



CARLOS ALEXANDRE RIBEIRO MARTINS

NOVO CRITÉRIO DE BUSCA PARA STC EM CANAIS MIMO  
VIA A TEORIA DAS MATRIZES ALEATÓRIAS.

MARINGÁ  
Fevereiro - 2014.





UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

Programa de Pós-Graduação em Matemática

CARLOS ALEXANDRE RIBEIRO MARTINS

**NOVO CRITÉRIO DE BUSCA PARA STC EM CANAIS MIMO  
VIA A TEORIA DAS MATRIZES ALEATÓRIAS.**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

**Orientador: Eduardo Brandani da Silva**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO CARLOS ALEXANDRE RIBEIRO MARTINS, APROVADO PELA BANCA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. EDUARDO BRANDANI DA SILVA.

**Assinatura do Orientador**

---

MARINGÁ  
FEVEREIRO - 2014.

M386n Martins, Carlos Alexandre Ribeiro.  
Novo critério de busca para STC em canais MIMO via teoria das matrizes aleatórias / Carlos Alexandre Ribeiro Martins. -- 2014.  
146 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Brandani da Silva  
Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Maringá. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maringá, PR, 2014.  
Bibliografia: f. 122 – 132.

1. Canal multiantena. 2. Código espaço-temporal. 3. Critério de projeto. I. Silva, Eduardo Brandani da, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDD (22. ed.) 510

# Agradecimentos.

Ao Prof. Dr. Eduardo Brandani da Silva, pelo profissionalismo, paciência e dedicação aplicado neste trabalho.

Aos membros da banca pelas valiosas críticas e sugestões que contribuíram para a melhoria deste trabalho.

Agradeço à minha esposa Marlova Estela Caldato pelo apoio durante o doutorado.

CARLOS ALEXANDRE RIBEIRO MARTINS

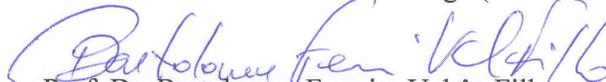
NOVO CRITÉRIO DE BUSCA PARA STC EM CANAIS MIMO VIA A  
TEORIA DAS MATRIZES ALEATÓRIAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:



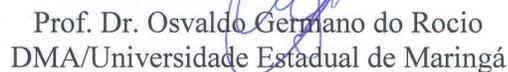
Prof. Dr. Eduardo Brandani da Silva  
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)



Prof. Dr. Bartolomeu Ferreira Uchôa Filho  
Universidade Federal de Santa Catarina



Prof. Dr. Edson Donizete de Carvalho  
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – Ilha Solteira



Prof. Dr. Osvaldo Germano do Rocio  
DMA/Universidade Estadual de Maringá



Prof. Dr. Emerson Vitor Castelani  
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 27 de fevereiro de 2014.

Local de defesa: Auditório do Departamento de Matemática - DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

## Resumo

Neste trabalho obtemos um novo critério de busca para códigos espaço-temporais em canais de comunicação multiantena. Este critério tem como objetivo minimizar a probabilidade de erro par-a-par do decodificador de máxima-verossimilhança, munido da norma espectral de matrizes. Discutimos ainda a necessidade de se definir um ambiente natural para os códigos espaço-temporais. Para isso, usamos a teoria das Matrizes Aleatórias, com a qual deduzimos uma função densidade de probabilidade para o maior autovalor de uma matriz Wishart.

**Palavras-chave:** canal multiantena, código espaço-temporal, critério de projeto.

## Abstract

In this paper we obtain a new search criterium for space-time codes in multi antenna communication channels. This criterion aims to minimize the pairwise error probability of the maximum-likelihood decoder, equipped with the spectral norm of matrices. We also discuss the need to define a natural environment to space-time codes. For this, we use the theory of Random Matrices, from which we deduce a probability density function for the largest eigenvalue of a Wishart matrix.

**Keywords:** multi antenna channel, space-time codes, design criterion.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>v</b>
<b>Resumo</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>Introdução</b>	<b>xiv</b>
<b>1 Preliminares.</b>	<b>1</b>
1.1 Probabilidade em um sistema de comunicação. . . . .	1
1.1.1 Variáveis Aleatórias. . . . .	3
1.1.2 Variável Aleatória Gaussiana. . . . .	10
1.1.3 Variável Aleatória Chi-Quadrada Central. . . . .	11
1.1.4 Variável Aleatória Chi-Quadrada não-central. . . . .	13
1.1.5 Variável Aleatória de Rayleigh. . . . .	15
1.1.6 Variável Aleatória de Rice. . . . .	18
1.1.7 Teorema do Limite Central. . . . .	19
1.2 Álgebra Linear. . . . .	20
1.3 Número de Condicionamento. . . . .	26
1.4 Método das Potências. . . . .	29
1.5 Função Hipergeométrica Confluente. . . . .	31
1.6 Função Gama . . . . .	33
<b>2 Códigos espaço-temporais e sistemas de comunicação multiantena.</b>	<b>38</b>
2.1 Sistemas de comunicação Multiantena. . . . .	38
2.1.1 Canais com Desvanecimento Rayleigh Plano Quase-Estático. . . . .	41
2.1.2 Diversidade. . . . .	47

2.1.3	Canal Coerente. . . . .	49
2.1.4	Capacidade do Canal Multiantena. . . . .	50
2.2	Códigos Espaço-Temporais. . . . .	51
2.2.1	Modelo Matemático de Transmissão em Canais Multiantena. . . . .	53
2.2.2	Análise do Desempenho. . . . .	59
2.2.3	Critério do posto e do determinante. . . . .	62
2.2.4	Critério do traço. . . . .	64
2.3	Espaços de Matrizes. . . . .	66
<b>3</b>	<b>Matrizes Aleatórias.</b>	<b>70</b>
3.1	Matrizes Aleatórias. . . . .	72
3.1.1	Densidade conjunta. . . . .	74
3.1.2	Física Nuclear. . . . .	75
3.1.3	Função Zeta de Riemann. . . . .	76
3.1.4	Teoria dos Grafos. . . . .	77
3.1.5	Fundos de Investimento. . . . .	77
3.2	Densidade dos Autovalores. . . . .	78
3.2.1	Caso Real. . . . .	80
3.2.2	Caso Complexo. . . . .	91
<b>4</b>	<b>Novo Critério de Busca de STC para canais MIMO.</b>	<b>95</b>
4.1	Aproximação para função densidade de probabilidade. . . . .	95
4.2	Critério. . . . .	106
4.3	Performance e comparações. . . . .	116
<b>5</b>	<b>Considerações Finais.</b>	<b>120</b>
5.1	Trabalhos Futuros. . . . .	120
	<b>Bibliografia</b>	<b>122</b>

# Lista de Figuras

1.1	Comportamento típico de sinal recebido. Neste caso a grandeza não obedece a uma lei de formação e deve ser descrita por uma va. . . . .	8
1.2	Gráfico da função gama no intervalo (-3, 5). . . . .	36
2.1	Diferentes caminhos de um canal sem fio. . . . .	42
2.2	Resposta a um pulso extremamente curto em um canal com multipercurso variante no tempo. . . . .	45
2.3	Performance das probabilidades de erro de bit dependendo da SNR para canais AWGN, canal desvanecimento Rice e Rayleigh. . . . .	46
2.4	Diagrama Bloco . . . . .	53
4.1	Gráficos da fdp exata e da função $g(\lambda)$ para $\tilde{W}(3, 13)$ . . . . .	98
4.2	Gráficos da fdp exata, função $g(\lambda)$ , e da translação de $g(\lambda)$ em 10.4 para $\tilde{W}(3, 13)$ . . . . .	99
4.3	gráfico de $f(x)$ para $m = 9$ . . . . .	108
4.4	gráfico das equações (4.2.3) e (4.2.4) . . . . .	110
4.5	gráfico do teorema 4.2.3 . . . . .	115
4.6	gráfico de $PT, PE$ e $PF$ para $n_T = n_R = l = 2$ . . . . .	117
4.7	gráfico de $PE$ e $PT$ para $n_T = n_R = l = 3$ . . . . .	117
4.8	gráficos de $PT, PE$ e $PF$ para $n_T = n_R = l = 2$ , in function of $E_s$ , for $c = 5$ . . . . .	118
4.9	gráficos de $PE, PT$ e $PF$ para $n_T = n_R = l = 2$ , in function of $E_s$ , for $c = 5$ . . . . .	118

# Lista de Tabelas

4.1	Melhor translação e seus pontos de máximo. . . . .	100
4.2	Pontos de máximo e sua diferença. . . . .	101
4.3	Valor numérico do deslocamento. . . . .	103
4.4	Comparação entre dois códigos espaço-temporais. . . . .	119

# Introdução

Recentemente, temos observado uma grande expansão na área de telecomunicações. Devemos tal expansão à crescente necessidade de desenvolver sistemas de comunicação confiáveis e que permitam serviços com altas taxas de transmissão de dados. Isso tem levado ao estudo e desenvolvimento de novas estruturas e métodos matemáticos que forneçam suporte para essas novas tecnologias. Entre estas, temos os sistemas de comunicação sem fio.

A principal característica da comunicação sem fio é a sua capacidade de conectar seus usuários em movimento, mas ao mesmo tempo representa um grande desafio para os projetistas de sistemas de comunicação. O projeto de sistemas de comunicação sem fio, com o propósito de minimizar a probabilidade de erro, é um problema atual e vem sendo motivado cada vez mais pela crescente demanda por altas taxas de transmissão de dados.

Sistemas de comunicação foram definidos no trabalho de Claude Elwood Shannon [Sha48]. O brilhante trabalho de Shannon afirma que, para qualquer canal de comunicação com capacidade de transmissão de dados  $C$ , a transmissão de dados abaixo de  $C$  pode ser feita de forma eficiente através de algum código corretor de erros. Quando dizemos de maneira eficiente, referimos que a probabilidade de erro pode ser tão pequena quanto se deseja. Ou seja, através de alguma técnica é possível alcançar um limite máximo de erro arbitrariamente pequeno. Segundo [Sha48], dado um canal com ruído AWGN com largura de faixa  $w$ , temos que

$$C = w \cdot \log_2(1 + SNR),$$

onde  $C$  é a *capacidade do canal* em bits/segundo e a  $SNR$  é a *relação sinal ruído*. A teoria de Shannon diz sobre existência, isto é, afirma ser possível alcançar a taxa  $C$ , mas não estabelece a maneira de fazer isto. Lembramos ainda que seu trabalho foi elaborado para canais de comunicação com uma única antena transmissora e uma única antena receptora, conhecidos como *SISO – Single Input and Single Output*.

A informação a ser transmitida, através de um sistema de comunicação, sempre estará sujeita a um conjunto de interferências que no processo de modelagem do sistema serão acrescidos no sinal de transmissão. Essas interferências são denominadas *ruído*. Devido à natureza do ruído, sua modelagem é probabilística. Assim, a caracterização estatística do mesmo se realiza através do estabelecimento da função densidade de probabilidade. Essa modelagem é relevante, pois através dela é que o receptor poderá ser projetado de maneira ótima.

Os sistemas de comunicação móvel, em particular os sistemas de telefonia celular, destacaram-se na última década. Novas tecnologias surgem a cada instante e com elas, a possibilidade de implementação de novos serviços. A principal razão para tanto esforço tecnológico deve-se a uma busca por sistemas que possibilitem fornecer serviços de excelente qualidade, a altas taxas de transmissão de dados, em meio a um ambiente de comunicação altamente hostil, que é o canal de comunicação móvel. Em modernos sistemas de comunicação, a demanda por alta velocidade, comunicação confiável junto com o uso eficiente do espectro e potência são critérios básicos para construção de sistemas de comunicação. Entretanto, estas transmissões devem ocorrer em um ambiente hostil. Isto não somente restringe a velocidade da comunicação, mas também a confiabilidade. Sistemas de comunicação *MIMO* – *Multiple Input and Multiple Output* com códigos espaço-temporais fornecem aumento na confiabilidade e na capacidade de um sistema de transmissão de dados sem expansão de banda.

Um problema comum em radiocomunicação é a flutuação no nível do sinal recebido, causada por diversos fatores que afetam a propagação da onda eletromagnética. O fenômeno é conhecido como *desvanecimento*, e entre suas causas mais importantes estão as combinações de sinais recebidos por múltiplos percursos entre o transmissor e o receptor, e também alterações nas características do meio de propagação. Frequentemente, as combinações que resultam no sinal composto na antena receptora não obedecem a uma lei de formação previsível, uma vez que os fatores responsáveis ao longo do enlace dependem de condições de propagação, associados a efeitos meteorológicos e ambientais. Para se efetuar o projeto de instalação de um sistema confiável, é necessário o conhecimento, da forma mais exata possível, dos vários mecanismos que levam a degradação do sinal. Por isso devemos discutir as distribuições estatísticas a partir das quais se consegue estimar a flutuação aleatória do sinal. Os dois principais tipos de desvanecimentos são o desvanecimento de Rayleigh [Skl77] e, caso exista uma componente dominante no sinal, como por exemplo ocorre com visada direta, o desvanecimento segue a variável aleatória de Rice, mais detalhes em [Ric48] e [Yac93]

O texto está organizado em 5 capítulos. No capítulo 1 discutimos os resultados preliminares que serão usados ao longo de todo o texto. Os capítulos 2 e 3 são independentes entre si e serão utilizados no capítulo 4, onde resolvemos o problema de estudo desta tese. Terminamos o texto com as considerações finais no capítulo 5. No capítulo 2 descrevemos os fundamentos da transmissão de dados em canais de comunicação MIMO, descrevemos suas principais características e apresentamos os códigos espaço-temporais, ou STC - space-time codes, técnica utilizada para alcançarmos altas taxas de transmissão de dados, de maneira confiável, em canais de comunicação MIMO. Exibimos ainda os critérios clássicos para busca dos códigos STC. Terminamos o capítulo 2 definindo um ambiente natural para os STC e apresentando o problema de estudo deste trabalho.

No capítulo 3 apresentamos a técnica usada para resolver o problema de estudo deste trabalho, as Matrizes Aleatórias, e exibimos algumas aplicações e funções densidade de probabilidade. No capítulo 4 apresentamos os principais resultados do trabalho, exibimos uma função densidade de probabilidade do maior autovalor de matrizes Wishart e deduzimos um novo critério de busca de STC para canais MIMO.

## Preliminares.

Neste capítulo apresentamos os tópicos de matemática e probabilidade que serão usados no restante do trabalho. Na primeira seção dissertamos sobre os pré-requisitos referentes à teoria das probabilidades. Nas seções posteriores dissertamos sobre os pré-requisitos matemáticos, de álgebra linear, número de condicionamento, função hipergeométrica confluyente e função gama.

### **1.1 Probabilidade em um sistema de comunicação.**

O problema da transmissão de informação em canais de comunicação MIMO é enfrentado com o uso de técnicas que minimizam a probabilidade de erro do canal. O principal objetivo desta seção é analisar as técnicas usadas para minimizar a probabilidade de erro em um canal de comunicação MIMO.

Diversos fatores que envolvem a propagação de uma onda eletromagnética entre o transmissor e o receptor não obedecem a leis determinísticas, uma vez que possuem influência de diferentes fenômenos aleatórios do ambiente. Por exemplo, algumas características da atmosfera como grau de umidade, pressão e temperatura influenciam na propagação da onda eletromagnética, afetando o índice de refração do ambiente, as trajetórias percorridas pela onda eletromagnética, o grau de atenuação, etc.. São necessárias aplicações da teoria de probabilidade para se fazer uma previsão

dos valores na recepção da onda eletromagnética e que se aproximem o máximo possível dos resultados experimentais.

No tocante aos problemas esperados na recepção em um sistema de comunicação, a onda eletromagnética que chega ao receptor é constituída por várias componentes. Essas surgem devido a reflexões em terrenos irregulares, obstruções existentes no ambiente, variações na constante dielétrica do meio, múltiplas trajetórias na atmosfera e outras causas. Como a propagação das ondas eletromagnéticas está associada com diversas propriedades do meio que não seguem leis determinísticas, é necessária a análise da propagação como um fenômeno aleatório. Na maioria dos casos, é possível descrever satisfatoriamente as variações dos parâmetros de propagação no tempo e no espaço conhecendo as correspondentes variáveis aleatórias envolvidas. Portanto, necessitamos do conhecimento das propriedades das distribuições de probabilidade mais usadas nas descrições dos fenômenos que influem na propagação.

Devemos levar em conta as funções que descrevem os fenômenos no tempo, no espaço e na frequência, pois somente os valores médios obtidos não são suficientes para caracterizar o desempenho do sistema. O comportamento dinâmico dos sinais desejados e de interferências são fatores importantes para determinar a confiabilidade do sistema. Como são fenômenos aleatórios, devemos conhecer o tratamento estatístico mais conveniente em cada caso, veja [Yac02] e [BD91].

Na primeira subseção definimos as variáveis aleatórias contínuas, tópico necessário para as subseções posteriores. As demais subseções apresentam variáveis aleatórias gaussianas, chi-quadrada central, chi-quadrada não-central, Rayleigh e Rice. Neste texto apresentamos enfoque voltado para as aplicações dos capítulos 3 e 5. O assunto probabilidade é amplamente divulgado em boas obras de referência e em trabalhos de formato mais aplicado como [PP02]. A principal referência deste capítulo é o livro [Pro00].

Como veremos no capítulo 4, a teoria da probabilidade é um pré-requisito fundamental para se estudar matrizes aleatórias. Entretanto, o objetivo certamente não é falar de todos os aspectos da

teoria das probabilidades, e iremos focar nos conceitos de probabilidade e operações que são úteis ao longo do texto.

### 1.1.1 Variáveis Aleatórias.

Medições efetuadas na antena de um receptor mostram que o nível instantâneo do sinal sofre variações contínuas, que dependem de condições e causas imprevisíveis. Não é possível, portanto, estabelecer para ela uma lei de formação que permita conhecer com exatidão seus valores em todos os instantes. Podemos apenas prever que este sinal em determinado momento terá o seu valor provável entre dois limites conhecidos. Uma grandeza com comportamento deste tipo é representada por uma variável aleatória, indicando que seus valores devem ser previstos por uma lei de probabilidades.

**Definição 1.1.1.** Dado um experimento com espaço amostral  $S$  e elementos  $s \in S$ , definimos uma função  $X(s)$  com domínio em  $S$  e imagem no conjunto dos números reais. A função  $X(s)$  é chamada *variável aleatória*.

Existem variáveis aleatórias discretas e contínuas, mas estamos interessados somente no caso contínuo.

**Definição 1.1.2.** Seja  $X$  uma variável aleatória e considere o evento  $\{X \leq x\} = \{s \in S \mid X(s) \leq x\}$  com  $x \in (-\infty, \infty)$ . Escrevemos a probabilidade deste evento ocorrer como  $P(X \leq x)$  e a denotamos por  $F(x)$ , ou seja,

$$F(x) = P(X \leq x), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

A função  $F(x)$  é chamada **função distribuição de probabilidade**, também chamada *função cumulativa de probabilidade*, da variável aleatória  $X$ .

Como  $F(x)$  é uma probabilidade, temos que  $0 \leq F(x) \leq 1$ . Sabemos que  $F(x)$  é uma curva suave, logo derivável em todo seu domínio, além disso é não-decrescente.

**Definição 1.1.3.** A derivada de  $F(x)$ , denotada como  $p(x)$ , é chamada **função densidade de probabilidade** da variável aleatória  $X$ .

Assim, temos que

$$\frac{dF(X)}{dx} = p(x), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (1.1.1)$$

ou equivalentemente,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t)dt. \quad (1.1.2)$$

Como  $F(x)$  é não-decrescente então  $p(x) \geq 0$ , e uma outra propriedade da função densidade de probabilidade é dada por

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1. \quad (1.1.3)$$

**Observação 1.1.4.** Adotamos o termo **função cumulativa de probabilidade** para usarmos livremente, de agora em diante as abreviações fcp e fdp para as funções cumulativa e densidade de probabilidade, respectivamente. Além disso, abreviamos o termos variável aleatória simplesmente por va.

Frequentemente, precisamos determinar a probabilidade de alguma va  $X$  pertencer ao intervalo  $(x_1, x_2)$ , onde  $x_1 < x_2$ . O evento  $\{X \leq x_2\}$  pode ser descrito como união de dois eventos mutuamente exclusivos,  $\{X \leq x_1\}$  e  $\{x_1 < X \leq x_2\}$ . Portanto a probabilidade do evento  $\{X \leq x_2\}$  pode ser expresso pela soma das probabilidades dos eventos mutuamente exclusivos. Assim

$$\begin{aligned} P(X \leq x_2) &= P(X \leq x_1) + P(x_1 < X \leq x_2) \\ F(x_2) &= F(x_1) + P(x_1 < X \leq x_2), \end{aligned}$$

ou ainda

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p(t)dt. \quad (1.1.4)$$

Em outras palavras, a probabilidade do evento  $\{x_1 < X \leq x_2\}$  ocorrer é simplesmente a área abaixo da fdp que descreve o comportamento da va  $X$  no intervalo  $x_1 < X \leq x_2$ .

Quando trabalhamos com experimentos combinados ou ensaios repetidos de um experimento simples, encontramos múltiplas va envolvidas. Sendo assim, existem mais que uma fdp e fcp. Múltiplas va são basicamente funções definidas em algum espaço amostral dos experimentos combinados.

Sejam  $X_1$  e  $X_2$  va, a fcp para duas va é definida como

$$F(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} p(t_1, t_2)dt_1dt_2,$$

onde  $p(x_1, x_2)$  é a fdp conjunta, que pode ser expressa por

$$p(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F(x_1, x_2).$$

Uma importante propriedade de tais funções é:

$$F(\infty, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(t_1, t_2)dt_1dt_2 = 1.$$

Suponha que a va  $X_1$  seja proveniente do evento  $E_1$  e a va  $X_2$  do evento  $E_2$ . Se o evento  $E_1$  é independente do evento  $E_2$ . Assim, a probabilidade conjunta é o produto das probabilidades correspondentes para cada va. Portanto a va bidimensional é independente estatisticamente se, e somente se,

$$F(x_1, x_2) = F(x_1)F(x_2)$$

que também pode ser expressa por

$$p(x_1, x_2) = p(x_1)p(x_2). \quad (1.1.5)$$

A teoria de va múltiplas pode ser facilmente generalizada para mais que duas va.

Um problema que frequentemente surge em aplicações práticas de probabilidade é o seguinte: Dada uma va  $X$ , caracterizada por sua fdp  $p_X(x)$ , determinar a fdp  $P_Y(y)$ , da nova va  $Y = g(X)$ , em função de  $P_X(x)$ . Quando a aplicação  $g$  é injetora, é relativamente simples determinar  $p_Y(y)$ . Contudo, quando  $g$  não é injetora, devemos ter mais cuidado para obter  $p_Y(y)$ . Vejamos dois exemplos.

**Exemplo 1.1.5.** Dada a va  $X$ , considere a va  $Y$  definida como

$$Y = aX + b,$$

com  $a > 0$  e  $b \in \mathbb{R}$ . Sejam  $F_X(x)$  e  $F_Y(y)$  as fcp para  $X$  e  $Y$  respectivamente. Pela definição 1.1.2 e equação (1.1.2), temos

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \leq y) &= P(aX + b \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} p_X(t) dt = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

derivando (1.1.6) com respeito a  $y$ , obtemos a relação.

$$p_Y(y) = \frac{1}{a} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right). \quad (1.1.7)$$

Portanto, as equações (1.1.6) e (1.1.7) descrevem a fcp e fdp da va  $Y$  em função das fcp e fdp da va  $X$ . Observe a injetividade da função que relaciona  $X$  com  $Y$ .

**Exemplo 1.1.6.** Dada a va  $X$ , considere a va  $Y$  definida como

$$Y = aX^2 + b,$$

com  $a > 0$  e  $b \in \mathbb{R}$ . Ao contrário do exemplo anterior, agora a função entre as variáveis  $X$  e  $Y$  não é injetora. Assim

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(aX^2 + b \leq y) \\ &= P\left(X^2 \leq \frac{y-b}{a}\right) = P\left(-\sqrt{\frac{y-b}{a}} \leq X \leq \sqrt{\frac{y-b}{a}}\right), \end{aligned}$$

por (1.1.4)

$$F_Y(y) = F_X\left(\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right),$$

como no exemplo anterior obtemos a relação.

$$p_Y(y) = p_X\left(\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right) \cdot \frac{1}{2a\sqrt{\frac{y-b}{a}}} + p_X\left(-\sqrt{\frac{y-b}{a}}\right) \cdot \frac{1}{2a\sqrt{\frac{y-b}{a}}}.$$

O caso particular com  $a = 1$  e  $b = 0$  é de extrema importância. Nesse caso  $Y = X^2$  e a fdp satisfaz

$$p_Y(y) = p_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + p_X(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}. \quad (1.1.8)$$

É possível verificar a existência de um valor médio, determinado a partir da soma de todos os valores em um intervalo definido, dividido pelo número de valores utilizados. Por se tratar de uma variável sem lei de formação conhecida, o valor médio, em uma primeira abordagem, dá uma informação muito útil do comportamento esperado para a variável.

**Definição 1.1.7.** O *valor médio*, *valor esperado* ou *primeiro momento* de uma va é dado por

$$m_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx$$

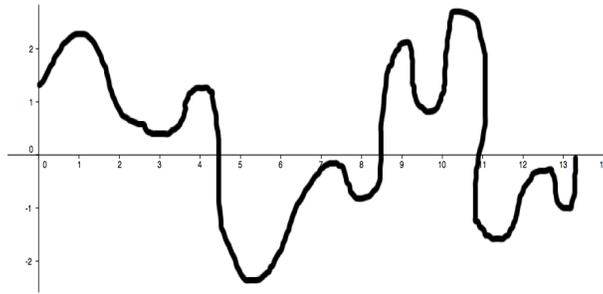


Figura 1.1: Comportamento típico de sinal recebido. Neste caso a grandeza não obedece a uma lei de formação e deve ser descrita por uma va.

É possível que os valores positivos e negativos de uma grandeza aleatória sejam equiprováveis, o que conduziria a um valor médio igual a zero. Na figura 1.1 ilustramos uma situação em que este fenômeno pode ocorrer para uma variável sem lei de formação. Por outro lado, existem valores de grandezas físicas que não estão associados ao seu valor médio. Por esta razão, há necessidade de se introduzir o conceito de o valor médio quadrático ou segundo momento.

**Definição 1.1.8.** O valor *médio quadrático* ou segundo momento de uma va  $X$  é definido por

$$m_2 = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p(x) dx.$$

**Definição 1.1.9.** A *variância* de uma va  $X$  representa o valor médio quadrático dos desvios em relação à média aritmética da va, e indica quão longe os valores da va se encontram de  $m_X$ , sendo definida como

$$\sigma_X^2 = E((x - m_x)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \cdot p(x) dx \geq 0.$$

Expandindo o integrando acima, a variância é igual a sua média quadrática menos o quadrado de sua média aritmética,

$$\sigma_X^2 = m_2 - m_X^2. \tag{1.1.9}$$

Seguem algumas propriedades da média e variância.

**Lema 1.1.10.** Sejam  $X, Y$  va,  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , temos que

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

$$Var(aX + b) = a^2Var(X).$$

Se  $X$  e  $Y$  são independentes, temos ainda que

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Agora, vamos exibir algumas funções que são úteis quando estudamos alguns tópicos de probabilidade, as *funções erro*, *erro complementar* e *cauda*, denotadas por  $erf(x)$ ,  $erfc(x)$  e  $Q(x)$ .

**Definição 1.1.11.** Seja  $x \geq 0$ , as **função erro** e **função erro complementar** são definidas respectivamente por

$$erf(x) = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-t^2) dt,$$

$$erfc(x) = \int_x^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-t^2) dt = 1 - erf(x).$$

Note que tais funções são complementares, pois  $erf(x) + erfc(x) = 1$ . Geometricamente, tais funções estão relacionadas com a área da função  $2 \exp(-x^2)/\sqrt{\pi}$ . Para finalizar, apresentamos a função cauda.

**Definição 1.1.12.** A **função cauda** é definida como

$$Q(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Analicamente as funções  $erfc(x)$  e  $Q(x)$  estão relacionadas pela expressão

$$Q(x) = \frac{1}{2} \cdot erfc\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right), \tag{1.1.10}$$

### 1.1.2 Variável Aleatória Gaussiana.

Uma fdp tem comportamento Gaussiano quando obedece uma lei de formação do tipo

$$p(x) = e^{-q(x)},$$

onde  $q(x)$  é um polinômio do segundo grau.

**Definição 1.1.13.** Uma variável aleatória  $X$ , que possui valor médio  $m_X$  e variância  $\sigma_X^2$  com fdp descrita por

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\left(\frac{x - m_X}{\sigma_X}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\right), \quad \text{com } -\infty \leq x \leq \infty, \quad (1.1.11)$$

é denominada *variável aleatória gaussiana*. Neste caso denotamos  $X \sim N(m_X, \sigma_X^2)$ .

O gráfico da fdp gaussiana é simétrico em relação a reta  $x = m_X$ , atinge seu valor máximo no ponto  $x = m_X$  e ainda  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ .

**Definição 1.1.14.** O caso mais simples da distribuição gaussiana ocorre quando  $X \sim N(0, 1)$ , neste caso a fdp é dada por

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

ela recebe nome especial *gaussiana normal*.

Entretanto, toda fdp gaussiana pode ser normalizada, ou seja, toda função do tipo (1.1.11) pode ser escrita na forma da definição 1.1.14. De fato, se  $X \sim N(m_X, \sigma_X^2)$ , defina a nova variável  $Y = (X - m_X)/\sigma_X$ , e usando o lema 1.1.10, provamos que  $m_Y = 0$  e  $\sigma_Y^2 = 1$ , pois  $E(Y) = -m_X/\sigma_X + 1/\sigma_X E(X) = 0$  e  $Var(Y) = Var(X)/\sigma_X^2 = 1$ . Portanto  $Y \sim N(0, 1)$ .

Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ , com  $a \leq b$ . Usando as propriedades de variáveis aleatórias definidas em (1.1.2) e (1.1.4) no caso

particular em que a va  $X \sim N(m_X, \sigma_X^2)$ , obtemos três propriedades da fcp da variável gaussiana.

$$P(a \leq X) = \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\left(\frac{t-m_X}{\sigma_X}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\right) dt \quad (1.1.12)$$

$$P(X \leq b) = \int_{-\infty}^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\left(\frac{t-m_X}{\sigma_X}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\right) dt \quad (1.1.13)$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\left(\frac{t-m_X}{\sigma_X}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\right) dt \quad (1.1.14)$$

A função cauda descreve a probabilidade da va  $X$ , onde  $X \sim N(0, 1)$ , pertencer ao intervalo  $[a, \infty)$ . Nesse caso,

$$P(a \leq X) = \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = Q(a) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

e, usando o famoso *limitante de Chernoff*,

$$\operatorname{erfc}(x) \leq \exp(-x^2), \quad (1.1.15)$$

obtemos uma importante relação

$$Q(a) = P(a \leq X) \leq \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right). \quad (1.1.16)$$

Analogamente, se  $X \sim N(m_X, \sigma_X^2)$ , então

$$P(X \geq a) = Q\left(\frac{a-m_X}{\sigma_X}\right).$$

Usando o limitante de Chernoff, temos

$$P(X \geq a) \leq \frac{1}{2} \exp\left(-\left(\frac{a-m_X}{\sigma_X}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\right). \quad (1.1.17)$$

### 1.1.3 Variável Aleatória Chi-Quadrada Central.

Começamos a subseção com a seguinte definição.

**Definição 1.1.15.** Se  $X$  é uma variável aleatória gaussiana, então  $Y = X^2$  é uma va *chi-quadrada*.

Existem dois tipos de va chi-quadrada. A primeira é chamada “*va chi-quadrada central*”, obtida quando  $X \sim N(0, \sigma_X^2)$ . A segunda é chamada “*va chi-quadrada não central*”, obtida quando  $X$  não possui média nula.

Nesta subseção consideramos a va chi-quadrada central. Suponha que  $X \sim N(0, \sigma_X^2)$  e defina  $Y = X^2$ . Pela equação (1.1.8), definida no exemplo 1.1.6, temos que

$$p_X(\pm\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{(\pm\sqrt{y})^2}{\sigma_X^2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{y}{\sigma_X^2} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

concluimos que a fdp da va chi-quadrada central é dada pela expressão

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{y}{\sigma_X^2} \cdot \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{y}{\sigma_X^2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma_X} \exp\left(-\frac{y}{\sigma_X^2} \cdot \frac{1}{2}\right),$$

para  $y \geq 0$ . Usando (1.1.2), obtemos que a fcp da va chi-quadrada central tem a seguinte expressão

$$F_Y(y) = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{t}{2\sigma_X^2}\right) dt, \quad y \geq 0$$

que não pode ser expressa em forma fechada. Tanto a variância da va chi-quadrada quanto sua média serão exibidas mais adiante.

Quando  $Y = X^2$ , dizemos que a distribuição possui um grau de liberdade. O caso mais interessante é quando a va chi-quadrada possui mais que um grau de liberdade. Suponha que as va  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  são independentes e do tipo  $N(0, \sigma^2)$ . Defina a va

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i^2. \tag{1.1.18}$$

Dizemos que a va chi-quadrada em (1.1.18) tem  $n$  graus de liberdade. Sua fdp é dada por

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sigma^n 2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right), \quad y \geq 0 \quad (1.1.19)$$

onde  $\Gamma(p)$  é chamada função gama e será definida na seção 1.5.

A fcp da va chi-quadrada com  $n$  graus de liberdade é dada por

$$F_Y(y) = \int_0^y \frac{1}{\sigma^n 2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} t^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{t}{2\sigma^2}\right) dt.$$

Os parâmetros que definem a va chi-quadrada central são dados por:

$$E(Y) = n\sigma^2, \quad E(Y^2) = 2n\sigma^4 + n^2\sigma^4, \quad \sigma_Y^2 = 2n\sigma^4$$

**Observação 1.1.16.** Suponha que a va complexa  $Y = X_1 + iX_2$ <sup>1</sup>, possui como componentes reais e imaginárias va gaussianas, independentes entre si, regidas por  $\sim N(0, \sigma^2)$ . Nesse caso a va  $|Y|^2 = X_1^2 + X_2^2$ , segue distribuição chi-quadrada central com dois graus de liberdade. Usando (1.1.19), a va  $|Y|^2$  possui a fdp

$$p_{|Y|^2}(y) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right).$$

#### 1.1.4 Variável Aleatória Chi-Quadrada não-central.

Nesta seção consideramos o estudo da va **chi-quadrada não-central**. Como mencionado na seção anterior, tais va são obtidas de uma va Gaussiana com média não nula. Suponha que  $X \sim N(m_X, \sigma_X^2)$  e defina  $Y = X^2$ , logo

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{(\sqrt{y} - m_X)^2}{\sigma_X^2} \cdot \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{(-\sqrt{y} - m_X)^2}{\sigma_X^2} \cdot \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{(y + m_X^2)}{\sigma_X^2} \cdot \frac{1}{2}\right) \cosh\left(\frac{\sqrt{y}m_X}{\sigma_X^2}\right), y \geq 0. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>onde  $j = \sqrt{-1}$ , como é usual em textos de engenharia elétrica.

Dessa forma, obtemos a fdp da va chi-quadrada não-central com um grau de liberdade. Para generalizar o resultado acima, suponha que as va  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  são independentes e do tipo  $N(m_{X_i}, \sigma^2)$ , com média  $m_{X_i}$  (não necessariamente iguais) e mesma variância  $\sigma^2$ . Defina a va

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i^2. \quad (1.1.20)$$

Dizemos que a va chi-quadrada não-central definida em (1.1.20) tem  $n$  graus de liberdade. Sua fdp é dada por

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{y}{s^2}\right)^{\frac{n-2}{4}} \exp\left(-\frac{s^2+y}{2\sigma^2}\right) I_{(\frac{n}{2}-1)}\left(\frac{s\sqrt{y}}{\sigma^2}\right), \quad y \geq 0$$

onde, por definição

$$s^2 = \sum_{i=1}^n m_{X_i}^2$$

é a soma dos quadrados das médias das va gaussianas e é chamado de coeficiente de não-centralidade, e onde  $I_\alpha(x)$  é a  $\alpha$ -ésima função de Bessel modificada do primeiro tipo.

Os parâmetros que definem a va desta seção são dados por:

$$E(Y) = n\sigma^2 + s^2, \quad E(Y^2) = 2n\sigma^4 + 4\sigma^2 s^2 + (n\sigma^2 + s^2)^2, \quad \sigma_Y^2 = 2n\sigma^4 + 4\sigma^2 s^2. \quad (1.1.21)$$

**Observação 1.1.17.** Suponha que a va gaussiana complexa  $Y = X_1 + iX_2$ , possui como componentes reais e imaginárias va gaussianas, independentes entre si, tal que  $X_1 \sim N(m_1, \sigma^2)$  e  $X_2 \sim N(m_2, \sigma^2)$ . Nesse caso a va  $|Y|^2 = X_1^2 + X_2^2$  segue distribuição chi-quadrada não-central

com dois graus de liberdade. Sua fdp e seus parâmetros são dados por

$$\begin{aligned}
 p_Y(y) &= \exp\left(-\frac{s^2 + y}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{s\sqrt{y}}{\sigma^2}\right), \quad y \geq 0 \\
 s^2 &= m_1^2 + m_2^2 \\
 E(Y) &= 2\sigma^2 + s^2 \\
 \sigma_Y^2 &= 4\sigma^4 + 4\sigma^2 s^2.
 \end{aligned}$$

### 1.1.5 Variável Aleatória de Rayleigh.

O desvanecimento obtido quando o meio de propagação de uma onda eletromagnética não possui linha de visada direta entre o receptor e o transmissor é modelado pelas va do tipo Rayleigh. Nesta subseção apresentamos, com detalhes, tal va.

Podemos admitir que as ondas que chegam ao receptor tenham fase uniformemente distribuídas entre 0 e  $2\pi$  rad. Consideramos a amplitude e a fase independentes entre si. Conseqüentemente, em certo instante, as componentes estarão em fase, produzindo uma grande amplitude, significando interferência construtiva entre os diversos sinais. Segundo [Yac93], o desvanecimento pode ser determinado considerando um sinal transmitido  $S$ , na frequência  $\omega_0$ , e com amplitude  $\alpha$  como

$$S = \alpha e^{i\omega_0 t}.$$

Se  $\alpha_i$  e  $\theta_i$  são a amplitude e a fase das componentes recebidas, respectivamente o sinal resultante  $S_r$  é dado por

$$S_r = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{i(\omega_0 t + \theta_i)} = r e^{i(\omega_0 t + \theta)}, \quad (1.1.22)$$

onde

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e^{i\theta_i} = r e^{i\theta},$$

que pode ser escrito como

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \cos \theta_i + i \sum_{i=1}^n \alpha_i \sin \theta_i = r e^{i\theta} = x + iy,$$

com

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta; \quad r^2 = x^2 + y^2. \quad (1.1.23)$$

Em (1.1.22), a va  $\theta_i$  possui distribuição uniforme entre 0 e  $2\pi$ . Usando o teorema do limite central, que será definido na subseção 1.1.7, podemos supor que as va  $\alpha_i$  e  $\theta_i$  tendem a serem va gaussianas  $X$  e  $Y$ , com média zero e variância  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma_Z^2$ , cuja fdp é dada por:

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z} \exp\left(-\left(\frac{z}{\sigma_Z}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\right),$$

onde  $Z$  pode representar  $X$  ou  $Y$ . Como as va  $X$  e  $Y$  são independentes e com mesma variância, por (1.1.5) sua fdp  $p(x, y)$  tem a seguinte expressão

$$p(x, y) = p(x)p(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_Z^2} \exp\left(-\left(\frac{x^2 + y^2}{\sigma_Z^2}\right) \cdot \frac{1}{2}\right).$$

Fazendo uma mudança de variáveis, podemos escrever tal probabilidade em função de  $r$  e  $\theta$  por

$$p(r, \theta) = \frac{r}{2\pi\sigma_Z^2} \exp\left(-\left(\frac{r}{\sigma_Z}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\right).$$

Tomando a média de  $p(r, \theta)$  em relação a  $\theta$ , temos

$$\begin{aligned} p(r) &= \int_0^{2\pi} p(r, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r}{2\pi\sigma_Z^2} \exp\left(-\left(\frac{r}{\sigma_Z}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\right) d\theta \\ &= \left(\frac{r}{2\pi\sigma_Z^2} \exp\left(-\left(\frac{r}{\sigma_Z}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\right)\right) \cdot 2\pi = \frac{r}{\sigma_Z^2} \exp\left(-\left(\frac{r}{\sigma_Z}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

**Definição 1.1.18.** A função densidade de probabilidade de Rayleigh é dada pela equação

$$p(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma_Z^2} \exp\left(-\left(\frac{r}{\sigma_Z}\right)^2 \frac{1}{2}\right) & r \geq 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases}.$$

Observe que o valor de  $\sigma_Z$  que aparece na definição 1.1.18 é a variância das va  $X$  e  $Y$ , mas não é a variância da va de Rayleigh  $R$ . Esta nova va depende de  $X$  e  $Y$ , e é dada pela expressão  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ , veja (1.1.23).

Usando as definições 1.1.7, 1.1.8 e 1.1.9 obtemos que sua média e variância são dados por

$$E(R) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_Z, \quad \sigma_R^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma_Z^2.$$

A abordagem descrita acima não é comum em textos de engenharia. A maioria dos textos apresentam a abordagem que segue. As duas se complementam.

As va do tipo Rayleigh surgem no estudo de va complexas  $Y$  cujas componentes reais e imaginárias são va gaussianas com mesma variância e média nula. Nesse caso o valor absoluto da va  $Y$  é uma va do tipo Rayleigh.

Para ser mais preciso, suponha que a va complexa  $Y = X_1 + jX_2$  é tal que  $X_1, X_2 \sim N(0, \sigma^2)$ . Pela observação 1.1.16, temos que  $|Y|^2 = X_1^2 + X_2^2$  segue distribuição chi-quadrada central com dois graus de liberdade cuja fdp é dada por

$$p_{|Y|^2}(y) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right), \quad y \geq 0.$$

A partir da va chi-quadrada  $|Y|^2$ , definimos a va de Rayleigh como

$$R = \sqrt{|Y|^2} = \sqrt{X_1^2 + X_2^2},$$

com uma mudança de variável na fdp acima, obtemos que a fdp de Rayleigh é

$$p_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad r \geq 0.$$

### 1.1.6 Variável Aleatória de Rice.

A distribuição de Rice foi proposta no fim da década de 40 e é usada quando existir um sinal forte de linha de visada adicionado a sinais mais fracos, veja [Ric48]. A componente de amplitude dominante corresponde ao trajeto em visada direta entre o transmissor e o receptor. Os demais sinais são originados em múltiplos percursos, causados por reflexões e difrações em obstáculos na região. Este tipo de comportamento ocorre em telefonia móvel e transmissões via satélite [Ste99]. O sinal recebido é a soma fasorial das ondas espalhadas com o sinal direto [Par00]. A envoltória do sinal recebido é determinada conforme as características de amplitude e fase das diferentes componentes [Yac93].

Neste caso, o sinal recebido  $S_r$  pode ser representado como

$$S_r = r e^{j(\omega_0 t + \theta)} + a e^{j\omega_0 t},$$

onde o primeiro termo corresponde às componentes de onda espalhada e a segunda parcela corresponde à onda dominante, suposta com amplitude  $a$ . Esta expressão pode ser reescrita introduzindo uma amplitude complexa. Para isto, combinamos componente real e imaginária, frequentemente referida com o componente em fase e componente em quadratura. A forma final é

$$S_r = ((x + a) + jy) e^{j\omega_0 t},$$

que para ser equivalente à descrição do caso Rayleigh, os parâmetros  $x$  e  $y$  são dados pelas relações

$$r^2 = (x + a)^2 + y^2; \quad x + a = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta.$$

**Definição 1.1.19.** A função densidade de probabilidade do tipo

$$p(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2 + a^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{ar}{\sigma^2}\right) & , r \geq 0 \\ 0 & , r < 0 \end{cases} . \quad (1.1.24)$$

é chamada **função de densidade de probabilidade de Rice**. Temos que  $I_0$  é a função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem zero, veja mais em [And98].

Quando  $a = 0$ , a equação (1.1.24) coincide com a fdp de Rayleigh descrita na definição 1.1.18. Quando o parâmetro  $a/\sigma$  tende ao infinito, a va de Rice tende a comportar-se como uma va gaussiana.

### 1.1.7 Teorema do Limite Central.

O teorema do limite central estabelece que a fcp da soma de va independentes tem comportamento gaussiano quando a quantidade de variáveis cresce. Existem várias versões deste teorema. Sejam  $X_1, \dots, X_n$  va reais com mesmo tipo de distribuição, não necessariamente gaussianas, com média finita  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  para algum  $\sigma \geq 0$ . Defina  $S_n := X_1 + \dots + X_n$ , então  $S_n$  tem média  $n\mu$  e variância  $n\sigma^2$ . Considere a soma normalizada

$$Z_n := \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma},$$

temos que  $Z_n$  tem média zero e variância 1. O teorema do limite central trata do comportamento assintótico de sua distribuição.

**Teorema 1.1.20.** (Teorema do Limite Central) Sejam  $X_1, \dots, X_n \equiv X$  va reais independentes de média finita  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  para algum  $\sigma > 0$  e considere  $Z_n$  como acima. Então, quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $Z_n$  converge para distribuição gaussiana padrão  $N(0, 1)$ .

## 1.2 Álgebra Linear.

Nesta seção apresentamos os resultados de Álgebra Linear úteis para este trabalho. Usamos como referência os livros [HJ91], [GL96] e [Mey01]. O estudo de Matrizes é um ramo de pesquisa de interesse básico e tem aplicações em Ciências da Computação, Teoria de Sistemas de Controle, Física Matemática, Economia, Estatística e Engenharia. Além disso, também é necessária em outras áreas da Matemática Pura.

**Definição 1.2.1.** O conjunto das matrizes com entradas nos números complexos com  $m$ -linhas e  $n$ -colunas será denotado por  $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ . Analogamente obtemos o conjunto  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ .

Matrizes serão denotadas por letras maiúsculas,  $A, B, C, \dots$ . A seguir apresentamos algumas definições básicas.

**Definição 1.2.2.** Seja  $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ , onde  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . A matriz  $A^T = (a_{j,i}) \in M_n(\mathbb{R})$  é *matriz transposta* de  $A$ . A matriz  $A^* = (\overline{a_{j,i}}) \in M_n(\mathbb{C})$  é *matriz transposta conjugada* de  $A$ .

**Definição 1.2.3.** Seja  $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ , logo:

- i) Se  $A = A^T$ , dizemos que  $A$  é *matriz simétrica*;
- ii) Se  $A = -A^T$ , dizemos que  $A$  é *matriz anti-simétrica*;
- iii) Se  $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$ , dizemos que  $A$  é *matriz ortogonal*.

Seja  $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$ , logo:

- iv) Se  $A = A^*$ , dizemos que  $A$  é *matriz hermitiana*;
- v) Se  $A = -A^*$ , dizemos que  $A$  é *matriz anti-hermitiana*;
- vi) Se  $A \cdot A^* = A^* \cdot A$ , dizemos que  $A$  é *matriz normal*;
- vii) Se  $A \cdot A^* = A^* \cdot A = I$ , dizemos que  $A$  é *matriz unitária*.

**Definição 1.2.4.** Seja  $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$ . O **traço da matriz**  $A$  é denotado por  $tr(A)$  e definido como sendo a soma dos elementos da diagonal principal, ou seja,

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Embora multiplicação de matrizes não seja comutativa, a função traço é um dos poucos casos onde a ordem das matrizes pode ser mudada. Isto, quando os produtos  $AB$  e  $BA$  estejam definidos. Dadas  $A_{m \times n}$ ,  $B_{n \times m}$ , então os produtos  $AB$ ,  $BA$  estão definidos e vale

$$tr(AB) = tr(BA).$$

**Definição 1.2.5.** O **posto** de uma matriz é o número máximo de linhas ou colunas desta matriz que são linearmente independente.

**Definição 1.2.6.** Dada matriz  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ , escalar  $\lambda \in \mathbb{K}$  e vetor  $v$  não-nulo satisfazendo a equação  $Av = \lambda v$ . Dizemos que  $\lambda$  e  $v$  são, respectivamente, **autovalor** e **autovetor** de  $A$ . O conjunto de todos autovalores de  $A$  é chamado espectro de  $A$  e será denotado  $\lambda(A)$ .

**Proposição 1.2.7.** [GL96], Dadas  $A_{m \times n}$  e  $B_{n \times m}$  com  $m \geq n$ , então  $\lambda(AB) = \lambda(BA) \cup \{0, \dots, 0\}$ , onde a quantidade de zeros no conjunto é  $m - n$ .

**Teorema 1.2.8.**  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  é normal se, e somente se, existe matriz unitária  $Q \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  tal que  $QAQ^* = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . Assim  $A$  é normal se, e somente se, é unitariamente diagonalizável.

**Proposição 1.2.9.** São válidas as seguintes propriedades:

- i) Se  $A \in M_n(\mathbb{C})$  é anti-hermitiana, então seus autovalores são números complexos imaginários puros;
- ii) Se  $A \in M_n(\mathbb{C})$  é hermitiana, então seus autovalores são números reais;
- iii) Se  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , os autovalores de  $AA^*$  e  $A^*A$  são números reais não-negativos;

- iv) Se  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , então  $\lambda(A) = \lambda(A^T)$ ;
- v) Se  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , então  $\lambda \in \lambda(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \lambda(A)$ .

**Teorema 1.2.10. (Decomposição em Valor Singular.)** Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  de posto  $r$ , existem matrizes unitárias  $U_{m \times m}$ ,  $V_{n \times n}$  e matriz diagonal  $D_{r \times r} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$  tal que

$$A = U \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} V^* \quad \text{com } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0. \quad (1.2.1)$$

Os  $\sigma_i$  são chamados de valores singulares não-nulos de  $A$  e são únicos. Quando  $r < p = \min\{m, n\}$ , dizemos que  $A$  tem  $(p - r)$  valores singulares nulos.

**Definição 1.2.11.** A fatoração em (1.2.1) é chamada *decomposição em valor singular* de  $A$ .

**Corolário 1.2.12.** Se  $A_n$  é Hermitiana, então os valores singulares  $\sigma_1(A), \dots, \sigma_n(A)$  são valores absolutos  $|\lambda_1(A)|, \dots, |\lambda_n(A)|$ . Tal relação também ocorre quando  $A$  é normal.

**Definição 1.2.13.** Uma *norma* para um espaço vetorial  $(V, \mathbb{K})$  é uma função  $\|\cdot\|$  de  $V$  em  $\mathbb{R}$  tal que

- i)  $\|v\| \geq 0$  para qualquer  $v \in V$ ;
- ii)  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ ;
- iii)  $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$  para qualquer escalar  $\alpha \in \mathbb{K}$  e qualquer  $v \in V$ ;
- iv)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ .

**Definição 1.2.14.** Um espaço vetorial normado é um par  $(V, \|\cdot\|)$ , onde  $\|\cdot\|$  é uma norma para o espaço vetorial  $V$ .

**Definição 1.2.15.** Seja  $x \in \mathbb{C}^n$ , a norma  $p$  é definida como

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando  $p = 2$ , temos a *norma Euclidiana*.

Como  $M_{m \times n}(\mathbb{C})$  é um espaço vetorial de dimensão  $m \cdot n$ , podemos usar norma de vetores em matrizes. Por exemplo, podemos identificar a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

com o vetor  $(2, -1, -4, -2) \in \mathbb{C}^4$ . A norma Euclidiana em  $\mathbb{C}^4$  pode ser usada para escrever  $\|A\| = ((2)^2 + (-1)^2 + (-4)^2 + (-2)^2)^{\frac{1}{2}} = 5$ .

**Definição 1.2.16.** A *norma de Frobenius* de  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  é definida pela equação

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \text{tr}(AA^*) = \sum_{i=1}^m \|A_{i*}\|_2^2 = \sum_{j=1}^n \|A_{*j}\|_2^2,$$

onde  $A_{i*}$  denota a  $i$ -ésima linha e  $A_{*j}$  é a  $j$ -ésima coluna da matriz  $A$ .

A norma de Frobenius para matrizes é útil para alguns problemas, mas não é muito adequada para algumas aplicações. Dessa forma, precisamos explorar outras alternativas. Mas antes de desenvolvermos diferentes normas de matrizes, primeiro formulamos uma definição geral.

Multiplicação de matrizes distingue matrizes de espaço de vetores, por exemplo, o produto de duas matrizes é uma matriz, mas sabemos pouco sobre produtos de vetores (exceto para  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^4$ ). Então uma propriedade extra que relaciona  $\|AB\|$  com  $\|A\|$  e  $\|B\|$  é necessária na definição 1.2.13. A norma de Frobenius sugere a natureza dessa propriedade extra. Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  e  $x \in \mathbb{C}^n$ , então  $Ax \in \mathbb{C}^m$ , temos que

$$\begin{aligned} \|Ax\|_2^2 &= \sum_{i=1}^m |(Ax)_i|^2 \\ &= \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j \right|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^m \|A_{i*}\|_2^2 \cdot \|x\|_2^2 \\ &= \|A\|_F^2 \cdot \|x\|_2^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$\| Ax \|_2 \leq \| A \|_F \cdot \| x \|_2 . \quad (1.2.2)$$

A expressão (1.2.2) diz que a norma de matriz de Frobenius e norma de vetor Euclidiana são compatíveis. Tal compatibilidade implica que dadas  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ ,  $B \in M_{n \times p}(\mathbb{C})$ , então

$$\begin{aligned} \| AB \|_F^2 &= \sum_{k=1}^p \| (AB)_{*k} \|_2^2 = \sum_{k=1}^p \left\| \sum_{i=1}^m (AB)_{ik} \right\|_2^2 \\ &= \sum_{k=1}^p \left| \sum_{i=1}^m A_{i*} B_{*k} \right|^2 \leq \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^m | A_{i*} B_{*k} |^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^m \| A_{i*} \|_2^2 \cdot \| B_{*k} \|_2^2 \\ &= \sum_{k=1}^p \| A_{i*} \|_2^2 \cdot \sum_{i=1}^m \| B_{*k} \|_2^2 = \| A \|_F^2 \cdot \| B \|_F^2 . \end{aligned}$$

Isto sugere uma propriedade submultiplicativa  $\| AB \| \leq \| A \| \cdot \| B \|$  na definição 1.2.13. Uma outra maneira de definir normas em matrizes é usar norma de vetores, relacionando matrizes com operadores.

**Definição 1.2.17.** Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ ,  $v \in \mathbb{C}^n$  e  $p \geq 1$ , a ***p*-norma de matrizes** é dada por

$$\| A \|_p = \max_{\|v\|_p=1} \| Av \|_p .$$

Nesse caso vale que  $\| Av \|_p \leq \| A \| \cdot \| x \|_p$ .

Podemos facilmente provar que  $\| AB \|_p \leq \| A \|_p \cdot \| B \|_p$  para  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  e  $B \in M_{n \times q}(\mathbb{C})$ .

Agora podemos definir norma de matrizes.

**Definição 1.2.18.** Uma ***norma de matrizes*** é uma função  $\| \cdot \|$  de  $M_{m \times n}(\mathbb{C})$  em  $\mathbb{R}$  que satisfaz:

- i)  $\| A \| \geq 0$  ,  $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ ;
- ii)  $\| A \| = 0 \Leftrightarrow A = 0$  ,  $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ ;
- iii)  $\| \alpha A \| = |\alpha| \| A \|$  ,  $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ ;
- iv)  $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$  ,  $\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ ;

v)  $\| AB \| \leq \| A \| \cdot \| B \|$ , desde que o produto  $AB$  esteja definido.

Agora, discutimos uma maneira de obter normas para matrizes.

**Teorema 1.2.19.** Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ , a norma de matriz induzida pela norma de vetores Euclidiana é

$$\| A \|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \| Ax \|_2 = \sigma_1(A) = \sqrt{\lambda_1(AA^*)},$$

onde  $\sigma_1(A)$  é o maior valor singular de  $A$  e  $\lambda_1(AA^*)$  é o maior autovalor de  $AA^*$ .

**Definição 1.2.20.** A norma de matrizes induzida pela norma Euclidiana chama-se **norma espectral**.

**Corolário 1.2.21.** Se  $A \in M_{m \times m}(\mathbb{C})$ , então  $\| A \|_2 = \| A^* \|_2$ .

**Teorema 1.2.22.** Se  $A \in M_{m \times m}(\mathbb{C})$ , então

$$\| A^{-1} \|_2 = \frac{1}{\sigma_n(A)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n(AA^*)}}.$$

**Teorema 1.2.23.** Se  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  tem  $\text{posto}(A) = r$ , então:

- i) autovalores não-nulos de  $AA^*$  e  $A^*A$  são iguais e positivos;
- ii) valores singulares, não-nulos, de  $A$  são raízes quadradas dos autovalores não-nulos de  $AA^*$ ;
- iii) Se  $A$  é normal com autovalores não-nulos  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ , então os valores singulares de  $A$  são  $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_r|\}$ .

Sabemos que todas as normas em um espaço vetorial de dimensão finita são equivalentes. Assim, em um espaço vetorial de dimensão finita, todas as normas geram a mesma topologia. Para problemas topológicos, como convergência, a escolha da norma tem o mesmo efeito. Por outro lado, em aplicações de problemas particulares, pode ser mais conveniente usar uma norma ou outra.

A análise de algoritmos de matrizes frequentemente usa norma de matrizes. Por exemplo, a qualidade de um sistema linear pode ser ruim se a matriz dos coeficientes for próxima de ser não-inversível. Para medir a noção de ser próxima de não-inversível precisamos de uma medida no espaço de matrizes. Este assunto será tratado na seção 1.3.

### 1.3 Número de Condicionamento.

Usando Álgebra Linear, sabemos que dois aspectos são importantes na resolução de um sistema linear: existência de solução e um método eficiente para resolver o sistema. Entretanto, para alguns sistemas lineares, devemos ainda considerar se a solução é muito sensível a pequenas mudanças nos coeficientes do sistema linear.

Dessa forma, estudamos sistemas lineares **Mal Condicionados**. Estes sistemas estão relacionados com o fato da matriz de os coeficientes estar próxima de ser não-inversível. Para analisar a influência que perturbações dos dados de entrada podem provocar na solução do sistema linear, definimos número de condicionamento. A principal referência desta seção é [Fra06].

Algumas limitações para a resolução de sistemas de equações lineares grandes são a memória do computador e a velocidade dos cálculos. A velocidade dos cálculos, contudo, não é somente a medida de tempo, ela também depende de estabilidade numérica e da natureza do método e taxa de convergência.

Essas questões não são novas. Em 1946, von Neumann e seus colaboradores estudaram matematicamente estabilidade numérica para  $n = 100$ . Hoje, esse número é aproximadamente  $n = 50.000$ , que embora muito melhor, é insuficiente. O trabalho de von Neumann e seus colaboradores Bargmann, Goldstine and Montgomery pode ser encontrado em [Neu63].

**Definição 1.3.1.** O **número de condicionamento** de uma matriz quadrada  $A$  é definido como

$$\text{cond}(A) = \| A^{-1} \| \| A \|,$$

onde  $\| \cdot \|$  é alguma norma de matriz.

O sistema linear  $Ax = b$ , onde  $A$  é inversível, possui como solução o vetor  $x = A^{-1}b$ . Vamos impor perturbações no vetor  $b$  e a matriz  $A$ , em seguida vamos analisar o efeito de tais perturbações na solução do sistema. Seja  $x$  a solução do sistema  $Ax = b$ .

### Primeiro Caso.

Considere perturbação no vetor  $b$  na forma  $b + \delta b$ . Dessa forma, a solução  $x$  também será perturbada por  $x + \delta x$ , que deve satisfazer a equação

$$A(x + \delta x) = b + \delta b,$$

obtemos que

$$x + \delta x = A^{-1}(b + \delta b).$$

Desejamos encontrar uma maneira de relacionar  $\delta x$  com  $\delta b$ , ou seja, sabendo o tamanho da perturbação em  $\delta b$ , como estimar a perturbação em  $\delta x$ ? De fato, como  $Ax = b$  então

$$A\delta x = \delta b,$$

como  $A$  é inversível, segue que

$$\delta x = A^{-1}\delta b.$$

Aplicando uma norma induzida  $\| \cdot \|$  em ambos os lados da igualdade anterior, temos que

$$\| \delta x \| \leq \| A^{-1} \| \cdot \| \delta b \| .$$

Por hipótese  $Ax = b$ , logo

$$\| b \| = \| Ax \| \leq \| A \| \cdot \| x \| .$$

Multiplicando as duas inequações anteriores,

$$\| \delta x \| \cdot \| b \| \leq \| A^{-1} \| \cdot \| \delta b \| \cdot \| A \| \cdot \| x \| .$$

Assim

$$\frac{\| \delta x \|}{\| x \|} \leq \| A^{-1} \| \cdot \| A \| \cdot \frac{\| \delta b \|}{\| b \|} .$$

Portanto, a perturbação relativa em  $x$  está relacionada com a perturbação relativa em  $b$  pela constante multiplicativa  $\| A^{-1} \| \cdot \| A \|$ .

### Observação 1.3.2.

- $cond(A) = \| A^{-1} \| \| A \| \geq \| A^{-1} A \| = \| I \| = 1$ ;
- $\frac{\| \delta b \|}{\| b \|}$  pode ser interpretada como uma medida do erro relativo em  $b$ . O erro em  $\frac{\| \delta x \|}{\| x \|}$  dependerá do valor do número de condição que é maior ou igual a 1;
- Se  $cond(A)$  é grande, então pequenas perturbações relativas em  $b$  podem produzir grandes perturbações relativas em  $x$ , e o problema de resolver  $Ax = b$  é mal condicionado.

### Segundo Caso.

Consideremos agora uma perturbação da matriz  $A$  da forma  $A + \delta A$ , de tal forma que  $(A + \delta A)^{-1}$  exista. Dessa forma, a solução  $x$  também será perturbada, isto é, temos que

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b,$$

assim

$$(x + \delta x) = (A + \delta A)^{-1} b.$$

Por hipótese  $x = A^{-1} b$ , com alguns cálculos concluímos que

$$\frac{\| \delta x \|}{\| (x + \delta x) \|} \leq cond(A) \cdot \frac{\| \delta A \|}{\| A \|} .$$

Novamente, se  $\text{cond}(A)$  é grande, então pequenas perturbações em  $A$  produzirão grandes perturbações relativas em  $x$ , e o problema de resolver  $Ax = b$  é mal condicionado. Por outro lado, se  $\text{cond}(A)$  é perto de 1, dizemos que o sistema é bem condicionado, ou seja, pequenas mudanças em  $A$  ou em  $b$  causam pequenas mudanças na solução  $x$ .

**Proposição 1.3.3.** Supondo que o número de condicionamento esteja munido da norma espectral, temos que:

- $\text{cond}(A) = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_n(A)}$ ;
- Se  $A$  é normal, então  $\text{cond}(A) = \left| \frac{\lambda_1(A)}{\lambda_n(A)} \right|$ ;
- Se  $A$  é unitária, então  $\text{cond}(A) = 1$ ;
- Se  $A$  não é inversível, então  $\text{cond}(A) = \infty$ .

Outro tipo de número de condicionamento foi estudado por [Dem88]. Seja  $\|X\|_F$  a norma de Frobenius de  $X$ , assim o número de condicionamento é definido por  $\|X\|_F \cdot \|X^{-1}\|_2$ .

## 1.4 Método das Potências.

Autovalores e autovetores estão presentes em diferentes ramos da matemática, sendo assim, é necessário apresentar métodos numéricos para a determinação dos autovalores e seus correspondentes autovetores. Entretanto, em muitas aplicações não é necessário obter todos os autovalores, é comum buscar apenas o maior autovalor e seus correspondentes autovetores.

A menos que a matriz seja de ordem baixa, ou tenha muitos elementos iguais a zero, a expansão direta do determinante para obter o polinômio característico é ineficiente. Encontrar o determinante de uma matriz é computacionalmente difícil, e encontrar boas aproximações para as raízes de  $p(\lambda)$  também é difícil.

Dessa forma, apresentamos um método numérico para encontrar o maior autovalor de uma matriz, sem calcular o polinômio característico. Usamos como referência o texto [Fra06]. Existem outros métodos numéricos para tal busca, e mais detalhes sobre estas técnicas podem ser encontrados em [Wil65]. O método é útil, na prática, desde que se tenha interesse em determinar apenas autovalores, de módulo grande, e que estes estejam bem separados, em módulo, dos demais. O *método das potências* baseia-se no seguinte teorema.

**Teorema 1.4.1.** Seja  $A$  matriz  $n \times n$  e sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  seus autovalores com respectivos autovetores  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Suponha que os autovetores formam conjunto linearmente independente e que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Para qualquer vetor inicial  $y_0$ , a sequência de recorrência  $y_k$  dada por

$$y_k = Ay_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

converge para um autovetor associado a  $\lambda_1$ . Além disso,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(y_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lambda_1,$$

onde o índice  $r$  indica a  $r$ -ésima componente do respectivo vetor.

**Demonstração:** Como o conjunto  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  é linearmente independente, existem constantes não-nulas  $c_i$  tais que  $y_0 = \sum_{i=1}^n c_i u_i$ . Pela equação de recorrência, segue que

$$\begin{aligned} y_k &= Ay_{k-1} = AAy_{k-2} = A^2y_{k-2} = \dots = A^k y_0 \\ &= A^k \sum_{i=1}^n c_i u_i = \sum_{i=1}^n c_i A^k u_i = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^k u_i \\ &= \lambda_1^k c_1 u_1 + \lambda_1^k \sum_{i=2}^n c_i \cdot \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} \cdot u_i \\ &= \lambda_1^k \left( c_1 u_1 + \sum_{i=2}^n c_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k u_i \right). \end{aligned}$$

Por hipótese  $|\lambda_i/\lambda_1| < 1$ , assim  $(\lambda_i/\lambda_1)^k$  tende a zero quando  $k \rightarrow \infty$ , logo  $\left(\sum_{i=2}^n c_i (\lambda_i/\lambda_1)^k u_i\right) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Portanto, o vetor  $y_k$  converge para um múltiplo do autovetor associado ao autovalor  $\lambda_1$ .

Para finalizar, considere a componente  $r$  dos vetores  $y_{k+1}$  e  $y_k$ , assim

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(y_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(A^{k+1}y_0)_r}{(A^k y_0)_r} = \frac{(\lambda_1^{k+1} c_1 u_1)_r}{(\lambda_1^k c_1 u_1)_r} = \lambda_1.$$

□

A convergência do método depende não só das constantes  $c_i$ , que aparecem na demonstração do teorema 1.4.1, mas principalmente das frações  $\lambda_i/\lambda_1$ . Quanto menores forem essas frações, mais rápida é a convergência do método. Ressaltamos que o método da potência diverge quando  $A$  possui autovalores diferentes com mesmo valor absoluto. Por exemplo, matrizes reais que possuem autovalor complexo  $\lambda_1$  também possuem como autovalor  $\bar{\lambda}_1$ , neste caso  $|\lambda_1| = |\bar{\lambda}_1|$  e o método diverge.

## 1.5 Função Hipergeométrica Confluente.

Nesta seção usamos como referência os livros [WG89] e [OLBC10]. A equação diferencial hipergeométrica é dada por

$$z(1-z) \frac{d^2 y}{dz^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z] \frac{dy}{dz} - \alpha \beta y = 0. \quad (1.5.1)$$

A equação (1.5.1) possui singularidades regulares em 0, 1 e  $\infty$ . Através de uma mudança de variáveis obtemos a equação

$$z \left(1 - \frac{z}{b}\right) \frac{d^2 y}{dz^2} + \left[\gamma - (\alpha + \beta + 1) \frac{z}{b}\right] \frac{dy}{dz} - \alpha \frac{\beta}{b} y = 0. \quad (1.5.2)$$

As singulares desta nova equação são  $0, b$  e  $\infty$ , todas regulares. Agora, seja  $b = \beta \rightarrow \infty$ , obtemos equação hipergeométrica confluyente, também conhecida como **equação de Kummer**

$$z \frac{d^2 y}{dz^2} + [\gamma - z] \frac{dy}{dz} - \alpha y = 0. \quad (1.5.3)$$

Esta nova equação possui somente duas singularidades, regular em  $0$  e irregular em  $\infty$ , a singularidade irregular é proveniente das singularidades regulares em  $\infty$  e  $b$  da equação (1.5.2). Uma das soluções da equação (1.5.3) é dada por

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n z^n}{(\gamma)_n n!} = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots, \quad (1.5.4)$$

onde  $(\alpha)_n$  é chamado **símbolo de Pochhammer**, que será definido a seguir. A série (1.5.4) converge para qualquer número complexo  $z$ . Além disso, não existe quando  $\gamma$  é inteiro não-positivo.

**Definição 1.5.1.** A equação (1.5.4) é chamada de **função hipergeométrica confluyente** (séries), também chamada **função de Kummer**. A função hipergeométrica confluyente também pode ser denotada  $M(a, b, z)$ .

**Definição 1.5.2.** Uma **equação diferencial hipergeométrica confluyente** é a degeneração de uma equação diferencial hipergeométrica.

A degeneração descrita na definição anterior ocorre quando duas, das três, singularidades regulares da equação diferencial hipergeométrica fundem-se em uma singularidade irregular.

**Definição 1.5.3.** **Função hipergeométrica confluyente** é uma solução de uma equação diferencial hipergeométrica confluyente.

Funções hipergeométricas confluyentes incluem como caso especial a função de Bessel, funções de Hermite e funções de Laguerre. O termo “*confluyente*” significa a fusão dos pontos singulares de equações diferenciais, a palavra *confluere* em latim significa “fundir juntos”.

Observe que se  $\alpha = \gamma$  na equação (1.5.4), então  ${}_1F_1(\alpha, \alpha, z) = \exp(z)$ . Duas identidades muito usadas são dadas por

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = \exp(z) {}_1F_1(\gamma - \alpha, \gamma, -z).$$

$${}_1F_1(\gamma - \alpha, \gamma, z) = \exp(z) {}_1F_1(\alpha, \gamma, -z).$$

**Definição 1.5.4.** Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , definimos o *símbolo de Pochhammer* como

$$\begin{cases} (\alpha)_0 = 1 \\ (\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + n - 1) \end{cases}.$$

O símbolo de Pochhammer pode ser generalizado usando a função gama, que será definida na próxima seção, por

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Sob certas condições, a soma infinita apresentada na equação (1.5.4) torna-se um polinômio. Suponha que  $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}$  com  $\alpha \leq \gamma$ . Pela definição 1.5.4 obtemos que

$${}_1F_1(-\alpha, -b, z) = \sum_{n=0}^{\alpha} \frac{(-\alpha)_n z^n}{(-b)_n n!}, \quad (1.5.5)$$

pois  $(-\alpha)_{\alpha+1} = (-\alpha)_{\alpha+2} = (-\alpha)_{\alpha+3} = \cdots = 0$ .

## 1.6 Função Gama

Nesta seção definimos e estudamos algumas propriedades da **função gama**, a qual veremos ser uma extensão natural da função fatorial  $\Gamma(n) = (n - 1)!$ . Tal função desempenha um papel importante em Matemática e Estatística. Ela também é conhecida como *função fatorial generalizada* e *função de Euler*. Ao longo do texto,  $z$  denota uma variável complexa,  $x$  uma variável real e  $n$  uma variável inteira não-negativa.

Nesta seção usamos os trabalhos [Dav59], [Neto93] e [OLBC10]. O trabalho [Dav59] fala

sobre a história da função gama e ganhou o Prêmio Chauvenet<sup>2</sup> no ano de 1963. Tal função foi primeiramente definida por Euler nas cartas enviadas para Christian Goldbach em 13/10/1729 e 08/01/1730. Segue a definição de Euler.

**Definição 1.6.1.**  $\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! z^n}{z(z+1) \cdots (z+n)}$ .

Como veremos, existem outras maneiras, equivalentes, para definir a função gama. A notação  $\Gamma(z)$  e o nome *função gama* foi introduzido por Legendre. Considere o produto infinito

$$\phi(z) = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right). \quad (1.6.1)$$

**Lema 1.6.2.** O produto (1.6.1) converge uniformemente em subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$ .

Como  $a_n = (1 + 1/n) \exp(-1/n)$  é sempre menor que 1, segue que

$$\phi(1) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \exp\left(-\frac{1}{n}\right) \in (0, 1).$$

Portanto, existe uma constante  $\gamma \in \mathbb{R}$  tal que  $\phi(1) = \exp(-\gamma)$ , ou seja,  $\phi(1) \exp(\gamma) = 1$ . Em seguida apresentamos a definição de Weierstrass para função gama.

**Definição 1.6.3.**  $\Gamma(z) = \frac{\exp(-\gamma \cdot z)}{\phi(z)}$ . Note que  $\Gamma(1) = \frac{\exp(-\gamma)}{\phi(1)} = 1$ .

O próximo teorema apresenta algumas propriedades da função gama.

**Teorema 1.6.4.** Valem as seguintes propriedades:

- a) Os pólos de  $\Gamma(z)$  são  $0, -1, -2, \dots$ , sendo todos de ordem 1;
- b)  $\Gamma(z) \neq 0$  para qualquer  $z \in \mathbb{C}$ ;
- c) Seja  $x \in \mathbb{R}$ . Se  $x > 0$ , então  $\Gamma(x) > 0$ ;
- d)  $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$  para todo  $z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$ ;
- e)  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n+1)\right)$  e  $0.5 < \gamma < 0.6$ .

---

<sup>2</sup>concedido anualmente pela Associação Americana de Matemática em reconhecimento a artigo expositório de destaque sobre algum tópico matemático.

O número  $\gamma$ , definido no item e) do teorema 1.6.4, é conhecido como constante de ***Euler-Mascheroni***<sup>3</sup> sendo muito usada em Teoria dos Números.

**Corolário 1.6.5.** Seja  $n$  um número inteiro não-negativo. Como  $\Gamma(1) = 1$ , então

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

O corolário 1.6.5, justifica o termo função fatorial generalizada.

A seguir apresentamos a forma mais conhecida da função gama, sua forma integral, dada pela integral de Euler, e esta é a definição da função gama que adotaremos neste trabalho. É um dos mais importantes exemplos de funções definidas por integral imprópria. Por não ser representada por funções elementares, a dedução de suas propriedades demanda certo esforço.

**Teorema 1.6.6.** Se  $\Re(z) > 0$ , então a ***função gama*** é dada por

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt.$$

Deste momento em diante restringimos nosso estudo sobre a função gama com domínio nos números reais, ou seja, se  $x \in \mathbb{R}$  e  $x > 0$ , então

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt. \tag{1.6.2}$$

Pelo visto anteriormente, a convergência da integral acima é garantida quando  $x > 0$ . Embora equação (1.6.1) não convirja para  $x \leq 0$ , o item a) do teorema 1.6.4 garante que a função gama é definida para todos os valores reais, exceto quando  $x \in \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ . Sendo assim, considerada como uma função real de uma variável real, o gráfico de  $\Gamma(x)$ , apresentado na figura 1.2, possui assíntotas verticais nos inteiros não-positivos.

---

<sup>3</sup>Tal constante foi definida pela primeira vez no ano de 1781 por Leonhard Euler, que obteve as 16 primeiras casas decimais. Em 1790, Lorenzo Mascheroni determinou 32 casas decimais de tal número na obra *Geometria del compasso*. Não se sabe sobre a racionalidade ou irracionalidade desta constante. Suas 100 primeiras casas decimais são 0,5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672348848677267776646709369470632917467495...

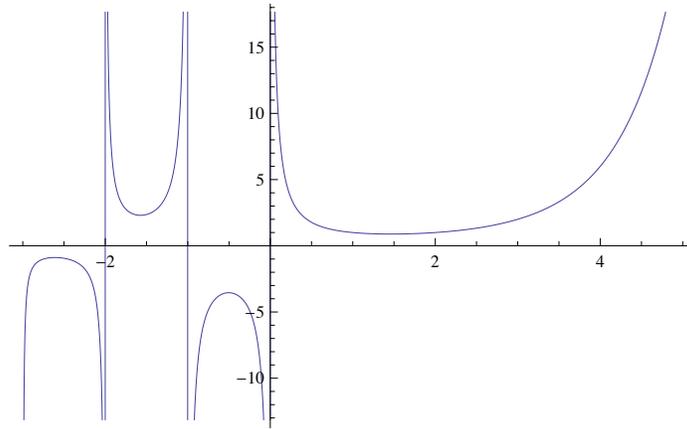


Figura 1.2: Gráfico da função gama no intervalo  $(-3, 5)$ .

Agora, definimos as funções gama incompletas, tais funções são de extrema importância em Estatística.

**Definição 1.6.7.** As *funções gama incompleta superior* e *incompleta inferior* são definidas respectivamente por

$$\Gamma(x, a) = \int_a^{\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt, \quad \gamma(x, a) = \int_0^a t^{x-1} \exp(-t) dt,$$

onde  $a \geq 0$  e  $x > 0$ .

Com auxílio da função gama incompleta superior, definimos a função gama regularizada.

**Definição 1.6.8.** A *função gama regularizada*, denotada  $Q(x, a)$ , é definida por

$$Q(x, a) = \frac{\Gamma(x, a)}{\Gamma(x)},$$

onde  $a \geq 0$  e  $x > 0$ .

A seguir apresentamos algumas propriedades das funções gama incompletas.

**Proposição 1.6.9.** Valem as seguintes propriedades das funções gama incompletas:

$$\text{a) } \Gamma\left(\frac{1}{2}, a\right) = \sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erfc}(\sqrt{a});$$

$$\text{b) } \gamma\left(\frac{1}{2}, a\right) = \sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erf}(\sqrt{a});$$

$$\text{c) } \text{Restringindo dom\u00ednio aos inteiros n\u00e3o nulos, temos que } Q(n, a) = \exp(-a) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a^i}{i!};$$

$$\text{d) } \Gamma(n, a) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \left( \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\xi^{i+n}}{i+n} - \frac{a^{i+n}}{i+n} \right);$$

$$\text{e) } \gamma(n, a) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \left( \frac{a^{i+n}}{i+n} \right).$$

## Códigos espaço-temporais e sistemas de comunicação multiantena.

Neste capítulo apresentamos o problema de estudo desta tese. Este surgiu, de maneira natural, após uma rigorosa leitura sobre os critérios de busca para códigos espaço-temporais em canais MIMO. A leitura sobre tais critérios levantaram algumas perguntas que pretendemos responder no último capítulo. Mais detalhes sobre o assunto podem ser encontrados em [Gol05], [Rap04], [Jaf05] e [VY03].

Na primeira seção deste capítulo apresentamos os sistemas de comunicação multiantena também conhecidos como MIMO. Na segunda seção descrevemos os fundamentos dos códigos utilizados nos sistemas de comunicação multiantena. Finalizamos o capítulo exibindo o problema que, usando as técnicas apresentadas no capítulo 3, será resolvido no capítulo 4.

### **2.1 Sistemas de comunicação Multiantena.**

A história da comunicação nasce quando o homem sente a necessidade de expressar o seu pensamento a um semelhante. Isso pode ser feito de várias formas: pela palavra, pela mímica, por desenhos, etc. Porém, quando as pessoas estão distantes, a comunicação torna-se difícil ou até mesmo impossível. Soluções técnicas desse problema surgiram com o invento da telegrafia, da

comunicação via rádio, da telefonia e outros e mais recentemente da internet.

A comunicação sem fio apareceu pela primeira vez em 1899, quando Guglielmo Marconi usou o código Morse para realizar transmissão sem fio através do Canal da Mancha. Durante os cem anos seguintes as comunicações sem fio apresentaram notável evolução, como, por exemplo, o aparecimento dos sistemas de comunicação AM e FM para rádios, e o sistema de telefonia celular de primeira geração em 1970. O uso das comunicações sem fio atingiram seu maior crescimento nos últimos dez anos, período que foram inventados novos métodos e novos equipamentos. O principal objetivo de comunicação sem fio é se comunicar com qualquer pessoa, de qualquer lugar, a qualquer momento. A informação em qualquer momento e em qualquer lugar se tornou algo essencial na vida do homem moderno. A fim de cumprir com este objetivo, as comunicações sem fio adquiriram uma enorme relevância.

O gargalo para alcançar este objetivo é a capacidade de transmissão de dados em comunicação sem fio. Com uso crescente de diversas instalações sem fio, a demanda por largura de banda ou capacidade torna-se cada vez mais necessária, especialmente para sistemas limitados de energia. Isto significa que não podemos aumentar a capacidade de transmissão do canal sem fio simplesmente aumentando a potência de transmissão. Os esforços de pesquisa conseguiram fazer uso mais eficiente da capacidade de transmissão de dados limitada do canal sem fio e obtiveram progressos notáveis. Por outro lado, técnicas eficientes, como a reutilização de frequência [Rap04], foram inventadas para aumentar eficiência da largura da banda. Os avanços na codificação, como códigos turbo [BGT93] quase atingem a capacidade de Shannon [CT91], que é o limite teórico vinculado à capacidade do sistema.

Dadas as vantagens e desvantagens apresentadas acima, os sistemas de comunicação com uma única antena mostram ser pouco promissores para atender as necessidades futuras das comunicações sem fio. Portanto, novos sistemas de comunicação, com capacidade superior de transmissão e baixa taxa de erro devem ser introduzidos e conseqüentemente, novas teorias de comunicação

para estes sistemas devem ser desenvolvidas.

Um desses novos sistemas, os sistemas de comunicação sem fio utilizando múltiplas antenas transmissoras e múltiplas antenas receptoras, **MIMO** - multiple-input-multiple-output, é um dos avanços mais significativos nas técnicas modernas de comunicação. Sua principal característica é a capacidade de usar a propagação dos múltiplos caminhos, que até então era considerado uma desvantagem para comunicações sem fio, em um benefício para os usuários.

No fim dos anos 90, Foschini e Telatar provaram em [FG98] e [Tel99] que os sistemas de comunicação com múltiplas antenas possuem capacidade de transmissão de dados muito maior do que os sistemas de uma única antena. Eles provaram que a melhoria da capacidade é quase linear com  $\min\{n_T, n_R\}$ . Estes resultados mostraram a superioridade dos sistemas MIMO e geraram um grande interesse nessa área. Em poucos anos, vários trabalhos foram feitos para generalizar e melhorar tais resultados, [ZT02], [SFGK00], [CTK02] e [CFG02].

A capacidade de Shannon, para sistemas com uma única antena, só pode ser alcançada por códigos de complexidade ilimitada, o mesmo acontece para sistemas MIMO. Dessa forma, devemos inventar bons códigos para estes canais. Por exemplo, em sistemas com duas antenas transmissoras,  $n_T = 2$  e duas antenas receptoras,  $n_R = 2$ , se o mesmo sinal é transmitido pelas antenas ao mesmo tempo, então a **PEP** - Pairwise error probability, é inversamente proporcional à **SNR** - Signal-to-noise ratio. Esta é a mesma relação obtida nos sistemas com uma única antena transmissora. Este exemplo mostra que não adianta um sistema de multiantena com códigos ruins. No entanto, se o esquema de Alamouti [Ala98] é utilizado, obtemos que o PEP comporta-se como  $\text{SNR}^{-2}$ .

Portanto, é importante desenvolver códigos que tiram proveito da diversidade espacial fornecida por várias antenas. Entre tais códigos, o mais bem sucedido são os códigos espaço-temporais.

Nos códigos espaço-temporais, o processamento do sinal para o transmissor é feita não apenas na dimensão do tempo, como o que é feito nos códigos de repetição para sistemas de comunicação com única antena, mas também na dimensão espacial. Ao adicionar a redundância no espaço e

no tempo, tanto a taxa de transmissão de dados como a probabilidade de erro são melhorados sem qualquer custo extra de espectro. Esta é a principal razão de pesquisadores acadêmicos e engenheiros industriais terem grande interesse nesta área e constitui um grande desafio para a engenharia.

A ideia de codificação espaço-temporal foi proposta pela primeira vez por Tarokh, Seshadri e Calderbank em [TSC98]. Eles provaram que os códigos espaço-temporais atingem PEP que é proporcional à  $\text{SNR}^{-n_T n_R}$ , comparado com sistemas de uma única antena, onde o PEP é proporcional com  $\text{SNR}^{-1}$ , isto é, a taxa de erro é reduzida drasticamente. O primeiro código espaço-temporal foi proposto por Alamouti em [Ala98], projetado para sistemas com duas antenas transmissoras. O código de Alamouti é também um dos códigos de maior sucesso, pois é de simples decodificação.

Os canais de comunicação MIMO podem ser estudados a partir de duas perspectivas diferentes: uma diz respeito à avaliação de desempenho em termos de probabilidade de erro de sistemas práticos, outra perspectiva diz respeito à avaliação da capacidade de transmissão de informação teórica (capacidade de Shannon). O MIMO trouxe dois tipos de ganho:

- i) *ganho de taxa*: aumento da taxa de transmissão de dados;
- ii) *ganho de diversidade*: número de caminhos independentes percorrido por cada sinal, cujo número máximo é  $n_T \cdot n_R$ .

### 2.1.1 Canais com Desvanecimento Rayleigh Plano Quase-Estático.

Devido ao seu ambiente de transmissão, os canais de comunicação sem fio possuem limitações que não existem nos canais de comunicação com fio, onde as ondas de transmissão são estacionárias e previsíveis. Em canais sem fio, a transmissão ocorre em um ambiente hostil e o comportamento das ondas é aleatório, sendo assim de difícil análise. As características dos canais sem fio serão discutidas e o modelo de canal com desvanecimento Rayleigh plano quase-estático é explicado em detalhes nesta subseção.

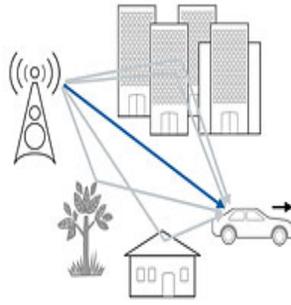


Figura 2.1: Diferentes caminhos de um canal sem fio.

Em um ambiente de comunicação móvel sem fio, os objetos circundantes como edifícios, árvores e casas agem como refletores de ondas eletromagnéticas. Devido a estas reflexões, as ondas eletromagnéticas viajam por diferentes caminhos e, portanto possuem várias amplitudes e fases. A interação das ondas com tais objetos provoca desvanecimento do sinal recebido pelo receptor e a energia das ondas eletromagnéticas diminui à medida que a distância entre o transmissor e o receptor aumenta.

Um sinal, ao se propagar através de um canal de comunicação sem fio, pode chegar ao seu destino final por meio de vários caminhos diferentes. A existência desses caminhos tem como resultado o recebimento em diferentes instantes de várias versões do sinal transmitido, experimentando diferentes perdas de percurso e atrasos de fase. A figura 2.1 representa o cenário de uma transmissão em um canal sem fio, identificando as possíveis trajetórias do sinal.

Quando há um caminho direto entre o transmissor e o receptor, este caminho é chamado de linha de visada. De todo o conjunto de sinais recebidos por diferentes caminhos, o sinal recebido pela linha de visada é o mais forte e dominante. Apesar de sua energia e fase se modificarem quando existe mobilidade, esta alteração é mais previsível, pois a degradação depende principalmente da distância percorrida. Uma linha de visada passa a não existir se um obstáculo como uma construção ou uma montanha estiverem entre o transmissor e o receptor.

Conforme ilustrado na figura 2.1, a linha de visada não é o único caminho que uma onda eletromagnética pode percorrer do transmissor ao receptor. Reflexão, difração, dispersão, multipercursos

e o efeito Doppler são mecanismos básicos de propagação que influenciam a trajetória da onda. O termo comum usado para denotar este fenômeno físico é “**desvanecimento**”.

Existem dois tipos de desvanecimento *desvanecimento de larga escala* e *desvanecimento de pequena escala*. Não é interesse deste trabalho o desvanecimento de larga escala. A seguir descrevemos com detalhes o desvanecimento de pequena escala, objeto de nosso estudo, que de agora em diante será denominado simplesmente **desvanecimento**.

A reflexão ocorre quando uma onda eletromagnética colide com um objeto cujas dimensões são muito maiores do que seu próprio comprimento de onda. Assim, ao incidir em outro meio, a onda eletromagnética é parcialmente refletida e parcialmente transmitida, de acordo com o coeficiente de reflexão de Fresnel [Rap04]. Este coeficiente depende das propriedades do material e da polarização, os ângulos de incidência e frequência da onda de propagação. Reflexões podem ocorrer, por exemplo, em superfícies de terrenos ou em edificações. Na figura 2.1 temos reflexão pelo prédio.

Outra maneira de uma onda eletromagnética se propagar é por meio de difração. A difração ocorre quando a onda atinge uma superfície com irregularidades, como extremidades pontiagudas. O fenômeno de difração pode ser explicado pelo princípio de Huygens [HKR04], que afirma que todos os pontos na frente de onda podem ser considerados como fontes isoladas irradiando pequenas ondas secundárias, as quais se combinam para formar uma nova frente de onda. Assim a difração explica como os sinais de rádio se propagam pela superfície curva da Terra e superam alguns obstáculos. Como na reflexão, a difração também depende da geometria do objeto, amplitude, fase e polarização da onda incidente. Na figura 2.1 temos difração pelo telhado da casa.

O fenômeno de dispersão acontece quando há um grande número de objetos com dimensões menores do que o próprio comprimento de onda. Neste caso, a onda se espalha e muitas cópias da mesma se propagam em diferentes direções. Ondas dispersas são produzidas por superfícies ásperas, pequenos objetos, ou por outras irregularidades do meio físico, como por exemplo uma

árvore.

A propagação por multipercursos ocorre quando um sinal transmitido propaga-se por mais de um caminho até chegar ao receptor. Dessa forma, os sinais dos multipercursos chegam ao receptor com diferentes intensidades e diferentes atrasos, resultando em diferenças de fase entre os sinais. Com alteração do ambiente, como movimento do transmissor e/ou receptor e de objetos nos arredores do canal, a amplitude do sinal oscilará. Na antena receptora, os sinais dos multipercursos somam-se e com isso o sinal resultante poderá ser fortemente atenuado. A propagação por multipercursos é um fenômeno extremamente comum na realização de uma comunicação sem fio.

Devido ao movimento relativo entre o transmissor e o receptor, cada um dos multipercursos está sujeito a um desvio de frequência. Esse desvio no receptor é chamado de efeito Doppler.

As variações no sinal decorrentes dos multipercursos e do efeito Doppler podem ser analisadas observando a resposta ao impulso em um canal sem fio. Esta informação é importante e pode caracterizar os tipos de desvanecimento existentes no canal. Esses atrasos ocorrem de maneira aleatória e causam uma variação aleatória na fase do sinal que resulta no fenômeno de desvanecimento. Na prática, como os sinais percorrem diferentes caminhos formando diferentes ângulos de incidência, cada componente de multipercurso sofrerá um desvio na frequência, resultando em um aumento da largura da faixa do sinal.

Considere um pulso extremamente curto, idealmente um impulso, transmitido num canal variante no tempo através de mecanismos que influenciam na trajetória de onda. Como é possível notar na figura 2.2, o sinal recebido relativo ao pulso transmitido no instante  $t_0$  é uma composição de vários pulsos com atrasos e amplitudes diferentes. Considere que a transmissão deste pulso seja repetida várias vezes. Podemos notar que para o mesmo pulso transmitido em instantes diferentes de tempo, o canal responde de forma diferente, ou seja, o tamanho individual de cada pulso, o atraso relativo entre eles e até mesmo o número de pulsos mudam a cada nova transmissão através do canal. Essas mundaças são imprevisíveis e portanto é razoável estudar o problema

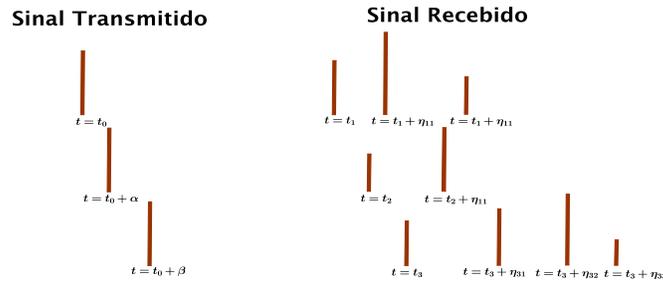


Figura 2.2: Resposta a um pulso extremamente curto em um canal com multipercursos variante no tempo.

estatisticamente.

Por tratar de um fenômeno aleatório, o sinal recebido deve ser estudado por uma função densidade de probabilidade. Existem dois tipos principais de distribuição que podem descrever a aleatoriedade de boa parte das comunicações sem fio, a saber, Rayleigh e Rice. Uma delas é a distribuição de Rayleigh, que caracteriza os ambientes onde a comunicação é feita praticamente pelos componentes de multipercursos. Neste caso, o canal é chamado de canal com *desvanecimento de Rayleigh* e será objeto de nosso estudo.

Consideramos canais com desvanecimento Rayleigh independentes. O modelo de desvanecimento Rayleigh independente aproxima-se do modelo teórico em canais MIMO, onde as antenas possuem um considerável espaçamento, maior que o comprimento da onda portadora.

Em relação à outra distribuição, para ambientes como comunicação via satélite, existe predominância de uma componente direta do sinal e o sinal recebido é uma composição da componente direta com as componentes de multipercursos. Nesse caso, usamos a distribuição de Rice e o canal é chamado de canal com *desvanecimento de Rice*. Outro modelo popular estatístico para o desvanecimento é a distribuição Nakagami.

O canal de comunicação é o meio que fornece a conexão física entre o transmissor e receptor em um sistema de comunicação. Para a análise desses sistemas, é importante a construção de modelos matemáticos que reflitam as suas principais características, como por exemplo as alterações

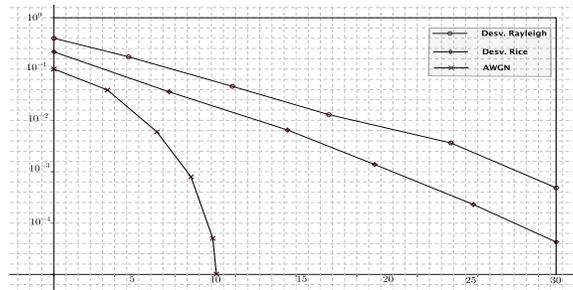


Figura 2.3: Performance das probabilidades de erro de bit dependendo da SNR para canais AWGN, canal desvanecimento Rice e Rayleigh.

nos sinais transmitidos pelo canal. Um modelo bastante utilizado, em função de sua simplicidade e manipulação matemática, e que se aplica a um grande conjunto de canais físicos, é o modelo **AWGN** - Additive White Gaussian Noise, no qual um ruído é modelado estatisticamente como um processo estocástico gaussiano branco que é adicionado ao sinal transmitido. Entretanto, este modelo não serve para o canal de comunicações móveis visto que este sofre também o desvanecimento, também conhecido como ruído multiplicativo. Em sistemas móveis, o transmissor teria que fornecer muita potência para a transmissão, fato nem sempre possível na prática devido as limitações principalmente pelo peso e tamanho do aparelho.

A figura 2.3 mostra a probabilidade de erro de bit em função da SNR para o canal AWGN, e os de comunicações móveis com desvanecimento Rice e Rayleigh. Em um canal de comunicação com fio onde  $n_T = n_R = 1$ , por definição não existe desvanecimento, somente ruído aditivo Gaussiano branco AWGN, dessa forma a probabilidade de erro par-a-par diminui exponencialmente com a SNR. Por outro lado em um canal de comunicação sem fio onde  $n_T = n_R = 1$ , além do ruído aditivo Gaussiano branco existe o desvanecimento, neste caso a probabilidade de erro par-a-par média só diminui linearmente com a SNR.

Portanto, para obtermos uma comunicação confiável em um canal de comunicações móvel, a potência média do transmissor deve ser muito grande. Esse é um fato extremamente importante e justifica a atenção especial que tem sido dada por parte de pesquisadores para investigar novas

técnicas com o propósito de melhorar o desempenho de erro dos sistemas de comunicação móvel. Dessa forma, para que canais sem fio com  $n_T = n_R = 1$  tenham a mesma probabilidade de erro que um canal com fio, precisamos de códigos mais longos ou maior potência de transmissão. Uma das técnicas mais poderosas para alcançar esse objetivo é a técnica de diversidade.

Podemos classificar os canais sem fio de acordo com a relação entre as características do sinal transmitido e os parâmetros do canal.

**Definição 2.1.1. *Desvanecimento Quase-estático*** ocorre quando as características do canal variam muito lentamente em relação à duração de transmissão de um símbolo de informação.

No desvanecimento quase-estático, a transmissão de um bloco contendo um certo número de símbolos é considerado estático.

**Definição 2.1.2. *Desvanecimento plano*** ocorre quando a largura de faixa de frequência do canal é maior do que a largura de faixa do sinal transmitido.

O desvanecimento plano ocorre quando alterações na amplitude das várias componentes do sinal transmitido são uniformes em toda faixa de frequência do sinal, permitindo que as características espectrais do sinal sejam preservadas, sem que haja distorção.

## 2.1.2 Diversidade.

Ao contrário do canal de transmissão com fio, o canal sem fio sofre atenuação devido ao ambiente hostil de propagação, multipercursos, efeito Doppler, interferência de outros sinais, etc. Isso torna impossível para o receptor determinar o sinal transmitido a menos que alguma réplica menos atenuada do sinal transmitido seja fornecida ao receptor sem aumentar a potência de transmissão ou sacrificar a largura da banda. Este recurso é chamado ***diversidade***, que é a mais importante contribuição para a comunicação sem fio ser confiável, pois, em nada adianta dispor de um canal com grande capacidade de transmissão de dados, se não conseguimos transmitir dados de forma confiável neste canal.

A ideia básica da diversidade é que, se duas ou mais amostras independentes de um sinal são enviados e estes sinais sofrem desvanecimentos diferentes, a probabilidade de que todas as amostras estejam simultaneamente abaixo de um dado nível é muito menor que a probabilidade de qualquer uma das amostras estar abaixo deste nível. Assim, disponibilizamos diferentes réplicas do sinal transmitido ao receptor e como estas réplicas desvanecem de forma independente, é quase impossível que todas as réplicas do sinal transmitido sofram um desvanecimento profundo simultaneamente.

Assim, combinando adequadamente várias amostras, reduzimos a severidade do desvanecimento e melhoramos a confiabilidade da transmissão. Em sistemas de comunicações móveis, a técnica de diversidade pode ser explorada de diversas maneiras.

**Definição 2.1.3. *Diversidade Temporal*** ocorre quando réplicas do sinal são enviadas ao receptor de tal forma que o tempo de separação entre tais sinais seja maior do que o tempo de coerência do canal, fazendo com que os desvanecimentos que atuam nos sinais sejam descorrelatados.

**Definição 2.1.4. *Diversidade Espacial*** ocorre quando réplicas do sinal são transmitidas para locais diferentes, de tal forma que não exista interferência entre os caminhos percorridos pelo sinal.

**Definição 2.1.5. *Diversidade em Frequência*** ocorre quando réplicas do sinal são enviadas ao receptor por ondas portadoras diferentes de tal forma que a separação em frequência destas réplicas seja maior do que a faixa de coerência.

Neste trabalho consideramos as diversidades espacial e temporal. Para isso, as antenas devem ser fisicamente separadas por uma distância apropriada e assim obtermos desvanecimentos independentes. Ressaltamos que a diversidade temporal já é usada na teoria clássica dos códigos corretores de erro através de códigos de repetição. A contribuição do uso de multi-antenas está na existência da diversidade espacial.

Para mostrar, quantitativamente, a melhora no desempenho de um sistema que utiliza a técnica da diversidade na transmissão de um sinal, suponha que  $L$  réplicas de um sinal estão submetidas

a  $L$  desvanecimentos independentes. A relação sinal-ruído no  $i$ -ésimo caminho é

$$SNR_i = \alpha_i^2 \frac{E_s}{N_0}.$$

A probabilidade do  $SNR_i$  estar abaixo de um limitante  $\gamma$  é

$$P(SNR_i \leq \gamma) = \int_0^\gamma p_i(x) dx,$$

onde  $p_i(x)$  é a fdp de  $SNR_i$ . Esta função é supostamente a mesma para todos os  $L$  desvanecimentos, pois como estes caminhos são independentes, então  $p_i(x)$  não depende de  $i$ . A probabilidade de todos os  $SNR_i$  estarem abaixo do limitante  $\gamma$  é

$$P(SNR_1 \leq \gamma, SNR_2 \leq \gamma, \dots, SNR_L \leq \gamma) = (P(SNR_i \leq \gamma))^L.$$

Como  $0 \leq P(SNR_i \leq \gamma) \leq 1$ , quanto maior o número de desvanecimentos, menor é a probabilidade de todas as réplicas estarem abaixo do limitante  $\gamma$ . Dessa forma, a probabilidade de pelo menos uma réplica não ser significativamente atenuada pelo desvanecimento é alta.

Diversidade de transmissão em canais MIMO podem ser explorados por um esquema de codificação espaço-temporal, que é um projeto conjunto de codificação de controle de erros, modulação e transmissão da diversidade. Os fundamentos dos códigos espaço-temporais serão discutidos na próxima seção.

### 2.1.3 Canal Coerente.

Um fato crucial para determinar a capacidade de transmissão de dados de um sistema multi-antena é a disponibilidade do conhecimento dos desvanecimentos em cada um dos caminhos de transmissão. Este conhecimento dos desvanecimentos é conhecido na literatura como **CSI** - channel state information. Supondo que o receptor possui total conhecimento do canal, a capacidade média do canal é  $\min\{n_T, n_R\}$  vezes maior que a capacidade de transmissão de um sistema de única antena

e com mesma potência.

**Definição 2.1.6.** Um canal de comunicação multiantena no qual o receptor possui total conhecimento dos desvanecimentos é chamado *canal coerente*.

Neste trabalho supomos que o receptor possui total conhecimento do canal. Como veremos na próxima seção, tais desvanecimentos podem ser escritos na forma de uma matriz, chamada de matriz do canal. Assumimos que a matriz do canal é conhecida pelo receptor, mas nem sempre pelo transmissor. No capítulo 3, a matriz do canal pode ser suposta constante durante um período de tempo, esta hipótese é bastante realística.

**Observação 2.1.7.** De agora em diante, supomos canais de comunicação MIMO, com desvanecimento Rayleigh plano quase-estático e coerente.

#### 2.1.4 Capacidade do Canal Multiantena.

Conforme já comentamos, pesquisas em teoria da informação mostraram que a capacidade de comunicação em canais sem fio usando o sistema MIMO aumenta consideravelmente o limitante de Shannon. Mais detalhes podem ser vistos nos trabalhos [Tel99], [FG98] e [MH99].

Considerando uma antena receptora e uma antena transmissora,  $n_R = n_T = 1$ , a clássica fórmula de Shannon afirma que capacidade do canal é

$$C = W \log_2 \left( 1 + \frac{P}{\sigma^2} \right),$$

onde  $W$  é a largura de banda medida em Hz,  $P$  é a potência do sinal enviado e  $\sigma^2$  é a potência do ruído. Para canais MIMO, temos que

$$C = W \log_2 \det \left( I_m + \frac{P}{n_T \sigma^2} Q \right),$$

$$\text{onde } Q = \begin{cases} HH^* , n_R < n_T \\ H^*H , n_T \leq n_R \end{cases} .$$

Mostra-se que a capacidade de transmissão de informação para sistemas de comunicação sem fio pode ser aumentada consideravelmente empregando múltiplas antenas no transmissor e no receptor. Para um sistema com grande número de antenas de transmissão e recepção e um canal de desvanecimento plano independente conhecido aos receptores, a capacidade cresce linearmente com o número mínimo de antenas. Entretanto, o artigo [MH99] mostra que a capacidade de transmissão de dados do canal MIMO não pode ser aumentada simplesmente fazendo o número de antenas transmissoras crescer mais que o comprimento do intervalo de coerência (intervalo de tempo em que a matriz do canal é suposta constante), ou seja, a capacidade do canal MIMO é limitada pelo comprimento do intervalo de coerência. Portanto, assumimos que  $n_T \leq l$ .

**Teorema 2.1.8.** Para qualquer intervalo de coerência  $l$  e fixado o número de antenas transmissoras  $n_T$ , a capacidade obtida pelo canal MIMO com  $n_T > l$  é igual a capacidade obtida com  $n_T = l$ .

A questão central em todos esses sistemas é a exploração do efeito de múltiplos caminhos para atingir alta eficiência espectral e ganhos de desempenho. Ou seja, inventar bons códigos que alcancem a capacidade teórica de transmissão dos canais MIMO. Estudamos tais códigos na próxima seção.

## 2.2 Códigos Espaço-Temporais.

Nesta seção apresentamos os códigos espaço-temporais que, resumidamente, formam um conjunto de técnicas com o objetivo efetivo e prático, não somente teórico, de alcançar altas taxas de transmissão de dados, taxas essas próximas do limite da capacidade teórica de informação para canais MIMO. Dessa forma, são códigos usados para transmissão de dados por canais multiantenas.

Os fundamentos da teoria sobre códigos espaço-temporais foram estabelecidos por Tarokh, Seshadri e Calderbank em 1998 no trabalho [TSC98], na ocasião foram inventados os códigos

espaço-temporais em treliça ou STTC. Os resultados de [TSC98] foram motivados pelos resultados teóricos do aumento da capacidade de transmissão de dados em canais multiantena e evoluíram rapidamente para uma vibrante área de pesquisa em comunicações sem fio. A codificação é realizada no domínio do espaço e do tempo. Para isso introduzimos diferentes desvanecimentos nos sinais transmitidos, a partir de diferentes antenas em vários períodos de tempo. Dessa forma, minimizamos os erros de transmissão no receptor. Essa proposta atingiu bons resultados em canais com desvanecimento Rayleigh plano quase-estático e coerente, entretanto o decodificador usado pelo receptor torna-se bastante complexo, pois cresce exponencialmente com o número de antenas. Este tipo de transmissão não sacrifica a largura da banda.

Foi então que Alamouti em 1998 [Ala98] reduziu a complexidade de decodificação do código apresentado em [TSC98], exibindo um código de decodificação simples utilizando duas antenas transmissoras. Da mesma forma que [TSC98], Alamouti obteve diversidade no espaço e no tempo de maneira muito eficiente.

Tarokh, Jafarkhani e Calderbank estenderam o trabalho de Alamouti para qualquer número de antenas transmissoras no trabalho [TJC99], inserindo o código de Alamouti em uma nova classe de códigos chamada de códigos espaço-temporais de bloco ou STBC. Segundo um critério de ortogonalidade, os STBC atingem máxima diversidade, como o STTC, e possuem um algoritmo de decodificação baseado somente em processamento linear, não aumentando a complexidade de decodificação exponencialmente com o número de antenas.

Outras técnicas de codificação para MIMO são códigos espaço-temporais linear [HH02] e os códigos espaço-temporais diferenciais [HS00]. Algebras de divisão também têm sido propostas como uma nova ferramenta para construir códigos espaço-temporais, veja [OBV07]. As técnicas mais recentes incluem os códigos espaço-temporais turbo em treliça [FVYC02] e códigos espaço-temporais diferenciais em bloco [Hug00].

Na próxima subseção descrevemos o modelo matemático da transmissão de informação por

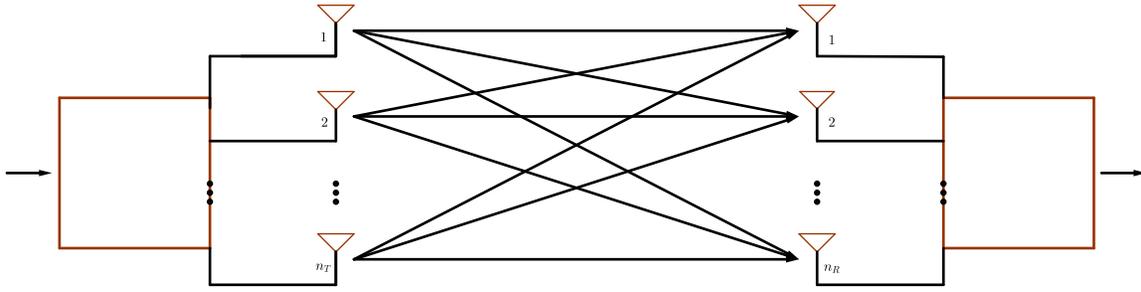


Figura 2.4: Diagrama Bloco

um canal multiantena. Em seguida analisamos o desempenho deste canal. Para finalizar a seção exibimos os dois principais critérios de busca de bons códigos espaço-temporais para canais multiantena. Adotamos a abordagem do livro [VY03].

### 2.2.1 Modelo Matemático de Transmissão em Canais Multiantena.

Considere um sistema de comunicação com  $n_T$  antenas transmissoras e  $n_R$  antenas receptoras como na figura 2.4. Os dados de informação são codificados em um codificador espaço-temporal. Em cada instante de tempo  $t$ , temos que uma quantidade de  $n_T$  saídas paralelas, denotadas por

$$c_t^1, c_t^2, \dots, c_t^{n_T}$$

que são simultaneamente transmitidas pelas  $n_T$  antenas transmissoras. Seja  $c_t^i$  o sinal transmitido, que é um número complexo, pela  $i$ -ésima antena no tempo  $t$ , onde  $1 \leq i \leq n_T$ .

A cada instante de tempo  $t$ , o sinal recebido pela  $j$ -ésima antena é uma combinação linear dos sinais emitidos por cada antena transmissora, e o sinal recebido é dado pela expressão

$$r_t^j = \sqrt{E_s} \sum_{i=1}^{n_T} h_{ji}(t) c_t^i + n_t^j, \quad j = 1, 2, \dots, n_R,$$

onde  $E_s$  é a energia média por sinal em cada antena transmissora. Temos que  $n_t^j$  é o ruído Aditivo

Gaussiano Branco presente em todo sistema de comunicação, para cada antena receptora  $j$  e cada instante de tempo  $t$ , e supomos que  $n_t^j$  é uma variável aleatória complexa gaussiana com média zero e variância  $N_0/2$  por dimensão. O coeficiente  $h_{ji}(t)$  é o desvanecimento entre a antena transmissora  $i$  e a antena receptora  $j$  no instante de tempo  $t$ . Supomos que os coeficientes do desvanecimento  $h_{ji}(t)$  são variáveis aleatórias complexas gaussianas com média  $m_{h_{ji}}$  e variância  $1/2$  por dimensão, podendo ser modeladas pelas variáveis aleatórias de Rayleigh ou Rice.

Como visto na subsecção 2.1.1, neste texto abordamos somente o caso quase-estático, onde supomos que o desvanecimento  $h_{ji}(t)$  entre a antena receptora  $j$  e antena transmissora  $i$  é constante durante  $l$  instantes de tempo (constante durante um frame), ou seja,  $h_{ji}(1) = h_{ji}(2) = \dots = h_{ji}(l) = h_{ji}$ .

Suponha que a palavra-código  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = (c_1^1 c_1^2 \dots c_1^{n_T} c_2^1 c_2^2 \dots c_2^{n_T} \dots c_l^1 c_l^2 \dots c_l^{n_T})$$

foi transmitida, onde  $l$  é o comprimento do frame e suponha que um decodificador de máxima-verossimilhança decide, erroneamente que a palavra-código enviada foi

$$\mathbf{E} = (e_1^1 e_1^2 \dots e_1^{n_T} e_2^1 e_2^2 \dots e_2^{n_T} \dots e_l^1 e_l^2 \dots e_l^{n_T})$$

quando transmitimos  $\mathbf{C}$ .

As palavras-código, os coeficientes dos desvanecimentos, os ruídos gaussianos e os sinais recebidos podem ser expressos matricialmente como

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_l^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_l^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^{n_T} & c_2^{n_T} & \dots & c_l^{n_T} \end{pmatrix}_{n_T \times l} \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n_T} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n_T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n_R1} & h_{n_R2} & \dots & h_{n_R n_T} \end{pmatrix}_{n_R \times n_T}$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} n_1^1 & n_2^1 & \cdots & n_l^1 \\ n_1^2 & n_2^2 & \cdots & n_l^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_1^{n_R} & n_2^{n_R} & \cdots & n_l^{n_R} \end{pmatrix}_{n_R \times l} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_1^1 & r_2^1 & \cdots & r_l^1 \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_l^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n_R} & r_2^{n_R} & \cdots & r_l^{n_R} \end{pmatrix}_{n_R \times l} .$$

Portanto, podemos modelar o sistema matematicamente pela expressão

$$R = \sqrt{E_s} HC + N. \quad (2.2.1)$$

Como veremos nas próximas duas subseções, os critérios de busca de códigos são obtidos com objetivo de minimizar a probabilidade de erro par-a-par, denotada  $P(\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{C})$ .

**Definição 2.2.1.** A probabilidade de erro par-a-par, denotada por  $P(\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{C})$ , é a probabilidade de, ao enviarmos a palavra-código  $C$ , o decodificador interpretar que a palavra código enviada foi  $E$ .

A decodificação por máxima verossimilhança escolhe a palavra-código que minimiza o quadrado da norma de Frobenius, ou seja, é a probabilidade do decodificador de máxima-verossimilhança, ao receber  $\mathbf{R}$ , escolher erroneamente por  $\mathbf{E}$ , uma vez que enviamos  $\mathbf{C}$ , isto é, a probabilidade que

$$\| R - E \|_F^2 \leq \| R - C \|_F^2 \quad (2.2.2)$$

onde  $\| \cdot \|_F$  é a norma de Frobenius. Daqui em diante, a menos de enunciado, a norma de Frobenius será simplesmente denotada por  $\| \cdot \|$ . A equação (2.2.2) está errada, note que as matrizes estão em espaços diferentes. Supomos que temos total conhecimento do canal, canal coerente - CSI, ou seja, conhecemos os desvanecimentos e conseqüentemente  $H$ . Dessa forma, a probabilidade de (2.2.2) ocorrer, pode ser interpretado como a probabilidade de

$$\| R - \sqrt{E_s} HE \|^2 \leq \| R - \sqrt{E_s} HC \|^2 \quad (2.2.3)$$

ocorrer, e agora as matrizes estão no mesmo espaço. Usando (2.2.1), temos que  $R = \sqrt{E_s}HC + N$  e a desigualdade (2.2.3) é dada por

$$\| \sqrt{E_s}HC + N - \sqrt{E_s}HE \|^2 \leq \| \sqrt{E_s}HC + N - \sqrt{E_s}HC \|^2,$$

isto é,

$$\| -\sqrt{E_s}H(E - C) + N \|^2 \leq \| N \|^2. \quad (2.2.4)$$

Como  $\| N \|^2 = \text{tr}(NN^*)$ , temos que

$$\begin{aligned} \| -\sqrt{E_s}H(E - C) + N \|^2 &= \text{tr} \left( \left[ -\sqrt{E_s}H(E - C) + N \right] \left[ -\sqrt{E_s}H(E - C) + N \right]^* \right) \\ &= \| \sqrt{E_s}H(E - C) \|^2 + \| N \|^2 - 2\text{Re} \left( \text{tr} \left( \sqrt{E_s}H(E - C)N^* \right) \right). \end{aligned}$$

Assim, a desigualdade (2.2.4) é descrita por

$$\| \sqrt{E_s}H(E - C) \|^2 + \| N \|^2 - 2\text{Re} \left( \text{tr} \left( \sqrt{E_s}H(E - C)N^* \right) \right) \leq \| N \|^2.$$

Dessa forma, a probabilidade de (2.2.3) ocorrer é a probabilidade de

$$\| \sqrt{E_s}H(E - C) \|^2 \leq 2\text{Re} \left( \text{tr} \left( \sqrt{E_s}H(E - C)N^* \right) \right). \quad (2.2.5)$$

ocorrer.

Agora, vamos encontrar o valor de  $\text{tr} \left( \sqrt{E_s}H(E - C)N^* \right)$ . Usando notação matricial, obtemos

$$(\mathbf{E}-\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} e_1^1 - c_1^1 & e_2^1 - c_2^1 & \cdots & e_l^1 - c_l^1 \\ e_1^2 - c_1^2 & e_2^2 - c_2^2 & \cdots & e_l^2 - c_l^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_1^{n_T} - c_1^{n_T} & e_2^{n_T} - c_2^{n_T} & \cdots & e_l^{n_T} - c_l^{n_T} \end{pmatrix}_{n_T \times l}. \quad (2.2.6)$$

Logo,

$$\mathbf{H}(\mathbf{E}-\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n_T} h_{1i}(e_1^i - c_1^i) & \sum_{i=1}^{n_T} h_{1i}(e_2^i - c_2^i) & \cdots & \sum_{i=1}^{n_T} h_{1i}(e_l^i - c_l^i) \\ \sum_{i=1}^{n_T} h_{2i}(e_1^i - c_1^i) & \sum_{i=1}^{n_T} h_{2i}(e_2^i - c_2^i) & \cdots & \sum_{i=1}^{n_T} h_{2i}(e_l^i - c_l^i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n_T} h_{n_R i}(e_1^i - c_1^i) & \sum_{i=1}^{n_T} h_{n_R i}(e_2^i - c_2^i) & \cdots & \sum_{i=1}^{n_T} h_{n_R i}(e_l^i - c_l^i) \end{pmatrix}_{n_R \times l}.$$

Antes de continuarmos na busca de  $tr \left( \sqrt{E_s} H(E - C) N^* \right)$ , definimos a distância modificada entre palavras-código.

**Definição 2.2.2.** A *distância modificada* entre as palavras-código  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{E}$  é o quadrado da norma de Frobenius da matriz  $H(E - C)$  e será denotada por  $d^2$ , ou seja,

$$d^2 = \| H(E - C) \|^2 = \sum_{j=1}^{n_R} \sum_{t=1}^l \left| \sum_{i=1}^{n_T} h_{ji}(e_t^i - c_t^i) \right|^2. \quad (2.2.7)$$

Como desejamos encontrar  $tr \left( \sqrt{E_s} H(E - C) N^* \right)$ , basta encontrar os elementos da diagonal desta matriz. Como,

$$\mathbf{H}(\mathbf{E}-\mathbf{C})\mathbf{N}^* = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^l \left( \sum_{i=1}^{n_T} h_{1i}(e_t^i - c_t^i) \right) \overline{n_t^1} & * & \cdots & * \\ ** & \sum_{t=1}^l \left( \sum_{i=1}^{n_T} h_{2i}(e_t^i - c_t^i) \right) \overline{n_t^2} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ** & * & \cdots & \sum_{t=1}^l \left( \sum_{i=1}^{n_T} h_{n_R i}(e_t^i - c_t^i) \right) \overline{n_t^{n_R}} \end{pmatrix}_{n_R \times n_R},$$

temos

$$tr \left( \sqrt{E_s} H(E - C) N^* \right) = \sqrt{E_s} tr \left( H(E - C) N^* \right) = \sqrt{E_s} \sum_{j=1}^{n_R} \left[ \sum_{t=1}^l \left( \sum_{i=1}^{n_T} h_{ji}(e_t^i - c_t^i) \right) \overline{n_t^j} \right].$$

Dessa forma, a probabilidade de (2.2.5) ocorrer é a probabilidade de

$$\begin{aligned} & \| \sqrt{E_s} H(E - C) \|^2 \\ & \leq 2 \operatorname{Re} \left( \sqrt{E_s} \sum_{j=1}^{n_R} \sum_{t=1}^l \sum_{i=1}^{n_T} h_{ji} (e_t^i - c_t^i) \overline{n_t^j} \right) 2 \sum_{j=1}^{n_R} \sum_{t=1}^l \operatorname{Re} \left( \overline{n_t^j} \sqrt{E_s} \sum_{i=1}^{n_T} h_{ji} (e_t^i - c_t^i) \right) \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

ocorrer.

Note que o lado esquerdo da desigualdade (2.2.8) é a constante  $E_s d^2$  envolvendo a distância modificada. Em (2.2.8) temos um limitante superior da constante  $E_s d^2$ , pela variável aleatória

$$Z = 2 \sum_{j=1}^{n_R} \sum_{t=1}^l \Re \left( \overline{n_t^j} \sqrt{E_s} \sum_{i=1}^{n_T} h_{ji} (e_t^i - c_t^i) \right).$$

Este caso é o complementar da definição 1.1.2 e equação (1.1.2). Devemos escrever a constante  $E_s d^2$  e a variável aleatória de forma conveniente, faremos isso por etapas.

Por hipótese  $n_t^j$  e  $h_{ji}$  são variáveis aleatórias e neste momento não usamos o fato de  $h_{ji}$  ser uma variável aleatória, este fato será usado na subseção seguinte.

Na primeira etapa, como  $n_t^j$  é uma variável aleatória complexa gaussiana com média zero e variância  $N_0/2$  por dimensão, então  $\Re(n_t^j), \Im(n_t^j) \sim N(0, N_0/2)$ . Mas  $\Re(n_t^j) = \Re(\overline{n_t^j})$ , logo  $\Re(\overline{n_t^j}) \sim N(0, N_0/2)$ . Usando o lema 1.1.10, obtemos que

$$\Re \left( \overline{n_t^j} \sqrt{E_s} \sum_{i=1}^{n_T} h_{ji} (e_t^i - c_t^i) \right)$$

é uma nova variável aleatória gaussiana real com média zero e variância

$$\frac{N_0}{2} E_s \left| \sum_{i=1}^{n_T} h_{ji} (e_t^i - c_t^i) \right|^2.$$

Novamente, usando o lema 1.1.10, a variável aleatória gaussiana real

$$\sum_{j=1}^{n_R} \sum_{t=1}^l \operatorname{Re} \left( \overline{n_t^j} \sqrt{E_s} \sum_{i=1}^{n_T} h_{ji} (e_t^i - c_t^i) \right)$$

tem média zero e variância

$$\frac{N_0}{2} E_s \sum_{j=1}^{n_R} \sum_{t=1}^l \left| \sum_{i=1}^{n_T} h_{ij} (e_t^i - c_t^i) \right|^2 = \frac{N_0}{2} E_s d^2.$$

Para finalizar, a variável aleatória gaussiana

$$Z = 2 \sum_{j=1}^{n_R} \sum_{t=1}^l \operatorname{Re} \left( n_t^j \sqrt{E_s} \sum_{i=1}^{n_T} h_{ji} (c_t^i - \hat{c}_t^i) \right)$$

tem média zero e variância  $2^2(N_0/2)E_s d^2 = 2N_0 E_s d^2$ . Portanto  $Z \sim N(0, 2N_0 E_s d^2)$ . Assim, a probabilidade de (2.2.8) ocorrer é dada pela expressão

$$P(E_s d^2 \leq Z) = \int_{E_s d^2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2N_0 E_s d^2}} \exp \left( - \left( \frac{t}{\sqrt{2N_0 E_s d^2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \right) dt.$$

A integral acima é de fácil solução, bastar usar a mudança de variável  $s = t/\sqrt{2N_0 E_s d^2}$ , assim

$$\begin{aligned} P(E_s d^2 \leq Z) &= \int_{\sqrt{\frac{E_s d^2}{2N_0}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{s^2}{2} \right) ds \\ &= Q \left( \sqrt{\frac{E_s d^2}{2N_0}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_s d^2}{2N_0}} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \exp \left( -\frac{E_s d^2}{4N_0} \right). \end{aligned}$$

Portanto, supondo  $H$  conhecido, obtemos que a probabilidade de erro par-a-par possui o limitante,

$$P(C \rightarrow E | H) \leq \frac{1}{2} \exp \left( -\frac{E_s d^2}{4N_0} \right). \quad (2.2.9)$$

Na próxima seção descrevemos a distância modificada  $d^2$  em uma forma mais conveniente.

### 2.2.2 Análise do Desempenho.

Nesta seção obtemos um novo limitante para o *PEP*, supondo  $H$  conhecido, obtido por [TSC98]. Esse limitante que será a base para obtermos nas próximas duas seções os critérios de busca de códigos para canais MIMO. Faremos isto reescrevendo a distância modificada  $d^2$  da desigualdade

(2.2.9) em uma forma apropriada. Pela definição 2.2.2, temos que

$$\begin{aligned}
d^2 &= \sum_{j=1}^{n_R} \sum_{t=1}^l \left| \sum_{i=1}^{n_T} h_{ji} (e_t^i - c_t^i) \right|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n_R} \sum_{t=1}^l \left( \sum_{i=1}^{n_T} h_{ji} (e_t^i - c_t^i) \right) \left( \sum_{i=1}^{n_T} \overline{h_{ji} (e_t^i - c_t^i)} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n_R} \sum_{i=1}^{n_T} \sum_{k=1}^{n_T} h_{ji} \overline{h_{jk}} \sum_{t=1}^l (e_t^i - c_t^i) \overline{(e_t^k - c_t^k)}. \tag{2.2.10}
\end{aligned}$$

Seja  $h_j = (h_{j1}, h_{j2}, \dots, h_{jn_T})$  a  $j$ -ésima linha de  $H$  com  $1 \leq j \leq n_R$ . Defina a matriz

$$A(c, e) = \left( \sum_{t=1}^l (e_t^i - c_t^i) \overline{(e_t^k - c_t^k)} \right)_{i,k}, \quad 1 \leq i, k \leq n_T. \tag{2.2.11}$$

Provaremos que  $d^2 = \sum_{j=1}^{n_R} h_j A(c, e) h_j^*$ . De fato, podemos escrever  $A(c, e)$  matricialmente como

$$\mathbf{A}(c, e) = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^l (e_t^1 - c_t^1) \overline{(e_t^1 - c_t^1)} & \sum_{t=1}^l (e_t^1 - c_t^1) \overline{(e_t^2 - c_t^2)} & \cdots & \sum_{t=1}^l (e_t^1 - c_t^1) \overline{(e_t^{n_T} - c_t^{n_T})} \\ \sum_{t=1}^l (e_t^2 - c_t^2) \overline{(e_t^1 - c_t^1)} & \sum_{t=1}^l (e_t^2 - c_t^2) \overline{(e_t^2 - c_t^2)} & \cdots & \sum_{t=1}^l (e_t^2 - c_t^2) \overline{(e_t^{n_T} - c_t^{n_T})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=1}^l (e_t^{n_T} - c_t^{n_T}) \overline{(e_t^1 - c_t^1)} & \sum_{t=1}^l (e_t^{n_T} - c_t^{n_T}) \overline{(e_t^2 - c_t^2)} & \cdots & \sum_{t=1}^l (e_t^{n_T} - c_t^{n_T}) \overline{(e_t^{n_T} - c_t^{n_T})} \end{pmatrix}. \tag{2.2.12}$$

Com alguns cálculos, obtemos que

$$(h_j A(c, e) h_j^*)_{1 \times 1} = \sum_{k=1}^{n_T} \left( \sum_{i=1}^{n_T} \left[ h_{ji} \sum_{t=1}^l (e_t^i - c_t^i) \overline{(e_t^k - c_t^k)} \right] \right) \overline{h_{jk}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n_R} h_j A(c, e) h_j^* &= \sum_{j=1}^{n_R} \left[ \sum_{k=1}^{n_T} \left( \sum_{i=1}^{n_T} \left[ h_{ji} \sum_{t=1}^l (e_t^i - c_t^i) \overline{(e_t^k - c_t^k)} \right] \right) \overline{h_{jk}} \right] \\
&= \sum_{j=1}^{n_R} \sum_{t=1}^l \left( \sum_{i=1}^{n_T} h_{ji} (e_t^i - c_t^i) \right) \left( \sum_{k=1}^{n_T} \overline{h_{jk} (e_t^k - c_t^k)} \right) \stackrel{2.2.10}{=} d^2.
\end{aligned}$$

Dessa forma a desigualdade (2.2.9) pode ser escrita como

$$P(C \rightarrow E | H) \leq \frac{1}{2} \exp \left( - \sum_{j=1}^{n_R} h_j A(c, e) h_j^* \frac{E_s}{4N_0} \right) = \frac{1}{2} \prod_{j=1}^{n_R} \exp \left( - h_j A(c, e) h_j^* \frac{E_s}{4N_0} \right). \quad (2.2.13)$$

Agora escrevemos  $h_j A(c, e) h_j^*$  de forma apropriada. Observe que  $A(c, e) = (E - C)(E - C)^*$ , onde  $(E - C)$  é dada na equação (2.2.6). Pela proposição 1.2.9, os autovalores de  $A(c, e)$  são números reais não-negativos. Além disso, como  $A(c, e)$  é normal, pelo teorema 1.2.8,  $A(c, e)$  é unitariamente diagonalizável. Assim, suponha que  $V$  é matriz unitária tal que

$$VA(c, e)V^* = D,$$

sabemos que as linhas  $\{v_1, v_2, \dots, v_{n_T}\}$  de  $V$  são autovetores de  $A(c, e)$  e formam uma base ortogonal para  $\mathbb{C}^{n_T}$ . Os elementos da matriz diagonal  $D$  são os autovalores reais não-nulos de  $A(c, e)$ . Suponhamos que  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_T})$ . Note que

$$VA(c, e)V^* = D \Leftrightarrow A(c, e) = V^*DV,$$

logo

$$h_j A(c, e) h_j^* = h_j V^* D V h_j^* = (h_j V^*) D (h_j V^*)^*. \quad (2.2.14)$$

Usando a notação de produto interno e alguns cálculos, concluímos que

$$h_j V^* D (h_j V^*)^* = \sum_{i=1}^{n_T} \lambda_i | \langle h_j, v_i \rangle |^2. \quad (2.2.15)$$

Pelas equações (2.2.15), (2.2.14) e (2.2.13) concluímos que

$$P(C \rightarrow E | H) \leq \frac{1}{2} \prod_{j=1}^{n_R} \exp \left( - \sum_{i=1}^{n_T} \lambda_i | \langle h_j, v_i \rangle |^2 \frac{E_s}{4N_0} \right) = \frac{1}{2} \prod_{j=1}^{n_R} \prod_{i=1}^{n_T} \exp \left( - \lambda_i | \langle h_j, v_i \rangle |^2 \frac{E_s}{4N_0} \right). \quad (2.2.16)$$

Defina  $\beta_{ji} = \langle h_j, v_i \rangle$ , então

$$\begin{aligned} \beta_{ji} &= \langle (h_{j1}, h_{j2}, \dots, h_{jn_T}), (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in_T}) \rangle \\ &= h_{j1} \bar{v}_{i1} + h_{j2} \bar{v}_{i2} + \dots + h_{jn_T} \bar{v}_{in_T} \\ &= \text{Re}(\beta_{ji}) + j \text{Im}(\beta_{ji}). \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Até o momento não usamos a hipótese de  $h_{ji}$  ser variável aleatória complexa gaussiana com

variância  $1/2$  por dimensão. Tal hipótese aparece implicitamente na equação (2.2.17). Note que  $\beta_{ji}$  é uma variável aleatória que depende das variáveis aleatórias  $h_{ji}$ , assim  $\beta_{ji}$  é uma variável aleatória complexa gaussiana. Segundo a seção 1.1.6, temos que  $|\beta_{ji}|$  é uma variável aleatória de Rice com parâmetros  $\sigma^2 = 1/2$  e coeficiente de não-centralidade  $a^2$  com expressão

$$a^2 = (E(\operatorname{Re}(\beta_{ji})))^2 + (E(\operatorname{Im}(\beta_{ji})))^2 = (\operatorname{Re}(E(\beta_{ji})))^2 + (\operatorname{Im}(E(\beta_{ji})))^2 = |E(\beta_{ji})|^2. \quad (2.2.18)$$

Usando (1.1.24), temos que a variável aleatória  $|\beta_{ji}|$  possui como fdp

$$p(|\beta_{ji}|) = 2 |\beta_{ji}| \exp(-|\beta_{ji}|^2 - a^2) J_0(2a |\beta_{ji}|). \quad (2.2.19)$$

Suponha que  $r$  é o posto da matriz  $A(c, e)$ , assim  $A(c, e)$  possui  $r$  autovalores não-nulos, e a desigualdade (2.2.16) pode ser escrita na forma

$$P(C \rightarrow E | H) \leq \frac{1}{2} \prod_{j=1}^{n_R} \prod_{i=1}^r \exp\left(-\lambda_i |\beta_{ji}|^2 \frac{E_s}{4N_0}\right). \quad (2.2.20)$$

A equação (2.2.20) será objeto de estudo nas duas próximas subseções.

**Observação 2.2.3.** O cálculo da probabilidade exata de erro é de grande complexidade. Para este cálculo, recorreremos ao limitante da união

$$P(e) \leq \frac{1}{|X|} \sum_{C \in X} \sum_{\tilde{C} \neq C} P(C \rightarrow \tilde{C}),$$

onde  $|X|$  é a cardinalidade do código, mais detalhes em [BB99].

### 2.2.3 Critério do posto e do determinante.

Os STC propostos em [TSC98] foram construídos de forma que a probabilidade de erro par-a-par, da transmissão de dados por um canal Rayleigh plano quase-estático e coerente, seja a menor possível. Esta construção tem como base maximizar alguns parâmetros associados a matrizes formadas pelas diferenças de pares de palavras-código.

Uma das principais dificuldades em obter esses códigos vem do fato de que seus critérios são baseados na estrutura algébrica do domínio complexo de sinais em banda básica, e não em uma estrutura algébrica finita, como corpo de Galois, o que torna difícil a sistematização da busca computacional de bons códigos.

Nesta seção exibimos o critério de busca para códigos espaço-temporais obtido no trabalho [TSC98]. Este critério é amplamente conhecido como **critério do posto e do determinante**.

Quando o número de subcanais independentes  $rn_R$  é pequeno ( $\leq 4$ ), o limitante para a probabilidade de erro par-a-par é obtido tomando a média, termo a termo, de (2.2.20) sobre a variável aleatória  $|\beta_{ji}|$  cuja fdp é dada em (2.2.19). Até o momento supomos  $H$  conhecido, mas em sistemas reais nem sempre é possível conhecer  $H$ , dessa forma precisamos calcular a média de  $H$ . De maneira geral, a média é dada por

$$P(C \rightarrow E) = \int_{D=0}^{\infty} P(C \rightarrow E | H)p(D)dD,$$

onde  $p(D)$  é uma fdp. Em nosso caso

$$\begin{aligned} P(C \rightarrow E) &\leq \int_{|\beta_{n_R n_T}|=0}^{\infty} \cdots \int_{|\beta_{12}|=0}^{\infty} \int_{|\beta_{11}|=0}^{\infty} [P(C \rightarrow E | H)] \cdot p(|\beta_{11}|) \\ &\quad \times (|\beta_{12}|) \cdots p(|\beta_{n_R n_T}|) \cdot d|\beta_{11}| \cdot d|\beta_{12}| \cdots d|\beta_{n_R n_T}| \\ &= \prod_{j=1}^{n_R} \prod_{i=1}^r \left( \int_{|\beta_{ji}|=0}^{\infty} |\beta_{ji}| \exp(-a^2) \exp\left(-|\beta_{ji}|^2 \left(1 + \lambda_i \frac{E_s}{4N_0}\right)\right) J_0(2a|\beta_{ji}|) d|\beta_{ji}| \right) \\ &\leq \prod_{j=1}^{n_R} \prod_{i=1}^r \left( \frac{1}{1 + \lambda_i \frac{E_s}{4N_0}} \exp\left(-\frac{a^2 \lambda_i \frac{E_s}{4N_0}}{1 + \lambda_i \frac{E_s}{4N_0}}\right) \right). \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Dessa forma, obtemos um limitante para a probabilidade de erro par-a-par no caso do desvanecimento do tipo Rice quando  $rn_R \leq 4$ . Supondo desvanecimento de Rayleigh ( $a = 0$ ), o limitante torna-se

$$P(C \rightarrow E) \leq \left( \prod_{i=1}^r \frac{1}{1 + \lambda_i \frac{E_s}{4N_0}} \right)^{n_R}. \quad (2.2.22)$$

Esse limitante é de difícil manipulação e pode ser escrito de maneira mais simples. Usando algumas majorações, a probabilidade de erro é dada na forma

$$P(C \rightarrow E) \leq \left( \prod_{i=1}^r \lambda_i \right)^{-n_R} \left( \frac{E_s}{4N_0} \right)^{-rn_R}. \quad (2.2.23)$$

Portanto, a busca de bons códigos espaço-temporais a serem usados em canais de comunicação multiantena, quando  $r \cdot n_R$  é pequeno ( $\leq 4$ ), deve ser feita para minimizar a equação (2.2.23). Neste caso, o critério de busca pode ser resumido como:

- Maximizar o posto mínimo  $r$  da matriz  $A(c, e)$ , definida em (2.2.11), sobre todos os pares de palavra-código distintas.
- Maximizar o produto mínimo  $\prod_{i=1}^r \lambda_i$  da matriz  $A(c, e)$  entre todos os pares de palavra-código distintas com posto mínimo.

Este critério é conhecido como *critério do posto e do determinante*, ou em menção a seus criadores, de *critério TSC*.

Para maximizar o posto mínimo, é interessante encontrar um código espaço-temporal com posto total para todas as matrizes  $A(c, e)$ , ou seja.  $r = n_T$ . Códigos com esta propriedade são chamados, na literatura, como códigos com *diversidade total*.

## 2.2.4 Critério do traço.

Nesta seção deduzimos o critério de busca para códigos espaço-temporais conhecido como **critério do traço**. O critério será deduzido da equação (2.2.9), quando  $r \cdot n_R > 4$ , e foi exibido pela primeira vez no trabalho [YCV03].

Temos que  $|\beta_{ji}|$  é uma variável aleatória de Rice, onde  $\beta_{ji}$  foi definido na equação 2.2.17. Dessa forma  $|\beta_{ji}|^2$  é uma variável aleatória chi-quadrada não-central com dois graus de liberdade e coeficiente de não-centralidade  $a^2$  definido em (2.2.18). Segundo (1.1.21), a média e a variância de  $|\beta_{ji}|^2$  são dados por

$$m_{|\beta_{ji}|^2} = 2 \cdot \frac{1}{2} + a^2 = 1 + a^2, \quad \sigma_{|\beta_{ji}|^2} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 = 1 + 2a^2.$$

O limitante superior da desigualdade (2.2.20) possui  $r \cdot n_R$  variáveis aleatórias chi-quadrada independentes. Suponha que  $rn_R > 4$ , pelo teorema do limite central (teorema 1.1.20 seção 1.1.7), a expressão

$$D = \sum_{j=1}^{n_R} \sum_{i=1}^r \lambda_i |\beta_{ij}|^2$$

é uma variável aleatória que tende ao comportamento de uma variável aleatória Gaussiana  $D$  com média

$$m_D = \sum_{j=1}^{n_R} \sum_{i=1}^r \lambda_i (1 + a^2)$$

e variância

$$\sigma_D^2 = \sum_{j=1}^{n_R} \sum_{i=1}^r \lambda_i^2 (1 + 2a^2).$$

Como na subseção anterior, precisamos calcular a média da variável aleatória  $D$ . Essa média é dada pela expressão geral

$$P(C \rightarrow E) = \int_{D=0}^{\infty} P(C \rightarrow E | H) p(D) dD.$$

Em nosso caso particular, obtemos que

$$P(C \rightarrow E) \leq \int_{D=0}^{\infty} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_s}{4N_0} D\right) p(D) dD, \quad (2.2.24)$$

onde  $p(D)$  é a fdp gaussiana da variável aleatória  $D$  e satisfaz (1.1.11). Usando a expressão

$$\int_{D=0}^{\infty} \exp(-\gamma D) p(D) dD = \exp\left(\frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_D^2 - \gamma m_D\right) Q\left(\frac{\gamma \sigma_D^2 - m_D}{\sigma_D}\right), \quad \gamma > 0$$

o limitante superior em (2.2.20) pode ser expresso como

$$P(C \rightarrow E) \leq \frac{1}{2} \left( \exp\left(\frac{1}{2} \left(\frac{E_s}{4N_0}\right)^2 \sigma_D^2 - \frac{E_s}{4N_0} m_D\right) \right) Q\left(\frac{\frac{E_s}{4N_0} \sigma_D^2 - m_D}{\sigma_D}\right), \quad (2.2.25)$$

e obtemos um limitante para a probabilidade de erro par-a-par no caso do desvanecimento do tipo Rice quando  $rn_R > 4$ . No caso do desvanecimento de Rayleigh ( $a = 0$ ), a média e a variância de  $D$  possuem a seguinte forma

$$m_D = n_R \sum_{i=1}^r \lambda_i \quad , \quad \sigma_D^2 = n_R \sum_{i=1}^r \lambda_i^2.$$

Substituindo  $m_D$  e  $\sigma_D^2$  em (2.2.25), obtemos que o limitante superior para a probabilidade de erro num canal com desvanecimento Rayleigh é

$$P(C \rightarrow E) \leq \frac{1}{2} \left( \exp\left(\frac{1}{2} \left(\frac{E_s}{4N_0}\right)^2 n_R \sum_{i=1}^r \lambda_i^2 - \frac{E_s}{4N_0} n_R \sum_{i=1}^r \lambda_i\right) \right) Q\left(\frac{\frac{E_s}{4N_0} n_R \sum_{i=1}^r \lambda_i^2 - n_R \sum_{i=1}^r \lambda_i}{\sqrt{n_R \sum_{i=1}^r \lambda_i^2}}\right). \quad (2.2.26)$$

Para obter uma melhor visão no critério de projeto do código, supomos que o código espaço-temporal opera com razoável  $SNR$ , e usando algumas majorações concluímos que

$$P(C \rightarrow E) \leq \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{E_s}{4N_0} n_R \sum_{i=1}^r \lambda_i\right). \quad (2.2.27)$$

Portanto, a busca de códigos espaço-temporais a serem usados em canais de comunicação

multiantena, quando  $r \cdot n_R$  é grande ( $\geq 4$ ), deve ser feita para minimizar a equação (2.2.27). O limitante (2.2.27) mostra que a probabilidade de erro é dominada pelas palavras-código com a soma mínima dos autovalores de  $A(c, e)$ , ou seja,  $tr(A(c, e))$ . A fim de minimizar a probabilidade de erro, a soma mínima de todos autovalores da matriz  $A(c, e)$  entre todos os pares de palavras-código distintas devem ser maximizados.

Como

$$tr(A(c, e)) = \sum_{i=1}^{n_T} \sum_{t=1}^l |e_t^i - c_t^i|^2 = \sum_{i=1}^{n_R} \lambda_i,$$

temos que o traço de  $A(c, e)$  é equivalente ao quadrado da distância euclidiana entre as palavras-código  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{E}$ . Este fato pode ser comprovado da seguinte maneira: como  $A(c, e) = (E - C)(E - C)^*$ , temos que

$$tr(A(c, e)) = tr((E - C)(E - C)^*) = \| (E - C) \|^2.$$

Portanto, maximizar a soma mínima de todos autovalores da matrix  $A(c, e)$  entre os pares de palavras-código distintas, ou o traço mínimo de  $A(c, e)$ , é equivalente a maximizar a distância euclidiana mínima entre todos os pares de palavras-código distintas. Este critério é chamado **critério do traço** e pode ser resumido como

- Certificar-se que o posto mínimo  $r$  da matriz  $A(c, e)$  sobre todas os pares das palavras-código distintas é tal que  $rn_R \geq 4$ .
- Maximizar o traço mínimo  $\sum_{i=1}^r \lambda_i$  da matriz  $A(c, e)$  entre todos os pares de palavras-código distintas com posto mínimo.

## 2.3 Espaços de Matrizes.

Nesta seção apresentamos o tema de estudo desta tese, e que será abordado no capítulo 4, usando a técnica apresentada no capítulo 3.

Quando estudamos a solução de um sistema de equações lineares, via escalonamento, usamos matrizes sem preocupações com suas propriedades. Olhamos as matrizes simplesmente como uma tabela de números, uma maneira mais simples de escrever um sistema de equações lineares. Entretanto, interpretando um sistema de equações lineares na forma matricial  $Ax = b$ , podemos usar multiplicação de matrizes para descobrir propriedades básicas teóricas e para provar teoremas gerais relativos aos sistemas lineares.

O grande Matemático francês Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827) disse que “Tal é a vantagem de uma linguagem bem construída que sua notação simplificada muitas vezes torna-se a fonte das

teorias mais profundas". A Teoria das Matrizes valida a afirmação.

A seguir fazemos algumas considerações sobre os STC e os critérios de busca de códigos espaço-temporais. A primeira consideração é que a grande maioria dos trabalhos sobre STC versam sobre inventar novos códigos espaço-temporais e fazer a busca computacional de tais códigos.

Existe uma grande sutileza quando associamos à palavra-código  $C$  duas formas, como vetor e como matriz,

$$\mathbf{C} = (c_1^1 c_1^2 \cdots c_1^{n_T} c_2^1 c_2^2 \cdots c_2^{n_T} \cdots c_l^1 c_l^2 \cdots c_l^{n_T})$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \cdots & c_l^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \cdots & c_l^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^{n_T} & c_2^{n_T} & \cdots & c_l^{n_T} \end{pmatrix}_{n_T \times l}.$$

A equação (2.2.1), página 55, exhibe uma forma simples do problema de transmissão em um canal MIMO. Nesta equação usamos fortemente a propriedade de multiplicação de matrizes. Não estamos usando matrizes simplesmente como um maneira de representar uma lista de objetos.

Na construção dos critérios de busca, apresentados nas subseções 1.2.3 e 1.2.4, usamos livremente o fato de representamos um vetor na forma matricial. A norma de Frobenius é muito útil para esta representação, pois a norma  $\|C\|_F^2$  de uma matriz  $C$  é simplesmente o quadrado da norma Euclidiana de  $C$  como vetor. Usamos livremente a representação matricial de uma palavra-código. Entretanto, julgamos que tal abordagem não é a mais apropriada. Por exemplo, dados os vetores  $H \in \mathbb{C}^{n_R \cdot n_T}$  e  $C \in \mathbb{C}^{n_T \cdot l}$ , considere suas representações matriciais  $H_{n_R \times n_T}$  e  $C_{n_T \times l}$  e efetue a multiplicação de matrizes

$$(HC)_{n_R \times l}.$$

Como associar a matriz  $(HC)_{n_R \times l}$  com um vetor no espaço  $\mathbb{C}^{n_R \cdot l}$ ? Isso seria como definir algum tipo de produto entre vetores, ou seja, uma operação que a cada dois vetores associamos um terceiro vetor. Usando a teoria das matrizes, a representação vetor-matriz é feita com sucesso somente quando associamos o vetor  $(a, b)$  com a matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Os critério de busca de códigos espaço-temporais estão baseados em operadores matriciais como determinante, posto e traço. Não fazemos esta busca usando operadores relacionados com vetores, não procuramos códigos espaço-temporais como sendo algum tipo de subespaço ou algum subconjunto de  $\mathbb{C}^n$ , este tipo de busca é feita na teoria clássica dos códigos corretores de erros

onde  $n_R = n_T = 1$ . Na busca de códigos espaço-temporais usamos propriedades de matrizes, e os códigos são conjuntos de matrizes, não de vetores.

Na construção dos critérios de busca de códigos espaço-temporais usamos várias vezes diagonalização de matrizes, que é uma maneira mais simples de representar uma matriz. Como esta propriedade pode ser vista em vetores, como seria uma maneira mais simples em descrever um vetor?

Levando em conta as considerações apresentadas, propomos um novo olhar sobre os STC. Pretendemos definir um ambiente natural para o STC e uma norma intrínseca ao ambiente.

Propomos que o ambiente natural dos STC seja um espaço vetorial normado de matrizes. Além disso, propomos que o decodificador de máxima verossimilhança seja definido pela norma espectral para matrizes. Escolhemos a norma espectral, pois ela é a norma induzida pela norma euclidiana de vetores, e surge de maneira natural em um espaço de matrizes.

**Definição 2.3.1.** Um **STC** é um subconjunto finito de um espaço vetorial normado de matrizes.

Por simplicidade, supomos que a energia média por sinal em cada antena transmissora seja unitária, ou seja,  $E_s = 1$ . Portanto ao enviar a palavra-código  $C$ , a matriz recebida é dada por

$$R = HC + N,$$

onde  $H$  e  $N$  foram descritas na subseção 1.2.1. Suponha que o decodificador de máxima verossimilhança, ao receber  $R$ , escolhe erroneamente que a palavra-código enviada foi  $E$ , uma vez que enviamos  $C$ , assim

$$\begin{aligned} \| R - HE \|_2 &\leq \| R - HC \|_2 \\ \| HC + N - HE \|_2 &\leq \| HC + N - HC \|_2 \\ \| -H(E - C) + N \|_2 &\leq \| N \|_2 \\ \| H(E - C) - N \|_2 &\leq \| N \|_2 \\ \| H(E - C) \|_2 - \| N \|_2 &\leq \| H(E - C) - N \|_2 \leq \| N \|_2, \end{aligned}$$

logo

$$\| H(E - C) \|_2 \leq 2 \| N \|_2 .$$

e conseqüentemente

$$\frac{1}{4} \| H(E - C) \|_2^2 \leq \| N \|_2^2 .$$

Pelo teorema 1.2.19, sabemos que  $\| A \|_2^2 = \lambda_{max}(AA^*) = \sigma_{max}^2(A)$ . Como desejamos a proba-

bilidade do decodificador ML errar e supomos  $H$  conhecido, devemos calcular

$$P(C \rightarrow E | H) = P\left(\frac{1}{4} \|H(E - C)\|_2^2 \leq \|N\|_2^2\right).$$

Logo devemos calcular

$$P\left(\frac{1}{4} \|H(E - C)\|_2^2 \leq \lambda_{max}(NN^*)\right).$$

Nesse ponto obtemos um novo objeto,  $\lambda_{max}(NN^*)$ . Precisamos encontrar a fdp do maior autovalor da matriz  $NN^*$ , técnica que será apresentada no capítulo 3.

## Matrizes Aleatórias.

Como vimos na última seção do capítulo anterior, precisamos encontrar a fdp para o maior autovalor de matrizes do tipo  $AA^*$ . Tais resultados são encontrados na teoria das Matrizes Aleatórias. A *grosso modo*, matrizes aleatórias são matrizes cujos elementos são variáveis aleatórias. Dessa forma, faz sentido estudar todos os elementos relacionados com essas matrizes, como traço, autovalores, autovetores, etc.

A teoria das Matrizes Aleatórias surgiu no trabalho do matemático-estatístico John Wishart em [Wis28], mas ganhou visibilidade em meados dos anos 50 com as contribuições do físico-matemático Eugene Paul Wigner <sup>1</sup> nos trabalhos [Wig51], [Wig55] e [Wig58]. Nestes trabalhos, Wigner estudou o espalhamento de ressonâncias de partículas com núcleos pesados em reações nucleares lentas. Em seguida, o físico-matemático Freeman Dyson formalizou matematicamente a teoria nos trabalhos [Dys62a], [Dys62b] e [Dys62c].

Wigner percebeu que a distribuição de autovalores, obtida pela diagonalização de certas matrizes, em que os elementos eram determinados aleatoriamente e sujeitos a uma distribuição gaussiana, coincidia com a estatística das flutuações dos níveis de átomos pesados, conseguidos experimentalmente. Dessa forma, a fdp para os autovalores de Matrizes Aleatórias passou a ter grande

---

<sup>1</sup>Wigner e von Neumann foram colegas de escola em Budapeste e colegas na universidade de Princeton. Wigner foi agraciado com o prêmio Nobel de Física em 1963.

importância na teoria.

Como sistemas caóticos possuem comportamento aleatório, nada melhor que tratá-los como uma solução aleatória. Então Mehta [**Meh04**], considerando uma matriz quadrada de ordem grande, cujos elementos são escolhidos aleatoriamente com uma determinada lei de probabilidade, propõe uma pergunta sobre os seus autovalores e autovetores: “Como estudaremos as probabilidades dos seus autovetores e autovalores?” Essa pergunta é fundamental para o entendimento de como se comporta estatisticamente a ressonância de um nêutron lento na física nuclear.

Algumas referências são os livros [**Meh04**], [**For10**], [**AGZ09**], [**TVer04**] e [**Tao12**]. O livro [**For10**] possui várias aplicações das Matrizes Aleatórias na Física. Já [**TVer04**] traz um tutorial sobre a aplicação de matrizes aleatórias no estudo de limitantes para capacidade de transmissão de dados em canais de comunicação sem fio.

Embora os primeiros desenvolvimentos da teoria das Matrizes Aleatórias foram motivados por problemas experimentais em física, engenharia e estatística, essa teoria agora é usada em várias áreas da matemática como a hipótese de Riemann, equações diferenciais estocásticas, física estatística, sistemas caóticos, álgebra linear numérica, redes neurais, teoria da informação, processamento de sinais, dentre muitos outros. A teoria das Matrizes Aleatórias tornou-se de grande expressão e atraiu grandes matemáticos do mundo todo, como podem ser vistos nos trabalhos [**TV10**], [**TV11a**], [**TV11b**], [**TV12**].

Na primeira seção deste capítulo introduzimos alguns conceitos técnicos sobre as matrizes aleatórias e apresentamos mais detalhadamente algumas aplicações desta teoria. Na segunda seção focamos em nosso objeto de estudo, onde apresentamos resultados para a fdp do maior autovalor de uma matriz Wishart. Como Matrizes Wishart são matrizes hermitianas, usando a proposição 1.2.9, seus autovalores são reais e assim a fdp de seus autovalores está relacionada com variáveis aleatórias reais. Como  $W$  é quadrada, podemos diagonalizar, achar seus autovalores e analisar seu comportamento.

### 3.1 Matrizes Aleatórias.

Em estatística elementar, a mais importante distribuição é a distribuição gaussiana, denotada por  $N(\mu, \sigma^2)$ , com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , cuja fdp é

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

A distribuição gaussiana merece este lugar especial, em parte, devido ao teorema do limite central estudado na seção 1.7, no qual, grosseiramente interpretado, afirma que a soma de uma grande quantidade de variáveis aleatórias se comporta como uma distribuição gaussiana.

Em estatística multivariada, as mais importantes distribuições são obtidas da distribuição gaussiana. Estatísticos têm descoberto que generalizações multivariadas da distribuição gaussiana frequentemente são suficientes para seus modelos. Seguindo este princípio, estamos interessados no estudo de matrizes aleatórias obtidas da distribuição gaussiana.

A teoria das Matrizes Aleatórias é o estudo das matrizes cujas entradas são variáveis aleatórias, ou equivalentemente, o estudo das variáveis aleatórias com elementos em espaço de matrizes.

**Definição 3.1.1.** Uma *Matriz Aleatória* é uma matriz com entradas seguindo alguma distribuição de probabilidade.

**Definição 3.1.2.** O *conjunto Gaussiano* é o conjunto das matrizes aleatórias de ordem  $m \times n$ , com entradas seguindo distribuição  $N(0, 1)$ , independentes entre si e identicamente distribuídas. Este conjunto é denotado  $G(m, n)$ . Se  $G \in G(m, n)$  e  $x_{ij} \in G$ , então a fdp de  $x_{ij}$  é

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{ij}^2}{2}\right).$$

**Definição 3.1.3.** Uma matriz aleatória simétrica que pode ser escrita na forma  $AA^T$ , onde  $A \in G(m, n)$  é chamada matriz *Wishart Real*. O conjunto de todas as matrizes Wishart Reais é

representado por  $W(m,n)$ .

**Definição 3.1.4.** O *conjunto Gaussiano Ortogonal* é o conjunto das matrizes aleatórias simétricas  $m \times m$  com elementos seguindo distribuição gaussiana, independentes entre si e identicamente distribuídas. Elementos triangular superior seguem  $N(0, 1/2)$  e as entradas da diagonal principal seguem  $N(0, 1)$ . Tal conjunto é denotado GOE e a fdp dos elementos da diagonal principal e triangular superior são respectivamente

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{ij}^2}{2}\right) \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x_{ij}).$$

Nas expressões acima consideramos variância  $\sigma^2 = 1$  por simples comodidade, mas a definição pode ser considerada para qualquer variância  $\sigma^2$ . As matrizes aleatórias  $G(m, n)$ ,  $W(m, n)$  e GOE podem ser definidas para o caso complexo.

**Definição 3.1.5.** O conjunto das variáveis aleatórias na forma  $x + iy$ , onde  $x, y$  seguem  $N(\mu, \sigma^2)$  e são independentes e identicamente distribuídas é dado por  $\tilde{N}(\mu, \sigma^2)$ .

**Definição 3.1.6.** O *conjunto Gaussiano Complexo* é o conjunto das matrizes aleatórias com entradas seguindo  $\tilde{N}(0, 1)$ , independentes e identicamente distribuídas. Tal conjunto é denotado por  $\tilde{G}(m, n)$ .

**Definição 3.1.7.** Uma matriz aleatória hermitiana  $m \times n$ , que pode ser escrita na forma  $AA^*$ , onde  $A \in \tilde{G}(m, n)$  é chamada *Wishart Complexa*. O conjunto de todas as matrizes Wishart Complexas é representado por  $\tilde{W}(m, n)$ .

**Definição 3.1.8.** O *conjunto Gaussiano Unitário* é o conjunto das matrizes aleatórias hermitianas  $m \times m$  com elementos seguindo distribuição gaussiana complexa, independentes entre si e identicamente distribuídas. Elementos triangular superior seguem distribuição  $\tilde{N}(0, 1/4)$ , e elementos da diagonal principal seguem distribuição  $N(0, 1/2)$ . Este conjunto é denotado GUE.

### 3.1.1 Densidade conjunta.

Para construir a fdp conjunta para alguns tipos de matrizes aleatórias com entradas independentes, simplesmente tomamos o produto das fdp das entradas independentes, assim

**Lema 3.1.9.** A fdp conjunta para a respectiva matriz aleatória é

$$\begin{aligned}
 G(m, n) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{mn}}} \exp\left(\operatorname{tr}\left(-\frac{AA^T}{2}\right)\right) \\
 GOE &= \frac{1}{\sqrt{2^n} \pi^{\frac{n(n+1)}{4}}} \exp\left(\operatorname{tr}\left(-\frac{A^2}{2}\right)\right) \\
 \tilde{G}(m, n) &= \frac{1}{(2\pi)^{mn}} \exp\left(\operatorname{tr}\left(-\frac{AA^*}{2}\right)\right) \\
 GUE &= \sqrt{\frac{2^{n(n-1)}}{\pi^{n^2}}} \exp\left(\operatorname{tr}\left(-A^2\right)\right).
 \end{aligned}$$

**Demonstração:** No caso GOE, temos que

$$\begin{aligned}
 P(X) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{ii}^2}{2}\right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x_{ij}^2}{2}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{n^2-n}{2}} \prod_{i,j=1}^n \exp\left(-\frac{x_{ij}^2}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \frac{1}{\pi^{\frac{n(n+1)}{4}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \operatorname{tr}(A^2)\right).
 \end{aligned}$$

E segue de forma similar para os outros casos. □

Os elementos de uma matriz Wishart geralmente não são independentes, assim a distribuição conjunta é mais difícil de ser construída. De acordo com [Mui82], o cálculo é feito em dois passos, usando decomposição de Cholesky e decomposição L.U.

**Lema 3.1.10.** A fdp conjunta dos elementos de uma matriz em  $W(m, n)$  é

$$\frac{1}{\sqrt{2^{mn}} \Gamma_m\left(\frac{n}{2}\right)} \exp\left(\operatorname{tr}\left(-\frac{W}{2}\right)\right) (\det W)^{\frac{n-m-1}{2}},$$

onde  $\Gamma_m(n/2)$  foi definido na seção 1.5. Para matrizes em  $\tilde{W}(m, n)$  a fdp conjunta é

$$\frac{1}{2^{mn} \tilde{\Gamma}_m(n)} \exp\left(\operatorname{tr}\left(-\frac{W}{2}\right)\right) (\det W)^{n-m}.$$

Dada uma matriz aleatória  $A$ , existem muitas estatísticas envolvendo objetos associados a matriz  $A$ , como os autovalores, valores singulares, traço, determinante, etc. Considere a norma de operador

$$\|A\|_{op} := \sup_{x \in \mathbb{C}^n: |x|=1} \{|Ax|\}$$

da matriz  $A$ . Estudar a estatística da norma é interessante por si só, mas é útil como limitante superior ligado com outras estatísticas. Por exemplo, como vimos na definição 1.2.17,  $\|A\|_{op}$  pode ser o maior valor singular de  $A$ ,  $\sigma_1(A)$ , e assim domina os outros valores singulares.

A seguir apresentamos algumas aplicações da Teoria das Matrizes Aleatórias.

### 3.1.2 Física Nuclear.

A Teoria quântica enuncia que níveis de energia discreta de um núcleo atômico corresponde aos autovalores do operador de Schrodinger. Infelizmente, para átomos pesados, o operador é muito complexo, então físicos tem teorizado que o operador de Schrodinger poderia ser substituído por uma matriz aleatória. Seus autovalores, então, corresponderiam ao nível de energia observado.

Uma característica das matrizes GOE e que torna relevante sua aplicação em física quântica é o fato da fdp ser invariante sob transformações ortogonais.

**Proposição 3.1.11.** Suponha que  $R$  é uma matriz real ortogonal e que  $A$  é uma matriz GOE, então

$$P(A) = P(R^T A R).$$

A partir da proposição acima houve entendimento da aplicação de matrizes GOE no estudo dos espectros quânticos. Um axioma básico da mecânica quântica diz que o espectro de energia de

um sistema quântico é dado pelos autovalores de seu operador Hamiltoniano  $H$ , sendo este último em dimensões infinitas gerais. Entretanto, para modelar a parte discreta do espectro quântico é necessária uma aproximação que consiste em substituir  $H$  por uma matriz Hermitiana de dimensão finita  $n \times n$ , que tem apenas espectro discreto.

**Proposição 3.1.12.** Se  $U$  é uma matriz unitária e  $A$  é GUE, então

$$P(U^{-1}AU) = P(A).$$

Para combinar experimentos e teoria, e reciprocamente para fazer previsões da teoria, físicos precisam de mais informações sobre os autovalores das matrizes GOE e GUE. Especificamente, eles têm se interessado em variáveis aleatórias dando o espaçamento entre autovalores consecutivos. Quando os autovalores são normalizados, esta variável aleatória tem a mesma distribuição, e não importa onde os autovalores estão contidos no espectro. Mais geralmente, existem razões físicas para estudar o  $k$ -ésimo maior autovalor de uma dada matriz.

### 3.1.3 Função Zeta de Riemann.

A função zeta de Riemann é fundamental para a Teoria dos Números, em particular devido à hipótese de Riemann e sua relação com números primos. É notável haver uma ligação íntima entre os autovalores de uma matriz aleatória e as raízes da função zeta de Riemann. Foi conjecturado que  $\zeta(1/2 + \lambda i)$  tem raiz real  $\lambda$  porque de alguma maneira a raiz corresponde aos autovalores de um operador Hermitiano. Odlyzko [Odl89] testou esta conjectura através de um enorme esforço computacional, onde ele calculou 70 milhões de raízes próximas da raiz  $10^{20}$  e vários outros conjuntos de raízes. Ele encontrou que autovalores de matrizes de GUE modelam as raízes incrivelmente bem.

### 3.1.4 Teoria dos Grafos.

Pesquisadores em teoria dos grafos estão encontrando novos problemas perguntando se um grafo aleatório possui certas propriedades. Algumas vezes, estes problemas podem ser transformados em um problema de matriz aleatória, onde autovalores têm importante papel.

Um grafo pode ser descrito por sua matriz de incidência com entradas  $A_{ij}$  as quais são 1 quando existe uma aresta ligando o vértice  $i$  ao vértice  $j$ , caso contrário 0. Se no lugar de um grafo fixo, tomamos um grafo aleatório, então temos uma distribuição de matrizes aleatórias.

A prova original de Wigner para a lei do semi-círculo tem uma interessante interpretação no contexto da teoria dos grafos. Essa prova baseia-se no cálculo de  $tr(A^k)$  para matrizes aleatórias  $A$  e observando que este traço, quando normalizado, a sequência gerada converge. Se  $A$  é matriz de incidência de um grafo,  $tr(A^k)$  conta o número de caminhos no grafo que voltam ao ponto inicial. O  $k$ -ésimo momento dos autovalores está relacionado com a probabilidade de que um caminho aleatório de comprimento  $k$  irá voltar ao ponto de partida. Veja [Bol85] para mais detalhes sobre a teoria dos grafos aleatórios.

### 3.1.5 Fundos de Investimento.

O trabalho [CRC07] usou a teoria das matrizes aleatórias para analisar a matriz de covariância de um grupo de fundos para apurar as estratégias utilizadas para gestão de fundos. Neste trabalho verificou-se um acréscimo de 35% na diferença entre o risco realizado e o risco previsto. No final da década de 90, seu uso na análise de comportamentos de preços de ativos tornou-se crescente até a atualidade, sendo em sua maioria estudos relacionados a ações negociadas em bolsas de valores. Para mais detalhes veja os trabalhos [LCPB00] e [PGRAGS02].

## 3.2 Densidade dos Autovalores.

Nesta seção focamos no estudo da fdp para autovalores de Matrizes Wishart. A principal referência é o artigo de Alan Edelman<sup>2</sup> [Ede88]. Outras referências usadas são o artigo de Goldstine e von Neuman [GN51] e o livro de Wilks [Wil43]<sup>3</sup>. Os autovalores de uma matriz aleatória são variáveis aleatórias e portanto podem ser descritos por sua fdp, e um importante caso ocorre com a matriz complexa Wishart.

Por três séculos, matemáticos pesquisaram uma fórmula exata para as raízes de um polinômio geral. Seus esforços foram em vão quando Ruffini (1813) e Abel (1827) demonstraram, de maneira independente, a insolubilidade por radicais de polinômios de grau cinco. Isto imediatamente implicou na falta de uma expressão simples para autovalores de uma matriz geral. O que seria redefinir o problema, trocando geral por aleatório? Não estamos mais interessados nos autovalores de uma matriz, as distribuições e médias são o que importam agora. Como o número de condicionamento comporta-se em média? Essa questão foi elaborada de várias formas diferentes, por von Neumann [GN51] e Demmel [Dem88], e muitos outros.

O trabalho [Ede88] estuda o número de condicionamento de matrizes aleatórias reais e complexas, e conseqüentemente os autovalores, com objetivo de resolver vários problemas em aberto sobre Análise Numérica. Tais problemas foram levantadas nos trabalhos de von Neumann, Birkhoff, Smale, Demmel e outros. A distribuição do número de condicionamento de uma matriz aleatória descreve quantos dígitos de precisão numérica são perdidos devido ao mal condicionamento quando resolvemos um sistema de equações lineares. A relação entre números de condicionamento e autovalores foi dada na seção 1.3.

Embora muitas distribuições de probabilidade tenham sido propostas, a mais famosa é o con-

---

<sup>2</sup>Edelman foi agraciado com o Prêmio Chauvenet em 1998. Além disso, foi o primeiro estudante do mundo a usar o software MATLAB.

<sup>3</sup>usamos esta edição, pois ficou mais fácil usar as fórmulas que precisamos seguindo as notas de rodapé das páginas 189 e 190 do artigo [Ede88].

junto gaussiano, definições 3.1.2 e 3.1.6, proposto por Wigner [**Wig65**]. Wigner obteve a distribuição conjunta dos autovalores das matrizes GOE e GUE em 1962, entretanto o trabalho foi publicado no ano de 1965 [**Wig65**]. Ele também é responsável pela famosa *lei do semi-círculo*, na qual afirma-se que o histograma dos autovalores de uma matriz aleatória grande é grosseiramente um semi-círculo.

O cálculo da fdp dos autovalores de uma matriz aleatória Wishart foi estabelecido em 1939 no trabalho [**Hsu39**]. Vários pesquisadores estudaram os autovalores de uma Matriz Wishart sob vários pontos de vista, [**Jon82**], [**MP67**], [**Tro84**] e [**Wac78**]. Estimativas do maior e menor autovalor são dados em [**Ger80**] e [**Sil85**]. Uma complicada expressão para a distribuição do maior autovalor é dada em [**Sug67**] e para o menor autovalor em [**KC71**].

Um importante aspecto da teoria das matrizes aleatórias é que a distribuição dos autovalores de uma matriz aleatória do tipo Wishart tem sido aplicado com sucesso para analisar e projetar sistemas de comunicação sem fio [**TVer04**]. Dada a importância em várias aplicações, a distribuição dos autovalores de matrizes aleatórias é indiscutivelmente um dos mais importantes tópicos em engenharia de comunicação, onde, por exemplo, foi amplamente aplicada para análise de capacidade do canal MIMO, veja [**Tel99**], [**ALTV04**] e [**CWZ03**].

Recentemente, métodos gerais para obter a distribuição de autovalores foram desenvolvidos para uma classe geral de matrizes aleatórias. O trabalho [**OPF09**] apresenta uma expressão geral para distribuição marginal dos autovalores ordenados. Enquanto [**ZCW09**] e [**ZC08**] propõem uma expressão alternativa para a mesma distribuição, mas tais resultados exibem expressões distintas para casos da matriz Wishart e pseudo-Wishart. Esse problema foi evitado mais tarde na expressão do trabalho [**CZ08**], no qual a expressão depende do “determinante” da matriz tensor de posto 3. Depois disso, uma expressão mais simples para a distribuição dos autovalores foi apresentada por [**SMJ09**] e envolve determinante convencional.

Como pode ser observado, existem várias maneiras de expressar a fdp dos autovalores de uma

matriz Wishart. Por hipótese, neste trabalho, supomos que os autovalores da matriz Wishart são ordenados. Entretanto, os trabalhos [ALTV04] e [ATLV06] apresentam uma expressão para a fdp, considerando os autovalores desordenados para uma matriz não-central Wishart.

Como existem várias expressões para a fdp dos autovalores de uma matriz Wishart, devemos usar uma que satisfaça as hipóteses de nosso problema, definidas na seção 2.3.

Supomos que as variáveis aleatórias gaussianas possuem média zero. Em termos técnicos isto significa que a matriz Wishart é denominada central. Além disso, supomos que as variáveis aleatórias são independentes entre si, isso significa que as antenas transmissoras, e também as receptoras, estão espaçadas entre si de tal forma que o sinal transmitido, ou recebido, por uma determinada antena não sofra interferência de sua antena vizinha, ou seja, a distância entre as antenas é maior que o dobro do comprimento da onda da transportadora. Em termos técnicos, independência entre as antenas significa que a matriz de covariância, denotada na teoria por  $\Sigma$ , é a matriz identidade. Este caso é conhecido como Wishart decorrelatada.

Como focamos no caso central com  $\Sigma = I$ , ignoramos a beleza da teoria dos polinômios zonais, envolvendo funções hipergeométricas. Apesar da elegância, os polinômios zonais são de difícil manipulação, veja mais detalhes em [Jam64].

Em seguida estudamos as fdp de uma matriz Wishart central decorrelatada, primeiro para o caso real e para finalizar este capítulo, o caso complexo. Estas seções são muito técnicas e servem de base para os resultados, que julgamos serem inéditos na teoria, que serão apresentados no capítulo 4.

### 3.2.1 Caso Real.

Nesta seção exibimos a fdp conjunta dos autovalores de uma matriz Wishart real  $W(m, n)$ . Além disso, generalizamos alguns resultados do artigo [Ede88], sendo o mais importante deles um limitante para a fdp do maior autovalor da matriz real Wishart.

Consideramos variáveis aleatórias gaussianas com variância  $\sigma^2$ , não necessariamente 1, como apresentado nas definições 3.1.2 e 3.1.7, pois precisamos de resultados mais gerais no próximo capítulo. Seja  $G(m, n)$  o conjunto das matrizes de ordem  $m \times n$  cujas entradas são variáveis aleatórias reais independentes com distribuição  $N(0, \sigma^2)$ . Dado  $A \in G(m, n)$ , considere  $M = AA^T \in W(m, n)$ , onde

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{m-1} \geq \lambda_m \geq 0$$

são os autovalores da  $M$  pela proposição 1.2.9 tais autovalores são números reais positivos.

**Teorema 3.2.1.** Dado  $A \in G(m, n)$ , considere  $M = AA^T \in W(m, n)$ , suponha que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{m-1} \geq \lambda_m \geq 0$  são os autovalores da  $M$ . A fdp conjunta dos autovalores da matriz  $M$  é dada pela expressão

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = K_{n,m} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m \lambda_i\right) \prod_{i=1}^m \lambda_i^{\frac{n-m-1}{2}} \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j), \quad (3.2.1)$$

onde  $K_{n,m}$  é dado por

$$K_{n,m}^{-1} = \left(\frac{(2\sigma^2)^n}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \prod_{i=1}^m \Gamma\left(\frac{n-i+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-i+1}{2}\right) > 0. \quad (3.2.2)$$

Para que  $K_{n,m}$  seja maior do que zero, devemos supor  $m \leq n$ , e tal hipótese será assumida daqui em diante. Por exemplo, se  $n = 3$  e  $m = 6$ , então

$$K_{3,6}^{-1} = \left(\frac{(2\sigma^2)^3}{\pi}\right)^3 \prod_{i=1}^6 \Gamma\left(\frac{4-i}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5-i}{2}\right) \implies K_{3,6} = 0.$$

A constante  $K_{n,m}$  em (3.2.1) é uma constante de normalização, definida de tal forma que (3.2.1) represente uma fdp conjunta, ou seja,

$$\int_{R_1} f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) d\lambda_i = 1,$$

onde  $R_1 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) : \lambda_1 \in [0, \infty]; \lambda_i \in [0, \lambda_{i-1}], i \in \{2, \dots, m\}\}$ . Assim

$$\begin{aligned} & \int_{R_1} f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) d\lambda_i \\ &= K_{n,m} \int_{R_1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m \lambda_i\right) \prod_{i=1}^m \lambda_i^{\frac{n-m-1}{2}} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) d\lambda_i \\ &= 1, \end{aligned}$$

e a equação (3.2.2) é a forma analítica da seguinte integral

$$K_{n,m}^{-1} = \int_{R_1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m \lambda_i\right) \prod_{i=1}^m \lambda_i^{\frac{n-m-1}{2}} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) d\lambda_i. \quad (3.2.3)$$

Obter controle desta constante de normalização é fundamental no que segue. Assim, apresentamos algumas maneiras de exibir esta constante.

Suponha agora que  $A \in G(m-1, n)$ ,  $M \in W(m-1, n)$  e  $\lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_{m-1} \geq \lambda_m \geq 0$  são os autovalores de  $M$ . Neste caso a fdp conjunta dos autovalores de  $M$  é

$$\begin{aligned} & K_{n,m-1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^m \lambda_i\right) \prod_{i=2}^m \lambda_i^{\frac{n-(m-1)-1}{2}} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) \\ &= K_{n,m-1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^m \lambda_i\right) \prod_{i=2}^m \lambda_i^{\frac{n-m}{2}} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j). \end{aligned}$$

Como feito anteriormente, segue que

$$K_{n,m-1}^{-1} = \int_{R_2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^m \lambda_i\right) \prod_{i=2}^m \lambda_i^{\frac{n-m}{2}} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) d\lambda_i, \quad (3.2.4)$$

onde  $R_2 = \{(\lambda_2, \dots, \lambda_m) : \lambda_2 \in [0, \infty]; \lambda_i \in [0, \lambda_{i-1}], i \in \{3, \dots, m\}\}$ . Usando (3.2.2), a integral (3.2.4) coincide com

$$K_{n,m-1}^{-1} = \left(\frac{(2\sigma^2)^n}{\pi}\right)^{\frac{m-1}{2}} \prod_{i=1}^{m-1} \Gamma\left(\frac{n-i+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-i}{2}\right).$$

No produtório anterior, não podemos assumir que  $i$  varia entre 2 e  $m$ , pois a segunda função gama

da equação acima não está definida em  $i = m$ . O que importa neste produtório não são os índices das posições, mas a quantidade de elementos.

Suponha novamente que  $A \in G(m-1, n)$  e  $M \in W(m-1, n)$ , mas agora indexamos de maneira diferente os autovalores de  $M$  por  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{m-1} \geq 0$ . Neste caso a fdp conjunta dos autovalores de  $M$  é

$$\begin{aligned} & K_{n,m-1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i\right) \prod_{i=1}^{m-1} \lambda_i^{\frac{n-(m-1)-1}{2}} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) \\ = & K_{n,m-1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i\right) \prod_{i=1}^{m-1} \lambda_i^{\frac{n-m}{2}} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j), \end{aligned}$$

logo,

$$K_{n,m-1}^{-1} = \int_{R_3} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i\right) \prod_{i=1}^{m-1} \lambda_i^{\frac{n-m}{2}} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) d\lambda_i \quad (3.2.5)$$

$$= \left(\frac{(2\sigma^2)^n}{\pi}\right)^{\frac{m-1}{2}} \prod_{i=1}^{m-1} \Gamma\left(\frac{n-i+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-i}{2}\right), \quad (3.2.6)$$

onde  $R_3 = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}) : \lambda_1 \in [0, \infty]; \lambda_i \in [0, \lambda_{i-1}], i \in \{2, \dots, m-1\}\}$ .

**Observação 3.2.2.** As constantes de normalização exibidas em (3.2.4) e (3.2.5) são as mesmas, a diferença é uma mudança nos índices das incógnitas envolvidas. São formas distintas de descrever o mesmo objeto.

De maneira análoga, supondo que  $A \in G(m-1, n-1)$ ,  $M \in W(m-1, n-1)$  e que os autovalores de  $M$  são  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{m-1} \geq 0$ , deduzimos que

$$K_{n-1,m-1}^{-1} = \int_{R_3} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i\right) \prod_{i=1}^{m-1} \lambda_i^{\frac{n-1-m}{2}} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) d\lambda_i \quad (3.2.7)$$

$$= \left(\frac{(2\sigma^2)^{n-1}}{\pi}\right)^{\frac{m-1}{2}} \prod_{i=1}^{m-1} \Gamma\left(\frac{n-i}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-i}{2}\right), \quad (3.2.8)$$

onde  $R_3$  foi descrito anteriormente.

Na demonstração do lema 3.2.3 a seguir, obteremos um limitante superior para a função densidade de probabilidade do maior autovalor de uma matriz Wishart real substituindo o domínio de integração por domínios que coincidem com os  $R_i$  exibidos anteriormente. Na majoração que será feita no lema 3.2.3, usamos as constantes envolvendo as integrais que deduzimos anteriormente e sua forma analítica dada pela expressão (3.2.2).

Segue a generalização do lema 4.2 de [Ede88]. A prova do caso  $n = m$  encontra-se em [GN51]. Este resultado apresenta um limitante superior para a fdp do maior autovalor de uma Matriz Wishart real.

**Lema 3.2.3.** Se  $M \in W(m, n)$  e  $f_{\lambda_{max}}(\lambda)$  é a fdp do maior autovalor, então

$$\begin{aligned} f_{\lambda_{max}}(\lambda) &\leq \frac{K_{n,m}}{K_{n-1,m-1}} \lambda^{\frac{n+m-3}{2}} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} (2\sigma^2)^{\frac{1-n-m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \lambda^{\frac{n+m-3}{2}} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

**Demonstração:** Primeiro, vamos explicitar o autovalor máximo  $\lambda_1$  na equação (3.2.1).

$$\begin{aligned} f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) &= K_{n,m} \exp\left(-\frac{\lambda_1}{2\sigma^2}\right) \lambda_1^{\frac{n-m-1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^m \lambda_i\right) \left(\prod_{i=2}^m (\lambda_1 - \lambda_i) \cdot \lambda_i^{\frac{n-m-1}{2}}\right) \\ &\times \prod_{2 \leq i < j \leq m} (\lambda_i - \lambda_j). \end{aligned}$$

Devemos calcular a fdp marginal em relação à variável  $\lambda_1$ . Como

$\lambda \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{m-1} \geq \lambda_m \geq 0$ , seja  $R = \{(\lambda_2, \dots, \lambda_m) : \lambda_2 \in [0, \lambda], \lambda_i \in [0, \lambda_{i-1}], i \in$

$\{3, \dots, m\}$ . Assim

$$\begin{aligned}
f_{\lambda_{max}}(\lambda) &= K_{n,m} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{\frac{n-m-1}{2}} \int_R \exp\left(-\sum_{i=2}^m \frac{\lambda_i}{2\sigma^2}\right) \left(\prod_{i=2}^m (\lambda - \lambda_i) \cdot \lambda_i^{\frac{n-m-1}{2}}\right) \\
&\quad \times \prod_{2 \leq i < j \leq m} (\lambda_i - \lambda_j) d\lambda_i \\
&= K_{n,m} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{\frac{n-m-1}{2}} \int_R \exp\left(-\sum_{i=2}^m \frac{\lambda_i}{2\sigma^2}\right) \left(\prod_{i=2}^m (\lambda - \lambda_i) \cdot \lambda_i^{\frac{n-m-1}{2}}\right) \\
&\quad \times \prod_{2 \leq i < j \leq m} (\lambda_i - \lambda_j) d\lambda_i.
\end{aligned}$$

Como  $\lambda \geq \lambda_i \geq 0 \implies 0 \leq \lambda - \lambda_i \leq \lambda$ , temos uma limitação para a função anterior

$$\begin{aligned}
f_{\lambda_{max}}(\lambda) &\leq K_{n,m} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{\frac{n-m-1}{2}} \int_R \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^m \lambda_i\right) \prod_{i=2}^m (\lambda \cdot \lambda_i^{\frac{n-m-1}{2}}) \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j) d\lambda_i \\
&= K_{n,m} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{\frac{n-m-1}{2}} \lambda^{m-1} \int_R \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^m \lambda_i\right) \prod_{i=2}^m \lambda_i^{\frac{n-m-1}{2}} \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j) d\lambda_i \\
&= K_{n,m} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{\frac{n+m-3}{2}} \int_R \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^m \lambda_i\right) \prod_{i=2}^m \lambda_i^{\frac{n-m-1}{2}} \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j) d\lambda_i.
\end{aligned}$$

Aumentando o limite superior de integração em  $\lambda_2$ , obtemos novamente uma limitação para a função estudada,

$$f_{\lambda_{max}}(\lambda) \leq K_{n,m} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{\frac{n+m-3}{2}} \int_{R_2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^m \lambda_i\right) \prod_{i=2}^m \lambda_i^{\frac{n-m-1}{2}} \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j) d\lambda_i,$$

onde  $R_2 = \{(\lambda_2, \dots, \lambda_m) : \lambda_2 \in [0, \infty], \lambda_i \in [0, \lambda_{i-1}], i \in \{3, \dots, m\}\}$ . Fazendo uma mudança de índices na equação (3.2.7), a integral anterior pode ser expressa como

$$\begin{aligned}
f_{\lambda_{max}}(\lambda) &\leq K_{n,m} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{\frac{n+m-3}{2}} K_{n-1,m-1}^{-1} \\
&= \frac{K_{n,m}}{K_{n-1,m-1}} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{\frac{n+m-3}{2}}.
\end{aligned}$$

Para finalizar, basta usarmos a equação (3.2.2) e obtermos a constante  $K_{n,m}/K_{n-1,m-1}$ .

$$\begin{aligned}
\frac{K_{n,m}}{K_{n-1,m-1}} &= \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{((2\sigma^2)^n)^{\frac{m}{2}} \prod_{i=1}^m \Gamma\left(\frac{n-i+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-i+1}{2}\right)} \\
&\quad \times \frac{((2\sigma^2)^{n-1})^{\frac{m-1}{2}} \prod_{i=1}^{m-1} \Gamma\left(\frac{(n-1)-i+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{(m-1)-i+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{m-1}{2}}} \\
&= \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{((2\sigma^2)^n)^{\frac{m}{2}} \prod_{i=1}^m \Gamma\left(\frac{n-i+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-i+1}{2}\right)} \cdot \frac{((2\sigma^2)^{n-1})^{\frac{m-1}{2}} \prod_{i=1}^{m-1} \Gamma\left(\frac{n-i}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-i}{2}\right)}{\pi^{\frac{m-1}{2}}} \\
&= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{(2\sigma^2)^{\frac{n+m-1}{2}}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m-1} \Gamma\left(\frac{n-i}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-i}{2}\right)}{\prod_{i=1}^m \Gamma\left(\frac{n-i+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-i+1}{2}\right)} \\
&= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{(2\sigma^2)^{\frac{n+m-1}{2}}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f_{\lambda_{max}}(\lambda) \leq \frac{\pi^{\frac{1}{2}} (2\sigma^2)^{\frac{-n-m+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{\frac{n+m-3}{2}}.$$

Este limitante coincide com a equação (10) de [Ede88] quando  $\sigma^2 = 1$ . □

A seguir, apresentamos a demonstração do teorema 7.2 de [Ede88]. Obtemos a função densidade de probabilidade de  $\lambda_{max}$  e  $\lambda_{min}$  para matrizes  $M$  que seguem distribuição  $W(2, n)$ . Aqui faremos o caso geral com  $\sigma^2$  qualquer.

**Teorema 3.2.4.** Se  $M$  tem distribuição  $W(2, n)$  e  $\beta = \frac{n-1}{2}$ , então

$$f_{\lambda_{max}}(\lambda) = K_{n,2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{\beta-1} \left( (2\sigma^2) \cdot \lambda^\beta \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) - (2\sigma^2)^\beta ((2\sigma^2) \cdot \beta - \lambda) \cdot \gamma\left(\beta, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \right).$$

**Demonstração:** Como  $m = 2$ , a fdp conjunta com dois autovalores ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$ ) é dada por

$$K_{n,2} \exp\left(-\frac{\lambda_1}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{\lambda_2}{2\sigma^2}\right) \lambda_1^{\beta-1} (\lambda_1 - \lambda_2) \lambda_2^{\beta-1}.$$

Para obtermos  $f_{\lambda_{max}}(\lambda)$ , devemos integrar em relação a  $\lambda_2$ , assim

$$\begin{aligned}
f_{\lambda_{max}}(\lambda) &= K_{n,2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{\beta-1} \int_0^\lambda \exp\left(-\frac{\lambda_2}{2\sigma^2}\right) \lambda_2^{\beta-1} (\lambda - \lambda_2) d\lambda_2 \\
&= K_{n,2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{\beta-1} \left[ \lambda \int_0^\lambda \exp\left(-\frac{\lambda_2}{2\sigma^2}\right) \lambda_2^{\beta-1} d\lambda_2 - \int_0^\lambda \exp\left(-\frac{\lambda_2}{2\sigma^2}\right) \lambda_2^\beta d\lambda_2 \right] \\
&= K_{n,2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{\beta-1} \left[ \lambda \cdot (2\sigma^2)^\beta \cdot \gamma\left(\beta, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) - (2\sigma^2)^{\beta+1} \cdot \gamma\left(\beta+1, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \right] \\
&= K_{n,2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{\beta-1} \left[ \lambda \cdot (2\sigma^2)^\beta \cdot \gamma\left(\beta, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \right. \\
&\quad \left. - (2\sigma^2)^{\beta+1} \left( \beta \cdot \gamma\left(\beta, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) - \left(\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right)^\beta \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \right) \right] \\
&= K_{n,2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{\beta-1} \left[ \lambda \cdot (2\sigma^2)^\beta \cdot \gamma\left(\beta, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) - (2\sigma^2)^{\beta+1} \cdot \beta \cdot \gamma\left(\beta, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \right. \\
&\quad \left. + (2\sigma^2)^{\beta+1} \left(\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right)^\beta \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \right] \\
&= K_{n,2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{\beta-1} \left[ \lambda \cdot (2\sigma^2)^\beta \cdot \gamma\left(\beta, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) - (2\sigma^2)^{\beta+1} \cdot \beta \cdot \gamma\left(\beta, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \right. \\
&\quad \left. + (2\sigma^2) \cdot \lambda^\beta \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \right] \\
&= K_{n,2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{\beta-1} \left[ -(2\sigma^2)^\beta \cdot \gamma\left(\beta, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \left[ (2\sigma^2) \cdot \beta - \lambda \right] \right. \\
&\quad \left. + (2\sigma^2) \cdot \lambda^\beta \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \right].
\end{aligned}$$

□

O próximo resultado é uma generalização (supomos  $n$  não necessariamente igual a  $m$ ) das equações (8.3) – (8.8) de **[GN51]**. É o único resultado que traz um limitante para distribuição cumulativa do maior autovalor de uma matriz Wishart real, pois todos os resultados anteriores referem-se à fdp.

**Teorema 3.2.5.** Seja  $\lambda = \lambda_{max}$ ,  $M \in W(m, n)$  e  $(m(r - 1/2) - n/2) > 0$ , então

$$Pr(\lambda \geq 2\sigma^2 rm) \leq \frac{(rm)^{\frac{n+m-1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} \exp(-rm)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \frac{1}{m\left(r - \frac{1}{2}\right) - \frac{n}{2}}.$$

**Demonstração:** Pelo lema 3.2.3, temos que

$$f_{\lambda_{max}}(\lambda) \leq \frac{\pi^{\frac{1}{2}} (2\sigma^2)^{\frac{-n-m+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \lambda^{\frac{n+m-3}{2}} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right).$$

Portanto,

$$Pr(\lambda \geq 2\sigma^2 rm) = \int_{2\sigma^2 rm}^{\infty} f_{\lambda_{max}}(\lambda) d\lambda \leq \frac{\pi^{\frac{1}{2}} (2\sigma^2)^{\frac{-n-m+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_{2\sigma^2 rm}^{\infty} \lambda^{\frac{n+m-3}{2}} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) d\lambda.$$

Faremos uma mudança de variável. Como  $2\sigma^2 rm \leq \lambda \leq \infty$ , então  $0 \leq \lambda - 2\sigma^2 rm \leq \infty$ . No lugar de denotar a nova variável simplesmente por  $\mu = \lambda - 2\sigma^2 rm$ , vamos usar  $2\sigma^2 \mu = \lambda - 2\sigma^2 rm$ .

Assim,

$$\lambda = 2\sigma^2(\mu + rm) \quad ; \quad \frac{\lambda}{2\sigma^2} = \mu + rm \quad ; \quad \mu = \frac{\lambda - 2\sigma^2 rm}{2\sigma^2} \quad ; \quad d\mu = \frac{d\lambda}{2\sigma^2} \quad ; \quad 2\sigma^2 d\mu = d\lambda$$

e obtemos que

$$\begin{aligned}
Pr(\lambda \geq 2\sigma^2 rm) &\leq \frac{\pi^{\frac{1}{2}} (2\sigma^2)^{\frac{-n-m+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^\infty \lambda^{\frac{n+m-3}{2}} \exp(-(\mu + rm)) 2\sigma^2 d\mu \\
&= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} (2\sigma^2)^{\frac{-n-m+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \exp(-rm) \int_0^\infty \lambda^{\frac{n+m-3}{2}} \exp(-\mu) 2\sigma^2 d\mu \\
&= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \exp(-rm)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^\infty \lambda^{\frac{n+m-3}{2}} \exp(-\mu) (2\sigma^2)^{\frac{-n-m+3}{2}} d\mu \\
&= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \exp(-rm)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^\infty \lambda^{\frac{n+m-3}{2}} \exp(-\mu) \frac{1}{(2\sigma^2)^{\frac{n+m-3}{2}}} d\mu \\
&= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \exp(-rm)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^\infty \exp(-\mu) \left(\frac{\lambda}{(2\sigma^2)}\right)^{\frac{n+m-3}{2}} d\mu \\
&= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \exp(-rm)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^\infty \exp(-\mu) (\mu + rm)^{\frac{n+m-3}{2}} d\mu \\
&= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \exp(-rm)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^\infty \exp(-\mu) \left(rm \left(\frac{\mu}{rm} + 1\right)\right)^{\frac{n+m-3}{2}} d\mu \\
&= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \exp(-rm) (rm)^{\frac{n+m-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^\infty \exp(-\mu) \left(\frac{\mu}{rm} + 1\right)^{\frac{n+m-3}{2}} d\mu.
\end{aligned}$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n = \exp(x) = \exp(x/n \cdot n)$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\mu}{rm} + 1\right)^{\frac{n+m-3}{2}} = \exp\left(\frac{\mu}{rm} \cdot \frac{n+m-3}{2}\right) \Rightarrow \left(\frac{\mu}{rm} + 1\right)^{\frac{n+m-3}{2}} \leq \exp\left(\frac{\mu}{rm} \cdot \frac{n+m-3}{2}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
Pr(\lambda \geq 2\sigma^2 rm) &\leq \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \exp(-rm) (rm)^{\frac{n+m-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^\infty \exp(-\mu) \exp\left(\frac{\mu}{rm} \cdot \frac{n+m-3}{2}\right) d\mu \\
&= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \exp(-rm) (rm)^{\frac{n+m-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^\infty \exp\left(-\mu \left[1 - \frac{1}{rm} \cdot \frac{n+m-3}{2}\right]\right) d\mu.
\end{aligned}$$

Como  $\int_0^\infty \exp(-ax) dx = 1/a$ , então

$$\begin{aligned}
Pr(\lambda \geq 2\sigma^2 rm) &\leq \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \exp(-rm) (rm)^{\frac{n+m-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{rm} \cdot \frac{n+m-3}{2}} \\
&= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \exp(-rm) (rm)^{\frac{n+m-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{rm} \left( rm - \left( \frac{n+m-3}{2} \right) \right)} \\
&= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \exp(-rm) (rm)^{\frac{n+m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \frac{1}{rm - \left( \frac{n+m-3}{2} \right)} \\
&= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \exp(-rm) (rm)^{\frac{n+m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \frac{1}{m \left( r - \frac{1}{2} \right) - \frac{n}{2} + \frac{3}{2}} \\
&\leq \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \exp(-rm) (rm)^{\frac{n+m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \frac{1}{m \left( r - \frac{1}{2} \right) - \frac{n}{2}}.
\end{aligned}$$

□

**Corolário 3.2.6.** Seja  $\lambda = \lambda_{max}$ ,  $M \in W(n, n)$  e  $r \geq 1$ , então

$$Pr(\lambda \geq 2\sigma^2 rn) \leq \left( \frac{2r}{\exp(r-1)} \right)^n \cdot \frac{1}{4(r-1)(\pi rn)^{\frac{1}{2}}}.$$

**Demonstração:** A expressão obtida no teorema (3.2.5) não ficou com aspecto simples, mas supondo  $n = m$  podemos melhorá-la e obtermos a expressão (8.8) de [GN51]. Para isso usaremos a fórmula de Stirling

$$\Gamma(z) > \exp(-z) z^{z-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) > \frac{1}{\exp\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{n}{2}\right)^{\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}} \implies \frac{1}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} < \exp(n) \cdot \frac{2^{n-2}}{n^{n-1}} \cdot \frac{1}{\pi}.$$

Supondo  $n = m$ , temos que

$$\begin{aligned}
Pr(\lambda \geq 2\sigma^2 rm) &\leq \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \exp(-rn) (rn)^{\frac{n+n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{n\left(r - \frac{1}{2}\right) - \frac{n}{2}} \\
&= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \exp(-rn) (rn)^{n-\frac{1}{2}}}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right) n(r-1)} \\
&= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \exp(-rn) (rn)^{n-\frac{1}{2}}}{n(r-1)} \cdot \frac{\exp(n)2^{n-2}}{n^{n-1}\pi} \\
&= \frac{(rn)^{n-\frac{1}{2}}}{n(r-1)} \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp(-rn) \cdot \frac{\exp(n)2^{n-2}}{n^{n-1}} \\
&= \frac{(rn)^{n-\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}} n(r-1)} \frac{1}{\exp(n(r-1))} \cdot \frac{2^{n-2}}{2} \cdot \frac{1}{n^{n-1}} \\
&= \frac{1}{\exp(n(r-1))} \cdot \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} n(r-1)} \cdot \frac{(rn)^n}{(rn)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^{n-1} \\
&= \frac{(rn)^n}{(\exp(r-1))^n} \cdot \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} (rn)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{r-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{n-1}}{n^{n-1}} \\
&= \left(\frac{rn}{\exp(r-1)}\right)^n \cdot \frac{1}{(\pi rn)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{r-1} \cdot \frac{2^{n-1}}{2} \cdot \frac{1}{n^n} \\
&= \left(\frac{rn}{\exp(r-1)}\right)^n \cdot \frac{1}{(\pi rn)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{r-1} \cdot \frac{2^n}{4} \cdot \frac{1}{n^n} \\
&= \left(\frac{rn}{\exp(r-1)}\right)^n \cdot \frac{1}{(\pi rn)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{r-1} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4} \\
&= \frac{r^n}{(\exp(r-1))^n} \cdot \frac{2^n}{4(r-1)(\pi rn)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \left(\frac{2r}{\exp(r-1)}\right)^n \cdot \frac{1}{4(r-1)(\pi rn)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

□

### 3.2.2 Caso Complexo.

Nesta seção exibimos a fdp conjunta dos autovalores de uma matriz Wishart complexa  $\tilde{W}(m, n)$  e algumas fórmulas da constante de normalização. Os resultados sobre a fdp do maior autovalor

para o caso complexo serão exibidos no próximo capítulo pois fazem parte das contribuições desta tese.

Seja  $\tilde{G}(m, n)$  o conjunto das matrizes de ordem  $m \times n$  cujas entradas são variáveis aleatórias complexas independentes com distribuição  $\tilde{N}(0, \sigma^2)$ . Pela definição 3.1.7, se  $\tilde{A} \in \tilde{G}(m, n)$ , então  $\tilde{A} = A_1 + iA_2$  com  $A_1, A_2 \in N(0, \sigma^2)$ . Seja  $\tilde{M} = \tilde{A}\tilde{A}^* \in \tilde{W}(m, n)$ , ao longo da seção, suponha que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{m-1} \geq \lambda_m \geq 0$$

são os autovalores de  $\tilde{M}$ , pela proposição 1.2.9 temos que tais autovalores são números reais positivos.

**Teorema 3.2.7.** Dado  $A \in \tilde{G}(m, n)$ , considere  $\tilde{M} = \tilde{A}\tilde{A}^* \in \tilde{W}(m, n)$ , suponha que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{m-1} \geq \lambda_m \geq 0$  são os autovalores da  $\tilde{M}$ . A fdp conjunta dos  $m$  autovalores de  $\tilde{M}$  é

$$\tilde{f}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \tilde{K}_{n,m} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m \lambda_i\right) \prod_{i=1}^m \lambda_i^{n-m} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2, \quad (3.2.9)$$

onde

$$\tilde{K}_{n,m}^{-1} = (2\sigma^2)^{mn} \prod_{i=1}^m \Gamma(n-i+1) \Gamma(m-i+1). \quad (3.2.10)$$

Como na seção anterior, supomos  $m \leq n$ . Temos que  $\tilde{K}_{n,m}$  em (3.2.9) é uma constante de normalização tal que

$$\int_{R_1} \tilde{f}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) d\lambda_i = 1,$$

onde  $R_1 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) : \lambda_1 \in [0, \infty]; \lambda_i \in [0, \lambda_{i-1}], i \in \{2, \dots, m\}\}$ . Assim

$$\int_{R_1} \tilde{f}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) d\lambda_i = \tilde{K}_{n,m} \int_{R_1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m \lambda_i\right) \prod_{i=1}^m \lambda_i^{n-m} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 d\lambda_i = 1,$$

e a equação (3.2.10) é forma analítica da integral

$$\tilde{K}_{n,m}^{-1} = \int_{R_1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^m \lambda_i\right) \prod_{i=1}^m \lambda_i^{n-m} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 d\lambda_i. \quad (3.2.11)$$

Suponha agora que  $\tilde{A} \in \tilde{G}(m-1, n)$ ,  $\tilde{M} \in \tilde{W}(m-1, n)$  e  $\lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_{m-1} \geq \lambda_m \geq 0$  são os autovalores de  $\tilde{M}$ , assim a fdp dos autovalores é

$$\tilde{K}_{n,m-1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^m \lambda_i\right) \prod_{i=2}^m \lambda_i^{n-(m-1)} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = \tilde{K}_{n,m-1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^m \lambda_i\right) \prod_{i=2}^m \lambda_i^{n-m+1} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2.$$

Podemos concluir que

$$\tilde{K}_{n,m-1}^{-1} = \int_{R_2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^m \lambda_i\right) \prod_{i=2}^m \lambda_i^{n-m+1} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 d\lambda_i,$$

onde  $R_2 = \{(\lambda_2, \dots, \lambda_m) : \lambda_2 \in [0, \infty]; \lambda_i \in [0, \lambda_{i-1}], i \in \{3, \dots, m\}\}$ . Usando (3.2.10), a integral acima coincide com

$$(2\sigma^2)^{(m-1)n} \prod_{i=1}^{m-1} \Gamma(n-i+1) \Gamma(m-1-i+1).$$

No produtório anterior, não podemos assumir que  $i$  varia entre 2 e  $m$ . Caso contrário, a segunda função gama não está definida em  $i = m$ . O que importa neste produtório não são os índices das posições, mas a quantidade de elementos.

Suponha novamente que  $\tilde{A} \in \tilde{G}(m-1, n)$  e  $\tilde{M} \in \tilde{W}(m-1, n)$ , mas agora indexamos, de maneira diferente, os autovalores de  $\tilde{M}$  por  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{m-2} \geq \lambda_{m-1} \geq 0$ . Nesse caso a fdp conjunta dos autovalores de  $\tilde{M}$  é

$$\tilde{K}_{n,m-1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i\right) \prod_{i=1}^{m-1} \lambda_i^{n-m+1} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2.$$

Podemos concluir que

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{n,m-1}^{-1} &= \int_{R_3} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i\right) \prod_{i=1}^{m-1} \lambda_i^{n-m+1} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 d\lambda_i \\ &= (2\sigma^2)^{(m-1)n} \prod_{i=1}^{m-1} \Gamma(n-i+1) \Gamma(m-1-i+1), \end{aligned}$$

onde  $R_3 = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}) : \lambda_1 \in [0, \infty]; \lambda_i \in [0, \lambda_{i-1}], i \in \{2, \dots, m-1\}\}$ .

**Observação 3.2.8.** Como no caso real, observe que as constantes de normalização são as mesmas, o que ocorre é uma mudança dos índices das incógnitas envolvidas.

De forma análoga, se  $\tilde{A} \in \tilde{G}(m-1, n-1)$ ,  $\tilde{M} \in \tilde{W}(m-1, n-1)$  e  $\lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{m-1} \geq \lambda_m \geq 0$  são os autovalores de  $\tilde{M}$ , a fdp conjunta dos autovalores é

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{n-1, m-1}^{-1} &= \int_{R_2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^m \lambda_i\right) \prod_{i=2}^m \lambda_i^{n-1-m+1} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 d\lambda_i \\ &= \int_{R_2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^m \lambda_i\right) \prod_{i=2}^m \lambda_i^{n-m} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 d\lambda_i \\ &= (2\sigma^2)^{(m-1)(n-1)} \prod_{i=1}^{m-1} \Gamma(n-1-i+1) \Gamma(m-1-i+1), \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

onde  $R_2 = \{(\lambda_2, \dots, \lambda_m) : \lambda_2 \in [0, \infty]; \lambda_i \in [0, \lambda_{i-1}], i \in \{3, \dots, m\}\}$ .

Respeitando as ordens das matrizes envolvidas e lembrando que, por hipótese, o número de linhas é sempre menor ou igual o número de colunas, obtemos outras igualdades que serão úteis ao longo do texto:

$$\tilde{K}_{n-1, m-1}^{-1} = \int_{R_3} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i\right) \prod_{i=1}^{m-1} \lambda_i^{n-m} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 d\lambda_i,$$

onde  $R_3 = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}) : \lambda_1 \in [0, \infty]; \lambda_i \in [0, \lambda_{i-1}], i \in \{2, \dots, m-1\}\}$ . Temos ainda que

$$\tilde{K}_{n+1, m-1}^{-1} = \int_{R_3} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i\right) \prod_{i=1}^{m-1} \lambda_i^{n+1-m+1} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 d\lambda_i,$$

onde  $R_3$  foi descrito acima. Além disso,

$$\tilde{K}_{n+1, n-1}^{-1} = \int_{R_4} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\right) \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2 \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 d\lambda_i,$$

onde  $R_4 = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) : \lambda_1 \in [0, \infty]; \lambda_i \in [0, \lambda_{i-1}], i \in \{2, \dots, n-1\}\}$ .

# Novo Critério de Busca de STC para canais MIMO.

Neste capítulo apresentamos as contribuições deste trabalho, com resultados que consideramos inéditos. Além disso, resolvemos o problema apresentado na seção 2.3 usando as técnicas do capítulo 3.

Pelo exposto no capítulo anterior, existem várias aplicações para a teoria das matrizes aleatórias. Entretanto, nenhum resultado na forma que propomos, pois pelo nosso conhecimento, a teoria das matrizes aleatórias nunca foi usada para obter um critério de busca de STC para canais MIMO. Na primeira seção deduzimos uma aproximação para a fdp do maior autovalor de matrizes Wishart. Na seção seguinte resolvemos o problema proposto nesta tese. Terminamos o capítulo com nossas conclusões.

## 4.1 Aproximação para função densidade de probabilidade.

Como visto na seção 2.3, para resolvermos o problema de pesquisa desta tese precisamos encontrar a fdp do maior autovalor para matriz Wishart. Entretanto, não foi encontrada para esta fdp na literatura, uma expressão que seja manipulável, uma expressão de difícil manipulação pode ser encontrada em [ZC08] e [ZCW09]. Devido à difícil manipulação das fórmulas, é possível obter a

fdp exata do maior autovalor de matrizes Wishart para alguns casos particulares de  $m$  e  $n$ . Dessa forma, obtemos uma aproximação para a função desejada, que será exibida nesta seção.

Começamos a seção generalizando o lema 3.2.3, onde deduzimos um limitante superior para a fdp do maior autovalor das matrizes com distribuição  $\tilde{W}(m, n)$ .

**Teorema 4.1.1.** Se  $\tilde{M} \in \tilde{W}(m, n)$ , então  $f_{\lambda_{max}}(\lambda)$  satisfaz

$$\begin{aligned} f_{\lambda_{max}}(\lambda) &\leq \frac{\tilde{K}_{n,m}}{\tilde{K}_{n-1,m-1}} \lambda^{n+m-2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{(2\sigma^2)^{-n-m+1}}{\Gamma(n)\Gamma(m)} \lambda^{n+m-2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

**Demonstração:** Como devemos encontrar  $f_{\lambda_{max}}(\lambda)$ , primeiro vamos explicitar  $\lambda_{max} = \lambda_1$  na fdp conjunta dos autovalores de uma matriz Wishart definida na equação (3.2.9), isto é,

$$\begin{aligned} &\tilde{K}_{n,m} \exp\left(\sum_{i=1}^m -\frac{\lambda_i}{2\sigma^2}\right) \prod_{i=1}^m \lambda_i^{n-m} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \\ &= \tilde{K}_{n,m} \exp\left(-\frac{\lambda_1}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\sum_{i=2}^m -\frac{\lambda_i}{2\sigma^2}\right) \lambda_1^{n-m} \prod_{i=2}^m (\lambda_1 - \lambda_i)^2 \prod_{i=2}^m \lambda_i^{n-m} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \\ &= \tilde{K}_{n,m} \exp\left(-\frac{\lambda_1}{2\sigma^2}\right) \lambda_1^{n-m} \exp\left(\sum_{i=2}^m -\frac{\lambda_i}{2\sigma^2}\right) \prod_{i=2}^m ((\lambda_1 - \lambda_i)^2 \cdot \lambda_i^{n-m}) \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$f_{\lambda_{max}}(\lambda) = \tilde{K}_{n,m} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{n-m} \int_R \exp\left(\sum_{i=2}^m -\frac{\lambda_i}{2\sigma^2}\right) \prod_{i=2}^m ((\lambda - \lambda_i)^2 \cdot \lambda_i^{n-m}) \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 d\lambda_i,$$

onde  $R = \{(\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m) : \lambda_2 \in [0, \lambda]; \lambda_i \in [0, \lambda_{i-1}], i \in \{3, \dots, m\}\}$ . Como  $0 \leq \lambda - \lambda_i \leq \lambda$ , então  $(\lambda - \lambda_i)^2 \leq \lambda^2$  e a igualdade acima pode ser limitada superiormente

$$\begin{aligned} f_{\lambda_{max}}(\lambda) &\leq \tilde{K}_{n,m} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{n-m} \int_R \exp\left(\sum_{i=2}^m -\frac{\lambda_i}{2\sigma^2}\right) \prod_{i=2}^m (\lambda^2 \cdot \lambda_i^{n-m}) \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 d\lambda_i \\ &= \tilde{K}_{n,m} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{n-m} \cdot \lambda^{2(m-1)} \int_R \exp\left(\sum_{i=2}^m -\frac{\lambda_i}{2\sigma^2}\right) \prod_{i=2}^m (\lambda_i^{n-m}) \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 d\lambda_i \\ &= \tilde{K}_{n,m} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{n+m-2} \int_R \exp\left(\sum_{i=2}^m -\frac{\lambda_i}{2\sigma^2}\right) \prod_{i=2}^m (\lambda_i^{n-m}) \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 d\lambda_i \\ &\leq \tilde{K}_{n,m} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{n+m-2} \int_{R_2} \exp\left(\sum_{i=2}^m -\frac{\lambda_i}{2\sigma^2}\right) \prod_{i=2}^m (\lambda_i^{n-m}) \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 d\lambda_i, \end{aligned}$$

onde  $R_2 = \{(\lambda_2, \dots, \lambda_m) : \lambda_2 \in [0, \infty]; \lambda_i \in [0, \lambda_{i-1}], i \in \{3, \dots, m\}\}$ . Usando a equação 3.2.12, obtemos o novo limitante dado por

$$\begin{aligned} f_{\lambda_{max}}(\lambda) &\leq \tilde{K}_{n,m} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{n+m-2} \tilde{K}_{n-1,m-1}^{-1} \\ &= \frac{\tilde{K}_{n,m}}{\tilde{K}_{n-1,m-1}} \lambda^{n+m-2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

Usando a expressão algébrica de  $\tilde{K}_{n,m}$  e  $\tilde{K}_{n-1,m-1}^{-1}$  definidas em (3.2.10) e (3.2.12), temos que

$$\begin{aligned} f_{\lambda_{max}}(\lambda) &\leq \lambda^{n+m-2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{(2\sigma^2)^{nm} \prod_{i=1}^m \Gamma(n-i+1) \Gamma(m-i+1)} \cdot (2\sigma^2)^{(n-1)(m-1)} \\ &\quad \cdot \prod_{i=1}^{m-1} \Gamma(n-1-i+1) \Gamma(m-1-i+1) \\ &= \lambda^{n+m-2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \frac{(2\sigma^2)^{(n-1)(m-1)} \prod_{i=1}^{m-1} \Gamma(n-i) \Gamma(m-i)}{(2\sigma^2)^{nm} \prod_{i=1}^m \Gamma(n-i+1) \Gamma(m-i+1)} \\ &= \frac{\lambda^{n+m-2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \prod_{i=1}^{m-1} \Gamma(n-i) \Gamma(m-i)}{(2\sigma^2)^{n+m-1} \prod_{i=1}^m \Gamma(n-i+1) \Gamma(m-i+1)} \\ &= \frac{(2\sigma^2)^{-n-m+1}}{\Gamma(n) \Gamma(m)} \lambda^{n+m-2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

□

O limitante definido no teorema 4.1.1 não representa uma fdp, pois

$$\int_0^\infty \frac{(2\sigma^2)^{-n-m+1}}{\Gamma(n) \Gamma(m)} \lambda^{n+m-2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) d\lambda = \frac{\Gamma(n+m-1)}{\Gamma(n) \Gamma(m)},$$

sendo diferente de 1. Normalizando, no sentido de obter uma fdp, o limitante obtido no teorema 4.1.1, temos que

$$g(\lambda) = \frac{(2\sigma^2)^{-n-m+1}}{\Gamma(n+m-1)} \lambda^{n+m-2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \quad (4.1.1)$$

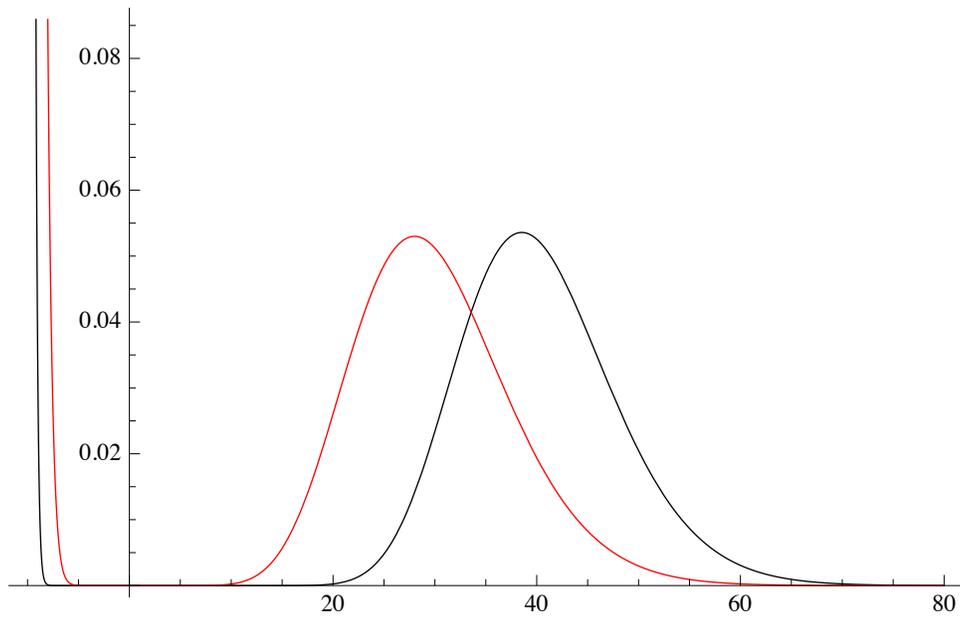


Figura 4.1: Gráficos da fdp exata e da função  $g(\lambda)$  para  $\tilde{W}(3, 13)$

representa uma fdp.

Comparando a função  $g(\lambda)$  com a fdp do maior autovalor de matrizes Wishart, concluímos que, a menos de translação,  $g(\lambda)$  é uma boa aproximação para a função desejada, veja figura 4.1 .

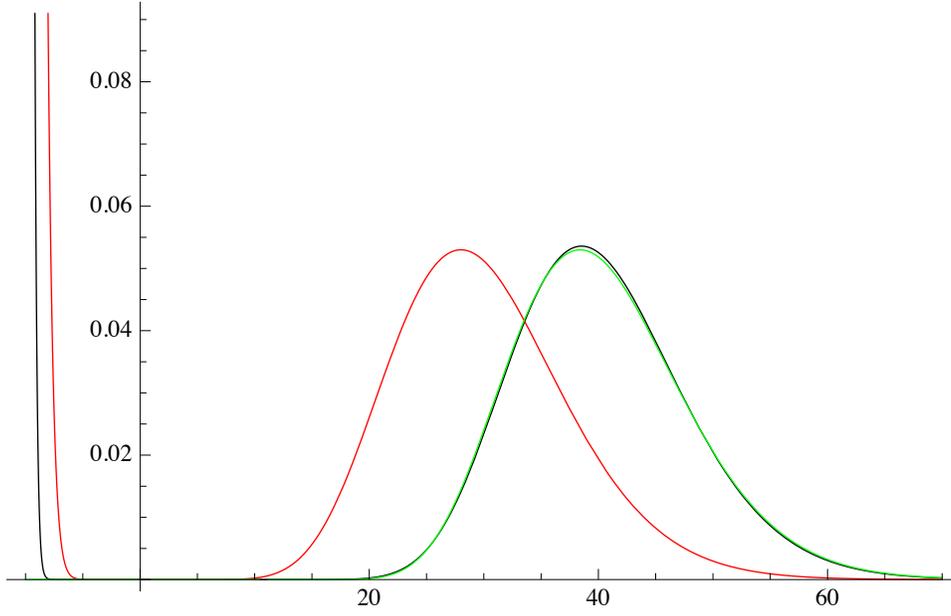


Figura 4.2: Gráficos da fdp exata, função  $g(\lambda)$ , e da translação de  $g(\lambda)$  em 10.4 para  $\tilde{W}(3, 13)$

Dessa forma, devemos encontrar a constante  $d_1 = d_1(m, n)$  de tal forma que a translação de  $g(\lambda)$ , que denotamos por  $\phi(\lambda)$ , e cuja expressão é

$$\phi(\lambda) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq \lambda < d_1 \\ \frac{(2\sigma^2)^{-n-m+1} \cdot (\lambda - d_1)^{(n+m-1)-1}}{\Gamma(n+m-1)} \exp\left(-\frac{(\lambda - d_1)}{2\sigma^2}\right) & , \quad \lambda \geq d_1 \end{cases}$$

seja uma aproximação para a fdp do maior autovalor de matrizes Wishart. A figura 4.2 apresenta o gráfico da fdp exata, função  $g(\lambda)$  e translação de  $g(\lambda)$  em 10.4 para o caso  $\tilde{W}(3, 13)$ .

Calculamos, em alguns casos, a fdp exata do maior autovalor de matrizes Wishart, em seguida, transladamos  $g(\lambda)$  de tal forma que  $\phi(\lambda)$  seja a melhor aproximação possível. Estes dados são apresentados na tabela 4.1, cujos dados foram feitos por tentativa e erro, com objetivo de minimizar a distância

$$\int_0^{\infty} |f_1(t) - f_2(t)| dt,$$

entre a fdp exata do maior autovalor de matriz Wishart e  $\phi(\lambda)$ . Além disso, a tabela 4.1 apresenta o ponto máximo da melhor  $\phi(t)$ . Por simplicidade, nos cálculos apresentados nas tabelas 4.1 e 4.2 supomos que  $\sigma^2 = 1$ .

Como a fdp exata do maior autovalor de matriz Wishart e a aproximação  $\phi(\lambda)$  são consideradas, neste trabalho, a mesma, a menos de translação, obtemos que o valor do melhor deslocamento é a

$\tilde{W}(m, n)$	melhor translação de $g(\lambda)$	ponto de máximo da melhor translação de $g(\lambda)$
$\tilde{W}(2, 2)$	1.0	5.0
$\tilde{W}(2, 3)$	1.7	7.7
$\tilde{W}(2, 4)$	2.4	10.4
$\tilde{W}(2, 15)$	6.7	36.7
$\tilde{W}(2, 22)$	8.7	52.7
$\tilde{W}(3, 3)$	3.2	11.2
$\tilde{W}(3, 5)$	5.1	17.1
$\tilde{W}(3, 13)$	10.4	38.4
$\tilde{W}(3, 25)$	16.0	68
$\tilde{W}(4, 4)$	5.5	17.5
$\tilde{W}(4, 7)$	9.0	27
$\tilde{W}(4, 13)$	14.0	44
$\tilde{W}(5, 5)$	8.4	24.4
$\tilde{W}(5, 9)$	13.2	37.2

Tabela 4.1: Melhor translação e seus pontos de máximo.

diferença entre o máximo da fdp exata do maior autovalor e o ponto de máximo de  $g(\lambda)$ . A tabela 4.2 apresenta os pontos de máximos.

Sabemos que nem sempre é possível encontrar o máximo da fdp exata do maior autovalor para matrizes Wishart. Entretanto podemos encontrar o máximo da função  $g(\lambda)$ . Dessa forma, dado o máximo de  $g(\lambda)$ , devemos encontrar o valor da constante  $d_1 = d_1(m, n)$ . De fato, como

$$\begin{aligned} \frac{dg(\lambda)}{d\lambda} &= \frac{(2\sigma^2)^{-n-m+1}}{\Gamma(n+m-1)} \left[ (n+m-2) \cdot \lambda^{n+m-3} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) + \lambda^{n+m-2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \cdot -\frac{1}{2\sigma^2} \right] \\ &= \frac{(2\sigma^2)^{-n-m}}{\Gamma(n+m-1)} \cdot \lambda^{n+m-3} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) [2\sigma^2(n+m-2) - \lambda], \end{aligned}$$

as raízes de  $dg(\lambda)/d\lambda$  são

$$\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 2\sigma^2(n+m-2).$$

Supondo, por simplicidade, que  $\sigma^2 = 1$ , o máximo da função  $g(\lambda)$  ocorre quando

$$\lambda = 2(n+m-2).$$

Dessa forma,  $2(n+m-2) + d_1(m, n)$  coincide com o ponto de máximo da fdp exata do maior autovalor de matrizes Wishart. Seja  $h(m, n)$  a função que modela o máximo da fdp exata de matriz

$\tilde{W}(m, n)$	ponto de máximo da fdp exata	ponto de máximo de $g(\lambda)$	diferença dos máximos
$\tilde{W}(2, 2)$	5.11	4.0	1.1
$\tilde{W}(2, 3)$	7.89	6.0	1.89
$\tilde{W}(2, 4)$	10.53	8.0	2.53
$\tilde{W}(2, 15)$	36.7	30.0	6.7
$\tilde{W}(2, 22)$	52.58	44.0	12.58
$\tilde{W}(3, 3)$	11.22	8.0	3.22
$\tilde{W}(3, 5)$	17.24	12.0	5.24
$\tilde{W}(3, 13)$	38.52	28.0	10.52
$\tilde{W}(3, 25)$	67.79	52.0	15.79
$\tilde{W}(4, 4)$	17.76	12.0	5.76
$\tilde{W}(4, 7)$	27.15	18.0	9.15
$\tilde{W}(4, 13)$	44.06	30.0	14.06
$\tilde{W}(5, 5)$	24.53	16.0	8.53
$\tilde{W}(5, 9)$	37.6	24.0	13.6

Tabela 4.2: Pontos de máximo e sua diferença.

Wishart, então

$$h(m, n) = 2(n + m - 2) + d_1(m, n)$$

e

$$d_1(m, n) = h(m, n) - 2(n + m - 2).$$

Usando os dados da tabela 4.2, deduziremos uma expressão para  $d_1(m, n)$  usando o método dos mínimos quadrados. De fato, fazendo o diagrama de dispersão da tabela 4.2, temos que a função que descreve  $d_1(m, n)$  pode ser interpretada como um plano, cuja equação é dada por

$$d_1(m, n) = am + bn + c$$

tal que

$$d_1(m_i, n_i) = \mu_i,$$

onde  $\mu_i$  são os dados da terceira coluna da tabela 4.2. Assim, devemos encontrar o valor das constantes  $a, b$  e  $c$  que minimizam a expressão:

$$F(a, b, c) = \sum_{i=1}^{14} (am_i + bn_i + c - \mu_i)^2.$$

Para isso, resolvemos a equação  $\nabla F(a, b, c) = 0$ , que é dada pelo sistema

$$\begin{cases} 2 \sum_{i=1}^{14} (am_i + bn_i + c - \mu_i) \cdot (m_i) = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^{14} (am_i + bn_i + c - \mu_i) \cdot (n_i) = 0 \quad , \\ 2 \sum_{i=1}^{14} (am_i + bn_i + c - \mu_i) \cdot (1) = 0 \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \left( \sum_{i=1}^{14} m_i^2 \right) \cdot a + \left( \sum_{i=1}^{14} m_i \cdot n_i \right) \cdot b + \left( \sum_{i=1}^{14} m_i \right) \cdot c = \sum_{i=1}^{14} \mu_i \cdot m_i \\ \left( \sum_{i=1}^{14} m_i \cdot n_i \right) \cdot a + \left( \sum_{i=1}^{14} n_i^2 \right) \cdot b + \left( \sum_{i=1}^{14} n_i \right) \cdot c = \sum_{i=1}^{14} \mu_i \cdot n_i \quad . \\ \left( \sum_{i=1}^{14} m_i \right) \cdot a + \left( \sum_{i=1}^{14} n_i \right) \cdot b + \left( \sum_{i=1}^{14} 1 \right) \cdot c = \sum_{i=1}^{14} \mu_i \end{cases}$$

Usando os dados da tabela 4.2, obtemos

$$\begin{cases} 154 \cdot a + 396 \cdot b + 44 \cdot c = 380.44 \\ 396 \cdot a + 1906 \cdot b + 130 \cdot c = 1397.54 \quad , \\ 44 \cdot a + 130 \cdot b + 14 \cdot c = 110.67 \end{cases}$$

cuja solução é dada pela tripla

$$\{a, b, c\} = \{2.53573, 0.574893, -5.40273\}.$$

Portanto, a expressão que modela o deslocamento da função  $g(\lambda)$  para a fdp exata do maior autovalor de matriz Wishart é:

$$d_1(m, n) = 2.53573m + 0.574893n - 5.40273. \quad (4.1.2)$$

**Observação 4.1.2.** A tabela 4.3 mostra os valores do deslocamento obtido pela expressão 4.1.2, dessa forma podemos comparar com os valores obtidos de forma experimental nas tabelas 4.1 e 4.2. Temos que

$$\bar{\mu} = \frac{1}{14} \sum_{i=1}^{14} \mu_i = 7.905,$$

$d_1(m, n) = 2.53573m + 0.574893n - 5.40273$	valor numérico
$d_1(2, 2)$	0.8185
$d_1(2, 3)$	1.3934
$d_1(2, 4)$	1.9683
$d_1(2, 15)$	8.2921
$d_1(2, 22)$	12.3164
$d_1(3, 3)$	3.9291
$d_1(3, 5)$	5.0789
$d_1(3, 13)$	9.6780
$d_1(3, 25)$	16.5768
$d_1(4, 4)$	7.0397
$d_1(4, 7)$	8.7644
$d_1(4, 13)$	12.2138
$d_1(5, 5)$	10.1504
$d_1(5, 9)$	12.45

Tabela 4.3: Valor numérico do deslocamento.

dessa forma, a *variação total* é dada por

$$\sum_{i=1}^{14} (\mu_i - \bar{\mu})^2 = 309.68,$$

e a *variação explicada* é

$$\sum_{i=1}^{14} (d_1(m_i, n_i) - \bar{\mu})^2 = 295.364.$$

Portanto, o *coeficiente de determinação* é  $295.364/309.68 = 0.95377$ . Concluimos assim que o modelo consegue explicar os valores observados com 95% de confiança.

Dessa forma, concluimos que uma aproximação para a fdp do maior autovalor de matrizes Wishart é

$$\phi(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < d_1 \\ \frac{(2\sigma^2)^{-n-m+1} \cdot (t - d_1)^{(n+m-1)-1}}{\Gamma(n+m-1)} \exp\left(-\frac{(t-d_1)}{2\sigma^2}\right), & t \geq d_1 \end{cases}, \quad (4.1.3)$$

onde  $d_1(m, n) = 2.53573m + 0.574893n - 5.40273$ .

**Teorema 4.1.3.** Uma aproximação para a fdp do maior autovalor da matriz Wishart  $N_{n_R \times l} N_{l \times n_R}^*$ , cuja variância é  $\sigma^2 = N_0/2$ , é dada por

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t < d_1 \\ \left(\frac{t-d_1}{N_0}\right)^{l+n_R-2} \frac{1}{\Gamma(l+n_R-1) \cdot N_0} \exp\left(-\frac{(t-d_1)}{N_0}\right) & , \quad t \geq d_1 \end{cases} ,$$

onde  $d_1 = d_1(n_R, l) = 2.53573n_R + 0.574893l - 5.40273$ .

Terminamos a seção generalizando o teorema 3.2.4.

**Teorema 4.1.4.** Se  $\tilde{M}$  tem distribuição  $\tilde{W}(2, n)$ , então  $f_{\lambda_{max}}(\lambda)$  satisfaz

$$\begin{aligned} f_{\lambda_{max}}(\lambda) &= \tilde{K}_{n,2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{n-2} \left[ (2\sigma^2)^{n-1} \cdot \gamma\left(n-1, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \left(\lambda^2 - 2\lambda(2\sigma^2)(n-1) + (2\sigma^2)^2 n(n-1)\right) \right] \\ &\quad + \tilde{K}_{n,2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{n-2} \left[ (2\sigma^2) \lambda^{n-1} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) (\lambda - (2\sigma^2)n) \right]. \end{aligned}$$

**Demonstração:**

Com  $m = 2$ , a fdp conjunta dada pela equação (3.2.9) para dois autovalores é dada por

$$\begin{aligned} &\tilde{K}_{n,2} \exp\left(-\frac{\lambda_1}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{\lambda_2}{2\sigma^2}\right) \lambda_1^{n-2} (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \lambda_2^{n-2} \\ &= \tilde{K}_{n,2} \exp\left(-\frac{\lambda_1}{2\sigma^2}\right) \lambda_1^{n-2} \exp\left(-\frac{\lambda_2}{2\sigma^2}\right) (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \lambda_2^{n-2}. \end{aligned}$$

Portanto

$$f_{\lambda_{max}}(\lambda) = \tilde{K}_{n,2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{n-2} \int_0^\lambda \exp\left(-\frac{\lambda_2}{2\sigma^2}\right) (\lambda - \lambda_2)^2 \lambda_2^{n-2} d\lambda_2.$$

Como no caso real, a integral apresentada na equação anterior é de difícil cálculo. De fato,

$$\begin{aligned}
& \int_0^\lambda \exp\left(-\frac{\lambda_2}{2\sigma^2}\right) \lambda_2^{n-2} (\lambda - \lambda_2)^2 d\lambda_2 \\
= & \int_0^\lambda \exp\left(-\frac{\lambda_2}{2\sigma^2}\right) \lambda_2^{n-2} (\lambda^2 - 2\lambda\lambda_2 + \lambda_2^2) d\lambda_2 \\
= & \lambda^2 \int_0^\lambda \exp\left(-\frac{\lambda_2}{2\sigma^2}\right) \lambda_2^{n-2} d\lambda_2 - 2\lambda \int_0^\lambda \exp\left(-\frac{\lambda_2}{2\sigma^2}\right) \lambda_2^{n-1} d\lambda_2 + \int_0^\lambda \exp\left(-\frac{\lambda_2}{2\sigma^2}\right) \lambda_2^n d\lambda_2 \\
= & \lambda^2 (2\sigma^2)^{n-1} \cdot \gamma\left(n-1, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) - 2\lambda (2\sigma^2)^n \cdot \gamma\left(n, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) + (2\sigma^2)^{n+1} \cdot \gamma\left(n+1, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \\
= & \lambda^2 (2\sigma^2)^{n-1} \cdot \gamma\left(n-1, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) - 2\lambda (2\sigma^2)^n \left( (n-1) \cdot \gamma\left(n-1, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) - \left(\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right)^{n-1} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \right) \\
& \quad + (2\sigma^2)^{n+1} \left( n \cdot \gamma\left(n, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) - \left(\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right)^n \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \right) \\
= & \lambda^2 (2\sigma^2)^{n-1} \cdot \gamma\left(n-1, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) - 2\lambda (2\sigma^2)^n (n-1) \cdot \gamma\left(n-1, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) + 2\lambda (2\sigma^2)^n \left(\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right)^{n-1} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \\
& \quad - (2\sigma^2)^{n+1} \left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right)^n \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) + (2\sigma^2)^{n+1} n \cdot \gamma\left(n, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \\
= & (2\sigma^2)^{n-1} \cdot \gamma\left(n-1, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) (\lambda^2 - 2\lambda (2\sigma^2)^1 (n-1)) + 2(2\sigma^2) \lambda^n \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \\
& \quad - (2\sigma^2) \lambda^n \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) + (2\sigma^2)^{n+1} n \cdot \gamma\left(n, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \\
= & (2\sigma^2)^{n-1} \cdot \gamma\left(n-1, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) (\lambda^2 - 2\lambda (2\sigma^2)^1 (n-1)) + (2\sigma^2) \lambda^n \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \\
& \quad + (2\sigma^2)^{n+1} n \left[ (n-1) \cdot \gamma\left(n-1, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) - \left(\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right)^{n-1} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \right] \\
= & (2\sigma^2)^{n-1} \cdot \gamma\left(n-1, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) (\lambda^2 - 2\lambda (2\sigma^2)^1 (n-1)) + (2\sigma^2) \lambda^n \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \\
& \quad + (2\sigma^2)^{n+1} n (n-1) \cdot \gamma\left(n-1, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) - (2\sigma^2)^{n+1} n \left(\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right)^{n-1} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \\
= & (2\sigma^2)^{n-1} \cdot \gamma\left(n-1, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) (\lambda^2 - 2\lambda (2\sigma^2)^1 (n-1)) + (2\sigma^2) \lambda^n \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \\
& \quad + (2\sigma^2)^{n+1} n (n-1) \cdot \gamma\left(n-1, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) - (2\sigma^2)^2 n \lambda^{n-1} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2\sigma^2)^{n-1} \cdot \gamma\left(n-1, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \left[\lambda^2 - 2\lambda(2\sigma^2)^1(n-1) + (2\sigma^2)^2 n(n-1)\right] \\
&\quad + (2\sigma^2)\lambda^{n-1} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \left[\lambda - (2\sigma^2)n\right].
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
f_{\lambda_{max}}(\lambda) &= \tilde{K}_{n,2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{n-2} \left[(2\sigma^2)^{n-1} \cdot \gamma\left(n-1, \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \left[\lambda^2 - 2\lambda(2\sigma^2)^1(n-1) + (2\sigma^2)^2 n(n-1)\right]\right] \\
&\quad + \tilde{K}_{n,2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \lambda^{n-2} \left[(2\sigma^2)\lambda^{n-1} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \left[\lambda - (2\sigma^2)n\right]\right].
\end{aligned}$$

□

## 4.2 Critério.

Nesta seção resolvemos o problema de pesquisa apresentado na seção 2.3, onde devemos calcular

$$P\left(\frac{1}{4} \|H(E-C)\|_2^2 \leq \lambda_{max}(NN^*)\right). \quad (4.2.1)$$

Por definição, sabemos que

$$P(a \leq \lambda_{max}(NN^*)) = \int_a^\infty f_{\lambda_{max}}(\lambda) d\lambda,$$

onde  $f_{\lambda_{max}}(\lambda)$  é a fdp do maior autovalor da matriz Wishart. Através dos resultados da seção anterior, temos que a função  $\phi(t)$  dada no teorema 4.1.3 é uma aproximação para  $f_{\lambda_{max}}(\lambda)$ . Dessa forma, consideramos que

$$P(a \leq \lambda_{max}(NN^*)) = \int_a^\infty \phi(t) dt.$$

Se  $0 \leq a \leq d_1$ , então

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty \phi(t) dt &= \int_a^{d_1} \phi(t) dt + \int_{d_1}^\infty \phi(t) dt \\
&= 0 + \int_{d_1}^\infty \phi(t) dt \\
&= 0 + 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Assim, quando  $0 \leq a < d_1$  temos que a probabilidade é igual a 1. Como (4.2.1) é a probabilidade

do decodificador de máxima verossimilhança, ao receber  $R$ , escolher erroneamente que a palavra-código enviada foi  $E$  dado que enviamos  $C$ . Temos a certeza de erro na transmissão.

Se  $a \geq d_1$ , então

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \phi(t) dt &= \int_a^\infty \frac{(N_0)^{-l-n_R+1} \cdot (t-d_1)^{(l+n_R-2)}}{\Gamma(l+n_R-1)} \exp\left(-\frac{t-d_1}{N_0}\right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(l+n_R-1)} \int_a^\infty (N_0)^{-l-n_R+1} \cdot (t-d_1)^{(l+n_R-2)} \exp\left(-\frac{t-d_1}{N_0}\right) dt. \end{aligned}$$

Seja  $u = (t-d_1)/N_0$ , então  $du = dt/N_0$  com  $u \in [(a-d_1)/N_0, \infty)$ , e com esta mudança de variável obtemos que

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \phi(t) dt &= \frac{1}{\Gamma(l+n_R-1)} \int_{\frac{a-d_1}{N_0}}^\infty (N_0)^{-l-n_R+1} \cdot (u \cdot N_0)^{(l+n_R-2)} \exp(-u) \cdot N_0 \cdot du \\ &= \frac{1}{\Gamma(l+n_R-1)} \int_{\frac{a-d_1}{N_0}}^\infty (N_0)^{-l-n_R+1} \cdot (N_0)^{(l+n_R-2)} \cdot N_0 \cdot u^{(l+n_R-2)} \exp(-u) du \\ &= \frac{1}{\Gamma(l+n_R-1)} \int_{\frac{a-d_1}{N_0}}^\infty u^{(l+n_R-2)} \exp(-u) du \\ &= \frac{1}{\Gamma(l+n_R-1)} \Gamma\left(l+n_R-1, \frac{a-d_1}{N_0}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$P(a \leq \lambda_{\max}(NN^*)) = \begin{cases} 1, & 0 \leq a \leq d_1 \\ \frac{\Gamma\left(l+n_r-1, \frac{a-d_1}{N_0}\right)}{\Gamma(l+n_r-1)}, & d_1 < a \end{cases},$$

onde  $d_1 = d_1(m, n)$  é dado na equação (4.1.2). Assim, demonstramos o seguinte:

**Teorema 4.2.1.** Em um canal de comunicação MIMO, a probabilidade de enviarmos a palavra-código  $C$  e o decodificador de máxima-verossimilhança, munido da norma espectral, interpretar erroneamente que a palavra-código enviada foi  $E$ , conhecido o canal  $H$  é

$$\begin{aligned} P(C \rightarrow E | H) &= P\left(\frac{1}{4} \|H(E-C)\|_2^2 \leq \lambda_{\max}(NN^*)\right) \\ &= \begin{cases} 1, & 0 \leq \frac{\|H(E-C)\|_2^2}{4} \leq d_1 \\ \frac{\Gamma\left(l+n_r-1, \frac{\|H(E-C)\|_2^2 - d_1}{4N_0}\right)}{\Gamma(l+n_r-1)}, & d_1 < \frac{\|H(E-C)\|_2^2}{4} \end{cases}, \end{aligned}$$

onde  $d_1 = d_1(n_R, l) = 2.53573n_r + 0.574893l - 5.40273$ .

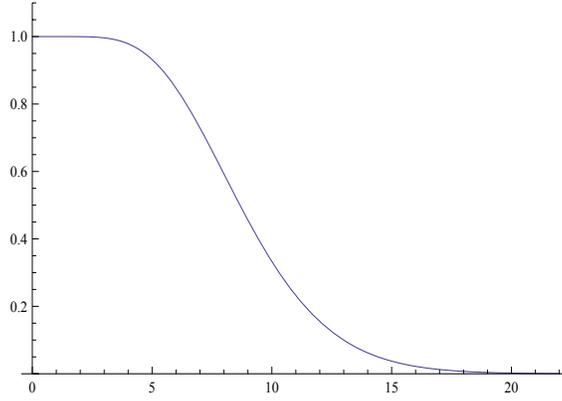


Figura 4.3: gráfico de  $f(x)$  para  $m = 9$

Até agora supomos  $H$  conhecido. Assim, como feito nas subseções do critério do posto e do determinante e critério do traço, devemos calcular a média em  $H$ , ou seja, calcular

$$P(C \rightarrow E) = \int_{\text{Dom}p(H)} P(C \rightarrow E | H)p(H)dH, \quad (4.2.2)$$

onde  $p(H)$  é uma fdp que depende de  $H$ .

Pelo teorema 4.2.1, o termo  $\| H(E - C) \|_2$  é o nosso principal interesse. Uma vez que precisamos de mais informações do termo  $\Gamma\left(l + n_r - 1, \frac{\| H(E - C) \|_2^2 - d_1}{4N_0}\right) / \Gamma(l + n_r - 1)$ . Pela propriedade  $v)$  da definição de norma de matriz, temos que

$$\frac{\| H(E - C) \|_2^2}{4N_0} - \frac{d_1}{N_0} \leq \frac{\| H \|_2^2 \cdot \| (E - C) \|_2^2}{4N_0} - \frac{d_1}{N_0}.$$

Para não carregar a notação definimos

$$t := \| H \|_2^2 \quad \text{e} \quad c := \| (E - C) \|_2^2,$$

então

$$\frac{\| H \|_2^2 \cdot \| (E - C) \|_2^2}{4N_0} - \frac{d_1}{N_0} = \frac{t \cdot c}{4N_0} - \frac{d_1}{N_0} = \frac{t \cdot c - 4 \cdot d_1}{4N_0}.$$

Agora, definindo  $f(x) = \Gamma(m, x) / \Gamma(m)$  para  $m > 0$  e  $x \geq 0$ . Um típico exemplo do gráfico de  $f(x)$  é mostrado na figura 4.3, temos que  $f(x)$  decresce rapidamente tal que  $0 < f(x) < 1$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ . Nosso objetivo é obter um critério de busca para STC. Assim, levando em conta o comportamento de  $f(x)$  é suficiente assumir que

$$\begin{aligned}
P(C \rightarrow E | H) &\approx \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq \frac{t \cdot c}{4} \leq d_1 \\ \frac{\Gamma(l + n_r - 1, \frac{t \cdot c - 4 \cdot d_1}{4N_0})}{\Gamma(l + n_r - 1)} & , \quad d_1 < \frac{t \cdot c}{4} < \infty \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq t \leq \frac{4 \cdot d_1}{c} \\ \frac{\Gamma(l + n_r - 1, \frac{t \cdot c - 4 \cdot d_1}{4N_0})}{\Gamma(l + n_r - 1)} & , \quad \frac{4 \cdot d_1}{c} < t < \infty \end{cases} . \quad (4.2.3)
\end{aligned}$$

Observe que a equação (4.2.3) depende de uma variável aleatória de  $H$ , no caso  $t = \|H\|_2^2$ . As entradas da matriz  $H_{n_R \times n_T}$  são variáveis aleatórias complexas gaussianas com média zero e variância  $1/2$ . Usando a equação (4.1.3), temos que a fdp do maior autovalor da matriz  $H_{n_R \times n_T} H_{n_T \times n_R}^*$  é dada pela função  $\psi(t)$  com expressão

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < d_2 \\ \frac{(t - d_2)^{n_T + n_R - 2}}{\Gamma(n_T + n_R - 1)} \exp(-t + d_2) & , \quad d_2 \leq t \end{cases} , \quad (4.2.4)$$

onde  $d_2 = d_2(n_R, n_T) = 2.53573n_R + 0.574893n_T - 5.402373$ .

Usando as equações (4.2.3) e (4.2.4) iremos calcular a integral

$$P(C \rightarrow E) = \int_{Dom \psi(t)} P(C \rightarrow E | H) \psi(t) dt. \quad (4.2.5)$$

Temos que calcular (4.2.5), resume-se em calcular

$$\int_{d_2}^{\infty} \left( \frac{\Gamma(l + n_R - 1, \frac{c \cdot t - 4d_1}{4N_0})}{\Gamma(l + n_R - 1)} \right) \left[ \frac{(t - d_2)^{n_T + n_R - 2}}{\Gamma(n_T + n_R - 1)} \exp(-t + d_2) \right] dt. \quad (4.2.6)$$

Veja o gráfico, de um caso particular, das equações (4.2.3) e (4.2.4) na figura 4.4. Antes de calcularmos (4.2.6), precisamos da seguinte proposição.

**Proposição 4.2.2.** Temos que

$$\begin{aligned}
&\int_{d_2}^{\infty} \exp\left(-\frac{c \cdot t}{4N_0}\right) (c \cdot t - 4d_1)^i (t - d_2)^{n_T + n_R - 2} \exp(-t) dt \\
&= \sum_{j=0}^i \left( (-1)^j \binom{i}{j} c^{i-j} (4 \cdot d_1)^j \left( \frac{4N_0 + c}{4N_0} \right)^{j-i-n_T-n_R+1} \Gamma(-j+i+n_T+n_R-1) \right. \\
&\quad \left. \times \exp\left(-\frac{d_2}{4N_0}(c+4N_0)\right) {}_1F_1\left[j-i, j-i-n_T-n_R+2, \frac{d_2}{4N_0}(c+4N_0)\right] \right)
\end{aligned}$$

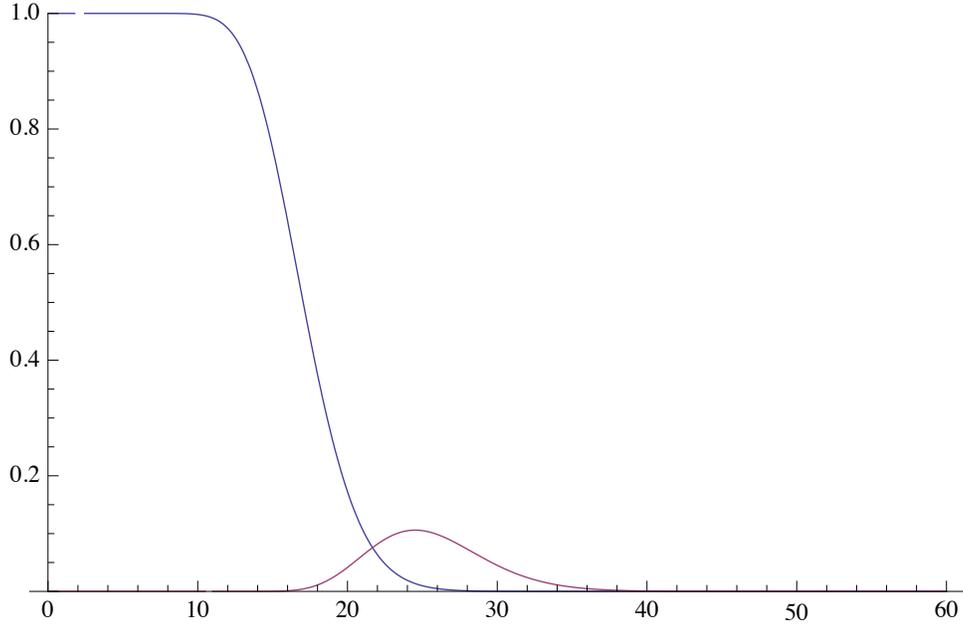


Figura 4.4: gráfico das equações (4.2.3) e (4.2.4)

**Demonstração:** Usando binômio de Newton, temos que

$$(ct - 4d_1)^i = \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} (ct)^{i-j} (4d_1)^j.$$

Substituindo o binômio de Newton na integral

$$\int_{d_2}^{\infty} \exp\left(-\frac{c \cdot t}{4N_0}\right) (c \cdot t - 4d_1)^i (t - d_2)^{n_T+n_R-2} \exp(-t) dt,$$

devemos calcular

$$\begin{aligned} & \int_{d_2}^{\infty} \exp\left(-\frac{c \cdot t}{4N_0}\right) \left( \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} (ct)^{i-j} (4d_1)^j \right) (t - d_2)^{n_T+n_R-2} \exp(-t) dt \\ &= \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} c^{i-j} (4d_1)^j \int_{d_2}^{\infty} \exp\left(-\frac{t(c + 4N_0)}{4N_0}\right) (t)^{i-j} (t - d_2)^{n_T+n_R-2} dt. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
& \int_{d_2}^{\infty} \exp\left(-\frac{t(c+4N_0)}{4N_0}\right) (t)^{i-j} (t-d_2)^{n_T+n_R-2} dt \\
&= \left(\frac{4N_0+c}{4N_0}\right)^{1-i+j-n_R-n_T} \Gamma(-1+i-j+n_R+n_T) \exp\left(-\frac{d_2(c+4N_0)}{4N_0}\right) \\
&\quad \times {}_1F_1\left[-i+j, 2-i+j-n_R-n_T, \frac{d_2(c+4N_0)}{4N_0}\right],
\end{aligned}$$

e obtemos o resultado. □

Agora calculamos (4.2.6).

**Teorema 4.2.3.** Temos que

$$\begin{aligned}
& \int_{d_2}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(l+n_R-1, \frac{c \cdot t - 4d_1}{4N_0})}{\Gamma(l+n_R-1)}\right) \left[\frac{(t-d_2)^{n_T+n_R-2}}{\Gamma(n_T+n_R-1)} \exp(-t+d_2)\right] dt \\
&= \sum_{i=0}^{l+nr-2} \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{i-j} \left\{ \left(\frac{1}{4N_0}\right)^{j+k-n_T-n_R+1} \frac{(-1)^j}{i! \cdot k!} \binom{i}{j} (4 \cdot d_1)^j d_2^k (n_T+n_R-1)_{i-j} \right. \\
&\quad \left. \times \frac{(j-i)_k}{(j-i-n_T-n_R+2)_k} \cdot c^{i-j} (4N_0+c)^{j-i+k-n_T-n_R+1} \exp\left(\frac{-c \cdot d_2 + 4d_1}{4N_0}\right) \right\},
\end{aligned}$$

onde  $(j-i)_k$  e  $(j-i-n_T-n_R+2)_k$  são os símbolos de Pochhammer da definição 1.5.4 .

**Demonstração:** Como

$$\sum_{i=0}^{l+nr-2} \frac{\left(\frac{c \cdot t - 4d_1}{4N_0}\right)^i}{i!} = \exp\left(\frac{c \cdot t - 4d_1}{4N_0}\right) \frac{\Gamma(l+n_R-1, \frac{c \cdot t - 4d_1}{4N_0})}{\Gamma(l+n_R-1)},$$

então

$$\frac{\Gamma(l+n_R-1, \frac{c \cdot t - 4d_1}{4N_0})}{\Gamma(l+n_R-1)} = \sum_{i=0}^{l+nr-2} \frac{\left(\frac{c \cdot t - 4d_1}{4N_0}\right)^i}{i!} \exp\left(-\frac{c \cdot t - 4d_1}{4N_0}\right). \quad (4.2.7)$$

Usando a equação (4.2.7), obtemos que

$$\begin{aligned}
& \int_{d_2}^{\infty} \left( \frac{\Gamma(l + n_R - 1, \frac{c \cdot t - 4d_1}{4N_0})}{\Gamma(l + n_R - 1)} \right) \left[ \frac{(t - d_2)^{n_T + n_R - 2}}{\Gamma(n_T + n_R - 1)} \exp(-t + d_2) \right] dt \\
= & \int_{d_2}^{\infty} \left( \exp\left(\frac{-c \cdot t + 4d_1}{4N_0}\right) \sum_{i=0}^{l + n_R - 2} \frac{\left(\frac{c \cdot t - 4d_1}{4N_0}\right)^i}{i!} \right) \left[ \frac{(t - d_2)^{n_T + n_R - 2}}{\Gamma(n_T + n_R - 1)} \exp(-t + d_2) \right] dt \\
= & \sum_{i=0}^{l + n_R - 2} \frac{\exp\left(\frac{d_1}{N_0} + d_2\right)}{\Gamma(n_T + n_R - 1)} \left(\frac{1}{4N_0}\right)^i \frac{1}{i!} \int_{d_2}^{\infty} \exp\left(-\frac{c \cdot t}{4N_0}\right) (c \cdot t - 4d_1)^i (t - d_2)^{n_T + n_R - 2} \exp(-t) dt.
\end{aligned}$$

Usando a proposição 4.2.2, temos que

$$\begin{aligned}
& \int_{d_2}^{\infty} \left( \frac{\Gamma(l + n_R - 1, \frac{c \cdot t - 4d_1}{4N_0})}{\Gamma(l + n_R - 1)} \right) \left[ \frac{(t - d_2)^{n_T + n_R - 2}}{\Gamma(n_T + n_R - 1)} \exp(-t + d_2) \right] dt \\
&= \sum_{i=0}^{l + nr - 2} \frac{\exp\left(\frac{d_1}{N_0} + d_2\right)}{\Gamma(n_T + n_R - 1)} \left(\frac{1}{4N_0}\right)^i \frac{1}{i!} \int_{d_2}^{\infty} \exp\left(-\frac{c \cdot t}{4N_0}\right) (c \cdot t - 4d_1)^i (t - d_2)^{n_T + n_R - 2} \exp(-t) dt \\
&= \sum_{i=0}^{l + nr - 2} \left\{ \left( \frac{\exp\left(\frac{d_1}{N_0} + d_2\right)}{\Gamma(n_T + n_R - 1)} \left(\frac{1}{4N_0}\right)^i \frac{1}{i!} \right) \sum_{j=0}^i \left( (-1)^j \binom{i}{j} \right) c^{i-j} (4 \cdot d_1)^j \left(\frac{4N_0 + c}{4N_0}\right)^{j-i-n_T-n_R+1} \right. \\
&\quad \times \Gamma(-j + i + n_T + n_R - 1) \exp\left(-\frac{d_2}{4N_0}(c + 4N_0)\right) \\
&\quad \left. \times {}_1F1\left[j - i, j - i - n_T - n_R + 1, \frac{d_2}{4N_0}(c + 4N_0)\right] \right\} \\
&= \exp\left(\frac{d_1}{N_0} + d_2\right) \exp\left(-\frac{d_2}{4N_0}(c + 4N_0)\right) \sum_{i=0}^{l + nr - 2} \left\{ \left( \frac{1}{\Gamma(n_T + n_R - 1)} \left(\frac{1}{4N_0}\right)^i \frac{1}{i!} \right) \right. \\
&\quad \times \sum_{j=0}^i \left( (-1)^j \binom{i}{j} \right) c^{i-j} (4 \cdot d_1)^j \left(\frac{4N_0 + c}{4N_0}\right)^{j-i-n_T-n_R+1} \\
&\quad \left. \times \Gamma(-j + i + n_T + n_R - 1) {}_1F1\left[j - i, j - i - n_T - n_R + 2, \frac{d_2}{4N_0}(c + 4N_0)\right] \right\} \\
&= \exp\left(\frac{-c \cdot d_2 + 4d_1}{4N_0}\right) \sum_{i=0}^{l + nr - 2} \left\{ \left(\frac{1}{4N_0}\right)^i \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} c^{i-j} (4 \cdot d_1)^j \left(\frac{4N_0 + c}{4N_0}\right)^{j-i-n_T-n_R+1} \right. \\
&\quad \left. \times \frac{\Gamma(-j + i + n_T + n_R - 1)}{\Gamma(n_T + n_R - 1)} {}_1F1\left[j - i, j - i - n_T - n_R + 2, \frac{d_2}{4N_0}(c + 4N_0)\right] \right\} \\
&= \exp\left(\frac{-c \cdot d_2 + 4d_1}{4N_0}\right) \sum_{i=0}^{l + nr - 2} \left\{ \left(\frac{1}{4N_0}\right)^i \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} c^{i-j} (4 \cdot d_1)^j \left(\frac{4N_0 + c}{4N_0}\right)^{j-i-n_T-n_R+1} \right. \\
&\quad \left. \times \cdot (n_T + n_R - 1)_{i-j} {}_1F1\left[j - i, j - i - n_T - n_R + 2, \frac{d_2}{4N_0}(c + 4N_0)\right] \right\} \\
&= \exp\left(\frac{-c \cdot d_2 + 4d_1}{4N_0}\right) \sum_{i=0}^{l + nr - 2} \left\{ \left(\frac{1}{4N_0}\right)^i \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} c^{i-j} (4 \cdot d_1)^j \left(\frac{4N_0 + c}{4N_0}\right)^{j-i-n_T-n_R+1} \right. \\
&\quad \left. \times (n_T + n_R - 1)_{i-j} \left( \sum_{k=0}^{i-j} \frac{(j-i)_k}{(j-i-n_T-n_R+2)_k} \left(\frac{d_2}{4N_0}(c + 4N_0)\right)^k \frac{1}{k!} \right) \right\} \\
&= \exp\left(\frac{-c \cdot d_2 + 4d_1}{4N_0}\right) \sum_{i=0}^{l + nr - 2} \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{i-j} \left\{ \left(\frac{1}{4N_0}\right)^i \frac{1}{i!} (-1)^j \binom{i}{j} c^{i-j} (4 \cdot d_1)^j \left(\frac{4N_0 + c}{4N_0}\right)^{j-i-n_T-n_R+1} \right. \\
&\quad \left. \times (n_T + n_R - 1)_{i-j} \left( \frac{(j-i)_k}{(j-i-n_T-n_R+2)_k} \left(\frac{d_2}{4N_0}(c + 4N_0)\right)^k \frac{1}{k!} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp\left(\frac{-c \cdot d_2 + 4d_1}{4N_0}\right) \sum_{i=0}^{l+nr-2} \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{i-j} \left\{ \left(\frac{1}{4N_0}\right)^i \frac{(-1)^j}{i! \cdot k!} \binom{i}{j} (4 \cdot d_1)^j (n_T + n_R - 1)_{i-j} \right. \\
&\quad \left. \times \frac{(j-i)_k}{(j-i-n_T-n_R+2)_k} \cdot 2^k \cdot c^{i-j} \left(\frac{4N_0+c}{4N_0}\right)^{j-i-n_T-n_R+1} \left(\frac{c+4N_0}{4N_0}\right)^k \right\} \\
&= \exp\left(\frac{-c \cdot d_2 + 4d_1}{4N_0}\right) \sum_{i=0}^{l+nr-2} \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{i-j} \left\{ \left(\frac{1}{4N_0}\right)^i \frac{(-1)^j}{i! \cdot k!} \binom{i}{j} (4 \cdot d_1)^j (n_T + n_R - 1)_{i-j} \right. \\
&\quad \left. \times \frac{(j-i)_k}{(j-i-n_T-n_R+2)_k} \cdot d_2^k \cdot c^{i-j} \left(\frac{4N_0+c}{4N_0}\right)^{j-i+k-n_T-n_R+1} \right\} \\
&= \exp\left(\frac{-c \cdot d_2 + 4d_1}{4N_0}\right) \sum_{i=0}^{l+nr-2} \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{i-j} \left\{ \left(\frac{1}{4N_0}\right)^i \frac{(-1)^j}{i! \cdot k!} \binom{i}{j} (4 \cdot d_1)^j (n_T + n_R - 1)_{i-j} \right. \\
&\quad \left. \times \frac{(j-i)_k}{(j-i-n_T-n_R+2)_k} \cdot d_2^k \cdot c^{i-j} \left(\frac{1}{4N_0}\right)^{j-i+k-n_T-n_R+1} (4N_0+c)^{j-i+k-n_T-n_R+1} \right\} \\
&= \sum_{i=0}^{l+nr-2} \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{i-j} \left\{ \left(\frac{1}{4N_0}\right)^{j+k-n_T-n_R+1} \frac{(-1)^j}{i! \cdot k!} \binom{i}{j} (4 \cdot d_1)^j d_2^k (n_T + n_R - 1)_{i-j} \right. \\
&\quad \left. \times \frac{(j-i)_k}{(j-i-n_T-n_R+2)_k} \cdot c^{i-j} (4N_0+c)^{j-i+k-n_T-n_R+1} \exp\left(\frac{-c \cdot d_2 + 4d_1}{4N_0}\right) \right\} \quad \square
\end{aligned}$$

O teorema 4.2.3 apresenta uma expressão para a probabilidade de enviarmos uma palavra-código  $C$  por um canal MIMO com desvanecimento Rayleigh plano quase-estático e coerente, e o decodificador de máxima verossimilhança, munido com a norma espectral, interpretar erroneamente que a palavra-código enviada foi  $E$ , ou seja, a probabilidade de erro.

Buscamos códigos espaço-temporais com baixa probabilidade de erro, devemos encontrar códigos espaço-temporais que minimizem o teorema 4.2.3. A figura 4.5 mostra o gráfico do teorema 4.2.3 em função da variável

$$c = \| E - C \|_2^2,$$

onde  $\| E - C \|_2^2 = \lambda_1((E - C)(E - C)^*)$ , teorema 1.2.19. Dessa forma, devemos fazer  $c$  tender ao infinito, ou seja, devemos encontrar códigos tais que  $\| E - C \|_2^2$  seja o maior possível.

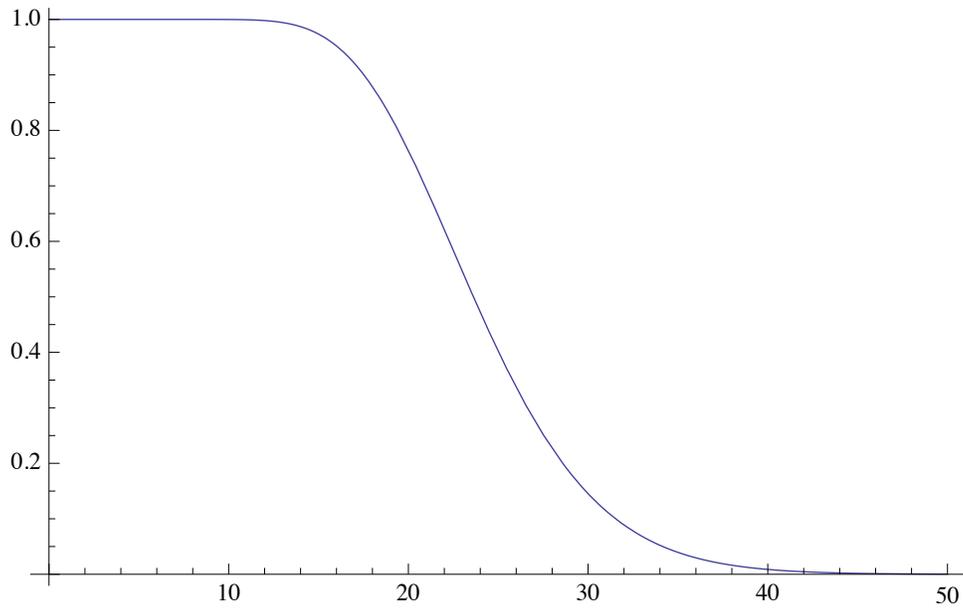


Figura 4.5: gráfico do teorema 4.2.3

**Teorema 4.2.4. (CRITÉRIO DO MAIOR AUTOVALOR)**

Pelo resultado do teorema 4.2.3, o critério de projeto de códigos espaço-temporais em canais de comunicação MIMO, com desvanecimento Rayleigh plano quase-estático e coerente é dominado por

$$\min_{C_1, C_2, C_1 \neq C_2} \{ \| C_1 - C_2 \|_2^2 \},$$

sobre todas as possíveis diferenças entre as palavras-código.

De acordo com o teorema 4.2.4, bons códigos espaço-temporais  $\mathfrak{F}$  são projetados de tal forma que

$$\min_{C_1, C_2, C_1 \neq C_2} \{ \| C_1 - C_2 \|_2^2 \}$$

seja o maior possível.

Agora, apresentamos alguns exemplos de STC.

i) Seja

$$\mathfrak{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

a família de todas matrizes binárias singulares. Usando o critério do posto e determinante, este conjunto não pode ser considerado um bom STC, mas  $\|C_1 - C_2\|_2 = \sqrt{2}$ .

ii) Seja  $M(x, z) = \begin{pmatrix} xi & -\bar{z} \\ z & -xi \end{pmatrix}$ , onde  $x \in \mathbb{R}$  e  $z \in \mathbb{C}$ . Todos os elementos de  $M(x, z)$  possuem traço nulo, então esta família de matrizes não pode ser considerado em bom STC usando o critério do traço, mas  $\|M(x, z)\|_2 = \sqrt{x^2 + |z|^2}$ , então para convenientes escolhas de  $x$  e  $z$  nós podemos considerar famílias finitas destas matrizes onde  $\|M(x_1, z_1) - M(x_2, z_2)\|_2^2$  será tão grande quanto se deseja.

iii) O trabalho [Hug00a] estuda códigos espaço-temporal grupo. Um importante exemplo é o que segue. Seja  $\mathfrak{G} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$  e  $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Então  $\mathfrak{C} = D\mathfrak{G}$  é chamado código espaço-temporal quatérnio, e satisfaz o critério do posto e determinante. Agora, se  $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  então  $\mathfrak{C}_1 = D_1\mathfrak{G}$  é um novo código espaço-temporal grupo com  $\|C_1 - C_2\|_2 = 4\sqrt{2}$  for  $C_1, C_2 \in \mathfrak{C}_1$ , mas o critério do posto e determinante não é satisfeito.

### 4.3 Performance e comparações.

Seja  $PF$  o limitante da probabilidade de erro dado na equação (2.2.23), usado no critério do posto e determinante,  $PT$  o limitante dado na equação (2.2.27), usado no critério do traço e  $PE$  a expressão dada no teorema 4.2.3. Todos eles podem ser vistos tanto como função da variável  $c = \prod \lambda$ ,  $c = \sum \lambda$  e  $c = \|E - C\|$ , respectivamente para  $PF$ ,  $PT$  e  $PE$ , ou todos como função da variável  $E_s$ , para um fixo  $c$ .

Na figura 4.6 mostramos, da esquerda para a direita, as curvas de  $PT$ ,  $PE$  e  $PF$ , onde os parâmetros são  $n_T = n_R = l = r = 2$ ,  $N_0 = 1$  e  $E_s = 10$ .

Na figura 4.7 mostramos, da esquerda para a direita, as curvas de  $PE$  e  $PT$ , onde os parâmetros são  $n_T = n_R = l = r = 3$ ,  $N_0 = 1$  e  $E_s = 10$ .

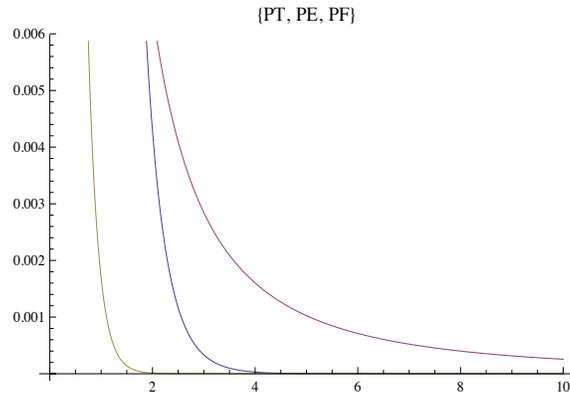


Figura 4.6: gráfico de  $PT$ ,  $PE$  e  $PF$  para  $n_T = n_R = l = 2$

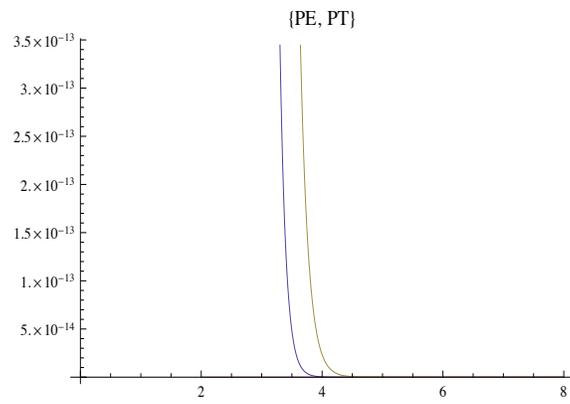


Figura 4.7: gráfico de  $PE$  e  $PT$  para  $n_T = n_R = l = 3$

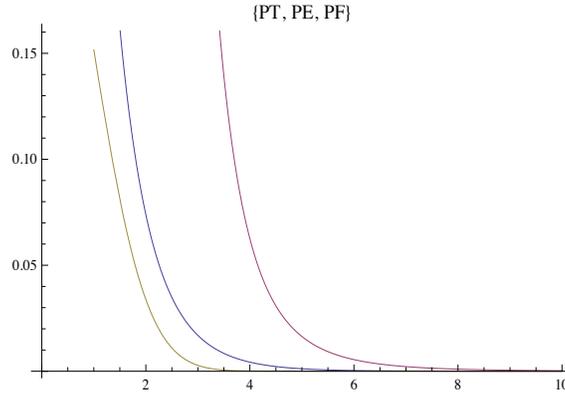


Figura 4.8: gráficos de  $PT$ ,  $PE$  e  $PF$  para  $n_T = n_R = l = 2$ , in function of  $E_s$ , for  $c = 5$

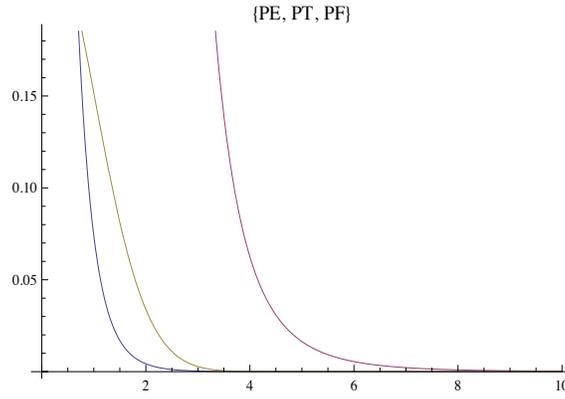


Figura 4.9: gráficos de  $PE$ ,  $PT$  e  $PF$  para  $n_T = n_R = l = 2$ , in function of  $E_s$ , for  $c = 5$

Por outro lado, na figura 4.8 mostramos, da direita para a esquerda, as curvas de  $PT$ ,  $PE$  e  $PF$ , em função de  $E_s$ , para um fixo  $c$ , onde os parâmetros são  $n_T = n_R = l = r = 2$ ,  $N_0 = 1$  e  $c = 5$  e na figura 4.9 nós temos os mesmos parâmetros, agora para  $c = 10$ .

O código espaço-temporal de Alamouti  $\mathfrak{A}$  para modulação BPSK  $\{-1, 1\}$  é dado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

e vamos considerar também o código espaço-temporal  $\mathfrak{A}_1$  dado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

-	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}_1$
PF	0.0004	0.0016
PE	0.0005	0.00002

Tabela 4.4: Comparação entre dois códigos espaço-temporais.

Então, nós temos  $\max_{A, A' \in \mathfrak{A}} \det(A - A') = 8$ , assim  $PF(8) \approx 0.0004$ , mas  $\max_{A, A' \in \mathfrak{A}} \|A - A'\|_2 = 2\sqrt{2}$  e  $PF(2\sqrt{2}) \approx 0.0005$ . Agora, para  $\mathfrak{A}_1$  temos  $\max_{B, B' \in \mathfrak{A}_1} \|B - B'\|_2 = 4$  e  $PE(4) \approx 0.00002$ . Por outro lado,  $\max_{B, B' \in \mathfrak{A}_1} \text{rank}(B - B') = 2$  e  $\max_{B, B' \in \mathfrak{A}_1} \det(B - B') = 4$ , assim,  $PF(4) \approx 0.0016$ . Consequentemente, para o código de Alamouti  $\mathfrak{A}$ , nós temos similar performance, mas para o código  $\mathfrak{A}_1$  a performance do critério da norma espectral é melhor que o critério do posto e determinante, e este código espaço-temporal não é de diversidade total. Veja tabela 4.4.

## Considerações Finais.

Neste trabalho, apresentamos pela primeira vez, o uso da teoria das Matrizes Aleatórias para definir um novo critério de busca para códigos espaço-temporais em canais MIMO. Para definir o novo critério precisamos deduzir uma fdp para o maior autovalor de uma matriz Wishart. Os resultados apresentados justificam uma possível implementação prática e comercial do método. Além disso, definimos um ambiente natural para STC.

Este novo critério, como os critérios clássicos, tem por finalidade minimizar a probabilidade de erro par-a-par do decodificador de máxima-verossimilhança. Entretanto, ao contrário dos critérios de busca clássicos, o critério do posto e do determinante e o critério do traço, munimos o decodificador de máxima-verossimilhança da norma espectral de matrizes. A motivação para escolhermos a norma espectral é que tal norma de matrizes é induzida de maneira natural pela norma euclidiana de vetores, porém preservando a estrutura de matriz, isto é sem corresponder diretamente a uma representação vetorial da matriz.

### 5.1 Trabalhos Futuros.

Uma continuidade natural do trabalho desenvolvido nesta tese é a comparação do critério apresentado com os critérios clássicos de busca para STC em canais MIMO. Além disso, há a

necessidade da busca computacional de bons STC usando o critério do maior autovalor. Como já mencionado anteriormente, existem métodos computacionais para encontrar o maior autovalor de uma matrizes. Na seção 1.4 exibimos um método simples e prático para busca computacional, o Método das Potências.

# Bibliografia

- [AGZ09] G. W. Anderson, A. Guionnet e O. Zeitouni. "An Introduction to Random Matrices". Cambridge University, 2009.
- [Ala98] S. M. Alamouti. "A simple transmit diversity technique for wireless communications". IEEE Journal Select Areas in Comm., vol. 16, no. 08, out., 1998.
- [ALTV04] G. Alfano, A. Lozano, A. M. Tulino e S. Verdu. "Mutual information and Eigenvalue Distribution of MIMO Ricean Channels". International Symposium on Information Theory and its Applications, ISITA, 2004.
- [ATLV06] G. Alfano, A. M. Tulino, A. Lozano e S. Verdu. "Eigenvalue Statistics of Finite-Dimensional Random Matrices for MIMO Wireless Communications". IEEE, ICC, 2006.
- [And98] L. C. Andrews. "Special functions of mathematics for engineering". second edition. Ed. Bellingham, SPIE Press, 1998.
- [BB99] S. Benedetto e E. Biglieri "Principles of Digital Transmission with Wireless Applications". New York: Klumer/Plenum, 1999.
- [BD91] W. R. Braun e U. Dersch. "A physical mobile radio channel model". IEEE Transaction Vehicular Technology, vol.40, 472-482, maio, 1991.

- [BFFMW81] T. A. Bruady, J. Flores, J. P. French, P. A. Mello, A. Pandey e S. S. M. Wong, "Random matrix physics: spectrum and strength fluctuations". *Rev. Modern Physics*, vol. 53, 385-479, 1981.
- [BGT93] C. Berrou, A. Glavieux e P. Thitimajshima "Near Shannon limit error-correcting coding: turbo codes". In *Proc. of 1993 International Conference on Communications , (ICC 93)*, 1064-1070, maio, 1993.
- [Bol85] B. Bollobás. "Random Graphs". Academic Press, London, 1985.
- [CFG02] D. Chizhik, G. J. Foschini e M. J. Gans "Keyholes, correlations, and capacities of multielement transmit and receive antennas". *IEEE Trans. on Wireless Communications*, vol. 1, pp. 361-368, abril, 2002.
- [CKN86] J. E. Cohen, H. Kesten e C. M. Newman, "Random Matrices and Their Applications, Contemporary Mathematics", American Mathematical Society, vol. 50, 1986.
- [Cla68] R. H. Clarke. "A Statistical Theory of Mobile-Radio Reception". *Bell Systems Technical Journal*, vol. 1, 957-1000, jul-ago, 1968.
- [CRC07] T. Conlon, H. J. Ruskin e M. Crane, "Random Matrix Theory and fund of funds portfolio optimization", *Physic A*, no. 382, 565-576, 2007.
- [CT91] T. Cover e J. Thomas. "Elements of Information Theory". John Wiley and Sons Inc., 1991.
- [CTK02] C. N. Chuah, D. Tse e J.M. Khan. "Capacity scaling in MIMO wireless systems under correlated fading". *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 48, 637-650, março, 2000.
- [CWZ03] M. Chiani, M. Z. Win e A. Zanella, "On the capacity of spatially correlated MIMO Rayleigh fading channels", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 49, no. 10, 2363-2371, 2003.

- [CYV01] Z. Chen, J. Yuan e B. Vucetic, "An improved space-time trellis coded modulation scheme on slow Rayleigh fading channels", in Proc. IEEE ICC01, Helsinki, Finland, 1110-1116, jun., 2001.
- [CYVF03] J. Yuan, A. Chen, B. Vucetic e W. Firmanto. "Performance and Design of Space-Time Coding in Fading Channels". IEEE Transaction on Communications, vol 51, no. 12, 2003.
- [CZ08] M. Chiani e A. Zanella, "Joint distribution of an arbitrary subset of ordered eigenvalue of Wishart matrices", PIMRC, Cannes, set., 1-6, 2008.
- [Dav59] P. J. Davis. "Leonhard Euler Integral: A Historical profile of the Gamma Function". The American Mathematical Monthly, vol. 66, no. 10, dez., 1959, 849-869.
- [Dem88] J. Demmel, "The probability that a numerical analysis problem is difficult". Mathematical of Computation, vol. 50, 1988, 449-480.
- [Dys62a] F. Dyson, "A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix". J. Math. Phys., vol. 3, 1191-1198, 1962.
- [Dys62b] F. Dyson, "Statistical theory of the energy levels of complex systems. I-III". J. Math. Phys., vol. 3, 140-156, 157-165, 166-175, 1962.
- [Dys62c] F. Dyson, "The threefoldway algebraic structure of symmetry groups and ensembles in quantum mechanics". J. Math. Phys., vol. 3, 1199-1215, 1962.
- [Ede88] A. Edelman, "Eigenvalues and Condition Numbers of Random Matrices". SIAM J. Matrix Anal. Appl. vol 9, no. 4, out., 1988.
- [FG98] G. J. Foschini e M. J. Gans. "On limits of wireles communications in a fading environment when using multiple antennas". Wireles Personal Communications, vol. 6, 1998, 311-335.

- [For10] P. J. Forrester. "Log-Gases and Random Matrices". Princeton University Press, Princeton, 2010.
- [Fos96] G. Foschini, "Layered space-time architecture for wireless communication in a fading environment when using multi-element antennas", Bell Labs Technical Journal, Autumn, 41-59, 1996.
- [Fra06] N. B. Franco. "Cálculo Numérico". Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2006.
- [FVYC02] W. Firmanto, B. Vucetic, J. Yuan e Z. Chen. "Space-time Turbo Trellis Coded Modulation for wireless data communications". Eurasip Journal on Applied Signal Processing, vol. 2002, no. 5, 459-470, maio, 2002.
- [Gal63] R. G. Gallager. "Low Density Parity Check Codes". MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1963.
- [Ger80] S. German, "A limit theorems for the norm of random matrices", Ann. Probab., vol.8, 252-261, 1980.
- [GL96] G. G. Golub e C. F. V. Loan. "Matrix Computations". third edition. The Johns Hopkins University Press. Baltimore, 1996.
- [GN51] H. H. Goldstine e J. v. Neumann, "Numerical inverting of Matrices of High Order II". Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 2, no. 2, abril, 1951.
- [Gol05] A. Goldsmith. "Wireless Communications". Cambridge Univerity Press, 2005.
- [HF77] F. Hansen e I. Finn. "Mobile Fading - Rayleigh and Log-Normal Superimposed". IEEE Transactions on Vehicular Tech., vol. 46, 332-335, nov., 1977.
- [HH02] B. Hassibi e B. M. Hochwald, "High-rate codes thar are linear in space and time". IEEE Trans. Information Theory, vol. 46, no. 2, 524-542, mar., 2002.

- [HJ91] R. A. Horn e C. R. Johnson. "Topics in matrix analysis". Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [HKR04] D. Halliday, K. S. Krane e R. Resnik, "Física 3", LTC, vol 3, quinta edição, 2004.
- [HS00] B. M. Hochwald e W. Sweldens, "Differential unitary space time modulations". IEEE Trans. Commun., vol. 50, no. 12, 2041-2052, dez., 2000.
- [Hug00] B. L. Hughes. "Differential space-time modulation", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 46, no. 7, 2567-2578, nov., 2000.
- [Hug00a] B. L. Hughes. "Space-time group codes", Proc. Asilomar Conf. Signals, Systems and Computers, vol. 1, pp. 699-704, 2000.
- [Hsu39] P. L. Hsu, "On the distribution of the roots of certain determinantal equations", Ann. Eugen., vol. 9, 250-258, 1939.
- [Jaf05] H. Jafarkani. "Space-Time Coding: Theory and Practice". Cambridge University Press, 2005.
- [Jam64] A. T. James, "Distributions of matrix variates and latent roots derived from normal samples", Ann. Math. Stat. vol. 35, 475-501, 1964.
- [Jon82] D. Jonsson, "Some limit theorems for the eigenvalue of a sample covariance matrix", J. Multivariate Anal., vol. 12, 1-38, 1982.
- [KC71] P. R. Krishnaiah e T. C. Cheng, "On the exact distribution of the smallest roots of the Wishart Matrix using zonal polynomials", Ann. Inst. Statistic Math., vol. 23, 293-295, 1971.
- [LCPB00] L. Laloux, P. Cizeau, M. Potters e J. Bouchaud, "Random matrix theory and financial correlations". International journal of Theoretical and Applied Finance, vol. 3, no. 3, 391-397, 2000.

- [Mac66] D. C. MacKay. "Near Shannon limit performance of low density parity check codes".  
Electronics Letters, vol. 32, 1645-1646, ago., 1966.
- [Meh04] M. L. Mehta, "Random matrices", Elsevier, San Diego, Third Edition, 2004
- [Mey00] C. D. Meyer. "Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. SIAM, 2000.
- [Mey01] C. D. Meyer. "Matrix Analysis and Applied Linear Algebra". Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
- [MH99] T. Marzetta e B. Hochwald. "Capacity of a mobile multiple antenna communication link in Rayleigh flat fading". IEEE Trans. Inf. Theory, vol 45, 139-158, jan., 1999.
- [MP67] V. A. Marcenko e L. A. Pastur, "Distributions of eigenvalues for some sets of random matrices", Math. USSR-Sb, vol. 1, 457-483, 1967.
- [Mui82] R. J. Muirhead, "Aspects of Multivariate Statistical Theory", John Wiley e Sons, New York, 1982.
- [Neto93] A. L. Neto. "Funções de uma variável complexa". Segunda edição, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1993.
- [Neu63] J. von Neumann, "Collected Works. Vol. 5: Design of Computers, Theory of Automata and Numerical Analysis", A. H. Taub, ed., Pergamon, New York, 1963. (There are four relevant papers with coauthors Bargamann, Goldstine and Montgomery. See pages 1-32, 421-572.)
- [OBV07] F. Oggier, J. C. Belfiore e E. Viterbo". "Foundations and Trends in Communications and Information Theory, 2007.
- [Odl89] A. M. Odlyzko, "The  $10^{20}$  -th zero of the Riemann zeta function and 70 million of its neighbors", ATeT, 1989.

- [OLBC10] F.W.J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert e C. W. Clark . “NIST Handbook of Mathematical Functions”. Cambridge University Press. Cambridge, 2010.
- [OPF09] L. G. Ordóñez. D. P. Palomar e J. R. Fonollosa, “Ordered eigenvalues of a general class of Hermitian random matrices with application to the performance analysis of MIMO systems”, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 57, no. 2, 672-689, 2009.
- [Par00] J.D. Parsons. “ The mobile radio propagations channel”. 2<sup>nd</sup>. Ed.,Chichester, John Wiley, 2000.
- [PP02] A. Papoulis e S. U. Pillai. “Probability, Random Variables and Stochastic Processes”. Fourth edition. Mc-Graw Hill, 2002.
- [PGRAGS02] V. Plerou, P. Gopikrishnan, B. Rosenow, L. Amaral, T. Guhr e H. E. Stanley. “A Random Matrix approach to cross-correlations in financial data”. Physical Review E, vol. 65, no. 6, 2002.
- [Pro00] J. G. Proakis. “Digital Communications”. McGraw Hill, 4<sup>th</sup> Ed., New York, 2000.
- [Rap04] T. S. Rappaport. “Wireless Communications: Principles ad Practice”. Second edition, Prentice Hall Communications Engineering and Emerging Technologies Series, 2004.
- [Ric48] S. O. Rice. “Statistical properties of a sine wave plus random noise”. Bell Sysrem Technical Journal, vol. 27, 109-157, jan.,1948.
- [SFGK00] D. S. Shiu, G. Foschini, M. Gans e J. Kahn “Fading correlations and effect on the capacity of multielement antenna systems”. IEEE Trans. on Communications, vol. 48, 502-512, março, 2000.
- [Sha48] C. Shannon. “Mathematical Theory of Communications”. Bell Systems Technical Journal, vol. 27, 379-423, 623-656, 1948.

- [Sil85] J. W. Silverstein, "The smallest eigenvalue of a large-dimensional Wishart Matrix", *Ann. Probab.*, vol. 13, 1364-1368, 1985.
- [Skl77] B. Sklar. "Rayleigh Fading Channels in Mobile Digital Communication System. Part I: Characterizations". *IEEE Communications Magazine*, 136-146, set., 1977.
- [SMJ09] L. Sun, M. R. McKay e S. Jin "Analytical Performance of MIMO multichannel beamforming in the presence of unequal power cochannel interference and noise", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, no. 7, 2721-2735, 2009.
- [Ste99] R. Steele. "Introduction to digital cellular radio". *Mobile radio communications. 2<sup>nd</sup>*. Ed Chichester, John Wiley, 1999.
- [Sug67] T. Sugiyama, "On the distribution of the largest root of the covariance matrix", *Ann. Math. Statistic*, vol. 38, 1148-1151, 1967.
- [Sus77] H. Susuki. "A Statistical model for Urban Radio Propagations". *IEEE Transactions on Vehicular Tech.*, vol. 27, 673-680, jul., 1977.
- [SW93] N. Seshadri e J. H. Winters, "Two signaling schemes for improving the error performance of frequency-division duplex transmission systems using transmitter antenna diversity". *Proc. 43rd IEEE Vehicular Technology Conference (VTC 1993)*, 508-511, maio, 1993.
- [Tao12] T. Tao, "Topics in Random Matrix Theory", American Mathematical Society, 2012.
- [Tel99] I. E. Telatar, "Capacity of multi-antenna Gaussian channels", *European Transactions on Telecommunications*, vol. 10, no. 6, 585-595, 1999.
- [TJC99] V. Tarokh, H. Jafarkani e A. R. Calderbank. "Space-time block codes from orthogonal designs". *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, no. 5, 1456-1467, jul., 1999

- [Tro84] H. F. Trotter, "Eigenvalue distributions of large hermitian matrices Wigner semi-circle law and theorem of Kac, Murdock and Szego", *Adv. in Mathe.* vol.54, 67-82, 1984.
- [TSC98] V. Tarokh, N. Seshadri e A. R. Calderbank. "Space-time codes for high data rate wireless communication: Performance Criterion and Code Construction". *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, no. 2, 744-765, 1998.
- [TV10] T. Tao e V. Vu, "Random Matrices: the distribution of the smallest singular values", *Geom. Funct. Anal.*, vol. 20, 260-297, 2010.
- [TV11a] T. Tao e V. Vu, "The Wigner-Dyson-Mehta bulk universality conjecture for Wigner Matrices", *Electronic Journal of Probability*, vol. 16, 2104-2121, 2011.
- [TV11b] T. Tao e V. Vu, "Random Matrices: Universality of Local Eigenvalue Statistics", *Acta Math.*, vol. 206, 127-204, 2011.
- [TV12] T. Tao e V. Vu, "A Central Limit Theorem for the Determinant of a Wigner Matrix", *Advances in Mathematics*, vol. 231, issue 01, 74-101, 2012.
- [TVer04] A. M. Tulino e S. Verdú, "Random Matrix Theory and Wireless Communications". *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, 2004.
- [VY03] B. Vucetic e J. Yuan. "Space-Time Coding". John Wiley and Sons Ltd. England, 2003.
- [Wac78] K. W. Wachter, "the strong limits of random matrix spectra for sample matrices of independent elements", *Ann. Probab.*, vol. 6, 1-18, 1978.
- [WG89] Z. X. Wang e D. R. Guo. "Special Functions". World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore, 1989.
- [Wig65] E. P. Wigner, "Distribution laws for the roots of a random Hermitean matrix", in *Statistical Theories of Spectra: Fluctuations*, (C. E. Porter, ed.), New York: Academic, 1965.

- [Wig51] E. P. Wigner, "On the Statistical distribution of the widths and spacings of nuclear resonance levels", Proc. Camb. Phil. Soc., vol. 47, 790-798, 1951.
- [Wig55] E. P. Wigner, "Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions", Ann. Math., vol. 62, 548-564, 1955.
- [Wig58] E. P. Wigner, "on the distribution of the roots of certain symmetric matrices", Ann. Math., vol. 67, 325-327, 1958.
- [Wil43] S. S. Wilks, "Mathematical Statistics", Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1943.
- [Wil65] J. H. Wilkinson. "The algebraic eigenvalue problem". Clarendon Press. Oxford. 1965.
- [Wis28] J. Wishart. "The generalized product moment distribution in samples from a normal multivariate population". Biometrika 20A, 32-43, 1928.
- [Win87] J. Winters. "On the capacity of radio communication systems with diversity in a rayleigh fading environment". IEEE J. Sel Areas Commun., vol. 5, 871-888, jun., 1987.
- [Yac93] M. D. Yacoub. "Foundations of mobile radio engineering". Boca Raton, CRC Press, 1993
- [Yac02] M. D. Yacoub. "General fading distributions". Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações, vol. 17, 1-13, jun., 2002.
- [YCV03] J. Yuan, Z. Chen e B. Vucetic. "Performance and Design of Space-Time Coding in Fading Channels". IEEE Trans. on Communications, vol. 51, no. 12, dez., 2003.
- [ZC08] A. Zanella e M. Chiani. "The PDF of the 1th largest eigenvalue of central Wishart matrices and its application to the performance analysis of MIMO channels". GLOBECOM, New Orleans, dez., 2008.

- [ZCW09] A. Zanella, M. Chiani e M. Z. Win. "On the marginal distribution of the eigenvalues of Wishart Matrices". IEEE Transactions on Communications, vol. 57, no. 4, 1050-1060, 2009.
- [Zha02] X. Zhan. "Matrix Inequalities". Springer, 2002.
- [ZT02] L. Zheng e D. Tse. "Communication on Grassman manifold: a geometric approach to the noncoherent multiple-antenna channel". IEEE Trans. on Information Theory, vol. 48, 359-383, fev., 2002.