_2$ um homomorfismo de G-fibrados principais que é inversível enquanto homomorfismo de fibrados. Se (v, g) é o homomorfismo inverso de (u, f), então é imediato verificar que a aplicação $v : Q_2 \longrightarrow Q_1$ é um G-homomorfismo entre os G-espaços Q_2 e Q_1, uma vez que u o é. Portanto, (v, g) também é um homomorfismo de G-fibrados principais. Neste caso, dizemos que (u, f) é um **isomorfismo de fibrados principais**.

Ao longo desta tese, as palavras *homomorfismo* e *isomorfismo*, no contexto de fibrados principais, sempre significarão *homomorfismo* e *isomorfismo de fibrados principais*, respectivamente.

Note que o diagrama (A.12) se reduz ao diagrama (A.8) a menos das aplicações f_1 e f_2 referentes a ξ_1 e ξ_2 como em (A.9).

A.3 Fibrados associados

Nesta seção, apresentamos alguns elementos básicos da teoria dos fibrados associados a fibrados principais. Assim como na seção anterior, G denota um grupo topológico com elemento neutro 1.

Inicialmente, estabeleçamos algumas notações. Sejam $\xi = (Q, \pi, B)$ um G-fibrado principal e F um G-espaço à esquerda. Considere a seguinte ação de G em $Q \times F$:

$$\begin{array}{rcl} (Q \times F) \times G & \longrightarrow & Q \times F \\ ((q,v),g) & \longmapsto & (q,v)g = (qg, g^{-1}v) \end{array} \tag{A.13}$$

Com essa ação, $Q \times F$ se torna um G-espaço à direita. Se $\sim$ é a relação de equivalência em $Q \times F$ dada pela ação (A.13), temos que

$$(q_1, v_1) \sim (q_2, v_2) \text{ se e somente se existe } g \in G \text{ tal que } q_2 = q_1 g \text{ e } v_2 = g^{-1} v_1. \tag{A.14}$$

Denotamos as órbitas $(q,v)G$ da ação (A.13) por $[q,v]$, ou seja, $[q,v] = (q,v)G$, para quaisquer $q \in Q$ e $v \in F$. Denotamos o espaço de todas estas órbitas por $E = (Q \times F)/G$. Denotamos também por $\Pi : Q \times F \longrightarrow E$, $\Pi(q,v) = [q,v]$, a projeção canônica do G-espaço $Q \times F$. Agora, considere a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \pi_E & : & E \longrightarrow B \\ & & [q,v] \longmapsto \pi_E([q,v]) = \pi(q) \end{array}$$

A aplicação π_E é a aplicação que faz o seguinte diagrama ser comutativo:

$$\begin{array}{ccc} Q \times F & \xrightarrow{\pi_1} & Q \\ \Pi \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi \\ E & \xrightarrow{\pi_E} & B \end{array} \tag{A.15}$$

A partir da comutatividade do diagrama (A.15), pode-se demonstrar que π_E é uma aplicação sobrejetora, contínua e aberta.

Tendo estabelecido estas notações, podemos apresentar a definição de fibrado associado a um fibrado principal.

Definição A.11. *Sejam $\xi = (Q, \pi, B)$ um G-fibrado principal e F um G-espaço à esquerda. Com as notações das considerações anteriores, o fibrado $\xi[F] = (E, \pi_E, B)$ é chamado **fibrado associado a ξ com fibra típica** F. O grupo G é chamado **grupo estrutural** de $\xi[F]$.*

Vejamos alguns exemplos de fibrados associados.

Exemplo A.12. Todo fibrado vetorial $\xi = (E, \pi, B)$ pode ser visto como um fibrado associado ao seu fibrado dos referenciais (veja a Seção A.5). ◇

Exemplo A.13. Sejam G um grupo topológico de Hausdorff e $L_1, L_2 \subset G$ dois subgrupos fechados de G tais que L_1 é um subgrupo normal de L_2. Sejam π_1 e π_2 as respectivas projeções canônicas e considere a **fibração equivariante**

$$\begin{aligned} \rho \quad : \quad G/\,L_1 &\longrightarrow G/\,L_2 \\ \pi_1(g) &\longmapsto \rho(\pi_1(g)) = \pi_2(g). \end{aligned}$$

Temos que $\xi[\,L_2/\,L_1] = (G/\,L_1, \rho, G/\,L_2)$ é um fibrado associado ao L_2-fibrado principal $\xi = (G, \pi_2, G/\,L_2)$ com fibra típica $L_2/\,L_1$ (veja [14, Exemplo 2.1]). ◇

No que segue, mostramos que a fibra de um fibrado associado $\xi[F]$ é o espaço F (isto é, F é homeomorfo a todas as fibras $(\pi_E)^{-1}(b)$ de $\xi[F]$).

Proposição A.14. *Sejam $\xi = (Q, \pi, B)$ um G-fibrado principal e $\xi[F] = (E, \pi_E, B)$ um fibrado associado a ξ com fibra típica F. Então, F é a fibra de $\xi[F]$.*

Demonstração: Sejam $b \in B$ e $q_0 \in Q$ tais que $\pi(q_0) = b$. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} f \quad : \quad F &\longrightarrow (\pi_E)^{-1}(b) \\ v &\longmapsto f(v) = [q_0, v] \end{aligned}$$

Temos que f está bem definida, pois

$$\pi_E(f(v)) = \pi_E([q_0, v]) = \pi(q_0) = b, \text{ para todo } v \in F.$$

Note também que f é contínua, uma vez que $f = \Pi \circ \varphi$, onde $\varphi : v \in F \longmapsto (q_0, v) \in Q \times F$. Agora, considere

$$\begin{aligned} k_1 \ &: \ \pi^{-1}(b) \times F \longrightarrow F \\ &\quad (q, v) \longmapsto k_1(q, v) = \tau(q_0, q)v \end{aligned}$$

onde τ é a função de translação do G-espaço principal Q. Observe que, se $(q, v) \in \pi^{-1}(b) \times F$, então $\pi(q) = b$ e $\pi_E([q, v]) = \pi(q) = b$, de forma que $[q, v] \in (\pi_E)^{-1}(b)$. Isso significa que $\Pi(\pi^{-1}(b) \times F) \subset (\pi_E)^{-1}(b)$. Reciprocamente, se $[q, v] \in (\pi_E)^{-1}(b)$, então $\pi_E([q, v]) = b$. Logo, $\pi(q) = b$ e, consequentemente, $(q, v) \in \pi^{-1}(b) \times F$. Assim, $[q, v] = \Pi(q, v) \in \Pi(\pi^{-1}(b) \times F)$ e, portanto, $\Pi(\pi^{-1}(b) \times F) = (\pi_E)^{-1}(b)$. Por outro lado, temos que k_1 é sobrejetora e que, dados $g \in G$, $(q, v) \in \pi^{-1}(b) \times F$ e $h \in G$ tal que $q = q_0 h$,

$$\begin{aligned} k_1(xg, g^{-1}v) &= \tau(q_0, xg)g^{-1}v = \tau(q_0, q_0(hg))g^{-1}v = (hg)g^{-1}v \\ &= hy = \tau(q_0, q_0 h)v = \tau(q_0, q)v = k_1(q, v). \end{aligned} \tag{A.16}$$

Agora, seja

$$\begin{aligned} k \ &: \ (\pi_E)^{-1}(b) \longrightarrow F \\ &\quad [q, v] \longmapsto k([q, v]) = \tau(q_0, q)v \end{aligned}$$

Observe que k está bem definida, pois, se $[q, v] = [q', v']$, temos de (A.16) que $k_1(q, v) = k_1(q', v')$ e, assim,

$$k([q, v]) = \tau(q_0, q)v = k_1(q, v) = k_1(q', v') = \tau(q_0, q')v' = k([q', v']).$$

Além disso, k é contínua, uma vez que k_1 o é[1]. Com efeito, k_1 pode ser vista como a composição das seguintes funções contínuas:

$$\begin{array}{ccccccc} \pi^{-1}(b) \times F & \longrightarrow & q_0 \times \pi^{-1}(b) \times F & \longrightarrow & G \times F & \longrightarrow & F \\ (q, v) & \longmapsto & (q_0, q, v) & \longmapsto & (\tau(q_0, q), v) & \longmapsto & \tau(q_0, q)v \end{array}$$

[1]A continuidade de k segue da continuidade de k_1 a partir do diagrama comutativo em (A.17).

A construção da aplicação k pode ser resumida nos seguintes passos:

$$\begin{array}{ccccccc} Q\times F & & \pi^{-1}(b)\times F & & & \pi^{-1}(b)\times F & \\ \Pi\downarrow & \overset{\text{restringir à fibra}}{\rightarrow} & \Pi\downarrow & \overset{\text{passar ao quociente}}{\rightarrow} & {}^{\Pi}\swarrow & \circlearrowleft & \searrow^{k_1} \\ E & & (\pi_E)^{-1}(b) & & (\pi_E)^{-1}(b) & \overset{k}{\longrightarrow} & F \end{array} \tag{A.17}$$

Tal função k é a inversa de f. De fato, temos que

$$\begin{aligned} f\circ k([q,v]) &= f(\tau(q_0,q)v) = [q_0,\tau(q_0,q)v] = [q\tau(q,q_0),\tau(q_0,q)v] \\ &= [q\tau(q,q_0),\tau(q,q_0)^{-1}v] = [q,v], \end{aligned}$$

para todo $[q,v]\in(\pi_E)^{-1}(b)$, e

$$k\circ f(v) = k([q_0,v]) = \tau(q_0,q_0)v = v,$$

para todo $v\in F$. Portanto, f é um homeomorfismo. □

Observação A.15. *Sejam $\xi=(Q,\pi,B)$ um G-fibrado principal e $\xi[F]=(E,\pi_E,B)$ um fibrado associado a ξ com fibra típica F. Fixe $q_0\in Q$ e $b\in B$ tais que $\pi(q_0)=b$. Se $q=q_0g$, com $g\in G$, então $\pi(q)=\pi(q_0)=b$ e, assim, $\pi_E([q,v])=b$, para todo $v\in F$, ou seja, $[q,v]\in\pi_E^{-1}(b)$, para todo $v\in F$. Logo, dado um elemento $z\in\pi_E^{-1}(b)$, então z pode ser expresso como $z=[q_0,v]$, com $v\in F$, ou $z=[q_0g,v]$, com $g\in G$ e $v\in F$.*

No que segue, apresentamos o conceito de homomorfismo entre fibrados associados. Sejam $\xi_1=(Q_1,\pi_1,B_1)$ e $\xi_2=(Q_2,\pi_2,B_2)$ dois G-fibrados principais, F um G-espaço à esquerda e $(u,f):\xi_1\longrightarrow\xi_2$ um homomorfismo de G-fibrados principais. Este homomorfismo define o G-homomorfismo (entre G-espaços) $u\times\,\mathrm{id}_F: Q_1\times F\longrightarrow Q_2\times F$. Agora, considere os fibrados $\xi_1[F]=(E_1,(\pi_1)_{E_1},B_1)$ e $\xi_2[F]=(E_2,(\pi_2)_{E_2},B_2)$ associados aos fibrados principais ξ_1 e ξ_2, respectivamente, e defina

$$\begin{aligned} u_F \;:\; & E_1\longrightarrow E_2 \\ & [q,v]\longmapsto u_F([q,v]) = [u(q),v] \end{aligned}$$

A aplicação u_F está bem definida e torna comutativo o diagrama a seguir:

$$\begin{array}{ccc} Q_1 \times F & \xrightarrow{u \times \mathrm{id}_F} & Q_2 \times F \\ \Pi_1 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \Pi_2 \\ E_1 & \xrightarrow{u_F} & E_2 \end{array} \tag{A.18}$$

Ela também é um homomorfismo entre os fibrados $\xi_1[F]$ e $\xi_2[F]$, pois

$$f \circ (\pi_1)_{E_1}([q, v]) = f(\pi_1(q)) = \pi_2(u(q)) = (\pi_2)_{E_2}([u(q), v]) = (\pi_2)_{E_2} \circ u_F([q, v]),$$

para todo $[q, v] \in E_1$, ou seja, $f \circ (\pi_1)_{E_1} = (\pi_2)_{E_2} \circ u_F$. Em outras palavras, é comutativo o diagrama a seguir:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{u_F} & E_2 \\ (\pi_1)_{E_1} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow (\pi_2)_{E_2} \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array} \tag{A.19}$$

Definição A.16. *Sejam $\xi_1 = (Q_1, \pi_1, B_1)$ e $\xi_2 = (Q_2, \pi_2, B_2)$ dois G-fibrados principais e F um G-espaço à esquerda. Um* ***homomorfismo de fibrados associados*** *entre $\xi_1[F]$ e $\xi_2[F]$ é um homomorfismo de fibrados da forma $(u_F, f) : \xi_1[F] \longrightarrow \xi_2[F]$, para algum homomorfismo de G-fibrados principais $(u, f) : \xi_1 \longrightarrow \xi_1$. Se existe um homomorfismo de fibrados associados $(v_F, h) : \xi_2[F] \longrightarrow \xi_1[F]$ tal que $v_F = (u_F)^{-1}$ e $h = f^{-1}$, dizemos que (u_F, f) é um* ***isomorfismo de fibrados associados****. Se $B_1 = B_2 = B$ e $f = \mathrm{id_B}$, dizemos que u_F é um* ***B-homomorfismo de fibrados associados****.*

Assim como para fibrados principais, as palavras *homomorfismo* e *isomorfismo*, no contexto de fibrados associados, sempre significarão *homomorfismo* e *isomorfismo de fibrados associados*, respectivamente.

O próximo resultado será útil no estudo de fibrados associados localmente triviais.

Proposição A.17. *Sejam $\xi[F]$ um fibrado associado a um G-fibrado principal ξ com base B e $A \subset B$. Então, os fibrados $\xi[F]|_A$ e $(\xi|_A)[F]$ são A-isomorfos.*

Demonstração: Veja [29, Corolário 6.4 do Capítulo 4]. □

A.4 Fibrados localmente triviais

Na Seção A.1, vimos o conceito geral de fibrado localmente trivial. Nesta seção, nos restringimos aos fibrados principais e associados localmente triviais.

Seja G um grupo topológico com elemento neutro 1.

Definição A.18. *Sejam ξ e η dois G-fibrados principais com o mesmo espaço base B. Dizemos que os G-fibrados principais ξ e η são **localmente isomorfos** se, para cada $b \in B$, existe uma vizinhança U de b em B tal que $\xi|_U$ e $\eta|_U$ são U-isomorfos como G-fibrados principais.*

Em outras palavras, dois G-fibrados principais ξ e η com o mesmo espaço base B são localmente isomorfos se, para cada $b \in B$, existe uma vizinhança U de b em B e existe uma aplicação G-equivariante $u : \pi_\xi^{-1}(U) \longrightarrow \pi_\eta^{-1}(U)$[2] tal que $\pi_\eta \circ u = \pi_\xi$ em $\pi_\xi^{-1}(U)$.

$$\begin{array}{ccc} \pi_\xi^{-1}(U) & \xrightarrow{u} & \pi_\eta^{-1}(U) \\ \pi_\xi \searrow & \circlearrowleft & \swarrow \pi_\eta \\ & U & \end{array} \tag{A.20}$$

Agora, sejam ξ e η dois G-fibrados principais e F um G-espaço à esquerda. Suponha que ξ e η são localmente isomorfos. Então, para um $b \in B$ fixado, existe uma vizinhança U de b em B e existe uma aplicação G-equivariante $u : \pi_\xi^{-1}(U) \longrightarrow \pi_\eta^{-1}(U)$ tal que $\pi_\eta \circ u = \pi_\xi$ em $\pi_\xi^{-1}(U)$. Sejam E_1 e E_2 os espaços totais dos fibrados $(\xi|_U)[F]$ e $(\eta|_U)[F]$, respectivamente. Considere a aplicação $u_F : E_1 \longrightarrow E_2$ dada por $u_F([q, v]) = [u(q), v]$, com $[q, v] \in E_1$. Note que u_F está bem definida e torna comutativo o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi_\xi^{-1}(U) \times F & \xrightarrow{u \times \mathrm{id}_F} & \pi_\eta^{-1}(U) \times F \\ \Pi_\xi \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \Pi_\eta \\ E_1 & \xrightarrow{u_F} & E_2 \end{array} \tag{A.21}$$

A aplicação u_f assim obtida é um U-isomorfismo de fibrados associados. De fato, para

[2] Observe que $\pi_\xi^{-1}(U)$ e $\pi_\eta^{-1}(U)$ devem ser G-invariantes para que u seja G-equivariante.

cada $[q,v] \in E_1$, temos que

$$\begin{aligned}
(\pi_\eta)_{E_1}(u_F([q,v])) &= (\pi_\eta)_{E_1}(u_F(\Pi_\xi(q,v))) \\
&= (\pi_\eta)_{E_1}(\Pi_\eta(u \times \mathrm{id}_F(q,v))) \\
&= (\pi_\eta)_{E_1}([u(q),v]) \\
&= \pi_\eta(u(q)) \\
&= \pi_\xi(q) \\
&= (\pi_\xi)_{E_2}([q,v]).
\end{aligned}$$

Além disso, se v é o U-isomorfismo inverso de u, então repetindo essa argumentação para v, obtém-se um U-homomorfismo de fibrados associados $v_F : E_2 \longrightarrow E_1$ tal que $u_F \circ v_F = \mathrm{id}_{E_2}$ e $v_F \circ u_F = \mathrm{id}_{E_1}$.

Logo, segue da Proposição A.17 que, se ξ e η são dois G-fibrados principais localmente isomorfos, então, para cada $b \in B$, existe uma vizinhança U de b em B tal que os fibrados $\xi[F]|_U = (\xi|_U)[F]$ e $\eta[F]|_U = (\eta|_U)[F]$ são U-isomorfos como fibrados associados.

Essa construção justifica a seguinte definição.

Definição A.19. *Sejam ξ e η dois G-fibrados principais com o mesmo espaço base B e F um G-espaço à esquerda. Dizemos que os fibrados associados $\xi[F]$ e $\eta[F]$ são* ***localmente isomorfos*** *se ξ e η são localmente isomorfos como G-fibrados principais.*

Como caso particular das Definições A.18 e A.19, temos os conceitos de fibrados principais e associados localmente triviais e triviais.

Definição A.20. *Sejam ξ um G-fibrado principal com espaço base B e F um G-espaço à esquerda. Dizemos que*

1. *ξ é* ***localmente trivial*** *se ξ é localmente isomorfo ao G-fibrado principal produto $(B \times G, \pi_1, B)$.*

2. *$\xi[F]$ é* ***localmente trivial*** *se ξ é localmente trivial.*

3. *ξ é* ***trivial*** *se ξ é isomorfo ao G-fibrado principal produto $(B \times G, \pi_1, B)$.*

4. $\xi[F]$ *é* ***trivial*** *se* ξ *é trivial.*

Seja ξ um G-fibrado principal com base B e suponha que ξ é localmente trivial. Então, dado $b \in B$, existe uma vizinhança U de b em B e existe uma aplicação G-equivariante $u : \pi_\xi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ tal que $\pi_1 \circ u = \pi_\xi$ em $\pi_\xi^{-1}(U)$.

$$\begin{array}{ccc} \pi_\xi^{-1}(U) & \xrightarrow{u} & U \times G \\ \pi_\xi \searrow & \circlearrowleft & \swarrow \pi_1 \\ & U & \end{array} \tag{A.22}$$

Sejam $u_1 : \pi_\xi^{-1}(U) \longrightarrow U$ e $u_2 : \pi_\xi^{-1}(U) \longrightarrow G$ tais que $u = (u_1, u_2)$. Do diagrama (A.22), segue que $u_1 = \pi_\xi$. Além disso, dados $q \in \pi_\xi^{-1}(U)$ e $g \in G$, temos que

$$(u_1(qg), u_2(qg)) = u(qg) = u(q)g = (u_1(q), u_2(q))g = (u_1(q), u_2(q)g),$$

de modo que $u_2(qg) = u_2(q)g$, ou seja, u_2 é G-equivariante. Portanto, a aplicação u é da forma $u = (\pi_\xi, u_2)$, com u_2 G-equivariante.

Agora, seja F um G-espaço à esquerda. Pode-se construir para $\xi[F]$ um diagrama semelhante ao diagrama (A.21), da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} \pi_\xi^{-1}(U) \times F & \xrightarrow{u \times \mathrm{id}_F} & (U \times G) \times F \\ \Pi_\xi \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \Pi_\eta \\ E_1 & \xrightarrow{u_F} & U \times F \end{array}$$

Neste caso, E_2 é o fibrado associado ao G-fibrado principal $\xi|_U = (U \times G, \pi_1, U)$. Tal fibrado é U-isomorfo ao fibrado $(U \times F, \pi_1^F, U)$. De fato, denotando por Y o espaço total de $\xi|_U[F]$, temos que $[(w, g), v] \in Y \longmapsto (w, gv) \in U \times F$ é um U-isomorfismo de fibrados associados.

A aplicação $u_F : E_1 \longrightarrow U \times F$ definida por $u_F([q, v]) = (u(q), v)$, com $[q, v] \in E_1$, é um U-isomorfismo de fibrados associados, isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{u_F} & U \times F \\ (\pi_\xi)_{E_1} \searrow & \circlearrowleft & \swarrow \pi_1^F \\ & U & \end{array}$$

é comutativo, onde $\pi_1^F : U \times F \longrightarrow U$ é a projeção na primeira coordenada.

A.5 Fibrados vetoriais

Esta seção dedica-se ao estudo dos fibrados vetoriais. Aqui, apresentamos os conceitos sobre fibrados vetoriais necessários a esta tese. O principal fato a respeito de fibrados vetoriais demonstrado aqui é que todo fibrado vetorial pode ser visto como um fibrado associado ao seu fibrado dos referenciais. Deste modo, toda a teoria sobre fibrados associados desenvolvida nesta tese pode ser aplicada aos fibrados vetoriais. Nos referimos a [24] e [29] para a teoria de fibrados vetoriais.

A.5.1 Conceitos gerais

Começamos com a definição de fibrado vetorial.

Definição A.21. *Um **fibrado vetorial** de dimensão k sobre $\mathbb{R}$ é um fibrado (E, π, B) que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *cada fibra E_b, $b \in B$, é um espaço vetorial de dimensão k sobre $\mathbb{R}$.*
2. *para cada $b \in B$, existe uma vizinhança U de b em B e existe um U-isomorfismo $h : U \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ (chamado **carta local** de (E, π, B) em b) tal que as restrições $h : \{b\} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow E_x$, com $x \in U$, são isomorfismos lineares.*

A menos de isomorfismo, cada fibra E_b de um fibrado vetorial $\xi = (E, \pi, B)$ de dimensão k sobre $\mathbb{R}$ possui uma única estrutura de espaço vetorial real de dimensão k. Tal estrutura é determinada da seguinte forma: dados $b \in B$ e uma carta local $h : U \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ de ξ em b, tomando $e, e' \in E_b$ e $x, x' \in \mathbb{R}^k$ de modo que $v = h(b, x)$ e $v' = h(b, x')$, então

$$e + e' = h(b, x + x') \text{ e } ce = h(b, cx), \text{ com } c \in \mathbb{R}.$$

Não é difícil verificar que estas operações independem da escolha da carta local.

A **seção zero** de um fibrado vetorial $\xi = (E, \pi, B)$ de dimensão k sobre $\mathbb{R}$ é definida como sendo

$$Z = \{e \in E : h^{-1}(e) = (\pi(e), 0), \text{ se } \pi(e) \in U\}.$$

Também não é difícil verificar que a definição de Z independe da carta local escolhida.

A seção zero Z de um fibrado vetorial $\xi = (E, \pi, B)$ de dimensão k sobre $\mathbb{R}$ é a imagem da seção $s : B \longrightarrow E$ definida por $s(b) = 0_b \in E_b$.

Todo fibrado vetorial pode ser visto como um fibrado associado a algum fibrado principal. Mais precisamente, seja $\xi = (E, \pi, B)$ um fibrado vetorial de dimensão k sobre $\mathbb{R}$. Um **referencial** de ξ em $x \in B$ é um isomorfismo linear $\sigma_x : \mathbb{R}^k \longrightarrow E_x$. Denote por BE o conjunto de todos os referenciais de ξ, isto é,

$$BE = \{\sigma_x : \mathbb{R}^k \longrightarrow E_x : \sigma_x \text{ é um isomorfismo linear, com } x \in B\}.$$

O conjunto BE está em bijeção com o conjunto de todas as bases das fibras E_x, com $x \in B$. De fato, se $\{e_1, \ldots, e_k\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^k$ e $\sigma_x : \mathbb{R}^k \longrightarrow E_x$, $x \in B$, é um referencial de E, então $\{\sigma_x(e_1), \ldots, \sigma_x(e_k)\}$ é uma base de E_x. Reciprocamente, se $\{f_1, \ldots, f_k\}$ é uma base de E_x, para algum $x \in B$, então existe um único isomorfismo linear $\sigma : \mathbb{R}^k \longrightarrow E_x$ tal que $\sigma(e_i) = f_i$, para todo $i = 1, \ldots, k$.

Agora, mostremos que BE possui uma estrutura de $Gl(k, \mathbb{R})$-fibrado principal com espaço base B. Seja

$$\begin{aligned} \mu \quad : \quad & BE \times Gl(k, \mathbb{R}) \longrightarrow BE \\ & (\sigma, g) \quad \longmapsto \quad \sigma \circ g. \end{aligned}$$

Temos que μ é uma ação livre à direita de $Gl(k, \mathbb{R})$ em BE. Com efeito, sejam $\sigma \in BE$ e $g \in Gl(k, \mathbb{R})$ tais que $\sigma \circ g = \sigma$. Então, $\sigma(g(v)) = \sigma(v)$, para todo $v \in \mathbb{R}^k$. Como σ é injetora, resulta que $g(v) = v$, para todo $v \in \mathbb{R}^k$ e, portanto, $g = Id_k$.

Agora, sejam $x \in B$ e $\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{R}^k \longrightarrow E_x$ dois referenciais de ξ em x. Dado $j = 1, \ldots, k$, temos que $\sigma_2(e_j) \in E_x$. Então, existe $v_j \in \mathbb{R}^k$ tal que $\sigma_1(v_j) = \sigma_2(e_j)$. Como σ_1 e σ_2 são dois isomorfismos lineares, segue que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é uma base de $\mathbb{R}^k$. Seja $g \in Gl(k, \mathbb{R})$ tal que $g(e_i) = v_i$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Temos que

$$\sigma_1 \circ g(e_i) = \sigma_1(v_i) = \sigma_2(e_i), \text{ para todo } i = 1, \ldots, k,$$

ou seja, $\sigma_2 = \sigma_1 \circ g$. Logo, a $Gl(k, \mathbb{R})$-órbita de um referencial σ de ξ em $x \in B$ é dada por

$$\sigma Gl(k, \mathbb{R}) = \{\alpha : \alpha \text{ é um referencial de } \xi \text{ em } x\}.$$

A aplicação

$$\begin{aligned} \pi_{\text{ref}} \quad : \quad & BE \longrightarrow B \\ & \sigma_x \quad \longmapsto \quad \pi_{\text{ref}}(\sigma_x) = x \end{aligned}$$

é sobrejetora, contínua e, para cada $x \in B$, a fibra $BE_x = \pi_{\text{ref}}^{-1}(x)$ coincide com $\sigma_x Gl(k, \mathbb{R})$, para todo referencial σ_x de ξ em x. Deste fato, segue que $B = BE/\,Gl(k, \mathbb{R})$. Agora, seja

$$BE^* = \{(\sigma, \sigma \circ g) : \sigma \in BE \text{ e } g \in Gl(k, \mathbb{R})\}.$$

Temos que $(\sigma_1, \sigma_2) \in BE^*$ se e somente se existe $g \in Gl(k, \mathbb{R})$ tal que $g = \sigma_1^{-1} \circ \sigma_2$. Logo, a função de transição

$$\begin{aligned} \tau \quad : \quad & BE^* \longrightarrow Gl(k, \mathbb{R}) \\ & (\sigma_1, \sigma_2) \quad \longmapsto \quad \sigma_1^{-1} \circ \sigma_2 \end{aligned}$$

é contínua e, portanto, $\xi_{\text{ref}} = (BE, \pi_{\text{ref}}, B)$ é um $Gl(k, \mathbb{R})$-fibrado principal.

Agora, considerando a ação canônica de $Gl(k, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^k$, obtemos o fibrado associado $\xi_{\text{ref}}[\mathbb{R}^k]$. Denote por $BE \times_{Gl(k,\mathbb{R})} \mathbb{R}^k$ o espaço total de $\xi_{\text{ref}}[\mathbb{R}^k]$. Então, a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi \quad : \quad & BE \times_{Gl(k,\mathbb{R})} \mathbb{R}^k \longrightarrow E \\ & [\sigma, v] \quad \longmapsto \quad \sigma(v) \end{aligned}$$

é um B-isomorfismo de fibrados associados.

Portanto, ξ identifica-se com $\xi_{\text{ref}}[\mathbb{R}^k]$, que é um fibrado associado ao $Gl(k, \mathbb{R})$-fibrado principal ξ_{ref}.

No que segue, apresentamos alguns exemplos de fibrados vetoriais.

Exemplo A.22. Seja B um espaço topológico. Não é difícil ver que o fibrado produto $\xi = (B \times \mathbb{R}^k, \pi_1, B)$ é um fibrado vetorial de dimensão k, chamado **fibrado vetorial trivial** de dimensão k. $\diamond$

Exemplo A.23. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão k e denote por TM o fibrado tangente de M. Considere a projeção natural $\pi : TM \longrightarrow M$ que, a cada $(p, v) \in TM$, associa o ponto $\pi(p, v) = p$. Então, (TM, π, M) é um fibrado vetorial de dimensão k. $\diamond$

A.5.2 Fibrados vetoriais com espaço base compacto

Um fibrado vetorial $\xi = (E, \pi, B)$ cujo espaço base é compacto possui propriedades que são úteis no estudo da dinâmica de fluxos lineares, semifluxos n-dimensionais e sistemas de controle definidos em E. No que segue, elencamos, sem maiores detalhes, as propriedades utilizadas nesta tese. Nos referimos a [3, 24, 38, 42, 44] para os detalhes sobre fibrados vetoriais com base compacta.

Seja $\xi = (E, \pi, B)$ um fibrado vetorial de dimensão k sobre $\mathbb{R}$ cujo espaço base B é compacto. Então, a Definição A.21 é equivalente às seguintes condições:

1. existe uma cobertura aberta *finita* $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ e existem homeomorfismos $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ tais que $\pi_1 \circ \varphi_\alpha = \pi$.

2. as aplicações $\mathrm{L}_{\beta\alpha} : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ dadas por $\varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}(b, v) = (b, \mathrm{L}_{\beta\alpha}(v))$ são lineares, para todo $b \in U_\alpha \cap U_\beta$.

Neste caso, a seção zero $Z \subset E$ é compacta e é caracterizada em termos dos homeomorfismos φ_α da seguinte forma:

$$Z = \{e \in E : \varphi_\alpha(e) = (\pi(e), 0), \text{ se } \pi(e) \in U_\alpha\}.$$

Além disso, o **fibrado esfera** de E,

$$\mathbb{S}(E) = \{e \in E : \|e\| = 1\},$$

também é compacto.

Considere agora um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathbb{R}^k$ (poderia-se considerar, na Definição A.21, um espaço de Hilbert de dimensão k ao invés de $\mathbb{R}^k$). Uma forma bilinear positiva definida (nas fibras) e contínua em E é dada por

$$\langle e, e' \rangle = \sum_{\alpha \in A} d(\pi(e), B \setminus U_\alpha) \langle e, e' \rangle_\alpha,$$

onde

$$\langle e, e' \rangle_\alpha = \begin{cases} \langle x, x' \rangle, \text{ se } e = \varphi_\alpha^{-1}(b, x), e' = \varphi_\alpha^{-1}(b, x') \text{ e } \pi(e) = \pi(e') \in U_\alpha \\ 0, \quad \text{se } \pi(e) = \pi(e') \notin U_\alpha \end{cases}$$

Assim, definindo $\|e\| = \sqrt{\langle e, e\rangle}$, para todo $e \in E$, resulta que os conjuntos compactos

$$\mathrm{B}_\varepsilon = \{e \in E : \|e\| \leqslant \varepsilon\}, \text{ com } \varepsilon > 0, \tag{A.23}$$

formam uma base de vizinhanças para a seção zero $Z \subset E$.

Além disso, como o espaço base B é compacto, pode-se construir uma métrica em E compatível coma topologia inicial de E, ou seja, o espaço total de um fibrado vetorial cujo espaço base é compacto e metrizável (veja [24, Lema B.1.12]).

Bibliografia

[1] Alves, R.W.M., Rocha, V.H.L. e Souza, J.A.: **A characterization of completely regular spaces**. International Journal of Mathematics, **26**, no. 3, 1550032, (2015).

[2] Alves, R.W.M.: **Aspectos de uniformidade em espaços topológicos admissíveis**. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Maringá (2014).

[3] Ayala, V., Colonius, F. e Kliemann, W.: **On topological equivalence of linear flows with applications to bilinear control systems**. Journal of Dynamical and Control Systems, **13**, no. 3, 337-362 (2007).

[4] Bhatia, N.P. e Hajek, O.: **Local semi-dynamical systems**. Lecture Notes in Mathematics, **90**, Springer-Verlag (1969).

[5] Bhatia, N.P. e Szegö, G.P.: **Dynamical systems: stability theory and applications**. Lecture Notes in Mathematics, **35**, Springer-Verlag (1967).

[6] Bhatia, N. P. e Szegö, G.: **Stability Theory of Dynamical Systems**. Springer, Berlin (1970).

[7] Bonomo, W.: **Sistemas dinâmicos discretos: estabilidade, comportamento assintótico e sincronização**. Dissertação de mestrado, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo (2008).

[8] Braga Barros, C.J. e Rocha, V.H.L.: **Attraction and Lyapunov stability for control systems on vector bundles**. Sys. Control Letters, **92**, 28-33 (2016).

[9] Braga Barros, C.J. e San Martin, L.A.B.: **Chain control sets for semigroup actions**. Mat. Appl. Comp., **15**, 257–276 (1996).

[10] Braga Barros, C.J. e San Martin, L.A.B.: **Chain transitive sets for flows on flag bundles**. Forum Math. **19**, 19–60 (2007)

[11] Braga Barros, C.J. e San Martin, L.A.B.: **On the action of semigroups in fiber bundles**. Matemática Contemporânea, **13**, 1-19 (1997).

[12] Braga Barros, C.J. e Souza J.A.: **Attractors and chain recurrence for semigroup actions**. J. of Dyn. Diff. Eq., **22**, 723-740 (2010).

[13] Braga Barros, C.J., Reis, R.A. e Souza, J.A.: **Dynamic Morse decompositions for semigroup of homeomorphisms and control systems**. J. Dyn. Control Syst., **18**, 1–19 (2012)

[14] Braga Barros, C.J. e Souza J.A.: **Finest Morse decompositions for semigroup actions on fiber bundles**. J. of Dyn. Diff. Eq., **22**, 741-760 (2010).

[15] Braga Barros, C.J. e Souza, J.A.: **On the number of maximal chain transitive sets in fiber bundles**. Forum Math., **19**, 19–60 (2013).

[16] Braga Barros, C.J., Souza, J.A. e Rocha, V.H.L.: **Lyapunov stability for semigroup actions**. Semigroup Forum, **88**, 227-249 (2014).

[17] Braga Barros, C.J., Souza, J.A. e Rocha, V.H.L.: **Lyapunov stability on fiber bundles**. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, **46**, no. 2, 181-204 (2015).

[18] Braga Barros, C.J., Souza, J.A. e Rocha, V.H.L.: **Lyapunov stability and attraction under equivariant maps**. Canadian Journal of Mathematics, **67**, no. 6, 1247-1269 (2015).

[19] Braga Barros, C.J., Souza, J.A. e Rocha, V.H.L.: **On attractors and stability for semigroup actions and control systems**. Mathematische Nachrichten, **289**, 1272-1287 (2016).

[20] Bellicanta, L.S.: **Trajetórias periódicas em sistemas de controle afins**. Tese de doutorado, Universidade de São Paulo (2002).

[21] Cazacu, G.: **Stability in dynamical polysystems**. Tese de doutorado, Louisiana State University (2005).

[22] Cavalcanti, M.M. e Cavalcanti, V.N.D.: **Semigrupos lineares e não-lineares e aplicações**. Notas de aula, Universidade Estadual de Maringá (2014).

[23] Cheban, D.N.: **Global attractors of non-autonomous dissipative dynamical systems**. Interdiscip. Math. Sci., vol.1, World Scientific, New Jersey (2004).

[24] Colonius, Fritz e Kliemann, Wolfgang. **The Dynamics of Control**. Birkhäuser, Boston (2000).

[25] Conley, C.: **Isolated invariant sets and the Morse index**. CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **38**, American Mathematical Society, (1978).

[26] Conley, C.: **The gradient structure of a flow: I**. Ergodic Theory Dynam. Systems, **8**, 11-26, (1988).

[27] Doering, C.I. e Lopes, A.O.: **Equações diferenciais ordinárias**. 3 ed., Rio de Janeiro, IMPA, (2008).

[28] Gabriel Filho, L.R.A.: **Comportamento Assintótico de sistemas não lineares discretos**. Dissertação de mestrado, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo (2004).

[29] Husemoller, D.: **Fibre Bundles**. Graduate Texts in Mathematics, vol. 20. Springer, New York, (1975).

[30] Kawan, C.: **Invariance Entropy for Control Systems**. Tese de doutorado, Universität Augsburg.

[31] Kobayashi, S. e Nomizu, K.: **Foundations of Differential Geometry**. Wiley, New York, (1963).

[32] Montgomery, D. e Zippin, L.: **Topological transformation groups**. Interscience Publishers, New York, (1955).

[33] Munkres J. R.: **Topology**. 2 ed., Prentice Hall, New Jersey (2000).

[34] Patrão, M.M.A. e San Martin, L.A.B.: **Morse decompositions of semiflows on fiber bundles**. Discrete and Continuous Dynamical Systems, **17**, 561-587 (2007).

[35] Patrão, M.M.A. e San Martin, L.A.B.: **Semiflows on topological spaces: chain transitivity and semigroups**. J. Dyn. Diff. Eq., **19**, 155-180 (2007).

[36] Pazy, A.: **Semigroups of linear operator and applications to partial differential equations**. Springer-Verlag, New York (1983).

[37] Rocha, V.H.L.: **Estabilidade e ações de semigrupos**. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Maringá (2012).

[38] Salamon, D. e Zehnder, E.: **Flows on vector bundles and hyperbolic sets**. Trans. Amer. Math. Soc., **306**, 623–649 (1988).

[39] San Martin, L.A.B.: **Álgebras de Lie**. Editora da Unicamp, (1999).

[40] San Martin, L.A.B.: **Grupos de Lie**. Editora da Unicamp, (2016).

[41] San Martin, L.A.B. e Tonelli, P.A.: **Semigroup actions on homogeneous spaces**. Semigroup Forum, **50**, 59–88 (1995).

[42] Selgrade, J.: **Isolated invariant sets for flows on vector bundles**. Trans. Am. Math. Soc., **203**, 259–390 (1975).

[43] Semensato, M.T.: **Álgebras de Lie, grupos de Lie e aplicações à teoria de ações de semigrupos**. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Maringá (2010).

[44] Souza, J.A.: **Chain transitivity for semigroup actions on flag bundles**. Annali di Matematica Pura ed Applicata, **193**, no. 3, 817-836 (2014).

[45] Souza, J.A.: **Complete Lyapunov functions of control systems**. Sys. Control Letters, **61**, 322–326 (2012).

[46] Souza, J. A.: **Lebesgue covering lemma on nonmetric spaces**. International Journal of Mathematics, **24**, 1350018, 1-12 (2013).

[47] Souza, J. A.: **On chain recurrence for bitransformation semigroups**. Dynamical Systems, **28**, n. 1, 1-14 (2013).

[48] Souza, J.A.: **On limit behavior of semigroup actions on noncompact spaces**. Proc. Amer. Math. Soc., **140**, 3959-3972 (2012).

[49] Souza, J. A.: **Recurrence theorem for semigroup actions**. Semigroup Forum, **83**, 351-370 (2011).

[50] Souza, J.A.: **Sistemas dinâmicos, sistemas de controle e ações de semigrupos**. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Maringá (2005).

[51] Souza, J.A. e Raminelli, S.A.: **Global attractors for semigroup actions**. J. Math. Anal. Appl., **407**, 316–327 (2013).

[52] Souza, J.A. e Tozatti, H.V.M.: **Prolongational limit sets of control systems**. J. Differential Equations, **254**, 2183–2195 (2013).

[53] Souza, J.A., Tozatti, H.V.M. e Rocha, V.H.L.: **On stability and controllability for semigroup actions**. Topological Methods in Nonlinear Analysis, **48**, 1-30 (2016).

[54] Tozatti, H.V.M.: **Decomposições de Morse para ações de semigrupos**. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Maringá (2010).

[55] Tozatti, H.V.M.: **Dispersividade e recursividade para ações de semigrupos**. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Maringá (2014).

[56] Tsinias, J. e Kalouptsidis, N.: **Prolongations and Stability Analysis via Lyapunov Functions of Dynamical Polysystems**. Mathematical Systems Theory, **20**, 215-233 (1987).

[57] Verdi, M.A.: **Conjuntos de controle sobre variedades flag**. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Maringá (2002).

[58] Willard, S.: **General topology**. Dover Publications, New York (2004).

Índice