UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

CÉSAR AUGUSTO BORTOT

Existência de Solução e Estabilização Assintótica para as Equações de Klein-Gordon e de Schrödinger em uma Variedade Riemanniana não compacta

Maringá - PR
2013

CÉSAR AUGUSTO BORTOT

Existência de Solução e Estabilização Assintótica para as Equações de Klein-Gordon e de Schrödinger em uma Variedade Riemanniana não compacta

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor.

Orientador: Marcelo Moreira Cavalcanti.

Maringá - PR
2013

Existência de Solução e Estabilização Assintótica para as Equações de Klein-Gordon e de Schrödinger em uma Variedade Riemanniana não compacta

César Augusto Bortot

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM - PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor.

Aprovada por:

Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti - DMA - UEM
(Orientador)

Prof.ª Dr.ª Valéria Neves Domingos Cavalcanti - DMA - UEM

Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino - DMA - UEM

Prof. Dr. Paolo Piccione - IME - USP

Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho - ICMC - USP

Maringá
Novembro, 2013

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus, pois sem Ele nada seria possível.

Aos meus pais, que me propiciaram a chance de estudar.

Agradeço de forma especial e amorosa à minha noiva Fernanda Gimenez Milani por me apoiar incondicionalmente.

Agradeço a todos os meus professores, desde o ensino fundamental até o doutorado. Em geral a todos do Programa de Pós-graduação em Matemática, que direta ou indiretamente contribuíram para elaboração deste trabalho.

Agradeço também aos meus amigos de curso por terem me apoiado nas horas difíceis e terem me ajudado em vários momentos de dúvidas.

Agradeço principalmente ao meu orientador Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti, por ser uma pessoa íntegra, humilde e acima de tudo bem humorada. O conhecimento que adquiri com Prof. Marcelo é algo valioso que desfrutarei pelo resto da vida.

Por fim, agradeço ao CNPq, pelo apoio financeiro, sem o qual seria impossível dedicar-se integralmente à jornada de estudos.

César Augusto Bortot.

"Existe uma coisa que uma longa existência me ensinou: toda a nossa ciência, comparada à realidade, é primitiva e inocente, e, portanto, é o que temos de mais valioso."

Albert Einstein.

Resumo

O presente trabalho aborda a existência de soluções bem como taxas de decaimento uniforme da energia associada as Equações de Klein Gordon e de Schrödinger sujeitas a uma dissipação não linear localmente distribuída, consideradas sobre uma variedade Riemanniana n-dimensional $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ não compacta, completa e sem bordo. Na equação de Klein-Gordon, os efeitos dissipativos são considerados efetivos em $(\mathcal{M}\backslash\Omega) \cup (\Omega\backslash V)$, onde Ω é um conjunto aberto e limitado com fronteira regular arbitrário. No presente trabalho introduzimos uma classe de variedades Riemannianas não compactas, a saber, variedade que admitam uma função regular f, de modo que o Hessiano de f satisfaça a chamada condição de *pinching* localmente em Ω, neste caso, existe um número finito e disjunto de subconjuntos abertos V_k livres de efeitos dissipativos de modo que $\bigcup_k V_k \subset V$ e para $\varepsilon > 0$, $med(V) \geq med(\Omega) - \varepsilon$, ou, em outras palavras, a região no interior de Ω onde os efeitos dissipativos são efetivos possui medida arbitrariamente pequena. É importante mencionar que, se a função f satisfaz a condição de *pinching* globalmente em Ω, então não é necessário considerar os efeitos dissipativos no interior de Ω. Com relação a equação de Schrödinger, vamos supor que $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ é "non-trapping" e, além disso, os efeitos dissipativos são considerados efetivos em $(\mathcal{M}\backslash\Omega) \cup \mathcal{M}_*$, onde $\Omega \subset\subset \mathcal{M}$ é um subconjunto aberto, conexo e limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular, de modo que $\overline{\Omega}$ é um conjunto compacto, e $\mathcal{M}_*$ é um subconjunto aberto de $\mathcal{M}$. Taxas de decaimento exponenciais da energia no nível de L^2 são estabelecidas. Os principais ingredientes para a prova da estabilidade exponencial são: (A) um princípio de continuação única para o problema linear (como provado por Triggiani and Xu [56]); e (B) um efeito regularizante local para o problema linear não homogêneo associado (como provado por Burq [14] e Burq, Gerard e Tzvetkov [16]).

Abstract

This work is related to the Klein Gordon equation and Schrödinger equation subject to a nonlinear and locally distributed damping, posed in a complete and non compact n dimensional Riemannian manifold $(\mathcal{M}^n, \mathbf{g})$ without boundary is considered. The first problem, related to the Klein Gordon equation, let us assume that the dissipative effects are effective in $(\mathcal{M}\backslash\Omega) \cup (\Omega\backslash V)$, where Ω is an arbitrary open bounded set with smooth boundary. In the present work we introduce a new class of non compact Riemannian manifolds, namely, manifolds which admit a smooth function f, such that the Hessian of f satisfies the *pinching condition* locally in Ω, for those ones, there exist a finite number of disjoint open subsets V_k free of dissipative effects such that $\bigcup_k V_k \subset V$ and for all $\varepsilon > 0$, $meas(V) \geq meas(\Omega) - \varepsilon$, or, in other words, the region where dissipative effects are effective inside Ω possesses measure arbitrarily small. It is important to be mentioned that if the function f satisfies the pinching condition globally in Ω , then it is not necessary to consider dissipative effects inside Ω. The second problem, related to the Schrödinger equation, let us assume that $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ is non-trapping and, in addition, that the damping term is effective in $(\mathcal{M}\backslash\Omega) \cup \mathcal{M}_*$, where $\Omega \subset\subset \mathcal{M}$ is an open bounded and connected subset with smooth boundary $\partial\Omega$, such that $\overline{\Omega}$ is a compact set, and $\mathcal{M}_*$ is a open subset of $\mathcal{M}$. Exponential and uniform decay rates of the L^2-level energy are established. The main ingredients in the proof of the exponential stability are: (A) an unique continuation property for the linear problem (as in Triggiani and Xu [56]); and (B) a local smoothing effect for the linear and non-homogeneous associated problem (as in Burq [14] and Burq, Gerard and Tzvetkov [16]).

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **9**

1.1 Espaços Funcionais à Valores Vetoriais . . . 9

1.1.1 Funções Escalarmente Contínuas . . . 12

1.2 Resultados Auxiliares . . . 13

1.3 Equações diferenciais parciais . . . 15

1.4 Um repasso a Geometria Riemanniana . . . 17

1.5 Teoremas de Continuação Única e Efeito Regularizante . . . 21

2 Equação de Klein-Gordon **23**

2.1 Existência e Unicidade de Soluções . . . 23

2.2 Resultado de Estabilidade . . . 28

2.2.1 Identidades Fundamentais . . . 29

2.2.2 Construção da Função f . . . 36

2.2.3 Controlando a Equação . . . 45

2.3 Variedades Riemannianas que Admitem Conjuntos Abertos Livres de Efeitos Dissipativos . . . 61

2.3.1 A Variedade Riemanniana $(\mathbb{R}^n, g_\varphi)$ . . . 62

2.3.2 Uma Importante Classe de Variedades Riemannianas . . . 63

2.4 Apêndice . . . 69

3 Equação de Schrödinger **72**

3.1 Equação de Schrödinger sobre Domínios Exteriores . . . 72

3.1.1 Existência e Unicidade de Soluções - Domínios Exteriores . . . 73

3.1.2 Resultado de Estabilidade - Domínios Exteriores . . . 75

3.2 Equação de Schrödinger sobre Variedades Não Compactas . . . 84

3.2.1 Existência e Unicidade de Soluções - Variedades Não Compactas . 85

3.2.2 Resultado de Estabilidade - Variedades Não Compactas . . . 86

3.2.3 Exemplos de Variedades Riemannianas *Non-trapping* . . . 96

Introdução

O presente trabalho aborda a existência de soluções bem como taxas de decaimento uniforme da energia associada as Equações de Klein Gordon e de Schrödinger sujeitas a uma dissipação não linear localmente distribuída, consideradas sobre uma variedade Riemanniana n-dimensional $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ não compacta, completa e sem bordo.

O primeiro problema considerado, a saber, a Equação de Klein Gordon, é descrita por:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u + a(x)g(u_t) = 0 \text{ em } \mathcal{M} \times (0, +\infty), \\ u(x,0) = u_0(x);\ u_t(x,0) = u_1(x),\ x \in \mathcal{M}, \end{cases} \tag{1}$$

onde Δ denota o operador Laplace-Beltrami. A função não negativa e essencialmente limitada $a = a(x)$, responsável pela localização do efeito dissipativo não linear, existe efetivamente em $(\mathcal{M}\backslash\Omega) \cup (\Omega\backslash V)$, onde Ω é um subconjunto aberto, conexo e limitado arbitrário de $\mathcal{M}$ com fronteira $\partial\Omega$ bem regular e V é tal que $med(V) \geq med(\Omega) - \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$, isto é, $a(x) \geq a_0 > 0$ quase sempre em $(\mathcal{M}\backslash\Omega) \cup (\Omega\backslash V)$.

Considerando o problema (1), no cenário Euclidiano, isto é, quando $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, e este é munido com a métrica Euclidiana usual, Zuazua [60] provou, no caso em que $g(s) = s$, que é suficiente considerar efeitos dissipativos em $\mathbb{R}^n\backslash\Omega$ (ver Figura 1).

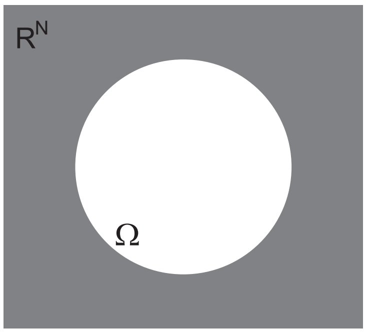

Figura 1: Quando $g(s) = s$, o decaimento exponencial é esperado. A região em branco é livre de efeitos dissipativos.

Isto é bem conhecido, uma vez que no espaço Euclidiano as geodésicas, também denominadas "raios da ótica geométrica", são retas, de modo que, a grosso modo, todos os raios da ótica geométrica que interceptam a região Ω nunca permanecem em Ω.

No entanto, se consideramos a variedade Riemanniana não compacta $(\mathbb{R}^n, \mathbf{g})$, onde

g é uma métrica Riemanniana arbitrária, temos que ter muito cuidado devido à possibilidade de existência de geodésicas completamente contidas em Ω, que viola gravemente a lei da ótica geométrica, devido à Bardos, Lebeau, Rauch e Taylor [7], [49], [50], a saber: existe um tempo T_0 tal que qualquer geodésica de comprimento $\leq T_0$ encontra o conjunto $\{x; a(x) > 0\}$, onde a dissipação é efetiva. Neste caso, foi estabelecido por Rauch e Taylor [50] que a energia $E(u,t) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} (|\nabla_x u|^2 + |u_t|^2)\, d\mathcal{M}$ associada ao problema (1), para $g(s) = s$ considerado sobre uma variedade Riemanniana compacta sem bordo decai exponencialmente, e este resultado foi estendido para o caso de variedades Riemannianas compactas com bordo por Bardos, Lebeau e Rauch [7]. Consequentemente a existência de geodésicas completamente contidas em Ω sugere que não seja possível obter o decaimento exponencial. Em outras palavras, a existência de geodésicas presas interrompe a estabilidade exponencial (ver Figura 2).

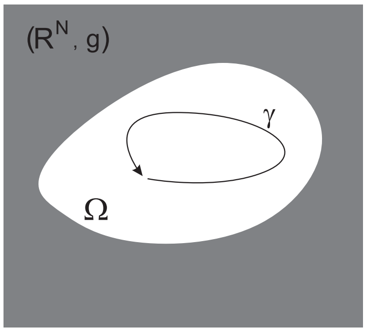

Figura 2: A existência de geodésicas presas interrompe a estabilidade exponencial.

A partir dos comentários anteriores e, afim de obter a estabilidade exponencial da energia associada ao problema (1), é crucial considerar efeitos dissipativas dentro do conjunto Ω. A melhor maneira de fazer isso é considerar efeitos dissipativos na menor região possível.

O primeiro objetivo referente a estabilização do problema (1) é mostrar que existe uma região $V \subset \Omega$ livre de efeitos dissipativos de modo que $\text{med}(V) \geq \text{med}(\Omega) - \varepsilon$, para um número positivo ε arbitrário. Este resultado pode ser considerado "sharp" no sentido de que a região em que é necessário considerar efeitos dissipativos possui medida arbitrariamente pequena, no entanto totalmente distribuída (ver Figura 3).

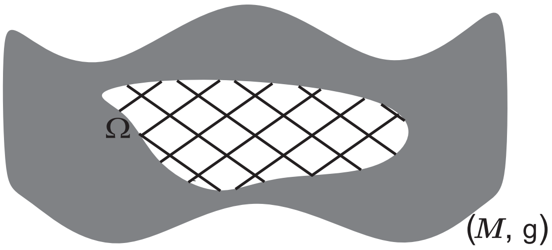

Figura 3: A região escura contida em Ω possui efeitos dissipativos e tem medida arbitrariamente pequena, enquanto a região em branco contida em Ω não possui efeitos dissipativos e tem medida arbitrariamente grande. No entanto, ambas as regiões são totalmente distribuídas.

O segundo e principal objetivo relacionado ao problema (1) é provar que no caso em que a variedade Riemanniana não compacta $(\mathcal{M}, g)$ satisfaz a condição $k_1 \leq sec_g \leq k_2 < 0$, onde k_1 e k_2 são constantes negativas, e sec_g denota a curvatura seccional de $(\mathcal{M}, g)$, também podemos livrar de efeitos dissipativos subconjuntos abertos de Ω (Ver Figura 4).

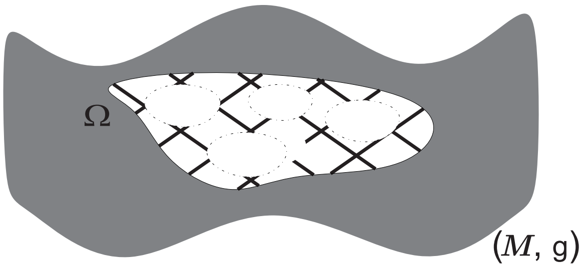

Figura 4: Não é necessário considerar efeitos dissipativos em subconjuntos abertos de Ω quando a curvatura seccional satisfaz $k_1 \leq sec_g \leq k_2 < 0$ em todo ponto de $(\mathcal{M}, g)$.

A fim de alcançar o nosso objetivo, combinamos as idéias apresentadas por Cavalcanti, Domingos Cavalcanti, Soriano e Fukuoka [20] com novas ferramentas que descrevemos a seguir. Procedemos da seguine forma:

1. Provamos que para todo ponto $x \in \Omega$, existe uma vizinhança que pode ficar livre de efeitos dissipativos;

2. Provamos que uma região aberta, precisamente determinada, no interior de Ω pode ficar livre de efeitos dissipativos;

3. Sejam $\varepsilon > 0$ e $V_1, \ldots, V_k$ subconjuntos abertos de Ω como em (1) e (2) tais que $\overline{V_i} \cap \overline{V_j} = \emptyset$, para $i \neq j$. Provamos que existe um conjunto aberto $V \supset \cup_{i=1}^{k} V_i$ livre de efeitos dissipativos e tal que $med(V) \geq med(\Omega) - \varepsilon$.

Para isso, vamos construir um multiplicador intrínseco que vai desempenhar um papel importante no processo de estabelecer as taxas de decaimento da energia desejadas.

Este multiplicador é dado por $\langle \nabla f, \nabla u\rangle$, onde $f : K \to \mathbb{R}$ é uma função regular tal que seu Hessiano, denotado por $\nabla^2 f$, está intimamente relacionado com a métrica $\mathbf{g}$ e $K \subset \mathcal{M}$ é um subconjunto compacto que contém propriamente Ω.

No caso em que $k_1 \leq sec_g \leq k_2 < 0$ deduzimos que f é definida sobre toda a variedade $\mathcal{M}$ e $\nabla^2 f$ satisfaz a chamada condição de *pinching* sobre o Hessiano localmente, isto é, $A \leq \nabla^2 f \leq B$ em conjuntos abertos, precisamente determinado, para constantes positivas $0 < A < B$ que serão descritas durante o trabalho.

É importante mencionar que se f satisfaz a condição de *pinching* sobre o Hessiano em todo Ω, então Ω pode ficar livre de efeitos dissipativos.

Como ja citado anteriormente, a estabilização da energia associada ao problema (1) é abordada por Cavalcanti, Domingos Cavalcanti, Soriano e Fukuoka [18] [20]. No entanto os autores trabalharam sobre uma variedade compacta. Aqui devido ao fato de trabalharmos numa variedade não compacta perdemos as imersões de Sobolev $W^{1,q} \hookrightarrow L^r$, para $q \leq r \leq p = nq/(n-q)$ se $1 \leq q < n$, a menos que assumamos que $(M^n, \mathbf{g})$ possua curvatura e raio de injetividade globalmente limitados. Não faremos tal imposição simultaneamente, de modo que as únicas imersões que possuímos são as imersões naturais: $H^2 \hookrightarrow H^1 \hookrightarrow L^2$.

Algumas dificuldades técnicas são encontradas neste cenário não-compacto, a saber:

- Uma solução regular u do problema (1) não pertence a $H^2(\mathcal{M})$, temos apenas que $u \in H^2(\Omega)$, para qualquer $\Omega \subset \mathcal{M}$ aberto e limitado com fronteira regular. Felizmente, é o suficiente para o nosso propósito.

- A principal dificuldade foi lidar com termos de fronteira de subconjuntos abertos e limitados contidos em $\mathcal{M}$, uma vez que não temos qualquer controle sobre tais termos. No caso Euclidiano, Zuazua [60] considera Ω como sendo a bola centrada na origem e raio $R > 0$, logo sua fronteira possui ótimas propriedades geométricas que facilitam o trabalho. Nós empregamos idéias semelhantes às apresentadas em [60] para lidar com os termos de fronteira, no entanto nossa abordagem é mais delicada uma vez que $\Omega \subset \mathcal{M}$ é um subconjunto aberto, limitado com fronteira relugar arbitrário.

Finalmente, com relação ao problema (1), e no caso particular em que $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, é munido com a métrica radial, descrita em coordenadas polares $(r, \theta) \in [0, +\infty[\times \mathbb{S}^{n-1}$, pela fórmula:

$$g_\varphi = \mathrm{d}r^2 + \varphi(r)^2 \mathrm{d}\theta^2, \tag{2}$$

onde $\mathrm{d}\theta^2$ é a métrica usual de $\mathbb{S}^{n-1}$ (esfera de raio 1) e $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ é uma função regular satisfazendo:

(i) $\varphi^{(2k)}(0) = 0$ for all $k \geq 0$;

(ii) $\varphi'(0) = 1$.

É possível, sob certas condições, livrar de efeitos dissipativos todo o conjunto Ω.

Além disso uma situação interessante é que:

$$(\mathbb{R}^n, g_\varphi) \text{ tem volume finito se, e somente se, } \int_0^{+\infty} \varphi(r)^{n-1}\, \mathrm{d}r < +\infty.$$

Neste caso, é possível relaxar algumas hipóteses assumidas sobre a não linearidade g e ainda obter outras taxas de decaimento da energia diferentes da exponencial. Para esta finalidade a idéia é combinar a desigualdade de Jessen com os argumentos apresentados por Lasiecka e Tataru [38](veja também Cavalcanti et. al [17]).

Voltemos agora nossa atenção para o segundo problema abordado, isto é, a equação de Schrödinger descrita por

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + ia(x)g(u) = 0, \text{ in } \mathcal{M} \times (0, +\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \ x \in \mathcal{M}, \end{cases} \tag{3}$$

onde Δ denota o operador Laplace-Beltrami. Vamos dividir o estudo em dois casos:

(i) Quando $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ é um domínio exterior em $\mathbb{R}^n$ munido com a métrica Euclidiana. Mais precisamente, consideramos $\Theta \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, onde Θ é um subconjunto compacto e conexo do $\mathbb{R}^n$ com fronteira regular. Além disso, assumimos que a fronteira de Θ é "non-trapping", ou seja, qualquer raio da ótica geométrica (ou qualquer geodésica) refletindo sobre a fronteira de Θ, de acordo com as leis da ótica geométrica, deixa todo conjunto compacto em tempo finito (ver Figura 5). Denotamos por $\mathcal{M}$ o complementar de Θ, ou seja, $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n \backslash \Theta$. Neste caso consideramos condições de bordo do tipo Dirichlet sobre a fronteira $\partial\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$, saber, $u = 0$ em $\partial\mathcal{M} \times (0, \infty)$.

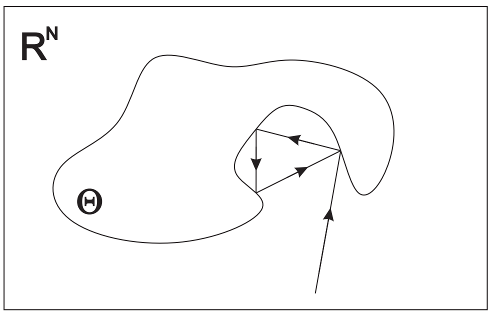

Figura 5: Subconjunto Θ cuja a fronteira **não** satisfaz a condição "non-trapping".

(ii) Quando $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ é uma variedade Riemanniana n-dimensional, não compacta, simplesmente conexa, orientável sem bordo e "non-trapping", munida com uma métrica Riemanniana $\mathbf{g}(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Neste caso $\mathcal{M}$ ser uma variedade "non-trapping" significa que nenhuma geodésica está completamente contida em qualquer subconjunto compacto de $\mathcal{M}$ (ver Figura 6). Além disso, vamos supor que a métrica $\mathbf{g}$ é completa e de classe C^∞.

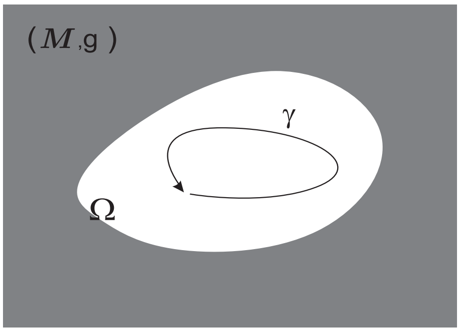

Figura 6: Exemplo de variedade Rieamanniana que **não** satisfaz a condição "non-trapping". A geodésica γ está completamente contida em Ω.

Quando $a \equiv 0$ no problema (3) e $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n \backslash \Theta$ é um domínio exterior, Tsutsumi [55] provou que se o domínio possui fronteira "non-trapping", no sentido da ótica geométrica, então a energia localizada no nível de L^2, $||u(\cdot, t)||_{L^2(B_R)}$, onde B_R denota a bola de raio $R > 0$, decai sob a taxa $t^{-n/2}$. No caso "trapping", não é possível obter taxas de decaimento uniforme, como mostrado por Ralston [48]. Todos estes resultados são obtidos por meio de estimativas de resolvente $(\tau + \Delta)^{-1}$.

Mais recentemente, quando $a \neq 0$, $a \geq 0$, isto é, no caso de um efeito dissipativo linear $ia(x)u$, Aloui e Khenissi [2] provaram uma taxa de decaimento polinomial similar à aquela obtida por Tsutsumi [55], relaxando a condição "non-trapping"pela hipótese de controle geométrico exterior, a saber: dizemos que $\mathbb{R}^n \backslash \Theta$ satisfaz a condição de controle geométrico exterior (CGE), se cada raio da ótica geométrica encontra o conjunto $\{x : a(x) > 0\}$, onde a dissipação é efetiva.

O presente trabalho tem como objetivo estabelecer o decaimento exponencial da energia total, isto é, $E(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} |u(x,t)|^2 \, dx$, e não local $E_{loc}(t) = \int_{B_R} |u(x,t)|^2 \, dx$, como considerado nas referências mencionadas acima.

Para este propósito, o termo dissipativo $ia(x)g(u)$ é fundamental, uma vez que se $a = 0$, a energia total é conservada, isto é, $E(t) = E(0)$, para todo $t \geq 0$, e nenhuma taxa de decaimento é esperada.

Na primeira parte do capítulo destinado ao estudo da equação de Schrödinger, vamos assumir que $a(x) \geq a_0 > 0$ em ω, onde $\omega \subset \mathcal{M}$ é definido da seguinte forma: Considere $\mathcal{M} := \mathbb{R}^n \backslash \Theta$ e seja $R > 0$ tal que $\partial \mathcal{M} \subset B_R = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < R\}$, então definimos $\omega := \mathcal{M} \backslash B_R$ (Ver Figura 7).

Na segunda parte assumiremos que $a(x) \geq a_0 > 0$ em $(\mathcal{M} \backslash \Omega) \cup \mathcal{M}_*$, onde $\Omega \subset\subset \mathcal{M}$ é um subconjunto aberto, conexo e limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular, de modo que $\overline{\Omega}$ é um conjunto compacto, e $\mathcal{M}_*$ é um subconjunto aberto de $\mathcal{M}$ de medida arbitrariamente pequena (Ver figura 8). Se a curvatura seccional de $\mathcal{M}$ é não positiva então basta considerar efeitos dissipativos efetivos em $\mathcal{M} \backslash \Omega$, ou seja, $a(x) \geq a_0 > 0$ apenas em $\mathcal{M} \backslash \Omega$ (Ver Figura 9).

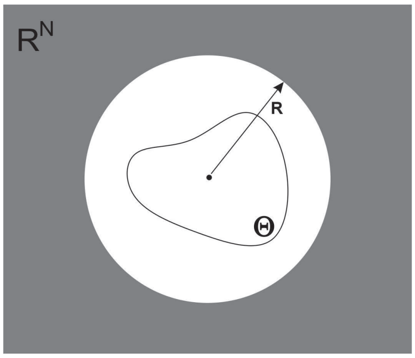

Figura 7: A região escura é onde os efeitos dissipativos são efetivos.

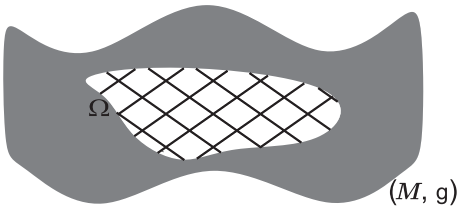

Figura 8: Na região escura os efeitos dissipativos são efetivos. A região escura contida em Ω tem medida arbitrariamente pequena, enquanto a região em branco, onde não são considerados efeitos dissipativos, tem medida arbitrariamente grande. No entanto, ambas as regiões são totalmente distribuídas.

Os principais ingredientes para a prova da estabilidade exponencial da energia associada ao problema (3) são:

(A) Um princípio de continuação única para o problema linear, como provado por Triggiani e Xu [56];

(B) Um efeito regularizante local para um problema linear não homogêneo associado ao nosso problema, como provado por Burq [14] e Burq, Gerard e Tzvetkov [16].

De fato, provaremos que as condições (A) e (B) são suficientes para estabelecer o decaimento exponencial da energia total $E(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} |u(x,t)|^2 \, d\mathcal{M}$ associada ao problema (3). No entanto não sabemos responder se as condições (A) e (B) são necessárias, esta é um questão em aberto.

É importante observar que, a fim de empregar a propriedade de continuação única provada por Triggini e Xu [56], é essencial a existência de uma função estritamente convexa. A construção de tal função será feita no decorrer da prova da estabilidade exponencial da energia associada a equação de Klein-Gordon e esta será usada também na equação de Schrödinger.

Quanto à condição (B) é importante mencionar que geodésicas "presas", isto é, geodésicas totalmente contidas em um conjunto compacto freiam o efeito regularizante,

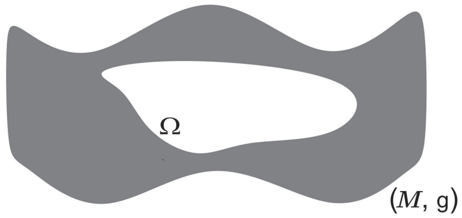

Figura 9: Se $\mathcal{M}$ possui curvatura seccional negativa não é necessário considerar efeitos dissipativos no interior de Ω.

como mostrado por Doi [28] (ver também Burq [15]), isto explica a necessidade de se impor a condição “non-trapping” sobre a variedade Riemanniana.

É importante lembrar ainda do trabalho devido a Aloui, Khenissi e Vodev [3], onde os autores provam que a condição de controle geométrico não é necessária a fim de se obter o efeito regularizante e a estabilização uniforme para a equação de Schrödinger sujeita a um termo *fortemente dissipativo* considerada sobre o domínio limitado do $\mathbb{R}^n$.

Finalmente, gostaria de citar alguns trabalhos relacionados à estabilização da equação de Schrödinger sujeita a um termo dissipativo localmente distribuído, a saber:

(i) Sobre domínios não limitados: [4], [19] e [21].

(ii) Sobre variedades Riemannianas compactas: [9].

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espaços Funcionais à Valores Vetoriais

Nesta seção iremos determinar os espaços em que são levados em conta as variáveis temporal e espacial, o qual é necessário para dar sentido a problemas de evolução.

Para cada $t \in [0,T]$ fixo, interpretamos a função $x \mapsto u(x,t)$ como um elemento do espaço X. Denotaremos este elemento como $u(t) \in X$ com valores no espaço X.

Seja X um espaço de Banach, $a, b \in \mathbb{R}$.
O espaço $L^p(a,b;X)$, $1 \leq p < +\infty$, consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[a,b]$ com imagem em X, ou seja as funções $u : (a,b) \to X$, tais que

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} := \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

O espaço $L^\infty(a,b;X)$ consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[a,b]$ com imagem em X, as funções $u : (a,b) \to X$ limitadas quase sempre em (a,b). A norma neste espaço é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} := \sup ess \|u(t)\|_X.$$

O espaço $C^m([a,b];X)$, $m = 0, 1, \ldots$, consiste de todas as funções contínuas $u : [a,b] \to X$ que possuem derivadas contínuas até a ordem m sobre $[a,b]$. A norma é dada por

$$\|u\| := \sum_{i=0}^{m} \max_{t \in [a,b]} |u^{(i)}(t)|.$$

O espaço $\mathcal{D}(a,b)$, consinte de todas as funções $u : (a,b) \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ com suporte compacto.

Vejamos algumas propriedades desses espaços, as quais podem ser encontradas em [59].

Proposição 1.1.1. *Sejam $m = 0, 1, \ldots,$ e $1 \leq p < +\infty$, X e Y espaços de Banach.*
(a) $C^m([a,b];X)$ é um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$.
(b) $L^p(a,b;X)$, $1 \leq p < +\infty$ e $L^\infty(a,b;X)$, são espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$.
(c) O conjunto de todas as funções de grau é denso em $L^p(a,b;X)$.
(d)$C([a,b];X)$ é denso em $L^p(a,b;X)$ e a imersão $C([a,b];X) \hookrightarrow L^p(a,b;X)$ é contínua.

(e) Se X é um espaço de Hilbert com produto escalar $(.,.)_x$, então $L^2(a,b;X)$ é também um espaço de Hilbert com produto escalar

$$(u,v)_{L^2(a,b;X)} := \int_a^b (u(t),v(t))_X dt.$$

(f) $L^p(a,b;X)$ é separável, se X for separável e $1 \leq p < +\infty$.
(g) Se $X \hookrightarrow Y$, então $L^r(a,b;X) \hookrightarrow L^q(a,b;Y)$, $1 \leq q \leq r \leq +\infty$.

Lembremos que se U e Ψ são dois espaços vetoriais topológicos, temos que $\mathcal{L}(U,\Psi)$ denota o espaço das funções lineares e contínuas de U em Ψ.

O espaço das distribuições sobre (a,b) com imagem em X, será denotado por

$$\mathcal{D}'(a,b;X).$$

Logo, $\mathcal{D}'(a,b;X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(a,b);X)$, ou seja, é o conjunto de todas as aplicações lineares e limitadas de $\mathcal{D}(a,b)$ em X. A noção de convergência em $\mathcal{D}'(a,b;X)$: seja $S \in \mathcal{D}'(a,b;X)$ logo $S : \mathcal{D}(a,b) \mapsto X$ é linear e se $\theta_\mu \to \theta$ em $\mathcal{D}(a,b)$ então $\langle S, \theta_\mu\rangle \to \langle S, \theta\rangle$ em X. Diremos que $S_\nu \to S$ em $\mathcal{D}'(a,b;X)$ se $\langle S_\nu, \theta\rangle \to \langle S, \theta\rangle$ em X, $\forall\, \theta \in \mathcal{D}(a,b)$. Cada elemento desse conjunto é uma distribuição sobre (a,b) com valores no espaço de Banach X.

A derivada $\dfrac{dS}{dt}$ para $S \in \mathcal{D}'(a,b;X)$, é definida com um único elemento deste espaço a qual satisfaz,

$$\left\langle \frac{dS}{dt}, \varphi \right\rangle = -\left\langle S, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b).$$

A função $S \mapsto \dfrac{dS}{dt}$ é uma função contínua de $\mathcal{D}'(a,b;X)$ sobre ele mesmo.

Agora se $f \in L^2(a,b;X)$ definimos $\tilde{f} \in \mathcal{D}'(a,b;X)$ por

$$\langle \tilde{f}, \varphi\rangle = \int_a^b f(t)\varphi(t)dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b)$$

a função $f \mapsto \tilde{f}$ de $L^2(a,b;X) \to \mathcal{D}'(a,b;X)$ é linear e contínua, e ainda é injetora e desta forma identificamos $\tilde{f}$ com f e obtemos

$$L^2(a,b;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(a,b;X)$$

O espaço $L^1_{loc}(a,b;X)$ é o espaço das funções u tal que para todo compacto $K \subset (a,b)$, $\chi_K u$ pertence à $L^1(a,b;X)$, onde χ_K denota a função característica de K.

Definição 1.1.2. *Seja $J \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, tal que $J \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}} J(t)dt = 1$. Dado $\epsilon > 0$, definamos*

$$J_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} J\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \quad e \quad (J_\epsilon * u)(t) = \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(t-s)u(s)ds$$

para as funções u em que o lado direito da última igualdade faz sentido.

Proposição 1.1.3. *Seja u uma função definida sobre $\mathbb{R}$, que anula-se fora de um intervalo I.*
(a) Se $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; X)$, então $J_\epsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}; X)$.
(b) Se $u \in L^2(\mathbb{R}; X)$, então $J_\epsilon * u \in L^2(\mathbb{R}; X)$. Além disso, $\|J_\epsilon * u\|_{L^2(\mathbb{R};X)} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R};X)}$ e $\lim\limits_{\epsilon \longrightarrow 0^+} \|J_\epsilon * u - u\|_{L^2(\mathbb{R};X)} = 0$

Fazendo as devidas adaptações, encontramos a demonstração desta proposição por exemplo em [37]

O espaço dual de $L^p(a, b; X)$. Consideremos $Y = L^p(a, b; X)$. Temos a seguinte relação de dualidade $Y' = L^q(a, b; X')$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ devido ao teorema seguinte.

Teorema 1.1.4. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável, $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*
(a) Cada função $v \in L^q(a, b; X')$ corresponde a um único funcional $\overline{v} \in Y'$ dada por

$$\langle \overline{v}, u \rangle = \int_a^b \langle v(t), u(t) \rangle_X dt \quad \forall u \in Y. \tag{1.1}$$

Reciprocamente, para cada $\overline{v} \in Y'$ corresponde a exatamente uma função $v \in L^q(a, b; X')$ dada por (1.1). Além disso

$$\|\overline{v}\|_{Y'} = \|v\|_{L^q(a,b;X')}$$

(b) O espaço de Banach $L^p(a, b; X)$ é reflexivo e separável.

Demonstração:Ver [59].

Assim podemos identificar Y' com $L^q(a, b; X')$, pois pelo Teorema acima existe um isomorfismo isométrico. Donde

$$\langle v, u \rangle = \int_a^b \langle v(t), u(t) \rangle_X dt; \quad \|v\| = \left(\int_a^b \|v(t)\|^q_{X'} dt \right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall u \in Y \quad \forall v \in Y'$$

Sejam a e b dois números reais finitos ou não, $a < b$, X e Y espaços de Banach com X denso em Y e $m \geq 1$ inteiro, definamos

$$W(a, b) := \{u \in L^2(a, b; X); \frac{d^m u}{dt^m} = u^{(m)} \in L^2(a, b; Y)\}$$

onde $u^{(m)}$ é neste sentido uma distribuição em $\mathcal{D}'(a, b; X)$. A norma é dada por

$$\|u\|_{W(a,b)} = \left[\|u\|^2_{L^2(a,b;X)} + \|u^{(m)}\|^2_{L^2(a,b;Y)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Segue daí que $W(a, b)$ é um espaço de Banach.

Denotaremos por $\mathcal{D}(a, b; X)$ o espaço localmente convexo das funções vetoriais $\varphi : (a, b) \mapsto X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em (a, b). Diremos que $\varphi_\nu \to \varphi$ em $\mathcal{D}(a, b; X)$ se:

i) $\exists K$ compacto de (a, b) tal que $supp\,(\varphi_\nu)$ e $supp\,(\varphi)$ estão contidos em K, $\forall \nu$;

ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_\nu^{(k)}(t) \to \varphi^{(k)}(t)$ em X uniformemente em $t \in (a,b)$.

Prova-se que o conjunto $\{\theta\xi,\ \theta \in \mathcal{D}(a,b), \xi \in X\}$ é total em $\mathcal{D}(a,b;X)$.
Denotaremos por $H_0^1(a,b;X)$ o espaço de Hilbert

$$H_0^1(a,b;X) := \{v \in L^2(a,b;X), v' \in L^2(a,b;X), \quad v(a) = v(b) = 0\}$$

munido com o produto interno

$$((w,v)) = \int_a^b (w(t),v(t))_X dt + \int_a^b (w'(t),v'(t))_X dt.$$

identificando $L^2(a,b;X)$ com o seu dual $[L^2(a,b;X)]'$, via Teorema de Riesz, obtemos

$$\mathcal{D}(a,b;X) \hookrightarrow H_0^1(a,b;X) \hookrightarrow L^2(a,b;X) \hookrightarrow H^{-1}(a,b;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(a,b;X)$$

onde $H^{-1}(a,b;X) = [H_0^1(a,b;X)]'$

Proposição 1.1.5. *Seja $u \in L^2(a,b;X)$. Então existe um único $f \in H^{-1}(a,b;X)$ que verifica*

$$\langle f, \theta\xi\rangle = (\langle u', \theta\rangle, \xi)_X \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(a,b), \quad \forall \xi \in X$$

Demonstração: Ver [45].

Da proposição anterior podemos identificar f com u', de posse disso, diremos que se $u \in L^2(a,b;X)$ então $u' \in H^{-1}(a,b;X)$

Proposição 1.1.6. *A aplicação*

$$u \in L^2(a,b:X) \mapsto u' \in H^{-1}(a,b;X)$$

onde X é um espaço de Hilbert, é linear e contínua.

Demonstração:Ver [45].

Proposição 1.1.7. *O espaço $\mathcal{D}(a,b;X)$ e denso em $W(a,b)$*

Demonstração: Ver [42].

Da proposição acima, tomando $X = L^2(\Omega) = Y$ temos que $\mathcal{D}(a,b;X)$ é denso em $H^m(a,b;L^2(\Omega))$

1.1.1 Funções Escalarmente Contínuas

Seja X um espaço de Banach. Definimos o espaço das funções escalarmente contínuas (ou fracamente contínuas) como o conjunto das funções $f \in L^\infty(0,T;X)$ tais que a aplicação $t \to \langle f(t), x\rangle$ é contínua sobre $[0,T]$, $\forall\, x \in X'$, onde X' é dual de X. Denotaremos tal espaço por $C_s(0,T;X)$.

Disto segue que $C_s^1(0,T;X) = \{u \in C_s(0,T;X); u' \in C_s(0,T;X)\}$, onde u' é a derivada de u no sentido das distribuições. Da mesma forma temos que $C_s^2(0,T;X) = \{u \in C_s(0,T;X); u'' \in C_s(0,T;X)\}$.

Observação: Se $u \in L^\infty(0,T;X)$ e $u \in C([0,T];X)$ então $u \in C_s(0,T;X)$.

Lema 1.1.8. *Sejam X e Y dois espaços de Banach, $X \hookrightarrow Y$ e X um espaço reflexivo. Então*

$$L^{\infty}(0,T;X) \cap C_s(0,T;Y) = C_s(0,T;X).$$

Demonstração:Ver [42].

1.2 Resultados Auxiliares

Nesta seção enunciaremos resultados importantes que serão utilizados ao longo de todo o trabalho.

Proposição 1.2.1. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) - *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, então*

$$|x.y| \leq |x||y|.$$

Definição 1.2.2. *Seja X um espaço de Banach. A topologia fraca $\sigma(X, X')$ sobre X é a topologia menos fina sobre X que torna contínuas todas as aplicações $f \in X'$.*

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de X a qual converge para x em X na topologia fraca $\sigma(X, X^{'})$. Utilizamos, neste caso, a seguinte notação:

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } X.$$

Proposição 1.2.3. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em X, então:*
(i) $x_n \rightharpoonup x$ em X se, e somente se, $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall f \in X'$.
(ii) Se $x_n \to x$ em X, então $x_n \rightharpoonup x$em X.
(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ em X, então $\|x_n\|_X$ é limitada e $\|x\|_X \leq \lim inf\|x_n\|_X$.
(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ em X e $f_n \to f$ em X', então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [10].

Seja X um espaço de Banach e seja $x \in E$ fixo. Definamos $J_x : X' \to \mathbb{R}$ por

$$\langle J_x, f\rangle = \langle f, x\rangle.$$

As aplicações J_x são lineares e contínuas, portanto $J_x \in X''$, $\forall x \in X$.

Definamos, agora, $J : X \to X''$ tal que $J(x) = J_x$.

Definição 1.2.4. *A topologia fraca $*$, também designada por $\sigma(X', X)$, é a topologia menos fina sobre X' que torna contínuas todas as aplicações J_x.*

Proposição 1.2.5. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em X', então:*
(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ fraco estrela em X' se, e somente se, $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall\ x \in X$.
(ii) Se $f_n \to f$ forte em X', então $f_n \rightharpoonup f$ fraco em X'.
(iii) Se $f_n \rightharpoonup f$ fraco em X', então $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ fraco estrela em X'.

Demonstração:Ver [10].

Lema 1.2.6. *Sejam X um espaço de Banach reflexivo e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência limitada em X, então existe uma subseqüência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $x \in X$, tal que*

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \text{ fracamente em } X.$$

Demonstração:Ver [10].

Lema 1.2.7. *Sejam X um espaço de Banach separável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência limitada em X', então existe uma subseqüência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $f \in X'$, tal que*

$$f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ fraco estrela em } X'.$$

Demonstração: Ver [10].

Lema 1.2.8. (Lema de Gronwall) - *Sejam $z \in L^\infty(0,T)$ e $f \in L^1(0,T)$ tais que $z(t) \geq 0$, $f(t) \geq 0$ e seja c uma constante não negativa. Se*

$$f(t) \leq c + \int_0^t z(s)f(s)ds, \ \forall t \in [0,T],$$

então

$$f(t) \leq ce^{\int_0^t z(s)ds}, \ \forall t \in [0,T].$$

Demonstração:Ver [43].

Proposição 1.2.9. (Teorema de Aubin-Lions) - *Sejam B_0, B, B_1 três espaços de Banach tais que $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$, onde B_0 e B_1 são reflexivos. Definamos*

$$W = \left\{ v; v \in L^{p_0}(0,T;B_0), \ v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0,T;B_1) \right\},$$

onde $1 < p_0, p_1 < \infty$, e consideremos W munido da norma

$$\|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

o que o torna um espaço de Banach. Então, a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Demonstração:Ver [41].

Proposição 1.2.10. (Lema de Lions) - *Seja (u_ν) uma sucessão de funções pertencentes à $L^q(Q)$ com $1 < q < \infty$. Se*
(i) $u_\nu \to u$ quase sempre em Q
(ii) $\|u_\nu\|_{L^q(Q)} \leq C$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$;
então $u_\nu \rightharpoonup u$ fraco em $L^q(Q)$.

Demonstração:Ver [41].

Proposição 1.2.11. (Fórmula de Gauss e a Fórmula de Green) - *Seja Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$. Se $u, v \in H^1(\Omega)$, então para $1 \leq i \leq n$ temos que*

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_\Gamma (\gamma_0 u)(\gamma_0 v)\nu_i d\Gamma,$$

onde $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ e ν denota o vetor normal unitário exterior à Γ.

Se $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$, temos a fórmula de Green:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = -\int_\Omega \Delta u v dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma.$$

Demonstração:Ver [18].

Proposição 1.2.12. (Regularidade dos problemas elípticos) - *Seja Ω um aberto de classe C^2 com fronteira Γ limitada. Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$, verificando*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \ dx + \int_\Omega u\varphi \ dx = \int_\Omega f\varphi \ dx, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então, $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$, onde c é uma constante que só depende de Ω. Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e $f \in H^m(\Omega)$, então $u \in H^{m+2}(\Omega)$ com $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c\|f\|_{H^m(\Omega)}$; em particular, se $m > \frac{n}{2}$ então $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Ainda, se Ω é de classe C^∞ e $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, então $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demonstração:Ver [10].

Lema 1.2.13. *Sejam H e V espaços de Banach, tais que $H \hookrightarrow V$. Se $u \in L^1(0,T;H)$ e $u' \in L^1(0,T;V)$ então $u \in C^0([0,T];V)$.*

Demonstração:Ver [51].

Teorema 1.2.14. (Regra da Cadeia) *Seja $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$ e $|G'(s)| \leq M$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então a função $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ e*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \ 1 \leq i \leq n.$$

Demonstração:Ver [37].

1.3 Equações diferenciais parciais

Seja X um espaço de Banach real e X' seu dual topológico. Para cada $x \in X$, associamos o conjunto

$$F(x) = \{f \in X'; \langle f, x\rangle_{X',X} = \|x\|^2 = \|f\|^2\}$$

e definimos $\langle\, , \rangle_s : X \times X \to \mathbb{R}$ por

$$\langle x, y\rangle_s = \ sup \ \{\langle f, y\rangle_{X',X}; f \in F(x)\}$$

Observação 1.3.1. *Se $X = H$, onde H é um espaço de Hilbert, obtemos pelo Teorema da Representação de Riesz que $F(x)$ é um conjunto unitário e através da identificação $H \equiv H'$ segue que $\langle \, , \rangle_s = (\, ,)_H$.*

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t(t) = Tu(t) + Bu(t) & t \in (0, \infty) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

em um espaço de Banach X.

Definição 1.3.2. *Uma aplicação $u : [0, \infty) \to X$ é dita solução regular ou forte do problema (1.2) se u é Lipschitz contínua em $[0, \infty)$, $u(0) = u_0$, u é diferenciável quase sempre em $(0, \infty)$, $u(t) \in D(T + B)$ quase sempre em $(0, \infty)$ e*

$$u_t(t) = Tu(t) + Bu(t)$$

quase sempre em $(0, \infty)$.

Definição 1.3.3. *Uma aplicação $u : [0, \infty) \to X$ é dita solução generalizada ou fraca do problema (1.2) se u é contínua em $[0, \infty)$, $u(0) = u_0$ e satisfaz a seguinte desigualdade para cada $T > 0$*

$$\|u(t) - v\|_X^2 \leq \|u(s) - v\|_X^2 + 2 \int_s^t \langle Tv + Bu(\tau), u(\tau) - v \rangle_s \, d\tau, \tag{1.3}$$

$\forall v \in D(T)$ e $0 \leq s \leq t \leq T$.

Definição 1.3.4. *Sejam H um espaço de Hilbert real e $A : H \to H$ um operador. Dizemos que A é um operador monótono de H se*

$$(x - y, Ax - Ay)_H \geq 0, \quad \forall \; x, y \in D(A).$$

Além disso, A é dito maximal monótono se A é monótono e $Im(I + A) = H$.

Definição 1.3.5. *Sejam H um espaço de Hilbert real e $A : H \to H$ um operador. Dizemos que A é um operador dissipativo de H se $-A$ é monótono. Além disso, A é dito m-dissipativo se A é dissipativo e $Im(I - A) = H$.*

Definição 1.3.6. *Seja H um espaço de Hilbert real e $A : H \to H$ um operador tal que $D(A) = H$. Dizemos que A é hemicontínuo em H se*

$$\lim_{t \to 0} (A(u + tv), w)_H = (Au, v)_H \tag{1.4}$$

Teorema 1.3.7. *Sejam H um espaço de Hilbert real e B um operador monótono, hemicontínuo e limitado (leva limitado em limitado) de H. Seja A um operador maximal monótono de H. Então $A + B$ é um operador maximal monótono.*

Demonstração: Ver [6]. □

Teorema 1.3.8. *Suponha $B \equiv 0$ no problema (1.2). Sejam H um espaço de Hilbert real e $T : H \to H$ um operador m-dissipativo. Então para cada $u_0 \in D(T)$, existe uma única função $u : [0, \infty) \to H$ solução forte do problema (1.2).*

Além disso se u e v são duas soluções fortes do problema (1.2) com dados iniciais u_0 e v_0 respectivamente, é válida a seguinte desigualdade

$$\|u(t) - v(t)\|_H \leq \|u_0 - v_0\|_H, \quad \forall\ t \in [0, \infty).$$

Demonstração: Ver [11]. □

Teorema 1.3.9. *Sejam H um espaço de Hilbert real, $T : H \to H$ um operador m-dissipativo e seja $B : H \to H$ contínuo tal que $D(B) = H$. Então para cada $u_0 \in \overline{D(T)}$ existe uma única aplicação $u : [0, \infty) \to H$ solução fraca do problema (1.2).*

Demonstração: Ver [6]. □

Teorema 1.3.10. *Sejam V e H dois espaços de Hilbert, satisfazendo $V \hookrightarrow H$, considere ainda A um operador maximal monótono em H. Seja u a solução ultrafraca do problema*

$$\begin{cases} u_{tt} + Au + u = 0 \\ u(0) = u_0 \in H, \ u_t(0) = u_1 \in V' \end{cases} \tag{1.5}$$

Então u possui a seguinte regularidade

$$u \in C([0, T]; H) \cap C^1([0, T]; V').$$

Demonstração: Ver [42]. □

1.4 Um repasso a Geometria Riemanniana

Seja $(\mathcal{M}^n, \mathbf{g})$ uma variedade Riemanniana n-dimensional não compacta, $n \geq 2$, orientável, simplesmente conexa e sem bordo munida de uma métrica Riemanniana $\mathbf{g}(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle$ completa, de classe C^∞. Denotaremos por $(g_{ij})_{n \times n}$ a matriz $n \times n$ relativa a métrica $\mathbf{g}$. O espaço tangente a $\mathcal{M}$ em $p \in \mathcal{M}$ é denotado por $T_p\mathcal{M}$ e a norma em $T_p\mathcal{M}$ é dada por $|\ \ |^2 = \langle \cdot\,, \cdot \rangle$.

Seja $f \in C^2(\mathcal{M})$, definimos o operador Laplace-Beltrame de f como

$$\Delta f = div(\nabla f), \tag{1.6}$$

onde ∇f denota o gradiente de f na métrica $\mathbf{g}$, isto é, para todo campo de vetores X em $\mathcal{M}$

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f), \tag{1.7}$$

e div denota o divergente, ou seja, se X é um campo de vetores em $\mathcal{M}$, $divX(p) :=$ traço da aplicação linear $Y(p) \mapsto \nabla_Y X(p)$, $p \in \mathcal{M}$.

De posse de tais definições e notações, enunciamos o seguinte lema.

Lema 1.4.1. *Seja $p \in \mathcal{M}$. Considere $f \in C^1(\mathcal{M})$ e H um campo de vetores em $\mathcal{M}$. Então é valida a seguinte identidade :*

$$\langle \nabla f, \nabla (H(f)) \rangle = \nabla H(\nabla f, \nabla f) + \frac{1}{2}[div(|\nabla f|^2 H) - |\nabla f|^2 div H], \tag{1.8}$$

onde ∇H é a diferencial covariante definida por $\nabla H(X,Y) = \langle \nabla_X H, Y \rangle$.

Demonstração: Ver [39]. □

Finalmente definimos a Hessiana de $f \in C^2(\mathcal{M})$ como o tensor simétrico do tipo $(0,2)$ em $\mathcal{M}$, isto é,

$$Hess(f)(X,Y) = \nabla^2 f(X,Y) := \nabla(\nabla f)(X,Y) = \langle \nabla_Y(\nabla f), X \rangle, \tag{1.9}$$

para quaisquer X e Y campos de vetores em $\mathcal{M}$.

Observação 1.4.2. *Para simplificar a notação, denotaremos a norma em L^2 sem fazer distinção sobre o argumento, seja ele uma função ou um campo de tensores do tipo $(0,m)$.*

Seja $k \in \mathbb{N}$ e $p \geq 1$. Definimos o espaço $C_k^p(\mathcal{M})$ por

$$C_k^p(\mathcal{M}) = \{u \in C^\infty(\mathcal{M}); \int_{\mathcal{M}} |\nabla^j u|^p \, d\mathcal{M} < \infty, \forall j = 0, 1, ...k\}, \tag{1.10}$$

onde $\nabla^j u$ denota a j-ésima diferencial covariante de u ($\nabla^0 u = u, \nabla^1 u = \nabla u$).

Assim definimos os espaço de Sobolev $H_k^p(\mathcal{M})$ como o completado de $C_k^p(\mathcal{M})$ com respeito a norma

$$\|u\|^p_{H_k^p(\mathcal{M})} = \sum_{j=0}^{k} \int_{\mathcal{M}} |\nabla^j u|^p \, d\mathcal{M}. \tag{1.11}$$

Desta forma segue que:

(i) $L^2(\mathcal{M}) := H_0^2(\mathcal{M})$ é o completado de $C_0^2(\mathcal{M})$ com respeito a norma

$$\|u\|^2_{L^2(M)} = \int_{\mathcal{M}} |u|^2 \, d\mathcal{M}. \tag{1.12}$$

(ii) $H^1(\mathcal{M}) := H_1^2(\mathcal{M})$ é o completado de $C_1^2(\mathcal{M})$ com respeito a norma

$$\|u\|^2_{H^1(\mathcal{M})} = \int_{\mathcal{M}} |\nabla u|^2 \, d\mathcal{M} + \int_{\mathcal{M}} |u|^2 \, d\mathcal{M}. \tag{1.13}$$

(iii) $H^2(\mathcal{M}) := H_2^2(\mathcal{M})$ é o completado de $C_2^2(\mathcal{M})$ com respeito a norma

$$\|u\|^2_{H^2(\mathcal{M})} = \int_{\mathcal{M}} |\nabla^2 u|^2 \, d\mathcal{M} + \int_{\mathcal{M}} |\nabla u|^2 \, d\mathcal{M} + \int_{\mathcal{M}} |u|^2 \, d\mathcal{M}. \tag{1.14}$$

Observação 1.4.3. *De acordo com as definições anteriores temos a seguinte cadeia de imersões contínuas:*

$$H^2(\mathcal{M}) \hookrightarrow H^1(\mathcal{M}) \hookrightarrow L^2(\mathcal{M}). \tag{1.15}$$

Proposição 1.4.4. *O espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto, denotado por $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ ou $C_0^\infty(\mathcal{M})$, é denso em $H^1(\mathcal{M})$, ou seja, $H_0^1(\mathcal{M}) = H^1(\mathcal{M})$, onde $H_0^1(\mathcal{M}) := \overline{\mathcal{D}(\mathcal{M})}^{H^1(\mathcal{M})}$.*

Demonstração: Ver [34]. □

Por argumentos de densidade podemos estender as fórmulas apresentadas anteriormente aos espaços de Sobolev. Na sequência enunciamos alguns teoremas que serão bastante utilizados no decorrer do trabalho.

Teorema 1.4.5. *Seja $(\mathcal{M}^n, \mathbf{g})$ uma variedade Riemanniana n-dimensional não compacta, $n \geq 2$, simplesmente conexa, orientável e sem bordo munida de uma métrica Riemanniana $\mathbf{g}(\cdot,\cdot) = \langle \cdot,\cdot \rangle$ completa, de classe C^∞.*

Sejam $u \in H^1(\mathcal{M})$ tal que $\Delta u \in L^2(\mathcal{M})$ e $v \in H^1(\mathcal{M})$, então é válida a seguinte identidade:

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \nabla u, \nabla v \rangle \; d\mathcal{M} = \int_{\mathcal{M}} -\Delta u \; v \; d\mathcal{M}. \tag{1.16}$$

Demonstração: Ver [53]. □

Teorema 1.4.6. ***(Teorema da Divergência de Gauss)*** *Sejam $\mathcal{M}^n$ uma variedade Riemanniana orientável, $\Omega \subset \mathcal{M}$ aberto, limitado e conexo com bordo $\partial\Omega$ bem regular, $X \in [H^1(\Omega)]^n$ um campo de vetores e ν o campo vetorial normal unitário exterior à $\partial\Omega$, então*

$$\int_\Omega divX \, d\mathcal{M} = \int_{\partial\Omega} \langle X, \nu \rangle \, d\Gamma. \tag{1.17}$$

Demonstração: Ver [18]. □

Teorema 1.4.7. ***(Teorema de Green 1)*** *Sejam $\mathcal{M}^n$ uma variedade Riemanniana orientável, $\Omega \subset \mathcal{M}$ aberto, limitado e conexo com bordo $\partial\Omega$ bem regular, $X \in [H^1(\Omega)]^n$ um campo de vetores, $q \in H^1(\Omega)$ e ν o campo vetorial normal unitário exterior à $\partial\Omega$, então*

$$\int_\Omega (divX) q \, d\mathcal{M} = -\int_\Omega \langle X, \nabla q \rangle \, d\mathcal{M} + \int_{\partial\Omega} (\langle X, \nu \rangle) q \, d\Gamma. \tag{1.18}$$

Demonstração: Ver [18]. □

Teorema 1.4.8. ***(Teorema de Green 2)****Sejam $\mathcal{M}^n$ uma variedade Riemanniana orientável, $\Omega \subset \mathcal{M}$ aberto, limitado e conexo com bordo $\partial\Omega$ bem regular, $f \in H^2(\Omega)$, $q \in H^1(\Omega)$ e ν o campo vetorial normal unitário exterior à $\partial\Omega$, então*

$$\int_\Omega (\Delta f) q \, d\mathcal{M} = -\int_{\mathcal{M}} \langle \nabla f, \nabla q \rangle \, d\mathcal{M} + \int_{\partial\Omega} (\partial_\nu f) q \, d\Gamma. \tag{1.19}$$

Demonstração: Ver [18]. $\square$

Proposição 1.4.9. *Sejam* $\mathcal{M}^n$ *uma variedade Riemanniana orientável,* $\Omega \subset \mathcal{M}$ *aberto, limitado e conexo com bordo* $\partial\Omega$ *bem regular. Se* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *então* $u\big|_\Gamma \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$, *onde* $\Gamma = \partial\Omega$.

Demonstração: Ver [10]. $\square$

Corolário 1.4.10. *Sob as hipóteses da Proposição 1.4.9 é válida a seguinte identidade de Green gereralizada:*

$$\int_\Omega \langle \nabla w, \nabla \psi \rangle \; d\mathcal{M} = \int_\Omega \Delta\psi \; w \; d\mathcal{M} + \int_{\partial\Omega} \partial_\nu \psi \; w \; d\Gamma,$$

para todo $w \in W^{1,1}(\Omega)$ *e* $\psi \in C^\infty(\mathcal{M})$.

Demonstração: A demonstração é baseada em dois argumentos:

1) Na Proposição 1.4.9, donde faz sentido falar em $w\big|_{\partial\Omega} \in L^1(\partial\Omega)$;

2) Na imersão contínua e densa $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow W^{1,1}(\Omega)$, onde $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = \{w\big|_{\overline{\Omega}}\,; w \in C_0^\infty(\mathcal{M})\}$.

$\square$

Corolário 1.4.11. *Sob as hipóteses da Proposição 1.4.9 é válida a seguinte identidade:*

$$\int_\Omega (divX) w \, d\mathcal{M} = -\int_\Omega \langle X, \nabla w \rangle \, d\mathcal{M} + \int_{\partial\Omega} (\langle X, \nu \rangle) w \, d\Gamma, \tag{1.20}$$

para todo $w \in W^{1,1}(\Omega)$ *e para todo* X *campo de vetores sobre* $\overline{\Omega}$ *de classe* C^1.

Demonstração: A argumentação é análoga a apresentada no Corolário 1.4.10.

$\square$

Proposição 1.4.12. *Seja* $(\mathcal{M}, \boldsymbol{g})$ *uma variedade Riemmanniana n-dimensional completa munida com uma métrica Riemanniana* $\boldsymbol{g}$ *de classe* C^∞. *Suponha que a curvatura seccional* K *é limitada superiormente em todo ponto de* $\mathcal{M}$. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) Se $K > 0$, *então* $d(x) = \frac{1}{2} dist^2(x, x_0)$ *é uma função estritamente convexa em* $\mathcal{M}$ *quando* $dist(x, x_0) < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$, $\forall\, x_0 \in \mathcal{M}$.

(ii) Se $K \le 0$ *e* $\mathcal{M}$ *é simplesmente conexa, então* $d(x) = \frac{1}{2} dist^2(x, x_0)$ *é uma função estritamente convexa em* $\mathcal{M}$.

Demonstração: Ver [56]. $\square$

Observação 1.4.13. *É importante ressaltar alguns conceitos e notações a respeito de funções a valores complexos.*

Seja $(\mathcal{M}, \boldsymbol{g})$ uma variedade Riemanniana e $u : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ uma função regular. Então temos que $Re\ u : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ e $Im\ u : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, consequentemente podemos falar em $\nabla(Re\ u)$ and $\nabla(Im\ u)$, definidos intrinsicamente como em (1.7).

Seja X um campo de vetores complexo sobre $\mathcal{M}$, isto é, $X = Y + iZ$, onde Y e Z são campos de vetores reais. Denotaremos por

$$\langle \nabla u, X\rangle = \langle \nabla(Re\ u), Y\rangle_{\boldsymbol{g}} - \langle (Im\ u), Z\rangle_{\boldsymbol{g}} + i(\langle \nabla(Re\ u), Z\rangle_{\boldsymbol{g}} + \langle \nabla(Im\ u), Y\rangle_{\boldsymbol{g}})$$

Logo,

$$\langle \nabla u, \nabla \overline{u}\rangle = \langle \nabla(Re\ u), \nabla(Re\ u)\rangle_{\boldsymbol{g}} + \langle \nabla(Im\ u), \nabla(Im\ u)\rangle_{\boldsymbol{g}} = |\nabla u|^2.$$

1.5 Teoremas de Continuação Única e Efeito Regularizante

Seja $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ uma variedade Riemanniana n-dimensional, $n \geq 2$, de classe C^∞. Considere $\Omega \subset \mathcal{M}$ um subconjunto aberto, limitado, conexo, com fronteira, $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, regular tal que $\overline{\Omega}$ é compacto. Seja ν o vetor normal unitário exterior ao longo de Γ.

Suponha que exista uma função $d : \overline{\Omega} \to R_+$ de classe C^3 estritamente convexa na métrica $\mathbf{g}$, isto é,

$$\nabla^2 d(X, X) \geq 0, \quad \forall\ x \in \overline{\Omega},\ \forall\ X \in T_x\mathcal{M}.$$

Definimos

$$\Gamma_0 := \{x \in \Gamma, \langle \nabla d(x), \nu(x)\rangle \leq 0\} \quad \text{e} \quad \Gamma_1 := \Gamma \backslash \Gamma_0.$$

Supondo satisfeitas as condições mencionadas acima temos os seguintes dois teoremas de continuação única:

Teorema 1.5.1. *Seja $w \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ uma solução do problema*

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w + w = 0 & em\ \ \Omega \times (0, T) := Q \\ u_{|\Sigma} = 0 & em\ \ \Gamma \times (0, T) := \Sigma \end{cases}$$

Se $\partial_\nu w = 0$ em $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, T)$ então $w = 0$ em Q.

Demonstração: Ver [57]. □

Teorema 1.5.2. *Seja $w \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ uma solução do problema*

$$\begin{cases} iw_t + \Delta w = 0 & em\ \ \Omega \times (0, T) := Q \\ u_{|\Sigma} = 0 & em\ \ \Gamma \times (0, T) := \Sigma \end{cases}$$

Se $\partial_\nu w = 0$ em $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, T)$ então $w = 0$ em Q.

Demonstração: Ver [56]. □

Teorema 1.5.3. *(**Teorema de Holmgren**) Seja P um operador diferencial parcial com coeficientes constantes em $\mathbb{R}^n$. Seja u uma solução de $Pu = 0$ em Q_1, onde Q_1 é um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^n$. Suponha que $u = 0$ em Q_2, onde $Q_2 \subseteq Q_1$ é aberto e não vazio.*

Então $u = 0$ em Q_3, onde $Q_3 \subseteq Q_1$ é o aberto que contém Q_2 e tal que todo hiperplano característico do operador P que intercepta Q_3 também intercepta Q_1.

Demonstração: Ver [44]. □

Observação 1.5.4. *No caso em que $P = i\partial_t + \Delta_x$ em $\mathbb{R}^{n+1}$, sua parte principal é $P_p = \Delta_x$. Um hiperplano em $\mathbb{R}^{n+1}$ é característico se seu vetor normal $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ é uma raiz de P_p, isto é, de $P_p(t, x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 = |x|^2$.*

Assim os vetores normais são da forma $(\pm 1, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e os hiperplanos caracteristícos são definidos por

$$\Pi_{t_0} := \{(t_0, x);\ x \in \mathbb{R}^n\},\ \text{para cada } t_0 \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1.5.5. *(**Efeito Regularizante**) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, um domínio exterior, ou seja, $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash \Theta$, onde Θ é um subconjunto compacto e conexo do $\mathbb{R}^n$ com fronteira regular. Além disso, suponha que Θ é "non-trapping", ou seja, qualquer raio da ótica geométrica refletindo sobre a fronteira de Θ de acordo com as leis da ótica geométrica deixa qualquer conjunto compacto em tempo finito. Nesta condições temos, para todo $T > 0$ e toda função $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, que:*

(i) $\|\chi u\|_{L^2(0,T;H_D^1(\Omega))} \leq C\|\chi f\||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$;

(ii) $\|\chi v\|_{L^2(0,T;H_D^{\frac{1}{2}}(\Omega))} \leq C\|v_0\|_{L^2(\Omega)}$,

onde $u(t) = \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta_D}\chi f(\tau)d\tau$, $v(t) = e^{it\Delta_D v_0}$, Δ_D denota o operador Laplaciano com condições de Dirichlet sobre a fronteira de Ω e $H_D^s(\Omega)$ é o domínio do operador $(\Delta_D + I)^{\frac{s}{2}}$.

Demonstração: Ver [16]. □

Capítulo 2

Equação de Klein-Gordon

Este capítulo tem como ojetivo estudar a existência e unicidade de soluções da equação de Klein-Gordon sobre uma variedade Riemanniana não compacta sem bordo, bem como, mostrar o decaimento exponencial da energia. A equação de Klein-Gordon é descrita por:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u + a(x)g(u_t) = 0 & em \ \mathcal{M} \times (0,\infty) \\ u(0) = u_0 \ , \ u_t(0) = u_1 & em \ \mathcal{M} \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $(\mathcal{M}^n, \mathbf{g})$ uma variedade Riemanniana n-dimensional não compacta, $n \geq 2$, simplesmente conexa, orientável e sem bordo munida de uma métrica Riemanniana $\mathbf{g}(\cdot,\cdot) = \langle \cdot,\cdot \rangle$ completa, de classe C^∞. O operador Laplace-Beltrami é denotado apenas por Δ.

Hipótese 2.0.1. ***Hipóteses sobre a função*** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
i) $g(s)$ *é contínua e monótona crescente;*
ii) $g(s)s > 0$ *para* $s \neq 0$*;*
iii) $k|s| \leq |g(s)| \leq K|s|, \quad \forall s \in \mathbb{R}$*, onde* k *e* K *são duas constantes positivas.*

Hipótese 2.0.2. ***Hipóteses sobre a função*** $a : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$:
i) $a(x) \in L^\infty(\mathcal{M})$ *é um função não negativa;*
ii) Seja $\Omega \subset \mathcal{M}$ *um aberto e limitado com fronteira* $\partial\Omega$ *bem regular. Suponhamos que*

$$a(x) \geq a_0 > 0 \quad em \quad \mathcal{M}\backslash\Omega \cup \mathcal{M}_*,$$

onde $\mathcal{M}_*$ *é um subconjunto aberto próprio (a ser determinado posteriormente) de* $\mathcal{M}$.

2.1 Existência e Unicidade de Soluções

Nesta seção estudaremos a existência e unicidade de solução do problema (2.1). No que segue omitiremos algumas variáveis de modo a não sobrecarregar a notação.

A energia associada ao problema (2.1) é definida por:

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} [u_t^2(x,t) + |\nabla u(x,t)|^2 + u^2(x,t)] \, d\mathcal{M}. \tag{2.2}$$

Nosso intuito é provar a existência e unicidade de soluções u para o problema (2.1). Os resultados obtidos estão enunciados no teorema a seguir.

Teorema 2.1.1. *Seja* $(\mathcal{M}^n, \mathbf{g})$ *uma variedade Riemanniana n-dimensional não compacta,* $n \geq 2$*, simplesmente conexa, orientável e sem bordo munida de uma métrica Riemanniana* $\mathbf{g}(\cdot,\cdot) = \langle \cdot,\cdot \rangle$ *completa, de classe* C^∞*. Sob as Hipóteses 2.0.1 e 2.0.2, temos:*

1. O problema (2.1) é bem posto no espaço $\{w \in H^1(\mathcal{M}); \Delta w \in L^2(\mathcal{M})\} \times H^1(\mathcal{M})$*, isto é, para cada par de dados iniciais* $\{u_0, u_1\} \in \{w \in H^1(\mathcal{M}); \Delta w \in L^2(\mathcal{M})\} \times H^1(\mathcal{M})$*, existe uma única solução regular de (2.1) na classe*

$$u \in C^1([0,\infty); L^2(\mathcal{M})) \cap C([0,\infty); H^1(\mathcal{M})); \tag{2.3}$$

$$u_t \in W^{1,\infty}(0,\infty; L^2(\mathcal{M})) \cap L^\infty(0,\infty; H^1(\mathcal{M})). \tag{2.4}$$

2. O problema (2.1) é bem posto no espaço $H^1(\mathcal{M}) \times L^2(\mathcal{M})$*, isto é, para cada par de dados iniciais* $\{u_0, u_1\} \in H^1(\mathcal{M}) \times L^2(\mathcal{M})$*, existe uma única solução fraca de (2.1) na classe*

$$u \in C^1([0,\infty); L^2(\mathcal{M})) \cap C([0,\infty); H^1(\mathcal{M})). \tag{2.5}$$

Demonstração:

Denotando $U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}$, obtemos

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{dU}{dt} = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ \Delta u - u - a(x)g(u_t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_t \\ \Delta u - u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -a(x)g(u_t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta - I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -a(x)g(u_t) \end{pmatrix}.$$

Definimos $A = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta + I & 0 \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{H} := H^1(\mathcal{M}) \times L^2(\mathcal{M})$,

$$\begin{array}{rcl} F: & \mathcal{H} & \longrightarrow \mathcal{H} \\ & \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ a(x)g(v) \end{pmatrix} \end{array}$$

e,

$$\begin{array}{rcl} A: & D(A) \subset \mathcal{H} & \longrightarrow \mathcal{H} \\ & \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & \longmapsto A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u + u \end{pmatrix}, \end{array}$$

então o problema (2.1) pode ser escrito como

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt}(t) + (A+F)U(t) = 0 \\ \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Seja $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, definimos a norma em $\mathcal{H}$ e $D(A)$ respectivamente por

$\|U\|^2_{\mathcal{H}} = \|u\|^2_{H^1(\mathcal{M})} + \|v\|^2_{L^2(\mathcal{M})}$ e $\|U\|^2_{D(A)} = \|\Delta u\|^2_{L^2(\mathcal{M})} + \|v\|^2_{H^1(\mathcal{M})}$.

Observe que $D(A) = \big\{U \in \mathcal{H}\,;\, AU \in \mathcal{H}\big\}$, ou seja, $D(A) = \{u \in H^1(\mathcal{M}); \Delta u \in L^2(\mathcal{M})\} \times H^1(\mathcal{M})$. Mostraremos agora algumas propriedades da aplicação F.

• F está bem definida. Com efeito, seja $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ então

$$\|FU\|^2_{\mathcal{H}} = \int_{\mathcal{M}} a(x)|g(v(x))|^2 \, d\mathcal{M} \leq \|a\|^2_\infty K^2 \int_{\mathcal{M}} |v(x)|^2 \, d\mathcal{M} = \|a\|^2_\infty K^2 \|v\|^2_{L^2(\mathcal{M})} < \infty$$

• F é monótona. Com efeito, sejam $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$, então

$$\begin{aligned} (FU - FV, U - V)_{\mathcal{H}} &= (ag(u_2) - ag(v_2), u_2 - v_2)_{L^2(\mathcal{M})} \\ &= \int_{\mathcal{M}} a(x)(g(u_2) - g(v_2))(u_2 - v_2) \, d\mathcal{M} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

uma vez que g é monótona crescente.

• F é limitada (leva limitados em limitados). De fato, seja $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ tal que $\|U\|_{\mathcal{H}} \leq L$, logo

$$\|FU\|^2_{\mathcal{H}} \leq \|a\|^2_\infty K^2 \|v\|^2_{L^2(\mathcal{M})} \leq \|a\|^2_\infty K^2 L^2.$$

• F é hemicontínua. De fato, temos que provar que dada $(x_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $x_n \to 0$, então

$$\lim_{n\to\infty} (F(U + x_n V), W)_{\mathcal{H}} = (FU, W)_{\mathcal{H}}, \;\; \forall \;\; U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}, \tag{2.7}$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} (ag(u_2 + x_n v_2), w_2)_{L^2(\mathcal{M})} = (ag(u_2), w_2)_{L^2(\mathcal{M})}$$

Com efeito, definimos $f_n := ag(u_2 + x_n v_2) w_2$, então

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\leq a(x)|w_2(x)|K|u_2(x) + x_n v_2(x)| \\ &\leq a(x)K|w_2(x)||u_2(x)| + a(x)C_1 K|w_2(x)||v_2(x)|, \end{aligned}$$

quase sempre em $\mathcal{M}$, onde C_1 é tal que $|x_n| \leq C_1$. Devido ao fato de $a \in L^\infty(\mathcal{M})$ e $u_2, v_2, w_2 \in L^2(\mathcal{M})$ obtemos que $f_n \in L^1(\mathcal{M})$. Além disso, definindo

$$h := aK|w_2||u_2| + aC_1 K|w_2||v_2|,$$

segue que $h \in L^1(\mathcal{M})$ e $|f_n(x)| \leq h(x)$, quase sempre em $\mathcal{M}$.

Na sequência, observe que devido a continuidade de g, temos que

$$\lim_{n\to\infty} a(x)g(u_2(x)+x_n v_2(x))w_2(x) = a(x)g(u_2(x))w_2(x).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{M}} a(x)g(u_2(x)+x_n v_2(x))w_2(x) = \int_{\mathcal{M}} a(x)g(u_2(x))w_2(x),$$

e consequentemente (2.7) está provado.

Em seguida mostraremos que A é um operador maximal monótono.

Com efeito, seja $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$, então

$$\begin{aligned}
(AU,U)_{\mathcal{H}} &= \left(\begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u + u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} \\
&= (-v,u)_{L^2(\mathcal{M})} - (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\mathcal{M})} + (-\Delta u, v)_{L^2(\mathcal{M})} + (u,v)_{L^2(\mathcal{M})} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

logo A é monótono.

Em seguida, considere $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$. Temos que mostrar que existe $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$, tal que $(I + A)U = f$, isto é,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u + u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

ou equivalentemente,

$$\begin{cases} u - v = f_1 \\ v - \Delta u + u = f_2. \end{cases} \tag{2.8}$$

Somando as duas equações do sistema obtemos,

$$2u - \Delta u = f_1 + f_2, \tag{2.9}$$

e fazendo formalmente o produto interno em $L^2(\mathcal{M})$ com $\varphi \in H^1(\mathcal{M})$, encontramos

$$2(u,\varphi)_{L^2(\mathcal{M})} + (-\Delta u, \varphi)_{L^2(\mathcal{M})} = (f_1 + f_2, \varphi)_{L^2(\mathcal{M})}\,, \forall \varphi \in H^1(\mathcal{M})$$

donde segue que

$$2(u,\varphi)_{L^2(\mathcal{M})} + (\nabla u, \nabla \varphi)_{L^2(\mathcal{M})} = (f_1 + f_2, \varphi)_{L^2(\mathcal{M})}\,, \forall \varphi \in H^1(\mathcal{M}). \tag{2.10}$$

Afirmação: (2.10) possui uma única solução.

De fato, definamos $b : H^1(\mathcal{M}) \times H^1(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $T : H^1(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$, respectivamente por

$$b(u,\varphi) = 2(u,\varphi)_{L^2(\mathcal{M})} + (\nabla u, \nabla \varphi)_{L^2(\mathcal{M})}$$

e
$$\langle T, \varphi \rangle = (f_1 + f_2, \varphi)_{L^2(\mathcal{M})}.$$

Segue então que b é bilinear, contínua, coerciva e T é contínua. Portanto, pelo Teorema de Lax Milgran existe uma única $u \in H^1(\mathcal{M})$ tal que (2.10) é satisfeita.

Logo $2u - \Delta u = f_1 + f_2$ em $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$. Como u, f_1 e $f_2 \in L^2(\mathcal{M})$ segue que $\Delta u \in L^2(\mathcal{M})$, além disso $v = f_1 - u \in H^1(\mathcal{M})$, donde concluímos que existe uma única $U \in D(A)$ satifazendo $(I + A)U = f$, provando a maximalidade do operador A.

Portanto A é um operador maximal monótono, F é uma aplicação monótona, limitada e hemicontínua. De acordo com o Teorema 1.3.7 segue que $A + F$ é maximal monótono em $\mathcal{H}$. Segue então, de acordo com o Teorema 1.3.8, que para cada $U_0 \in D(A + F) = D(A)$, existe uma única aplicação $U : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{H}$ solução forte do problema (2.6). Consequentemente existe uma única aplicação $u : [0, \infty) \longrightarrow H^1(\mathcal{M})$ solução forte do problema (2.1), na classe

$$u \in C^1([0, \infty); L^2(\mathcal{M})) \cap C([0, \infty); H^1(\mathcal{M})); \tag{2.11}$$

$$u_t \in W^{1,\infty}(0, \infty; L^2(\mathcal{M})) \cap L^\infty(0, \infty); H^1(\mathcal{M})). \tag{2.12}$$

Se $U_0 \in \mathcal{H}$, aplicando o Teorema 1.3.9 com $B \equiv 0$, obtemos a existência de uma única aplicação $U : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{H}$ solução fraca do problema (2.6), e portanto existe uma única aplicação $u : [0, \infty) \longrightarrow H^1(\mathcal{M})$ solução fraca do problema (2.1) na classe

$$u \in C^1([0, \infty); L^2(\mathcal{M})) \cap C([0, \infty); H^1(\mathcal{M})), \tag{2.13}$$

o que encerra a demonstração do teorema. □

Proposição 2.1.2. *Seja $\Omega \subset \mathcal{M}$ um aberto limitado com fronteira bem regular. Então $u(t) \in H^2(\Omega)$, $\forall\, t \geq 0$, onde u é a solução regular do problema (2.1).*

Demonstração: Fixemos $t \geq 0$, definimos $v := u(t)$ e $f := -u_{tt}(t) - a(\cdot)g(u_t(t)) \in L^2(\mathcal{M})$, temos que a seguinte identidade é verificada em $L^2(\mathcal{M})$

$$-\Delta v + v = f \tag{2.14}$$

Sejam $\Omega^* \subset \mathcal{M}$, um aberto limitado e conexo com fronteira bem regular, tal que $\Omega \subset\subset \Omega^*$, V_ϵ uma vizinhança tubular da fronteira de Ω contida propriamente em Ω^* e $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ satisfazendo:

(i) $\psi \equiv 1$ em $\overline{\Omega}$

(ii) $\psi \equiv 0$ em $\overline{\Omega^*} \backslash (\Omega \cup V_\epsilon)$

(iii) $0 \leq \psi \leq 1$

Multiplicando a equação (2.14) por ψ obtemos

$$-\Delta v\psi + v\psi = f\psi.$$

Notemos que

$$\Delta(v\psi) = v\Delta\psi + \psi\Delta v + 2\langle\nabla v, \nabla\psi\rangle, \tag{2.15}$$

logo

$$-\Delta(v\psi) + v\psi = f\psi - v\Delta\psi - 2\langle\nabla v, \nabla\psi\rangle \text{ em } L^2(\mathcal{M}).$$

Em particular

$$-\Delta(v\psi) + v\psi = f\psi - v\Delta\psi - 2\langle\nabla v, \nabla\psi\rangle \text{ em } L^2(\Omega^*).$$

Além disso

$$v\psi\Big|_{\partial\Omega^*} = v\Big|_{\partial\Omega^*}\psi\Big|_{\partial\Omega^*} = 0.$$

Por resultados de regularidade elíptica segue que $v\psi \in H^2(\Omega^*)$, donde segue que $v\psi \in H^2(\Omega)$, como $\psi \equiv 1$ em Ω obtemos que $v = u(t) \in H^2(\Omega)$.

□

2.2 Resultado de Estabilidade

Antes de enunciar o principal resultado de estabilidade, enunciaremos uma identidade que será muito útil no decorrer do trabalho chamada *identidade de energia*. Seja u uma solução regular do problema (2.1), então multiplicando a equação por u_t e integrando por partes, obtemos

$$E(t_2) - E(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathcal{M}} a(x)g(u_t)u_t \, d\mathcal{M}dt, \tag{2.16}$$

para todo $t_2 > t_1 \geq 0$.

Vale ressaltar que, por argumentos de densidade, a identidade de energia dada em (2.16) continua sendo válida para soluções fracas do problema (2.1).

Teorema 2.2.1. *Seja u uma solução fraca do problema (2.1), com energia definida como em (2.2). Então, sob as Hipóteses 2.0.1 e 2.0.2, existem constantes positivas T_0, C_0 e λ_0 tais que*

$$E(t) \leq C_0 e^{-\lambda_0 t} E(0); \quad \forall t \geq T_0,$$

provada para dados iniciais tomados em conjuntos limitados de $H^1(\mathcal{M}) \times L^2(\mathcal{M})$.

Nossa principal tarefa é provar a seguinte desigualdade:

$$\int_0^T E(t)\, dt \leq C_1 E(T) + C_2 \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)[u_t^2(x,t) + g^2(u_t(x,t))] \, d\mathcal{M}dt, \tag{2.17}$$

onde C_1 e C_2 são constantes postivas e C_1 não depende de T. É suficiente considerarmos soluções regulares do problema (2.1), pois o decaimento exponencial pode ser recuperado para soluções fracas por argumentos de densidade.

2.2.1 Identidades Fundamentais

Seja u uma solução regular do problema (2.1). Inicialmente consideremos $\Omega^* \subset \mathcal{M}$ um subconjunto aberto e limitado com fronteira, $\partial\Omega^*$, regular, tal que $\Omega \subset\subset \Omega^*$.

Seja $\varphi \in C^\infty(\mathcal{M})$ satisfazendo:

(i) $\varphi \equiv 1$ em $\mathcal{M}\backslash\Omega^*$;

(ii) $\varphi \equiv 0$ em $\overline{\Omega}$;

(iii) $0 \leq \varphi \leq 1$ em $\mathcal{M}$.

Multiplicando o problema (2.1) por φu e integrando sobre $[0,T] \times \mathcal{M}$, obtemos

$$\int_0^T \int_{\mathcal{M}} [u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) + u]\varphi u \; d\mathcal{M}dt = 0. \tag{2.18}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\int_{\mathcal{M}} u_t\varphi u \; d\mathcal{M}\right] &= \int_{\mathcal{M}} u_{tt}\varphi u \; d\mathcal{M} + \int_{\mathcal{M}} u_t\varphi u_t \; d\mathcal{M} \\ &= \int_{\mathcal{M}} u_{tt}\varphi u \; d\mathcal{M} + \int_{\mathcal{M}} u_t^2\varphi \; d\mathcal{M}. \end{aligned}$$

Integrando sobre $[0,T]$ concluímos que

$$\int_0^T \int_{\mathcal{M}} u_{tt}\varphi u \; d\mathcal{M}dt = \left[\int_{\mathcal{M}} u_t\varphi u \; d\mathcal{M}\right]_0^T - \int_{\mathcal{M}} u_t^2\varphi \; d\mathcal{M}dt. \tag{2.19}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} -\Delta u(\varphi u) \; d\mathcal{M}dt &= \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla u, \nabla(\varphi u)\rangle \; d\mathcal{M}dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle u + \varphi|\nabla u|^2 \; d\mathcal{M}dt. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Combinando (2.18), (2.19) e (2.20), deduzimos

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\int_{\mathcal{M}} u_t\varphi u \; d\mathcal{M}\right]_0^T - \int_{\mathcal{M}} u_t^2\varphi \; d\mathcal{M}dt \\ &+ \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle u + \varphi|\nabla u|^2 \; d\mathcal{M}dt \\ &+ \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \varphi u^2 \; d\mathcal{M}dt + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)g(u_t)\varphi u \; d\mathcal{M}dt. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Levando em consideração as propriedades da função φ, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Omega^*\backslash\Omega} \varphi[u^2 + |\nabla u|^2] \, d\mathcal{M}dt + \int_0^T \int_{\mathcal{M}\backslash\Omega^*} u^2 + |\nabla u|^2 \, d\mathcal{M}dt \\
= \; & -\left[\int_{\mathcal{M}} u_t\varphi u \, d\mathcal{M}\right]_0^T + \int_{\Omega^*\backslash\Omega} \varphi u_t^2 \, d\mathcal{M}dt + \int_{\mathcal{M}\backslash\Omega^*} u_t^2 \, d\mathcal{M}dt \\
- \; & \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle u \, d\mathcal{M}dt - \int_0^T \int_{\mathcal{M}\backslash\Omega} a(x)g(u_t)\varphi u \, d\mathcal{M}dt. \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

Observando que $a(x) \geq a_0 > 0$ em $\mathcal{M}\backslash\Omega$ e que $\varphi \geq 0$, é válido que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathcal{M}\backslash\Omega^*} u^2 + |\nabla u|^2 \, d\mathcal{M}dt \leq -\left[\int_{\mathcal{M}} u_t\varphi u \, d\mathcal{M}\right]_0^T \\
+ \; & a_0^{-1}\int_0^T \int_{\Omega^*\backslash\Omega} a(x)\varphi u_t^2 \, d\mathcal{M}dt + a_0^{-1}\int_0^T \int_{\mathcal{M}\backslash\Omega^*} a(x) u_t^2 \, d\mathcal{M}dt \\
- \; & \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle u \, d\mathcal{M}dt - \int_0^T \int_{\mathcal{M}\backslash\Omega} a(x)g(u_t)\varphi u \, d\mathcal{M}dt. \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

Somando $\int_0^T \int_{\mathcal{M}\backslash\Omega^*} u_t^2 \, d\mathcal{M}dt$ na desigualdade anterior e usando novamente o fato de que $0 \leq \varphi \leq 1$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathcal{M}\backslash\Omega^*} u^2 + |\nabla u|^2 + u_t^2 \, d\mathcal{M}dt \leq -\left[\int_{\mathcal{M}} u_t\varphi u \, d\mathcal{M}\right]_0^T \\
+ \; & 2a_0^{-1}\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) u_t^2 \, d\mathcal{M}dt - \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle u \, d\mathcal{M}dt \\
- \; & \int_0^T \int_{\mathcal{M}\backslash\Omega} a(x)g(u_t)\varphi u \, d\mathcal{M}dt + \int_0^T \int_{\mathcal{M}\backslash\Omega^*} u_t^2 \, d\mathcal{M}dt \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

O próximo passo é estimar o termo $\int_0^T \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle u \, d\mathcal{M}dt$.

Usaremos o Corolário 1.4.10, pois $u \in H^1(\Omega^*)$, então $u^2 \in W^{1,1}(\Omega^*)$ e $\varphi \in C^\infty(\mathcal{M})$. Note que $\langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle = 0$ em $\mathcal{M}\backslash\Omega^*$ e que $\varphi \equiv 1$ em $\partial\Omega^*$.
Podemos então escrever

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{M}} \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle u \, d\mathcal{M} &= \int_{\Omega^*} \langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle u \, d\mathcal{M} = \frac{1}{2}\int_{\Omega^*} \langle \nabla(u^2), \nabla\varphi\rangle \, d\mathcal{M} \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\Omega^*} \Delta\varphi \, u^2 \, d\mathcal{M} + \int_{\partial\Omega^*} \partial_\nu\varphi \, u^2 \, d\Gamma \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\Omega^*} \Delta\varphi \, u^2 \, d\mathcal{M}. \qquad (2.25)
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\left|\int_0^T\int_{\mathcal{M}}\langle\nabla u,\nabla\varphi\rangle u\ d\mathcal{M}dt\right|\leq\frac{c}{2}\int_0^T\int_{\Omega^*}u^2\ d\mathcal{M}dt, \tag{2.26}$$

onde $c:=max_{x\in\overline{\Omega^*}}\ |\Delta\varphi(x)|$.

De acordo com (2.24) e (2.26) concluímos que

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\mathcal{M}\setminus\ \Omega^*}u^2+|\nabla u|^2+u_t^2\ d\mathcal{M}dt&\leq-\left[\int_{\mathcal{M}}u_t\varphi u\ d\mathcal{M}\right]_0^T\\ +\quad 3a_0^{-1}\int_0^T\int_{\mathcal{M}}a(x)u_t^2\ d\mathcal{M}dt&+\frac{c}{2}\int_0^T\int_{\Omega^*\setminus\Omega}u^2\ d\mathcal{M}dt\\ -\quad\int_0^T\int_{\mathcal{M}\setminus\ \Omega}a(x)g(u_t)\varphi u\ d\mathcal{M}dt.&\end{aligned} \tag{2.27}$$

Visando "completar"a energia e levando em conta (2.27), nosso objetivo seguinte é estimar o termo $\int_0^T\int_{\Omega^*}u^2+|\nabla u|^2+u_t^2\ d\mathcal{M}dt$ em função de "termos bons".

Seja q um campo de vetores sobre $\overline{\Omega^*}$ de classe C^1. Multiplicando o problema (2.1) por $\langle\nabla u,q\rangle$ e integrando sobre $[0,T]\times\Omega^*$, obtemos

$$0=\int_0^T\int_{\Omega^*}(u_{tt}-\Delta u+u+a(x)g(u_t))\langle\nabla u,q\rangle\ d\mathcal{M}dt. \tag{2.28}$$

Na sequência vamos estimar alguns termos de (2.28).

• Estimativa para $I_1:=\int_0^T\int_{\Omega^*}u_{tt}\langle\nabla u,q\rangle\ d\mathcal{M}dt$.

Note que

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega^*}u_t\langle\nabla u,q\rangle\ d\mathcal{M}=\int_{\Omega^*}u_{tt}\langle\nabla u,q\rangle\ d\mathcal{M}+\int_{\Omega^*}u_t\langle\nabla u_t,q\rangle\ d\mathcal{M}.$$

Assim

$$I_1=\left[\int_{\Omega^*}u_t\langle\nabla u,q\rangle d\mathcal{M}\right]_0^T-\int_0^T\int_{\Omega^*}u_t\langle\nabla u_t,q\rangle\ d\mathcal{M}dt,$$

e recordando que

$$u_t\langle q,\nabla u_t\rangle=\frac{1}{2}\langle q,\nabla u_t^2\rangle, \tag{2.29}$$

segue, de acordo com o Corolário 1.4.11, que

$$\begin{aligned}I_1&=\left[\int_{\Omega^*}u_t\langle\nabla u,q\rangle d\mathcal{M}\right]_0^T-\int_0^T\int_{\Omega^*}\frac{1}{2}\langle q,\nabla u_t^2\rangle\ d\mathcal{M}dt\\&=\left[\int_{\Omega^*}u_t\langle\nabla u,q\rangle d\mathcal{M}\right]_0^T+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Omega^*}div(q)u_t^2\ d\mathcal{M}dt\\&-\quad\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\partial\Omega^*}\langle q,\nu\rangle u_t^2\ d\Gamma dt.\end{aligned} \tag{2.30}$$

• Estimativa para $I_2 := \int_0^T \int_{\Omega^*} -\Delta u \langle q, \nabla u\rangle \, d\mathcal{M}dt$.
Novamente pelo Teorema 1.4.7, Teorema 1.4.8 e Lema 1.4.1, deduzimos que

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^T \int_{\Omega^*} \langle \nabla u, \nabla(\langle q, \nabla u\rangle)\rangle \, d\mathcal{M}dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega^*} \partial_\nu u \langle q, \nabla u\rangle \, d\Gamma dt \\
&= \int_0^T \int_{\Omega^*} \nabla q(\nabla u, \nabla u) \, d\mathcal{M}dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega^*} \frac{1}{2} \left[div(|\nabla u|^2 q) - div(q)|\nabla u|^2 \right] \, d\mathcal{M}dt \\
&- \int_0^T \int_{\partial\Omega^*} \partial_\nu u \langle q, \nabla u\rangle \, d\Gamma dt \\
&= \int_0^T \int_{\Omega^*} \nabla q(\nabla u, \nabla u) \, d\mathcal{M}dt + \int_0^T \int_{\Omega^*} \frac{1}{2} \langle q, \nabla(|\nabla u|^2)\rangle \, d\mathcal{M}dt \\
&- \int_0^T \int_{\partial\Omega^*} \partial_\nu u \langle q, \nabla u\rangle \, d\Gamma dt \\
&= \int_0^T \int_{\Omega^*} \nabla q(\nabla u, \nabla u) \, d\mathcal{M}dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega^*} div(q)|\nabla u|^2 \, d\mathcal{M}dt \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial\Omega^*} \langle q, \nu\rangle |\nabla u|^2 \, d\Gamma dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega^*} \partial_\nu u \langle q, \nabla u\rangle \, d\Gamma dt. \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

• Estimativa para $I_3 := \int_0^T \int_{\Omega^*} u \langle q, \nabla u\rangle \, d\mathcal{M}dt$.
De acordo com o Corolário 1.4.11, obtemos

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega^*} \langle q, \nabla(u^2)\rangle \, d\mathcal{M}dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega^*} div(q) u^2 \, d\mathcal{M}dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial\Omega^*} \langle q, \nu\rangle u^2 \, d\Gamma dt \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

Combinando (2.28), (2.30), (2.31) e (2.32), podemos enunciar o seguinte lema:

Lema 2.2.2. *Seja q um campo de vetores sobre $\overline{\Omega^*}$ de classe C^1. Para cada solução regular u do problema (2.1), é válida a seguinte identidade:*

$$\begin{aligned}
&\left[\int_{\Omega^*} u_t \langle \nabla u, q\rangle d\mathcal{M} \right]_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega^*} div(q)[u_t^2 - |\nabla u|^2 - u^2] \, d\mathcal{M}dt \\
+ &\int_0^T \int_{\Omega^*} \nabla q(\nabla u, \nabla u) \, d\mathcal{M}dt + \int_0^T \int_{\Omega^*} a(x) g(u_t) \langle q, \nabla u\rangle \, d\mathcal{M}dt \\
= &\int_0^T \int_{\partial\Omega^*} \partial_\nu u \langle q, \nabla u\rangle \, d\Gamma dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial\Omega^*} \langle q, \nu\rangle [u_t^2 - |\nabla u|^2 - u^2] \, d\Gamma dt.
\end{aligned}$$

Explorando o Lema 2.2.2 com $q = \nabla f$, onde $f : \overline{\Omega^*} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^∞ a ser determinada, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left[\int_{\Omega^*} u_t\langle\nabla u, \nabla f\rangle d\mathcal{M}\right]_0^T + \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Omega^*} div(\nabla f)[u_t^2 - |\nabla u|^2 - u^2]\ d\mathcal{M}dt \\
+ &\int_0^T\int_{\Omega^*} \nabla^2 f(\nabla u, \nabla u)\ d\mathcal{M}dt + \int_0^T\int_{\Omega^*} a(x)g(u_t)\langle\nabla f, \nabla u\rangle\ d\mathcal{M}dt \\
= &\int_0^T\int_{\partial\Omega^*} \partial_\nu u\langle\nabla f, \nabla u\rangle\ d\Gamma dt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\partial\Omega^*} \langle\nabla f, \nu\rangle[u_t^2 - |\nabla u|^2 - u^2]\ d\Gamma dt,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
&\left[\int_{\Omega^*} u_t\langle\nabla u, \nabla f\rangle d\mathcal{M}\right]_0^T + \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Omega^*} \Delta f[u_t^2 - |\nabla u|^2 - u^2]\ d\mathcal{M}dt \\
+ &\int_0^T\int_{\Omega^*} \nabla^2 f(\nabla u, \nabla u)\ d\mathcal{M}dt + \int_0^T\int_{\Omega^*} a(x)g(u_t)\langle\nabla f, \nabla u\rangle\ d\mathcal{M}dt \\
= &\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\partial\Omega^*} \langle\nabla f, \nu\rangle[u_t^2 - |\nabla u|^2 - u^2]\ d\Gamma dt \\
+ &\int_0^T\int_{\partial\Omega^*} \partial_\nu u\langle\nabla f, \nabla u\rangle\ d\Gamma dt.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Lema 2.2.3. *Seja u uma solução regular do problema (2.1) e $\alpha \in C^1(\overline{\Omega^*})$, então é válida a seguinte identidade*

$$\begin{aligned}
\left[\int_{\Omega^*} u_t\alpha u\ d\mathcal{M}\right]_0^T &= \int_0^T\int_{\Omega^*} \alpha[u_t^2 - |\nabla u|^2 - u^2]\ d\mathcal{M}dt - \int_0^T\int_{\Omega^*} \langle\nabla u, \nabla\alpha\rangle u\ d\mathcal{M}dt \\
&- \int_0^T\int_{\Omega^*} a(x)g(u_t)\alpha u\ d\mathcal{M}dt + \int_0^T\int_{\partial\Omega^*} \partial_\nu u\alpha u\ d\Gamma dt.
\end{aligned}$$

Demonstração: Multiplicando o problema (2.1) por αu e integrando por partes obtemos o desejado.

□

Somando (2.33) com a identidade dada no Lema 2.2.3 segue que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Omega^*} (\frac{\Delta f}{2} - \alpha) u_t^2 \; d\mathcal{M}dt + \int_0^T \int_{\Omega^*} \nabla^2 f(\nabla u, \nabla u) \; d\mathcal{M}dt \\
+ \; &\int_0^T \int_{\Omega^*} (\alpha - \frac{\Delta f}{2}) |\nabla u|^2 \; d\mathcal{M}dt = \int_0^T \int_{\Omega^*} (\frac{\Delta f}{2} - \alpha) u^2 \; d\mathcal{M}dt \\
- \; &\left[\int_{\Omega^*} u_t \langle \nabla f, \nabla u \rangle \; d\mathcal{M} \right]_0^T - \left[\int_{\Omega^*} u_t \alpha u \; d\mathcal{M} \right]_0^T \\
- \; &\int_0^T \int_{\Omega^*} a(x) g(u_t) \alpha u \; d\mathcal{M}dt - \int_0^T \int_{\Omega^*} a(x) g(u_t) \langle \nabla f, \nabla u \rangle \; d\mathcal{M}dt \\
+ \; &\int_0^T \int_{\partial\Omega^*} \partial_\nu u \langle \nabla f, \nabla u \rangle \; d\Gamma dt \\
+ \; &\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial\Omega^*} \langle \nabla f, \nu \rangle [u_t^2 - |\nabla u|^2 - u^2] \; d\Gamma dt \\
- \; &\int_0^T \int_{\Omega^*} \langle \nabla u, \nabla \alpha \rangle u \; d\mathcal{M}dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega^*} \partial_\nu u \alpha u \; d\Gamma dt. \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

O próximo passo é construir uma função auxiliar de modo a obter uma estimativa para alguns "termos de bordo", a saber:

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial\Omega^*} \langle \nabla f, \nu \rangle [u_t^2 - |\nabla u|^2 - u^2] \; d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega^*} \partial_\nu u \langle \nabla f, \nabla u \rangle \; d\Gamma dt.$$

Construção de uma função auxiliar:

Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que a vizinhança tubular

$$\omega_\varepsilon = \{x \in \mathcal{M}; \; d(x, \partial\Omega^*) \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$$

esteja contida em $\mathcal{M} \backslash \overline{\Omega}$.

Seja $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ tal que (ver figura p.35):

(i) $\psi = 1 \; em \; \omega_{\frac{\varepsilon}{2}} := \omega_\varepsilon \backslash \Omega^*$;

(ii) $\psi = 0 \; em \; \overline{\Omega^*} \backslash int(\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}})$, onde $\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}} := \omega_\varepsilon \backslash \omega_{\frac{\varepsilon}{2}}$;

(iii) $0 \leq \psi \leq 1 \; em \; \mathcal{M}$.

Fazendo $q = \psi \nabla f$ no Lema 2.2.2, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left[\int_{\Omega^*} u_t \psi \langle \nabla u, \nabla f \rangle d\mathcal{M} \right]_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega^*} div(\psi \nabla f) [u_t^2 - |\nabla u|^2 - u^2] \; d\mathcal{M}dt \\
+ \; &\int_0^T \int_{\Omega^*} \nabla(\psi \nabla f)(\nabla u, \nabla u) \; d\mathcal{M}dt + \int_0^T \int_{\Omega^*} a(x) g(u_t) \langle \psi \nabla f, \nabla u \rangle \; d\mathcal{M}dt \\
= \; &\int_0^T \int_{\Omega^*} \partial_\nu u \langle \psi \nabla f, \nabla u \rangle \; d\Gamma dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega^*} \langle \psi \nabla f, \nu \rangle [u_t^2 - |\nabla u|^2 - u^2] \; d\Gamma dt,
\end{aligned}$$

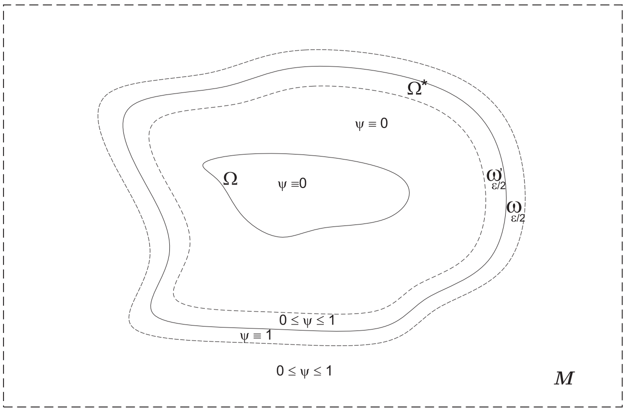

Figura 2.1: Propriedades da função ψ.

isto é,

$$\begin{aligned}
&\left[\int_{\Omega^*} u_t\psi\langle\nabla u,\nabla f\rangle d\mathcal{M}\right]_0^T + \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Omega^*}\psi\Delta f[u_t^2-|\nabla u|^2-u^2]\;d\mathcal{M}dt\\
+ &\;\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Omega^*}\nabla f(\psi)[u_t^2-|\nabla u|^2-u^2]\;d\mathcal{M}dt + \int_0^T\int_{\Omega^*}\psi\nabla^2 f(\nabla u,\nabla u)\;d\mathcal{M}dt\\
+ &\int_0^T\int_{\Omega^*}\langle\nabla u(\psi)\nabla f,\nabla u\rangle\;d\mathcal{M}dt + \int_0^T\int_{\Omega^*}a(x)g(u_t)\psi\langle\nabla f,\nabla u\rangle\;d\mathcal{M}dt\\
= &\int_0^T\int_{\partial\Omega^*}\partial_\nu u\langle\nabla f,\nabla u\rangle\;d\Gamma dt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\partial\Omega^*}\langle\nabla f,\nu\rangle[u_t^2-|\nabla u|^2-u^2]\;d\Gamma dt,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
&\left[\int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} u_t\psi\langle\nabla u,\nabla f\rangle d\mathcal{M}\right]_0^T + \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}}\psi\Delta f[u_t^2-|\nabla u|^2-u^2]\;d\mathcal{M}dt\\
+ &\;\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}}\langle\nabla f,\nabla\psi\rangle[u_t^2-|\nabla u|^2-u^2]\;d\mathcal{M}dt\\
+ &\int_0^T\int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}}\psi\nabla^2 f(\nabla u,\nabla u)\;d\mathcal{M}dt + \int_0^T\int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}}\langle\nabla u,\nabla\psi\rangle\langle\nabla f,\nabla u\rangle\;d\mathcal{M}dt\\
+ &\int_0^T\int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}}a(x)g(u_t)\psi\langle\nabla f,\nabla u\rangle\;d\mathcal{M}dt\\
= &\;\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\partial\Omega^*}\langle\nabla f,\nu\rangle[u_t^2-|\nabla u|^2-u^2]\;d\Gamma dt + \int_0^T\int_{\partial\Omega^*}\partial_\nu u\langle\nabla f,\nabla u\rangle\;d\Gamma dt. \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

Substituindo (2.35) em (2.34), resulta que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Omega^*} (\frac{\Delta f}{2} - \alpha) u_t^2 + \nabla^2 f(\nabla u, \nabla u) \ + (\alpha - \frac{\Delta f}{2}) |\nabla u|^2 \ d\mathcal{M} dt \\
= \ & \int_0^T \int_{\Omega^*} (\frac{\Delta f}{2} - \alpha) u^2 \ d\mathcal{M} dt - \left[\int_{\Omega^*} u_t \langle \nabla f, \nabla u \rangle \ d\mathcal{M} \right]_0^T - \left[\int_{\Omega^*} u_t \alpha u \ d\mathcal{M} \right]_0^T \\
- \ & \int_0^T \int_{\Omega^*} a(x) g(u_t) \alpha u - a(x) g(u_t) \langle \nabla f, \nabla u \rangle - \langle \nabla u, \nabla \alpha \rangle u \ d\mathcal{M} dt \\
+ \ & \left[\int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} u_t \psi \langle \nabla u, \nabla f \rangle d\mathcal{M} \right]_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} \psi \Delta f [u_t^2 - |\nabla u|^2 - u^2] \ d\mathcal{M} dt \\
+ \ & \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} \langle \nabla f, \nabla \psi \rangle [u_t^2 - |\nabla u|^2 - u^2] \ d\mathcal{M} dt \\
+ \ & \int_0^T \int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} \psi \nabla^2 f(\nabla u, \nabla u) \ d\mathcal{M} dt + \int_0^T \int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle \langle \nabla f, \nabla u \rangle \ d\mathcal{M} dt \\
+ \ & \int_0^T \int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} a(x) g(u_t) \psi \langle \nabla f, \nabla u \rangle \ d\mathcal{M} dt + \int_0^T \int_{\partial \Omega^*} \partial_\nu u \ \alpha \ u \ d\Gamma dt.
\end{aligned} \tag{2.36}
$$

Observação 2.2.4. *Este é o preciso momento em que as propriedades da função f são essenciais. Note que precisamos encontrar um subconjunto $V \subset \overline{\Omega^*}$ com fronteira regular, $\partial V = \partial_1 V \cup \partial_2 V$, onde $\overline{\partial_1 V}$ intercepta $\partial \overline{\Omega^*}$ transversalmente, de modo que $med(V) \geq med(\overline{\Omega^*}) - \varepsilon$ e $med(\partial_2 V) \geq med(\partial \overline{\Omega^*}) - \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Além disso, necessitamos encontrar funções regulares $\alpha, f : \overline{\Omega^*} \longrightarrow \mathbb{R}$, com $\alpha \geq 0$ e $\nabla \alpha\big|_V \equiv 0$ tal que*

$$
C \int_0^T \int_V u_t^2 + |\nabla u|^2 \ d\mathcal{M} dt \leq \int_0^T \int_V (\frac{\Delta f}{2} - \alpha) u_t^2 + \nabla^2 f(\nabla u, \nabla u) + (\alpha - \frac{\Delta f}{2}) |\nabla u|^2 \ d\mathcal{M} dt, \tag{2.37}
$$

para alguma constante positiva C.

2.2.2 Construção da Função f

Sejam $\Omega^* \subset\subset \Omega^{**} \subset \mathcal{M}$, onde Ω^* e Ω^{**} são subconjuntos abertos, conexos e limitados com fronteiras regulares de modo que $\overline{\Omega^*}$ e $\overline{\Omega^{**}}$ são compactos. Denotamos por $K = \overline{\Omega^*}$ e $K_1 = \overline{\Omega^{**}}$.

Fixe $\epsilon > 0$. Esta seção é devotada a construção de uma função regular $f : K \to \mathbb{R}$ bem como de um subconjunto aberto $V \subset K$ com fronteira bem regular $\partial V = \partial_1 V \cup \partial_2 V$, com $\overline{\partial_1 V}$ interceptando ∂K transversalmente, de modo que $med(V) > med(K) - \epsilon$, $med(\partial_2 V) > med(\partial K) - \epsilon$ e a desigualdade (2.37) seja válida. Primeiramente vamos contruir a função localmente. Depois "colá-los". Podemos introduzir conjuntos abertos radialmente simétricos, satisfazendo algumas condições, no interior de V (e fora da região de dissipação).

Construção de uma função satisfazendo (2.37) localmente

A idéia geral da construção de uma função f satisfazendo (2.37) localmente é similar ao apresentado em [20]. Dividimos a construção em três casos: em uma vizinhança de um ponto interior de K, em um domínio radialmente simétrico e em uma vizinhança de um ponto da fronteira K.

Construção de uma função satisfazendo (2.37) em uma vizinhança de um ponto interior de K

Lema 2.2.5. *Seja $\mathcal{M}^n$ uma variedade Riemanniana n-dimensional, simplesmente conexa, munida de uma métrica $\mathbf{g}$ de classe C^2 e seja $K \subset \mathcal{M}$ um subconjunto compacto como definido anteriormente. Fixe $p \in \operatorname{int}(K)$. Então existem constantes positivas α e C, uma vizinhança V_p de p com fronteira regular ∂V_p e uma função regular $f : V_p \to \mathbb{R}$ tal que (2.37) é válida para toda solução regular u do problema (2.1).*

Demonstração:

Fixe $p \in \operatorname{int}(K)$. Começamos com uma base ortonormal $(e_1, \ldots, e_n)$ de $T_p\mathcal{M}$. Considere um sistema de coordenadas normais $(x_1, \ldots, x_n)$ em uma vizinhança $\widetilde{V}_p$ de p tal que $\partial/\partial x_i(p) = e_i(p)$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Neste sistema de coordenadas temos que $\Gamma^k_{ij}(p) = 0$, onde Γ^k_{ij} são os símbolos de Christoffel com respeito à $(x_1, \ldots, x_n)$ (Ver [27]).

O Hessiano de f com respeito ao sistema $(x_1, \ldots, x_n)$ é dada por

$$\nabla^2 f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

O Laplaciano de f é o traço do Hessiano com respeito à métrica $\mathbf{g}$. Se $\mathbf{g}_{ij}$ denota as componentes da métrica Riemanniana com respeito ao sistema $(x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{g}^{ij}$ são as componente da matriz inversa de $\mathbf{g}_{ij}$, então o Laplaciano de f é dado por

$$\Delta f = \sum_{i,j} \mathbf{g}^{ij} \nabla^2 f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

Considere a função $f : \widetilde{V}_p \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Segue imediatamente que $\Delta f(p) = n$. Além disso $\nabla^2 f(p) = \mathbf{g}(p)$, o que implica que

$$\nabla^2 f(p)(v, v) = |v|_p^2.$$

Estamos interessados em encontrar uma vizinhança $V_p \subset \widetilde{V}_p$ de p e uma constante estritamente positiva C de modo que

$$C \int_0^T \int_{V_p} \left(|\nabla u|^2 + u_t^2 \right) \, d\mathcal{M}dt \leq \int_0^T \int_{V_p} \nabla^2 f(\nabla u, \nabla u) \, d\mathcal{M}dt$$
$$+ \int_0^T \int_{V_p} \left(\alpha - \frac{\Delta f}{2} \right) |\nabla u|^2 + \left(\frac{\Delta f}{2} - \alpha \right) u_t^2 \, d\mathcal{M}dt, \tag{2.38}$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Afirmamos que, se considerarmos $\alpha = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$ e $C = 1/4$ (ou qualquer $C \in (0, 1/4]$) a desigualdade desejada é válida, o que significa que é suficiente provar que existe $V_p \subset \widetilde{V}_p$ verificando

$$\int_0^T \int_{V_p} \left[\nabla^2 f(\nabla u, \nabla u) + \left(\frac{n}{2} - \frac{3}{4} - \frac{\Delta f}{2} \right) |\nabla u|^2 \right] d\mathcal{M}dt \geq 0 \tag{2.39}$$

e

$$\int_0^T \int_{V_p} \left(\frac{\Delta f}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) u_t^2 \, d\mathcal{M}dt \geq 0. \tag{2.40}$$

De modo a provar a existência de um subconjunto $V_p \subset \widetilde{V}_p$ onde (2.39) é válida, considere κ a forma regular, bilinear e simétrica sobre $\widetilde{V}_p$ definida como

$$\kappa(X, Y) = \nabla^2 f(X, Y) + \left(\frac{n}{2} - \frac{3}{4} - \frac{\Delta f}{2} \right) \mathbf{g}(X, Y)$$

onde X e Y são campos de vetores sobre $\widetilde{V}_p$. É evidente que esta é uma forma bilinear positiva definida em p, uma vez que $\nabla^2 f(p)(X, Y) = \mathbf{g}(p)(X, Y)$ e

$$\kappa(p)(X, Y) = \frac{1}{4} \mathbf{g}(p)(X, Y).$$

Portanto, existe uma vizinhança $\widehat{V}_p$ tal que κ é positiva definida e

$$\int_0^T \int_{\widehat{V}_p} \nabla^2 f(\nabla u, \nabla u) + \left(\frac{n}{2} - \frac{3}{4} - \frac{\Delta f}{2} \right) |\nabla u|^2 \, d\mathcal{M}dt \geq 0.$$

Para provar a existência de uma vizinhança $V_p \subset \widetilde{V}_p$ de modo que (2.40) é válida, é suficiente notar que em p temos

$$\left(\frac{\Delta f(p)}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

e a existência de $V_p \subset \widetilde{V}_p$ tal que (2.40) é válida, é imediata. Portanto está provada a existência de uma vizinhança de p, $V_p \subset \widetilde{V}_p$ tal que (2.38) é válida.

□

Agora vamos considerar subconjuntos radialmente simétricos de K. Dizemos que um conjunto aberto $V \subset K$ é radialmente simétrico com respeito ao ponto $p \in V$ se a expressão da métrica em coordenadas polares $(r, \theta) = (r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1})$ centrada em p é dada por $ds^2 = dr^2 + Q^2(r) d\theta^2$.

Lema 2.2.6. *Seja $\mathcal{M}^n$ uma variedade Riemanniana n-dimensional, simplesmente conexa, munida de uma métrica $\mathbf{g}$ de classe C^2 e seja $K \subset \mathcal{M}$ um subconjunto compacto como definido anteriormente. Seja $\tilde{V} \subset int(K)$ um subconjunto aberto e radialmente simétrico com respeito à $p \in \tilde{V}$. Então existem constantes positivas α e C, um subconjunto $V \subset \tilde{V}$, precisamente definido, e uma função $f \in C^\infty(V)$ tal que (2.37) é válida para toda solução regular u do problema (2.1).*

Demonstração:

Estamos interessados em encontrar uma função diferenciável radialmente simétrica $f : V \to \mathbb{R}$ com respeito à p, de modo que o Hessiano de f seja proporcional à métrica Riemanniana. Fazendo alguns cálculos em um sistema de coordenadas polares centrado em p, temos que

$$\nabla^2 f\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}, \tag{2.41}$$

$$\nabla^2 f\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) = 0,$$

$$\nabla^2 f\left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j}\right) = 0,$$

se $i \neq j$ and

$$\nabla^2 f\left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_i}\right) = f'(r)\, Q(r)\, Q'(r). \tag{2.42}$$

Seja $F = f'$. A fim de que $\nabla^2 f$ seja proporcional à métrica Riemanniana, comparamos (2.41) e (2.42) e obtemos

$$\frac{F'}{F} = \frac{Q'}{Q},$$

que pode ser solucionado fazendo $F = Q$. Agora estamos interessados em variedades Riemannianas $\mathcal{M}$ tal que

$$\begin{aligned} C\int_0^T \int_V \left(|\nabla u|^2 + u_t^2\right) d\mathcal{M}dt &\le \int_0^T \int_V \nabla^2 f(\nabla u, \nabla u)\, d\mathcal{M}dt \\ + \quad \int_0^T \int_V \left(\alpha - \frac{\Delta f}{2}\right) |\nabla u|^2 &+ \left(\frac{\Delta f}{2} - \alpha\right) u_t^2\, d\mathcal{M}dt \end{aligned} \tag{2.43}$$

seja válida para algum $\alpha, C \in \mathbb{R}$. Por isso, é suficiente provar que

$$\left(1 - \frac{n}{2}\right) Q'(r) + \alpha - C \ge 0 \tag{2.44}$$

e

$$\frac{n}{2} Q'(r) - \alpha - C \ge 0 \tag{2.45}$$

em V. Devido à (2.44), (2.45) e $Q'(0) = 1$, devemos ter

$$\alpha \ge C + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \tag{2.46}$$

e

$$\alpha \leq \frac{n}{2} - C. \tag{2.47}$$

Combinando (2.46) e (2.47) temos

$$C \in (0, 1/2] \text{ e } \alpha \in [n/2 - 1 + C, n/2 - C]. \tag{2.48}$$

Fazendo C e α como em (2.48) obtemos que (2.37) é satisfeita em algum conjunto aberto tal que

$$Q'(r) \in \left[\frac{2}{n}(\alpha + C), \frac{\alpha - C}{\frac{n}{2} - 1}\right] \tag{2.49}$$

(se $n = 2$, $Q'(r)$ não precisa satisfazer nenhuma limitação superior).

□

Construção de uma função satisfazendo (2.37) em uma vizinhança de um ponto da fronteira de K

Lema 2.2.7. *Seja $\mathcal{M}^n$ uma variedade Riemanniana n-dimensional, simplesmente conexa, munida de uma métrica $\mathbf{g}$ de classe C^2 e seja $K \subset \mathcal{M}$ um subconjunto compacto como definido anteriormente. Fixe $p \in \partial K$. Então existem constantes positivas α e C, uma vizinhança V_p de p, com fronteira regular $\overline{\partial_1 V_p}$ que intercepta ∂K transversalmente, e uma função regular $f : V_p \to \mathbb{R}$ tal que (2.37) é válida para toda solução regular u do problema (2.1).*

Demonstração:

Sejam $p \in \partial K$ e $K_1 \subset \mathcal{M}$ um subconjunto compacto como definido anteriormente, de modo que $K \subset\subset K_1$. Seguiremos uma construção semelhante aquela feita anteriormente.

Fixe uma base ortonormal $(e_1, \ldots, e_n)$ de $T_p\,(int(K_1))$ tal que o subespaço $T_p\partial K \subset T_p(int(K_1))$ seja gerado por $\{e_2, \ldots, e_n\}$ e e_1 "aponta para dentro"de K. Considere um sistema de coordenadas normais $(x_1, \ldots, x_n)$ em uma vizinhança $\widetilde{V}_p \subset K_1$ de p de modo que $\partial/\partial x_i(p) = e_i(p)$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Considere a função $f : \widetilde{V}_p \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x_1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Desta forma temos que $\Delta f(p) = n$, $\langle \nabla f(p), \nu(p) \rangle = -1$ e $\nabla^2 f(p) = \mathbf{g}(p)$. Mais ainda pelos mesmos argumentos usados no Lemma 2.2.5, podemos encontrar uma vizinhança tal que (2.37) é satisfeita. Finalmente, podemos restringir ainda mais a vizinhança a uma vizinhança $\widehat{V}_p \subset K_1$ de modo que $V_p := \widehat{V}_p \cap K$ tenha fronteira, $\overline{\partial_1 V_p}$, regular e intercepta ∂K transversalmente. □

Uma função que satisfaz a desigualdade (2.37) em um amplo domínio

O principal objetivo desta subseção é provar o seguinte teorema:

Teorema 2.2.8. *Seja $\mathcal{M}^n$ uma variedade Riemanniana n-dimensional, simplesmente conexa, munida de uma métrica* $\mathbf{g}$ *de classe C^2 e seja $K \subset \mathcal{M}$ um subconjunto compacto como definido anteriormente. Fixe $\epsilon > 0$. Então existe um subconjunto aberto $V \subset K$ e funções regulares $\alpha, f : K \to \mathbb{R}$ tal que $med(V) \geq med(K) - \epsilon$, $med(V \cap \partial K) \geq med(\partial K) - \epsilon$, $\alpha \geq 0$, $\nabla\alpha\big|_V \equiv 0$ e*

$$C\int_0^T\int_V \left[u_t^2 + |\nabla u|^2\right] dMdt \leq \int_0^T\int_V \left(\frac{\Delta f}{2} - \alpha\right) u_t^2\, d\mathcal{M}dt$$
$$+ \int_0^T\int_V \left[\nabla^2 f(\nabla u, \nabla u) + \left(\alpha - \frac{\Delta f}{2}\right)|\nabla u|^2\right] d\mathcal{M}dt,$$

para alguma constante positiva C.

Mais ainda, se K contém subconjuntos radialmente simétricos, então podemos escolher V de modo que uma parte precisa destes subconjuntos radialmente simétricos esteja contida em V.

Precisamos provar alguns resultado preliminares. O seguinte lema é clássico e podem ser encontrado em [58].

Lema 2.2.9. *Seja $\mathcal{M}$ um espaço topológico localmente compacto, Hausdorff, possuindo base enumerável. Então existe uma sequência crescente de conjuntos abertos $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que:*

1. $\mathcal{M} = \cup_{i=1}^{\infty} V_i$.
2. $\bar{V}_i \subset V_{i+1}$.
3. $\bar{V}_i$ *é compacto.*

Dada uma variedade Riemanniana $\mathcal{M}$, eventualmente com bordo, o raio de injetividade $\mathrm{inj}(V)$ de um subconjunto $V \subset\subset \mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ é dado por $\inf_{x\in V} \mathrm{inj}(x)$, onde $\mathrm{inj}(x)$ é o raio de injetividade de x em $\mathcal{M}$.

Seja $V \subset\subset int(K)$, um subconjunto aberto. Queremos definir uma sucessão regularizante $f_\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ de uma função integrável $f : K \to \mathbb{R}$. A função de truncamente $\eta : V \to \mathbb{R}$ é definida de modo similar como no caso Euclidiano:

$$\widehat{\eta}(x,y,\varepsilon) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\left(\frac{\mathrm{dist}(x,y)}{\varepsilon}\right)^2 - 1}\right), & \text{se } \mathrm{dist}(x,y) < \varepsilon < \mathrm{inj}(V) \\ 0, & \text{se } \mathrm{dist}(x,y) \geq \varepsilon. \end{cases}$$

A função $\widehat{\eta}$ é de classe C^∞. Normalizando $\widehat{\eta}$ obtemos

$$\eta(x,y,\varepsilon) = \frac{\widehat{\eta}(x,y,\varepsilon)}{\int_{\mathcal{M}} \widehat{\eta}(x,y,\varepsilon)\, d\mathcal{M}(y)}.$$

Note que η também é regular. Definimos a sucessão regularizante $f_\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ por

$$f_\varepsilon(x) = \int_K \eta(x, y, \varepsilon) f(y)\, d\mathcal{M}. \tag{2.50}$$

Lema 2.2.10. *Seja $f : K \to \mathbb{R}$ uma função integrável, $V \subset\subset int(K)$ um subconjunto aberto e $\varepsilon < \operatorname{inj}(V)$ um número estritamente positivo. Então a sequência regularizante $f_\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ definida por (2.50) é uma função regular.*

Demonstração:

O resultado é válido porque uma variedade Riemanniana se comporta como domínios euclidianos dentro do raio de injetividade. Uma prova completa é dada em [31].

□

Lema 2.2.11. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade Riemanniana e considere dois subconjuntos A e B tais que* $\operatorname{dist}(A, B) > 0$. *Suponha que $\bar{A}$ e $\bar{B}$ são compactos. Então existem subconjuntos abertos $O_A \supset\supset A$ e $O_B \supset\supset B$ com fronteira regular tal que* $\operatorname{dist}(O_A, O_B) > 0$. *Mais ainda, existe uma função (auxiliar) regular $\rho : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ tal que $\rho_{|_{O_A}} \equiv 1$, $\rho_{|_{O_B}} \equiv 0$ e $\rho(\mathcal{M}) \subset [0, 1]$.*

Demonstração:

Seja $\varepsilon \in (0, \operatorname{dist}(A, B)/3)$ tal que $A_\varepsilon := \{x \in \mathcal{M}; \operatorname{dist}(x, A) < \varepsilon\}$ e $B_\varepsilon := \{x \in \mathcal{M}; \operatorname{dist}(x, B) < \varepsilon\}$ tenham fecho compacto e raio de injetividade ε. Observe que A_ε e B_ε são subconjuntos abertos de $\mathcal{M}$.

Note que $\widehat{\rho} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\widehat{\rho}(x) = \frac{\frac{d(x,B_\varepsilon) - d(x,A_\varepsilon)}{d(x,B_\varepsilon) + d(x,A_\varepsilon)} + 1}{2}$$

é contínua, $\widehat{\rho}(x) = 1$ se $x \in A_\varepsilon$, $\widehat{\rho}(x) = 0$ se $x \in B_\varepsilon$ e $\widehat{\rho}(\mathcal{M}) \subset [0, 1]$.

Vamos construir conjuntos abertos O_A e O_B com fronteira regular de modo que $A \subset\subset O_A \subset\subset A_\varepsilon$ e $B \subset\subset O_B \subset\subset B_\varepsilon$.

Considere a sucessão regularizante $\widehat{\rho}_\varepsilon : A_\varepsilon \to \mathbb{R}$ de $\widehat{\rho}$, que é uma função regular. Note que $\widehat{\rho}_\varepsilon(x) \neq 1$ para todo $x \in \partial A_\varepsilon$. Seja $s \in (\sup_{x \in \partial A_\varepsilon} \widehat{\rho}_\varepsilon(x), 1)$ um valor regular de $\widehat{\rho}_\varepsilon$. O Teorema de Sard afirma que a imagem inversa de uma valor regular é uma hipersuperfície regular mergulahada de A_ε. Finalmente definindo $O_A := {\rho_\varepsilon}^{-1}((s, 1])$. Podemos definir O_B da mesma maneira.

Resta provar a existência de uma função (auxiliar) regular ρ. Seja $\lambda < \operatorname{dist}(O_A, O_B)$ um número positivo tal que $(\partial O_A)_\lambda := \{x \in M; \operatorname{dist}(x, \partial O_A) < \lambda\}$ é uma vizinhança tubular de $\partial O_A \subset \mathcal{M}$. Considere uma função regular não crescente $\tilde{\rho} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{cases} \tilde{\rho}(x) = 1 & \text{se} \quad x \leq 1/3; \\ \tilde{\rho}(x) = 0 & \text{se} \quad x \geq 2/3; \\ \tilde{\rho}(x) \in [0, 1] & \text{se} \quad x \in [1/3, 2/3]. \end{cases}$$

Coloque $\tilde{\rho}_\lambda(x) := \tilde{\rho}(x/\lambda)$. Defina

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in O_A; \\ 0 & \text{se} \quad x \in M \backslash (O_A \cup (\partial O_A)_\lambda); \\ \alpha_\lambda(\text{dist}(x, O_A)) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então ρ é de fato uma função (auxiliar) regular satisfazendo as propriedades desejadas. □

Lema 2.2.12. *O conjunto O_A construído no Lema 2.2.11 tem um número finito de componentes e o fecho de cada componente é uma variedade Riemanniana com bordo regular.*

Demonstração:

Denote o conjunto de componentes de O_A por $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Escolha um ponto x_λ da fronteira da componente conexa O_λ de O_A. O conjunto $\{x_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ não tem um ponto de acumulação, porque a fronteira de O_A é a imagem inversa de um ponto regular. Então $\{x_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ é um conjunto finito. Portanto O_A tem um número finito de componentes e o fecho de cada componente é uma variedade Riemanniana com bordo regular. □

Agora vamos provar o principal resultado desta subseção:

Demonstração do Teorema 2.2.8:

Primeiramente considere $K_1 \subset \mathcal{M}$ como definido anteriormente, note que $K \subset\subset K_1$. Para cada $p \in K$, escolhemos a seguintes vizinhanças $\widehat{W}_p$ de p, funções $f_p \in C^\infty(\widehat{W}_p)$ e constantes α_p e C_p:

1. Se $p \in \text{int}(K)$, então podemos escolher $\widehat{W}_p = V$, $f \in C^\infty(V)$, $\alpha_p = n/2 - 1/2$ e $C_p = 1/4$ como no Lema 2.2.5.

2. Se $p \in \text{int}(K)$ é o centro de um domínio radialmente simétrico V_p, onde não queremos a presença de efeitos dissipativos, então podemos escolher uma vizinhança radialmente simétrica $\widehat{W}_p$ que é um pouco maior que a vizinhança V_p de p, isto é, $\bar{V}_p \subset\subset \widehat{W}_p$ (podemos fazê-lo devido à flexibilidade da constante C). Além disso escolhemos a função $f_p = f$ e constantes $\alpha_p = \alpha$ e $C_p = C$ como na demonstração do Lema 2.2.6.

3. Se $p \in \partial K$, então escolhemos a vizinhança aberta $\widehat{W}_p = \widehat{V}_p \subset int(K_1)$, $f_p = C^\infty(V)$ e constantes α_p e C_p como na demonstração do Lema 2.2.7.

Em (2), devemos escolher $\widehat{W}_p$ de tal forma que $\overline{\left(\widehat{W}_x\right)} \cap \overline{\left(\widehat{W}_y\right)} = \emptyset$ para $x \neq y$.

Usando a compacidade de K, podemos escolher uma cobertura finita $\{\widehat{W}_i\}_{i=1}^k$ de K. Para $i = 1, \ldots k$, denote as respectivas funções por $f_i : \widehat{W}_i \to \mathbb{R}$, as respectivas constantes por α_i e considere $C = \min\{C_1, \ldots, C_k\}$. Escolhemos $\widehat{W}_i$ de modo que toda vizinhança dos domínios radialmente simétricos esteja na cobertura finita. Além disso, colocamos eles antes dos outros domínios, isto é, $\{\widehat{W_i}\}_{i=1}^{l}$ são as vizinhanças dos domínios radialmente simétricos.

Denote $B = \left(\bigcup_{i=1}^{k} \partial\widehat{W_i} \cup \partial K\right) \cap K$. Note que $K - B$ é um conjunto aberto contido em K. Denote os pontos de $K - B$ que estão em $\widehat{W_1}$ por W_1. Para $i = 2, \ldots, k$, denote os pontos de $K - B$ que estão em $\widehat{W_i} - \cup_{l=1}^{i-1}\widehat{W_l}$ por W_i. Observe que temos $K - B = \cup_{i=1}^{k} W_i$, onde a união é disjunta. Mais ainda, sem perda de generalidade, podemos supor que $W_i \neq \emptyset$, $i = 1, \ldots, k$. Afirmamos que W_i é um subconjunto aberto contido em K, para todo $i = 1, \ldots, k$. De fato, $K - B$ é um subconjunto aberto e pode ser escrito como uma união enumerável de componentes conexas. Cada componente conexa está completamente contida em $\widehat{W_i}$ ou não intercepta $\widehat{W_i}$. Portanto cada W_i é uma união de componentes conexas de $K - B$. Por uma questão de simplicidade, vamos continuar a escrever $f_i : W_i \to \mathbb{R}$ em vez de $f_i\big|_{W_i}$. Observe que para $i = 1, \ldots, l$, $W_i = \widehat{W_i}$ são as vizinhanças dos domínios radialmente simétricos.

Fixe $i \in \{1, \ldots, k\}$. Usando o Lema 2.2.9, podemos encontrar um conjunto aberto $\widehat{V_i} \subset\subset W_i$ de modo que $med(W_i \backslash \widehat{V_i}) < \epsilon/k$. Se W_i é uma vizinhança de um ponto da fronteira de K, então podemos supor, ainda, que $med(\partial K \cap (W_i \backslash \widehat{V_i})) < \epsilon/k$. Note que $\mathrm{dist}(\widehat{V_i}, B) = d_i > 0$ devido à compacidade de B e $\overline{\widehat{V_i}}$. Usando o Lema 2.2.11 temos que existem subconjuntos abertos $V_i \supset\supset \widehat{V_i}$ e $O_i \supset\supset K - W_i$ com fronteira regular e uma função (auxiliar) regular $\rho_i : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ tal que $\rho_{i|_{V_i}} \equiv 1$, $\rho_{i|_{O_i}} \equiv 0$ e $\rho_i(\mathcal{M}) \subset [0, 1]$. Observe que $\widehat{V_i} \subset\subset V_i \subset\subset W_i$. Além disso, se V_i é uma vizinhança de um ponto da fronteira, podemos assumir que $\overline{\partial_1 V_i}$ intercepta ∂K transversalmente. No caso de domínio radialmente simétrico, podemos supor, sem perda de generalidade, que V_i é o domínio radialmente simétrico original.

Agora, considere $\rho = \sum\limits_{i=1}^{k} \rho_i\big|_K$ e $V = \bigcup\limits_{i=1}^{k} V_i$. Podemos ver que

1. $med(K) - med(V) = \sum\limits_{i=1}^{k} med(W_i - V_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} med(W_i - \widehat{V_i}) < \epsilon$ o que implica que $med(V) > med(K) - \epsilon$;

2. Analogamente temos que $med(\partial K \cap V) > med(\partial K) - \epsilon$;

3. $\rho\big|_V \equiv 1$.

Agora estamos aptos à construir α e f. Definimos

$$f(x) = \begin{cases} f_i(x)\rho(x) & \text{se} \quad x \in W_i \\ 0 & \text{se} \quad x \in B \end{cases}$$

e

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_i\, \rho(x) & \text{if} \quad x \in W_i \\ 0 & \text{if} \quad x \in B. \end{cases}$$

Note que f é regular pois $f_i\, \rho_i$ é regular para cada $i = 1, \ldots, k$ e $f = \sum_{i=1}^{k} f_i\, \rho_i$. Da mesma forma α é regular. Usando a propriedade (3) para ρ, descrita acima, temos que α e f são regulares e satisfazem todas as condições exigidas no enunciado do teorema.

2.2.3 Controlando a Equação

Temos então provado que a Observação 2.2.4 é válida. Levando em consideração que $0 \leq \psi \leq 1$, temos, por (2.36), que

$$
\begin{aligned}
& C \int_0^T \int_{\Omega^*} u_t^2 + |\nabla u|^2 \, d\mathcal{M}dt \leq C^* \int_0^T \int_{\Omega^* \setminus V} u_t^2 + |\nabla u|^2 \, d\mathcal{M}dt \\
+ \;\; & C_2 \left| \left[\int_{\Omega^*} u_t u \, d\mathcal{M} \right]_0^T \right| + C_1 \int_0^T \int_{\Omega^*} u^2 \, d\mathcal{M}dt + C_2 \int_0^T \int_{\Omega^*} a(x)|g(u_t)||u| \, d\mathcal{M}dt \\
+ \;\; & \int_0^T \int_{\Omega^*} a(x)|g(u_t)||\nabla f||\nabla u| \, d\mathcal{M}dt + \int_0^T \int_{\Omega^* \setminus V} |\langle \nabla u, \nabla \alpha \rangle||u| \, d\mathcal{M}dt \\
+ \;\; & \left| \left[\int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} u_t \langle \nabla f, \nabla u \rangle \, d\mathcal{M} \right]_0^T \right| + C_3 \int_0^T \int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2 \, d\mathcal{M}dt \\
+ \;\; & \left| \left[\int_{\Omega^*} u_t \langle \nabla f, \nabla u \rangle \, d\mathcal{M} \right]_0^T \right| + C_4 \int_0^T \int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} |\nabla u|^2 \, d\mathcal{M}dt \\
+ \;\; & \frac{C_4}{2} \int_0^T \int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2 \, d\mathcal{M}dt + C_5 \int_0^T \int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} |\nabla u|^2 \, d\mathcal{M}dt \\
+ \;\; & \int_0^T \int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} a(x)|g(u_t)||\nabla u||\nabla f| \, d\mathcal{M}dt + C_6 \left| \int_0^T \int_{\partial \Omega^*} \partial_\nu u \; u \, d\Gamma dt \right|,
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

onde $C_1 = \max_{x \in \overline{\Omega^*}} \left| \left(\alpha - \frac{\Delta f}{2} \right)(x) \right|$, $C_2 = \max_{x \in \overline{\Omega^*}} \; \alpha(x)$, $C_3 = \max_{x \in \overline{\Omega^*}} |\Delta f(x)|$,

$C_4 = \max_{x \in \overline{\Omega^*}} (|\nabla f(x)||\nabla \psi(x)|)$, $C_5 > 0$ é tal que

$|\nabla^2 f(\nabla u, \nabla u)(x)| \leq C_5 |\nabla u(x)|^2$, $\forall \; x \in \overline{\Omega^*}$, e $C_6 = \max_{x \in \overline{\partial \Omega^*}} \; \alpha(x)$.

Somando $C\int_0^T\int_{\Omega^*} u^2\ d\mathcal{M}dt$ em ambos os lados de (2.51), concluímos que

$$
\begin{aligned}
& C\int_0^T\int_{\Omega^*} u_t^2+|\nabla u|^2+u^2\ d\mathcal{M}dt \le C^*\int_0^T\int_{\Omega^*\setminus V} u_t^2+|\nabla u|^2+|\langle\nabla u,\nabla\alpha\rangle||u|\ d\mathcal{M}dt \\
+ & \ \widetilde{C}a_0^{-1}\int_0^T\int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} a(x)u_t^2\ d\mathcal{M}dt+\widetilde{C}\int_0^T\int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}}|\nabla u|^2\ d\mathcal{M}dt+\left|\left[\int_{\Omega^*} u_t\langle\nabla f,\nabla u\rangle\ d\mathcal{M}\right]_0^T\right| \\
+ & \ \widetilde{C}\left|\left[\int_{\Omega^*} u_t u\ d\mathcal{M}\right]_0^T\right|+\widetilde{C}\int_0^T\int_{\Omega^*} u^2\ d\mathcal{M}dt+\widetilde{C}\int_0^T\int_{\Omega^*} a(x)|g(u_t)||u|\ d\mathcal{M}dt \\
+ & \ \widetilde{C}\int_0^T\int_{\Omega^*} a(x)|g(u_t)||\nabla u|\ d\mathcal{M}dt+\frac{\widetilde{C}}{2}\int_0^T\int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} u^2\ d\mathcal{M}dt \\
+ & \ \widetilde{C}\int_0^T\int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} a(x)|g(u_t)||\nabla u|\ d\mathcal{M}dt+\left|\left[\int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} u_t\langle\nabla f,\nabla u\rangle\ d\mathcal{M}\right]_0^T\right| \\
+ & \ \widetilde{C}\left|\int_0^T\int_{\partial\Omega^*}\partial_\nu u\ u\ d\Gamma dt\right|. \qquad (2.52)
\end{aligned}
$$

Em seguida vamos estimar alguns termos de (2.52), para tanto usaremos a desigualdade de Hölder bem como a desigualdade $ab\le\frac{a^2}{4\beta}+\beta b^2$, onde β é um número real positivo arbitrário.

- Estimativa para $J_1 := \int_0^T\int_{\Omega^*} a(x)|g(u_t)||u|\ d\mathcal{M}dt$.

$$
\begin{aligned}
J_1 & \le \int_0^T\left(\int_{\Omega^*} a(x)|g(u_t)|^2\ d\mathcal{M}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega^*} a(x)|u|^2\ d\mathcal{M}\right)^{\frac{1}{2}} dt \\
& \le \int_0^T\left[\frac{1}{4\beta}\int_{\Omega^*} a(x)|g(u_t)|^2\ d\mathcal{M}+\beta\int_{\Omega^*} a(x)|u|^2\ d\mathcal{M}\right] dt \\
& \le \frac{1}{4\beta}\int_0^T\int_{\Omega^*} a(x)|g(u_t)|^2\ d\mathcal{M}dt+\|a\|_\infty 2\beta\int_0^T\int_{\Omega^*}\frac{1}{2}|u|^2\ d\mathcal{M}dt \\
& \le \frac{1}{4\beta}\int_0^T\int_{\mathcal{M}} a(x)|g(u_t)|^2\ d\mathcal{M}dt+\widehat{C}\beta\int_0^T E(t)\ dt. \qquad (2.53)
\end{aligned}
$$

- Estimativa para $J_2 := \int_0^T\int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} a(x)|u_t|^2\ d\mathcal{M}dt$.

$$J_2\le\int_0^T\int_{\mathcal{M}} a(x)|u_t|^2\ d\mathcal{M}dt. \qquad (2.54)$$

- Estimativa para

$$J_3 := \int_0^T\int_{\Omega^*} a(x)|g(u_t)||\nabla u|\ d\mathcal{M}dt+\int_0^T\int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} a(x)|g(u_t)||\nabla u|\ d\mathcal{M}dt.$$

$$
\begin{aligned}
J_3 &\leq 2\int_0^T \int_{\Omega^*} a(x)|g(u_t)||\nabla u| \, d\mathcal{M}dt \\
&\leq \frac{1}{2\beta}\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)|g(u_t)|^2 \, d\mathcal{M}dt + \widehat{C}\beta \int_0^T E(t)\, dt. \qquad (2.55)
\end{aligned}
$$

• Estimativa para $J_4 := \left| \int_0^T \int_{\partial\Omega^*} \partial_\nu u \; u \; d\Gamma dt \right|$.
Fazendo $\alpha = \psi$ no Lema 2.2.3, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left[\int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} u_t \psi u \, d\mathcal{M}\right]_0^T &= \int_0^T \int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} \psi[u_t^2 - |\nabla u|^2 - u^2] \, d\mathcal{M}dt - \int_0^T \int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} \langle \nabla u, \nabla \psi\rangle u \, d\mathcal{M}dt \\
&- \int_0^T \int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} a(x) g(u_t)\psi u \, d\mathcal{M}dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega^*} \partial_\nu u \; u \; d\Gamma dt. \qquad (2.56)
\end{aligned}
$$

Então

$$
\begin{aligned}
J_4 &\leq \left| \left[\int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} u_t u \, d\mathcal{M}\right]_0^T \right| + \int_0^T \int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} u_t^2 + |\nabla u|^2 \, d\mathcal{M}dt + \int_0^T \int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} u^2 \, d\mathcal{M}dt \\
&+ \widetilde{C}\int_0^T \int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} \frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{u^2}{2} \, d\mathcal{M}dt + \int_0^T \int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} a(x)|g(u_t)||u| \, d\mathcal{M}dt. \qquad (2.57)
\end{aligned}
$$

Aplicando o mesmo procedimento empregado em (2.53), segue que

$$
\begin{aligned}
J_4 \leq &\left| \left[\int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} u_t u \, d\mathcal{M}\right]_0^T \right| + a_0^{-1}\int_0^T \int_{\Omega^*} a(x) u_t^2 \, d\mathcal{M}dt + \widehat{C}\int_0^T \int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} |\nabla u|^2 \, d\mathcal{M}dt \\
+ &\widehat{C}\int_0^T \int_{\Omega^*} u^2 \, d\mathcal{M}dt + \frac{1}{4\beta}\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)|g(u_t)|^2 \, d\mathcal{M}dt + \widehat{C}\beta\int_0^T E(t)\, dt. \quad (2.58)
\end{aligned}
$$

Portanto, por (2.52), (2.53), (2.54), (2.55) e (2.58), definindo

$$
\begin{aligned}
\chi : &= \left[\int_{\Omega^*} u_t \langle \nabla f, \nabla u\rangle \, d\mathcal{M}\right]_0^T + \left[\int_{\Omega^*} u_t u \, d\mathcal{M}\right]_0^T \\
&+ \left[\int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} u_t \langle \nabla f, \nabla u\rangle \, d\mathcal{M}\right]_0^T + \left[\int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} u_t u \, d\mathcal{M}\right]_0^T, \qquad (2.59)
\end{aligned}
$$

concluímos que

$$
\begin{aligned}
C\int_0^T\int_{\Omega^*} u_t^2+|\nabla u|^2+u^2\ d\mathcal{M}dt &\leq C'|\chi| + \frac{C'}{2}\int_0^T\int_{\Omega^*\setminus V}|\nabla u|^2+u^2\ d\mathcal{M}dt\\
+\ \ C^*\int_0^T\int_{\Omega^*\setminus V} u_t^2+|\nabla u|^2\ d\mathcal{M}dt &+\ C'\int_0^T\int_{\mathcal{M}} a(x)[|g(u_t)|^2+u_t^2]\ d\mathcal{M}dt\\
+\ \ C'\int_0^T\int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}}|\nabla u|^2\ d\mathcal{M}dt &+\ C'\int_0^T\int_{\Omega^*} u^2\ d\mathcal{M}dt + C'\beta\int_0^T E(t)\ dt, \qquad (2.60)
\end{aligned}
$$

onde $C'=C'(\|a\|_\infty, f, \psi, \alpha, a_0^{-1})$.

O próximo passo é estimar o termo $\int_0^T\int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}}|\nabla u|^2\ d\mathcal{M}dt$. Para este propósito necessitamos, novamente, construir uma função auxiliar, η_δ, definida em uma vizinhança específica de $\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}$. A construção detalhada é apresentada no apêndice deste capítulo.

Sejam $\Omega^{**}\subset\mathcal{M}$ como definido anteriormente, isto é, aberto, conexo e limitado com fronteira $\partial\Omega^{**}$ bem regular tal que $\Omega\subset\subset\Omega^*\subset\subset\Omega^{**}$ e $\tilde{\eta}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ satisfazendo

$$
\tilde{\eta}(x)=\begin{cases} 1, & se\quad x\leq 0\\ (x-1)^2, & se\quad x\in[1/2,1]\\ 0, & se\quad x>1\end{cases}
$$

e definida em $(0,1/2)$ de modo que $\tilde{\eta}$ é uma função não crescente de classe C^1. Para $\delta>0$, definimos, $\tilde{\eta}_\delta(x):=\tilde{\eta}(\frac{x}{\delta})$. Observe que existe uma constante M que não depende de δ, tal que

$$
\frac{|\tilde{\eta}'_\delta(x)|}{\tilde{\eta}_\delta(x)}\leq\frac{M}{\delta^2}\quad \text{para todo } x<\delta.
$$

Agora, seja $\delta>0$ suficientemente pequeno tal que

$$
\tilde{\omega}_\delta:=\left\{x\in\Omega^{**}\,;\,d\big(x,\partial\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}\big)<\delta\right\}
$$

esteja totalmente contido em $\Omega^{**}\setminus\overline{\Omega}$, isto é, $\tilde{\omega}_\delta$ é uma vizinhança tubular de $\partial\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}$ totalmente contida em $\Omega^{**}\setminus\overline{\Omega}$.

Definimos $\eta_\delta:\overline{\Omega^{**}}\longrightarrow\mathbb{R}$ onde

$$
\eta_\delta(x)=\begin{cases} 1, & \text{se}\quad x\in\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}\\ \tilde{\eta}_\delta(d(x,\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}})), & \text{se}\quad x\in\tilde{\omega}_\delta\\ 0, & \quad\ \ \text{caso contrário.}\end{cases}
$$

Temos que η_δ é uma função de classe C^1 definida em $\overline{\Omega^{**}}$, pois $\partial\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}$ e $\partial(\tilde{\omega}_\delta\cup\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}})$ são regulares. Observe também que

$$
\frac{|\nabla\eta_\delta(x)|^2}{\eta_\delta(x)}=\frac{|\tilde{\eta}'_\delta(d(x,\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}))|^2}{\tilde{\eta}_\delta(d(x,\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}))}\leq\frac{M}{\delta^2}, \qquad (2.61)
$$

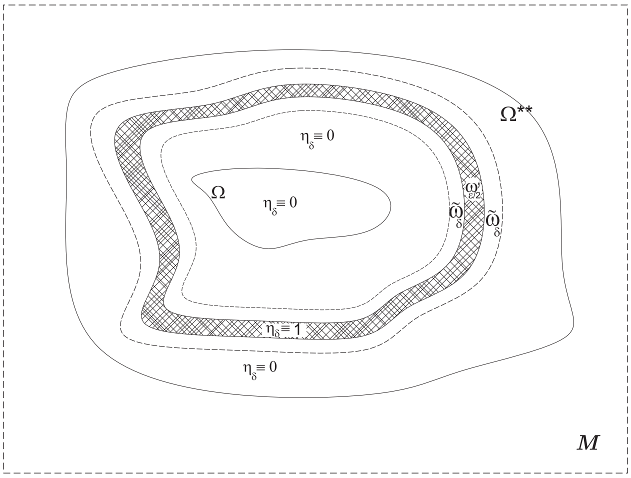

Figura 2.2: Propriedades da função η_δ.

para todo $x \in \tilde{\omega}_\delta$. Consequentemente, $\dfrac{|\nabla \eta_\delta(x)|^2}{\eta_\delta(x)} \in L^\infty(\tilde{\omega}_\delta \cup \omega'_{\frac{\varepsilon}{2}})$.

Fazendo $\eta_\delta = \alpha$ no Lema 2.2.3, obtemos

$$\begin{aligned}\left[\int_{\Omega^{**}} u_t \eta_\delta u \; d\mathcal{M}\right]_0^T &= \int_0^T \int_{\Omega^{**}} \eta_\delta [u_t^2 - |\nabla u|^2 - u^2] - \langle \nabla u, \nabla \eta_\delta \rangle u \; d\mathcal{M} dt \\ &- \int_0^T \int_{\Omega^{**}} a(x) g(u_t) \eta_\delta u \; d\mathcal{M} dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega^{**}} \partial_\nu u \; \eta_\delta u \; d\Gamma dt. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Assim, definindo $V_\delta := \tilde{\omega}_\delta \cup \omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}$, é válida a identidade

$$\begin{aligned}\left[\int_{V_\delta} u_t \eta_\delta u \; d\mathcal{M}\right]_0^T &= \int_0^T \int_{V_\delta} \eta_\delta [u_t^2 - |\nabla u|^2 - u^2] \; d\mathcal{M} dt - \int_0^T \int_{V_\delta} \langle \nabla u, \nabla \eta_\delta \rangle u \; d\mathcal{M} dt \\ &- \int_0^T \int_{V_\delta} a(x) g(u_t) \eta_\delta u \; d\mathcal{M} dt. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Novamente com o auxílio da desigualdade de Hölder e também da desigualdade $ab \leq \frac{a^2}{4\beta} + \beta b^2$, onde β é um número real positivo arbitrário, estimaremos alguns termos de (2.63).

- Estimativa para $K_1 := \int_0^T \int_{V_\delta} \eta_\delta |u_t|^2 \; d\mathcal{M} dt$.

$$|K_1| \leq a_0^{-1} \int_0^T \int_{V_\delta} a(x)|u_t|^2 \; d\mathcal{M} dt \leq a_0^{-1} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)|u_t|^2 \; d\mathcal{M} dt. \tag{2.64}$$

- Estimativa para $K_2 := \int_0^T \int_{V_\delta} a(x) g(u_t) \eta_\delta u \; d\mathcal{M} dt$.

$$|K_2| \leq \frac{C}{4\beta} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)|g(u_t)|^2 \; d\mathcal{M} dt + 2\beta \int_0^T E(t) \; dt. \tag{2.65}$$

• Estimativa para $K_3 := \int_0^T \int_{V_\delta} u\langle \nabla u, \nabla \eta_\delta\rangle \; d\mathcal{M}dt$.

$$\begin{aligned}
|K_3| &\leq \int_0^T \int_{V_\delta} |u||\nabla u||\nabla \eta_\delta| \; d\mathcal{M}dt \\
&\leq \int_0^T \int_{V_\delta} \frac{1}{2}\eta_\delta |\nabla u|^2 \; d\mathcal{M}dt + \int_0^T \int_{V_\delta} \frac{1}{2}\frac{|\nabla \eta_\delta|^2}{\eta_\delta}|u|^2 \; d\mathcal{M}dt \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^T \int_{V_\delta} \eta_\delta |\nabla u|^2 \; d\mathcal{M}dt + \frac{M}{2\delta^2}\int_0^T \int_{V_\delta} |u|^2 \; d\mathcal{M}dt. \qquad (2.66)
\end{aligned}$$

Denotando $\chi_1 := -\left[\int_{V_\delta} u_t \eta_\delta u \; d\mathcal{M}\right]_0^T$ resulta, de acordo com (2.63), (2.64), (2.65) e (2.66), que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^T \int_{V_\delta} \eta_\delta |\nabla u|^2 \; d\mathcal{M}dt \leq |\chi_1| + \tilde{C}\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) u_t^2 \; d\mathcal{M}dt \\
+ \;& \frac{\tilde{C}}{4\beta}\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)|g(u_t)|^2 \; d\mathcal{M}dt + \tilde{C}\int_0^T \int_{\Omega^{**}} |u|^2 \; d\mathcal{M}dt \\
+ \;& 2\beta \int_0^T E(t) \; dt. \qquad (2.67)
\end{aligned}$$

Note que

$$\int_0^T \int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} |\nabla u|^2 \; d\mathcal{M}dt \leq \int_0^T \int_{V_\delta} \eta_\delta |\nabla u|^2 \; d\mathcal{M}dt, \qquad (2.68)$$

logo substituindo (2.67) em (2.60), levando em consideração (2.68), agrupando alguns termos e observando que

$$\int_0^T \int_{\Omega^* \setminus V} u^2 \; d\mathcal{M}dt \leq \int_0^T \int_{\Omega^{**}} u^2 \; d\mathcal{M}dt,$$

concluímos

$$\begin{aligned}
&C\int_0^T \int_{\Omega^*} u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2 \; d\mathcal{M}dt \leq C'|\chi| + \widehat{C}|\chi_1| \\
+ \;& \widehat{C}\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)[g(u_t)|^2 + u_t^2] \; d\mathcal{M}dt + \widehat{C}\int_0^T \int_{\Omega^{**}} u^2 \; d\mathcal{M}dt \\
+ \;& C_1^* \int_0^T \int_{\Omega^* \setminus V} |\nabla u|^2 + u_t^2 \; d\mathcal{M}dt + \widehat{C}\beta \int_0^T E(t) \; dt. \qquad (2.69)
\end{aligned}$$

onde $\widehat{C} = \widehat{C}(\|a\|_\infty, a_0^{-1}, C', \frac{M}{\delta^2}, \psi, f, \alpha)$.

Vamos, na sequência, estimar o termo $\int_0^T \int_{\Omega^* \setminus V} |\nabla u|^2 \; d\mathcal{M}dt$.

Seja $\mathcal{M}_* \subset \mathcal{M}$ um subconjunto aberto, tal que $\overline{\Omega^* \setminus V} \subset \mathcal{M}_* \subset\subset \Omega^{**}$. Note que, de acordo com a Hipótese 2.0.2, $a(x) \geq a_0 > 0$ em $\mathcal{M}_*$.

Considere $\theta > 0$ suficientemente pequeno de modo que a vizinhança tubular $\widetilde{\omega}_\theta$ de ∂V, definida por

$$\widetilde{\omega}_\theta := \{x \in \Omega^{**}; d(x, \partial V) < \theta\},$$

esteja totalmente contida em $\mathcal{M}_*$.

Procedendo de modo similar a estimativa feita para o termo $\int_0^T \int_{\omega'_{\frac{\epsilon}{2}}} |\nabla u|^2 \, d\mathcal{M}dt$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Omega^*\backslash V} |\nabla u|^2 \, d\mathcal{M}dt &\leq |\chi_2| + C_2 \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) u_t^2 \, d\mathcal{M}dt \\ &+ \frac{C_2}{4\beta}\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)|g(u_t)|^2 \, d\mathcal{M}dt C_2 \int_0^T \int_{\Omega^{**}} |u|^2 \, d\mathcal{M}dt \\ &+ 2\beta \int_0^T E(t)\, dt, \end{aligned} \tag{2.70}$$

onde $\chi_2 := -\left[\int_{\omega_\theta} u_t \eta_\theta u \, d\mathcal{M}\right]_0^T$ e $\omega_\theta := \widetilde{\omega}_\theta \cup (\Omega^*\backslash V) \subset \mathcal{M}_*$.

Portanto, por (2.70) e (2.69), podemos escrever

$$\begin{aligned} C\int_0^T \int_{\Omega^*} u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2 \, d\mathcal{M}dt &\leq C'|\chi| + \widehat{C}|\chi_1| + C_3|\chi_2| + C_3 \int_0^T \int_{\Omega^{**}} u^2 \, d\mathcal{M}dt \\ &+ C_3 \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)[g(u_t)|^2 + u_t^2] \, d\mathcal{M}dt + C_3\beta \int_0^T E(t)\, dt. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Multiplicando (2.27) por C e somando com (2.71), segue a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} C\int_0^T \int_{\mathcal{M}} u_t^2 + |\nabla u|^2 + u^2 \, d\mathcal{M}dt &\leq C\left|\left[\int_{\mathcal{M}} u_t \varphi u \, d\mathcal{M}\right]_0^T\right| \\ &+ C'|\chi| + \widehat{C}|\chi_1| + C_3|\chi_2| + C_4 \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)(|g(u_t)|^2 + u_t^2)\, d\mathcal{M}dt \\ &+ C\int_0^T \int_{\mathcal{M}\backslash\Omega} a(x)|g(u_t)||u|\varphi \, d\mathcal{M}dt + C_4 \int_0^T \int_{\Omega^{**}} u^2 \, d\mathcal{M}dt \\ &+ C_3\beta \int_0^T E(t)\, dt. \end{aligned} \tag{2.72}$$

- Estimativa para o termo $\int_0^T \int_{\mathcal{M}\backslash\Omega} a(x)|g(u_t)||u|\varphi \, d\mathcal{M}dt$.

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathcal{M}\backslash\Omega} a(x)|g(u_t)||u|\varphi \, d\mathcal{M}dt &\leq \int_0^T \left(\int_{\mathcal{M}} a(x)|g(u_t)|^2 \, d\mathcal{M}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{M}} a(x)|u|^2 \, d\mathcal{M}\right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &\leq \frac{1}{4\beta}\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)|g(u_t)|^2 \, d\mathcal{M}dt + C_1\beta \int_0^T E(t)\, dt. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Assim, de acordo com (2.72), (2.73) e da definição da energia $E(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} 2C\int_0^T E(t)\ dt &\le C\left|\left[\int_{\mathcal{M}} u_t\varphi u\ d\mathcal{M}\right]_0^T\right| + C'|\chi| + \widehat{C}|\chi_1| + C_3|\chi_2| \\ &+ \tilde{C}\int_0^T\int_{\mathcal{M}} a(x)(|g(u_t)|^2 + u_t^2)\ d\mathcal{M}dt + \tilde{C}\int_0^T\int_{\Omega^{**}} u^2\ d\mathcal{M}dt \\ &+ \tilde{C}\beta\int_0^T E(t)\ dt, \end{aligned} \tag{2.74}$$

onde $\tilde{C} = \tilde{C}(\|a\|_\infty, a_0^{-1}, C, C', C_3, C_4, \frac{M}{\delta^2}, \psi, f, \alpha, \varphi)$.

Em seguida faremos uso da *identidade de energia* para estimar os termos $|\chi|$, $|\chi_1|$, $|\chi_2|$ e $\left|\left[\int_{\mathcal{M}} u_t\varphi u\ d\mathcal{M}\right]_0^T\right|$.

$$\begin{aligned} |\chi_1| &= \left|\left[\int_{V_\delta} u_t\eta_\delta u\ d\mathcal{M}\right]_0^T\right| \\ &= \left|\int_{V_\delta} u_t(T,x)\eta_\delta(x)u(T,x)\ d\mathcal{M} - \int_{V_\delta} u_t(0,x)\eta_\delta(x)u(0,x)\ d\mathcal{M}\right| \\ &\le C_1\left[\int_{\mathcal{M}} |u_t(T,x)||u(T,x)|\ d\mathcal{M} + \int_{\mathcal{M}} |u_t(0,x)||u(0,x)|\ d\mathcal{M}\right] \\ &= C_1(E(T) + E(0)) \\ &= C_1\left(2E(T) + \int_0^T\int_{\mathcal{M}} a(x)g(u_t)u_t\ d\mathcal{M}dt\right) \\ &\le 2C_1E(T) + C_2\int_0^T\int_{\mathcal{M}} a(x)[|g(u_t)|^2 + |u_t|^2]\ d\mathcal{M}dt. \end{aligned}$$

Usando os mesmos argumentos para os demais termos concluímos que

$$\begin{aligned} C'|\chi| + \widehat{C}|\chi_1| + C_3|\chi_2| + C\left|\left[\int_{\mathcal{M}} u_t\varphi u\ d\mathcal{M}\right]_0^T\right| &\le C_0E(T) \\ + \quad C_0\int_0^T\int_{\mathcal{M}} a(x)[|g(u_t)|^2 + |u_t|^2\ d\mathcal{M}dt, \end{aligned} \tag{2.75}$$

onde C_0 não depende de T.

De modo a provar a desigualdade dada em (2.17), resta estimar, de acordo com (2.74) e (2.75), o termo $\int_0^T\int_{\Omega^{**}} u^2\ d\mathcal{M}dt$. Com esta finalidade enunciamos o seguinte lema.

Lema 2.2.13. *Seja u uma solução regular do problema (2.1). Então, para todo $T > T_0$, onde T_0 é uma constante positiva suficientemente grande, existe uma constante positiva $C(T_0, E(0))$ tal que a seguinte desigualdade é satisfeita*

$$\int_0^T\int_{\Omega^{**}} u^2\ d\mathcal{M}dt \le C(T_0, E(0))\left\{\int_0^T\int_{\mathcal{M}} a(x)[|g(u_t)|^2 + |u_t|^2]\ d\mathcal{M}dt\right\}, \tag{2.76}$$

para dados iniciais $\{u_0, u_1\}$ *tais que* $\|\{u_0, u_1\}\|_{H^1(\mathcal{M})\times L^2(\mathcal{M})} \leq L$.

Demonstração: Argumentaremos por contradição. Denotaremos $u' := u_t$. Suponha que (2.76) não é verificado. Então existe uma sequência de dados iniciais $\{u_k(0), u_k'(0)\}_k$, tal que as soluções regulares correspondentes $\{u_k\}_k$ do problema (2.1), com $E_k(0)$ uniformemente limitada em k, verifica

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\int_0^T \int_{\Omega^{**}} u_k^2 \, d\mathcal{M}dt}{\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)(g^2(u_k') + u'^2_k) \, d\mathcal{M}dt} = +\infty, \tag{2.77}$$

isto é,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)(g^2(u_k') + u'^2_k) \, d\mathcal{M}dt}{\int_0^T \int_{\Omega^{**}} u_k^2 \, d\mathcal{M}dt} = 0. \tag{2.78}$$

Como a energia é uma função não crescente, é válido que $E_k(t) \leq E_k(0) \leq L$, para todo $t \geq 0$, logo

$$\|u_k\|^2_{H^1(\Sigma_T)} \leq 2LT, \text{ onde } \Sigma_T = (0,T)\times\mathcal{M}. \tag{2.79}$$

Além disso, também é válido que

$$\|u_k\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(\mathcal{M}))} \leq 2L \tag{2.80}$$

e

$$\|u'_k\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{M}))} \leq 2L. \tag{2.81}$$

Consequentemente, existe uma subsequência de $\{u_k\}$, ainda denotada da mesma forma, que verifica as seguintes convergências

$$u_k \rightharpoonup u \text{ fraco em } H^1(\Sigma_T); \tag{2.82}$$
$$u_k \overset{\star}{\rightharpoonup} u \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T;H^1(\mathcal{M})); \tag{2.83}$$
$$u_k' \overset{\star}{\rightharpoonup} u' \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{M})). \tag{2.84}$$

Devido a imersão compacta $H^1(\Omega^{**}) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega^{**})$, juntamente com (2.80), (2.81) e pelo Teorema 1.2.9, temos que

$$u_k \longrightarrow u \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\Omega^{**})). \tag{2.85}$$

Observe que u não depende de Ω^{**} de acordo com (2.82).

Neste ponto dividiremos a prova em dois casos, a saber: $u \neq 0$ e $u = 0$.

(i) $u \neq 0$

Observe que, de acordo com (2.85), temos que

$$\{u_k\} \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(\Omega^{**})).$$

Assim, por (2.78), obtemos

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^T\int_{\mathcal{M}} a(x)(g^2(u_k')+u_k'^2)\ d\mathcal{M}dt=0 \tag{2.86}$$

e então, por (2.86), concluímos que

$$\int_0^T\int_{\mathcal{M}} |a(x)g(u_k')|^2\ d\mathcal{M}dt \leq \|a\|_\infty \int_0^T\int_{\mathcal{M}} a(x)(g^2(u_k')+u_k'^2)\ d\mathcal{M}dt \longrightarrow 0, \tag{2.87}$$

quando $k\to\infty$, isto é,

$$ag(u_k') \longrightarrow 0 \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\mathcal{M})). \tag{2.88}$$

Nosso objetivo é passar o limite na sequência de problemas

$$\begin{cases} u_k'' - \Delta u_k + u_k + a(x)g(u_k') = 0 & em\ \ \mathcal{M}\times(0,\infty) \\ u_k(0)=u_{0,k}\ \ ,\ \ u_k'(0)=u_{1,k} & em\ \ \mathcal{M} \end{cases} \tag{2.89}$$

Note que, de acordo com (2.86), segue que

$$\begin{aligned} \int_0^T\int_{(\mathcal{M}\backslash\Omega)\cup\mathcal{M}_*} {u_k'}^2\ d\mathcal{M}dt &\leq a_0^{-1}\int_0^T\int_{(\mathcal{M}\backslash\Omega)\cup\mathcal{M}_*} a(x){u_k'}^2\ d\mathcal{M}dt \\ &\leq a_0^{-1}\int_0^T\int_{\mathcal{M}} a(x){u_k'}^2\ d\mathcal{M}dt \to 0, \end{aligned}$$

quando $k\to\infty$.

Assim, por (2.84), obtemos que u' satisfaz

$$u'=\begin{cases} u' & em\ \ \Omega\times(0,T) \\ 0 & em\ \ (\mathcal{M}\backslash\Omega)\cup\mathcal{M}_*\times(0,T) \end{cases} \tag{2.90}$$

Fazendo $k\to\infty$ em (2.89), concluímos que

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + u = 0 & em\ \ L^\infty(0,T;H^{-1}(\mathcal{M})) \\ u'=0 & em\ \ (\mathcal{M}\backslash\Omega)\cup\mathcal{M}_*\times(0,T) \end{cases} \tag{2.91}$$

com $u\in L^\infty(0,T;H^1(\mathcal{M}))$ e $u'\in L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{M}))$.

Fazendo $v=u'$, por (2.91), segue que

$$\begin{cases} v'' - \Delta v + v = 0 & em\ \ \mathcal{M}\times(0,T) \\ v=0 & em\ \ (\mathcal{M}\backslash\Omega)\cup\mathcal{M}_*\times(0,T) \end{cases} \tag{2.92}$$

no sentido distribucional, com $v \in L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{M}))$ e $v' \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\mathcal{M}))$.

Além disso, de acordo com o Teorema 1.3.10, temos que

$$v \in C([0,T];L^2(\mathcal{M})) \cap C^1([0,T];H^{-1}(\mathcal{M})).$$

Usando argumentos de densidade podemos aproximar o problema (2.92) por uma sequência de problemas da forma

$$\begin{cases} v''_\nu - \Delta v_\nu + v_\nu = 0 & em\ \ \mathcal{M} \times (0,T) \\ \\ v_\nu = 0 & em\ \ (M\backslash\Omega) \cup \mathcal{M}_* \times (0,T), \end{cases} \tag{2.93}$$

onde $v_\nu \in C([0,T];H^1(\mathcal{M})) \cap C^1([0,T];L^2(\mathcal{M}))$ e

$$v_\nu \longrightarrow v \text{ forte em } \ C([0,T];L^2(\mathcal{M}))$$

$$v'_\nu \longrightarrow v' \ \text{ forte em } \ C([0,T];H^{-1}(\mathcal{M})).$$

Nosso intuito é aplicar o Teorema 1.5.1 na sequência de problemas (2.93).

Considere $\Omega^* \supset\supset \Omega$ satisfazendo as condições mencionadas anteriormente, assim é válido que

$$\begin{cases} v''_\nu - \Delta v_\nu + v_\nu = 0 & em\ \ \Omega^* \times (0,T) \\ v_\nu = 0 & em\ \ (\overline{\Omega^*}\backslash\Omega) \cup \mathcal{M}_* \times (0,T), \end{cases} \tag{2.94}$$

onde $v_\nu \in C([0,T];H^1(\mathcal{M})) \cap C^1([0,T];L^2(\mathcal{M}))$.

Portanto pelo Teorema 1.5.1, obtemos que $v_\nu = 0$ em $\Omega^* \times (0,T)$, e portanto $v = 0$ in $\Omega^* \times (0,T)$, donde concluímos que $u' = 0$ em $\mathcal{M} \times (0,T)$.

Observação 2.2.14. *É importante observar como o Teorema 1.5.1 é aplicado.*

Temos que $v_\nu = 0$ em $(\overline{\Omega^*}\backslash\Omega) \cup \mathcal{M}_* \times (0,T)$, onde $\mathcal{M}_*$ é um subconjunto aberto de $\mathcal{M}$ que contém $\overline{\Omega^*}\backslash V$ e V é definido na Seção 2.2.2, a saber $V = \bigcup_{i=1}^k V_i$.

Como $(\overline{\Omega^*}\backslash V) \subset \mathcal{M}_*$, temos, para cada $i = 1,\ldots,k$, que existem abertos, conexos e limitados A_i e C_i tais que $A_i \subset C_i \subset\subset V_i$ e $v_\nu = 0$ em $(V_i\backslash A_i) \times (0,T)$, logo $\partial_\nu v_\nu = 0$ em ∂C_i, $\forall\ i = 1,\ldots,k$.

De acordo com a construção da função f, citada na Observação 2.2.4, temos que esta é estritamente convexa em V, logo em $\overline{C_i}$, $\forall\ i = 1,\ldots,k$.

Aplicando o Teorema 1.5.1, obtemos que $v_\nu = 0$ em $C_i \times (0,T)$, $\forall\ i = 1,\ldots,k$. Portanto $v_\nu = 0$ em V_i, $\forall\ i = 1,\ldots,k$, provando que $v_\nu = 0$ em $\Omega^* \times (0,T)$.

De acordo com (2.91) podemos escrever

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & in\ \ \mathcal{M} \times (0,T) \\ u' = 0 & in\ \ \mathcal{M} \times (0,T). \end{cases} \tag{2.95}$$

Como $u \in L^\infty(0,T;H^1(\mathcal{M}))$, segue que $\Delta u \in L^\infty(0,T;H^1(\mathcal{M}))$, então $u(t) \in H^1(\mathcal{M})$ e $\Delta u(t) \in H^1(\mathcal{M}) \hookrightarrow L^2(\mathcal{M})$. Multiplicando (2.95) por $u(t)$ e integrando sobre $\mathcal{M}$, deduzimos que

$$\int_{\mathcal{M}} -\Delta u(t)u(t)\ d\mathcal{M} + \int_{\mathcal{M}} |u(t)|^2\ d\mathcal{M} = 0,$$

isto é,

$$\int_{\mathcal{M}} |\nabla u(t)|^2 \, d\mathcal{M} + \int_{\mathcal{M}} |u(t)|^2 \, d\mathcal{M} = 0.$$

Portanto $u(t) = 0$ em $H^1(\mathcal{M})$ para quase todo $t \in [0, T]$, ou seja, $u = 0$, o que é uma contradição.

(ii) $u = 0$

Definimos

$$c_k := \left[\int_0^T \int_{\Omega^{**}} |u_k|^2 \, d\mathcal{M}dt \right]^{\frac{1}{2}} \text{ e } \bar{u}_k := \frac{1}{c_k} u_k, \tag{2.96}$$

assim

$$\|\bar{u}_k\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega^{**}))} = 1. \tag{2.97}$$

Considerando

$$\overline{E}_k(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} |\bar{u}_k'|^2 + |\bar{u}_k|^2 + |\nabla \bar{u}_k|^2 d\mathcal{M}, \tag{2.98}$$

segue que

$$\overline{E}_k(t) = \frac{E_k(t)}{c_k^2}. \tag{2.99}$$

De acordo com (2.74) e (2.75) é válido, para cada solução regular u do problema (2.1) e T suficientemente grande, que

$$E(T) \leq \widehat{C} \left[\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)(g^2(u') + u'^2) \, d\mathcal{M}dt + \int_0^T \int_{\Omega^{**}} u^2 \, d\mathcal{M}dt \right], \tag{2.100}$$

e pela *identidade de energia* temos que

$$\begin{aligned} E(0) &= E(T) + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u') u' \, d\mathcal{M}dt \\ &\leq E(T) + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)(g^2(u') + u'^2) \, d\mathcal{M}dt. \end{aligned}$$

Então,

$$E(t) \leq E(0) \leq \tilde{C} \left[\int_0^T \int_{\mathcal{M}} \left(a(x) g^2(u') + a(x) u'^2 \right) \, d\mathcal{M}dt + \int_0^T \int_{\Omega^{**}} |u|^2 d\mathcal{M}dt \right]$$

para todo $t \in (0, T)$, com T suficientemente grande.

Usando a desigualdade anterior para u_k e levando em consideração (2.99), obtemos

$$\overline{E}_k(t) = \frac{E_k(t)}{c_k^2} \leq \left[\frac{\int_0^T \int_{\mathcal{M}} \left(a(x) g^2(u_k') + a(x) u_k'^2 \right) d\mathcal{M}dt}{\int_0^T \int_{\Omega^{**}} |u_k|^2 d\mathcal{M}dt} + 1 \right]. \tag{2.101}$$

Logo, por (2.78) e (2.101), é garantida a existência de uma constante $L_1 > 0$ tal que

$$\overline{E}_k(t) \leq L_1 \,,\ \forall t \in [0,T],\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Procedendo de modo análogo ao caso (i), obtemos uma subsequência tal que

$$\bar{u}_k \rightharpoonup \bar{u} \text{ fraco em } H^1(\Sigma_T); \tag{2.102}$$

$$\bar{u}_k \overset{\star}{\rightharpoonup} \bar{u} \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T;H^1(\mathcal{M})); \tag{2.103}$$

$$\bar{u}'_k \overset{\star}{\rightharpoonup} \bar{u}' \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{M})), \tag{2.104}$$

e, portanto, usando argumentos de compacidade, temos que

$$\bar{u}_k \longrightarrow \bar{u} \ \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\Omega^{**})). \tag{2.105}$$

Além disso, observe que por (2.78) segue que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g^2(u'_k)\ d\mathcal{M}dt}{c_k^2} = 0 \tag{2.106}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{(\mathcal{M}\backslash\Omega)\cup\mathcal{M}_*} \bar{u}'^2_k\ d\mathcal{M}dt &\leq a_0^{-1} \int_0^T \int_{(\mathcal{M}\backslash\Omega)\cup\mathcal{M}_*} a(x)\bar{u}'^2_k\ d\mathcal{M}dt \\ &\leq a_0^{-1} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)\bar{u}'^2_k\ d\mathcal{M}dt \longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{2.107}$$

quando $k \to \infty$.

Temos que $\bar{u}_k$ satisfaz

$$\bar{u}''_k - \Delta \bar{u}_k + \bar{u}_k + a(x)\frac{g(u'_k)}{c_k} = 0 \ \text{ em } \ \mathcal{M}\times(0,T). \tag{2.108}$$

Logo fazendo $k \to \infty$ em (2.108), obtemos, de acordo com (2.102), (2.103), (2.104), (2.105), (2.106) e (2.107), que

$$\begin{cases} \bar{u}'' - \Delta\bar{u} + \bar{u} = 0 & \text{em } L^\infty(0,T;H^{-1}\mathcal{M})) \\ \\ \bar{u}' = 0 & \text{em } (\mathcal{M}\backslash\Omega)\cup\mathcal{M}_*\times(0,T). \end{cases} \tag{2.109}$$

Usando os mesmos argumentos empregados no caso (i), concluímos que $\bar{u} = 0$ em $\mathcal{M}\times(0,T)$, o que é uma contradição levando em conta (2.97) e (2.105).

Isto encerra a prova do lema.

□

Desta forma, de acordo com o Lema 2.2.13 e as estimativas (2.74) e (2.75) obtemos

$$\begin{aligned} 2C\int_0^T E(t)\ dt &\leq C_0 E(T) + \tilde{C}_1 \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)(|g(u_t)|^2 + u_t^2)\ d\mathcal{M}dt \\ &+ \tilde{C}\beta \int_0^T E(t)\ dt, \end{aligned} \tag{2.110}$$

para todo $T \geq T_0$, T_0 suficientemente grande tal que $T_0(2C - \tilde{C}\beta) - C_0 > 0$. Note que C_0 não depende de T.

Considerando β suficientemente pequeno de modo que $\tilde{C}_2 := 2C - \tilde{C}\beta > 0$ segue que

$$\tilde{C}_2 \int_0^T E(t)dt \leq C_0 E(T) + \tilde{C}_1 \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)(|g(u_t)|^2 + u_t^2)\, d\mathcal{M}dt, \tag{2.111}$$

para todo $T \geq T_0$, a qual é a desigualdade desejada dada em (2.17).

Observe ainda que, para todo $T \geq T_0$ e $t \in [0, T_0]$ temos

$$E(T) \leq E(T_0) \leq E(t) \Longrightarrow T_0 E(T) \leq \int_0^{T_0} E(t)\, dt \leq \int_0^T E(t)\, dt.$$

Então

$$\begin{aligned} \tilde{C}_2 T_0 E(T) &\leq \tilde{C}_2 \int_0^T E(t)dt \\ &\leq C_0 E(T) + \tilde{C}_1 \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)(|g(u_t)|^2 + u_t^2)\, d\mathcal{M}dt. \end{aligned} \tag{2.112}$$

Portanto

$$E(T) \leq \frac{\tilde{C}_1}{\tilde{C}_2 T_0 - C_0} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)(|g(u_t)|^2 + u_t^2)\, d\mathcal{M}dt,$$

que nos permite enunciar o seguinte resultado:

Proposição 2.2.15. *Para $T \geq T_0$, T_0 suficientemente grande, a solução u do problema (2.1) satisfaz*

$$E(T) \leq C \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \left[a(x)|u_t|^2 + a(x)|g(u_t)|^2\right] d\mathcal{M}dt, \tag{2.113}$$

onde $C = C\big(T_0, E(0), \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})}, \alpha, f, \psi, a_0, M/\delta^2\big)$.

Demonstração do Teorema 2.2.1:

Suponha inicialmente que u é uma solução regular do problema (2.1). Por hipótese, temos que $|g(s)| \geq k|s|$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

De acordo com a *identidade de energia* é válido que

$$\begin{aligned} E(0) &= E(T) + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_t) u_t\, d\mathcal{M}dt \\ &\geq E(T) + k \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) u_t^2\, d\mathcal{M}dt, \end{aligned}$$

isto é,

$$E(T) - E(0) \leq -k \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) u_t^2\, d\mathcal{M}dt. \tag{2.114}$$

Além disso, pela Proposição 2.2.15 e pela Hipótese 2.0.1, obtemos

$$\begin{aligned} E(T) &\leq C\int_0^T\int_{\mathcal{M}} a(x)(g^2(u_t)+u_t^2)\, d\mathcal{M}dt \\ &\leq C_1\int_0^T\int_{\mathcal{M}} a(x)u_t^2\, d\mathcal{M}dt, \quad \forall\, T\geq T_0. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$-E(T)\geq -C_1\int_0^T\int_{\mathcal{M}} a(x)u_t^2\, d\mathcal{M}dt, \quad \forall\, T\geq T_0. \tag{2.115}$$

Multiplicando (2.114) por C_1 e considerando (2.115) temos

$$\begin{aligned} C_1\left[E(T)-E(0)\right] &\leq -kC_1\int_0^T\int_{\mathcal{M}} a(x)u_t^2\, d\mathcal{M}dt \\ &\leq -kE(T), \end{aligned}$$

para todo $T\geq T_0$, ou seja,

$$E(T)\leq \frac{C_1}{C_1+k}E(0)=\frac{1}{1+C}E(0), \quad \forall\, T\geq T_0,$$

onde $C=\frac{k}{C_1}$.

Repetindo o processo para $2T$, encontramos

$$E(2T)\leq \frac{1}{1+C}E(T)\leq \frac{1}{(1+C)^2}E(0), \quad \forall\, T\geq T_0.$$

De modo geral,

$$E(nT)\leq \frac{1}{(1+C)^n}E(0), \quad \forall\, T\geq T_0. \tag{2.116}$$

Agora, seja $t\geq T_0$, então $t=nT_0+r$, $0\leq r<T_0$. Como a energia é uma função não crescente, obtemos

$$E(t)\leq E(t-r)=E(nT_0)\leq \frac{1}{(1+C)^n}E(0)=\frac{1}{(1+C)^{\frac{t-r}{T_0}}}E(0).$$

Considerando $C_0=e^{\frac{r}{T_0}ln(1+C)}$ e $\lambda_0=\frac{ln(1+C)}{T_0}>0$, segue o desejado para soluções regulares, isto é,

$$E(t)\leq C_0e^{-\lambda_0 t}E(0); \quad \forall t\geq T_0. \tag{2.117}$$

No que segue provaremos o decaimento exponencial para soluções fracas do problema (2.1). De fato, considere $(u_0,u_1)\in H^1(\mathcal{M})\times L^2(\mathcal{M})$, então a solução fraca u do problema (2.1) possui a seguinte regularidade

$$u\in C([0,\infty);H^1(\mathcal{M}))\cap C^1([0,\infty);L^2(\mathcal{M})).$$

Por argumentos de densidade segue que existe $(u_{0,k}, u_{1,k})_{k\in\mathbb{N}} \in H^2(\mathcal{M}) \times H^1(\mathcal{M})$, tal que

$$(u_{0,k}, u_{1,k}) \longrightarrow (u_0, u_1) \text{ em } H^1(\mathcal{M}) \times L^2(\mathcal{M}) = \mathcal{H}. \tag{2.118}$$

Seja $U_k = \begin{pmatrix} u_k \\ u_k' \end{pmatrix}$ a solução regular do problema (2.6) associada ao dado inicial $U_{0,k} = \begin{pmatrix} u_{0,k} \\ u_{1,k} \end{pmatrix}$ e seja $U = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}$ a solução fraca do problema (2.6) associada ao dado inicial $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$.

De acordo com o Teorema 1.3.8 temos que

$$\|U_m(t) - U_n(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \|U_{0,m} - U_{0,n}\|_{\mathcal{H}}, \ \forall t \geq 0.$$

Consequentemente $\{U_k\}_k$ é uma sequência de Cauchy em $C([0,T];\mathcal{H})$, para cada $T > 0$, e portanto existe $V = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in C([0,T];\mathcal{H})$ tal que

$$U_k \longrightarrow V \ \text{ em } \ C([0,T];\mathcal{H}). \tag{2.119}$$

Observe que, pela unicidade do limite em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\mathcal{M}))$, obtemos $w = v'$, mais ainda, $V \in C([0,\infty);\mathcal{H})$ e $V(0) = U_0$. Com efeito,

$$U_{0,k} = U_k(0) \longrightarrow V(0) \ \text{ em } \ \mathcal{H},$$

pela unicidade do limite em $\mathcal{H}$ e levando em conta (2.118), deduzimos que $U_0 = V(0)$.

A fim de mostrar que V é solução fraca do problema (2.6) resta provar que a desigualdade (1.3) é válida. Com isso, devido a unicidade da solução fraca, concluiremos que $U = V$. Inicialmente provaremos que toda solução forte, U_k, do problema (2.6) é solução fraca. Com efeito, pela própria definiçao de solução forte é suficiente provar que a desigualdade (1.3) é satisfeita. De fato, fazendo o produto interno em $\mathcal{H}$ do problema (2.6) com $U_k(t) - W$, onde $W \in D(A+F)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U_k(t) - W\|_{\mathcal{H}}^2 = (-(A+F)U_k(t), U_k(t) - W)_{\mathcal{H}} \\
= \ & -(A+F)U_k(t) + (A+F)W - (A+F)W, U_k(t) - W)_{\mathcal{H}} \\
= \ & (-(A+F)(U_k(t) - W), U_k(t) - W)_{\mathcal{H}} + (-(A+F)W, U_k(t) - W)_{\mathcal{H}} \\
\leq \ & (-(A+F)W, U_k(t) - W)_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Integrando a última desigualdade sobre $[s,t]$ com $0 \leq s \leq t \leq T$ segue que

$$\|U_k(t) - W\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|U_k(s) - W\| + 2\int_s^t (-(A+F)W, U_k(\tau) - W)_{\mathcal{H}} \, d\tau, \tag{2.120}$$

o que mostra o desejado.

Pela convergência dada em (2.119), concluímos que

$$\|U_k(t) - W\|_{\mathcal{H}}^2 \longrightarrow \|V(t) - W\|_{\mathcal{H}}^2, \ \forall t \geq 0. \tag{2.121}$$

Além disso, para $0 \leq s \leq t \leq T$, temos que

$$\begin{aligned}
&\left| \int_s^t (-(A+F)W, U_k(\tau) - W)_{\mathcal{H}} \ - (-(A+F)W, V(\tau) - W)_{\mathcal{H}} \ d\tau \right| \\
&\leq \int_s^t \| - (A+F)W\|_{\mathcal{H}} \|U_k(\tau) - V(\tau)\|_{\mathcal{H}} \ d\tau \\
&\leq \|(-(A+F)W\|_{\mathcal{H}}(t-s)\|U_k - V\|_{C([0,T];\mathcal{H})} \longrightarrow 0, \qquad (2.122)
\end{aligned}$$

quando $k \to \infty$.

Fazendo $k \to \infty$ na desigualdade (2.120), levando em consideração (2.121) e (2.122), segue que

$$\|V(t) - W\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|V(s) - W\| + 2\int_s^t (-(A+F)W, V(\tau) - W)_{\mathcal{H}} \ d\tau, \qquad (2.123)$$

para todo $W \in D(A+F)$ e $0 \leq s \leq t \leq T$, o que prova que V é solução fraca do problema (2.6), e portanto, pela unicidade de solução fraca, concluímos que $U = V$. Consequentemente, por (2.119), é válido que

$$U_k \longrightarrow U \ \text{ em } C([0,T];\mathcal{H}), \quad \forall \ T > 0,$$

ou seja,

$$u_k \longrightarrow u \ \text{ in } C([0,T];H^1(\mathcal{M})),$$

e

$$u_k' \longrightarrow u' \ \text{ in } C([0,T];L^2(\mathcal{M})),$$

o que implica que

$$E_k(t) \longrightarrow E(t), \quad \forall \ t \geq 0,$$

quando $k \to \infty$.

Finalmente, por (2.117), obtemos

$$E(t) \leq C_0 e^{-\lambda_0 t} E(0); \quad \forall t \geq T_0, \qquad (2.124)$$

o que mostra o decaimento exponencial para soluções fracas.

2.3 Variedades Riemannianas que Admitem Conjuntos Abertos Livres de Efeitos Dissipativos

Nesta seção vamos apresentar alguns exemplos de variedades Riemannianas, com condições geométricas específicas, de modo que se possa livrar de efeitos dissipativos regiões abertas.

2.3.1 A Variedade Riemanniana $(\mathbb{R}^n, g_\varphi)$

Considere $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, munido com a métrica radial descrita em coordenadas polares $(r, \theta) \in [0, +\infty[\times \mathbb{S}^{n-1}$, dada pela fórmula:

$$g_\varphi = \mathrm{d}r^2 + \varphi(r)^2 \mathrm{d}\theta^2, \tag{2.125}$$

onde $\mathrm{d}\theta^2$ é a métrica usual de $\mathbb{S}^{n-1}$ (esfera de raio 1) e $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ é uma função regular satisfazendo:

(i) $\varphi^{(2k)}(0) = 0$ for all $k \geq 0$;

(ii) $\varphi'(0) = 1$.

A métrica dada em (2.125) é completa.

Lema 2.3.1. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *$(\mathbb{R}^n, g_\varphi)$ tem volume finito, se e somente se,* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(r)^{n-1}\,\mathrm{d}r < +\infty$.

2. *Se $\varphi'(r) \geq c > 0$, $\forall\ r$, então $(\mathbb{R}^n, g_\varphi)$ admite uma função própria, estritamente convexa e limitada inferiormente.*

Demonstração: O volume de $(\mathbb{R}^n, g_\varphi)$ é dado por

$$c_{n-1} \int_0^{+\infty} \varphi(r)^{n-1}\,\mathrm{d}r,$$

onde c_{n-1} é o volume da esfera unitária de dimensão $n-1$. Isto prova (1).

Para provar (2), seja $f(r, \theta) = \int_0^r \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Logo temos que

$$\nabla^2 f\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \varphi'(r), \tag{2.126}$$

$$\nabla^2 f\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) = 0,$$

$$\nabla^2 f\left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j}\right) = 0,$$

se $i \neq j$, e

$$\nabla^2 f\left(\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_i}\right) = \frac{\partial f}{\partial r}\,\varphi(r)\,\varphi'(r) = \varphi^2(r)\,\varphi'(r), \tag{2.127}$$

Portanto o Hessiano de f é dado por $\nabla^2 f = \varphi'(r) g_\varphi$. Assim, se $\varphi' \geq c > 0$, obtemos que f é estritamente convexa. Nesta situação, f é própria e positiva.

$\square$

Suponha $(\mathbb{R}^n, g_\varphi)$, onde g_φ é descrita em (2.125). Além disso suponha que $\varphi'(r) \geq c > 0$, $\forall r$.

De acordo com o Lema 2.3.1, item (2), é válido que $(\mathbb{R}^n, g_\varphi)$ admite uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ própria, estritamente convexa e limitada inferirmente.

Seja $\Omega^* \subset \mathbb{R}^n$, o aberto, limitado e conexo com fronteira regular, descrito nas seções anteriores. Suponha que, em Ω^*, φ satisfaz

$$\varphi'(r) \in \left[\frac{2}{n}(\alpha + C), \frac{\alpha - C}{\frac{n}{2} - 1}\right],$$

onde $C \in (0, \frac{1}{2}]$ e $\alpha \in \left[\frac{n}{2} - 1 + C, \frac{n}{2} - C\right]$, $n > 2$. Se $n = 2$, não é necessário limitação superior para φ'.

De acordo com a demonstração do item (2), temos que $f(r, \theta) = \int_0^t \varphi(t)dt$ e, portanto, $\nabla^2 f$ é proporcional a métrica g_φ.

Portanto, pelos argumentos apresentados na demonstração do Lema 2.2.6 temos que a Observação 2.2.4 é válida em todo Ω^*, o que nos permite livrar de efeitos dissipativos todo o conjunto Ω, onde $\Omega \subset\subset \Omega^*$ é o aberto limitado e conexo definido na Hipótese 2.0.2. Observe que em $\Omega^* \backslash \Omega$ já eram considerados efeitos dissipativos, além disso o Princípio de Continuação Única dado pelo Teorema 1.5.1 pode ser aplicado diretamente em Ω^* , uma vez que existe uma função estritamente convexa sobre toda a variedade.

Observação 2.3.2. *Pelo Lema 2.3.1, item* (1) *, a variedade* $(\mathbb{R}^n, g_\varphi)$ *tem volume finito se, e somente se,* $\int_0^\infty \varphi(r)^{n-1}dr < \infty$*. Assumindo que isto ocorre, podemos considerar a dissipação não linear* g *satisfazendo*

$$ks^2 \leq g(s)s \leq Ks^2, \tag{2.128}$$

para $|s| > 1$*. Em outras palavras, não é necessário considerar a propriedade* (2.128) *para todo* s*, uma vez que, neste caso é possível provar, de modo análogo ao procedimento utilizado anteriormente, a existência de soluções, bem como estimar taxas de decaimento mais gerais empregando o método desenvolvido por Lasiecka e Tataru [38] (ver também [17]).*

2.3.2 Uma Importante Classe de Variedades Riemannianas

Seja $\Omega^* \subset \mathcal{M}$ como definido anteriormente e denote $K = \overline{\Omega^*}$.

O principal objetivo da presente seção é determinar uma importante classe de variedades Riemannianas, a saber, variedades Riemannianas $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ com curvatura seccional (sec_g) satisfazendo $k_1 \leq sec_g \leq k_2 < 0$, de tal modo que seja possível garantir a existência de subconjuntos abertos e disjuntos, V_1,...,V_l, com $\bigcup_{i=1}^l V_i \subset V$, onde $V \subset K$ pode ficar livre de efeitos dissipativos, além disso, $med(V) > med(K) - \epsilon$, $med(V \cap \partial K) > med(\partial K) - \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$. Mais precisamente, a Observação 2.2.4 ocorre para tal classe de variedades Riemannianas com $V \supset \bigcup_{i=1}^l V_i$.

Vamos determinar precisamente as regiões $V_i \subset K$ e funções $\alpha_i, f_i : V_i \to \mathbb{R}$, onde a desigualdade (2.37) é válida. Com isso, procedendo de modo análogo ao que foi feito na

Seção 2.2.2, para o caso em que K contém domínios radialmente simétricos, conclui-se o desejado.

Inicialmente temos o seguinte resultado:

Teorema 2.3.3. *Seja α, $C \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha > (n-1)C$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$. Considere $W \subset \mathcal{M}^n$ e $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ verificando*

$$\frac{2}{n}(\alpha + C)|v|_p^2 \leq \nabla^2 f(v,v) \leq \left[\frac{4}{n^2}(\alpha + C) + \frac{2}{n}(\alpha - C)\right] |v|_p^2, \ \forall \ p \in W, \ \forall \ v \in T_p\mathcal{M}.$$

Então, a seguinte desigualdade é verdadeira:

$$\begin{aligned} C\int_0^T \int_W u_t^2 + |\nabla u|^2 \ d\mathcal{M}dt \ &\leq \ \int_0^T \int_W \left(\frac{\Delta f}{2} - \alpha\right) u_t^2 + \nabla^2 f(\nabla u, \nabla u) \ d\mathcal{M}dt \\ &+ \ \int_0^T \int_W \left(\alpha - \frac{\Delta f}{2}\right) |\nabla u|^2 \ d\mathcal{M}dt, \end{aligned} \tag{2.129}$$

para toda solução regular u do problema (2.1).

Demonstração: Observe que

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n \nabla^2 f(e_i, e_i),$$

onde $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base ortonormal de $T_p\mathcal{M}$. Assim, obtemos,

$$2(\alpha + C) \leq \Delta f(p) \leq \frac{4}{n}(\alpha + C) + 2(\alpha - C), \ \forall \ p \in W.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}\Delta f(p)|\nabla u|^2 \leq \left[\frac{2}{n}(\alpha + C) + (\alpha - C)\right] |\nabla u|^2,$$

para todo $p \in W$.

Consequentemente

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(p)(\nabla u, \nabla u) + \left(\alpha - \frac{1}{2}\Delta f(p)\right) |\nabla u|^2 \geq \ &\frac{2}{n}(\alpha + C)|\nabla u|^2 + \ \alpha|\nabla u|^2 \\ - \ \left[\frac{2}{n}(\alpha + C) + (\alpha - C)\right] |\nabla u|^2 = \ &C|\nabla u|^2 \end{aligned} \tag{2.130}$$

para todo $p \in W$.

Por outro lado,

$$\left(\frac{1}{2}\Delta f(p) - \alpha\right) u_t^2 \geq (\alpha + C) - \alpha = Cu_t^2, \tag{2.131}$$

para todo $p \in W$. Integrando as desigualdades (2.130) e (2.131) sobre $W \times (0, T)$ obtemos o desejado.

□

Variedades que admitem funções regulares com limitação sobre o Hessiano

Sejam $f, h : (\mathcal{M}, \mathbf{g}) \to \mathbb{R}$ funções regulares definidas sobre uma variedade Riemanniana. Escrevemos $\nabla^2 f \geq h$ (respectivamente $\nabla^2 f \leq h$) se $\nabla^2 f(p)(v,v) \geq h(p)\mathbf{g}(p)(v,v)$, para todo $p \in \mathcal{M}$ e todo $v \in T_p\mathcal{M}$.

Gostaríamos de descrever uma classe de variedades que admitam funções regulares f que satisfazem uma desigualdade da forma:

$$A \leq \nabla^2 f \leq B, \tag{2.132}$$

para constantes precisas $B > A > 0$. Nossa motivação é a desigualdade (2.129), o que equivale a determinar constantes positivas α, C e uma função regular f tal que as desigualdades

$$\nabla^2 f \geq C + \frac{1}{2}\Delta f - \alpha \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}\Delta f - \alpha \geq C, \tag{2.133}$$

sejam satisfeitas em algum aberto $W \subset \mathcal{M}$.

Observe que, tomando o traço em (2.132), obtemos as seguintes desigualdades

$$\frac{1}{2}nA \leq \frac{1}{2}\Delta f \leq \frac{1}{2}nB, \tag{2.134}$$

onde $n = \dim(\mathcal{M})$.

Usando (2.132) e (2.134), vemos que (2.133) é satisfeita, desde que A e B satisfaçam

$$A - \tfrac{1}{2}nB \geq C - \alpha, \quad \text{e} \quad \tfrac{1}{2}nA \geq C + \alpha.$$

Igualdades nas expressões acima são obtidas fazendo

$$A = \tfrac{2}{n}(C + \alpha), \quad B = \tfrac{2}{n}\left[\tfrac{2-n}{n}C + \tfrac{2+n}{n}\alpha\right] = \tfrac{4}{n^2}(C+\alpha) - \frac{2}{n}(C - \alpha).$$

A condição $B > A$ implica que

$$C + \alpha < \tfrac{2-n}{n}C + \tfrac{2+n}{n}\alpha,$$

isto é,

$$\alpha > (n-1)C. \tag{2.135}$$

Variedades Riemannianas *Warped products*

A classe de variedades Riemannianas chamada *warped products* oferece muitos exemplos de variedades Riemannianas $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ que admitem funções regulares f satisfazendo a condição (2.132), chamada condição de ***pinching*** sobre o Hessiano. Não é difícil mostrar que uma variedade Riemanniana n-dimensional completa que admite uma função regular com Hessiano limitado inferiormente por uma constante positiva e que tem um ponto (necessariamente único e mínimo) crítico, é difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$. No entanto, necessitamos da existência de funções regulares estritamente convexas, sem a hipótese de existência de um mínimo, e desta forma não temos nenhuma obstrução topológica. Ressaltamos novamente que, para os nossos propósitos, não é necessário assumir a existência de pontos críticos para funções que satisfazem a condição de ***pinching***, (2.132), sobre o Hessiano.

Um exemplo básico de variedade Riemanniana que admite um função, definida globalmente, satisfazendo a condição de *pinching*, (2.132), é dado a seguir:

Seja $(\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{g})$, e considere a variedade *warped product* $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \widetilde{\mathcal{M}}$ munida com a seguinte métrica:

$$g = \mathrm{d}t^2 + w(t)^2\, \widetilde{g}, \tag{2.136}$$

onde t é a coordenada em $\mathbb{R}$. Pode-se considerar, de modo mais geral, as métricas em $\mathbb{R} \times \widetilde{\mathcal{M}}$ da forma $g = \alpha(t)^2\, \mathrm{d}t^2 + w(t)^2\, \widetilde{g}$. No entanto, por uma mudança de coordenadas, é possível reescrever tal métrica como $\mathrm{d}r^2 + w\big(t(r)\big)^2\, \widetilde{g}$, onde $r = \int \alpha(t)dt$.

Dada a métrica definida em (2.136), considere a função radial $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t,x) = \int_0^t w(s)\, \mathrm{d}s$. Fazendo cálculos análogos aos apresentados na demonstração do Lema 2.3.1, obtemos que $\nabla^2 f$, em um ponto p, é proporcional a métrica $\mathbf{g}$, isto é,

$$\nabla^2 f = w'(t)\, g.$$

Em particular, se $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um difeomorfismo regular satisfazendo

$$A \leq w'(t) \leq B, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

então a função f considerada satisfaz (2.132).

Também é interessante observar que, por uma caracterização devido a Cheeger e Colding [22], variedades Riemannianas que admitem funções cujo o Hessiano é múltiplo da métrica são, basicamente, as chamadas *warped products* do tipo descrito acima.

Teorema de Comparação do Hessiano

Agora vamos mudar o nosso ponto de vista, e tentar determinar regiões de uma variedade Riemanniana que são domínios de funções regulares que satisfazem a condição de *pinching* sobre o Hessiano, (2.132), utilizando condições sobre a curvatura seccional.

Lembramos que, dada uma variedade Riemanniana $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ e um ponto $p \in \mathcal{M}$, o *raio de injetividade* em p, denotado por $\mathrm{inj}(p)$ é o supremo do conjunto

$$\big\{ r > 0 : \exp_p \big|_{B_p(0,r)} \text{ é um difeomorfismo} \big\},$$

onde $B_p(0,r)$ é a bola aberta de raio r e centro 0 em $T_p\mathcal{M}$. Equivalentemente, $\mathrm{inj}(p)$ é a distância entre p e seu *cut locus*, ou lugar dos pontos mínimos. Um ponto $p \in \mathcal{M}$ é dito ser um *pólo* se $\mathrm{inj}(p) = +\infty$.

Dado $p \in \mathcal{M}$ e $v, w \in T_p\mathcal{M}$ linearmente independentes, denotaremos por $\sec_{\mathbf{g}}(v \wedge w)$ a curvatura seccional do plano gerado por v e w. Além disso, denotaremos por $\dot{\gamma}(t)$ o vetor tangente $\gamma'(t)$ à uma curva $\gamma(t)$ em $\mathcal{M}$.

Recordemos o seguinte resultado sobre o Hessiano da função distância.

Teorema 2.3.4. *Sejam $(\mathcal{M}_i^n, \boldsymbol{g}_i)$, $i = 1, 2$, variedades Riemannianas completas, e seja $\gamma_i : [0, L] \to \mathcal{M}_i$ geodésicas parametrizadas por comprimento de arco, tal que γ_i não* *intercepta o* cut locus *de* $\gamma_i(0)$. *Denote por* $r_i = \operatorname{dist}\big(\cdot, \gamma_i(0)\big)$, $i = 1, 2$. *Assuma que para todo* $t \in [0, L]$, *temos:*

$$\sec_{g_1}\big(v_1 \wedge \dot\gamma_1(t)\big) \geq \sec_{g_2}\big(v_2 \wedge \dot\gamma_2(t)\big)$$

para todo $v_i \in \dot\gamma_i(t)^{\perp}$. *Então*

$$\nabla^2 r_1(v_1, v_1) \leq \nabla^2 r_2(v_2, v_2),$$

para todo $v_i \in \dot\gamma_i(t)^{\perp}$ *e todo* $t \in [0, L]$.

Demonstração: Ver [33]. $\square$

Observação 2.3.5. *No Teorema 2.3.4,* $r_i\big(\gamma_i(t)\big) = t$ *para todo* $t \in [0, L]$, *pois* γ_i *é parametrizada por comprimento de arco, consequentemente* $\nabla^2 r_i\big(\dot\gamma_i(t), \dot\gamma_i(t)\big) = 0$ *para todo* t. *A fim de se ter uma função com limitações sobre seu Hessiano em todas as direções, deve-se considerar a função quadrado da distância. Fazendo alguns cálculos mostra-se, para toda função regular* $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, *que*

$$\nabla^2(\tfrac{1}{2}f^2)(v, v) = \boldsymbol{g}(\nabla f, v)^2 + f\nabla^2 f(v, v).$$

Em particular, como $\nabla r_i\big(\gamma_i(t)\big) = \dot\gamma_i(t)$, *então:*

$$\nabla^2(\tfrac{1}{2}r_i^2)(\dot\gamma_i, \dot\gamma_i) = 1.$$

De modo mais geral, se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $r : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ *são funções regulares, então:*

$$\nabla^2(F \circ r)(X, X) = F''(r)\boldsymbol{g}(\nabla r, X)^2 + F'(r)\,\nabla^2 r(X, X). \tag{2.137}$$

Portanto, no cálculo do Hessiano da função distância, temos que distinguir *direções radiais*, isto é, paralelas ao campo tangente $\dot\gamma(t)$, das *direções esféricas*, isto é, ortogonais à $\dot\gamma(t)$.

Variedades Rieamannias *Space forms*

Seja $g_{\mathbb{S}^n}$ a métrica usual da esfera unitária $\mathbb{S}^n$. Para $k \in \mathbb{R}$, considere a variedade $\mathcal{M}^n = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{n-1}$ munida com a métrica

$$g_k = \mathrm{d}r^2 + S_k(r)\, g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

onde S_k é definida por

$$S_k(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\big(\sqrt{k}\, r\big), & \text{se } k > 0, \\ r, & \text{se } k = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{|k|}} \sinh\big(\sqrt{|k|}\, r\big), & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

A variedade Riemanniana $(\mathcal{M}^n, g_k)$ é chamada *Space form* n-dimensional de curvatura k. Na realidade se $k > 0$, tem-se $M^n =]0, \pi[\, \times \mathbb{S}^{n-1}$.

Um cálculo explícito do Hessiano da função distância para a variedade *Space form* origina o seguinte corolário do Teorema de comparação do Hessiano.

Proposição 2.3.6 (Caso especial do Teorema de comparação do Hessiano)**.** *Dada uma variedade Riemanniana* $(\mathcal{M}^n, g)$ *e um ponto* $p \in \mathcal{M}$*, considere* $r = \operatorname{dist}(\cdot, p)$*. Se* $\sec_g \geq k$*, então, nas direções esféricas, tem-se*

$$\nabla^2 r \leq \frac{1}{n-1} H_k(r),$$

onde

$$H_k(r) = \begin{cases} (n-1)\sqrt{k} \cdot \cot\left(\sqrt{k} \cdot r\right), & \text{se } k > 0; \\ \dfrac{n-1}{r}, & \text{se } k = 0; \\ (n-1)\sqrt{-k} \cdot \coth\left(\sqrt{-k} \cdot r\right), & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Analogamente, se $\sec_g \leq k$*, então* $\nabla^2 r \geq \frac{1}{n-1} H_k(r)$ *nas direções esféricas.*

Demonstração: Ver [33]. □

Observação 2.3.7. *Pode-se considerar uma métrica mais geral em* $\mathcal{M}^n$ *da forma:*

$$\boldsymbol{g} = \mathrm{d}r^2 + \phi(r)^2\, g_{\mathbb{S}^{n-1}}, \tag{2.138}$$

onde $\phi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ *é uma função regular com* $\lim_{r \to 0} \phi(r) = 0$ *e* $\lim_{r \to 0} \phi'(r) = 1$*. Deste modo, são válidas as seguinte fórmulas para a curvatura seccional*

$$\sec_{\mathrm{rad}} = \frac{\phi''}{\phi}, \quad \sec_{\mathrm{sph}} = \frac{1 - (\phi')^2}{\phi^2}, \tag{2.139}$$

onde $\sec_{\mathrm{rad}}$ *é a curvatura seccional dos planos que contém o vetor radial, e* $\sec_{\mathrm{sph}}$ *é a curvatura dos planos perpendiculares ao vetor radial.*

Regiões livres de efeitos dissipativos - Condições de curvatura

Considere uma variedade Riemanniana $(\mathcal{M}^n, \mathbf{g})$ completa, simplesmente conexa e orientável de modo que existam constantes negativas k_1 e k_2 satisfazendo

$$k_1 \leq \sec_g \leq k_2 < 0.$$

Sabemos que todo ponto p de uma variedade que é necessariamente difeomorfa ao $\mathbb{R}^n$ é um *pólo*. Fixemos constantes positivas $0 < A < B$, para cálculos convenientes, vamos escolher $B > n - 1$ e $A < n - 1$.

Note que, impondo a condição de *pinching*, (2.132), o valor relevante é simplesmente B/A. De fato, uma função f satisfaz (2.132) se, e somente se, a função $\widetilde{f} = \frac{1}{A} f$ satisfaz $1 \leq \nabla^2 \widetilde{f} \leq B/A$. Isto implica , em particular, que não há perda de generalidade em assumir $A < \alpha < B$ para algum $\alpha > 0$.

Vamos exibir uma função regular $f : \mathcal{M} \to [0, +\infty[$ e um subconjunto aberto não vazio de $\mathcal{M}$ tal que (2.132) é válida neste subconjunto.

Fixe $p_0 \in \mathcal{M}$ definimos $r = \text{dist}(\cdot, p_0)$. Escolha $\gamma \in]A, B[$ e consideramos $f = \frac{\gamma}{2} r^2$. Usando (2.137), temos que o Hessiano de f é dado por:

$$\nabla^2 f(X, X) = \gamma g(\nabla r, X)^2 + \gamma r\, \nabla^2 r(X, X).$$

Se X é um vetor radial, então $\nabla^2 r(X, X) = 0$, e como $g(\nabla r, \nabla r) = 1$, segue que $\nabla^2 f(X, X) = \gamma g(X, X)$, isto é, a desigualdade (2.132) é sempre satisfeita para vetores radiais. Como nas direções esféricas X temos $g(\nabla r, X) = 0$, obtemos que

$$\nabla^2 f(X, X) = \gamma r\, \nabla^2 r(X, X),$$

e pelo Teorema de Comparação do Hessiano temos que

$$\gamma r \sqrt{-k_2} \coth\big(r\sqrt{-k_2}\big) \leq \nabla^2 f(X, X) \leq \gamma r \sqrt{-k_1} \coth\big(r\sqrt{-k_1}\big).$$

Portanto a desigualdade (2.132) é satisfeita na região

$$r_1 \leq r \leq r_2,$$

onde r_1 e r_2 são definidos por:

$$r_1 \sqrt{-k_2} \coth\big(r_1\sqrt{-k_2}\big) = \frac{A}{\gamma}, \quad r_2 \sqrt{-k_1} \coth\big(r_2\sqrt{-k_1}\big) = \frac{B}{\gamma}.$$

Concluímos então, que para cada $p \in K$, é possível obter um subconjunto aberto e não vazio de $\mathcal{M}$ tal que a desigualdade (2.129) é satisfeita, originando um cobertura aberta de K e pela compacidade de K segue que existe uma subcobertura finita. Os abertos $V_i's$, livres de efeitos dissipativos, citados no início desta seção são os abertos da subcobertura que possuem a seguinte propriedade:

$$\overline{V_i} \cap \overline{V_j} = \emptyset, \ \forall \ \ i \neq j.$$

2.4 Apêndice

No que segue vamos construir a função auxiliar η_δ usada para estimar o termo $\int_0^T \int_{\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}} |\nabla u|^2 \, d\mathcal{M} dt$.

Tal função é construída em uma vizinhança específica de $\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}$.

Inicialmente, sejam $\Omega^{**} \subset \mathcal{M}$ um subconjunto aberto limitado com fronteira $\partial\Omega^{**}$ regular tal que $\Omega \subset\subset \Omega^* \subset\subset \Omega^{**}$ e $\tilde{\eta} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\tilde{\eta}(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \leq 0 \\ (x-1)^2, & se \quad x \in [1/2, 1] \\ 0, & se \quad x > 1 \end{cases}$$

e definida sobre $(0, 1/2)$ de modo que $\tilde{\eta}$ seja uma função não crescente de classe C^1.

Para $\delta > 0$, definimos

$$\tilde{\eta}_\delta(x) := \tilde{\eta}\left(\frac{x}{\delta}\right) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.140}$$

Como $\tilde{\eta} \in C^1(\mathbb{R})$ e $\tilde{\eta} \neq 0$ para $x < 1$ é válido que

$$x \longmapsto \frac{[\tilde{\eta}'(x)]^2}{\tilde{\eta}(x)} \tag{2.141}$$

é contínua em $(-\infty, 1)$.

Uma vez que $\tilde{\eta}(x) = 1$ em $(-\infty, 0)$ então $\tilde{\eta}'(x) = 0$ em $(-\infty, 0)$ e, portanto

$$\frac{[\tilde{\eta}'(x)]^2}{\tilde{\eta}(x)} = \frac{0}{1} = 0 \text{ em } (-\infty, 0). \tag{2.142}$$

No intervalo compacto $[0, 1/2]$ existe $M_1 > 0$ tal que

$$\frac{[\tilde{\eta}'(x)]^2}{\tilde{\eta}(x)} \leq M_1 \quad ; \quad \forall\, x \in [0, 1/2]. \tag{2.143}$$

No intervalo $]1/2, 1[$ temos que $\tilde{\eta}(x) = (x-1)^2$ e, portanto

$$\frac{[\tilde{\eta}'(x)]^2}{\tilde{\eta}(x)} = \frac{4(x-1)^2}{(x-1)^2} = 4 \quad ; \quad \forall\, x \in (1/2, 1). \tag{2.144}$$

Fazendo $M = \max\{M_1, 4\}$ segue, de acordo com (2.142), (2.143) e (2.144), que

$$\frac{[\tilde{\eta}'(x)]^2}{\tilde{\eta}(x)} \leq M \quad ; \quad \forall\, x \in (-\infty, 1)\,. \tag{2.145}$$

Pela definição de $\tilde{\eta}_\delta$ observe que

$$\frac{[\tilde{\eta}_\delta'(x)]^2}{\tilde{\eta}_\delta(x)} = \frac{\left\{\left[\tilde{\eta}\left(\frac{x}{\delta}\right)\right]'\right\}^2}{\tilde{\eta}\left(\frac{x}{\delta}\right)} = \frac{\left[\tilde{\eta}'\left(\frac{x}{\delta}\right)\frac{1}{\delta}\right]^2}{\tilde{\eta}\left(\frac{x}{\delta}\right)} = \frac{1}{\delta^2}\frac{\left[\tilde{\eta}'\left(\frac{x}{\delta}\right)\right]^2}{\tilde{\eta}\left(\frac{x}{\delta}\right)}, \tag{2.146}$$

e levando em consideração (2.145), é válido que, se $x < \delta$ então $\dfrac{x}{\delta} < 1$ e consequentemente

$$\frac{\left[\tilde{\eta}'\left(\frac{x}{\delta}\right)\right]^2}{\tilde{\eta}\left(\frac{x}{\delta}\right)} \leq M \quad ; \quad \forall\, x < \delta. \tag{2.147}$$

Por (2.146) e (2.147) resulta que

$$\frac{[\tilde{\eta}_\delta'(x)]^2}{\tilde{\eta}_\delta(x)} \leq \frac{M}{\delta^2} \quad ; \quad \text{se } x < \delta. \tag{2.148}$$

Agora, seja $\delta > 0$ sufficientemente pequeno tal que

$$\tilde{\omega}_\delta := \left\{x \in \Omega^{**}\,;\, d\big(x, \partial\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}\big) < \delta\right\}$$

está totalmente contida em $\Omega^{**}\backslash\overline{\Omega}$, isto é, $\tilde{\omega}_\delta$ é uma vizinhança tubular de $\partial\omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}$ totalmente contida em $\Omega^{**}\backslash\overline{\Omega}$.

Definimos $\eta_\delta : \overline{\Omega^{**}} \longrightarrow \mathbb{R}$ onde

$$\eta_\delta(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in \omega'_{\frac{\varepsilon}{2}} \\ \tilde{\eta}_\delta(d(x, \omega'_{\frac{\varepsilon}{2}})), & se \quad x \in \tilde{\omega}_\delta \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, se $x \in \tilde{\omega}_\delta$ então $d(x, \omega'_{\partial\frac{\varepsilon}{2}}) < \delta$ o que implica que $d(x, \omega'_{\partial\frac{\varepsilon}{2}}) < \delta$. Consequentemente, por (2.148), obtemos

$$\frac{\left|\tilde{\eta}'_\delta(d(x, \omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}))\right|^2}{\tilde{\eta}(d(x, \omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}))} \leq \frac{M}{\delta^2} \quad ; \quad \forall\, x \in \tilde{\omega}_\delta. \tag{2.149}$$

Na sequência vamos estimar $\frac{|\nabla\eta_\delta(x)|^2}{\eta_\delta(x)}$. Antes de fazê-lo, observe que

$$\nabla\eta_\delta(x) = \nabla(\tilde{\eta}'_\delta(d(x, \omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}))) = \tilde{\eta}'_\delta(d(x, \omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}))\nabla d(x, \omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}). \tag{2.150}$$

Combinando (2.149) e (2.150), resulta que

$$\frac{|\nabla\eta_\delta(x)|^2}{\eta_\delta(x)} = \frac{|\tilde{\eta}'_\delta(d(x, \omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}))|^2}{\tilde{\eta}(d(x, \omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}))} \leq \frac{M}{\delta^2} \quad ; \quad \forall\, x \in \tilde{\omega}_\delta. \tag{2.151}$$

No caso em que $x \in \omega'_{\frac{\varepsilon}{2}}$ a última desigualdade segue trivialmente. Portanto,

$$\frac{|\nabla\eta_\delta(x)|^2}{\eta_\delta(x)} \in L^\infty(\tilde{\omega}_\delta \cup \omega'_{\frac{\varepsilon}{2}})\,.$$

CAPÍTULO 3

Equação de Schrödinger

Este capítulo tem como ojetivo estudar a existência e unicidade de soluções da equação de Schrödinger sobre domínios exteriores em $\mathbb{R}^n$ e também sobre uma variedade Riemanniana não compacta simplesmente conexa sem bordo. Além disso, mostrar o decaimento exponencial da energia em ambos os casos.

3.1 Equação de Schrödinger sobre Domínios Exteriores

Nesta seção estudaremos a existência de solução e o decaimento da energia do seguinte problema:

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + ia(x)g(u) = 0 & em\ \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ u(x,t) = 0 & em\ \partial\mathcal{M} \times (0, \infty) \\ u(0) = u_0 & em\ \mathcal{M} \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\mathcal{M}$ é um domínio exterior em $\mathbb{R}^n$, isto é, $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n \backslash \Theta$, onde Θ é um subconjunto compacto e conexo do $\mathbb{R}^n$ com fronteira regular. Além disso, vamos assumir que a fronteira de Θ é "non-trapping", ou seja, qualquer raio da ótica geométrica refletindo sobre a fronteira de Θ de acordo com as leis da ótica geométrica deixa qualquer conjunto compacto em tempo finito.

Hipótese 3.1.1. ***Hipóteses sobre a função*** $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:
i) $g(z)$ *é contínua,* $g(0) = 0$*;*
ii) $Re\{[g(z) - g(w)][\overline{z} - \overline{w}]\} \geq 0$, $\forall\ z, w \in \mathbb{C}$*;*
iii) $Im\{g(z)\overline{z}\} = 0$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$;
iv) Existem constantes positivas c_1 *e* c_2*, tais que* $c_1|z|^2 \leq |g(s)\overline{z}| \leq c_2|z|^2$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$. *Observe que por (ii) e (iii), deduzimos que* $g(z)\overline{z} = |g(z)\overline{z}|$.

Hipótese 3.1.2. ***Hipóteses sobre a função*** $a : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$:
i) $a(x) \in L^\infty(\mathcal{M})$ *é uma função não negativa;*
ii) $a(x) \geq a_0 > 0$ *em* ω*, onde* $\omega \subset \mathcal{M}$ *é definido como segue:*
Seja $R > 0$ *tal que* $\partial\mathcal{M} \subset B_R = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < R\}$*, então* $\omega := \mathcal{M} \backslash B_R$.

3.1.1 Existência e Unicidade de Soluções - Domínios Exteriores

Estudaremos a existência e unicidade de solução do problema (3.1). No que segue omitiremos algumas variáveis afim de não sobrecarregar a notação.

É importanto observar que vamos trabalhar com funções a valores complexos, de modo que, a fim de que os espaços $L^2(\mathcal{M})$, bem como, $H^m(\mathcal{M})$, $m \in \mathbb{N}$, tornem-se espaços de Hilbert reais, definimos

$$(w, v)_{L^2(\mathcal{M})} = Re \int_{\mathcal{M}} w\overline{v} dx.$$

Finalmente vamos denotar por $H_0^1(\mathcal{M})$ o espaço de Hilbert

$$H_0^1(\mathcal{M}) = \{w \in H^1(\mathcal{M}); w_{|\partial\mathcal{M}} = 0\}.$$

A energia associada ao problema (3.1) é definida por:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} |u(x,t)|^2 dx. \tag{3.2}$$

Nosso intuito é provar a existência e unicidade de soluções u para o problema (3.1). Os resultados obtidos estão enunciados no teorema a seguir.

Teorema 3.1.1. *Sob as Hipóteses 3.1.1 e 3.1.2, temos:*

1. O problema (3.1) é bem posto no espaço $H_0^1(\mathcal{M}) \cap H^2(\mathcal{M})$, isto é, para cada dado inicial $u_0 \in H_0^1(\mathcal{M}) \cap H^2(\mathcal{M})$, existe uma única solução regular de (3.1).

2. O problema (3.1) é bem posto no espaço $L^2(\mathcal{M})$, isto é, para cada dado inicial $u_0 \in L^2(\mathcal{M})$, existe uma única solução fraca de (3.1).

Demonstração:

O problema (3.1) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} u_t - i\Delta u + a(x)g(u) = 0 & em\ \ \mathcal{M} \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0 & em\ \ \partial\mathcal{M} \times (0,\infty), \\ u(0) = u_0 & em\ \ \mathcal{M}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Definimos os seguintes operadores

$$\begin{array}{rccl} A: & D(A) \subset L^2(\mathcal{M}) & \longrightarrow & L^2(\mathcal{M}) \\ & u & \longmapsto & Au = -i\Delta u \end{array}$$

e,

$$\begin{array}{rccl} B: & D(B) \subset L^2(\mathcal{M}) & \longrightarrow & L^2(\mathcal{M}) \\ & u & \longmapsto & Bu = ag(u) \end{array}$$

Então, $D(A) = H_0^1(\mathcal{M}) \cap H^2(\mathcal{M})$ e $D(B) = L^2(\mathcal{M})$.

Nosso objetivo é provar que $A+B$ é um operador maximal monótono. Inicialmente, observe que usando o Teorema de Green e o Teorema de Lax Milgram , prova-se que A é maximal monótono.

Na sequência vamos provar algumas propriedades associadas ao operador B.

(i) B leva conjuntos limitados em conjuntos limitados.

Com efeito, seja $u \in L^2(\mathcal{M})$ tal que $\|u\|^2_{L^2(\mathcal{M})} \leq R$. Assim, de acordo com a Hipótese 3.1.1 (iv) obtemos

$$\begin{aligned}\|Bu\|^2_{L^2(\mathcal{M})} &\leq \|a\|^2_{L^\infty(\mathcal{M})} \int_{\mathcal{M}} |g(u(x))|^2 dx \\ &\leq \|a\|^2_{L^\infty(\mathcal{M})} c_2^2 \int_{\mathcal{M}} |u(x)|^2 dx \leq Rc_2^2 \|a\|^2_{L^\infty(\mathcal{M})}.\end{aligned}$$

(ii) B é monótono.

De fato, seja $u_1, u_2 \in L^2(\mathcal{M})$. Então, pela Hipótese 3.1.1 (ii) obtemos

$$(Bu_1 - Bu_2, u_1 - u_2)_{L^2(\mathcal{M})} = \int_{\mathcal{M}} a(x)\ Re\{(g(u_1) - g(u_2))(\overline{u_1} - \overline{u_2})\} dx \geq 0.$$

(iii) B é hemicontínuo.

Com efeito, temos que provar que dado uma sequência arbitrária $(t_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $t_n \to 0$, então

$$\lim_{n\to\infty} (B(u + t_n v), w)_{L^2(\mathcal{M})} = (Bu, w)_{L^2(\mathcal{M})},\ \forall\ u, v, w \in L^2(\mathcal{M}).$$

Para este propósito, definimos $f_n := ag(u + t_n v)\overline{w}$. Assim,

$$\begin{aligned}|f_n(x)| &= a(x)|g(u(x) + t_n v(x))||w(x)| \\ &\leq c_2 a(x)|u(x) + t_n v(x)||w(x)| \\ &\leq c_2\|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})}|u(x)||w(x)| + c_2c_3\|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})}|v(x)||w(x)|,\end{aligned}$$

quase sempre em $\mathcal{M}$, onde c_3 é tal que $|t_n| \leq c_3$.

Como $u, v, w \in L^2(\mathcal{M})$, resulta que $f_n \in L^1(\mathcal{M})$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, se h é a função definida por

$$h(x) := c_2\|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})}|u(x)||w(x)| + c_2c_3\|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})}|v(x)||w(x)|,$$

segue que $h \in L^1(\mathcal{M})$ e $|f_n(x)| \leq h(x)$, quase sempre em $\mathcal{M}$.

Note que, devido a continuidade de g, deduzimos que

$$\lim_{n\to\infty} a(x)g(u(x) + t_n v(x))\overline{w}(x) = a(x)g(u(x))\overline{w}(x).$$

Logo, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\int_{\mathcal{M}} |a(x)g(u(x) + t_n v(x))\overline{w}(x) - a(x)g(u(x))\overline{w}(x)|dx \to 0.$$

Então,

$$|\int_{\mathcal{M}} a(x)g(u(x) + t_n v(x))\overline{w}(x) - a(x)g(u(x))\overline{w}(x)dx| \to 0,$$

e, consequentemente,

$$Re\int_{\mathcal{M}} a(x)g(u(x) + t_n v(x))\overline{w}(x)dx \to Re\int_{\mathcal{M}} a(x)g(u(x))\overline{w}(x)dx,$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty}(B(u + t_n v), w)_{L^2(\mathcal{M})} = (Bu, w)_{L^2(\mathcal{M})}.$$

Portanto A é um operador maximal monótono, B é uma aplicação monótona, leva conjunto limitado em conjunto limitado e hemicontínua. De acordo com o Teorema 1.3.7 segue que $A + B$ é maximal monótono em $L^2(\mathcal{M})$.

Assim, de acordo com o Teorema 1.3.8, para cada $u_0 \in D(A + B) = D(A) = H_0^1(\mathcal{M}) \cap H^2(\mathcal{M})$ existe, uma única aplicação $u : [0, \infty) \to L^2(\mathcal{M})$ solução regular do problema (3.1).

E, para cada $u_0 \in L^2(\mathcal{M})$ existe, pelo Teorema 1.3.9, uma única aplicação $u : [0, \infty) \to L^2(\Omega)$ solução fraca do problema (3.1).

$\square$

3.1.2 Resultado de Estabilidade - Domínios Exteriores

Antes de enunciar o principal resultado de estabilidade, enunciaremos uma identidade que será muito útil no decorrer do trabalho chamada *identidade de energia*. Seja u uma solução regular do problema (3.1). Multiplicando a equação dada em (3.1) por $\overline{u}$ e integrando por partes, obtemos:

$$E(t_2) - E(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathcal{M}} a(x)g(u(x,t))\overline{u(x,t)}dxdt, \tag{3.4}$$

para todo $t_2 > t_1 \geq 0$.

Vale ressaltar que, por argumentos de densidade, a identidade de energia dada em (3.4) continua sendo válida para soluções fracas do problema (3.1).

Teorema 3.1.2. *Seja u uma solução fraca do problema (3.1), com energia definida com em (3.2). Então, sob as Hipóteses 3.1.1 e 3.1.2 existem constantes positivas T_0, C_0 e λ_0 tais que*

$$E(t) \leq C_0 e^{-\lambda_0 t}E(0); \quad \forall\ t \geq T_0,$$

provada para dados iniciais tomados em conjuntos limitados de $L^2(\mathcal{M})$.

Nossa principal tarefa é provar a seguinte desigualdade

$$\int_0^T E(t)\ dt \leq C \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)g(u)\overline{u}dxdt,$$

onde C é uma constante positiva.

É suficiente trabalhar com soluções regulares do problema (3.1), uma vez que o decaimento exponencial da energia $E(t)$ é recuperado para soluções fracas por argumentos de densidade.

Seja u uma solução regular do problema (3.1). Observe que

$$\begin{aligned} 2\int_0^T E(t)\ dt &= \int_0^T \int_{\mathcal{M}\backslash\omega} |u(x,t)|^2 dxdt + \int_0^T \int_{\omega} |u(x,t)|^2 dxdt \\ &\leq \int_0^T \int_{\mathcal{M}\backslash\omega} |u(x,t)|^2 dxdt + a_0^{-1} \int_0^T \int_{\omega} a(x)|u(x,t)|^2 dxdt \\ &\leq \int_0^T \int_{\mathcal{M}\backslash\omega} |u(x,t)|^2 dxdt + a_0^{-1}c_1^{-1} \int_0^T \int_{\omega} a(x)g(u)\overline{u}dxdt. \quad (3.5) \end{aligned}$$

Assim, resta-nos estimar o termo $\int_0^T \int_{\mathcal{M}\backslash\omega} |u(x,t)|^2 dxdt$ em função de "termos dissipativos". Com este objetivo, enunciamos o seguinte lema:

Lema 3.1.3. *Seja u uma solução regular do problema (3.1), com dado inicial u_0 tal que $\|u_0\|_{L^2(\mathcal{M})} \leq L$, $L > 0$. Então, para todo $T > 0$, existe uma constante $C = C(T) > 0$, de modo que*

$$\int_0^T \int_{\mathcal{M}\backslash\omega} |u(x,t)|^2 dxdt \leq C \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)g(u)\overline{u}dxdt. \quad (3.6)$$

Demonstração:

Vamos argumentar por contradição. Para simplificar denotaremos $u' := u_t$ bem como $\omega' := \mathcal{M}\backslash\omega$.

Suponha que a desigualdade (3.6) não seja verdadeira. Então, existe uma sequência de dados iniciais $\{u_k^0\}_{k\in\mathbb{N}} \subset D(A)$, tal que as soluções regulares correspondentes, $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, do problema (3.1), com

$$E_k(0) = \frac{1}{2}\|u_k^0\|^2_{L^2(\mathcal{M})} \leq L,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, verificam

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\int_0^T \|u_k(t)\|^2_{L^2(\omega')}dt}{\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)g(u_k)\overline{u}_k dxdt} = +\infty, \quad (3.7)$$

ou seja,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)g(u_k)\overline{u}_k dxdt}{\int_0^T \|u_k(t)\|^2_{L^2(\omega')}dt} = 0. \quad (3.8)$$

Sabemos, de acordo com (3.4), que a energia é um função não crescente no parâmetro t, assim $E_k(t) \leq E_k(0) \leq L$, para todo $t \geq 0$. Consequentemente, obtemos

$$\|u_k\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{M}))} \leq \sqrt{2L}, \tag{3.9}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Então, existe uma subsequência de $\{u_k\}$, que ainda será denotada da mesma forma, e existe $u \in L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{M}))$ tal que

$$u_k \overset{\star}{\rightharpoonup} u \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{M})). \tag{3.10}$$

Como $\{u_k\}$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{M})) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\mathcal{M}))$, $\|u_k(t)\|_{L^2(\omega')} \leq \|u_k(t)\|_{L^2(\mathcal{M})}$, para quase todo $t \in (0,T)$ e levando em consideração (3.8), obtemos

$$\int_0^T\int_{\mathcal{M}} a(x)g(u_k)\overline{u}_k dxdt = \frac{\|u_k\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega'))}}{\|u_k\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega'))}}\int_0^T\int_{\mathcal{M}} a(x)g(u_k)\overline{u}_k dxdt \to 0, \tag{3.11}$$

quando $k \to \infty$. Logo, por (3.11), pelas Hipóteses 3.1.1 e 3.1.2, concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_\omega |u_k|^2 dxdt &\leq a_0^{-1}\int_0^T\int_\omega a(x)|u_k|^2 dxdt \leq a_0^{-1}\int_0^T\int_{\mathcal{M}} a(x)|u_k|^2 dxdt \\
&\leq a_0^{-1}c_1^{-1}\int_0^T\int_{\mathcal{M}} a(x)g(u_k)\overline{u}_k dxdt \longrightarrow 0,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

quando $k \to \infty$.

Portanto, de acordo com (3.10) e (3.75), segue, para quase todo $t \in (0,T)$, que

$$u(t) = \begin{cases} u(t) & em\ \ \omega' \\ 0 & em\ \ \omega \end{cases} \tag{3.13}$$

Neste ponto dividiremos a prova em dois casos, a saber: $u \neq 0$ e $u = 0$.

(i) $u \neq 0$.

Consideramos a sequência de problemas

$$\begin{cases} u_k' - i\Delta u_k + a(x)g(u_k) = 0 & em\ \ \mathcal{M}\times(0,\infty) \\ u_k(x,t) = 0 & em\ \ \partial\mathcal{M}\times(0,\infty) \\ u_k(0) = u_k^0 & em\ \ \mathcal{M} \end{cases} \tag{3.14}$$

Observe que por (3.11) e pelas Hipóteses 3.1.1 e 3.1.2 podemos escrever

$$\begin{aligned}
\|ag(u_k)\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{M}))} &\leq \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})}\int_0^T\int_{\mathcal{M}} a(x)|g(u_k)|^2 dxdt \\
&\leq \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})}c_2^2\int_0^T\int_{\mathcal{M}} a(x)|u_k|^2 dxdt \\
&\leq \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})}c_2^2c_1^{-1}\int_0^T\int_{\mathcal{M}} a(x)g(u_k)\overline{u}_k dxdt \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $k \to \infty$, isto é,

$$ag(u_k) \longrightarrow 0 \quad \text{forte em} \quad L^2(0,T;L^2(\mathcal{M})), \tag{3.15}$$

quando $k \to \infty$.

Nosso objetivo é fazer $k \to \infty$ na sequência de problemas (3.14). Inicialmente recordamos a seguinte cadeia de imersões:

$$L^2(0,T;H_0^1(\mathcal{M})) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\mathcal{M})) \equiv [L^2(Q)]' \hookrightarrow L^2(0,T;H^{-1}(\mathcal{M})) \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q), \tag{3.16}$$

onde $Q = \mathcal{M} \times (0,T)$. Por (3.10) temos que

$$u_k \rightharpoonup u \ \text{ fraco em} \quad L^2(0,T;L^2(\mathcal{M})). \tag{3.17}$$

Considere $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$. Multiplicando a equação do problema (3.14) por $\theta\overline{\varphi}$ e integrando sobre Q, obtemos

$$\int_0^T \int_{\mathcal{M}} u_k'(x,t)\theta(t)\overline{\varphi}(x) - i\Delta u_k(x,t)\theta(t)\overline{\varphi}(x) + a(x)g(u_k(x,t))\theta(t)\overline{\varphi}(x)dxdt = 0. \tag{3.18}$$

Integrando por partes e tomando a parte real segue que

$$\begin{aligned} - \quad & Re \int_0^T \int_{\mathcal{M}} u_k(x,t)\theta'(t)\overline{\varphi}(x)dxdt - Re \int_0^T \int_{\mathcal{M}} iu_k(x,t)\theta(t)\Delta\overline{\varphi}(x)dxdt \\ + \quad & Re \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)g(u_k(x,t))\theta(t)\overline{\varphi}(x)dxdt = 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Fazendo $k \to \infty$ em (3.19), levando em consideração (3.15) e (3.17), concluímos que

$$-\int_0^T (u(t), \varphi\ \theta'(t))_{L^2(\mathcal{M})}dt - \int_0^T (iu(t), \Delta\varphi\ \theta(t))_{L^2(\mathcal{M})}dt = 0. \tag{3.20}$$

Pela densidade de $\{\varphi\ \theta; \varphi \in D(0,T) \text{ e } \theta \in \mathcal{D}(\mathcal{M})\}$ em $\mathcal{D}(Q)$ resulta que

$$-\int_0^T (u(t), \psi'(t))_{L^2(\mathcal{M})}dt - \int_0^T (iu(t), \Delta\psi(t))_{L^2(\mathcal{M})}dt = 0, \tag{3.21}$$

para toda $\psi \in \mathcal{D}(Q)$, isto é,

$$u' - i\Delta u = 0 \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(Q), \tag{3.22}$$

onde $u \in L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{M}))$ e, por (3.13),

$$u(x,t) = 0 \ \ q.s. \ \text{ em } \ \omega \times (0,T). \tag{3.23}$$

Considere agora B_{2R}, a bola centrada na origem e raio $2R$. Definimos $\Xi := \mathcal{M}\backslash\overline{B}_{2R} \subset \mathcal{M}$ tendo em mente que $\omega = \mathcal{M}\backslash B_R$ e $\omega' = \mathcal{M}\backslash\omega$. Assim, de acordo com (3.22) e (3.23), obtemos

$$\begin{cases} u' - i\Delta u = 0 & em \ \ \mathcal{D}'(\Xi \times (0,T)) \\ u(x,t) = 0 & em \ \ (\Xi\backslash\omega') \times (0,T) \end{cases} \tag{3.24}$$

Portanto pelo Teorema 1.5.3, concluímos que $u = 0$ quase sempre em $\Xi \times (0,T)$, e, consequentemente, $u = 0$ quase sempre em $\mathcal{M} \times (0,T)$, o que é uma contradição.

(ii) $u = 0$.

Denotando
$$c_k = \|u_k\|_{L^2(0,T;L^2(\omega'))} \quad \text{e} \quad v_k = \frac{u_k}{c_k}, \tag{3.25}$$
deduzimos que
$$\|v_k\|_{L^2(0,T;L^2(\omega'))} = 1 \tag{3.26}$$

Dividindo (3.14) por c_k obtemos
$$\begin{cases} v_k' - i\Delta v_k + \frac{a(x)g(u_k)}{c_k} = 0 & em\ \mathcal{M} \times (0,\infty), \\ v_k(x,t) = 0 & em\ \partial\mathcal{M} \times (0,\infty), \\ v_k(0) = v_k^0 := \frac{u_k^0}{c_k} & em\ \mathcal{M}. \end{cases} \tag{3.27}$$

Note que
$$\begin{aligned} \frac{\int_0^T \|u_k\|^2_{L^2(\omega')} dt}{\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)g(u_k)\overline{u}_k dxdt} &= \frac{c_k^2}{c_k^2} \frac{\int_0^T \|u_k\|^2_{L^2(\omega')} dt}{\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)g(u_k)\overline{u}_k dxdt} = \frac{c_k^2 \|v_k\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega'))}}{\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)g(u_k)\overline{u}_k dxdt} \\ &= \frac{\|v_k\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega'))}}{\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)g(u_k)\frac{\overline{u}_k}{c_k^2} dxdt} \leq c_1 \frac{\|v_k\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega'))}}{\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)|v_k|^2 dxdt}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Assim, de acordo com (3.7) e (3.28), temos que
$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|v_k\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega'))}}{\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)|v_k|^2 dxdt} = +\infty, \tag{3.29}$$
e como $\|v_k\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega'))} = 1$, resulta que
$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)|v_k|^2 dxdt = 0. \tag{3.30}$$

Pelo fato de que $a(x) \geq a_0 > 0$ em ω, concluímos que
$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\omega |v_k|^2 dxdt &\leq a_0^{-1} \int_0^T \int_\omega a(x)|v_k|^2 dxdt \\ &\leq a_0^{-1} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)|v_k|^2 dxdt \longrightarrow 0, \end{aligned}$$
quando $k \to \infty$, ou seja,
$$v_k \longrightarrow 0 \quad \text{forte em} \quad L^2(0,T;L^2(\omega)), \tag{3.31}$$

quando $k \to \infty$.

Por outro lado, levando em consideração (3.5), segue que

$$2\int_0^T E_k(t)dt \leq \int_0^T \int_{\omega'} |u_k|^2 dxdt + a_0^{-1} c_1^{-1} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_k) \overline{u}_k dxdt, \tag{3.32}$$

e como $E_k(T) \leq E_k(t)$, para todo $T \geq t \geq 0$, é verdade que

$$2TE_k(T) \leq 2\int_0^T E_k(t)dt \leq \int_0^T \int_{\omega'} |u_k|^2 dxdt + a_0^{-1} c_1^{-1} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_k) \overline{u}_k dxdt.$$

Logo,

$$E_k(T) \leq C \left[\int_0^T \int_{\omega'} |u_k|^2 dxdt + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_k) \overline{u}_k dxdt \right]. \tag{3.33}$$

Fazendo uso da identidade de energia estabelecida em (3.4), encontramos

$$E_k(T) - E_k(0) = -\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_k) \overline{u}_k dxdt,$$

ou seja,

$$E_k(0) = \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_k) \overline{u}_k dxdt + E_k(T). \tag{3.34}$$

Então, por (3.33) e (3.34), concluímos que

$$E_k(0) \leq \tilde{C} \left[\int_0^T \int_{\omega'} |u_k|^2 dxdt + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_k) \overline{u}_k dxdt \right]. \tag{3.35}$$

Dividindo (3.35) por c_k^2 e tendo em mente que a energia é uma função não crescente, segue que

$$\frac{E_k(t)}{c_k^2} \leq \frac{E_k(0)}{c_k^2} \leq \tilde{C} \left[\frac{\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_k) \overline{u}_k dxdt}{c_k^2} + 1 \right], \tag{3.36}$$

para todo $t \geq 0$. De acordo com (3.8) e (3.36) garantimos a existência de uma constante $M > 0$ tal que

$$\|v_k^0\|^2_{L^2(\mathcal{M})} = \frac{\|u_k^0\|^2_{L(\mathcal{M})}}{c_k^2} = \frac{2E_k(0)}{c_k^2} \leq M, \tag{3.37}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, e, portanto,

$$\{v_k^0\} \text{ é limitada em } L^2(\mathcal{M}). \tag{3.38}$$

Como v_k é solução regular do problema (3.27), temos que v_k satisfaz a equação integral

$$v_k(t) = S(t)v_k^0 - \int_0^t S(t-s) \frac{a}{c_k} g(u_k(s)) ds, \tag{3.39}$$

onde $S(t)$ é o semigrupo gerado por $-i\Delta$.

De acordo com o Teorema 1.5.5 temos, para toda $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, que

$$\|\chi w_k\|_{L^2(0,T;H_D^1(\mathcal{M}))} \leq C_1 \|\chi f_k\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{M}))}, \tag{3.40}$$

onde

$$w_k(t) = \int_0^t S(t-s) f_k(s) ds \quad \text{e} \quad f_k(s) = \frac{a}{c_k} g(u_k(s)).$$

Além disso,

$$\|\chi S(t) v_k^0\|_{L^2(0,T;H_D^{\frac{1}{2}}(\mathcal{M}))} \leq C_2 \|\chi v_k^0\|_{L^2(\mathcal{M})}, \tag{3.41}$$

onde $H_D^s(\mathcal{M})$ é o domínio do operador $(\Delta_D + I)^{\frac{s}{2}}$. Considerando $\chi \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\chi = 1$ em $\overline{\omega'}$ e $0 \leq \chi \leq 1$ em $\mathbb{R}^n$, obtemos, de acordo com (3.40), (3.41) e observando que $H^s = H_D^s$ em limitados, que

$$\|\chi w_k\|_{L^2(0,T;H^1(\omega'))} \leq \|\chi w_k\|_{L^2(0,T;H^1(\mathcal{M}))} \leq C_1 \|\chi f_k\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{M}))} \leq C_3. \tag{3.42}$$

De acordo com (3.8), é válido que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathcal{M}} \frac{|a(x) g(u_k)|^2}{c_k^2} dxdt &\leq \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \frac{a(x)|g(u_k)|^2}{c_k^2} dxdt \\
&\leq \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})} c_2^2 \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \frac{a(x)|u_k|^2}{c_k^2} dxdt \\
&\leq \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})} c_2^2 c_1^{-1} \frac{\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_k) \overline{u}_k dxdt}{\int_0^T \int_{\omega'} |u_k|^2 dxdt} \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $k \to \infty$, isto é,

$$\frac{ag(u_k)}{c_k} \longrightarrow 0 \quad \text{forte em} \quad L^2(0,T;L^2(\mathcal{M})),$$

quando $k \to \infty$, e devido ao fato de $\chi = 1$ em ω', deduzimos que

$$\|w_k\|_{L^2(0,T;H^1(\omega'))} \leq C_3.$$

Além disso, $H^1(\omega') \hookrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\omega')$, então

$$\|w_k\|_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\omega'))} \leq C_4. \tag{3.43}$$

Finalmente, usando as propriedades de χ, considerando as desigualdades (3.41) e (3.38), concluímos que

$$\|S(t) v_k^0\|_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\omega'))} \leq C_5. \tag{3.44}$$

Então, por (3.39), (3.43) e (3.44), segue que

$$\{v_k\} \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\omega')) \tag{3.45}$$

Na sequência, vamos estimar v_k'. Como $E_k(t) \leq E_k(0)$, para todo $t \geq 0$, temos que

$$\|\Delta v_k(t)\|_{[D(A)]'} = \frac{\|\Delta u_k(t)\|_{[D(A)]'}}{c_k} \leq C_6 \frac{\|u_k(t)\|_{L^2(\mathcal{M})}}{c_k} \leq C_6 \frac{\|u_k(0)\|_{L^2(\mathcal{M})}}{c_k},$$

onde C_6 é uma constante positiva que não depende de k.

De acordo com a desigualdade anterior e levando em consideração (3.37) deduzimos que

$$\{\Delta v_k\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T,[D(A)]').$$

Como $D(A) = H_0^1(\mathcal{M}) \cap H^2(\mathcal{M})$ e

$$\|w\|_{[D(A)]'} = \sup_{\varphi \in D(A)} \frac{|\langle w, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|} \geq \sup_{\varphi \in H_0^1(\omega') \cap H^2(\omega')} \frac{|\langle w, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|} = \|w\|_{[H_0^1(\omega') \cap H^2(\omega')]'},$$

segue que

$$\{\Delta v_k\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T,[H_0^1(\omega') \cap H^2(\omega')]').$$

Portanto, por (3.27), resulta que

$$\{v_k'\} \text{ é limitada em } L^2(0,T,[H_0^1(\omega') \cap H^2(\omega')]'), \tag{3.46}$$

uma vez que

$$\left\{\frac{ag(u_k)}{c_k}\right\} \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(\omega')).$$

Agora, fazendo uso da cadeia de imersões

$$H^{\frac{1}{2}}(\omega') \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\omega') \hookrightarrow [H_0^1(\omega') \cap H^2(\omega')]',$$

resulta, de acordo com (3.45) e (3.46) e pelo Teorema de Aubin-Lions, que existe uma subsequência de $\{v_k\}$, ainda denotada da mesma forma, tal que

$$v_k \longrightarrow \tilde{v} \text{ forte em } L^2(0,T,L^2(\omega')), \tag{3.47}$$

Novamente pelo fato de a energia ser uma função não crescente, por (3.8) e (3.36), resulta que existe $v \in L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{M}))$ de modo que

$$v_k \overset{\star}{\rightharpoonup} v \quad \text{fraco estrela em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{M})), \tag{3.48}$$

e de acordo com (3.31) e (3.47) deduzimos que

$$v(t) = \begin{cases} \tilde{v}(t) & em \ \omega' = \mathcal{M} \backslash \omega \\ 0 & em \ \omega. \end{cases} \tag{3.49}$$

Assim, fazendo $k \to \infty$ em (3.27) obtemos

$$\begin{cases} v' - i\Delta v = 0 & em \ \mathcal{D}'(\mathcal{M} \times (0,T)) \\ v(x,t) = 0 & em \ \omega \times (0,T), \end{cases} \tag{3.50}$$

onde $v \in L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{M}))$. Aplicando os mesmos argumentos empregados no caso (i), juntamente com o Teorema 1.5.3 concluímos que $v = 0$ quase sempre em $\mathcal{M} \times (0,T)$, que é uma contradição, uma vez que por (3.26)

$$\|v_k\|_{L^2(0,T;L^2(\omega'))} = 1,$$

e de acordo com (3.47)

$$v_k \longrightarrow 0 \ \text{ em } \ L^2(0,T,L^2(\omega')).$$

Isto conclui a demonstração do lema. $\square$

Note que por (3.5) e pelo Lema 3.1.3, obtemos a desigualdade desejada, isto é,

$$\int_0^T E(t)\,dt \le C \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)g(u)\overline{u}dxdt,$$

onde C é uma constante positiva.

Demonstração do Teorema 3.1.2:

Seja u uma solução regular do problema (3.1). De acordo com o Lema 3.1.3, a desigualdade (3.5) e a Hipótese 3.1.1 temos que, para todo $T > 0$, existe uma constante $C = C(T) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_0^T E(t)\,dt &\le C \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)g(u)\overline{u}dxdt \\ &\le \tilde{C} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)|u|^2 dxdt. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Como a energia é uma função não crescente no parâmetro t, obtemos, para todo $T \ge T_0,\ T_0 > 0$, e $t \in [0,T_0]$ que

$$E(T) \le E(T_0) \le E(t) \Longrightarrow T_0 E(T) \le \int_0^{T_0} E(t)\,dt.$$

Por outro lado, de acordo com (3.51), podemos escrever

$$\begin{aligned} T_0 E(T) &\le \int_0^{T_0} E(t)\,dt \le C(T_0) \int_0^{T_0} \int_{\mathcal{M}} a(x)|u|^2 dxdt \\ &\le C(T_0) \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)|u|^2 dxdt. \end{aligned}$$

Assim,

$$E(T) \le C \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)|u|^2 dxdt, \tag{3.52}$$

para todo $T \ge T_0$, onde C é uma constante tal que $C = C(T_0) > 0$. Usando a identidade de energia e levando em consideração a Hipótese 3.1.1, segue que

$$E(0) = E(T) + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)g(u)\overline{u}dxdt \ge E(T) + c_1 \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)|u|^2 dxdt,$$

isto é,

$$E(T) - E(0) \leq -c_1 \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)|u|^2 dxdt. \tag{3.53}$$

Por (3.52), resulta que

$$-E(T) \geq -C \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)|u|^2 dxdt, \tag{3.54}$$

e, consequentemente, multiplicando (3.53) por C e de acordo com (3.54), concluímos, para todo $T \geq T_0$, que

$$C(E(T) - E(0)) \leq c_1 \left(-C \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)|u|^2 dxdt \right) \leq -c_1 E(T),$$

ou seja,

$$E(T) \leq \frac{C}{C + c_1} E(0) = \frac{1}{1 + \hat{C}} E(0),$$

onde $\hat{C} = \frac{C}{c_1} > 0$.

Repetindo o processo para nT, $n \in \mathbb{N}$, deduzimos que

$$E(nT) \leq \frac{1}{(1 + \hat{C})^n} E(0),$$

para todo $T \geq T_0$.

Considere, agora, $t \geq T_0$, então $t = nT_0 + r$, $0 \leq r < T_0$. Logo,

$$E(t) \leq E(t - r) = E(nT_0) \leq \frac{1}{(1 + \hat{C})^n} E(0) = \frac{1}{(1 + \hat{C})^{\frac{t-r}{T_0}}} E(0).$$

Fazendo $C_0 = e^{\frac{r}{T_0} \ln(1+\hat{C})}$ e $\lambda_0 = \frac{\ln(1+\hat{C})}{T_0} > 0$, obtemos

$$E(t) \leq C_0 e^{-\lambda_0 t} E(0); \quad \forall\, t \geq T_0.$$

que prova o decaimento exponencial para soluções regulares do problema (3.1).

Aplicando argumentos de densidade análogos ao que foram empregados na equação de Klein-Gordon prova-se o decaimento exponencial para soluções fracas.

3.2 Equação de Schrödinger sobre Variedades Não Compactas

Nesta seção estudaremos a existência de solução e o decaimento da energia do seguinte problema:

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + ia(x)g(u) = 0 & em \;\; \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ u(0) = u_0 & em \;\; \mathcal{M} \end{cases} \tag{3.55}$$

onde $(\mathcal{M}^n, \mathbf{g})$, $n \geq 2$, é uma variedade Riemanniana não compacta, simplesmente conexa, orientável, sem bordo e "non-trapping", munida com uma métrica Riemanniana $\mathbf{g}(\cdot,\cdot) = \langle\cdot,\cdot\rangle$ completa e de classe C^∞. Uma variedade Riemanniana $\mathcal{M}$ é dita "non-trapping" quando, nenhuma geodésica está completamente contida em um subconjunto compacto de $\mathcal{M}$. Lembremos que goedésicas "presas" freiam o chamado efeito regularizante (ver [16], [28]), que desempenha um papel importante na prova.

As hipóteses sobre a função $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ são aquelas enunciadas na Hipótese 3.1.1.

Hipótese 3.2.1. ***Hpóteses sobre a função*** $a : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$:
i) $a(x) \in L^\infty(\mathcal{M})$ *é uma função não negativa;*
ii) $a(x) \geq a_0 > 0$ *em* $(\mathcal{M}\backslash\Omega) \cup \mathcal{M}_*$, *onde* $\Omega \subset\subset \mathcal{M}$ *é um subconjunto aberto, conexo e liitado com fronteira* $\partial\Omega$ *regular, e tal que* $\overline{\Omega}$ *é um subconjunto compacto de* $\mathcal{M}$.

O conjunto $\mathcal{M}_* \subset \mathcal{M}$ *é um conjunto aberto análogo ao descrito no Capítulo 2, a saber:* $\mathcal{M}_* \supset \overline{\Omega}\backslash V$, *onde* $V = \bigcup_{i=1}^k V_i \subset \overline{\Omega}$ *é um conjunto aberto com fronteira* $\partial V = \partial_1 V \cup \partial_2 V$ *regular, tal que* $\overline{\partial_1 V}$ *intercepta* $\partial\overline{\Omega}$ *transversalmente,* $med(V) \geq med(\overline{\Omega}) - \varepsilon$ *e* $med(\partial_2 V) \geq med(\partial\overline{\Omega}) - \varepsilon$, *para todo* $\varepsilon > 0$. *Além disso, para cada* $i = 1, ...k$, *existe uma função estritamente convexa* $f_i : V_i \to \mathbb{R}_+$.

3.2.1 Existência e Unicidade de Soluções - Variedades Não Compactas

Estudaremos a existência e unicidade de solução do problema (3.55). No que segue omitiremos algumas variáveis afim de não sobrecarregar a notação.

Novamente é importante lembrar que trabalharemos com funções a valores complexos e de modo a obter espaços de Hilbert reais consideramos:

$$(w, v)_{L^2(\mathcal{M})} = Re \int_{\mathcal{M}} w\overline{v}\, d\mathcal{M}.$$

A energia associada ao problema (3.55) é definida por:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} |u(x,t)|^2 d\mathcal{M} \tag{3.56}$$

Nosso intuito é provar a existência e unicidade de soluções u para o problema (3.55). Os resultados obtidos estão enunciados no teorema a seguir.

Teorema 3.2.1. *Sob as Hipóteses 3.1.2 e 3.2.1, temos:*

1. O problema (3.55) é bem posto no espaço $\{w \in H^1(\mathcal{M}), \Delta w \in L^2(\mathcal{M})\}$, *isto é, para cada dado inicial* $u_0 \in \{w \in H^1(\mathcal{M}), \Delta w \in L^2(\mathcal{M})\}$, *existe uma única solução regular de (3.55).*

2. O problema (3.55) é bem posto no espaço $L^2(\mathcal{M})$, *isto é, para cada dado inicial* $u_0 \in L^2(\mathcal{M})$, *existe uma única solução fraca de (3.55).*

Demonstração:

O problema (3.55) pode ser reescrito da forma

$$\begin{cases} u_t - i\Delta u + a(x)g(u) = 0 & em \ \mathcal{M} \times (0, \infty), \\ u(0) = u_0 & em \ \mathcal{M}. \end{cases} \tag{3.57}$$

Definindo

$$\begin{array}{rll} A: & D(A) \subset L^2(\mathcal{M}) & \longrightarrow L^2(\mathcal{M}) \\ & u & \longmapsto Au = -i\Delta u \end{array}$$

e,

$$\begin{array}{rll} B: & D(B) \subset L^2(\mathcal{M}) & \longrightarrow L^2(\mathcal{M}) \\ & u & \longmapsto Bu = ag(u) \end{array}$$

prova-se com idéais análogas as empregadas na Seção *Existência e Unicidade de Soluções - Domínios Exteriores* que A é um operador maximal monótono e B é monótono, hemi-contínuo e leva conjuntos limitados em conjuntos limitados. É importanto observar que neste caso temos $D(A) = \{w \in H^1(\mathcal{M}), \Delta w \in L^2(\mathcal{M})\}$. De acordo com o Teorema 1.3.7 segue que $A + B$ é maximal monótono em $L^2(\mathcal{M})$.

Portando, de acordo com o Teorema 1.3.8, para cada $u_0 \in D(A + B) = D(A)$ existe, uma única aplicação $u : [0, \infty) \to L^2(\mathcal{M})$ solução regular do problema (3.55).

E, para cada $u_0 \in L^2(\mathcal{M})$ existe, pelo Teorema 1.3.9, uma única aplicação $u : [0, \infty) \to L^2(\mathcal{M})$ solução fraca do problema (3.55).

□

3.2.2 Resultado de Estabilidade - Variedades Não Compactas

De modo a estabelecer o docaimento exponencial da energia associada ao problema (3.55), necessitamos fortemente de dois resultados, a saber:

1) Um *príncipio de continução única* para a equação de Schrödinger linear e homogênea.

2) Um *efeito regularizante local* para a equação de Schrödinger linear e não homogênea.

O primeiro resultado pode ser encontrado na literatura, e é devido a Triggiani e Xu [56], como enunciado no Teorema 1.5.2 . Este resultado substitui o tradicional Teorema de Holmgren. No entanto, o segundo resultado, enunciado em um cenário geral devemos impor, isto é, assumiremos a seguinte hipótese:

Hipótese 3.2.2. *Seja $u_0 \in L^2(\mathcal{M})$, $F \in L^1(0, T; L^2(\mathcal{M}))$, para todo $T > 0$. Então a solução u do problema*

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = F & in \ \mathcal{M} \times (0, \infty) \\ u(0) = u_0 & in \ \mathcal{M}, \end{cases} \tag{3.58}$$

pertence a classe $u \in L^2(0,T; H^{\frac{1}{2}}_{loc}(\mathcal{M}))$*. Além disso, para toda função* $\chi \in C_0^\infty(\mathcal{M} \times \mathbb{R})$ *tal que* $supp(\chi) \subset \mathcal{M} \times [0,T]$*, temos*

$$\|\chi u\|_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\mathcal{M}))} \leq C_\chi \left(\|u_0\|_{L^2(\mathcal{M})} + \|F\|_{L^1(0,T;L^2(\mathcal{M}))}\right) \tag{3.59}$$

Observação 3.2.2.

- *Quando* $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ *munido com a métrica Euclidiana, a Hipótese 3.2.2 não é necessária, uma vez que este resultado é provado por Counstatin e Saut [24].*

- *Além disso, munindo* $\mathbb{R}^n$ *com uma métrica Riemanniana* $\mathbf{g}$ *tal que a variedade Riemanniana* $(\mathbb{R}^n, \mathbf{g})$ *seja "non-trapping"o resultado assumido na Hipótese 3.2.2 permanece válido. Este é consequência dos argumentos apresentados por Burq [14], combinados com as idéis apresentadas por Burq, Gérard e Tzvetkov [16].*

Antes de enunciar o principal resultado de estabilidade, enunciamos a chamada *identidade de energia*, a saber, seja u uma solução relugar do problema (3.55), então é válido:

$$E(t_2) - E(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathcal{M}} a(x)g(u(x,t))\overline{u(x,t)}\, d\mathcal{M}dt, \tag{3.60}$$

para todo $t_2 > t_1 \geq 0$. A identidade de energia dada acima continua sendo válida, por argumentos de densidade, para soluções fracas do problema (3.55).

Teorema 3.2.3. *Seja* u *uma solução fraca do problema (3.55), com energia definida como em (3.56). Então, sob as Hipóteses 3.1.1, 3.2.1 e 3.2.2 existem constantes positivas* T_0*,* C_0 *and* λ_0 *tal que*

$$E(t) \leq C_0 e^{-\lambda_0 t} E(0); \quad \forall t \geq T_0,$$

provada para dados iniciais tomados em conjuntos limitados de $L^2(\mathcal{M})$*.*

Princípio de Continuação Única

Seja $\Omega^* \subset \mathcal{M}$ um conjunto aberto, conexo e limitado com fronteira regular tal que $\Omega \subset\subset \Omega^*$ e $\mathcal{M}_* \subset \Omega^*$, onde os conjuntos Ω e $\mathcal{M}_*$ são aqueles definidos na Hipótese 3.1.2.

Assuma que o problema

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = 0 & in \ \ \Omega^* \times (0,T) \\ u(x,t) = 0 & in \ \ (\overline{\Omega^*} \setminus \Omega) \cup \mathcal{M}_* \times (0,T) \\ u(0) = u_0 & \in L^2(\Omega^*) \end{cases} \tag{3.61}$$

admite uma solução fraca u, na classe $u \in L^\infty(0,T; L^2(\mathcal{M}))$, $T > 0$. Nosso objetivo é provar que $u = 0$ in $\Omega^* \times (0,T)$ explorando o Teorema 1.5.2.

Para este propósito, consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} iv_t + \Delta v = 0 & in \ \ \Omega^* \times (0,T) \\ v(x,t) = 0 & in \ \ \partial\Omega^* \times (0,T) \\ v(0) = u_0 & \in L^2(\Omega^*) \end{cases} \tag{3.62}$$

O problema (3.62) admite uma única solução fraca v, na classe $v \in C([0,T];L^2(\Omega^*))$. No entanto, u é também solução do problema (3.62), assim $u = v$ quase sempre. Consequentemente,

$$u \in C([0,T];L^2(\Omega^*)),$$

e portanto, $u(x,0) = u_0(x) = 0$ quase sempre em $(\Omega^* \backslash \Omega) \cup \mathcal{M}_*$, isto é,

$$u \in C([0,T];H) \ \text{ e } \ u_0 \in H,$$

onde $H = \{w \in L^2(\Omega^*); w = 0 \ \ q.s. \ \text{ em } \ (\Omega^* \backslash \Omega) \cup \mathcal{M}_*\}$. Definindo $H^1_*(\Omega^*) = \{w \in H^1_0(\Omega^*); w = 0 \ \ q.s. \ \text{ em } \ (\Omega^* \backslash \Omega) \cup \mathcal{M}_*\}$ e $V = H^1_*(\Omega^*) \cap H^2(\Omega^*)$, resulta que V tem imersão contínua e densa em H. Como $u_0 \in H$, segue que existe uma sequência $\{u^0_k\} \subset V$, tal que

$$u^0_k \longrightarrow u_0 \ \text{ em } \ H.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideramos o seguinte problema:

$$\begin{cases} iu'_k + \Delta u_k = 0 & em \ \ \Omega^* \times (0,T) \\ u_k(x,t) = 0 & em \ \ (\Omega^* \backslash \Omega) \cup \mathcal{M}_* \times (0,T) \\ u_k(0) = u^0_k & \in V \end{cases} \tag{3.63}$$

De acordo com a Teoria de Semigrupo, para cada $k \in \mathbb{N}$, o problema (3.63) admite uma única solução u_k na classe

$$u_k \in C([0,T];V) \cap C^1([0,T];H), \tag{3.64}$$

onde $V = D(-i\Delta)$, e neste caso estamos considerando $-i\Delta : D(-i\Delta) \subset H \to H$. Consequentemente

$$u_k \in H^1(0,T;L^2(\Omega^*)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega^*)). \tag{3.65}$$

Além disso, pelo Teorema de Lummer-Philips, $-i\Delta$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações $S(t)$, e, portanto,

$$\|u_m(t) - u_n(t)\|_{L^2(\Omega^*)} = \|S(t)u^0_m - S(t)u^0_n\|_{L^2(\Omega^*)} \leq \|u^0_m - u^0_n\|_{L^2(\Omega^*)},$$

o que prova que $\{u_k\}$ é uma sequência de Cauchy em $C([0,T];H)$. Logo, existe $w \in C([0,T];H)$, tal que

$$u_k \longrightarrow w \ \text{ forte em } \ C([0,T];H).$$

Donde resulta que

$$w(0) = \lim_{k \to \infty} u_k(0) = \lim_{k \to \infty} u^0_k = u_0 \ \text{ em } \ H.$$

Fazendo $k \to \infty$ em (3.63), obtemos que w é uma solução fraca do

$$\begin{cases} iw_t + \Delta w = 0 & in \ \ \Omega^* \times (0,T) \\ w(x,t) = 0 & in \ \ (\Omega^* \backslash \Omega) \cup \mathcal{M}_* \times (0,T) \\ w(0) = u_0 & \in H, \end{cases} \tag{3.66}$$

e, por unicidade de solução, concluímos que $w = u$, isto é,

$$u_k \longrightarrow u \quad \text{em} \quad C([0,T]; H). \tag{3.67}$$

O próximo passo é aplicar o Teorema 1.5.2 na sequência de soluções $\{u_k\}$.

Com efeito, temos que $u_k = 0$ em $(\overline{\Omega^*}\backslash\Omega)\cup\mathcal{M}_* \times (0,T)$, onde $\mathcal{M}_*$ é um subconjunto aberto de $\mathcal{M}$ que contém $\overline{\Omega}\backslash V$ e V é definido na Seção 2.2.2, a saber $V = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$. Como $(\overline{\Omega}\backslash V) \subset \mathcal{M}_*$, temos, para cada $i = 1, \ldots, k$, que existem abertos, conexos e limitados A_i e C_i tais que $A_i \subset C_i \subset\subset V_i$ e $u_k = 0$ em $(V_i\backslash A_i) \times (0,T)$, logo $\partial_\nu u_k = 0$ em ∂C_i, $\forall\ i = 1, \ldots, k$.

De acordo com a construção feita na Seção 2.2.2 temos, para cada $i = 1, \ldots, k$, que existe $f_i : V_i \to \mathbb{R}_+$ estritamente convexa em V_i, logo em $\overline{C_i}$, para todo $i = 1, \ldots, k$.

Aplicando o Teorema 1.5.1, obtemos que $u_k = 0$ em $C_i \times (0,T)$, $\forall\ i = 1, \ldots, k$. Portanto $u_k = 0$ em V_i, para todo $i = 1, \ldots, k$, provando que $u_k = 0$ em $\Omega^* \times (0,T)$. Portanto, de acordo com (3.67), $u = 0$ em $\Omega^* \times (0,T)$.

De acordo com a argumentação feita acima podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.2.4. *Seja $\Omega^* \subset \mathcal{M}$ um conjunto aberto, conexo e limitado com fronteira regular tal que $\Omega \subset\subset \Omega^*$ e $\mathcal{M}_* \subset \Omega^*$, onde os conjuntos Ω e $\mathcal{M}_*$ são aqueles definidos na Hipótese 3.1.2. Seja u uma solução fraca do problema*

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = 0 & em\ \ \Omega^* \times (0,T) \\ u(x,t) = 0 & in\ \ (\overline{\Omega^*}\ \backslash\Omega) \cup \mathcal{M}_* \times (0,T) \\ u(0) = u_0 & \in L^2(\Omega^*) \end{cases}$$

na classe $u \in L^\infty(0,T; L^2(\mathcal{M}))$, $T > 0$. Então u=0 in $\Omega^* \times (0,T)$.

Controlando a equação

Novamente, nosso objetivo é provar a seguinte desigualdade:

$$\int_0^T E(t)\ dt \leq C \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u) \overline{u}\ d\mathcal{M} dt,$$

onde C é um constante positiva, uma vez que procedendo analogamente como no caso da demonstração do Teorema 3.1.2 obtemos a taxa de decaimento da energia desejada.

É suficiente trabalhar com soluções regulares do problema (3.55), pois o decaimento exponencial da energia é recuperado para soluções fracas usando argumentos de densidade.

Seja, então, u uma solução regular do problema (3.55). Observe que pelas Hipóteses 3.1.1 e 3.2.1, temos que

$$\begin{aligned} 2\int_0^T E(t)\ dt &= \int_0^T \int_\Omega |u(x,t)|^2\ d\mathcal{M}dt + \int_0^T \int_{\mathcal{M}\backslash\Omega} |u(x,t)|^2\ d\mathcal{M}dt \\ &\leq \int_0^T \int_\Omega |u(x,t)|^2\ d\mathcal{M}dt + a_0^{-1} \int_0^T \int_{\mathcal{M}\backslash\Omega} a(x)|u(x,t)|^2\ d\mathcal{M}dt \\ &\leq \int_0^T \int_\Omega |u(x,t)|^2\ d\mathcal{M}dt + a_0^{-1} c_1^{-1} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u)\overline{u}\ d\mathcal{M}dt. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Portanto, resta-nos estimar o termo $\int_0^T \int_\Omega |u(x,t)|^2 \, d\mathcal{M}dt$ em função de "termos dissipativos". Com este objetivo enunciamos o seguinte lema:

Lema 3.2.5. *Seja u uma solução regular do problema (3.55), com dado inicial u_0 tal que $\|u_0\|_{L^2(\mathcal{M})} \leq L$, $L > 0$. Então, para todo $T > 0$, existe uma constnte $C = C(T) > 0$, tal que*

$$\int_0^T \int_\Omega |u(x,t)|^2 \, d\mathcal{M}dt \leq C \int_0^T \int_\mathcal{M} a(x)g(u)\overline{u} \, d\mathcal{M}dt. \tag{3.69}$$

Demonstração:

A argumentação é análoga a demonstração do Lema 3.1.3. Os principais ingredientes são: a Hipótese 3.2.2 e o Teorema 3.2.4.

Argumentaremos por contradição. Para simplificar omitiremos os parâmetros e donotaremos $u' := u_t$.

Suponha que (3.69) não é verificado, logo existe uma sequência de dados iniciais $\{u_k^0\}_{k\in\mathbb{N}}$, tal que as soluções regulares correspondentes, $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, do problema (3.55), com

$$E_k(0) = \frac{1}{2}\|u_k^0\|^2_{L^2(\mathcal{M})} \leq L, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

verificam

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\int_0^T \|u_k(t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt}{\int_0^T \int_\mathcal{M} a(x)g(u_k)\overline{u}_k \, d\mathcal{M}dt} = +\infty, \tag{3.70}$$

isto é,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\int_0^T \int_\mathcal{M} a(x)g(u_k)\overline{u}_k \, d\mathcal{M}dt}{\int_0^T \|u_k(t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt} = 0. \tag{3.71}$$

Uma vez que, de acordo com (3.60), a energia é uma função não crescente obtemos que

$$\frac{1}{2}\|u_k(t)\|^2_{L^2(\mathcal{M})} = E_k(t) \leq E_k(0) \leq L, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Assim, segue que

$$\{u_k\} \text{ é limitada em } \quad L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{M})). \tag{3.72}$$

Portanto, existe uma subsequência de $\{u_k\}$, ainda denotada da mesma forma, e $u \in L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{M}))$ tal que

$$u_k \overset{\star}{\rightharpoonup} u \quad \text{fraco estrela em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{M})). \tag{3.73}$$

De acordo com (3.72), $L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{M})) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\mathcal{M}))$, $\|u_k(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_k(t)\|_{L^2(\mathcal{M})}$, para quase todo t, e por (3.71), temos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_k) \overline{u}_k \, d\mathcal{M} dt &= \frac{\|u_k\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}}{\|u_k\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}} \int_0^T \int_{\Omega} a(x) g(u_k) \overline{u}_k \, d\mathcal{M} dt \\
\leq \ \|u_k\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{M}))} & \frac{\int_0^T \int_{\Omega} a(x) g(u_k) \overline{u}_k \, d\mathcal{M} dt}{\|u_k\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}} \longrightarrow 0, \qquad (3.74)
\end{aligned}
$$

quando $k \to \infty$.

Logo, por (3.74) e usando as Hipóteses 3.1.1 e 3.2.1, segue que

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_{(\mathcal{M}\backslash\Omega)\cup\mathcal{M}_*} |u_k|^2 d\mathcal{M} dt &\leq a_0^{-1} \int_0^T \int_{(\mathcal{M}\backslash\Omega)\cup\mathcal{M}_*} a(x) |u_k|^2 \, d\mathcal{M} dt \\
&\leq a_0^{-1} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) |u_k|^2 \, d\mathcal{M} dt \\
&\leq a_0^{-1} c_1^{-1} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_k) \overline{u}_k \, d\mathcal{M} dt \longrightarrow 0, \quad (3.75)
\end{aligned}
$$

quando $k \to \infty$, ou seja,

$$
u_k \longrightarrow 0 \ \text{ forte em } \ L^2(0,T;L^2((\mathcal{M}\backslash\Omega) \cup \mathcal{M}_*). \qquad (3.76)
$$

Consequentemente, de acordo com (3.73) e (3.76), concluímos, para quase todo $t \in (0,T)$, que

$$
u(t) = \begin{cases} u(t) & em \ \ \Omega \\ 0 & em \ \ (\mathcal{M}\backslash\Omega) \cup \mathcal{M}_* \end{cases} \qquad (3.77)
$$

Neste ponto dividiremos a prova em 2 casos, a saber: $u \neq 0$ e $u = 0$.

(i) $u \neq 0$.

Consideremos a sequênciade problemas

$$
\begin{cases} u_k' - i\Delta u_k + a(x) g(u_k) = 0 & in \ \ \mathcal{M} \times (0,\infty) \\ u_k(0) = u_k^0 & in \ \ \Omega \end{cases} \qquad (3.78)
$$

Como $E_k(0) = \frac{1}{2}\|u_k^0\|_{L^2(\mathcal{M})} \leq L$, segue que existe $u_0 \in L^2(\mathcal{M})$, e uma subsequência de $\{u_k^0\}$, ainda denotada da mesma forma, tal que

$$
u_k^0 \rightharpoonup u_0 \ \text{ fraco em } \ L^2(\mathcal{M}). \qquad (3.79)
$$

Além disso, de acordo com a Hipótese 3.1.1 e (3.74), temos que

$$
\begin{aligned}
\|ag(u_k)\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{M}))} &\leq \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) |g(u_k)|^2 \, d\mathcal{M} dt \\
&\leq \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})} c_2^2 \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) |u_k|^2 \, d\mathcal{M} dt \\
&\leq \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})} c_2^2 c_1^{-1} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_k) \overline{u}_k \, d\mathcal{M} dt \longrightarrow 0, \ (3.80)
\end{aligned}
$$

quando $k \to \infty$, isto é,

$$ag(u_k) \longrightarrow 0 \ \text{ forte em } \ L^2(0,T;L^2(\mathcal{M})). \tag{3.81}$$

Fazendo $k \to \infty$ em (3.78), levando em consideração (3.73), (3.77), (3.79) e (3.81) concluímos que

$$\begin{cases} u' - i\Delta u = 0 & in \ \ \mathcal{M} \times (0,T)) \\ u(x,t) = 0 & in \ \ (\mathcal{M}\backslash\Omega) \cup \mathcal{M}_* \times (0,T) \\ u(0) = u_0 & \in \ \ L^2(\mathcal{M}), \end{cases} \tag{3.82}$$

no sentido distribucional, onde $u \in L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{M}))$.

Consideremos agora $\Omega^* \subset \mathcal{M}$ um subconjunto aberto, limitado, conexo com fronteira bem regular, tal que $\Omega \subset\subset \Omega^*$. De acordo com (3.82), podemos escrever

$$\begin{cases} u' - i\Delta u = 0 & in \ \ \Omega^* \times (0,T)) \\ u(x,t) = 0 & in \ \ (\overline{\Omega^*} \backslash\Omega) \cup \mathcal{M}_* \times (0,T) \\ u(0) = u_0 & \in \ \ L^2(\Omega^*), \end{cases} \tag{3.83}$$

no sentido distribucional, onde $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega^*))$.

Portanto, pelo Teorema 3.2.4, segue que $u = 0$ em $\Omega^* \times (0,T)$, logo $u = 0$ em $\mathcal{M} \times (0,T)$, o que é um absurdo.

(ii) $u = 0$.

Denotamos por

$$c_k = \|u_k\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \ \text{ e } \ v_k = \frac{u_k}{c_k}, \tag{3.84}$$

logo

$$\|v_k\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = 1. \tag{3.85}$$

Dividindo (3.78) por c_k obtemos

$$\begin{cases} v_k' - i\Delta v_k + \frac{1}{c_k} a(x) g(u_k) = 0 & em \ \ \mathcal{M} \times (0,\infty) \\ \\ v_k(0) = v_k^0 := \frac{1}{c_k} u_k^0 & em \ \ \mathcal{M} \end{cases} \tag{3.86}$$

Observe que, pela Hipótese 3.1.1 e por (3.85), temos

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^T \|u_k\|^2_{L^2(\Omega)} dt}{\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_k) \overline{u}_k \ d\mathcal{M} dt} &= \frac{c_k^2}{c_k^2} \frac{\int_0^T \|u_k\|^2_{L^2(\Omega)} dt}{\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_k) \overline{u}_k \ d\mathcal{M} dt} \\ = \frac{\|v_k\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}}{\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_k) \frac{\overline{u}_k}{c_k^2} \ d\mathcal{M} dt} &\leq \frac{c_1}{\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) |v_k|^2 \ d\mathcal{M} dt}. \end{aligned} \tag{3.87}$$

Logo, de acordo com (3.70) e (3.87), obtemos que

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) |v_k|^2 \ d\mathcal{M} dt = 0. \tag{3.88}$$

Devido ao fato de $a(x) \geq a_0 > 0$ em $(\mathcal{M}\backslash\Omega) \cup \mathcal{M}_*$, concluímos, por (3.88), que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{(\mathcal{M}\backslash\Omega)\cup\mathcal{M}_*} |v_k|^2 \, d\mathcal{M}dt &\leq a_0^{-1} \int_0^T \int_{(\mathcal{M}\backslash\Omega)\cup\mathcal{M}_*} a(x)|v_k|^2 \, d\mathcal{M}dt \\ &\leq a_0^{-1} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)|v_k|^2 \, d\mathcal{M}dt \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $k \to \infty$, isto é,

$$v_k \longrightarrow 0 \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\mathcal{M}\backslash\Omega)). \tag{3.89}$$

De acordo com (3.68), temos

$$2\int_0^T E_k(t)dt \leq a_0^{-1}c_1^{-1} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)g(u_k)\overline{u}_k \, d\mathcal{M}dt + \int_0^T \int_\Omega |u_k|^2 \, d\mathcal{M}dt,$$

e como $E_k(T) \leq E_k(t)$, $\forall\, t \leq T$, segue que

$$TE(T) \leq \int_0^T E_k(t)dt \leq \frac{a_0^{-1}c_1^{-1}}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)g(u_k)\overline{u}_k \, d\mathcal{M}dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega |u_k|^2 \, d\mathcal{M}dt.$$

Logo

$$E_k(T) \leq C\left[\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)g(u_k)\overline{u}_k \, d\mathcal{M}dt + \int_0^T \int_\Omega |u_k|^2 \, d\mathcal{M}dt\right]. \tag{3.90}$$

Além disso, pela identidade de energia dada em (3.60), podemos escrever

$$E_k(0) = E_k(T) + \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)g(u_k)\overline{u}_k \, d\mathcal{M}dt. \tag{3.91}$$

Consequentemente, por (3.90) e (3.91) temos

$$E_k(0) \leq \tilde{C}\left[\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)g(u_k)\overline{u}_k \, d\mathcal{M}dt + \int_0^T \int_\Omega |u_k|^2 \, d\mathcal{M}dt\right]. \tag{3.92}$$

Dividindo (3.92) por c_k^2, obtemos

$$\frac{E_k(0)}{c_k^2} \leq \tilde{C}\left[\frac{\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x)g(u_k)\overline{u}_k \, d\mathcal{M}dt}{c_k^2} + 1\right], \tag{3.93}$$

donde, de acordo com (3.71), garantimos a existência de uma constante $M > 0$ tal que

$$\|v_k^0\|^2_{L^2(\mathcal{M})} = \frac{\|u_k^0\|^2_{L^2(\mathcal{M})}}{c_k^2} = \frac{2E_k(0)}{c_k^2} \leq M, \tag{3.94}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, estabelecendo assim uma limitação para $\{v_k^0\}$ em $L^2(\mathcal{M})$. Portanto, existe uma subsequência de $\{v_k^0\}$, ainda denotada da mesma forma, e $v_0 \in L^2(\mathcal{M})$ tal que

$$v_k^0 \rightharpoonup v_0 \;\text{ fraco em }\; L^2(\mathcal{M}). \tag{3.95}$$

Note que para cada $n \in \mathbb{N}$, v_k é solução do problema

$$\begin{cases} v_k' - i\Delta v_k = F_k & \textit{em } \mathcal{M} \times (0,\infty) \\ v_k(0) = v_k^0 & \textit{em } \mathcal{M}, \end{cases} \tag{3.96}$$

onde $F_k = -\frac{1}{c_k} a(x) g(u_k)$.

Seja $\chi \in C_0^\infty(\mathcal{M} \times \mathbb{R})$ tal que $\chi = 1$ em $\overline{\Omega} \times [0,T]$ e $0 \le \chi \le 1$.

De acordo com a Hipótese 3.2.2 é válido que

$$\|v_k\|_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Omega))} \le C_\chi \left(\|v_k^0\|_{L^2(\mathcal{M})} + \|F_k\|_{L^1(0,T;L^2(\mathcal{M}))} \right). \tag{3.97}$$

No entanto, por (3.71), é temos que

$$\begin{aligned} \|F_k\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{M}))} &\le \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \frac{a(x)|g(u_k)|^2}{c_k^2} \, d\mathcal{M}dt \\ &\le \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})} c_2^2 \int_0^T \int_{\mathcal{M}} \frac{a(x)|u_k|^2}{c_k^2} \, d\mathcal{M}dt \\ &\le \|a\|_{L^\infty(\mathcal{M})} c_2^2 c_1^{-1} \frac{\int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u_k)\overline{u}_k \, d\mathcal{M}dt}{\int_0^T \int_{\Omega} |u_k|^2 d\mathcal{M}dt} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $k \to \infty$, isto é,

$$F_k \longrightarrow 0 \;\text{ forte em }\; L^2(0,T;L^2(\mathcal{M})) \hookrightarrow L^1(0,T;L^2(\mathcal{M})). \tag{3.98}$$

Portanto, de acordo com (3.94), (3.97) e (3.98) segue que

$$\{v_k\} \;\text{ é limitada em }\; L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Omega)). \tag{3.99}$$

Na sequência, vamos fazer uma estimativa para v_k'.

Como $E_k(t) \le E_k(0)$, para todo $t \ge 0$, temos que

$$\|\Delta v_k(t)\|_{[D(A)]'} = \frac{\|\Delta u_k(t)\|_{[D(A)]'}}{c_k} \le C \frac{\|u_k(t)\|_{L^2(\mathcal{M})}}{c_k} \le C \frac{\|u_k(0)\|_{L^2(\mathcal{M})}}{c_k},$$

onde C é uma constante positiva que não depende de k, $D(A) = \{w \in H^1(\mathcal{M}), \Delta w \in L^2(\mathcal{M})\}$ e $\Delta : L^2(\mathcal{M}) \to [D(A)]'$ é definido por

$$\langle \Delta w, \varphi \rangle_{[D(A)]', D(A)} = (w, \Delta\varphi)_{L^2(\mathcal{M})}.$$

Levando em conta (3.93), deduzimos que

$$\{\Delta v_k\} \text{ é limitada em } \quad L^\infty(0,T;[D(A)]').$$

Ainda, como

$$\|w\|_{[D(A)]'} = \sup_{\varphi \in D(A)} \frac{|\langle w, \varphi\rangle|}{\|\varphi\|} \geq \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} \frac{|\langle w, \varphi\rangle|}{\|\varphi\|} = \|w\|_{[H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)]'},$$

segue que

$$\{\Delta v_k\} \text{ é limitada em } \quad L^\infty(0,T;[H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)]'). \tag{3.100}$$

Portanto, por (3.86), (3.98) e (3.100) segue que

$$\{v_k'\} \text{ é limitada em } \quad L^2(0,T;[H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)]'). \tag{3.101}$$

Portanto, devido a cadeia de imersões

$$H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \hookrightarrow [H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)]',$$

juntamente com (3.99), (3.101) e o Teorema de Aubin-Lions, obtemos a existência de uma subsequência de $\{v_k\}$, ainda denotada da mesma forma, e $\tilde{v} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ tal que

$$v_k \longrightarrow \tilde{v} \text{ forte em } \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.102}$$

quando $k \to \infty$. Além disso, pelo fato da energia ser uma função não crescente e por (3.94), segue que existe $v \in L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{M}))$ tal que

$$v_k \overset{\star}{\rightharpoonup} v \text{ fraco estrela em } \quad L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{M})) \tag{3.103}$$

Logo, por (3.89), (3.102) e (3.103) temos que

$$v(t) = \begin{cases} \tilde{v}(t) & em\ \ \Omega \\ 0 & em\ \ (\mathcal{M}\backslash\Omega)\cup\mathcal{M}_*. \end{cases} \tag{3.104}$$

Fazendo $k \to \infty$ em (3.86), levando em consideração (3.95), (3.98), (3.103) e (3.104), obtemos

$$\begin{cases} v' - i\Delta v = 0 & in\ \ \mathcal{M}\times(0,T)) \\ v(x,t) = 0 & in\ \ (\mathcal{M}\backslash\Omega)\cup\mathcal{M}_*\times(0,T) \\ v(0) = v_0 & \in\ \ L^2(\mathcal{M}), \end{cases} \tag{3.105}$$

no sentido distribucional, onde $v \in L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{M}))$.

Aplicando raciocínio análogo ao do caso (i), concluímos que $v = 0$ em $\mathcal{M}\times(0,T)$.

Mas, por (3.85),

$$\|v_k\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = 1,$$

donde juntamente com (3.102) segue uma contradição. Isto encerra a demonstração do lema.

□

Observação 3.2.6. *É importante observar que dada uma variedade Riemanniana* $(\mathcal{M}^n, \mathbf{g})$*, $n \geq 2$, não compacta, simplesmente conexa, orientável, sem bordo e "non-trapping" munida com uma métrica Riemanniana $\boldsymbol{g}$, completa e de classe C^∞, satisfazendo*

$$sec_{\boldsymbol{g}} \leq 0,$$

então é possível livrar de efeitos dissipativos todo o conjunto Ω. De fato, de acordo com a Proposição 1.4.12, existe uma função estritamente convexa definida sobre toda a variedade. Este é o fato crucial, pois desta forma podemos aplicar o Teorema 1.5.2 na sequência de soluções $\{u_k\}$ do problema (3.63) diretamente em $\Omega^* \supset\supset \Omega$, uma vez que $u_k = 0$ em $\overline{\Omega^*} \backslash \Omega \times (0,T)$, não necessitando que u_k seja nula em $\mathcal{M}_* \times (0,T)$.

Note que, de acordo com (3.68) e pelo Lema 3.2.5, temos provado a desigualdade desejada, a saber:

$$\int_0^T E(t)\, dt \leq C \int_0^T \int_{\mathcal{M}} a(x) g(u) \overline{u} dx dt,$$

onde C é uma constante positiva.

Demonstração do Teorema 3.2.3:
Análoga a demonstração do Teorema 3.1.2 e por isso é omitida.

3.2.3 Exemplos de Variedades Riemannianas *Non-trapping*

Nesta seção daremos dois exemplos de variedades Riemannianas "non trapping". O segundo exemplo pode ser encontrado em [54].

1) O exemplo mais simples é o caso em que $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ está munido com a métrica Euclidiana, onde as geodésicas são retas.

2) Seja $\mathcal{M}$ uma variedade Riemanniana simplesmente conexa e orientável arbitrária, munida com uma métrica Riemanniana g^* completa. Definimos em $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$ a seguinte métrica:

$$\langle X, Y \rangle := xy + e^r g^*(X^*, Y^*); \quad X = (x, X^*),\ Y = (y, Y^*) \in T_{(r,p)}(\mathbb{R} \times \mathcal{M}).$$

A métrica Riemanniana $\langle\ ,\rangle$ é completa. Vamos mostrar que $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$ munida com a métrica $\langle\ ,\ \rangle$ definida acima é "non-trapping". Com efeito, seja $c(t) = (r(t), u(t))$ uma geodésica em $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$. Provaremos que a função $r(t)$ não tem máximo, o que implica que não existe geodésicas fechadas em $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$.

Suponha que exite t_0 máximo de $r(t)$. Seja $(U,(u^1,...,u^n))$ um sistema de coordenadas local em torno de $u(t_0)$ e seja (g^*_{ik}) a representação local de g^* em U. No sistema de coordenadas local $(\mathbb{R}\times U,(Id,u^1,...,u^n))$, a métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$ tem a seguinte forma:

$$g_{00} = 1,$$
$$g_{i0} = 0 \quad \text{for} \quad i \geq 1,$$
$$g_{ik} = e^r g^*_{ik} \quad \text{for} \quad i,k \geq 1.$$

Os símbolos de Christoffel da equação diferencial associada à $r(t)$ são

$$\Gamma^0_{0k} = 0 \quad \text{for} \quad k \geq 0,$$
$$\Gamma^0_{ik} = -\frac{e^r}{2} g^*_{ik} \quad \text{for} \quad i,k \geq 1.$$

A equação diferencial correspondente à $r(t)$ é

$$\ddot{r}(t) + \sum_{i,j\geq 1} \Gamma^0_{ij}\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t) = 0,$$

ou ainda,

$$\ddot{r}(t) - \frac{e^r}{2}\sum_{i,j\geq 1} g^*_{ij}\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t) = 0,$$

onde $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$.

Assim, concluímos que

$$\ddot{r}(t) = \frac{e^r}{2} g^*(\dot{u}(t),\dot{u}(t)).$$

Como $\dot{r}(t_0) = 0$, resulta que $\dot{u}(t_0) \neq 0$. Consequentemente $\ddot{r}(t_0) > 0$, o que implica que t_0 não é um ponto de máximo de $r(t)$, uma contradição. Isto encerra a demonstração.

Bibliografia

[1] ADAMS, R. A. **Sobolev Spaces**. Nova York: Academic Press, 1975.

[2] ALOUI, L.; KHENISSI, M. **Stabilization of Schrödinger equation in exterior domains**. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.,* v.13, n.3, p.570–579, 2007.

[3] ALOUI, L.; KHENISSI, M.; VODEV, G. **Smoothing effect for the regularized Schrödinger equation with non-controlled orbits**. *Comm. Partial Differential Equations,* v.38, n.2, p.265–275, 2013

[4] ALOUI, L. **Stabilisation Neumann pour l'équation des ondes dans un domaine extérieur**. *J. Math. Pures Appl.,* v.81 , n.11, p.1113–1134, 2002.

[5] ALABAU-BOUSSOUIRA, F. **Convexity and weighted inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems**. *Appl. Math. Optim.,* v.51, n.1, p.61-105, 2005.

[6] BARBU, V. **Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces**. Academiei. Noordhoff International Publishing. Bucuresti Romania. Leyden The Netherlands, 1976.

[7] BARDOS, C.; LEBEAU G.; RAUCH J. **Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary**. *SIAM J. Control Optim.,* v.30, n.5, p.1024-1065, 1992.

[8] BESSA, G. P.; MONTENEGRO, F.; PICCIONE, P. **Riemannian submersions with discrete spectrum**. *J. Geometric Analysis,* v.22, n.2, p.603-620, 2012.

[9] BORTOT, C. A.; CAVALCANTI, M. M.; CORRÊA, W. J.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. **Uniform decay rate estimates for Schrödinger and plate equations with nonlinear locally distributed damping**. *J. Differential Equations,* v.254, n.9, p.3729–3764, 2013.

[10] BRÉZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. Nova York: Springer, 2011.

[11] BRÉZIS, H. **Operateurs Maximaux Monotones et Semigroups de Contractions dans les Spaces de Hilbert**. Amsterdam: North Holland Publishing Co., 1973.

[12] BRÉZIS, H. **Autumn Course On Semigoups, Theory and Applications**. Triest: Lecture Notes taken by L. COHEN. International Center for Theoretical Physics, 1984.

[13] BRÉZIS, H.; CAZENAVE, T. **Nonlinear Evolution Equations. Preliminary version of chapters 1,2 and 3 and the appendix**, 1994.

[14] BURQ, N. **Semi-Classical Estimates for the Resolvent in non trapping geometries**. *International Mathematics Research Notices*, v.2002, n.5, p.221-241, 2001.

[15] BURQ, N. **Smoothing effect for Schrödinger boundary value problems**. *Duke Math. J.,* v.123, n.2, p.403–427, 2004.

[16] BURQ, N.; GÉRARD, P.; TZVETKOV, N. **On nonlinear Schrödinger equations in exterior domains. Équations de Schrödinger non linéaires dans des domaines extérieurs**. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire*, An.21, p.295-318, 2004.

[17] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; LASIECKA, I. **Wellposedness and optimal decay rates for wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction**. *Journal of Differential Equations*, v.236, n.2, p.407-459, 2007.

[18] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; FUKUOKA, R.; SORIANO, J. A. **Uniform Stabilization of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping**. *Transactions of AMS*, v.361, n.9, p.4561-4580, 2009.

[19] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; SORIANO, J. A.; NATALI, F. **Exponential stability for the 2-D defocusing Schrödinger equation with locally distributed damping**. *Differential Integral Equations*, v.22, n.7-8, p.617–636, 2009.

[20] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; FUKUOKA, R.; SORIANO, J. A. **Asymptotic stability of the wave equation on compact manifolds and locally distributed damping: A sharp result**. *Arch. Rational Mech. Anal.*, v.197, n.3, p.925–964, 2010.

[21] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; SORIANO, J. A.; NATALI, F. **Qualitative aspects for the cubic nonlinear Schrödinger equations with localized damping: exponential and polynomial stabilization**. *J. Differential Equations,* v.248, n.12, p.2955–2971, 2010.

[22] CHEEGER, J.; COLDING, T. H. **Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products**. *Ann. of Math.,* v.144, n.1, p.189-237, 1996.

[23] CHRISTIANSON, H. **Semiclassical non-concetration near hyperbolic orbits**. *Journal of Functional Analysis*, v.246, n.2, p.145-195, 2007.

[24] COUNSTATIN, P.; SAUT, J.C. **Local smoothing properties of dispersive equation**. *Journal of the American Mathematical Society,* v.1, n.2, p.413-439, 1998.

[25] DAUTRAY, R.; LIONS, J. L. **Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and technology, v.II**. New York: Springer-Verlang Berlin Heidelberg, 1990.

[26] DEHMAN, B.; LEBEAU, G.; ZUAZUA, E. **Stabilization and control for the subcritical semilinear wave equation**. *Anna. Sci. Ec. Norm. Super.,* v.36, n.4, p.525-551, 2003.

[27] DO CARMO, M. P. **Riemannian geometry. Mathematics: Theory & Applications**. Boston: Birkhäuser Boston, Inc., 1992.

[28] DOI, S. I.; **Smoothing effects of Schrödinger evolution groups on Riemannian manifolds**. *Duke Math. J.,* v.82, n.3, p.679-706, 1996.

[29] DONNELLY, H.; LI, P.; **Pure point spectrum and negative curvature for noncompact manifolds**. *Duke Math. J.,* v.46, p.497-503, 1979.

[30] EVANS, L. C.; **Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics**, v.19, A.M.S.

[31] FUKUOKA, R. **Mollifier smoothing of tensor fields on differentiable manifolds and applications to Riemannian Geometry**. *http://arxiv.org/abs/math.DG/0608230.*

[32] GREENE, R. E.; WU, H. C^∞**-approximations of convex, subharmonic, and plurisubharmonic functions.** *Ann. Sci. École Norm. Sup.,* v.12, n.1, p.47-84, 1979.

[33] GREENE, R. E.; WU, H. **Function theory on manifolds which possess a pole**. Berlin: Lecture Notes in Mathematics, v.699, Springer, 1979.

[34] HEBEY, E. **Sobolev space on Riemannian manifolds**. Berlin: Springer, 1996.

[35] HITRIK, M. **Expansions and eigenfrequencies for damped wave equations**. *Journèes Équations aux Dérivées Patielles*, Exp. n.VI, p.10., Univ. Nantes, Nantes, 2001.

[36] JORGE, L. P.; XAVIER, F. **An inequality between the exterior diameter and the mean curvature of bounded immersions**. *Math. Z.,* v.178, p.77-82, 1981.

[37] KESAVAN, S. **Topic in Functional Analysis and Applications**. New Dehli: John Wiley and Sons, 1989.

[38] LASIECKA, I.; TATARU, D. **Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping**. *Differential Integral Equations*, v.6, p.507–533, 1993.

[39] LASIECKA, I.; TRIGGIANI, R. **Inverse/Observability estimates for second-order hiperbolic equations with variable coefficients**. *Journal. Math. Anal. Apl.*, v.235, p.13-57, 1999.

[40] LASIECKA, I.; TRIGGIANI, R. **Uniform stabilization of the wave equation with Dirichlet or Neumann feedback control without geometric conditions**. *Appl. Math. Optim.*, v.25, p.189-224, 1992.

[41] LIONS, J. L. **Contrôlabilité Exacte Pertubations et Stabilisation de Systèmes Distribués**. Paris: Masson, 1988.

[42] LIONS, J. L.; MAGENES, E. **Non-Homogeneous boudary Value Problems ande Applications, v.I**. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1972.

[43] MEDEIROS, L. A. **Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações**. Rio de Janeiro: Textos e Métodos Matemáticos 16, IM-UFRJ, 1983.

[44] MICU, S.; ZUAZUA, E. **An introduction to the controllability of partial differential equations**. T. Sari, Collection Travaux en Cours, p.67-150, 2005.

[45] MIRANDA, M. M. **Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev**. Rio de Janeiro: Seminário Brasileiro de Análise. Atas 28 - Seminário Brasileiro de Análise, p.171-191, 1988.

[46] MILNOR, J. **Lectures on the h-cobordism theorem**. Princeton: Notes by L. Siebenmann and J. Sondow, Princeton University Press, 1965.

[47] PIGOLA, s S.; RIGOLI, M.; SETTI, A. **Maximum principle on Riemannian manifolds and applications,** *Mem. AMS,* v.174, n.822, 2005.

[48] RALSTON, J. V. **Solutions of the wave equation with localized energy**. *Comm. Pure Appl. Math.,* v.22, p.807-823, 1969.

[49] RAUCH, J.; TAYLOR, M. **Decay of solutions to n ondissipative hyperbolic systems on compact manifolds**. *Comm. Pure Appl. Math.*, v.28, n.4, p.501-523, 1975.

[50] RAUCH, J.; TAYLOR, M. **Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domains**. *Indiana Univ. Math. J.,* v.24, p.79-86, 1974.

[51] RAVIART, P. A.; THOMAS, J. M. **Introduction à Analyse Numérique des Équations Aux Dérivéis Partielles**. Paris: Masson, 1983.

[52] SIMON, J. **Compact Sets in the Space $\mathbf{L^p(0, T; B)}$**. *Annali di Matematica pura ed aplicata*, v.146, n.4, p.65-96, 1987.

[53] TAYLOR, M. E. **Partial Differential Equations I**. Basic Theory. 2nd Edition, Springer, 2010.

[54] THORBERGSSON, G. **Closed geodesics on non-compact Riemannian manifolds**. *Mathematische Zeitschrift*, v.159, p.249-258, 1978.

[55] TSUTSUMI, Y. **Local energy decay of solutions to the free Schrödinger equation in exterior domains**. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, v.31, n.1, p.97–108, 1984.

[56] TRIGGIANI, R.; XU, X. **Pointwise Carleman estimates, Global Uniqueness, Observability, and Stabilization for de Schrödinger Equations on Riemannian Manifolds at the $H^1(\Omega)-$Level**. *Contemporary Mathematics*, v.426, p.339-404, 2007.

[57] TRIGGIANI, R.; YAO, P. F. **Calerman estimates with no lower-Oder terms for general Riemannian wave equations. Global uniquenees and observability in one shot**. *Appl. Math. and Optim.*, v.46, p.331-375, 2002.

[58] WARNER, F. W. **Foundations of differentiable manifolds and Lie Groups**. Scott, Foresman and Company, 1971.

[59] ZEIDLER, E. **Nonlinear Functional Analysis and its Aplications**. v.2A: Linear monotone operators, Springer-Verlag, 1990.

[60] ZUAZUA, E. **Exponential decay for the semilinear wave equation whith localized damping in unbounded domains**. *J.Math. Pures et appl.*, v.70, p.513-529, 1992.