UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

LUANA HIDEMI TAKAMOTO

SISTEMAS DE CONTROLE IMPULSIVOS E AÇÕES DE SEMIGRUPOS: ESTABILIDADE E RECURSIVIDADE

Maringá - PR, 2018

LUANA HIDEMI TAKAMOTO

SISTEMAS DE CONTROLE IMPULSIVOS E AÇÕES DE SEMIGRUPOS: ESTABILIDADE E RECURSIVIDADE

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas, da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Josiney Alves de Souza.

Maringá - PR, 2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Takamoto, Luana Hidemi
T136s Sistemas de controle impulsivos e ações de semigrupos : estabilidade e recursividade / Luana Hidemi Takamoto. -- Maringá, 2018.
viii, 101 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Josiney Alves de Souza.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia, 2018.

1. Sistemas de controle afins impulsivos. 2. Ações de semigrupos impulsivas. 3. Estabilidade de Lyapunov. 4. Funcionais de Lyapunov. 5. Estabilidade de Poisson. 6. Pontos não vagantes. 7. Impulsive control affine systems. 8. Impulsive semigroup actions. 9. Lyapunov stability. 10. Lyapunov functionals. 11. Poisson stability. 12. Nonwandering points. I. Souza, Josiney Alves de, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia. III. Título.

CDD 22.ed. 516

Edilson Damasio CRB9-1.123

LUANA HIDEMI TAKAMOTO

SISTEMAS DE CONTROLE IMPULSIVOS E AÇÕES DE SEMIGRUPOS:
ESTABILIDADE E RECURSIVIDADE

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Josiney Alves de Souza
Prof. Dr. Josiney Alves de Souza
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Everaldo de Mello Bonotto
Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto
Universidade de São Paulo – São Carlos

Suzete Maria Silva Afonso
Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – Rio Claro

Simão N. Stelmastchuk
Prof. Dr. Simão Nicolau Stelmastchuk
Universidade Federal do Paraná – Jandaia do Sul

Luciene Parron G. Arantes
Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 15 de outubro de 2018.
Local de defesa: Auditório do Departamento de Matemática, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

"O que vale na vida não é o ponto de partida e sim a caminhada.
Caminhando e semeando, no fim terás o que colher."
Cora Coralina

Aos meus pais, Sergio e Sônia.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, por permitir que eu vencesse mais essa etapa, me dando a força necessária para superar todos os medos e dificuldades.

Agradeço aos meus pais Sergio e Sônia, aos meus irmãos Leandro e Luciano, ao meu tio Valter e aos meus avós Tadaci e Idalina pelo amor, incentivo e apoio incondicional que me permitiram chegar até aqui.

Agradeço ao Prof. Dr. Josiney Alves de Souza pela orientação e incentivo, mas principalmente, por ter acreditado em mim e me apoiado nessa árdua trajetória. Serei sempre imensamente grata ao senhor.

Agradeço aos membros da comissão julgadora: Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto, Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso, Prof. Dr. Simão Nicolau Stelmastchuk e Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes, pelas sugestões e correções propostas.

Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá: Profa. Dra. Claudete Matilde Webler Martins, Profa. Dra. Irene Naomi Nakaoka, Prof. Dr. Marcos Roberto Teixeira Primo e Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka, que lecionaram as disciplinas que cursei no doutorado e que contribuíram de modo fundamental para o meu crescimento acadêmico.

Agradeço à secretária Lúcia Kato, por ser mais que uma secretária, ser uma amiga.

Agradeço a todos os meus professores de graduação e mestrado, em especial, à Profa. Dra. Cristiane Nespoli Morelato França, ao Prof. Dr. José Roberto Nogueira e ao Prof. Dr. Messias Meneguette Júnior, pela orientação, apoio e dedicação.

Agradeço aos meus amigos do doutorado: Adriana, Claudia, Eiji, Gisele, Janaina, Taís e Vanderléa, por todos os momentos que passamos juntos, dividindo nossas alegrias e dificuldades. Vocês tornaram essa jornada mais leve.

Agradeço aos meus amigos da vida, Vanessa e Lucas, pelo imenso apoio nos momentos de incerteza e por me ajudarem a não desistir de mim. Vocês fazem parte dessa conquista.

Agradeço à CAPES, pelo suporte financeiro.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos um estudo sobre os sistemas de controle afins impulsivos através do contexto de sistemas dinâmicos não autônomos. Essa formulação nos permite fornecer uma estrutura de semigrupo para o sistema de controle impulsivo e, portanto, podemos analisá-lo sob o ponto de vista de uma ação de semigrupo, sempre que possível. Nesse sentido, apresentamos resultados que relacionam a invariância e a estabilidade para o sistema de controle impulsivo com a invariância e a estabilidade para o sistema de controle original. Para o caso compacto, mostramos a equivalência das noções de estabilidade e também analisamos a invariância e a estabilidade de suas componentes conexas. Além disso, caracterizamos cada tipo de estabilidade para um sistema de controle impulsivo através de um funcional de Lyapunov. Conceitos relacionados à recursividade também foram investigados neste trabalho. Apresentamos caracterizações para a estabilidade de Poisson positiva e mostramos que esse conceito se relaciona com as noções de recorrência, periodicidade, controlabilidade e pontos não vagantes. Exibimos também uma versão para o sistema de controle impulsivo do Teorema da Recorrência de Poincaré. Para encerrar esse trabalho, introduzimos a definição de uma ação de semigrupo impulsiva e exibimos resultados relacionados à invariância e estabilidade para esse tipo de ação.

Palavras-chave: Sistemas de controle afins impulsivos, ações de semigrupos impulsivas, estabilidade de Lyapunov, funcionais de Lyapunov, estabilidade de Poisson, pontos não vagantes.

Abstract

In this work, we study an impulsive control affine system in the setting of nonautonomous dynamical systems. This formulation allows us to provide a semigroup structure for the impulsive control system and hence we can deal with it by the semigroup action point of view, whenever it is possible. In this sense, we present results relating the notions of invariance and stability for the impulsive control system to the notions of invariance and stability for the original control system. For the compact case, we show the equivalence of the notions of stability and we also analyze the invariance and stability of its connected components. Furthermore, we characterize each type of stability for an impulsive control system by means of Lyapunov functionals. Concepts connected with the notion of recursiveness were also investigated in this work. We present characterizations for the positive Poisson stability and we show that this concept is related to the notions of recurrence, periodicity, controllability and nonwandering points. We also provide a version for impulsive control system of the Poincaré Recurrence Theorem. To finish this work, we introduce the definition of an impulsive semigroup action and present results on invariance and stability for this type of action.

Key words: Impulsive control affine systems, impulsive semigroup actions, Lyapunov stability, Lyapunov functionals, Poisson stability, nonwandering points.

Conteúdo

Resumo **v**

Introdução **1**

1 Sistemas de controle afins impulsivos **5**
1.1 Sistemas de controle afins impulsivos . . . 5
1.2 Continuidade da função ϕ . . . 15

2 Invariância e estabilidade de Lyapunov para sistemas de controle afins impulsivos **19**
2.1 Invariância . . . 19
2.2 Estabilidade de Lyapunov . . . 22
2.3 Funcionais de Lyapunov . . . 37

3 Estabilidade de Poisson para sistemas de controle afins impulsivos **61**
3.1 Definições básicas . . . 61
3.2 Estabilidade de Poisson . . . 63
3.3 Pontos não vagantes com respeito a $\widetilde{\varphi}$ . . . 74
3.4 Teorema da Recorrência de Poincaré . . . 76

4 Ações de semigrupos impulsivas **80**
4.1 Ações de semigrupos impulsivas . . . 80
4.2 Família admissível de coberturas abertas . . . 85
4.3 Invariância e estabilidade . . . 87
4.4 Funcionais de Lyapunov . . . 93

5 Conclusões **98**

Introdução

O estudo de sistemas impulsivos tem se desenvolvido cada vez mais nos últimos anos. O notável interesse nesse tipo de sistema se deve ao fato de que ele lida com descontinuidades, causadas por mudanças abruptas que alteram o comportamento dinâmico do mesmo. Isso permite que esse tipo de sistema encontre aplicações práticas em diversas áreas. Podemos citar, por exemplo, a ingestão de medicamentos, sistemas do tipo bilhar, sistemas de comércio eletrônico, mercado financeiro, entre outras aplicações.

A noção de sistema dinâmico descontínuo surgiu na década de 70 com os trabalhos de Rozko [27, 28]. Em 1990, a partir das ideias envolvidas na teoria de equações diferenciais impulsivas, Kaul em [19], formalizou o conceito de um sistema semidinâmico impulsivo, construindo uma base a ser adotada por diversos outros pesquisadores. Entre eles, podemos citar Ciesielski que, em seus trabalhos [13, 14], apresentou uma grande contribuição para o desenvolvimento do estudo de invariância e estabilidade de Lyapunov. Um dos principais resultados apresentados por ele foi a equivalência das noções de estabilidade de Lyapunov para o caso de um conjunto compacto. Além disso, esse mesmo resultado caracteriza a estabilidade através de prolongamentos. Uma outra forte contribuição fornecida por Ciesielski foi o estudo sobre a continuidade da função ϕ, que descreve o momento em que os impulsos ocorrem. Percebemos durante todo este trabalho a importância de estabelecer condições que garantem a continuidade dessa função.

No ano de 2009, Bonotto e Federson apresentaram em [6] um estudo sobre os conceitos relacionados à recursividade, mais especificamente, a estabilidade de Poisson e os pontos não vagantes. Foram apresentados nesse trabalho diversos resultados clássicos dessa teoria, como por exemplo, as caracterizações de um ponto positivamente Poisson estável e um importante resultado envolvendo um ponto desse tipo no caso em que sua órbita e seu conjunto limite são diferentes. No ano seguinte, em [7], Bonotto e Grulha Jr. também contribuíram fortemente para o desenvolvimento do estudo de estabilidade de Lyapunov, apresentando caracterizações de diversos tipos de estabilidade através da existência de funcionais de Lyapunov.

O propósito deste trabalho é estabelecer uma definição para um sistema de controle afim impulsivo e, a partir dela, reproduzir resultados clássicos encontrados na teoria de sistemas dinâmicos relacionados aos conceitos de invariância, estabilidade e recursividade. Além disso, tendo como motivação o sistema de controle afim impulsivo, desenvolvemos um estudo sobre ações de semigrupos impulsivas.

Nesse sentido, vamos considerar o seguinte sistema de controle afim

$$\dot{x}(t) = \mathrm{X}(x(t), u(t)) = \mathrm{X}_0(x(t)) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\,\mathrm{X}_i(x(t)),$$
$$u \in \mathcal{U}_{cp} = \{u : \mathbb{R} \to U : u \text{ constante por partes}\},$$

onde o espaço de fase é uma variedade M de classe C^∞ e de dimensão d, o conjunto de controle $U \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e convexo, os campos de vetores $\mathrm{X}_0, ..., \mathrm{X}_n$ sobre M são C^∞, e $u_1, ..., u_n$ são funções a valores reais tais que $u(t) = (u_1(t), ..., u_n(t)) \in U \subset \mathbb{R}^n$. Como mostrado em ([15, Capítulo IV]), esse tipo de sistema de controle determina um sistema dinâmico não autônomo.

A primeira etapa é estabelecer qual será a definição adotada para um sistema de controle impulsivo. Atualmente, existem três formulações possíveis para sistemas de controle impulsivos. A primeira delas considera um sistema dado por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathrm{X}(x(t), u(t)), \text{ se } t \notin \mathcal{T} \\ x(\tau) = g(\tau, x(\tau^-), v_\tau), \text{ se } \tau \in \mathcal{T}, \end{cases}$$

onde

- $\mathcal{T} \subset [a, b]$ é o conjunto formado pelos tempos impulsivos;
- g é a função de salto.

Considerando o tempo impulsivo τ, o ponto de entrada $x(\tau^-) = \lim_{t \to \tau^-} x(t)$ e a escolha da regra de salto v_τ, a função g determina o ponto de saída $x(\tau)$ do salto no momento $t = \tau$. Assim, os impulsos são determinados pelos tempos impulsivos e cada trajetória possui uma quantidade infinita de impulsos. Ainda, esse tipo de sistema irá descrever três tipos diferentes de sistema de controle impulsivo, dependendo se tivermos: u ausente, v ausente, ou u e v presentes. Nos referimos a [20, 34, 35, 36]), para mais detalhes sobre essa formulação.

A segunda formulação considera um sistema de controle impulsivo determinado por uma medida. Ele é definido como um sistema perturbado

$$dx(t) = \mathrm{X}(x(t), u(t))\,dt + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Y}_i(x(t))\,\mu_i(dt) \qquad \text{q.t.p. } t \in [0, +\infty),$$

onde

- $M = \mathbb{R}^d$;
- para cada $i = 1, ..., n$, μ_i é uma medida de Borel regular a valores reais definida sobre os subconjuntos de Borel de $[0, \infty)$.

Nesse caso, as medidas são responsáveis por caracterizar os impulsos do sistema. Para mais detalhes sobre essa formulação, nos referimos a [1, 2, 3, 12, 18, 23, 24, 25].

Mais recentemente, foi introduzida a definição de um sistema dinâmico não autônomo impulsivo nos trabalhos [4, 5] de Bonotto, Bortolan, Caraballo e Collegari. Sendo assim, a terceira formulação de um sistema de controle impulsivo pode ser extraída desse contexto. Seguindo a base construída por Kaul, o sistema dinâmico não autônomo impulsivo é determinado por um conjunto impulsivo M_φ e uma função impulsiva $I : M_\varphi \to M$. Dada uma função de controle u, a trajetória com respeito a u sofrerá um impulso no momento em que ela encontrar o conjunto impulsivo M_φ. Notemos que isso não ocorre necessariamente sempre. Isso significa que, em um sistema não autônomo impulsivo, podem existir trajetórias com uma quantidade finita de impulsos ou até mesmo sem nenhum impulso, como é o caso de uma trajetória estacionária do sistema original. Outro fator importante é que os intervalos de tempo entre dois impulsos consecutivos não precisam ter um comprimento determinado. Assim, a principal diferença entre essa formulação e as duas anteriores é que os impulsos dependem da posição do estado e não do tempo.

Para este trabalho, decidimos optar pela terceira formulação. Essa escolha se justifica principalmente pelo fato de que ela nos permite fornecer uma estrutura de semigrupo para o sistema de controle impulsivo. Trata-se de uma grande vantagem, pois, sempre que possível, podemos utilizar estratégias extraídas do contexto de ações de semigrupos para obter resultados em um sistema de controle. Além disso, para introduzir a definição de uma ação de semigrupo impulsiva, também seguimos a linha dessa terceira formulação, ou seja, a base construída por Kaul. Percebemos ao longo deste estudo a generalidade das aplicações da teoria de ações de semigrupos contínuas, uma vez que, frequentemente, será possível utilizar as técnicas envolvidas nessa teoria em sistemas de controle afins impulsivos e ações de semigrupos impulsivas.

Para expor os assuntos aqui tratados, este trabalho está organizado da seguinte forma. O Capítulo 1 é dedicado à apresentação de um sistema de controle afim impulsivo e dos conceitos relacionados a esse tipo de sistema. Desse modo, na primeira seção, vamos relembrar a definição de um sistema de controle afim convencional e descrever sua estrutura de semigrupo, apresentando, assim, o semigrupo do sistema $\mathcal{S}$. A partir desse sistema, construímos um sistema de controle afim impulsivo que será determinado a partir de um conjunto impulsivo M_φ e uma função impulsiva $I : M_\varphi \to M$. Explicamos detalhadamente como se comportam os impulsos, definindo, desse modo, as semitrajetórias positivas impulsivas. Por fim, como no caso convencional, mostramos como fornecer uma estrutura de semigrupo para esse tipo de sistema, obtendo o semigrupo do sistema impulsivo $\widetilde{\mathcal{S}}$. A segunda seção é destinada ao estudo de uma questão de extrema importância ao desenvolvimento de diversos resultados deste trabalho. Trata-se da continuidade da função ϕ, que descreve os momentos em que os impulsos ocorrem. Vamos mostrar que se cada elemento do conjunto impulsivo M_φ satisfaz a denominada condição forte de tubo com respeito a φ, então ϕ é contínua em $(M \backslash M_\varphi) \times \mathcal{U}$, onde $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}_{cp}}$.

O Capítulo 2 é destinado ao estudo dos conceitos de invariância e estabilidade de Lyapunov para sistemas de controle afins impulsivos. Na Seção 1, analisamos quais são as condições adequadas para obter relações entre os conceitos de invariância para o sistema de controle impulsivo e para o sistema de controle original. Um dos requisitos necessários é a definição de uma noção de invariância relacionada à função impulsiva I. Por fim, mostramos que essa definição, denominada de invariância por I, irá garantir que toda componente conexa de um conjunto fechado e invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$ também será invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Na segunda seção, definimos as noções de estabilidade de Lyapunov para um sistema de controle impulsivo. Um dos principais resultados dessa seção traz a equivalência de todas essas noções para um conjunto compacto e, ainda, caracteriza a estabilidade através dos prolongamentos. Em seguida, exibimos exemplos que ilustram que não existe uma ligação direta entre as estabilidades por $\mathcal{S}$ e por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Desse modo, adicionamos hipóteses que permitem relacionar esses dois conceitos. Para encerrar a seção, investigamos a estabilidade por $\widetilde{\mathcal{S}}$ de uma componente conexa de um conjunto compacto e estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. A última seção desse capítulo apresenta uma caracterização para cada tipo de estabilidade para um sistema de controle impulsivo através de um funcional de Lyapunov. São considerados dois casos: no primeiro, tratamos de um caso geral, onde não é preciso exigir nenhuma condição a mais sobre o sistema, nesse caso, obtemos funcionais que não necessariamente são contínuos; para garantir essa continuidade, o segundo caso trabalha com uma classe especial de sistemas de controle impulsivos. Os resultados obtidos nos Capítulos 1 e 2 compõem o artigo [31].

Com relação ao Capítulo 3, são tratados aqui alguns conceitos recursivos, como a estabilidade de Poisson positiva por $\widetilde{\varphi}$, recorrência e pontos não vagantes com respeito a $\widetilde{\varphi}$. Assim, a primeira seção é destinada à apresentação de tais conceitos, seguida de um exemplo. Na Seção 2, apresentamos as caracterizações de um ponto positivamente Poisson estável por $\widetilde{\varphi}$. Em particular, isso estabelece uma relação imediata entre tais pontos e os pontos denominados Poincaré recorrentes com respeito a $\widetilde{\mathcal{F}}$. Um outro resultado interessante apresentado nessa seção garante a invariância positiva por $\widetilde{\mathcal{S}}$ do conjunto formado pelos pontos positivamente Poisson estáveis por $\widetilde{\varphi}$, desde que a base de filtro $\widetilde{\mathcal{F}}$ satisfaça uma hipótese de translação. A seção seguinte aborda os resultados que estabelecem relações entre os pontos não vagantes com respeito a $\widetilde{\varphi}$ e os pontos positivamente Poisson estáveis por $\widetilde{\varphi}$. Por fim, na Seção 4, reproduzimos uma versão para sistemas de controle impulsivos do importante Teorema da Recorrência de Poincaré.

O último capítulo tem como objetivo introduzir a teoria impulsiva no contexto de ações de semigrupos. Nesse sentido, na primeira seção, vamos recordar a definição de uma ação de semigrupo contínua e, a partir dela, introduzir uma definição para a ação impulsiva, dada através de um conjunto impulsivo M_π e uma função impulsiva $I : M_\pi \to M$, seguindo a base formulada por Kaul. A próxima etapa é reproduzir alguns dos resultados obtidos nos capítulos anteriores nesse novo contexto. Para isso, é necessário considerar um espaço que tenha propriedades análogas aos espaços métricos. Um espaço adequado para esse caso é o espaço de Tychonoff, que admite uma família admissível de coberturas abertas. Essa família garante a existência de conjuntos que se comportam de modo análogo às ϵ-vizinhanças, viabilizando, assim, o estudo nesse espaço. Dedicamos, então, a segunda seção à apresentação dos conceitos básicos existentes na teoria de famílias admissíveis de coberturas abertas. Encerramos nosso trabalho com as Seções 3 e 4 que contêm os resultados alcançados referentes aos conceitos de invariância e estabilidade de Lyapunov para ações de semigrupos impulsivas.

Capítulo

1

Sistemas de controle afins impulsivos

Para dar início ao nosso estudo, introduzimos a definição de um sistema de controle impulsivo e apresentamos o semigupo do sistema impulsivo $\widetilde{\mathcal{S}}$, a partir do qual é possível analisar elementos da teoria da estabilidade no contexto de uma ação de semigrupo, como realizado em [8, 9, 10]. Antes de apresentar os resultados principais deste trabalho, investigamos a continuidade da função ϕ, que é bastante utilizada durante todo esse estudo.

1.1 Sistemas de controle afins impulsivos

Iniciamos este capítulo apresentando o tipo de sistema de controle utilizado neste trabalho. A partir dele, foi construída a definição de um sistema de controle impulsivo, onde são estudados os conceitos de invariância e estabilidade. Finalizamos esta seção descrevendo uma estrutura de semigrupo para esse tipo de sistema. Nos referimos a [15], para a teoria de sistemas de controle.

Consideremos o sistema de controle afim

$$\begin{gathered} \dot{x}\left(t\right) = \mathrm{X}\left(x\left(t\right), u\left(t\right)\right) = \mathrm{X}_0\left(x\left(t\right)\right) + \sum_{i=1}^{n} u_i\left(t\right)\mathrm{X}_i\left(x\left(t\right)\right), \\ u \in \mathcal{U}_{cp} = \{u : \mathbb{R} \to U : u \text{ constante por partes}\}, \end{gathered} \tag{1.1}$$

onde o espaço de fase é uma variedade M de classe C^∞ e de dimensão d, o conjunto de controle $U \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e convexo, os campos de vetores $\mathrm{X}_0, ..., \mathrm{X}_n$ sobre M são C^∞, e $u_1, ..., u_n$ são funções a valores reais tais que $u\left(t\right) = \left(u_1\left(t\right), ..., u_n\left(t\right)\right) \in U \subset \mathbb{R}^n$. Assumimos que, para cada $u \in \mathcal{U}_{cp}$ e $x \in M$, a equação (1.1) possui uma única solução $\varphi\left(t, x, u\right)$, $t \in \mathbb{R}$, com $\varphi\left(0, x, u\right) = x$, e os campos de vetores $\mathrm{X}\left(\cdot, u\right)$ $\left(u \in U\right)$ são completos (veja [15, Apêndice A], para mais detalhes).

Apresentamos, a seguir, definições e propriedades básicas para esse tipo de sistema.

Definição 1.1.1. *Consideremos as funções de controle* $u_1, ..., u_k \in \mathcal{U}_{cp}$ *e os números* $s_1 < s_2 < ... < s_{k-1}$. *Definimos a* $(s_1, ..., s_{k-1})$***-concatenação de*** $u_1, ..., u_k$ *como sendo* *a função de controle* $(u_1, ..., u_k)(s_1, ..., s_{k-1})$ *dada por*

$$(u_1, ..., u_k)(s_1, ..., s_{k-1})(t) = \begin{cases} u_1(t), \ \ se\ t \leqslant s_1 \\ u_2(t - s_1), \ \ se\ s_1 < t \leq s_2 \\ \vdots \\ u_k(t - s_{k-1}), \ \ se\ t > s_{k-1}. \end{cases}$$

A proposição, a seguir, mostra que é possível obter todas as soluções do sistema de controle apenas reunindo as soluções para as funções de controle constantes.

Proposição 1.1.1. *Sejam* $u \in \mathcal{U}_{cp}$ *e* $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N$ *tais que*

$$u(t) = \begin{cases} u_1, \ \ se\ 0 \leq t \leq t_1 \\ u_2, \ \ se\ t_1 < t \leq t_1 + t_2 \\ \vdots \\ u_N, \ \ se\ \sum\limits_{i=0}^{N-1} t_i < t \leq \sum\limits_{i=0}^{N} t_i. \end{cases}$$

Então,

$$\varphi(t, x, u) = \exp\left(\left(t - \sum_{i=0}^{k-1} t_i\right) \mathrm{X}_{u_k}\right) \exp\left(t_{k-1}\mathrm{X}_{u_{k-1}}\right) \cdots \exp\left(t_1 \mathrm{X}_{u_1}\right)(x),$$

para todo $x \in M$ *e* $\sum\limits_{i=0}^{k-1} t_i \leq t \leq \sum\limits_{i=0}^{k} t_i$*,* $k = 1, ..., N$*.*

Demonstração. Veja [30, Proposição 1.1.3]. □

Isto significa que o sistema de controle (1.1) é determinado pelo conjunto de campos de vetores $F = \{\mathrm{X}(\cdot, u) : \ u \in U\}$ e pelo *semigrupo do sistema* $\mathcal{S}$ definido por

$$\mathcal{S} = \{\exp(t_n X_n) \exp(t_{n-1} X_{n-1}) \cdots \exp(t_1 X_1) : X_j \in F, t_j \geq 0, n \in \mathbb{N}\}.$$

Consequentemente, a órbita positiva $\mathcal{O}^+(x)$ e a órbita negativa $\mathcal{O}^-(x)$ coincidem com $\mathcal{S}(x)$ e $\mathcal{S}^{-1}(x)$, respectivamente, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(x) &= \mathcal{O}^+(x) = \{\varphi(t, x, u) : t \geq 0, u \in \mathcal{U}_{cp}\}, \\ \mathcal{S}^{-1}(x) &= \mathcal{O}^-(x) = \{\varphi(-t, x, u) : t \geq 0, u \in \mathcal{U}_{cp}\}, \end{aligned}$$

para todo $x \in M$. Desse modo, as trajetórias de um sistema de controle são determinadas pelos campos de vetores em F e pelo semigrupo do sistema $\mathcal{S}$. Vejamos, a seguir, um exemplo que ilustra esse método para a obtenção de um sistema de controle.

Exemplo 1.1.1. *Consideremos o sistema de controle sobre* $M = \mathbb{R}^2$ *determinado pelos campos de vetores* $\{X, Y\}$ *dados por*

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad e \quad Y = \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

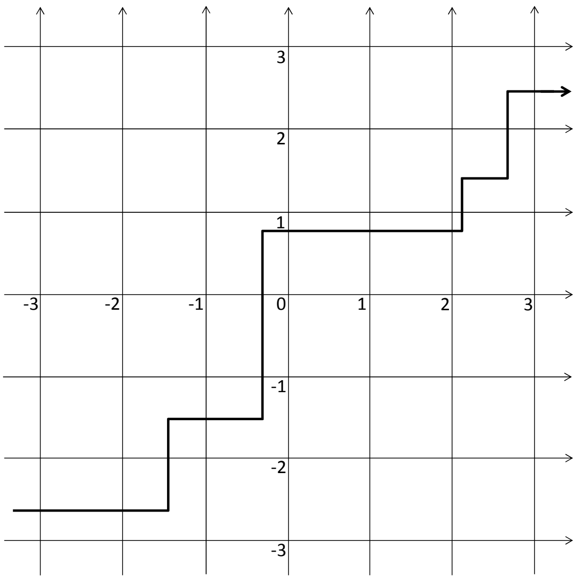

Figura 1.1: Exemplo de uma trajetória do sistema de controle.

As trajetórias de X são retas horizontais. As trajetórias de Y são retas verticais. Reunindo todas essas trajetórias, obtemos todas as trajetórias do sistema de controle. A Figura 1.1 ilustra uma trajetória do sistema de controle, reunindo trajetórias de X e Y.

Considerando a topologia fraca* de $L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, temos que o fecho $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}_{cp}}$ é um espaço métrico compacto. Além disso, a aplicação de fase dada por

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \times \mathcal{U} \to M, \quad (t, x, u) \mapsto \varphi(t, x, u)$$

é contínua (veja [15, Capítulo 4]).

A próxima definição apresenta o conceito de uma nova função de controle determinada a partir de outra através de uma translação. Essa função é utilizada na conhecida propriedade chamada de cociclo.

Definição 1.1.2. *Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $u : \mathbb{R} \to U$ uma função de controle. Definimos o* s***-shift*** *de u como sendo a função $u \cdot s : \mathbb{R} \to U$ dada por*

$$u \cdot s(t) = u(s+t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Tal função define um sistema dinâmico sobre $\mathcal{U}$ dado por $\theta : \mathcal{U} \times \mathbb{R} \to \mathcal{U}$, $\theta(u, s) = u \cdot s$. As soluções do sistema de controle satisfazem a propriedade chamada de **cociclo**

$$\varphi(t+s, x, u) = \varphi(t, \varphi(s, x, u), u \cdot s),$$

ou seja,

$$\varphi(t+s, x, u) = \varphi(t, \varphi(s, x, u), \theta(u, s)).$$

Assim, φ e θ determinam um sistema dinâmico não autônomo como definido em [5, Definição 2.1]. Desse modo, definimos um sistema de controle impulsivo seguindo a metodologia de [4, 5].

Definição 1.1.3. *Um* ***sistema de controle afim impulsivo*** *consiste de um sistema de controle (1.1) junto com um subconjunto não vazio e fechado M_φ de M tal que, para cada $x \in M_\varphi$ e cada $u \in \mathcal{U}_{cp}$, existe um $\epsilon > 0$ tal que*

$$\{\varphi(t,x,u) : t \in (-\epsilon, 0)\} \cap M_\varphi = \emptyset \quad e \quad \{\varphi(t,x,u) : t \in (0,\epsilon)\} \cap M_\varphi = \emptyset,$$

e uma aplicação contínua $I : M_\varphi \to M$. O conjunto M_φ é chamado de ***conjunto impulsivo*** *e a aplicação I é chamada de* ***função impulsiva****.*

Para analisar uma semitrajetória impulsiva, é fundamental saber se a semitrajetória com respeito ao sistema de controle original, de fato, atinge o conjunto impulsivo M_φ. Assim, para cada $x \in M$ e cada $u \in \mathcal{U}$, definimos o conjunto

$$M_\varphi^+(x,u) = \{\varphi(t,x,u) : t > 0\} \cap M_\varphi.$$

Se $M_\varphi^+(x,u) \neq \emptyset$, então existe $s > 0$ tal que $\varphi(s,x,u) \in M_\varphi$ e $\varphi(t,x,u) \notin M_\varphi$, para todo $t \in (0,s)$. Essa propriedade nos permite definir uma função $\phi : M \times \mathcal{U} \to (0,+\infty]$ dada por

$$\phi(x,u) = \begin{cases} s, \text{ se } \varphi(s,x,u) \in M_\varphi \text{ e } \varphi(t,x,u) \notin M_\varphi, \text{ para } t \in (0,s) \\ +\infty, \text{ se } M_\varphi^+(x,u) = \emptyset. \end{cases}$$

Notemos que o valor $\phi(x,u)$ é o menor tempo positivo tal que a semitrajetória positiva de x com respeito ao controle u encontra M_φ. Se $\phi(x,u) < +\infty$, o ponto $\varphi(\phi(x,u),x,u) \in M_\varphi$ é chamado de **ponto impulsivo** de x com respeito ao controle u.

Definimos, então, a **semitrajetória positiva impulsiva** de $x \in M$ com respeito a $u \in \mathcal{U}$ como sendo uma aplicação $\widetilde{\varphi}(\cdot,x,u)$ definida em um intervalo $J_{(x,u)} \subset \mathbb{R}^+$, com $0 \in J_{(x,u)}$, dada de modo indutivo pela seguinte regra:

- Se $M_\varphi^+(x,u) = \emptyset$, então definimos

  $$\widetilde{\varphi}(t,x,u) = \varphi(t,x,u),$$

  para todo $t \in \mathbb{R}^+$ e, nesse caso, $\phi(x,u) = +\infty$.

- Se $M_\varphi^+(x,u) \neq \emptyset$, então definimos $\widetilde{\varphi}(\cdot,x,u)$ sobre $[0,\phi(x,u)]$ pondo

  $$\widetilde{\varphi}(t,x,u) = \begin{cases} \varphi(t,x,u), \text{ se } 0 \leq t < \phi(x,u) \\ I(\varphi(\phi(x,u),x,u)), \text{ se } t = \phi(x,u). \end{cases}$$

  Utilizamos as seguintes notações:

  $$x_0^+ = x,\ s_0 = \phi\left(x_0^+,u\right),\ x_1 = \varphi\left(s_0,x_0^+,u\right) \text{ e } x_1^+ = I\left(\varphi\left(s_0,x_0^+,u\right)\right).$$

  Nesse caso, $s_0 < +\infty$ e o processo continua, porém iniciando agora em x_1^+ com a função de controle $u \cdot s_0$.

- Se $M_{\varphi}^{+}\left(x_1^{+}, u\cdot s_0\right)=\emptyset$, então definimos
$$\widetilde{\varphi}\left(t,x,u\right)=\varphi\left(t-s_0,x_1^{+},u\cdot s_0\right),$$
para todo $t\in[s_0,+\infty)$ e, nesse caso, $\phi\left(x_1^{+},u\cdot s_0\right)=+\infty$.

- Se $M_{\varphi}^{+}\left(x_1^{+}, u\cdot s_0\right)\neq\emptyset$, então definimos $\widetilde{\varphi}\left(\cdot,x,u\right)$ sobre $\left[s_0,s_0+\phi\left(x_1^{+},u\cdot s_0\right)\right]$ pondo
$$\widetilde{\varphi}\left(t,x,u\right)=\begin{cases}\varphi\left(t-s_0,x_1^{+},u\cdot s_0\right), \text{ se } s_0\leq t<s_0+\phi\left(x_1^{+},u\cdot s_0\right)\\ I\left(\varphi\left(\phi\left(x_1^{+},u\cdot s_0\right),x_1^{+},u\cdot s_0\right)\right), \text{ se } t=s_0+\phi\left(x_1^{+},u\cdot s_0\right).\end{cases}$$
Utilizamos, então, as seguintes notações:
$$s_1=\phi\left(x_1^{+},u\cdot s_0\right),\ x_2=\varphi\left(s_1,x_1^{+},u\cdot s_0\right)\ \text{e}\ x_2^{+}=I\left(\varphi\left(s_1,x_1^{+},u\cdot s_0\right)\right).$$

Esse processo é finalizado após um número finito de passos se $M_{\varphi}^{+}\left(x_n^{+},u\cdot\sum_{i=0}^{n-1}s_i\right)=\emptyset$, para algum $n\in\mathbb{N}$, ou ele pode continuar indefinidamente e, nesse caso, temos que $M_{\varphi}^{+}\left(x_n^{+},u\cdot\sum_{i=0}^{n-1}s_i\right)\neq\emptyset$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Denotemos
$$s_n=\phi\left(x_n^{+},u\cdot\sum_{i=0}^{n-1}s_i\right),\ x_{n+1}=\varphi\left(s_n,x_n^{+},u\cdot\sum_{i=0}^{n-1}s_i\right)\ \text{e}\ x_{n+1}^{+}=I\left(\varphi\left(s_n,x_n^{+},u\cdot\sum_{i=0}^{n-1}s_i\right)\right)$$
e $\widetilde{\varphi}\left(\cdot,x,u\right)$ é definido no intervalo $[0,T\left(x,u\right))$, onde $T\left(x,u\right)=\sum_{i=0}^{+\infty}s_i$, pondo
$$\widetilde{\varphi}\left(t,x,u\right)=\begin{cases}\varphi\left(t-\sum_{i=0}^{n-1}s_i,x_n^{+},u\cdot\sum_{i=0}^{n-1}s_i\right), \text{ se } \sum_{i=0}^{n-1}s_i\leq t<\sum_{i=0}^{n}s_i\\ I\left(\varphi\left(s_n,x_n^{+},u\cdot\sum_{i=0}^{n-1}s_i\right)\right), \text{ se } t=\sum_{i=0}^{n-1}s_i.\end{cases}$$

Como feito em [4, 5], assumimos a partir de agora que $T\left(x,u\right)=+\infty$, para todo $x\in M$ e $u\in\mathcal{U}$. Essa construção nos fornece uma aplicação $\widetilde{\varphi}:\mathbb{R}^{+}\times M\times\mathcal{U}\to M$, que preserva a propriedade do cociclo
$$\widetilde{\varphi}\left(t+s,x,u\right)=\widetilde{\varphi}\left(t,\widetilde{\varphi}\left(s,x,u\right),u\cdot s\right),$$
para todo $x\in M$ e $t,s\geq 0$ ([4, Corolário 2.13]).

Para cada $x\in M$, definimos a órbita impulsiva positiva como
$$\widetilde{\mathcal{O}}^{+}\left(x\right)=\left\{\widetilde{\varphi}\left(t,x,u\right):t\geq 0,u\in\mathcal{U}_{cp}\right\}.$$

Consideremos, agora, $x\in M$, $t_1,...,t_k\geq 0$ e $u_1,...,u_{k+1}\in\mathcal{U}_{cp}$ e definimos v como sendo a $\left(t_1,t_1+t_2,...,\sum_{i=1}^{k}t_i\right)$-concatenação de $u_1,...,u_{k+1}$. A proposição seguinte mostra como relacionar o instante $\phi\left(x,v\right)$ com os momentos de impulso com respeito a cada um dos controles u_i, $i=1,...,k+1$.

Proposição 1.1.2. *Sejam $x \in M$, $t_1, ..., t_k \geq 0$, $u_1, ..., u_{k+1} \in \mathcal{U}_{cp}$ e consideremos $v = (u_1, ..., u_{k+1}) \left(t_1, t_1 + t_2, ..., \sum_{i=1}^{k} t_i\right)$. Então,*

$$\begin{aligned}
\phi(x, v) &= \phi(x, u_1), \quad \text{se } \phi(x, u_1) \leq t_1, \\
\phi(x, v) &= t_1 + \phi(\varphi(t_1, x, u_1), u_2), \quad \text{se } t_1 < \phi(x, u_1) \text{ e } \phi(\varphi(t_1, x, u_1), u_2) \leq t_2, \\
&\vdots \\
\phi(x, v) &= \sum_{i=1}^{k} t_i + \phi\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^{k} t_i, x, (u_1, ..., u_k)\left(t_1, ..., \sum_{i=1}^{k-1} t_i\right)\right), u_{k+1}\right), \\
&\quad \text{se } t_1 < \phi(x, u_1), ..., t_k < \phi\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^{k-1} t_i, x, (u_1, ..., u_{k-1})\left(t_1, ..., \sum_{i=1}^{k-2} t_i\right)\right), u_k\right).
\end{aligned}$$

Demonstração. Provemos este resultado por indução. Assim, suponhamos que $k = 1$. Se $\phi(x, u_1) \leq t_1$, então $\varphi(\phi(x, u_1), x, v) = \varphi(\phi(x, u_1), x, u_1) \in M_\varphi$. Ainda, notemos que $\varphi(t, x, v) = \varphi(t, x, u_1) \notin M_\varphi$, para todo $0 < t < \phi(x, u_1)$. Portanto, $\phi(x, v) = \phi(x, u_1)$.

Agora, se $t_1 < \phi(x, u_1)$, então $\varphi(t, x, u_1) \notin M_\varphi$, para todo $t \in [0, t_1]$ e, portanto, $\varphi(t, x, v) \notin M_\varphi$, para todo $t \in [0, t_1]$. Além disso, se $\phi(\varphi(t_1, x, u_1), u_2) < +\infty$, então

$$\varphi(t_1 + \phi(\varphi(t_1, x, u_1), u_2), x, v) = \varphi(\phi(\varphi(t_1, x, u_1), u_2), \varphi(t_1, x, u_1), u_2) \in M_\varphi.$$

Notemos, ainda, que

$$\varphi(t_1 + t, x, v) = \varphi(t, \varphi(t_1, x, u_1), u_2) \notin M_\varphi,$$

para todo $0 < t < \phi(\varphi(t_1, x, u_1), u_2)$. Portanto, $\phi(x, v) = t_1 + \phi(\varphi(t_1, x, u_1), u_2)$.

No caso em que $\phi(\varphi(t_1, x, u_1), u_2) = +\infty$, temos que $\varphi(t, \varphi(t_1, x, u_1), u_2) \notin M_\varphi$, para todo $t > 0$, ou seja, $\varphi(t_1 + t, x, v) \notin M_\varphi$, para todo $t > 0$. Portanto, $\phi(x, v) = +\infty$.

Agora, suponhamos, por indução, que o resultado seja válido para $k - 1$ e que $w = (u_1, ..., u_k)\left(t_1, ..., \sum_{i=1}^{k-1} t_i\right)$. Notemos que $v = (w, u_{k+1})\left(\sum_{i=1}^{k} t_i\right)$. Assim, supondo que

$$t_1 < \phi(x, u_1), ..., t_{k-1} < \phi\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^{k-2} t_i, x, (u_1, ..., u_{k-2})\left(t_1, ..., \sum_{i=1}^{k-3} t_i\right)\right), u_{k-1}\right),$$

segue, da hipótese de indução, que

$$\phi(x, w) = \sum_{i=1}^{k-1} t_i + \phi\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^{k-1} t_i, x, (u_1, ..., u_{k-1})\left(t_1, ..., \sum_{i=1}^{k-2} t_i\right)\right), u_k\right).$$

Se $\phi\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^{k-1} t_i, x, (u_1, ..., u_{k-1})\left(t_1, ..., \sum_{i=1}^{k-2} t_i\right)\right), u_k\right) \leq t_k$, temos que $\phi(x, w) \leq \sum_{i=1}^{k} t_i$. Daí,

$$\varphi(\phi(x, w), x, v) = \varphi\left(\phi(x, w), x, (w, u_{k+1})\left(\sum_{i=1}^{k} t_i\right)\right) = \varphi(\phi(x, w), x, w) \in M_\varphi.$$

Ainda, $\varphi(t,x,v) = \varphi(t,x,w) \notin M_\varphi$, para todo $0 < t < \phi(x,w)$. Portanto,

$$\phi(x,v) = \phi(x,w) = \sum_{i=1}^{k-1} t_i + \phi\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^{k-1} t_i, x, (u_1,...,u_{k-1})\left(t_1,...,\sum_{i=1}^{k-2} t_i\right)\right), u_k\right).$$

Agora, se $t_k < \phi\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^{k-1} t_i, x, (u_1,...,u_{k-1})\left(t_1,...,\sum_{i=1}^{k-2} t_i\right)\right), u_k\right)$, então $\sum_{i=1}^{k} t_i < \phi(x,w)$ e, portanto, $\varphi(t,x,w) \notin M_\varphi$, para todo $t \in \left[0, \sum_{i=1}^{k} t_i\right]$. Isto significa que $\varphi(t,x,v) \notin M_\varphi$, para todo $t \in \left[0, \sum_{i=1}^{k} t_i\right]$. Além disso, se $\phi\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^{k} t_i, x, w\right), u_{k+1}\right) < +\infty$, então

$$\begin{aligned} &\varphi\left(\sum_{i=1}^{k} t_i + \phi\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^{k} t_i, x, w\right), u_{k+1}\right), x, v\right) \\ = \; &\varphi\left(\phi\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^{k} t_i, x, w\right), u_{k+1}\right), \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} t_i, x, w\right), u_{k+1}\right) \in M_\varphi, \end{aligned}$$

Notemos que

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{k} t_i + t, x, v\right) = \varphi\left(t, \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} t_i, x, w\right), u_{k+1}\right) \notin M_\varphi,$$

para todo $0 < t < \phi\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^{k} t_i, x, w\right), u_{k+1}\right)$. Portanto,

$$\phi(x,v) = \sum_{i=1}^{k} t_i + \phi\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^{k} t_i, x, w\right), u_{k+1}\right).$$

No caso em que $\phi\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^{k} t_i, x, w\right), u_{k+1}\right) = +\infty$, obtemos que

$$\varphi\left(t, \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} t_i, x, w\right), u_{k+1}\right) \notin M_\varphi,$$

para todo $t > 0$, ou seja, $\varphi\left(\sum_{i=1}^{k} t_i + t, x, v\right) \notin M_\varphi$, para todo $t > 0$. Portanto, $\phi(x,v) = +\infty$. □

Tendo definido o sistema de controle impulsivo, o propósito agora é fornecer uma estrutura de semigrupo para esse sistema, assim como no caso convencional. Desse modo, para cada função de controle constante $u \in U$ e cada $t \in \mathbb{R}^+$, consideremos a aplicação $\widetilde{\exp}(t\mathrm{X}_u) : M \to M$ dada por

$$\widetilde{\exp}(t\mathrm{X}_u)(x) = \widetilde{\varphi}(t,x,u).$$

O **semigrupo do sistema impulsivo** $\widetilde{\mathcal{S}}$ é definido por

$$\widetilde{\mathcal{S}} = \left\{ \widetilde{\exp}\left(t_n X_n\right) \circ \cdots \circ \widetilde{\exp}\left(t_1 X_1\right) : X_j \in F, t_j \geq 0, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Vamos mostrar que as semitrajetórias positivas impulsivas do sistema de controle (1.1) são determinadas pelo semigrupo $\widetilde{\mathcal{S}}$, ou seja, $\widetilde{\mathcal{S}}\left(x\right) = \widetilde{\mathcal{O}}^{+}\left(x\right)$, para todo $x \in M$. Para isso, vamos precisar da seguinte proposição.

Proposição 1.1.3. *Sejam $u, v \in \mathcal{U}_{cp}$ e $s \geq 0$. Então,*

$$\widetilde{\varphi}\left(t, x, \left(u, v\right)\left(s\right)\right) = \begin{cases} \widetilde{\varphi}\left(t, x, u\right), \ \text{se } 0 \leq t \leq s \\ \widetilde{\varphi}\left(t - s, \widetilde{\varphi}\left(s, x, u\right), v\right), \ \text{se } t > s, \end{cases}$$

para todo $x \in M$.

Demonstração. Sejam $x \in M$, $u, v \in \mathcal{U}_{cp}$ e $s \geq 0$. No caso convencional, temos que

$$\varphi\left(t, x, \left(u, v\right)\left(s\right)\right) = \begin{cases} \varphi\left(t, x, u\right), \text{ se } t \leq s \\ \varphi\left(t - s, \varphi\left(s, x, u\right), v\right), \text{ se } t > s \end{cases}$$

(veja [30, Proposição 1.1.2]). Assim, se $0 \leq t \leq s$, temos imediatamente que

$$\widetilde{\varphi}\left(t, x, \left(u, v\right)\left(s\right)\right) = \widetilde{\varphi}\left(t, x, u\right).$$

Suponhamos que $t > s$. Pelo caso anterior, em particular, $\widetilde{\varphi}\left(s, x, \left(u, v\right)\left(s\right)\right) = \widetilde{\varphi}\left(s, x, u\right)$. Daí,

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}\left(t, x, \left(u, v\right)\left(s\right)\right) &= \widetilde{\varphi}\left(t - s + s, x, \left(u, v\right)\left(s\right)\right) \\ &= \widetilde{\varphi}\left(t - s, \widetilde{\varphi}\left(s, x, \left(u, v\right)\left(s\right)\right), \left(u, v\right)\left(s\right) \cdot s\right) \\ &= \widetilde{\varphi}\left(t - s, \widetilde{\varphi}\left(s, x, u\right), \left(u \cdot s, v\right)\left(0\right)\right). \end{aligned}$$

Afirmamos que $\widetilde{\varphi}\left(\tau, y, \left(u \cdot s, v\right)\left(0\right)\right) = \widetilde{\varphi}\left(\tau, y, v\right)$, para quaisquer $y \in M$ e $\tau > 0$. De fato, basta notar que

$$\varphi\left(\tau, y, \left(u \cdot s, v\right)\left(0\right)\right) = \varphi\left(\tau, \varphi\left(0, y, u \cdot s\right), v\right) = \varphi\left(\tau, y, v\right),$$

para quaisquer $y \in M$ e $\tau > 0$. Assim, em particular,

$$\widetilde{\varphi}\left(t - s, \widetilde{\varphi}\left(s, x, u\right), \left(u \cdot s, v\right)\left(0\right)\right) = \widetilde{\varphi}\left(t - s, \widetilde{\varphi}\left(s, x, u\right), v\right)$$

e, portanto,

$$\widetilde{\varphi}\left(t, x, \left(u, v\right)\left(s\right)\right) = \widetilde{\varphi}\left(t - s, \widetilde{\varphi}\left(s, x, u\right), v\right).$$

□

Como consequência da Proposição 1.1.3, apresentamos o seguinte corolário.

Corolário 1.1.1. *Sejam $k \geq 2$, $t_1, ..., t_k \geq 0$ e $u_1, ..., u_k \in \mathcal{U}_{cp}$. Então,*

$$\widetilde{\varphi}\left(t_k, \widetilde{\varphi}\left(t_{k-1}, ..., \widetilde{\varphi}\left(t_1, x, u_1\right), ..., u_{k-1}\right), u_k\right) = \widetilde{\varphi}\left(t_1 + \cdots + t_k, x, v\right), \tag{1.2}$$

para todo $x \in M$, onde $v = (u_1, ..., u_k)\left(t_1, t_1 + t_2, ..., \sum_{i=1}^{k-1} t_i\right)$.

Demonstração. Provemos a igualdade para apenas dois tempos $s, \tau \geq 0$ e duas funções de controle $u, v \in \mathcal{U}_{cp}$, uma vez que o caso geral segue por indução. Pela Proposição 1.1.3, temos que

$$\widetilde{\varphi}\left(t, x, (u, v)(s)\right) = \begin{cases} \widetilde{\varphi}\left(t, x, u\right), \text{ se } 0 \leq t \leq s \\ \widetilde{\varphi}\left(t - s, \widetilde{\varphi}\left(s, x, u\right), v\right), \text{ se } t > s. \end{cases}$$

Como $\widetilde{\varphi}\left(s, x, u\right) = \widetilde{\varphi}\left(s, x, (u, v)(s)\right)$, a igualdade (1.2) é válida para $\tau = 0$. Suponhamos, então, que $\tau > 0$. Logo, temos $\tau + s > s$ e, portanto, $\widetilde{\varphi}\left(\tau + s, x, (u, v)(s)\right) = \widetilde{\varphi}\left(\tau, \widetilde{\varphi}\left(s, x, u\right), v\right)$. ☐

Finalmente, mostramos que $\widetilde{\mathcal{S}}(x) = \widetilde{\mathcal{O}}^+(x)$, para todo $x \in M$.

Teorema 1.1.1. *Sejam $u \in \mathcal{U}_{cp}$, $u_1, ..., u_N \in U$ e $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N$ tais que*

$$u(t) = \begin{cases} u_1, \ \textit{se } 0 \leq t \leq t_1 \\ u_2, \ \textit{se } t_1 < t \leq t_1 + t_2 \\ \qquad \vdots \\ u_N, \ \textit{se } \sum_{i=0}^{N-1} t_i < t \leq \sum_{i=0}^{N} t_i. \end{cases}$$

Então,

$$\widetilde{\varphi}\left(t, x, u\right) = \widetilde{\exp}\left(\left(t - \sum_{i=0}^{k-1} t_i\right) \mathrm{X}_{u_k}\right) \circ \widetilde{\exp}\left(t_{k-1} \mathrm{X}_{u_{k-1}}\right) \circ \cdots \circ \widetilde{\exp}\left(t_1 \mathrm{X}_{u_1}\right)(x),$$

para todo $x \in M$ e $\sum_{i=0}^{k-1} t_i \leq t \leq \sum_{i=0}^{k} t_i$, $k = 1, ..., N$. Portanto, $\widetilde{\mathcal{O}}^+(x) = \widetilde{\mathcal{S}}(x)$, para todo $x \in M$.

Demonstração. Inicialmente, notemos que $u = (u_1, ..., u_N)\left(t_1, ..., \sum_{i=1}^{N-1} t_i\right)$ no intervalo $\left[0, \sum_{i=0}^{N} t_i\right]$, visto que as funções de controle $u_1, ..., u_N \in U$ são constantes. Provemos este teorema por indução. Para $0 \leq t \leq t_1$, segue, da Proposição 1.1.3, que

$$\widetilde{\varphi}\left(t, x, u\right) = \widetilde{\varphi}\left(t, x, u_1\right) = \widetilde{\exp}\left(t \mathrm{X}_{u_1}\right)(x),$$

para todo $x \in M$. Portanto, o resultado é válido para $k = 1$.

Agora, suponhamos, por indução, que o resultado seja válido para algum $k > 1$. Se $\sum_{i=0}^{k} t_i < t \leq \sum_{i=0}^{k+1} t_i$, temos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(t,x,u) &= \widetilde{\varphi}\left(t-\sum_{i=0}^{k} t_i, \widetilde{\varphi}\left(\sum_{i=0}^{k} t_i, x, (u_1,...,u_k)\left(t_1,...,\sum_{i=1}^{k-1} t_i\right)\right), u_{k+1}\right) \\
&= \widetilde{\exp}\left(\left(t-\sum_{i=0}^{k} t_i\right)\mathrm{X}_{u_{k+1}}\right)\left(\widetilde{\varphi}\left(\sum_{i=0}^{k} t_i, x, (u_1,...,u_k)\left(t_1,...,\sum_{i=1}^{k-1} t_i\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Mas, pela hipótese de indução,

$$\widetilde{\varphi}\left(\sum_{i=0}^{k} t_i, x, (u_1,...,u_k)\left(t_1,...,\sum_{i=1}^{k-1} t_i\right)\right) = \widetilde{\exp}\left(t_k \mathrm{X}_{u_k}\right)\circ\widetilde{\exp}\left(t_{k-1}\mathrm{X}_{u_{k-1}}\right)\circ\cdots\circ\widetilde{\exp}\left(t_1\mathrm{X}_{u_1}\right)(x)$$

e, portanto,

$$\widetilde{\varphi}(t,x,u) = \widetilde{\exp}\left(\left(t-\sum_{i=0}^{k} t_i\right)\mathrm{X}_{u_{k+1}}\right)\circ\widetilde{\exp}\left(t_k \mathrm{X}_{u_k}\right)\circ\widetilde{\exp}\left(t_{k-1}\mathrm{X}_{u_{k-1}}\right)\circ\cdots\circ\widetilde{\exp}\left(t_1\mathrm{X}_{u_1}\right)(x).$$

Resta, então, provar que $\widetilde{\mathcal{O}}^+(x) = \widetilde{\mathcal{S}}(x)$. Provemos primeiro que $\widetilde{\mathcal{O}}^+(x) \subset \widetilde{\mathcal{S}}(x)$. Sejam $u \in \mathcal{U}_{cp}$ e $\tau > 0$. Podemos, então, encontrar $u_1, ..., u_N \in U$ e $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N$ tais que $\tau = \sum_{i=0}^{N} t_i$ e $u = (u_1,...,u_N)\left(t_1,...,\sum_{i=1}^{N-1} t_i\right)$ no intervalo $[0,\tau]$. Assim, segue da primeira parte desta demonstração que

$$\widetilde{\varphi}(\tau,x,u) = \widetilde{\exp}\left(t_N \mathrm{X}_{u_N}\right)\circ\widetilde{\exp}\left(t_{N-1}\mathrm{X}_{u_{N-1}}\right)\circ\cdots\circ\widetilde{\exp}\left(t_1\mathrm{X}_{u_1}\right)(x) \in \widetilde{\mathcal{S}}(x).$$

Mostremos, agora, que $\widetilde{\mathcal{S}}(x) \subset \widetilde{\mathcal{O}}^+(x)$. Sejam $t_1, ..., t_k \geq 0$ e $u_1, ..., u_k \in U$. Segue, do Corolário 1.1.1, que existe $v \in \mathcal{U}_{cp}$ tal que

$$\widetilde{\exp}\left(t_k \mathrm{X}_{u_k}\right)\circ\cdots\circ\widetilde{\exp}\left(t_1\mathrm{X}_{u_1}\right)(x) = \widetilde{\varphi}(t_1+\cdots+t_k, x, v) \in \widetilde{\mathcal{O}}^+(x).$$

Portanto, $\widetilde{\mathcal{O}}^+(x) = \widetilde{\mathcal{S}}(x)$. □

A importância do Teorema 1.1.1 está no fato de que através dele podemos estudar conceitos relacionados a um sistema de controle impulsivo no contexto de uma ação de semigrupo. É evidente que isso nem sempre será possível, uma vez que a ação do semigrupo do sistema impulsivo admite descontinuidades. Ainda assim, essa estratégia apresenta grande utilidade, como vemos nos próximos capítulos deste trabalho.

Para finalizar esta seção, apresentamos um exemplo de sistema de controle impulsivo.

Exemplo 1.1.2. *Consideremos o sistema de controle sobre $M = \mathbb{R}^2$ determinado pelos campos de vetores $\{X, Y\}$ dados por*

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad e \quad Y = \frac{\partial}{\partial x_2},$$

com

$$M_\varphi = \left\{ \left(x, \frac{1}{|x|} \right) : x \neq 0 \right\} \quad e \quad I\left(\left(x, \frac{1}{|x|} \right) \right) = \left(x, -\frac{1}{|x|} \right), \quad \textit{para todo } x \neq 0.$$

As trajetórias de X são retas horizontais. As trajetórias de Y são retas verticais. Reunindo todas essas trajetórias, obtemos todas as trajetórias do sistema de controle. A Figura 1.2 ilustra algumas semitrajetórias positivas impulsivas.

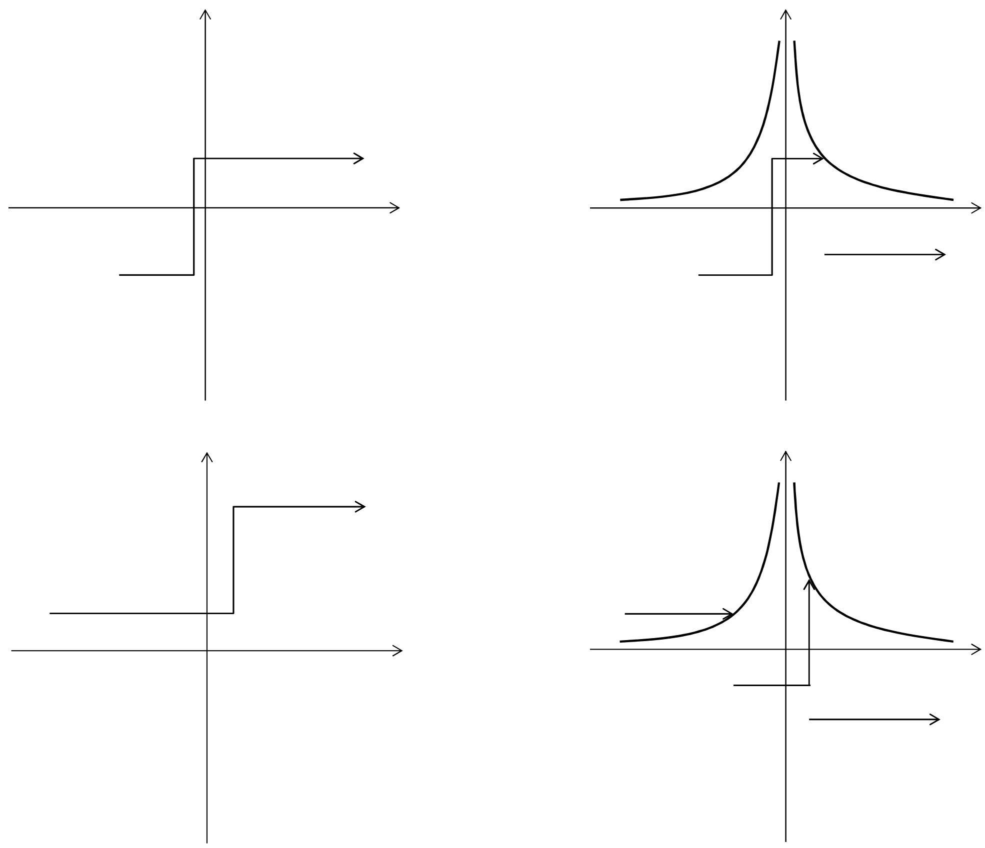

Figura 1.2: Exemplos de semitrajetórias positivas impulsivas. À esquerda, está uma semitrajetória positiva do sistema original; à direita, está a semitrajetória positiva impulsiva correspondente.

A partir de agora, consideremos dado um sistema de controle impulsivo sobre uma variedade M de classe C^∞ e de dimensão d, com conjunto impulsivo M_φ e função impulsiva I.

1.2 Continuidade da função ϕ

Nesta seção, vamos analisar um aspecto muito importante da função ϕ. Em diversos casos, vamos percerber a importância de garantir a continuidade de ϕ. Para obter isso, vamos precisar introduzir a definição da condição forte de tubo. Consideremos $\mathbb{M} = M \times \mathcal{U}$ e $\mathbb{M}_\varphi = M_\varphi \times \mathcal{U}$.

Definição 1.2.1. *Chamamos de **fluxo de controle** associado ao sistema de controle a função* $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ *definida por*

$$\Phi\left(t,(x,u)\right) = \left(\varphi\left(t,x,u\right), u \cdot t\right), \qquad para \ \left(t,(x,u)\right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{M}.$$

Definição 1.2.2. *Sejam* $(x,u) \in \mathbb{M}$ *e* $\mathbb{S}$ *um conjunto contendo* (x,u)*. Dizemos que* $\mathbb{S}$ *é uma **seção** através de* (x,u) *se existe* $\lambda > 0$ *tal que* $\mathbb{U}_{\mathbb{S}} = \Phi\left((-\lambda,\lambda),\mathbb{S}\right)$ *é uma vizinhança, não necessariamente aberta, de* (x,u) *que satisfaz a seguinte propriedade: para todo* $(y,v) \in \mathbb{U}_{\mathbb{S}}$*, podemos encontrar únicos* $(z,w) \in \mathbb{S}$ *e* $t \in (-\lambda,\lambda)$ *tais que* $\Phi\left(t,(z,w)\right) = (y,v)$*. Nesse caso, dizemos que* $\mathbb{U}_{\mathbb{S}}$ *é um **tubo** através de* (x,u)*.*

Definição 1.2.3. *Seja* $(x,u) \in \mathbb{M}_{\varphi}$*. Dizemos que* (x,u) *satisfaz a **condição forte de tubo (CFT)** se existe uma seção* $\mathbb{S}$ *através de* (x,u) *tal que* $\mathbb{S} = \mathbb{U}_{\mathbb{S}} \cap \mathbb{M}_{\varphi}$*.*

Definição 1.2.4. *Seja* $x \in M_{\varphi}$*. Dizemos que* x *satisfaz a **condição forte de tubo com respeito a*** φ ***(*φ*-CFT)** se, para cada* $u \in \mathcal{U}$*, o par* (x,u) *satisfaz CFT.*

O primeiro teorema garante a continuidade de ϕ em $(M \backslash M_{\varphi}) \times \mathcal{U}$.

Teorema 1.2.1. *Suponhamos que cada elemento de* M_{φ} *satisfaça* φ*-CFT. Então,* ϕ *é contínua em* $(M \backslash M_{\varphi}) \times \mathcal{U}$*.*

Demonstração. Sejam $x \notin M_{\varphi}$ e $u \in \mathcal{U}$. Inicialmente, provemos que ϕ é semicontínua inferiormente em (x,u). Suponhamos, por absurdo, que existam sequências (x_n) em M e (u_n) em $\mathcal{U}$ tais que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, $u_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$ e $\phi\left(x_n,u_n\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t < \phi\left(x,u\right)$. Afirmamos que $x_n \notin M_{\varphi}$, para n suficientemente grande. De fato, suponhamos, por absurdo, que $x_n \in M_{\varphi}$, para uma quantidade infinita de índices n. Então, $x \in \overline{M_{\varphi}} = M_{\varphi}$, o que é uma contradição. Assim, $x_n \notin M_{\varphi}$, para n suficientemente grande e, portanto, $\varphi\left(\phi\left(x_n,u_n\right),x_n,u_n\right) \in M_{\varphi}$. Segue, da continuidade de φ, que $\varphi\left(\phi\left(x_n,u_n\right),x_n,u_n\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi\left(t,x,u\right)$ e, por isso, $\varphi\left(t,x,u\right) \in \overline{M_{\varphi}} = M_{\varphi}$. Então, $\phi\left(x,u\right) \leq t < \phi\left(x,u\right)$, o que é uma contradição. Portanto, ϕ é semicontínua inferiormente em (x,u).

Agora, provemos que ϕ é semicontínua superiormente em (x,u). Seja $\epsilon > 0$. Como $x_1 = \varphi\left(\phi\left(x,u\right),x,u\right) \in M_{\varphi}$ satisfaz φ-CFT, existe uma seção $\mathbb{S}$ através de $\left(x_1, u \cdot \phi\left(x,u\right)\right)$ tal que $\mathbb{S} = \mathbb{U}_{\mathbb{S}} \cap \mathbb{M}_{\varphi}$, ou seja, $\mathbb{S}$ contém $\left(x_1, u \cdot \phi\left(x,u\right)\right)$ e existe $\lambda > 0$ tal que o conjunto $\mathbb{U}_{\mathbb{S}} = \Phi\left((-\lambda,\lambda),\mathbb{S}\right)$ é uma vizinhança de $\left(x_1, u \cdot \phi\left(x,u\right)\right)$ que satisfaz a seguinte condição: para todo $(y,v) \in \mathbb{U}_{\mathbb{S}}$, podemos encontrar únicos $(z,w) \in \mathbb{S}$ e $t \in (-\lambda,\lambda)$ tais que $\Phi\left(t,(z,w)\right) = (y,v)$. Podemos assumir que $\lambda < \epsilon$. Notemos que

$$\left(x_1, u \cdot \phi\left(x,u\right)\right) = \left(\varphi\left(\phi\left(x,u\right),x,u\right), u \cdot \phi\left(x,u\right)\right) = \Phi\left(\phi\left(x,u\right),(x,u)\right).$$

Como Φ é contínua em $\left(\phi\left(x,u\right),(x,u)\right)$ e $\mathbb{U}_{\mathbb{S}}$ é uma vizinhança de $\Phi\left(\phi\left(x,u\right),(x,u)\right)$, existe uma vizinhança V de x tal que $\Phi\left(\phi\left(x,u\right), V \times \mathcal{U}\right) \subset \mathbb{U}_{\mathbb{S}}$. Seja $(p,r) \in V \times \mathcal{U}$. Então, $\Phi\left(\phi\left(x,u\right),(p,r)\right) \in \mathbb{U}_{\mathbb{S}}$ e, portanto, podemos encontrar únicos $(z,w) \in \mathbb{S}$ e $t \in (-\lambda,\lambda) \subset (-\epsilon,\epsilon)$ tais que $\Phi\left(t,(z,w)\right) = \Phi\left(\phi\left(x,u\right),(p,r)\right)$. Daí,

$$\begin{aligned} \left(\varphi\left(\phi\left(x,u\right)-t,p,r\right), r \cdot \left(\phi\left(x,u\right)-t\right)\right) &= \Phi\left(\phi\left(x,u\right)-t,(p,r)\right) \\ &= \Phi\left(-t, \Phi\left(\phi\left(x,u\right),(p,r)\right)\right) \\ &= (z,w) \in \mathbb{S} = \mathbb{U}_{\mathbb{S}} \cap \mathbb{M}_{\varphi} \subset \mathbb{M}_{\varphi} = M_{\varphi} \times \mathcal{U}, \end{aligned}$$

donde, $\varphi(\phi(x,u)-t,p,r) \in M_\varphi$. Portanto, $\phi(p,r) \leq \phi(x,u)-t < \phi(x,u)+\epsilon$. Isto mostra que ϕ é semicontínua superiormente em (x,u), concluindo a demonstração. $\square$

Agora, para $x \in M$ fixo, consideremos a função $\phi_x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ definida por $\phi_x(u) = \phi(x,u)$, para $u \in \mathcal{U}$. É interessante também observar que se cada elemento de M_φ satisfaz φ-CFT, então ϕ_x é contínua, para todo $x \in M$ fixo. Para provar este resultado, precisamos do seguinte lema.

Lema 1.2.1. *Suponhamos que cada elemento de M_φ satisfaça φ-CFT e seja $x \in M_\varphi$. Então, para cada $u \in \mathcal{U}$, existem $\lambda > 0$ e uma vizinhança V de u em $\mathcal{U}$ tais que $\phi(x,v) > \lambda$, para todo $v \in V$.*

Demonstração. Sejam $x \in M_\varphi$ e $u \in \mathcal{U}$. Por hipótese, x satisfaz φ-CFT. Logo, existe uma seção $\mathbb{S}$ através de (x,u) tal que $\mathbb{S} = \mathbb{U}_\mathbb{S} \cap \mathbb{M}_\varphi$, ou seja, $\mathbb{S}$ contém (x,u) e existe $\lambda > 0$ tal que o conjunto $\mathbb{U}_\mathbb{S} = \Phi((-\lambda,\lambda),\mathbb{S})$ é uma vizinhança de (x,u) que satisfaz a seguinte propriedade: para todo $(y,v) \in \mathbb{U}_\mathbb{S}$, podemos encontrar únicos $(z,w) \in \mathbb{S}$ e $t \in (-\lambda,\lambda)$ tais que $\Phi(t,(z,w)) = (y,v)$. Podemos encontrar um conjunto aberto W tal que $(x,u) \in W \subset \mathbb{U}_\mathbb{S}$, uma vez que $\mathbb{U}_\mathbb{S}$ é uma vizinhança de (x,u). Logo, existe uma vizinhança V de u tal que $\{x\} \times V \subset W \subset \mathbb{U}_\mathbb{S}$. Portanto, $\{x\} \times V \subset \mathbb{U}_\mathbb{S} \cap \mathbb{M}_\varphi = \mathbb{S}$.

Afirmamos que $\phi(x,v) > \lambda$, para todo $v \in V$. De fato, suponhamos, por absurdo, que exista $v \in V$ tal que $\phi(x,v) \leq \lambda$. Notemos que

$$\Phi(\phi(x,v),(x,v)) = (\varphi(\phi(x,v),x,v), v \cdot \phi(x,v)) \in M_\varphi \times \mathcal{U} = \mathbb{M}_\varphi.$$

Além disso, $\Phi(\phi(x,v),(x,v)) \in \mathbb{U}_\mathbb{S}$ e, por isso, $\Phi(\phi(x,v),(x,v)) \in \mathbb{S}$. Também

$$\Phi(\lambda-\phi(x,v),\Phi(\phi(x,v),(x,v))) = \Phi(\lambda-\phi(x,v)+\phi(x,v),(x,v)) = \Phi(\lambda,(x,v)),$$

com $0 \leq \lambda - \phi(x,v) < \lambda$. Contudo, $\Phi(\lambda-\phi(x,v),\Phi(\phi(x,v),(x,v))) \in \mathbb{U}_\mathbb{S}$ mas $\Phi(\lambda,(x,v)) \notin \mathbb{U}_\mathbb{S}$, o que é uma contradição. Portanto, $\phi(x,v) > \lambda$, para todo $v \in V$. $\square$

Segue, então, o teorema que garante a continuidade de ϕ_x, para todo $x \in M$ fixo.

Teorema 1.2.2. *Suponhamos que cada elemento de M_φ satisfaça φ-CFT. Então, a função ϕ_x é contínua, para todo $x \in M$ fixo.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{U}$ e consideremos uma sequência (u_n) em $\mathcal{U}$ tal que $u_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$. Seja $x \in M$ fixo. Vamos mostrar que $\phi_x(u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi_x(u)$. Pelo Teorema 1.2.1, segue o caso em que $x \notin M_\varphi$. Resta, então, provar o caso em que $x \in M_\varphi$. Segue, do Lema 1.2.1, que existem $\lambda > 0$ e uma vizinhança V de u em $\mathcal{U}$ tais que $\phi(x,v) > \lambda$, para todo $v \in V$. Então,

$$\begin{aligned}
\varphi(\phi(x,u),x,u) &= \varphi(\phi(\varphi(\lambda,x,u),u\cdot\lambda),\varphi(\lambda,x,u),u\cdot\lambda) \\
&= \varphi(\lambda+\phi(\varphi(\lambda,x,u),u\cdot\lambda),x,u)
\end{aligned}$$

e, portanto, $\phi(x,u) = \lambda + \phi(\varphi(\lambda,x,u), u\cdot\lambda)$. Ainda, para n suficientemente grande, temos também que $\phi(x,u_n) = \lambda + \phi(\varphi(\lambda,x,u_n), u_n\cdot\lambda)$. Agora, $\varphi(\lambda,x,u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(\lambda,x,u)$, pela continuidade de φ. Daí,

$$\phi(\varphi(\lambda,x,u_n), u_n\cdot\lambda) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(\varphi(\lambda,x,u), u\cdot\lambda),$$

visto que $\varphi(\lambda,x,u) \notin M_\varphi$ e ϕ é contínua em $(M\backslash M_\varphi)\times\mathcal{U}$. Disto, segue que $\phi(x,u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x,u)$ e, portanto, ϕ_x é contínua. $\square$

Capítulo

2

Invariância e estabilidade de Lyapunov para sistemas de controle afins impulsivos

Este capítulo é dedicado ao estudo dos conceitos de invariância e estabilidade de Lyapunov para sistemas de controle afins impulsivos. Um dos principais objetivos desse capítulo é fornecer resultados que estabeleçam relações entre o sistema de controle impulsivo e o sistema de controle original com respeito a tais conceitos. Além disso, exibimos funcionais de Lyapunov para caracterizar cada tipo de estabilidade.

Consideremos dado um sistema de controle impulsivo sobre uma variedade M de classe C^{∞} e de dimensão d, com conjunto impulsivo M_{φ} e função impulsiva I.

2.1 Invariância

Esta seção é dedicada ao estudo dos conceitos de invariância. Além das definições usuais para $\mathcal{S}$ e $\widetilde{\mathcal{S}}$, vamos acrescentar uma noção de invariância relacionada à função impulsiva I. O objetivo dessa seção é apresentar condições que relacionem esses três conceitos.

Primeiramente, introduzimos algumas notações que vamos utilizar. Denotemos por d uma distância Riemanniana sobre o espaço de fase M. Ainda, denotemos por $d_A(x)$ a distância de $x \in M$ ao subconjunto A de M. Assim, para $x \in M$ e $A \subset M$, consideremos as seguintes notações:

1. $B(x, \epsilon) = \{y \in M : d(x, y) < \epsilon\}$;
2. $B(A, \epsilon) = \{x \in M : d_A(x) < \epsilon\}$;
3. $\mathcal{A}(A, \delta, \epsilon) = \{x \in M : \delta < d_A(x) < \epsilon\}$;
4. $\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(a, b) : a, b \in A\}$.

Por fim, denotemos por $|.|$ e $\|.\|$ as normas usuais em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

O conceito de invariância no contexto de ações de semigrupos foi introduzido em [16]. Nos referimos a [17], como principal referência. Apresentamos, agora, os conceitos de invariância analisados em nosso estudo.

Definição 2.1.1. *Seja A um subconjunto de M.*

1. *O conjunto A é dito* ***positivamente invariante por*** $\mathcal{S}$ *se* $\mathcal{S}(x) \subset A$*, para todo* $x \in A$*;*

2. *O conjunto A é dito* ***positivamente invariante por*** $\widetilde{\mathcal{S}}$ *se* $\widetilde{\mathcal{S}}(x) \subset A$*, para todo* $x \in A$*;*

3. *O conjunto A é dito* ***invariante por*** I *se* $I(x) \in A$*, para todo* $x \in M_\varphi \cap A$*.*

Antes de explorarmos as relações existentes entre esses conceitos, vamos apresentar um exemplo que mostra que, de fato, eles não se relacionam de forma direta.

Exemplo 2.1.1. *Consideremos o sistema de controle sobre $M = \mathbb{R}^2$ determinado pelos campos de vetores $\{X, Y\}$ dados por*

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad e \quad Y = \frac{\partial}{\partial x_2},$$

com

$$M_\varphi = \{(1, y) : y \in \mathbb{R}\} \quad e \quad I((1, y)) = (-1, y), \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R}.$$

As trajetórias de X são retas horizontais. As trajetórias de Y são retas verticais. Reunindo todas essas trajetórias, obtemos todas as trajetórias do sistema de controle. Consideremos, agora, os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) : x \in [0, +\infty), y \in \mathbb{R}\}, \\ B &= \{(x, y) : x \in [-1, 1), y \in \mathbb{R}\}, \\ C &= \{(x, y) : x \in [-1, 1], y \in \mathbb{R}\}, \\ D &= \{(x, y) : x \in [1, +\infty), y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Notemos que A é apenas positivamente invariante por $\mathcal{S}$, enquanto C é apenas invariante por I. Além disso, B é positivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$ e invariante por I, enquanto D é positivamente invariante por $\mathcal{S}$ e por $\widetilde{\mathcal{S}}$. A Figura 2.1 ilustra uma semitrajetória positiva impulsiva iniciando em um ponto $x \in \mathbb{R}^2$.

Os próximos dois teoremas mostram que, sob condições adequadas, é possível obter uma relação entre as invariâncias por $\mathcal{S}$ e $\widetilde{\mathcal{S}}$. Para provar a invariância positiva por $\widetilde{\mathcal{S}}$ de um conjunto A, é preciso mostrar que $\widetilde{\mathcal{S}}(x) \subset A$, para todo $x \in A$, ou seja, que

$$\widetilde{\exp}(t_n X_{u_n}) \circ \widetilde{\exp}(t_{n-1} X_{u_{n-1}}) \circ \cdots \circ \widetilde{\exp}(t_1 X_{u_1})(x) \in A,$$

para todo $x \in A$, onde $X_{u_j} \in F$, $u_j \in U$, $t_j \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim, é suficiente considerar uma função de controle constante $u \in U$ e provar apenas que $\widetilde{\exp}(tX_u)(x) \in A$, para quaisquer $x \in A$ e $t \geq 0$, uma vez que a composição mencionada acima irá imediatamente pertencer ao conjunto A nesse caso.

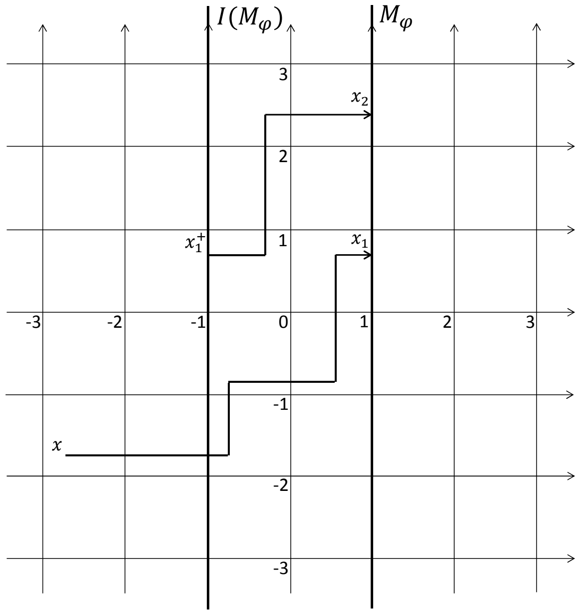

Figura 2.1: Exemplo de uma semitrajetória positiva impulsiva.

Teorema 2.1.1. *Seja A um subconjunto de M. Se A é positivamente invariante por $\mathcal{S}$ e invariante por I, então A é positivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$.*

Demonstração. Sejam $x \in A$ e $u \in U$. Mostremos que $\widetilde{\exp}\,(t\mathrm{X}_u)\,(x) \in A$, para todo $t \geq 0$. Como A é positivamente invariante por $\mathcal{S}$,

$$\widetilde{\exp}\,(t\mathrm{X}_u)\,(x) = \exp\,(t\mathrm{X}_u)\,(x) \in A,$$

para $t \in [0, \phi\,(x,u))$. Evidentemente, $x_1 = \exp\,(\phi\,(x,u)\,\mathrm{X}_u)\,(x) \in A$ e, portanto, $x_1^+ = I\,(x_1) \in A$, pois A é invariante por I. Disto,

$$\widetilde{\exp}\,(t\mathrm{X}_u)\,(x) = \exp\,((t - \phi\,(x,u))\,\mathrm{X}_u)\,\left(x_1^+\right) \in A,$$

para $t \in \left(\phi\,(x,u)\,, \phi\,(x,u) + \phi\left(x_1^+, u\right)\right)$. Continuando com esse processo, vamos obter $\widetilde{\exp}\,(t\mathrm{X}_u)\,(x) \in A$, para todo $t \geq 0$ e, portanto, A é positivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$. □

Teorema 2.1.2. *Seja A um subconjunto de M. Se A é fechado e positivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$, então A é positivamente invariante por $\mathcal{S}$.*

Demonstração. Sejam $x \in A$ e $u \in U$. Mostremos que $\exp\,(t\mathrm{X}_u)\,(x) \in A$, para todo $t \geq 0$. Suponhamos, por absurdo, que exista $s \geq 0$ tal que $\exp\,(s\mathrm{X}_u)\,(x) \notin A$. Definimos $t = \inf\,\{s : \exp\,(s\mathrm{X}_u)\,(x) \notin A\}$. Notemos que

$$\exp\,(\tau\mathrm{X}_u)\,(x) = \widetilde{\exp}\,(\tau\mathrm{X}_u)\,(x) \in A,$$

para todo $\tau \in [0, \phi(x,u))$, já que A é positivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Logo, $t \geq \phi(x,u) > 0$. Agora, percebamos que

$$\exp(\tau \mathrm{X}_u)(x) \in A, \text{ para todo } \tau \in [0,t) \quad \text{e} \quad \exp(t\mathrm{X}_u)(x) \in \overline{A} = A.$$

Afirmamos que existe $\delta > 0$ tal que $\exp(\tau \mathrm{X}_u)(x) \in A$, para todo $\tau \in [0, t+\delta)$. De fato, para $\tau \in (t, t + \phi(\exp(t\mathrm{X}_u)(x), u))$,

$$\begin{aligned}\exp(\tau \mathrm{X}_u)(x) &= \exp((\tau - t)\mathrm{X}_{u\cdot t})(\exp(t\mathrm{X}_u)(x)) = \exp((\tau - t)\mathrm{X}_u)(\exp(t\mathrm{X}_u)(x)) \\ &= \widetilde{\exp}((\tau - t)\mathrm{X}_u)(\exp(t\mathrm{X}_u)(x)) \in A,\end{aligned}$$

pois $\tau - t \in (0, \phi(\exp(t\mathrm{X}_u)(x), u))$. Concluímos que $\exp(\tau \mathrm{X}_u)(x) \in A$, para todo $\tau \in [0, t + \phi(\exp(t\mathrm{X}_u)(x), u))$, com $\phi(\exp(t\mathrm{X}_u)(x), u) > 0$, o que contradiz a definição de t. Portanto, $\exp(t\mathrm{X}_u)(x) \in A$, para todo $t \geq 0$, ou seja, A é positivamente invariante por $\mathcal{S}$. □

Por fim, consideremos a componente conexa de um conjunto fechado. Não é difícil mostrar que toda componente conexa de um conjunto fechado e positivamente invariante é positivamente invariante, no caso convencional. O mesmo fato não ocorre necessariamente no caso impulsivo. No entanto, se adicionarmos a hipótese de invariância por I para a componente conexa, então essa propriedade é garantida, como mostra o próximo teorema.

Teorema 2.1.3. *Sejam A um subconjunto fechado e positivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$ de M e E uma componente conexa invariante por I de A. Então, E é positivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$.*

Demonstração. Sejam $x \in E$ e $u \in U$. Por hipótese, A é fechado e positivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Segue, do Teorema 2.1.2, que A é positivamente invariante por $\mathcal{S}$. Como $x \in E \subset A$, temos que $\exp(t\mathrm{X}_u)(x) \in A$, para todo $t \in [0, \phi(x,u))$. Se $\phi(x,u) = +\infty$, então $\exp(t\mathrm{X}_u)(x) \in E$, para todo $t \geq 0$ e $M_{\varphi}^{+}(x,u) = \emptyset$. Nesse caso, $\widetilde{\exp}(t\mathrm{X}_u)(x) = \exp(t\mathrm{X}_u)(x) \in E$, para todo $t \geq 0$ e, portanto, E é positivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Suponhamos, agora, que $\phi(x,u) < +\infty$. Notemos que

$$x_1 = \exp(\phi(x,u)\mathrm{X}_u)(x) \in \overline{E} = E.$$

Segue, da invariância por I de E, que $I(x_1) \in E$. Continuando com esse processo, obtemos que $\widetilde{\exp}(t\mathrm{X}_u)(x) \in E$, para todo $t \geq 0$, donde, E é positivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$. □

2.2 Estabilidade de Lyapunov

Nesta seção, vamos apresentar as noções de estabilidade de Lyapunov para o sistema de controle impulsivo e analisar as possíveis relações entre elas. Investigamos também quais são as condições adequadas para que haja uma ligação entre a estabilidade do sistema convencional e do sistema impulsivo.

Iniciemos apresentando os conceitos de estabilidade. No contexto de ações de semigrupos, as definições a seguir foram introduzidas em [8], com exceção da noção de BH-equiestabilidade, que significa a estabilidade no sentido de Bhatia e Hajek, como foi nomeada por Ciesielski ([14]).

Definição 2.2.1. *Seja A um subconjunto de M.*

1. *O conjunto A é dito* ***estável por $\mathcal{S}$*** *se, para quaisquer $\epsilon > 0$ e $x \in A$, existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{S}B(x, \delta) \subset B(A, \epsilon)$;*

2. *O conjunto A é dito* ***uniformemente estável por $\mathcal{S}$*** *se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{S}B(A, \delta) \subset B(A, \epsilon)$;*

3. *O conjunto A é dito* ***orbitalmente estável por $\mathcal{S}$*** *se, para toda vizinhança U de A, existe uma vizinhança positivamente $\mathcal{S}$-invariante V de A com $V \subset U$;*

4. *O conjunto A é dito* ***BH-equiestável por $\mathcal{S}$*** *se, para quaisquer $x \in A$ e $y \notin A$, existem uma vizinhança V de x e uma vizinhança W de y tais que $W \cap \mathcal{S}V = \emptyset$;*

5. *O conjunto A é dito* ***equiestável por $\mathcal{S}$*** *se, para todo $y \notin A$, existe $\epsilon > 0$ tal que $y \notin \overline{\mathcal{S}B(A, \epsilon)}$.*

Podemos obter de modo imediato algumas relações entre os conceitos acima:

- todo conjunto uniformemente estável por $\mathcal{S}$ é estável por $\mathcal{S}$;

- todo conjunto equiestável por $\mathcal{S}$ é BH-equiestável por $\mathcal{S}$;

- todo conjunto compacto e BH-equiestável por $\mathcal{S}$ é equiestável por $\mathcal{S}$.

Vamos, agora, enunciar alguns resultados já existentes no contexto de ações de semigrupos que estabelecem outras relações entre os conceitos de estabilidade de Lyapunov apresentados anteriormente.

Proposição 2.2.1. *Seja A um subconjunto compacto e estável por $\mathcal{S}$ de M. Então, A é uniformemente estável por $\mathcal{S}$.*

Demonstração. Veja [8, Teorema 3.2]. □

Proposição 2.2.2. *Seja A um subconjunto fechado e uniformemente estável por $\mathcal{S}$ de M. Então, A é equiestável por $\mathcal{S}$.*

Demonstração. Veja [8, Teorema 3.3]. □

Proposição 2.2.3. *Suponhamos que M seja um espaço localmente compacto e A seja um subconjunto compacto e equiestável por $\mathcal{S}$ de M. Suponhamos também que $x \in \overline{\mathcal{S}(x)}$, para todo $x \in A$, e que os fechos de todas as $\mathcal{S}$-órbitas de pontos em M sejam conexos. Então, A é uniformemente estável por $\mathcal{S}$.*

Demonstração. Veja [8, Teorema 3.4]. □

Analogamente, podemos definir todas as noções de estabilidade para um sistema de controle impulsivo, substituindo $\mathcal{S}$ por $\widetilde{\mathcal{S}}$ nas definições anteriores. Além disso, todos os resultados enunciados anteriormente continuam válidos no caso impulsivo, uma vez que suas demonstrações não dependem da continuidade da ação. A única exceção é a Proposição 2.2.3. Tal resultado não é válido no caso impulsivo, já que exige que as $\widetilde{\mathcal{S}}$-órbitas sejam conexas. Contudo, podemos obter um resultado ainda mais forte, que apresenta a equivalência de todas as noções de estabilidade definidas anteriormente para um conjunto compacto e uma caracterização da estabilidade através dos prolongamentos. Assim, vejamos, inicialmente, o conceito de prolongamento para sistemas de controle impulsivos. Para sistemas de controle convencionais, nos referimos a [32] para a noção de prolongamento.

Definição 2.2.2. *Seja $x \in M$. O* ***prolongamento de*** *x* ***com respeito a*** *$\widetilde{\mathcal{S}}$ é definido por*

$$\begin{aligned}\widetilde{D}^{+}(x) &= \left\{\begin{array}{c} y \in M : \text{ existem sequências } (g_n) \text{ em } \widetilde{\mathcal{S}} \text{ e } (x_n) \text{ em } M \text{ tais que} \\ x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \text{ e } g_n x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \end{array}\right\} \\ &= \left\{\begin{array}{c} y \in M : \text{ existem sequências } (t_n) \text{ em } \mathbb{R}^{+},\ (u_n) \text{ em } \mathcal{U}_{cp} \text{ e } (x_n) \text{ em } M \\ \text{tais que } x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \text{ e } \widetilde{\varphi}(t_n, x_n, u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \end{array}\right\}.\end{aligned}$$

Seja B um subconjunto de M. O ***prolongamento de*** *B* ***com respeito a*** *$\widetilde{\mathcal{S}}$ é definido por*

$$\widetilde{D}^{+}(B) = \bigcup_{x\in B} \widetilde{D}^{+}(x).$$

Podemos, agora, apresentar o teorema a seguir.

Teorema 2.2.1. *Seja A um subconjunto compacto de M. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *A é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$;*
2. *A é orbitalmente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$;*
3. *A é BH-equiestável por $\widetilde{\mathcal{S}}$;*
4. *$\widetilde{D}^{+}(A) = A$.*

Demonstração.

(1)⇒(2) Seja U uma vizinhança de A. Então, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta) \subset U$, visto que A é compacto e estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Evidentemente, $\widetilde{\mathcal{S}}\left(\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta)\right) \subset \widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta)$. Portanto, $\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta)$ é a vizinhança de A que satisfaz as condições citadas no item 3 da Definição 2.2.1.

(2)⇒(3) Sejam $x \in A$ e $y \notin A$. Segue, da compacidade de A, que existem conjuntos abertos W e V em M tais que $A \subset W$, $y \in V$ e $W \cap V = \emptyset$. Por hipótese, A é orbitalmente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Logo, existe uma vizinhança U de A tal que $U \subset W$ e $\widetilde{\mathcal{S}}U \subset U$. Em particular, U é uma vizinhança de x. Afirmamos que $\widetilde{\mathcal{S}}U \cap V = \emptyset$. De fato, notemos que $U \cap V = \emptyset$, pois $W \cap V = \emptyset$ e $U \subset W$. Como $\widetilde{\mathcal{S}}U \subset U$, segue que $\widetilde{\mathcal{S}}U \cap V = \emptyset$. Portanto, A é BH-equiestável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

(3)⇒(4) Primeiramente, notemos que a inclusão $A \subset \widetilde{D}^+(A)$ é imediata. Assim, basta mostrar que $\widetilde{D}^+(A) \subset A$. Para isso, vamos tomar $y \notin A$ e mostrar que $y \notin \widetilde{D}^+(A)$. Assim, sejam $x \in A$ e $y \notin A$. Por hipótese, A é BH-equiestável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Logo, existem vizinhanças U de x e V de y tais que $V \cap \widetilde{\mathcal{S}}U = \emptyset$. Escolhemos sequências quaisquer (t_n) em $\mathbb{R}^+$, (x_n) em M e (u_n) em $\mathcal{U}_{cp}$ tais que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Então, podemos assumir que $x_n \in U$, para todo $n \in \mathbb{N}$, já que U é uma vizinhança de x. Daí, como $\widetilde{\varphi}(t_n, x_n, u_n) \in \widetilde{\mathcal{S}}U$, segue que $\widetilde{\varphi}(t_n, x_n, u_n) \notin V$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\widetilde{\varphi}(t_n, x_n, u_n)$ não converge para y, donde, $y \notin \widetilde{D}^+(x)$. Isto significa que $y \notin \widetilde{D}^+(A)$ e, portanto, $\widetilde{D}^+(A) \subset A$.

(4)⇒(1) Por absurdo, suponhamos que A não seja estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Então, podemos encontrar $\epsilon > 0$, $x \in A$, (t_n) em $\mathbb{R}^+$, (x_n) em M e (u_n) em $\mathcal{U}_{cp}$ tais que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ e $\widetilde{\varphi}(t_n, x_n, u_n) \notin B(A, \epsilon)$, para todo n. Podemos assumir que $\overline{B(A, \epsilon)}$ é compacto, já que M é localmente compacto.

Vamos considerar dois casos. No primeiro caso, suponhamos que $t_n < \phi(x_n, u_n)$, para uma quantidade infinita de índices n. Podemos assumir que $t_n < \phi(x_n, u_n)$, para todo n, passando a uma subsequência se necessário. Então, $\widetilde{\varphi}(t_n, x_n, u_n) = \varphi(t_n, x_n, u_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, podemos assumir que $x_n \in B(A, \epsilon)$, para todo n, pois $B(A, \epsilon)$ é uma vizinhança de x e $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Assim, para cada n, é possível encontrar $s_n \in [0, t_n]$ tal que $\widetilde{\varphi}(s_n, x_n, u_n) = \varphi(s_n, x_n, u_n) \in \partial B(A, \epsilon)$. Pela compacidade de $\partial B(A, \epsilon)$, assumimos que $\widetilde{\varphi}(s_n, x_n, u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \in \partial B(A, \epsilon)$. Disto, segue que $y \in \widetilde{D}^+(x) \subset \widetilde{D}^+(A) = A$. Isto é uma contradição, uma vez que $y \in \partial B(A, \epsilon)$ e, portanto, $y \notin A$. Finalizamos, assim, a demonstração para o primeiro caso.

No segundo caso, suponhamos que $t_n < \phi(x_n, u_n)$, somente para uma quantidade finita de índices n. Nesse caso, $\phi(x_n, u_n) \leq t_n$, para uma quantidade infinita de índices n. Assumimos que $\phi(x_n, u_n) \leq t_n$, para todo n, passando a uma subsequência se necessário. Isto significa que $\widetilde{\varphi}(t_n, x_n, u_n)$ aparece na semitrajetória impulsiva $\widetilde{\varphi}([0, +\infty), x_n, u_n)$ somente após o ponto impulsivo de x_n. Para cada n, definimos $\Delta_n = \{s \geq 0 : \widetilde{\varphi}(s, x_n, u_n) \in B(A, \epsilon)\}$. Evidentemente, $0 \in \Delta_n$, pois $x_n \in B(A, \epsilon)$. Além disso, definimos $s_n = \inf\{[0, \phi(x_n, u_n)) \setminus \Delta_n\}$. É evidente que $\widetilde{\varphi}(s_n, x_n, u_n) \notin B(A, \epsilon)$, já que $\widetilde{\varphi}(\cdot, x_n, u_n)$ é contínua à direita.

Escolhemos $\delta \in (0, \epsilon)$. Afirmamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, existem $p_n \in \widetilde{\varphi}(\Delta_n, x_n, u_n)$ e $q_n \in A$ tais que $d(p_n, q_n) < \delta$. De fato, por absurdo, suponhamos que, para uma quantidade infinita de índices n, exista $\tau_n \in \Delta_n$ tal que $\widetilde{\varphi}(\tau_n, x_n, u_n) \in \overline{\mathcal{A}(A, \delta, \epsilon)}$. Pela compacidade de $\overline{\mathcal{A}(A, \delta, \epsilon)}$, podemos assumir que

$\widetilde{\varphi}(\tau_n, x_n, u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \in \overline{\mathcal{A}(A, \delta, \epsilon)}$. Disto, segue que $y \in \widetilde{D}^+(x) \subset \widetilde{D}^+(A) = A$. Isto é uma contradição, pois $y \in \overline{\mathcal{A}(A, \delta, \epsilon)}$ e, portanto, $y \notin A$. Assim, para qualquer $n \geq n_0$ fixo, temos que $\widetilde{\varphi}([0, s_n), x_n, u_n) \subset B(A, \delta)$. Como $\widetilde{\varphi}(s_n, x_n, u_n) \notin B(A, \epsilon)$, segue que $\widetilde{\varphi}(\cdot, x_n, u_n)$ não é contínua em s_n e, portanto, $\widetilde{\varphi}(s_n, x_n, u_n) = I(y_n)$, para algum $y_n \in M_\varphi$. Como $\widetilde{\varphi}(s, x_n, u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y_n$ quando $s \nearrow s_n$, temos que $y_n \in \overline{B(A, \delta)}$. Daí, podemos assumir que $y_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \in \overline{B(A, \delta)}$, uma vez que $\overline{B(A, \delta)}$ é compacto. Segue, da continuidade de I, que $I(y_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(y)$ e, portanto, $I(y) \notin A$, já que $I(y_n) \notin B(A, \epsilon)$, para todo n. Isto é uma contradição, pois $I(y) \in \widetilde{D}^+(x) \subset \widetilde{D}^+(A) = A$, uma vez que $\widetilde{\varphi}(s_n, x_n, u_n) = I(y_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(y)$. Finalizamos, então, a demonstração.

□

Retornando ao conceito de invariância, mostramos que é possível relacionar algumas noções de estabilidade a esse conceito, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 2.2.2. *Seja A um subconjunto de M.*

1. *Se A é BH-equiestável por $\widetilde{\mathcal{S}}$, então A é positivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$ e invariante por I. Além disso, se A é também fechado, então A é positivamente invariante por $\mathcal{S}$.*

2. *Se A é fechado e estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$, então A é positivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$, positivamente invariante por $\mathcal{S}$ e invariante por I.*

Demonstração.

1. Inicialmente, provemos que A é positivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Suponhamos, por absurdo, que isso não ocorra. Então, existem $s \in \widetilde{\mathcal{S}}$ e $x \in A$ tais que $sx \notin A$. Por hipótese, A é BH-equiestável por $\widetilde{\mathcal{S}}$, logo, podemos encontrar uma vizinhança V de x e uma vizinhança W de sx tais que $W \cap \widetilde{\mathcal{S}}V = \emptyset$. Isto é uma contradição, já que $sx \in W \cap \widetilde{\mathcal{S}}V$. Portanto, A é positivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

   Provemos, agora, que A é invariante por I. Novamente, suponhamos, por absurdo, que isso não ocorra. Logo, existe $x \in M_\varphi \cap A$ tal que $I(x) \notin A$. Como A é BH-equiestável por $\widetilde{\mathcal{S}}$, temos que existem uma vizinhança V de x e uma vizinhança W de $I(x)$ tais que $W \cap \widetilde{\mathcal{S}}V = \emptyset$. Dado $u \in U$, é possível encontrar $y \in M$ e $t > 0$ tais que
$$\exp(t\mathrm{X}_u)(y) = x \text{ e } \exp([0, t)\,\mathrm{X}_u)(y) \cap M_\varphi = \emptyset,$$
   logo, $\phi(y, u) = t$. Além disso, podemos encontrar $s \in [0, t)$ tal que $\exp(s\mathrm{X}_u)(y) \in V$, já que exp é contínua.

   Afirmamos que $\phi(\exp(s\mathrm{X}_u)(y), u) = t - s$. De fato,
$$\begin{aligned} \exp((t-s)\,\mathrm{X}_u)(\exp(s\mathrm{X}_u)(y)) &= \exp((t-s)\,\mathrm{X}_{u\cdot s})(\exp(s\mathrm{X}_u)(y)) \\ &= \exp(t\mathrm{X}_u)(y) = x \in M_\varphi. \end{aligned}$$

Ainda, para qualquer $\tau \in (0, t-s)$,

$$\begin{aligned}\exp(\tau \mathrm{X}_u)\exp(s\mathrm{X}_u)(y) &= \exp(\tau \mathrm{X}_{u\cdot s})\exp(s\mathrm{X}_u)(y)\\ &= \exp((\tau+s)\mathrm{X}_u)(y) \notin M_\varphi,\end{aligned}$$

uma vez que $\tau + s < t$ e $\phi(y,u) = t$. Portanto, $\phi(\exp(s\mathrm{X}_u)(y), u) = t - s$. Assim,

$$\begin{aligned}I(x) &= I(\exp(t\mathrm{X}_u)(y)) = I(\exp((t-s)\mathrm{X}_{u\cdot s})(\exp(s\mathrm{X}_u)(y)))\\ &= I(\exp((t-s)\mathrm{X}_u)(\exp(s\mathrm{X}_u)(y)))\\ &= \widetilde{\exp}((t-s)\mathrm{X}_u)(\exp(s\mathrm{X}_u)(y)) \in \widetilde{\mathcal{S}}V,\end{aligned}$$

donde, $I(x) \in W \cap \widetilde{\mathcal{S}}V$, o que contradiz $W \cap \widetilde{\mathcal{S}}V = \emptyset$. Portanto, A é invariante por I.

Por fim, se A é também fechado, então A é positivamente invariante por $\mathcal{S}$, pelo Teorema 2.1.2.

2. Primeiramente, vamos mostrar que A é positivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Sejam $x \in A$ e $\epsilon > 0$. Por hipótese, A é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$, logo, existe $\delta > 0$ tal que $\widetilde{\mathcal{S}}B(x,\delta) \subset B(A,\epsilon)$. Em particular, $\widetilde{\mathcal{S}}(x) \subset B(A,\epsilon)$ e, consequentemente, $\widetilde{\mathcal{S}}(x) \subset \bigcap\{B(A,\epsilon) : \epsilon > 0\} = \overline{A} = A$. Portanto, A é positivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Segue, do Teorema 2.1.2, que A é positivamente invariante por $\mathcal{S}$.

   Resta mostrar que A é invariante por I. Sejam $x \in M_\varphi \cap A$ e $u \in U$. Notemos que é possível encontrar $y \in M$ e $t > 0$ tais que

$$\exp(t\mathrm{X}_u)(y) = x \text{ e } \exp([0,t)\mathrm{X}_u)(y) \cap M_\varphi = \emptyset,$$

   logo, $\phi(y,u) = t$. Como A é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$, segue que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\widetilde{\mathcal{S}}B(x,\delta) \subset B(A,\epsilon)$. Daí, podemos encontrar $s \in [0,t)$ tal que $\exp(s\mathrm{X}_u)(y) \in B(x,\delta)$, visto que exp é contínua. Utilizando a mesma estratégia apresentada no item 1, provamos que $\phi(\exp(s\mathrm{X}_u)(y), u) = t - s$. Assim,

$$\begin{aligned}I(x) &= I(\exp(t\mathrm{X}_u)(y)) = I(\exp((t-s)\mathrm{X}_{u\cdot s})(\exp(s\mathrm{X}_u)(y)))\\ &= I(\exp((t-s)\mathrm{X}_u)(\exp(s\mathrm{X}_u)(y)))\\ &= \widetilde{\exp}((t-s)\mathrm{X}_u)(\exp(s\mathrm{X}_u)(y)) \in \widetilde{\mathcal{S}}B(x,\delta) \subset B(A,\epsilon)\end{aligned}$$

   e, portanto, $I(x) \in \bigcap\{B(A,\epsilon) : \epsilon > 0\} = \overline{A} = A$, donde, A é invariante por I.

$\square$

Nosso objetivo, agora, é analisar possíveis relações entre as noções de estabilidade por $\mathcal{S}$ e $\widetilde{\mathcal{S}}$. Inicialmente, vejamos dois exemplos que comprovam que o comportamento dinâmico do sistema de controle impulsivo pode ser completamente diferente do comportamento dinâmico do sistema original. O primeiro exemplo mostra que a estabilidade por $\widetilde{\mathcal{S}}$ não implica estabilidade por $\mathcal{S}$.

Exemplo 2.2.1. *Consideremos o sistema de controle sobre*

$$M = \mathbb{R}^2 \backslash \left\{ x = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1 \right\}$$

determinado pelos campos de vetores $\{X, Y\}$ *dados por*

$$X(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{100} \left(x_1 + x_2 - \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2x_1} \right), \frac{1}{100} \left(-x_1 + x_2 - \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2x_2} \right) \right)$$

e

$$Y(x_1, x_2) = (-x_2, x_1),$$

com

$$M_\varphi = \{(0, x_2) : x_2 \in [1, +\infty)\}, \quad I(0, x_2) = \left(0, -\frac{x_2 + 99}{100}\right), \quad \text{para todo } x_2 \in [1, +\infty).$$

Seja $A = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. *As trajetórias de* X *possuem o seguinte comportamento:*

i) para $x \in A$, *as trajetórias se movem sobre o círculo unitário* A*;*

ii) para $x \notin A$, *as trajetórias se movem sobre espirais a partir do círculo unitário* A *para o infinito.*

As trajetórias de Y *se movem sobre círculos centrados na origem* $0 \in \mathbb{R}^2$. *Reunindo todas essas trajetórias, obtemos todas as trajetórias do sistema de controle. Evidentemente,* A *não é estável por* $\mathcal{S}$. *Porém, após um impulso, a trajetória estará mais próxima do círculo unitário. Portanto,* A *é estável por* $\widetilde{\mathcal{S}}$. *A Figura 2.2 ilustra as trajetórias do sistema de controle.*

Vejamos, então, um exemplo que mostra que a estabilidade por $\mathcal{S}$ não implica estabilidade por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Exemplo 2.2.2. *Consideremos o sistema de controle sobre*

$$M = \left\{ x = (x_1, x_2) : \frac{1}{16} \leq x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{9} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

determinado pelos campos de vetores $\{X, Y\}$ *dados por*

$$X(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$$

e

$$Y = (Y_1, Y_2),$$

onde

$$Y_1(x_1, x_2) = -x_2 + x_1 \left(x_1^2 + x_2^2\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) \quad e$$

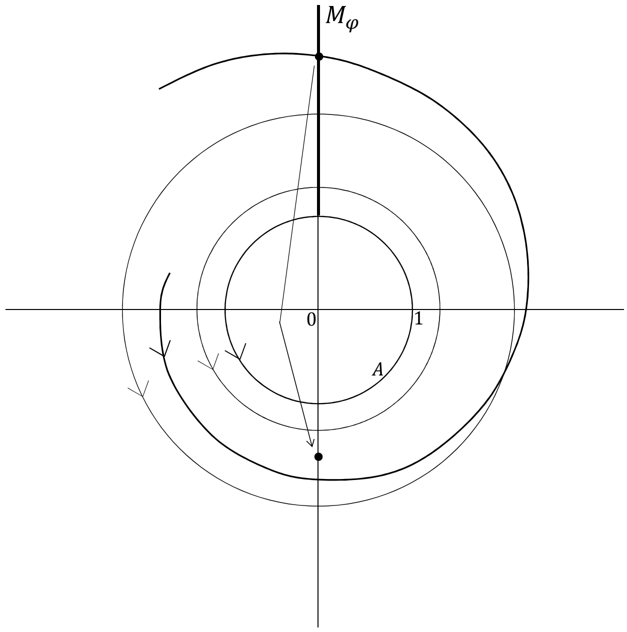

Figura 2.2: Trajetórias do sistema de controle.

$$Y_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right),$$

com

$$M_\varphi = \left\{(0, x_2) : x_2 \in \left[\frac{1}{4}, \frac{7}{24}\right]\right\}, \quad I\left((0, x_2)\right) = \left(-2x_2 + \frac{1}{4}, 0\right), \quad \textit{para todo } x_2 \in \left[\frac{1}{4}, \frac{7}{24}\right].$$

As trajetórias de X se movem sobre círculos centrados na origem $0 \in \mathbb{R}^2$. As trajetórias de Y possuem o seguinte comportamento:

i) para $\|x\| = \frac{1}{4}$, as trajetórias se movem sobre o círculo $C_{\frac{1}{4}} = \left\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{16}\right\}$;

ii) para $\|x\| = \frac{1}{3}$, as trajetórias se movem sobre o círculo $C_{\frac{1}{3}} = \left\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{9}\right\}$;

iii) para $\frac{1}{4} < \|x\| < \frac{1}{3}$, as trajetórias se movem sobre espirais que se aproximam do círculo $C_{\frac{1}{4}}$ em tempo positivo e se aproximam do círculo $C_{\frac{1}{3}}$ em tempo negativo.

Reunindo todas essas trajetórias, obtemos todas as trajetórias do sistema de controle. Evidentemente, $C_{\frac{1}{4}}$ é estável por $\mathcal{S}$. Entretanto, se $x_2 \in \left(\frac{1}{4}, \frac{7}{24}\right]$, então $\|I\left((0, x_2)\right)\| > \|(0, x_2)\|$ e, portanto, $C_{\frac{1}{4}}$ não é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. A Figura 2.3 ilustra as trajetórias do sistema de controle.

Embora possa parecer muito fraca a relação entre as estabilidades por $\mathcal{S}$ e $\widetilde{\mathcal{S}}$, já que os impulsos podem ser vistos como uma força externa capaz de mudar o comportamento dinâmico do sistema completamente, ainda assim é possível relacionar esses dois conceitos, como vemos nos próximos resultados.

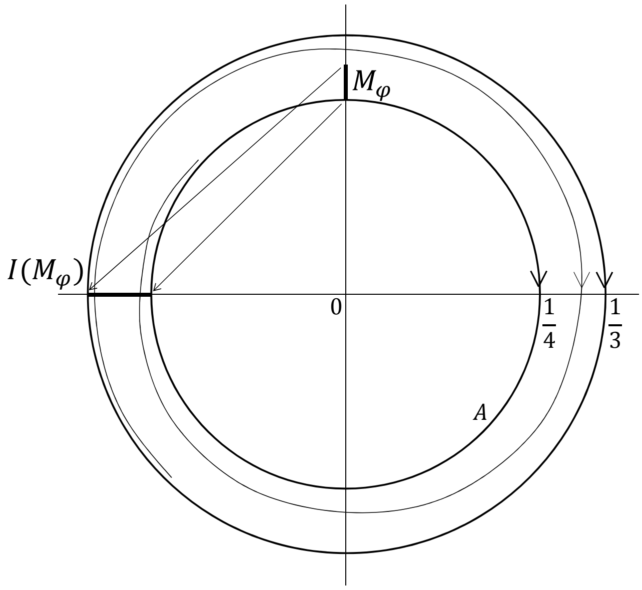

Figura 2.3: Trajetórias do sistema de controle.

Vamos começar investigando quais são as condições que garantem que a estabilidade uniforme por $\mathcal{S}$ implique estabilidade uniforme por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Dados um subconjunto A de M e um ponto x em uma vizinhança adequada de A, o teorema, a seguir, apresenta uma condição sobre a distância do ponto impulsivo $\varphi(\phi(x,u),x,u)$ ao conjunto A e a distância do ponto $I(\varphi(\phi(x,u),x,u))$ ao conjunto A.

Teorema 2.2.3. *Seja A um subconjunto uniformemente estável por $\mathcal{S}$ de M. Suponhamos que exista $\mu > 0$ tal que, para todo $x \in B(A,\mu)$, as seguintes condições sejam válidas:*

1. *se $x \in M_\varphi$, então $d_A(I(x)) \leq d_A(x)$;*

2. *se $x \in I(M_\varphi)$, $u \in \mathcal{U}_{cp}$ e $\phi(x,u) < +\infty$, então $d_A(\varphi(\phi(x,u),x,u)) \leq d_A(x)$.*

Então, A é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Podemos assumir que $\epsilon < \mu$. Por hipótese, A é uniformemente estável por $\mathcal{S}$, logo, existe $\eta > 0$ tal que $\mathcal{S}B(A,\eta) \subset B(A,\epsilon)$. Podemos encontrar também $\delta > 0$ tal que $\mathcal{S}B(A,\delta) \subset B\left(A,\frac{\eta}{2}\right)$. Sejam $x \in B(A,\delta)$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$. Se $\phi(x,u) = +\infty$, então

$$\widetilde{\varphi}(t,x,u) = \varphi(t,x,u) \in \mathcal{S}B(A,\delta) \subset B\left(A,\frac{\eta}{2}\right) \subset B(A,\epsilon),$$

para todo $t \geq 0$. Se $\phi(x,u) < +\infty$, então, para todo $t \in [0,\phi(x,u))$,

$$\widetilde{\varphi}(t,x,u) = \varphi(t,x,u) \in \mathcal{S}B(A,\delta) \subset B(A,\epsilon).$$

Agora,

$$x_1 = \varphi\left(\phi\left(x,u\right),x,u\right) \in \mathcal{S}B\left(A,\delta\right) \subset B\left(A,\frac{\eta}{2}\right) \subset B\left(A,\epsilon\right) \subset B\left(A,\mu\right).$$

Pela hipótese 1, temos que $d_A\left(x_1^+\right) = d_A\left(I\left(x_1\right)\right) \leq d_A\left(x_1\right) < \eta$ e, portanto, $x_1^+ \in B\left(A,\eta\right)$. Para todo $t \in \left[s_0, s_0 + \phi\left(x_1^+, u\cdot s_0\right)\right)$, temos que

$$\widetilde{\varphi}\left(t,x,u\right) = \varphi\left(t - s_0, x_1^+, u\cdot s_0\right) \in \mathcal{S}B\left(A,\eta\right) \subset B\left(A,\epsilon\right).$$

Agora, como $x_1^+ \in B\left(A,\mu\right) \cap I\left(M_\varphi\right)$, segue, da hipótese 2, que

$$d_A\left(x_2\right) = d_A\left(\varphi\left(\phi\left(x_1^+, u\cdot s_0\right), x_1^+, u\cdot s_0\right)\right) \leq d_A\left(x_1^+\right) < \eta.$$

Daí, da hipótese 1, segue que $d_A\left(x_2^+\right) = d_A\left(I\left(x_2\right)\right) \leq d_A\left(x_2\right) < \eta$ e, portanto, $x_2^+ \in B\left(A,\eta\right)$. Para todo $t \in \left[s_0 + s_1, s_0 + s_1 + \phi\left(x_2^+, u\cdot\left(s_0+s_1\right)\right)\right)$, temos que

$$\widetilde{\varphi}\left(t,x,u\right) = \varphi\left(t - \left(s_0+s_1\right), x_2^+, u\cdot\left(s_0+s_1\right)\right) \in \mathcal{S}B\left(A,\eta\right) \subset B\left(A,\epsilon\right).$$

Continuando com esse processo, obtemos que $\widetilde{\varphi}\left(t,x,u\right) \in B\left(A,\epsilon\right)$, para todo $t \geq 0$. Portanto, A é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. □

O próximo resultado estabelece uma condição sobre a função impulsiva I.

Teorema 2.2.4. *Seja A um subconjunto uniformemente estável por $\mathcal{S}$ de M. Suponhamos que exista $\eta > 0$ tal que $I\left(M_\varphi \cap B\left(A,\eta\right)\right) \subset A$. Então, A é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Podemos assumir que $\epsilon < \eta$. Por hipótese, A é uniformemente estável por $\mathcal{S}$, logo, existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{S}B\left(A,\delta\right) \subset B\left(A,\epsilon\right)$. Sejam $x \in B\left(A,\delta\right)$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$. Se $\phi\left(x,u\right) = +\infty$, então, para todo $t \geq 0$,

$$\widetilde{\varphi}\left(t,x,u\right) = \varphi\left(t,x,u\right) \in \mathcal{S}B\left(A,\delta\right) \subset B\left(A,\epsilon\right).$$

Se $\phi\left(x,u\right) < +\infty$, então $\widetilde{\varphi}\left(t,x,u\right) = \varphi\left(t,x,u\right) \in B\left(A,\epsilon\right)$, para todo $t \in \left[0,\phi\left(x,u\right)\right)$. Agora,

$$x_1 = \varphi\left(\phi\left(x,u\right),x,u\right) \in B\left(A,\epsilon\right) \subset B\left(A,\eta\right)$$

e, portanto, segue da hipótese que

$$x_1^+ = I\left(x_1\right) \in I\left(M_\varphi \cap B\left(A,\eta\right)\right) \subset A \subset B\left(A,\delta\right).$$

Para todo $t \in \left[s_0, s_0 + \phi\left(x_1^+, u\cdot s_0\right)\right)$, temos que

$$\widetilde{\varphi}\left(t,x,u\right) = \varphi\left(t - s_0, x_1^+, u\cdot s_0\right) \in \mathcal{S}B\left(A,\delta\right) \subset B\left(A,\epsilon\right).$$

Continuando com esse processo, obtemos que $\widetilde{\varphi}\left(t,x,u\right) \in B\left(A,\epsilon\right)$, para todo $t \geq 0$. Portanto, A é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. □

O exemplo, a seguir, mostra que a condição $I\left(M_\varphi \cap B\left(A,\eta\right)\right) \subset A$ do Teorema 2.2.4 é, de fato, necessária.

Exemplo 2.2.3. *Consideremos um sistema de controle afim determinado por um conjunto F de campos de Killing sobre a variedade Riemanniana M. Assim, o semigrupo do sistema $\mathcal{S}$ é um semigrupo de isometrias de M.*

Afirmamos que $\overline{\mathcal{S}(x)}$ é uniformemente estável por $\mathcal{S}$, para todo $x \in M$. De fato, sejam $x \in M$ e $\epsilon > 0$. Vamos mostrar que $\mathcal{S}B\left(\overline{\mathcal{S}(x)}, \epsilon\right) \subset B\left(\overline{\mathcal{S}(x)}, \epsilon\right)$. Seja $y \in B\left(\overline{\mathcal{S}(x)}, \epsilon\right)$. Logo, existe $z \in \overline{\mathcal{S}(x)}$ tal que $d(y,z) < \epsilon$. Seja $g \in \mathcal{S}$. Assim, $g(z) \in \overline{\mathcal{S}(x)}$. Daí,

$$d(g(y), g(z)) = d(y,z) < \epsilon, \quad \textit{donde,} \quad g(y) \in B(g(z), \epsilon) \subset B\left(\overline{\mathcal{S}(x)}, \epsilon\right).$$

Então, $\mathcal{S}B\left(\overline{\mathcal{S}(x)}, \epsilon\right) \subset B\left(\overline{\mathcal{S}(x)}, \epsilon\right)$ e, portanto, $\overline{\mathcal{S}(x)}$ é uniformemente estável por $\mathcal{S}$.

Agora, vamos considerar um conjunto impulsivo M_φ compacto. Se $\overline{\mathcal{S}(x)} \cap M_\varphi = \emptyset$, então podemos encontrar $\eta > 0$ tal que $B\left(\overline{\mathcal{S}(x)}, \eta\right) \cap M_\varphi = \emptyset$, pela compacidade de M_φ. Nesse caso, segue, do Teorema 2.2.4, que $\overline{\mathcal{S}(x)}$ é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Suponhamos, então, que $\overline{\mathcal{S}(x)} \cap M_\varphi \neq \emptyset$ e que $\overline{\mathcal{S}(x)} \cap I(M_\varphi) = \emptyset$, ou seja, a condição do Teorema 2.2.4 não é satisfeita. Afirmamos que $\overline{\mathcal{S}(x)}$ não é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. De fato, pela compacidade de $I(M_\varphi)$, podemos encontrar $\epsilon > 0$ tal que $B\left(\overline{\mathcal{S}(x)}, \epsilon\right) \cap I(M_\varphi) = \emptyset$. Seja $\delta > 0$. Como $\overline{\mathcal{S}(x)} \cap M_\varphi \neq \emptyset$, podemos encontrar $y \in B\left(\overline{\mathcal{S}(x)}, \delta\right) \cap M_\varphi$. Seja $X \in F$. Como $B\left(\overline{\mathcal{S}(x)}, \delta\right)$ é um conjunto aberto, existe $t > 0$ tal que $\exp(-tX)\, y \in B\left(\overline{\mathcal{S}(x)}, \delta\right)$. Definimos $z = \exp(-tX)\, y$. Então, $\exp(tX)\, z = y \in M_\varphi$ e, portanto, existe $\tau > 0$ tal que $\widetilde{\exp}(\tau X)\, z \in I(M_\varphi)$. Disto, segue que $\widetilde{\exp}(\tau X)\, z \notin B\left(\overline{\mathcal{S}(x)}, \epsilon\right)$. Portanto, $\widetilde{\exp}(\tau X)\, z \in \widetilde{\mathcal{S}}B\left(\overline{\mathcal{S}(x)}, \delta\right) \setminus B\left(\overline{\mathcal{S}(x)}, \epsilon\right)$. Isto significa que $\overline{\mathcal{S}(x)}$ não é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Vale ressaltar que os Teoremas 2.2.3 e 2.2.4 também são válidos para um conjunto compacto e estável por $\mathcal{S}$, uma vez que os conceitos de estabilidade e estabilidade uniforme são equivalentes para conjuntos compactos.

Consideremos, agora, um subconjunto A compacto e estável por $\mathcal{S}$ de M. O próximo teorema mostra que a condição $A \cap M_\varphi = \emptyset$ garante a estabilidade por $\widetilde{\mathcal{S}}$ de A.

Teorema 2.2.5. *Seja A um subconjunto compacto e estável por $\mathcal{S}$ de M e suponhamos que $A \cap M_\varphi = \emptyset$. Então, A é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.*

Demonstração. Como A é compacto e M_φ é fechado, podemos encontrar $\eta > 0$ tal que $B(A, \eta) \cap M_\varphi = \emptyset$. Sejam $x \in A$ e $\epsilon > 0$. Podemos assumir que $\epsilon < \eta$. Por hipótese, A é estável por $\mathcal{S}$, logo, existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{S}B(x, \delta) \subset B(A, \epsilon) \subset B(A, \eta)$. Daí, $\mathcal{S}B(x, \delta) \cap M_\varphi = \emptyset$ e, então, $\widetilde{\mathcal{S}}B(x, \delta) = \mathcal{S}B(x, \delta) \subset B(A, \epsilon)$. Portanto, A é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. □

Como consequência imediata do Teorema 2.2.5, temos dois resultados que envolvem pontos de equilíbrio e pontos periódicos. Vamos relembrar, primeiro, esses conceitos. Seja

$u \in \mathcal{U}_{cp}$ fixo. Dizemos que a trajetória de $x \in M$ com respeito a u é **estacionária** se $\varphi(t,x,u) = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Nesse caso, dizemos que x é um **ponto de equilíbrio com respeito a** u. Dizemos que um ponto x é **periódico com respeito a** φ **e** u se existe $\tau > 0$ tal que $\varphi(t+\tau,x,u) = \varphi(t,x,u)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e x não é um ponto de equilíbrio com respeito a u. Temos, então, o seguinte corolário.

Corolário 2.2.1. 1. *Se $x \notin M_\varphi$ é um ponto de equilíbrio com respeito a u, para todo $u \in \mathcal{U}_{cp}$, e $\{x\}$ é estável por $\mathcal{S}$, então $\{x\}$ é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.*

2. *Se x é periódico com respeito a $u \in \mathcal{U}_{cp}$, $\varphi(t,x,u) \notin M_\varphi$, para todo $t \geq 0$, e a semitrajetória positiva $A = \{\varphi(t,x,u) : t \geq 0\}$ é estável por $\mathcal{S}$, então A é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.*

No caso em que um sistema de controle é determinado por um conjunto finito de campos de vetores, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.2.6. *Sejam A um subconjunto de M e $F = \{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n\}$ um conjunto finito de campos de vetores comutativos sobre a variedade M. Então, A é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$ se, e somente se, A é uniformemente estável para cada sistema dinâmico impulsivo determinado por X_i, $i = 1, ..., n$.*

Demonstração. Provaremos o caso em que $n = 2$ e o resultado geral seguirá por indução. Assim, consideremos $F = \{\mathrm{X}, \mathrm{Y}\}$. Definimos os sistemas dinâmicos φ_X e φ_Y sobre M pondo

$$\varphi_\mathrm{X}(t,x) = \exp(t\mathrm{X})(x) \quad \text{e} \quad \varphi_\mathrm{Y}(t,x) = \exp(t\mathrm{Y})(x), \quad t \in \mathbb{R} \text{ e } x \in M,$$

respectivamente. Dado um subconjunto B de M, denotemos por $\widetilde{\varphi}^+_\mathrm{X}(B)$ o conjunto de todas as semitrajetórias positivas impulsivas através dos pontos de B com respeito a φ_X. Analogamente, definimos $\widetilde{\varphi}^+_\mathrm{Y}(B)$. Afirmamos que $\widetilde{\mathcal{S}}B = \widetilde{\varphi}^+_\mathrm{Y}\left(\widetilde{\varphi}^+_\mathrm{X}(B)\right) = \widetilde{\varphi}^+_\mathrm{X}\left(\widetilde{\varphi}^+_\mathrm{Y}(B)\right)$. De fato, como X e Y são campos de vetores comutativos que determinam o sistema de controle, segue que

$$\widetilde{\mathcal{S}}(x) = \{\widetilde{\exp}(t\mathrm{X}) \circ \widetilde{\exp}(s\mathrm{Y})(x) : t,s \geq 0\} = \{\widetilde{\exp}(s\mathrm{Y}) \circ \widetilde{\exp}(t\mathrm{X})(x) : t,s \geq 0\},$$

para todo $x \in M$. Isto prova que $\widetilde{\mathcal{S}}B = \widetilde{\varphi}^+_\mathrm{Y}\left(\widetilde{\varphi}^+_\mathrm{X}(B)\right) = \widetilde{\varphi}^+_\mathrm{X}\left(\widetilde{\varphi}^+_\mathrm{Y}(B)\right)$, para qualquer subconjunto B de M. Agora, sejam A um subconjunto uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$ de M e $\epsilon > 0$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta) \subset B(A,\epsilon)$. Pelo que foi provado anteriormente,

$$\widetilde{\varphi}^+_\mathrm{X}(B(A,\delta)) \subset \widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta) \subset B(A,\epsilon)$$

e, portanto, A é uniformemente estável para o sistema dinâmico impulsivo $\widetilde{\varphi}_\mathrm{X}$. Analogamente, mostramos que A é uniformemente estável para o sistema dinâmico impulsivo $\widetilde{\varphi}_\mathrm{Y}$.

Reciprocamente, suponhamos que A seja uniformemente estável para os sistemas dinâmicos impulsivos $\widetilde{\varphi}_\mathrm{X}$ e $\widetilde{\varphi}_\mathrm{Y}$. Seja $\epsilon > 0$. Logo, existe $\delta_\mathrm{X} > 0$ tal que $\widetilde{\varphi}^+_\mathrm{X}(B(A,\delta_\mathrm{X})) \subset$

$B(A,\epsilon)$. Podemos também encontrar $\delta_{\mathrm{Y}} > 0$ tal que $\widetilde{\varphi}_{\mathrm{Y}}^{+}(B(A,\delta_{\mathrm{Y}})) \subset B(A,\delta_{\mathrm{X}})$. Temos, então, que

$$\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta_{\mathrm{Y}}) = \widetilde{\varphi}_{\mathrm{X}}^{+}\left(\widetilde{\varphi}_{\mathrm{Y}}^{+}(B(A,\delta_{\mathrm{Y}}))\right) \subset \widetilde{\varphi}_{\mathrm{X}}^{+}(B(A,\delta_{\mathrm{X}})) \subset B(A,\epsilon)$$

e, portanto, A é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. □

Como uma aplicação do Teorema 2.2.6, apresentamos o exemplo abaixo.

Exemplo 2.2.4. *Consideremos o sistema de controle sobre $M = \mathbb{R}^2$ determinado pelos campos de vetores $\{X, Y\}$ dados por*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

com

$$M_{\varphi} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_*} C_{2n}, \qquad I(x) = \frac{x}{1+\|x\|}, \qquad \text{para todo } x \in M_{\varphi},$$

onde $C_k = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = \frac{1}{k}\right\}$, $k \in \mathbb{N}_* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Note que $I(C_{2n}) = C_{2n+1}$. Evidentemente, a origem $0 \in \mathbb{R}^2$ não é estável para ambos os campos de vetores X e Y, logo, não é estável para o sistema de controle. Consideremos as notações utilizadas no Teorema 2.2.6.

Afirmamos que a origem 0 é uniformemente estável para os sistemas dinâmicos impulsivos $\widetilde{\varphi}_X$ e $\widetilde{\varphi}_Y$. De fato, seja $\epsilon > 0$. Podemos encontrar $k \in \mathbb{N}_*$ tal que $B\left(0, \frac{1}{2k}\right) \subset B(0,\epsilon)$. Como $I(C_{2n}) = C_{2n+1}$, segue que as semitrajetórias positivas impulsivas de X e Y que começarem em $B\left(0, \frac{1}{2k+1}\right)$ não sairão de $B\left(0, \frac{1}{2k}\right)$. Assim,

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_X\left(B\left(0, \frac{1}{2k+1}\right)\right) &\subset B\left(0, \frac{1}{2k}\right) \subset B(0,\epsilon) \quad e \\ \widetilde{\varphi}_Y\left(B\left(0, \frac{1}{2k+1}\right)\right) &\subset B\left(0, \frac{1}{2k}\right) \subset B(0,\epsilon) \end{aligned}$$

e, portanto, a origem 0 é uniformemente estável para os sistemas dinâmicos impulsivos $\widetilde{\varphi}_X$ e $\widetilde{\varphi}_Y$. Segue, do Teorema 2.2.6, que a origem é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. A Figura 2.4 ilustra as trajetórias de X e de Y.

Para encerrar essa seção, vamos novamente analisar a componente conexa de um conjunto. Estamos interessados, agora, em investigar a sua estabilidade. A primeira proposição mostra que se todas as componentes de um conjunto compacto A forem estáveis por $\widetilde{\mathcal{S}}$, então A será estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Proposição 2.2.4. *Seja A um subconjunto compacto de M. Suponhamos que toda componente conexa de A seja estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Então, A é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.*

Demonstração. Sejam $\epsilon > 0$, $x \in A$ e A_x uma componente conexa de A tal que $x \in A_x$. Por hipótese, A_x é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$, logo, existe $\delta > 0$ tal que $\widetilde{\mathcal{S}}B(x,\delta) \subset$

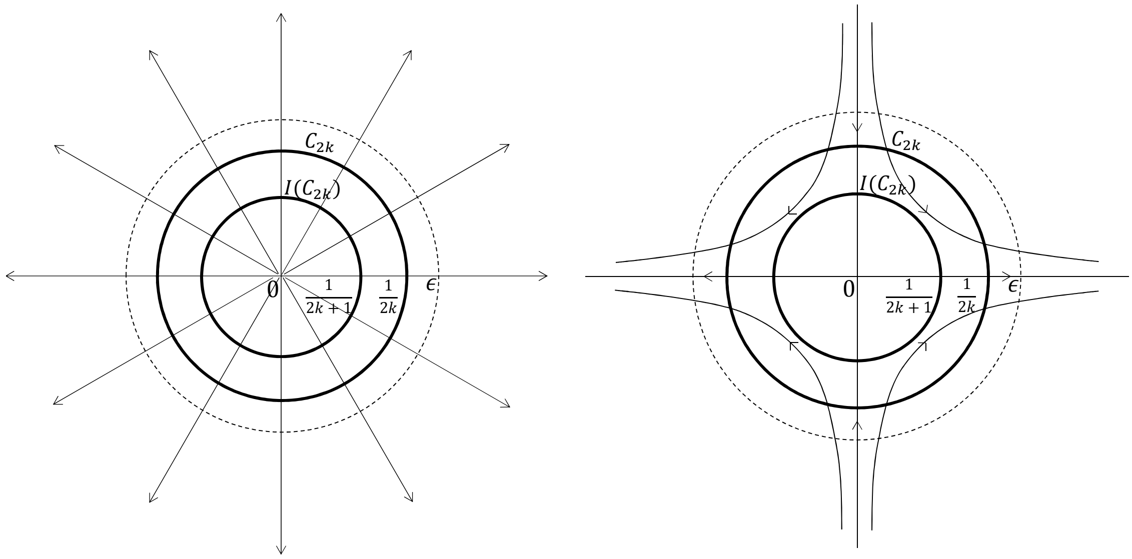

Figura 2.4: Trajetórias de X (à esquerda) e de Y (à direita).

$B(A_x, \epsilon) \subset B(A, \epsilon)$. Portanto, A é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. $\square$

Pensemos, agora, sobre o que acontece com as componentes conexas de um conjunto estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Para analisar esse caso, vamos introduzir o conceito de componente conexa isolada.

Definição 2.2.3. *Sejam A um subconjunto fechado de M e E uma componente conexa de A. Dizemos que a componente E é* ***isolada*** *em A se existem conjuntos abertos disjuntos V e W tais que $E \subset V$ e $A \backslash E \subset W$.*

Por exemplo, se A é um conjunto fechado que possui somente uma quantidade finita de componentes conexas, então cada uma de suas componentes é isolada em A. Vejamos no teorema, a seguir, quais são as condições adequadas para que a componente conexa de um conjunto compacto e estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$ seja também estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Teorema 2.2.7. *Sejam A um subconjunto compacto e estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$ de M e E uma componente conexa isolada em A. Então, E é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$ se, e somente se, E é invariante por I.*

Demonstração. Seja E uma componente conexa isolada em A. Suponhamos que E seja estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Pelo Teorema 2.2.2, temos que E é invariante por I.

Reciprocamente, suponhamos que E seja invariante por I. Segue, da definição de componente isolada, que existem conjuntos abertos disjuntos V e W tais que $E \subset V$ e $A \backslash E \subset W$. Além disso, como E é uma componente do conjunto compacto A, segue que E é compacto. Pela compacidade local de M, podemos assumir que $\overline{V}$ é compacto. Suponhamos, por absurdo, que E não seja estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Logo, existem $\alpha > 0$, $x \in E$ e uma sequência (x_n) tais que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ e $\widetilde{\mathcal{S}}\,(x_n)$ não está contido em $\overline{B\,(E,\alpha)}$. Por outro lado, podemos encontrar $\beta > 0$ tal que $\overline{B\,(E,\beta)}$ é compacto e $\overline{B\,(E,\beta)} \subset V$, já que M é localmente compacto e E é compacto. Seja $\gamma = \min\{\alpha,\beta\}$. Assim, $\widetilde{\mathcal{S}}\,(x_n)$ não está contido em $\overline{B\,(E,\gamma)}$, $\overline{B\,(E,\gamma)}$ é compacto e $\overline{B\,(E,\gamma)} \subset V$.

Escolhemos, então, uma sequência (u_n) em $\mathcal{U}$ tal que $\widetilde{\varphi}\,([0,+\infty)\,,x_n,u_n)$ não esteja contido em $\overline{B\,(E,\gamma)}$. Afirmamos que existe n_0 tal que $M_{\varphi}^{+}\,(x_n,u_n) \neq \emptyset$, para todo $n \geq n_0$. De fato, suponhamos, por absurdo, que exista uma quantidade infinita de índices n tal que $M_{\varphi}^{+}\,(x_n,u_n) = \emptyset$, ou seja, $\phi\,(x_n,u_n) = +\infty$. Podemos assumir que $M_{\varphi}^{+}\,(x_n,u_n) = \emptyset$, para todo n, passando a uma subsequência se necessário. Então, $\widetilde{\varphi}\,(t,x_n,u_n) = \varphi\,(t,x_n,u_n)$, para quaisquer $t \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Como $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ e $x \in E \subset B\,(E,\gamma)$, podemos assumir que $x_n \in B\,(E,\gamma)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, existe $\tau_n \geq 0$ tal que

$$\widetilde{\varphi}\,(\tau_n,x_n,u_n) = \varphi\,(\tau_n,x_n,u_n) \in \partial B\,(E,\gamma) \subset \overline{B\,(E,\gamma)},$$

já que $\widetilde{\varphi}\,([0,+\infty)\,,x_n,u_n)$ não está contido em $\overline{B\,(E,\gamma)}$. Desse modo, assumimos que $\widetilde{\varphi}\,(\tau_n,x_n,u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \in \partial B\,(E,\gamma)$. Isto significa que $y \in \widetilde{D}^{+}\,(x) \subset \widetilde{D}^{+}\,(A)$. Pelo Teorema 2.2.1, temos que $\widetilde{D}^{+}\,(A) = A$ e, por isso, $y \in A$. Assim,

$$y \in A\backslash E \subset W \quad \text{ e } \quad y \in \partial B\,(E,\gamma) \subset \overline{B\,(E,\gamma)} \subset V$$

e, portanto, $y \in V \cap W$, o que contradiz $V \cap W = \emptyset$. Portanto, existe n_0 tal que $M_{\varphi}^{+}\,(x_n,u_n) \neq \emptyset$, para todo $n \geq n_0$.

Por hipótese, A é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$, logo, existe $\eta > 0$ tal que $\widetilde{\mathcal{S}}B\,(x,\eta) \subset B\,(E,\gamma) \cup W$. Como $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, podemos assumir que $x_n \in B\,(x,\eta)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $\{t : \widetilde{\varphi}\,(t,x_n,u_n) \in W\} \neq \emptyset$, para todo n, uma vez que $\widetilde{\mathcal{S}}\,(x_n)$ não está contido em $\overline{B\,(E,\gamma)}$. Assim, para cada n, definimos $t_n = \inf\{t : \widetilde{\varphi}\,(t,x_n,u_n) \in W\}$. Notemos que $\widetilde{\varphi}\,([0,t_n)\,,x_n,u_n) \cap W = \emptyset$ e, portanto, $\widetilde{\varphi}\,([0,t_n)\,,x_n,u_n) \subset B\,(E,\gamma)$, pois $\widetilde{\mathcal{S}}B\,(x,\eta) \subset B\,(E,\gamma) \cup W$. De acordo com a construção das semitrajetórias positivas impulsivas, $\widetilde{\varphi}\,(t_n,x_n,u_n) \in W$ e $\widetilde{\varphi}\,(t_n,x_n,u_n) = x_{n_k}^{+}$, para algum $n_k \in \mathbb{N}$. Isto significa que $\widetilde{\varphi}\,(t_n,x_n,u_n) = I\,(q_n)$, para algum $q_n \in \overline{B\,(E,\gamma)}$.

Agora, para cada n, escolhemos $v_n < t_n$ tal que não exista nenhum ponto impulsivo em $\widetilde{\varphi}\,((v_n,t_n)\,,x_n,u_n)$. Além disso, para cada n, escolhemos $r_n \in (v_n,t_n)$ tal que $t_n - r_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Como $\mathcal{U}$ é compacto, segue que existe $w \in \mathcal{U}$ tal que $u_n \cdot r_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} w$. Definimos $p_n = \widetilde{\varphi}\,(r_n,x_n,u_n) \in \overline{B\,(E,\gamma)}$. Pela compacidade de $\overline{B\,(E,\gamma)}$, podemos assumir que $p_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p \in \overline{B\,(E,\gamma)}$. Como $r_n \in \left[\sum\limits_{i=n_0}^{n_{k-2}} s_i, \sum\limits_{i=n_0}^{n_{k-1}} s_i\right)$, onde $s_{n_{k-1}} = \phi\left(x_{n_{k-1}}^{+}, u_n \cdot \sum\limits_{i=n_0}^{n_{k-2}} s_i\right)$, temos

$$p_n = \widetilde{\varphi}\,(r_n,x_n,u_n) = \varphi\left(r_n - \sum_{i=n_0}^{n_{k-2}} s_i, x_{n_{k-1}}^{+}, u_n \cdot \sum_{i=n_0}^{n_{k-2}} s_i\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
q_n &= \varphi\left(t_n - \sum_{i=n_0}^{n_{k-2}} s_i, x^+_{n_{k-1}}, u_n \cdot \sum_{i=n_0}^{n_{k-2}} s_i\right) \\
&= \varphi\left(t_n - r_n, \varphi\left(r_n - \sum_{i=n_0}^{n_{k-2}} s_i, x^+_{n_{k-1}}, u_n \cdot \sum_{i=n_0}^{n_{k-2}} s_i\right), \left(u_n \cdot \sum_{i=n_0}^{n_{k-2}} s_i\right) \cdot \left(r_n - \sum_{i=n_0}^{n_{k-2}} s_i\right)\right) \\
&= \varphi\left(t_n - r_n, p_n, \left(u_n \cdot \sum_{i=n_0}^{n_{k-2}} s_i\right) \cdot \left(r_n - \sum_{i=n_0}^{n_{k-2}} s_i\right)\right) \\
&= \varphi\left(t_n - r_n, p_n, u_n \cdot r_n\right),
\end{aligned}$$

donde, $q_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(0,p,w) = p$. Como $q_n \in M_\varphi$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $p \in \overline{M_\varphi} = M_\varphi$. Por outro lado, $p \in \widetilde{D}^+(x) \subset \widetilde{D}^+(A) = A$, já que $\widetilde{\varphi}(r_n, x_n, u_n) = p_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p$ e $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Agora, $\overline{B(E,\gamma)} \cap (A\backslash E) = \emptyset$, pois $\overline{B(E,\gamma)} \subset V$, $A\backslash E \subset W$ e $V \cap W = \emptyset$. Portanto, $p \notin A\backslash E$, donde, $p \in M_\varphi \cap E$. Segue, da invariância por I de E, que $I(p) \in E$. Porém, como $I(q_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(p)$ e $I(q_n) = \widetilde{\varphi}(t_n, x_n, u_n) \in W$, segue que $I(p) \in \overline{W}$ e, por isso, $I(p) \notin E$, o que é uma contradição. Portanto, E é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. □

Observação 2.2.1. *Como uma consequência imediata do Teorema 2.2.7, temos que se um conjunto A compacto e estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$ possui uma quantidade finita de componentes conexas, então toda componente invariante por I de A é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.*

2.3 Funcionais de Lyapunov

Esta seção também é dedicada ao estudo da estabilidade para sistemas de controle impulsivos, porém, a abordagem adotada, agora, será através dos funcionais de Lyapunov. Vamos trabalhar com dois casos. No primeiro, consideramos um caso geral, onde os funcionais não são necessariamente contínuos, como foi estudado em [8]. Em seguida, vamos considerar um tipo especial de sistema de controle impulsivo, onde é possível obter funcionais de Lyapunov contínuos. Para esse caso, vamos seguir a mesma estratégia adotada por [7].

Antes de mostrar os resultados, introduzimos mais um tipo de estabilidade a ser analisado neste trabalho. Para isso, apresentamos uma base de filtro de subconjuntos de $\widetilde{\mathcal{S}}$, ou seja, uma família $\widetilde{\mathcal{F}}$ de subconjuntos de $\widetilde{\mathcal{S}}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\emptyset \notin \widetilde{\mathcal{F}}$;

2. para quaisquer $F_1, F_2 \in \widetilde{\mathcal{F}}$, existe $F_3 \in \widetilde{\mathcal{F}}$ tal que $F_3 \subset F_1 \cap F_2$.

Assim, para $t > 0$, definimos o seguinte conjunto

$$\widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t} = \left\{ \widetilde{\exp}(t_n X_n) \circ \widetilde{\exp}(t_{n-1} X_{n-1}) \circ \cdots \circ \widetilde{\exp}(t_1 X_1) : X_j \in F, t_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n} t_j \geq t, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Consideremos a família de subconjuntos de $\widetilde{\mathcal{S}}$ dada por $\widetilde{\mathcal{F}} = \left\{\widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t} : t > 0\right\}$. Notemos que $\emptyset \notin \widetilde{\mathcal{F}}$. Além disso, para quaisquer $t, s > 0$, $\widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t+s} \subset \widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t} \cap \widetilde{\mathcal{S}}_{\geq s}$. Portanto, $\widetilde{\mathcal{F}}$ é uma base de filtro de subconjuntos de $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Apresentamos, a seguir, o conceito de atração para o caso impulsivo, que será utilizado para definirmos o outro tipo de estabilidade com o qual desejamos trabalhar. No caso convencional, esse conceito foi introduzido em [9].

Definição 2.3.1. *Seja A um subconjunto de M. O **domínio de atração fraca de** A **com respeito a** $\widetilde{\mathcal{F}}$ é definido por*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_f\left(A, \widetilde{\mathcal{F}}\right) &= \left\{x \in M : \widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t}(x) \cap B(A, \epsilon) \neq \emptyset, \text{ para quaisquer } \epsilon, t > 0\right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} x \in M : \text{ para cada par } \epsilon, t > 0, \text{ existem } s \geq t \text{ e} \\ u \in \mathcal{U}_{cp} \text{ tais que } d_A\left(\widetilde{\varphi}(s, x, u)\right) < \epsilon \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

*O **domínio de atração de** A **com respeito a** $\widetilde{\mathcal{F}}$ é definido por*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\left(A, \widetilde{\mathcal{F}}\right) &= \left\{x \in M : \text{para cada } \epsilon > 0, \text{ existe } t > 0 \text{ tal que } \widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t}(x) \subset B(A, \epsilon)\right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} x \in M : \text{ para cada } \epsilon > 0, \text{ existe } t > 0 \text{ tal que} \\ d_A\left(\widetilde{\varphi}(s, x, u)\right) < \epsilon, \text{ para quaisquer } s \geq t \text{ e } u \in \mathcal{U}_{cp} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

*O conjunto A é chamado **atrator fraco com respeito a** $\widetilde{\mathcal{F}}$ se existe $\delta > 0$ tal que $B(A, \delta) \subset \mathcal{A}_f\left(A, \widetilde{\mathcal{F}}\right)$; e é chamado **atrator com respeito a** $\widetilde{\mathcal{F}}$ se existe $\delta > 0$ tal que $B(A, \delta) \subset \mathcal{A}\left(A, \widetilde{\mathcal{F}}\right)$.*

Definimos, então, os seguintes conceitos de estabilidade relacionados à atração.

Definição 2.3.2. *Seja A um subconjunto de M. Dizemos que A é **assintoticamente estável fraco por** $\widetilde{\mathcal{F}}$ se ele é um atrator fraco com respeito a $\widetilde{\mathcal{F}}$ e é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Ainda, dizemos que A é **assintoticamente estável por** $\widetilde{\mathcal{F}}$ se ele é um atrator com respeito a $\widetilde{\mathcal{F}}$ e é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.*

É importante ressaltar que, para um sistema dinâmico, essas duas noções apresentadas anteriormente são equivalentes. Porém, para um sistema de controle convencional, temos apenas que a estabilidade assintótica implica estabilidade assintótica fraca. É possível obter uma recíproca desse resultado, mas apenas sob condições mais restritivas (veja [10, Seção 3].

Como dissemos no início dessa seção, consideremos primeiro o caso geral, ou seja, vamos trabalhar com um sistema de controle impulsivo sem exigir nenhuma condição restritiva sobre ele. Vale lembrar que, nesse caso, os funcionais de Lyapunov obtidos não são necessariamente contínuos.

Comecemos com um teorema que traz a caracterização de um conjunto fechado e estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$ através de um funcional de Lyapunov.

Teorema 2.3.1. *Seja A um subconjunto fechado de M. Então, A é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$ se, e somente se, existe uma função $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades:*

1. *$\psi(x) = 0$ se, e somente se, $x \in A$;*
2. *para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi(x) \geq \delta$, se $d_A(x) \geq \epsilon$;*
3. *$\psi(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, se (x_n) é uma sequência em M com $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \in A$ (ψ é contínua em $x \in A$);*
4. *$\psi(\sigma(x)) \leq \psi(x)$, para quaisquer $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$ e $x \in M$.*

Demonstração. Suponhamos que tal função $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ exista. Sejam $\epsilon > 0$ e $x \in A$. Definimos $m_0 = \inf\{\psi(z) : d_A(z) \geq \epsilon\}$. Segue, da propriedade 2, que $m_0 > 0$. Ainda, pela propriedade 3, temos que ψ é contínua em x, logo, existe $\delta > 0$ tal que $|\psi(y) - \psi(x)| < m_0$, para todo $y \in B(x,\delta)$. Ora, pela propriedade 1, $\psi(x) = 0$. Disto, segue que $\psi(y) < m_0$, para todo $y \in B(x,\delta)$. Afirmamos que $\widetilde{\mathcal{S}}B(x,\delta) \subset B(A,\epsilon)$. De fato, suponhamos, por absurdo, que existam $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$ e $y \in B(x,\delta)$ tais que $\sigma(y) \notin B(A,\epsilon)$. Logo, $d_A(\sigma(y)) \geq \epsilon$ e, portanto, $\psi(\sigma(y)) \geq m_0$. Por outro lado, pela propriedade 4, temos que $\psi(\sigma(y)) \leq \psi(y) < m_0$, já que $y \in B(x,\delta)$. Obtemos, assim, uma contradição. Portanto, $\widetilde{\mathcal{S}}B(x,\delta) \subset B(A,\epsilon)$, donde, A é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Reciprocamente, suponhamos que A seja estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Definimos a função $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ pondo

$$\psi(x) = \sup_{\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}} \frac{d_A(\sigma(x))}{1 + d_A(\sigma(x))}.$$

Pelo Teorema 2.2.2, temos que A é positivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Segue que $x \in A$ se, e somente se, $\sigma(x) \in A$, para todo $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$. Ainda, como A é fechado, segue que $d_A(\sigma(x)) = 0$ se, e somente se, $\sigma(x) \in A$. Ora, $\psi(x) = 0$ se, e somente se, $x \in A$. Isto prova a propriedade 1.

Agora, vamos provar a propriedade 2. Dado $\epsilon > 0$, escolhemos $\delta = \frac{\epsilon}{1+\epsilon} > 0$. Assim, $d_A(x) \geq \epsilon$ implica que

$$\psi(x) \geq \frac{d_A(x)}{1 + d_A(x)} \geq \frac{\epsilon}{1+\epsilon} = \delta.$$

Para provar a propriedade 3, suponhamos que (x_n) seja uma sequência em M tal que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \in A$ e seja $\epsilon > 0$. Por hipótese, A é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$, logo, existe $\delta > 0$ tal que $\widetilde{\mathcal{S}}B(x,\delta) \subset B\left(A, \frac{\epsilon}{2}\right)$. Como $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x,\delta)$, para $n \geq n_0$. Daí, para todo $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$, temos que $\sigma(x_n) \in B\left(A, \frac{\epsilon}{2}\right)$, para $n \geq n_0$. Então,

$$\psi(x_n) \leq \sup_{\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}} d_A(\sigma(x_n)) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

para $n \geq n_0$. Portanto, $\psi(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Resta provar a propriedade 4. Sejam $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$ e $x \in M$, então

$$\begin{aligned} \psi(\sigma(x)) &= \sup_{\lambda \in \widetilde{\mathcal{S}}} \frac{d_A(\lambda(\sigma(x)))}{1 + d_A(\lambda(\sigma(x)))} = \sup_{g \in \widetilde{\mathcal{S}}\sigma} \frac{d_A(g(x))}{1 + d_A(g(x))} \\ &\leq \sup_{g \in \widetilde{\mathcal{S}}} \frac{d_A(g(x))}{1 + d_A(g(x))} = \psi(x). \end{aligned}$$

Portanto, $\psi(\sigma(x)) \leq \psi(x)$. Isto finaliza a demonstração. □

Observação 2.3.1. *Pela propriedade 4 do Teorema 2.3.1, podemos concluir que ψ é uma função não crescente sobre as semitrajetórias positivas impulsivas. De fato, se $0 \leq s \leq t$,*

$$\begin{aligned} \psi(\widetilde{\varphi}(t, x, u)) &= \psi(\widetilde{\varphi}(t - s + s, x, u)) = \psi(\widetilde{\varphi}(t - s, \widetilde{\varphi}(s, x, u), u \cdot s)) \\ &\leq \psi(\widetilde{\varphi}(s, x, u)). \end{aligned}$$

Além disso, vale ressaltar ainda que as propriedades 1 e 2 juntas implicam que ψ separa o conjunto A e o complementar de qualquer vizinhança $B(A, \epsilon)$.

Apresentamos, agora, a caracterização de um conjunto fechado e uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Teorema 2.3.2. *Seja A um subconjunto fechado de M. Então, A é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$ se, e somente se, existe uma função $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades:*

1. *para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi(x) \geq \delta$, se $d_A(x) \geq \epsilon$;*

2. *para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi(x) < \epsilon$, se $d_A(x) < \delta$;*

3. *$\psi(\sigma(x)) \leq \psi(x)$, para quaisquer $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$ e $x \in M$.*

Demonstração. Suponhamos que tal função $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ exista e seja $\epsilon > 0$. Pela propriedade 1, existe $\delta > 0$ tal que $\psi(x) \geq \delta$, se $d_A(x) \geq \epsilon$. Então, pela propriedade 2, existe $\eta > 0$ tal que $\psi(x) < \delta$, se $d_A(x) < \eta$. Afirmamos que $\widetilde{\mathcal{S}}B(A, \eta) \subset B(A, \epsilon)$. De fato, sejam $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$ e $x \in B(A, \eta)$. Pela propriedade 3, $\psi(\sigma(x)) \leq \psi(x) < \delta$, já que $d_A(x) < \eta$. Isto implica que $d_A(\sigma(x)) < \epsilon$, donde, $\sigma(x) \in B(A, \epsilon)$. Portanto, $\widetilde{\mathcal{S}}B(A, \eta) \subset B(A, \epsilon)$ e A é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Reciprocamente, suponhamos que A seja uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Definimos a função $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ pondo

$$\psi(x) = \sup_{\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}} \frac{d_A(\sigma(x))}{1 + d_A(\sigma(x))}.$$

Como A é também estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$, podemos usar os mesmos argumentos utilizados na demonstração do Teorema 2.3.1 para provar as propriedades 1 e 3.

Resta, então, provar a propriedade 2. Seja $\epsilon > 0$. Pela estabilidade uniforme por $\widetilde{\mathcal{S}}$ de A, existe $\delta > 0$ tal que $\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta) \subset B(A,\epsilon)$. Assim, para todo $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$, temos que $d_A(x) < \delta$ implica $d_A(\sigma(x)) < \epsilon$. Logo,

$$\psi(x) = \sup_{\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}} \frac{d_A(\sigma(x))}{1 + d_A(\sigma(x))} \leq \frac{\epsilon}{1+\epsilon} < \epsilon,$$

se $d_A(x) < \delta$. Isto finaliza a demonstração. □

O próximo teorema traz um resultado que, até este momento, não foi apresentado para sistemas de controle convencionais. Trata-se da caracterização de um conjunto fechado e assintoticamente estável por $\widetilde{\mathcal{F}}$.

Teorema 2.3.3. *Seja A um subconjunto fechado de M. Então, A é assintoticamente estável por $\widetilde{\mathcal{F}}$ se, e somente se, existe uma função $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades:*

1. *para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi(x) \geq \delta$, se $d_A(x) \geq \epsilon$;*

2. *para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi(x) < \epsilon$, se $d_A(x) < \delta$;*

3. *$\psi(\sigma(x)) \leq \psi(x)$, para quaisquer $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$ e $x \in M$;*

4. *existe $\epsilon > 0$ tal que se $x \in B(A,\epsilon)$, então $\psi(\widetilde{\varphi}(t_n, x, u_n)) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, para quaisquer sequências (u_n) em $\mathcal{U}_{cp}$ e $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*

Demonstração. Suponhamos que tal função $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ exista. Pelo Teorema 2.3.2, as propriedades 1, 2 e 3 juntas implicam que A é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Assim, resta mostrar que A é um atrator com respeito a $\widetilde{\mathcal{F}}$. Pela propriedade 4, existe $\epsilon > 0$ tal que se $x \in B(A,\epsilon)$, então $\psi(\widetilde{\varphi}(t_n, x, u_n)) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, para quaisquer sequências (u_n) em $\mathcal{U}_{cp}$ e $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Afirmamos que $B(A,\epsilon) \subset \mathcal{A}\left(A, \widetilde{\mathcal{F}}\right)$. De fato, suponhamos, por absurdo, que exista $x \in B(A,\epsilon) \setminus \mathcal{A}\left(A, \widetilde{\mathcal{F}}\right)$. Podemos, então, encontrar $\delta > 0$ tal que $\widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t}(x) \nsubseteq B(A,\delta)$, para todo $t > 0$. Então, existem sequências (u_n) em $\mathcal{U}_{cp}$ e $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ tais que $\widetilde{\varphi}(t_n, x, u_n) \notin B(A,\delta)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela propriedade 4, $\psi(\widetilde{\varphi}(t_n, x, u_n)) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, já que $x \in B(A,\epsilon)$. Por outro lado, pela propriedade 1, existe $\eta > 0$ tal que $\psi(\widetilde{\varphi}(t_n, x, u_n)) \geq \eta$, para todo $n \in \mathbb{N}$, uma vez que $d_A(\widetilde{\varphi}(t_n, x, u_n)) \geq \delta$. Isto é uma contradição. Assim, $B(A,\epsilon) \subset \mathcal{A}\left(A, \widetilde{\mathcal{F}}\right)$, donde, A é um atrator com respeito a $\widetilde{\mathcal{F}}$. Portanto, A é assintoticamente estável por $\widetilde{\mathcal{F}}$.

Reciprocamente, suponhamos que A seja assintoticamente estável por $\widetilde{\mathcal{F}}$. Definimos a função $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ pondo

$$\psi(x) = \sup_{\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}} \frac{d_A(\sigma(x))}{1 + d_A(\sigma(x))}.$$

Como A é também uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$, podemos usar os mesmos argumentos utilizados na demonstração do Teorema 2.3.2 para provar as propriedades 1, 2 e 3.

Resta provar a propriedade 4. Como A é um atrator com respeito a $\widetilde{\mathcal{F}}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(A,\epsilon) \subset \mathcal{A}\left(A,\widetilde{\mathcal{F}}\right)$. Sejam $x \in B(A,\epsilon)$ e sequências (u_n) em $\mathcal{U}_{cp}$ e $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Logo, $x \in \mathcal{A}\left(A,\widetilde{\mathcal{F}}\right)$ e, portanto, dado $\delta > 0$, podemos encontrar $t > 0$ tal que $\widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t}(x) \subset B(A,\delta)$. Se $t_n > t$, então $\widetilde{\mathcal{S}}(\widetilde{\varphi}(t_n,x,u_n)) \subset \widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t}(x) \subset B(A,\delta)$. Daí, para todo $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$, temos que $d_A(\sigma(\widetilde{\varphi}(t_n,x,u_n))) < \delta$, se $t_n > t$. Logo, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\psi(\widetilde{\varphi}(t_n,x,u_n)) = \sup_{\sigma\in\widetilde{\mathcal{S}}} \frac{d_A(\sigma(\widetilde{\varphi}(t_n,x,u_n)))}{1+d_A(\sigma(\widetilde{\varphi}(t_n,x,u_n)))} \leq \frac{\delta}{1+\delta} < \delta,$$

se $n > n_0$. Portanto, $\psi(\widetilde{\varphi}(t_n,x,u_n)) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Isto finaliza a demonstração. $\square$

Observação 2.3.2. *Seja (σ_n) uma sequência em $\widetilde{\mathcal{S}}$. Dizemos que (σ_n) é **divergente com respeito a** $\widetilde{\mathcal{F}}$, e denotamos por $\sigma_n \to_{\widetilde{\mathcal{F}}} \infty$, se para cada $t > 0$, existe n_0 tal que $n > n_0$ implica $\sigma_n \in \widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t}$ (veja [26]). Assim, a propriedade 4 do Teorema 2.3.3 pode ser reescrita da seguinte forma*

4'. existe $\epsilon > 0$ tal que se $x \in B(A,\epsilon)$, então $\psi(\sigma_n(x)) \to 0$ quando $\sigma_n \to_{\widetilde{\mathcal{F}}} \infty$ e $n \to +\infty$.

Para encerrar o caso geral, deixamos para o fim a caracterização de um conjunto fechado e equiestável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. A primeira razão para isso se deve ao fato de que a estratégia utilizada na demonstração para garantir a equiestabilidade por $\widetilde{\mathcal{S}}$ de um conjunto fechado difere muito da estratégia usada para uma ação de semigrupo convencional, como apresentada em [8, Teorema 3.9]. Isso porque foi necessário impor condições sobre a função impulsiva I, além da necessidade de uma análise detalhada sobre os momentos de impulso. A segunda razão se deve ao fato de que, no caso convencional, para garantir a existência de um funcional de Lyapunov foi necessário que a ação fosse contínua (veja [8, Teorema 3.10]) e, evidentemente, isso não é garantido no caso impulsivo. Desse modo, foi preciso estabelecer condições adequadas para conseguir obter um funcional de Lyapunov para um sistema de controle impulsivo.

Apresentamos, inicialmente, o teorema que garante a equiestabilidade por $\widetilde{\mathcal{S}}$ de um conjunto fechado, dada a existência de um funcional de Lyapunov.

Teorema 2.3.4. *Seja A um subconjunto fechado de M tal que $I(M_\varphi) \subset M\backslash M_\varphi$ e $I(M_\varphi\backslash A) \subset M\backslash A$. Então, A é equiestável por $\widetilde{\mathcal{S}}$ se existe uma função $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades:*

1. *$\psi(x) = 0$ se, e somente se, $x \in A$;*

2. *para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi(x) \leq \epsilon$, se $d_A(x) \leq \delta$;*

3. *ψ é semicontínua inferiormente em $M\backslash(M_\varphi\backslash A)$;*

4. $\psi(\sigma(x)) \leq \psi(x)$*, se* $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$ *e* $x \in M\backslash(M_\varphi \backslash A)$*, e* $\psi(I(x)) \leq \psi(x)$*, se* $x \in M_\varphi \backslash A$*.*

Demonstração. Suponhamos que tal função $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ exista e seja $x \notin A$. Vamos considerar dois casos. Primeiro, suponhamos que $x \notin M_\varphi$. Pela propriedade 1, temos que $\psi(x) > 0$. Além disso, pela propriedade 2, existe $\delta > 0$ tal que $\psi(p) \leq \frac{\psi(x)}{2}$, se $d_A(p) \leq \delta$. Daí, para todo $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$, segue, da propriedade 4, que $\psi(\sigma(p)) \leq \psi(p) \leq \frac{\psi(x)}{2}$, se $d_A(p) \leq \delta$ e, portanto, $\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta) \subset \psi^{-1}\left(\left[0, \frac{\psi(x)}{2}\right]\right)$. Pela propriedade 3, ψ é semicontínua inferiormente em $M\backslash(M_\varphi\backslash A)$ e, em particular, em x. Logo, existe $\eta > 0$ tal que $\psi(y) > \psi(x) - \frac{\psi(x)}{2} = \frac{\psi(x)}{2}$, para todo $y \in B(x,\eta) \cap (M\backslash(M_\varphi\backslash A))$. Agora, é possível encontrar $\alpha > 0$ tal que $B(x,\alpha) \cap M_\varphi = \emptyset$, já que $x \notin M_\varphi$ e M_φ é fechado. Podemos assumir que $\alpha < \eta$. Afirmamos que $B(x,\alpha) \cap \widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta) = \emptyset$. De fato, seja $z \in B(x,\alpha)$. Logo, $z \in B(x,\eta) \cap (M\backslash(M_\varphi\backslash A))$ e, então, $\psi(z) > \frac{\psi(x)}{2}$. Isto implica que $z \notin \widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta)$, donde, $B(x,\alpha) \cap \overline{\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta)} = \emptyset$. Logo, $x \notin \overline{\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta)}$ e, portanto, A é equiestável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Consideremos, agora, o caso em que $x \in M_\varphi$. Suponhamos, por absurdo, que $x \in \overline{\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta)}$, para todo $\delta > 0$. Assim, para cada par $(k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, podemos escolher $y_{(k,n)} \in B\left(x, \frac{1}{k}\right) \cap \widetilde{\mathcal{S}}B\left(A, \frac{1}{n}\right)$, ou seja, $t_{(k,n)} \geq 0$, $x_{(k,n)} \in B\left(A, \frac{1}{n}\right)$ e $u_{(k,n)} \in \mathcal{U}_{cp}$ tais que $\widetilde{\varphi}\left(t_{(k,n)}, x_{(k,n)}, u_{(k,n)}\right) = y_{(k,n)}$. Consideremos $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dotado da direção produto. Assim, $\left(y_{(k,n)}\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ converge para x.

Vamos considerar dois subcasos. Primeiro, suponhamos que exista uma sub-rede $\left(y_{(k_i,n_i)}\right)_{i\in\mathcal{I}}$ tal que $\phi\left(y_{(k_i,n_i)}, u_{(k_i,n_i)} \cdot t_{(k_i,n_i)}\right) < +\infty$ e $\phi\left(y_{(k_i,n_i)}, u_{(k_i,n_i)} \cdot t_{(k_i,n_i)}\right) \overset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Pela continuidade de φ, temos que

$$\varphi\left(\phi\left(y_{(k_i,n_i)}, u_{(k_i,n_i)} \cdot t_{(k_i,n_i)}\right), y_{(k_i,n_i)}, u_{(k_i,n_i)} \cdot t_{(k_i,n_i)}\right) \overset{i\to+\infty}{\longrightarrow} x.$$

Então, utilizando a continuidade de I, segue que

$$\begin{aligned} &\widetilde{\varphi}\left(\phi\left(y_{(k_i,n_i)}, u_{(k_i,n_i)} \cdot t_{(k_i,n_i)}\right), y_{(k_i,n_i)}, u_{(k_i,n_i)} \cdot t_{(k_i,n_i)}\right) \\ = \ & I\left(\varphi\left(\phi\left(y_{(k_i,n_i)}, u_{(k_i,n_i)} \cdot t_{(k_i,n_i)}\right), y_{(k_i,n_i)}, u_{(k_i,n_i)} \cdot t_{(k_i,n_i)}\right)\right) \overset{i\to+\infty}{\longrightarrow} I(x), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} &\widetilde{\varphi}\left(\phi\left(y_{(k_i,n_i)}, u_{(k_i,n_i)} \cdot t_{(k_i,n_i)}\right), y_{(k_i,n_i)}, u_{(k_i,n_i)} \cdot t_{(k_i,n_i)}\right) \\ = \ & \widetilde{\varphi}\left(\phi\left(y_{(k_i,n_i)}, u_{(k_i,n_i)} \cdot t_{(k_i,n_i)}\right), \widetilde{\varphi}\left(t_{(k_i,n_i)}, x_{(k_i,n_i)}, u_{(k_i,n_i)}\right), u_{(k_i,n_i)} \cdot t_{(k_i,n_i)}\right) \\ = \ & \widetilde{\varphi}\left(t_{(k_i,n_i)} + \phi\left(y_{(k_i,n_i)}, u_{(k_i,n_i)} \cdot t_{(k_i,n_i)}\right), x_{(k_i,n_i)}, u_{(k_i,n_i)}\right). \end{aligned}$$

Por outro lado, por hipótese, $I(x) \notin A \cup M_\varphi$. Segue, então, da primeira parte dessa demonstração que existe $\delta > 0$ tal que $I(x) \notin \overline{\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta)}$. Escolhemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \delta$. Podemos encontrar $i_0 \in \mathcal{I}$ tal que $n_{i_0} > n_0$. Daí, se $i \geq i_0$, então $n_i \geq n_{i_0}$ e, portanto, $x_{(k_i,n_i)} \in B\left(A, \frac{1}{n_i}\right) \subset B(A,\delta)$. Logo,

$$\widetilde{\varphi}\left(t_{(k_i,n_i)} + \phi\left(y_{(k_i,n_i)}, u_{(k_i,n_i)} \cdot t_{(k_i,n_i)}\right), x_{(k_i,n_i)}, u_{(k_i,n_i)}\right) \in \widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta),$$

se $i \geq i_0$, donde, $I(x) \in \overline{\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta)}$, o que é uma contradição. Portanto, $x \notin \overline{\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta)}$ para algum $\delta > 0$ e A é equiestável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

No segundo subcaso, suponhamos que exista $c > 0$ tal que $c \leq \phi\left(y_{(k,n)}, u_{(k,n)} \cdot t_{(k,n)}\right)$, para todo $(k,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Pela compacidade de $\mathcal{U}$, podemos assumir que $u_{(k,n)} \cdot t_{(k,n)} \overset{k,n\to+\infty}{\longrightarrow} u \in \mathcal{U}$. Segue, da continuidade de φ, que

$$\varphi\left(t, y_{(k,n)}, u_{(k,n)} \cdot t_{(k,n)}\right) \overset{k,n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(t,x,u),$$

se $0 \leq t < \min\{\phi(x,u), c\}$. Como $x \notin A$ e A é fechado, segue que existe $\mu > 0$ tal que $B(x,\mu) \cap A = \emptyset$. Então, podemos encontrar $t_0 > 0$, $t_0 < \min\{\phi(x,u), c\}$, tal que $\varphi(t_0,x,u) \notin \overline{A \cup M_\varphi}$. Pelo que já foi provado anteriormente, existe $\delta > 0$ tal que $\varphi(t_0,x,u) \notin \overline{\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta)}$. Por outro lado,

$$\varphi\left(t_0, y_{(k,n)}, u_{(k,n)} \cdot t_{(k,n)}\right) \overset{k,n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(t_0,x,u),$$

onde

$$\begin{aligned}
\varphi\left(t_0, y_{(k,n)}, u_{(k,n)} \cdot t_{(k,n)}\right) &= \widetilde{\varphi}\left(t_0, y_{(k,n)}, u_{(k,n)} \cdot t_{(k,n)}\right) \\
&= \widetilde{\varphi}\left(t_0, \widetilde{\varphi}\left(t_{(k,n)}, x_{(k,n)}, u_{(k,n)}\right), u_{(k,n)} \cdot t_{(k,n)}\right) \\
&= \widetilde{\varphi}\left(t_0 + t_{(k,n)}, x_{(k,n)}, u_{(k,n)}\right),
\end{aligned}$$

donde, $\varphi(t_0,x,u) \in \overline{\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta)}$, o que é uma contradição. Portanto, $x \notin \overline{\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta)}$ para algum $\delta > 0$ e A é equiestável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. □

Nosso interesse, agora, é obter uma recíproca do Teorema 2.3.4. Para isso, precisamos do lema apresentado a seguir, onde foi necessário assumir que cada elemento de M_φ satisfaz φ-CFT, garantindo, assim, a continuidade de ϕ em $(M\backslash M_\varphi) \times \mathcal{U}$.

Lema 2.3.1. *Suponhamos que $M_\varphi \cap I(M_\varphi) = \emptyset$ e que cada elemento $x \in M_\varphi$ satisfaça φ-CFT. Seja X um subconjunto positivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$ de M. Então, $\widetilde{\mathcal{S}}\left(\overline{X}\backslash M_\varphi\right) \subset \overline{X}$.*

Demonstração. Sejam $x \in \overline{X}\backslash M_\varphi$, $t > 0$ e $u \in \mathcal{U}$. Existe uma sequência (x_n) em X tal que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Logo, $\phi(x_n,u) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(x,u)$, pela continuidade de ϕ em $(M\backslash M_\varphi)\times\mathcal{U}$. Se $t < \phi(x,u)$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t < \phi(x_n,u)$, para $n > n_0$. Assumimos que $t < \phi(x_n,u)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, passando a uma subsequência se necessário. Segue, da continuidade de φ, que

$$\widetilde{\varphi}(t,x_n,u) = \varphi(t,x_n,u) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(t,x,u) = \widetilde{\varphi}(t,x,u).$$

Como X é positivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$, $(\widetilde{\varphi}(t,x_n,u))$ é uma sequência em X e, portanto, $\widetilde{\varphi}(t,x,u) \in \overline{X}$. Se $\phi(x,u) = +\infty$, então $\widetilde{\mathcal{S}}(x) \subset \overline{X}$. Agora, se $\phi(x,u) < +\infty$ e $t = \phi(x,u)$, temos que

$$\widetilde{\varphi}(\phi(x_n,u), x_n, u) = I(\varphi(\phi(x_n,u), x_n, u)) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(\varphi(\phi(x,u),x,u)) = \widetilde{\varphi}(\phi(x,u),x,u).$$

Novamente, $(\widetilde{\varphi}(\phi(x_n,u),x_n,u))$ é uma sequência em X e isto implica que $\widetilde{\varphi}(\phi(x,u),x,u) \in \overline{X}$. Agora, consideremos as seguintes notações:

$$s_0 = \phi(x,u), \qquad x_1^+ = I(\varphi(s_0,x,u)),$$

$$s_{n,0} = \phi(x_n,u) \quad \text{e} \quad x_{n,1}^+ = I(\varphi(s_{n,0},x_n,u)),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $M_\varphi \cap I(M_\varphi) = \emptyset$, segue que $x_1^+, x_{n,1}^+ \notin M_\varphi$. Daí, pela continuidade de ϕ em $(M \backslash M_\varphi) \times \mathcal{U}$, $\phi\left(x_{n,1}^+, u \cdot s_{n,0}\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi\left(x_1^+, u \cdot s_0\right)$, visto que $x_{n,1}^+ \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_1^+$ e $s_{n,0} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} s_0$. Se $s_0 < t < s_0 + \phi\left(x_1^+, u \cdot s_0\right)$, então podemos assumir que $s_{n,0} < t < s_{n,0} + \phi\left(x_{n,1}^+, u \cdot s_{n,0}\right)$ e, portanto,

$$\widetilde{\varphi}(t,x_n,u) = \varphi\left(t - s_{n,0}, x_{n,1}^+, u \cdot s_{n,0}\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi\left(t - s_0, x_1^+, u \cdot s_0\right) = \widetilde{\varphi}(t,x,u).$$

Logo, $\widetilde{\varphi}(t,x,u) \in \overline{X}$. Se $\phi\left(x_1^+, u \cdot s_0\right) = +\infty$, então $\widetilde{\mathcal{S}}(x) \subset \overline{X}$. Agora, se $\phi\left(x_1^+, u \cdot s_0\right) < +\infty$ e $t = s_0 + \phi\left(x_1^+, u \cdot s_0\right)$, temos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}\left(s_{n,0} + \phi\left(x_{n,1}^+, u \cdot s_{n,0}\right), x_n, u\right) &= \widetilde{\varphi}\left(\phi\left(x_{n,1}^+, u \cdot s_{n,0}\right), \widetilde{\varphi}(s_{n,0}, x_n, u), u \cdot s_{n,0}\right) \\
&= \widetilde{\varphi}\left(\phi\left(x_{n,1}^+, u \cdot s_{n,0}\right), x_{n,1}^+, u \cdot s_{n,0}\right) \\
&= I\left(\varphi\left(\phi\left(x_{n,1}^+, u \cdot s_{n,0}\right), x_{n,1}^+, u \cdot s_{n,0}\right)\right) \\
&\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I\left(\varphi\left(\phi\left(x_1^+, u \cdot s_0\right), x_1^+, u \cdot s_0\right)\right) \\
&= \widetilde{\varphi}\left(\phi\left(x_1^+, u \cdot s_0\right), x_1^+, u \cdot s_0\right) \\
&= \widetilde{\varphi}\left(\phi\left(x_1^+, u \cdot s_0\right), \widetilde{\varphi}(s_0, x, u), u \cdot s_0\right) \\
&= \widetilde{\varphi}\left(s_0 + \phi\left(x_1^+, u \cdot s_0\right), x, u\right) \\
&= \widetilde{\varphi}(t,x,u)
\end{aligned}$$

e, portanto, $\widetilde{\varphi}(t,x,u) \in \overline{X}$. Agora, consideremos as seguintes notações:

$$s_1 = \phi\left(x_1^+, u \cdot s_0\right), \qquad x_2^+ = I\left(\varphi\left(s_1, x_1^+, u \cdot s_0\right)\right),$$

$$s_{n,1} = \phi\left(x_{n,1}^+, u \cdot s_{n,0}\right) \quad \text{e} \quad x_{n,2}^+ = I\left(\varphi\left(s_{n,1}, x_{n,1}^+, u \cdot s_{n,0}\right)\right),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Novamente, temos $x_2^+, x_{n,2}^+ \notin M_\varphi$. Esse processo é finalizado após um número finito de passos se $\phi\left(x_k^+, u \cdot \sum_{i=0}^{k-1} s_i\right) = +\infty$, para algum $k \in \mathbb{N}$, ou ele pode continuar indefinidamente se $\phi\left(x_k^+, u \cdot \sum_{i=0}^{k-1} s_i\right) < +\infty$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Em ambos os casos, temos que $\widetilde{\mathcal{S}}(x) \subset \overline{X}$ e, portanto, $\widetilde{\mathcal{S}}\left(\overline{X} \backslash M_\varphi\right) \subset \overline{X}$. □

Finalmente, obtemos a caracterização de um conjunto fechado e equiestável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Teorema 2.3.5. *Seja A um subconjunto fechado de M. Suponhamos que cada elemento $x \in M_\varphi$ satisfaça φ-CFT, $I(M_\varphi) \subset M \backslash M_\varphi$ e $I(M_\varphi \backslash A) \subset M \backslash A$. Então, A é equiestável por $\widetilde{\mathcal{S}}$ se, e somente se, existe uma função $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades:*

1. *$\psi(x) = 0$ se, e somente se, $x \in A$;*

2. *para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi(x) \leq \epsilon$, se $d_A(x) \leq \delta$;*

3. *ψ é semicontínua inferiormente em $M \setminus (M_\varphi \setminus A)$;*

4. *$\psi(\sigma(x)) \leq \psi(x)$, se $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$ e $x \in M \setminus (M_\varphi \setminus A)$, e $\psi(I(x)) \leq \psi(x)$, se $x \in M_\varphi \setminus A$.*

Demonstração. Suponhamos que A seja equiestável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Definimos a função $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ pondo

$$\psi(x) = \begin{cases} \sup\left\{\delta > 0 : x \notin \overline{\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta)}\right\}, \text{ se } x \notin A \cup M_\varphi \\ 0, \text{ se } x \in A \\ \psi(I(x)), \text{ se } x \in M_\varphi \setminus A. \end{cases}$$

Provemos a propriedade 1. Se $x \notin A \cup M_\varphi$, então existe $\delta_0 > 0$ tal que $x \notin \overline{\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta_0)}$, uma vez que A é equiestável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Disto, segue que $\psi(x) \geq \delta_0 > 0$. Agora, se $x \in M_\varphi \setminus A$, então segue, por hipótese, que $I(x) \notin A \cup M_\varphi$ e, portanto, $\psi(x) = \psi(I(x)) > 0$. Isto prova a propriedade 1.

Para provar a propriedade 4, basta mostrar que $\psi(\sigma(x)) \leq \psi(x)$, se $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$ e $x \in M \setminus (M_\varphi \setminus A)$, visto que a segunda parte dessa propriedade já é válida pela própria definição da função ψ. Como $M \setminus (M_\varphi \setminus A) = A \cup (M \setminus (A \cup M_\varphi))$, analisemos separadamente os casos em que $x \in A$ e $x \notin A \cup M_\varphi$. Seja $x \in A$. Pelo Teorema 2.2.2, temos que A é positivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Logo, $\sigma(x) \in A$, donde, $\psi(\sigma(x)) = 0 = \psi(x)$ e, portanto, a propriedade 4 é válida no caso em que $x \in A$. Agora, seja $x \notin A \cup M_\varphi$. Afirmamos que $\sigma(x) \notin A \cup M_\varphi$. De fato, de acordo com a construção das semitrajetórias positivas impulsivas, temos que $\sigma(x) \notin M_\varphi$. Além disso, como A é positivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$, segue que $x \in A$ se, e somente se, $\rho(x) \in A$, para todo $\rho \in \widetilde{\mathcal{S}}$. Logo, $\sigma(x) \notin A$, uma vez que $x \notin A$. Portanto, $\sigma(x) \notin A \cup M_\varphi$. Pelo Lema 2.3.1, se $\sigma(x) \notin \overline{\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta)}$, com $\delta > 0$, então $x \notin \overline{\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta)}$. Disto, segue que

$$\psi(\sigma(x)) = \sup\left\{\delta > 0 : \sigma(x) \notin \overline{\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta)}\right\} \leq \sup\left\{\delta > 0 : x \notin \overline{\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta)}\right\} = \psi(x)$$

e isto prova que a propriedade 4 também é válida no caso em que $x \notin A \cup M_\varphi$.

Provemos agora a propriedade 2. Sejam $\epsilon > 0$ e $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Se $x \notin A \cup M_\varphi$, notemos que $d_A(x) \leq \delta$ implica que $\psi(x) \leq d_A(x) \leq \delta < \epsilon$. Agora, se $x \in A$, então evidentemente temos que $\psi(x) = 0 < \epsilon$. Por fim, se $x \in M_\varphi \setminus A$, segue por hipótese que $I(x) \notin A \cup M_\varphi$. Como A é fechado, é possível encontrar $y \notin A \cup M_\varphi$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$ tais que

$$d(y,x) \leq \delta, \quad \varphi(\phi(y,u), y, u) = x \quad \text{e} \quad \varphi(t,y,u) \notin A \cup M_\varphi,$$

se $0 \leq t < \phi(y,u)$. Assim, se $d_A(x) \leq \delta$, segue que $d_A(y) \leq \epsilon$. Daí,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi(I(x)) = \psi(I(\varphi(\phi(y,u), y, u))) = \psi(\widetilde{\varphi}(\phi(y,u), y, u)) \\ &\leq \psi(y) \leq d_A(y) \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Resta provar a propriedade 3. Sejam $x \in M\backslash(M_\varphi\backslash A) = A \cup (M\backslash(A \cup M_\varphi))$ e $\epsilon > 0$. Se $x \in A$, então $\psi(x) = 0$. Logo, $\psi(x) - \psi(y) = -\psi(y) < \epsilon$, ou seja, $\psi(y) > \psi(x) - \epsilon$, para todo $y \in M$. Isto mostra que ψ é semicontínua inferiormente em A. Agora, suponhamos que $x \notin A \cup M_\varphi$. Logo, $\psi(x) > 0$. Podemos, então, encontrar $\eta > 0$ tal que $\eta > \psi(x) - \epsilon$ e $x \notin \overline{\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\eta)}$, ou seja, $\overline{M\backslash\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\eta)}$ é uma vizinhança de x. Logo, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \cap \overline{\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\eta)} = \emptyset$. Notemos que se $y \in M\backslash(M_\varphi\backslash A)$ e $d(x,y) < \delta$, então $y \notin \overline{\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\eta)}$ e $y \notin A \cup M_\varphi$. Portanto, $\psi(y) \geq \eta > \psi(x) - \epsilon$. Isto mostra que ψ é semicontínua inferiormente em $M\backslash(A \cup M_\varphi)$. Portanto, ψ é semicontínua inferiormente em $M\backslash(M_\varphi\backslash A)$.

A recíproca segue do Teorema 2.3.4. □

Finalizamos, assim, o caso geral. A próxima etapa é investigar as condições que garantem a continuidade dos funcionais de Lyapunov. Para isso, assumimos as seguintes hipóteses sobre o sistema de controle impulsivo:

1. Cada elemento $x \in M_\varphi$ satisfaz φ-CFT e, portanto, ϕ é contínua em $(M\backslash M_\varphi) \times \mathcal{U}$;
2. $M_\varphi \cap I(M_\varphi) = \emptyset$;
3. Para quaisquer $x \in M$, $k \geq 1$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$, x_k^+ está definido e $M_\varphi^+\left(x_k^+, u\right) \neq \emptyset$.

Como consequência da hipótese 3, temos que o sistema de controle considerado, nesse caso, não irá possuir nenhum ponto de equilíbrio e, portanto, não existirão trajetórias estacionárias. Portanto, os resultados apresentados, a seguir, garantem a continuidade dos funcionais de Lyapunov apenas para essa classe de sistemas de controle.

Vamos iniciar com a caracterização de um conjunto fechado e estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Teorema 2.3.6. *Seja A um subconjunto fechado de M. Então, A é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$ se, e somente se, existe uma função $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades:*

1. *ψ é contínua em $M\backslash(M_\varphi\backslash A)$;*
2. *para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi(x) \geq \delta$, se $d_A(x) \geq \epsilon$ e $x \notin M_\varphi$;*
3. *para toda sequência (w_n) em M tal que $w_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \in A$, temos $\psi(w_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$;*
4. *$\psi(\varphi(t,x,u)) \leq \psi(x)$, se $0 \leq t \leq \phi(x,u)$, $x \in M\backslash M_\varphi$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$, e $\psi(I(x)) \leq \psi(x)$, se $x \in M_\varphi$.*

Demonstração. Suponhamos que tal função $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ exista. Sejam $\epsilon > 0$ e $x \in A$. Definimos $\mu = \inf\left\{\psi(w) : w \notin M_\varphi \text{ e } d_A(w) \geq \frac{\epsilon}{2}\right\}$. Pela propriedade 2, existe $\delta > 0$ tal que $\mu \geq \delta > 0$. Como $x \in A$, temos que $x \in \operatorname{int}(A)$ ou $x \in \partial A$. Primeiro, suponhamos que $x \in \operatorname{int}(A)$. Logo, podemos encontrar $\alpha > 0$ tal que $B(x,\alpha) \subset A$. Pela continuidade de ψ em x, existe $\beta > 0$ tal que $|\psi(y) - \psi(x)| < \mu$, para todo $y \in B(x,\beta)$. Escolhemos $\delta_1 = \min\{\alpha, \beta\}$. Então,

$$B(x,\delta_1) \subset A \quad \text{e} \quad |\psi(y) - \psi(x)| < \mu, \quad \text{para todo} \quad y \in B(x,\delta_1).$$

Afirmamos que $\psi(x) = 0$. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $w_n = x$. Logo, $w_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ e, então, $\psi(w_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, pela propriedade 3. Por outro lado, pela continuidade de ψ em x, temos que $\psi(w_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \psi(x)$ e, portanto, $\psi(x) = 0$. Disto, $\psi(y) < \mu$, para todo $y \in B(x, \delta_1)$.

Agora, afirmamos que $\widetilde{\mathcal{S}}B(x, \delta_1) \subset B(A, \epsilon)$. De fato, suponhamos, por absurdo, que existam $t_1 \in (0, +\infty)$, $z \in B(x, \delta_1)$ e $u_1 \in \mathcal{U}_{cp}$ tais que $\widetilde{\varphi}(t_1, z, u_1) \notin B(A, \epsilon)$. Notemos que $\psi(\widetilde{\varphi}(t_1, z, u_1)) \geq \mu$, pois

$$d_A(\widetilde{\varphi}(t_1, z, u_1)) \geq \epsilon > \frac{\epsilon}{2} \text{ e } \widetilde{\varphi}(t_1, z, u_1) \notin M_\varphi,$$

já que $M_\varphi \cap I(M_\varphi) = \emptyset$.

Vamos considerar, agora, dois casos. No primeiro, suponhamos que $z \notin M_\varphi$. Afirmamos que $\psi(\widetilde{\varphi}(t, z, v)) < \mu$, para quaisquer $t \geq 0$ e $v \in \mathcal{U}_{cp}$. De fato, como $z \in B(x, \delta_1)$, segue que $\psi(z) < \mu$. Seja $v \in \mathcal{U}_{cp}$. Daí, para todo $t \in [0, \phi(z, v))$, temos que

$$\psi(\widetilde{\varphi}(t, z, v)) = \psi(\varphi(t, z, v)) \leq \psi(z) < \mu,$$

pela propriedade 4. Para $t = \phi(z, v)$, notemos que

$$\begin{aligned} \psi(\widetilde{\varphi}(t, z, v)) &= \psi(\widetilde{\varphi}(\phi(z, v), z, v)) = \psi(I(z_1)) \leq \psi(z_1) \\ &= \psi(\varphi(\phi(z, v), z, v)) \leq \psi(z) < \mu. \end{aligned}$$

Agora, se $t \in \left(\phi(z, v), \phi(z, v) + \phi\left(z_1^+, v \cdot s_0\right)\right)$, temos que

$$\psi(\widetilde{\varphi}(t, z, v)) = \psi\left(\varphi\left(t - s_0, z_1^+, v \cdot s_0\right)\right) \leq \psi\left(z_1^+\right) = \psi(I(z_1)) < \mu.$$

Continuando com esse processo, obtemos que $\psi(\widetilde{\varphi}(t, z, v)) < \mu$, para quaisquer $t \geq 0$ e $v \in \mathcal{U}_{cp}$. Em particular, $\psi(\widetilde{\varphi}(t_1, z, u_1)) < \mu$, o que é uma contradição. Portanto, $\widetilde{\mathcal{S}}B(x, \delta_1) \subset B(A, \epsilon)$ e A é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

No segundo caso, vamos supor que $z \in M_\varphi$. É possível encontrar $\tau > 0$ tal que $\tau < t_1$ e $\widetilde{\varphi}(\tau, z, u_1) = \varphi(\tau, z, u_1) \in B(x, \delta_1) \setminus M_\varphi$. Utilizando a mesma estratégia usada no caso anterior em que $z \notin M_\varphi$, podemos mostrar que $\psi(\widetilde{\varphi}(t, \widetilde{\varphi}(\tau, z, u_1), v)) < \mu$, para quaisquer $t \geq 0$ e $v \in \mathcal{U}_{cp}$, já que $\widetilde{\varphi}(\tau, z, u_1) \notin M_\varphi$. Em particular,

$$\psi(\widetilde{\varphi}(t_1, z, u_1)) = \psi(\widetilde{\varphi}(t_1 - \tau, \widetilde{\varphi}(\tau, z, u_1), u_1 \cdot \tau)) < \mu,$$

o que é uma contradição. Portanto, $\widetilde{\mathcal{S}}B(x, \delta_1) \subset B(A, \epsilon)$ e A é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Agora, suponhamos que $x \in \partial A$. Como fizemos anteriormente, podemos encontrar $\delta_2 > 0$, $\delta_2 < \epsilon$, tal que $\psi(y) < \mu$, para todo $y \in B(x, \delta_2)$, visto que ψ é contínua em x. Afirmamos que $\widetilde{\mathcal{S}}B(x, \delta_2) \subset B(A, \epsilon)$. De fato, suponhamos, por absurdo, que existam $t_2 \in (0, +\infty)$, $z \in B(x, \delta_2)$ e $u_2 \in \mathcal{U}_{cp}$ tais que $\widetilde{\varphi}(t_2, z, u_2) \notin B(A, \epsilon)$. Notemos que $\psi(\widetilde{\varphi}(t_2, z, u_2)) \geq \mu$, pois

$$d_A(\widetilde{\varphi}(t_2, z, u_2)) \geq \epsilon > \frac{\epsilon}{2} \text{ e } \widetilde{\varphi}(t_2, z, u_2) \notin M_\varphi,$$

já que $M_\varphi \cap I(M_\varphi) = \emptyset$.

Vamos considerar, novamente, dois casos. No primeiro, suponhamos que $z \notin M_{\varphi}$. Analogamente, podemos provar que $\psi\left(\widetilde{\varphi}\left(t,z,v\right)\right) < \mu$, para quaisquer $t \geq 0$ e $v \in \mathcal{U}_{cp}$. Em particular, $\psi\left(\widetilde{\varphi}\left(t_2,z,u_2\right)\right) < \mu$, o que é uma contradição. Portanto, $\widetilde{\mathcal{S}}B\left(x,\delta_2\right) \subset B\left(A,\epsilon\right)$ e A é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

No segundo caso, vamos supor que $z \in M_{\varphi}$. É possível encontrar $\tau > 0$ tal que $\widetilde{\varphi}\left(\tau,z,u_2\right) = \varphi\left(\tau,z,u_2\right) \in B\left(x,\delta_2\right)\backslash M_{\varphi}$. Mais uma vez, utilizando a mesma estratégia usada no caso anterior em que $z \notin M_{\varphi}$, podemos mostrar que $\psi\left(\widetilde{\varphi}\left(t,\widetilde{\varphi}\left(\tau,z,u_2\right),v\right)\right) < \mu$, para quaisquer $t \geq 0$ e $v \in \mathcal{U}_{cp}$, visto que $\widetilde{\varphi}\left(\tau,z,u_2\right) \notin M_{\varphi}$. Em particular,

$$\psi\left(\widetilde{\varphi}\left(t_2,z,u_2\right)\right) = \psi\left(\widetilde{\varphi}\left(t_2-\tau,\widetilde{\varphi}\left(\tau,z,u_2\right),u_2\cdot\tau\right)\right) < \mu,$$

o que é uma contradição. Portanto, $\widetilde{\mathcal{S}}B\left(x,\delta_2\right) \subset B\left(A,\epsilon\right)$ e A é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Reciprocamente, suponhamos que A seja estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Definimos a função $\psi : M \to [0,1]$ pondo

$$\psi\left(x\right) = \sup_{u\in\mathcal{U}}\sup_{k\geq 0}\sup\left\{\frac{d_A\left(\varphi\left(t,x_k^+,u\cdot\sum_{i=0}^{k-1}s_i\right)\right)}{1+d_A\left(\varphi\left(t,x_k^+,u\cdot\sum_{i=0}^{k-1}s_i\right)\right)} : 0 \leq t \leq \phi\left(x_k^+,u\cdot\sum_{i=0}^{k-1}s_i\right)\right\},$$

se $x \in M\backslash M_{\varphi}$; e $\psi\left(x\right) = \psi\left(I\left(x\right)\right)$, se $x \in M_{\varphi}$.

Primeiramente, como A é positivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$, pelo Teorema 2.2.2, temos que $\psi\left(x\right) = 0$ se, e somente se, $x \in A$ ou $I\left(x\right) \in A$.

Vamos mostrar a propriedade 1. Como $M\backslash\left(M_{\varphi}\backslash A\right) = \left(M\backslash M_{\varphi}\right)\cup\left(A\cap M_{\varphi}\right)$, vamos mostrar que ψ é contínua em $M\backslash M_{\varphi}$ e $A\cap M_{\varphi}$. Seja $x \in M\backslash M_{\varphi}$. Como M_{φ} é fechado, podemos encontrar $\eta > 0$ tal que $B\left(x,\eta\right)\cap M_{\varphi} = \emptyset$. Sejam $\left(w_n\right)$ uma sequência em M tal que $w_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ e $u \in \mathcal{U}$. Logo, podemos assumir que $w_n \in B\left(x,\eta\right)$, para todo n. Segue, das continuidades de I em M_{φ} e de ϕ em $\left(M\backslash M_{\varphi}\right)\times\mathcal{U}$, que

$$\left(w_n\right)_1^+ = I\left(\varphi\left(\phi\left(w_n,u\right),w_n,u\right)\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I\left(\varphi\left(\phi\left(x,u\right),x,u\right)\right) = x_1^+.$$

Evidentemente, $x_1^+ \notin M_{\varphi}$, já que $M_{\varphi}\cap I\left(M_{\varphi}\right) = \emptyset$. Então, encontramos $\eta_1 > 0$ tal que $B\left(x_1^+,\eta_1\right)\cap M_{\varphi} = \emptyset$. Como $\left(w_n\right)_1^+ \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_1^+$, segue que existe $n_0^1 \in \mathbb{N}$ tal que $\left(w_n\right)_1^+ \in B\left(x_1^+,\eta_1\right)$, para $n > n_0^1$. Utilizando a notação usual, consideramos $s_k = \phi\left(x_k^+,u\cdot\sum_{i=0}^{k-1}s_i\right)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Além dessa notação, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\left(\hat{s}_n\right)_k = \phi\left(\left(w_n\right)_k^+,u\cdot\sum_{i=0}^{k-1}\left(\hat{s}_n\right)_i\right), \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Como $\left(\hat{s}_n\right)_0 = \phi\left(w_n,u\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi\left(x,u\right) = s_0$, segue, da continuidade de ϕ em $\left(M\backslash M_{\varphi}\right)\times\mathcal{U}$, que $\phi\left(\left(w_n\right)_1^+,u\cdot\left(\hat{s}_n\right)_0\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi\left(x_1^+,u\cdot s_0\right)$. Daí, quando $n \to +\infty$, o valor

$$\sup\left\{\frac{d_A\left(\varphi\left(t,\left(w_n\right)_1^+,u\cdot\left(\hat{s}_n\right)_0\right)\right)}{1+d_A\left(\varphi\left(t,\left(w_n\right)_1^+,u\cdot\left(\hat{s}_n\right)_0\right)\right)} : 0 \leq t \leq \phi\left(\left(w_n\right)_1^+,u\cdot\left(\hat{s}_n\right)_0\right)\right\}$$

converge para

$$\sup\left\{\frac{d_A\left(\varphi\left(t,x_1^+,u\cdot s_0\right)\right)}{1+d_A\left(\varphi\left(t,x_1^+,u\cdot s_0\right)\right)}:0\leq t\leq\phi\left(x_1^+,u\cdot s_0\right)\right\}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}(w_n)_2^+ &= I\left(\varphi\left(\phi\left((w_n)_1^+,u\cdot(\hat{s}_n)_0\right),(w_n)_1^+,u\cdot(\hat{s}_n)_0\right)\right)\\ &\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I\left(\varphi\left(\phi\left(x_1^+,u\cdot s_0\right),x_1^+,u\cdot s_0\right)\right)=x_2^+.\end{aligned}$$

Evidentemente, $x_2^+\notin M_\varphi$, já que $M_\varphi\cap I\left(M_\varphi\right)=\emptyset$. Então, encontramos $\eta_2>0$ tal que $B\left(x_2^+,\eta_2\right)\cap M_\varphi=\emptyset$. Como $(w_n)_2^+\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}x_2^+$, segue que existe $n_0^2\in\mathbb{N}$ tal que $(w_n)_2^+\in B\left(x_2^+,\eta_2\right)$, para $n>n_0^2$. Pela continuidade de ϕ em $(M\backslash M_\varphi)\times\mathcal{U}$, temos que

$$\phi\left((w_n)_2^+,u\cdot\left((\hat{s}_n)_0+(\hat{s}_n)_1\right)\right)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\phi\left(x_2^+,u\cdot(s_0+s_1)\right),$$

pois

$$(\hat{s}_n)_0+(\hat{s}_n)_1=\phi\left(w_n,u\right)+\phi\left((w_n)_1^+,u\cdot(\hat{s}_n)_0\right)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\phi\left(x,u\right)+\phi\left(x_1^+,u\cdot s_0\right)=s_0+s_1.$$

Daí, quando $n\to+\infty$, o valor

$$\sup\left\{\frac{d_A\left(\varphi\left(t,(w_n)_2^+,u\cdot\left((\hat{s}_n)_0+(\hat{s}_n)_1\right)\right)\right)}{1+d_A\left(\varphi\left(t,(w_n)_2^+,u\cdot\left((\hat{s}_n)_0+(\hat{s}_n)_1\right)\right)\right)}:0\leq t\leq\phi\left((w_n)_2^+,u\cdot\left((\hat{s}_n)_0+(\hat{s}_n)_1\right)\right)\right\}$$

converge para

$$\sup\left\{\frac{d_A\left(\varphi\left(t,x_2^+,u\cdot(s_0+s_1)\right)\right)}{1+d_A\left(\varphi\left(t,x_2^+,u\cdot(s_0+s_1)\right)\right)}:0\leq t\leq\phi\left(x_2^+,u\cdot(s_0+s_1)\right)\right\}.$$

Como $x_k^+\notin M_\varphi$, para todo $k\in\mathbb{N}$, podemos continuar esse processo obtendo

$$\begin{aligned}(w_n)_k^+ &= I\left(\varphi\left(\phi\left((w_n)_{k-1}^+,u\cdot\sum_{i=0}^{k-2}(\hat{s}_n)_i\right),(w_n)_{k-1}^+,u\cdot\sum_{i=0}^{k-2}(\hat{s}_n)_i\right)\right)\\ &\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I\left(\varphi\left(\phi\left(x_{k-1}^+,u\cdot\sum_{i=0}^{k-2}s_i\right),x_{k-1}^+,u\cdot\sum_{i=0}^{k-2}s_i\right)\right)=x_k^+\end{aligned}$$

e, então, quando $n\to+\infty$, o valor

$$\sup\left\{\frac{d_A\left(\varphi\left(t,(w_n)_k^+,u\cdot\sum\limits_{i=0}^{k-1}(\hat{s}_n)_i\right)\right)}{1+d_A\left(\varphi\left(t,(w_n)_k^+,u\cdot\sum\limits_{i=0}^{k-1}(\hat{s}_n)_i\right)\right)}:0\leq t\leq\phi\left((w_n)_k^+,u\cdot\sum_{i=0}^{k-1}(\hat{s}_n)_i\right)\right\}$$

converge para

$$\sup\left\{\frac{d_A\left(\varphi\left(t,x_k^+,u\cdot\sum_{i=0}^{k-1}s_i\right)\right)}{1+d_A\left(\varphi\left(t,x_k^+,u\cdot\sum_{i=0}^{k-1}s_i\right)\right)}:0\leq t\leq\phi\left(x_k^+,u\cdot\sum_{i=0}^{k-1}s_i\right)\right\},$$

ou seja, quando $n\to+\infty$, o valor

$$\sup_{k\geq 0}\sup\left\{\frac{d_A\left(\varphi\left(t,(w_n)_k^+,u\cdot\sum_{i=0}^{k-1}(\hat{s}_n)_i\right)\right)}{1+d_A\left(\varphi\left(t,(w_n)_k^+,u\cdot\sum_{i=0}^{k-1}(\hat{s}_n)_i\right)\right)}:0\leq t\leq\phi\left((w_n)_k^+,u\cdot\sum_{i=0}^{k-1}(\hat{s}_n)_i\right)\right\}$$

converge para

$$\sup_{k\geq 0}\sup\left\{\frac{d_A\left(\varphi\left(t,x_k^+,u\cdot\sum_{i=0}^{k-1}s_i\right)\right)}{1+d_A\left(\varphi\left(t,x_k^+,u\cdot\sum_{i=0}^{k-1}s_i\right)\right)}:0\leq t\leq\phi\left(x_k^+,u\cdot\sum_{i=0}^{k-1}s_i\right)\right\}.$$

Isto prova que $\psi(w_n)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\psi(x)$. Logo, ψ é contínua em $M\backslash M_\varphi$.

Resta provar que ψ é contínua em $A\cap M_\varphi$. Sejam $x\in A\cap M_\varphi$ e uma sequência (z_n) em M tais que $z_n\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}x$. Notemos que $\psi(x)=0$, já que $x\in A$. Por hipótese, A é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$, logo, dado $\epsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $\widetilde{\mathcal{S}}B(x,\delta)\subset B(A,\epsilon)$. Como $z_n\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}x$, podemos encontrar $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $z_n\in B(x,\delta)$, para $n>n_0$ e, portanto, $\widetilde{\mathcal{S}}(z_n)\subset B(A,\epsilon)$, para $n>n_0$. Seja $u\in\mathcal{U}$. Então, para quaisquer $t\in\left[0,\phi\left((z_n)_k^+,u\cdot\sum_{i=0}^{k-1}(\check{s}_n)_i\right)\right]$, $k\in\mathbb{N}$ e $n>n_0$, temos que

$$\varphi\left(t,(z_n)_k^+,u\cdot\sum_{i=0}^{k-1}(\check{s}_n)_i\right)=\widetilde{\varphi}\left(t,(z_n)_k^+,u\cdot\sum_{i=0}^{k-1}(\check{s}_n)_i\right)\in B(A,\epsilon)$$

e, portanto,

$$d_A\left(\varphi\left(t,(z_n)_k^+,u\cdot\sum_{i=0}^{k-1}(\check{s}_n)_i\right)\right)<\epsilon,$$

onde $(\check{s}_n)_k=\phi\left((z_n)_k^+,u\cdot\sum_{i=0}^{k-1}(\check{s}_n)_i\right)$, para todo k. Logo, $\psi(z_n)<\epsilon$, para $n>n_0$, donde, $\psi(z_n)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0=\psi(x)$. Por isso, ψ é contínua em $A\cap M_\varphi$. Isto finaliza a demonstração da propriedade 1.

Provemos, agora, a propriedade 2. Sejam $\epsilon>0$, $x\notin M_\varphi$ e $\delta=\frac{\epsilon}{1+\epsilon}$. Então, se $d_A(x)\geq\epsilon$, temos que

$$\frac{d_A(x)}{1+d_A(x)}\geq\delta\quad\text{e, portanto,}\quad\psi(x)\geq\delta.$$

Para provar a propriedade 3, consideremos $x \in A$ e analisemos dois casos. No primeiro, suponhamos que $x \notin M_\varphi$. Logo, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \cap M_\varphi = \emptyset$. Consideremos uma sequência (p_n) em M tal que $p_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Daí, existe $N > 0$ tal que $p_n \in B(x,\delta)$, para $n > N$ e, por isso, $p_n \notin M_\varphi$, para $n > N$. Segue, da continuidade de ψ em $M\backslash(M_\varphi\backslash A)$, que $\psi(p_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \psi(x) = 0$.

No segundo caso, suponhamos que $x \in M_\varphi$. Consideremos uma sequência (z_n) em $M\backslash M_\varphi$ tal que $z_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Pela continuidade de ψ em $M\backslash(M_\varphi\backslash A)$, temos que $\psi(z_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \psi(x) = 0$. Agora, consideremos uma sequência (y_n) em M_φ tal que $y_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Notemos que $I(y_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(x)$, pois I é contínua. Evidentemente, $I(y_n) \notin M_\varphi$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $I(x) \notin M_\varphi$, já que $M_\varphi \cap I(M_\varphi) = \emptyset$. Então, segue, da continuidade de ψ em $M\backslash(M_\varphi\backslash A)$, que $\psi(I(y_n)) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \psi(I(x))$, donde, $\psi(y_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \psi(x) = 0$.

Resta provar a propriedade 4. Se $x \in M_\varphi$, então $\psi(I(x)) = \psi(x)$, pela própria definição de ψ. Sejam $x \in M\backslash M_\varphi$, $u, v \in \mathcal{U}_{cp}$ e $s \in [0, \phi(x,v)]$. Consideremos $y = \varphi(s,x,v)$. Seja w a s-concatenação de v e u, ou seja,

$$w(t) = \begin{cases} v(t), & \text{se } t \leq s \\ u(t-s), & \text{se } t > s. \end{cases}$$

Vamos analisar, primeiro, o caso em que $s < \phi(x,v)$. Afirmamos que $\phi(x,w) > s$. De fato, suponhamos, por absurdo, que $\phi(x,w) \leq s$. Daí, $\varphi(\phi(x,w),x,v) = \varphi(\phi(x,w),x,w) \in M_\varphi$ e, portanto, $\phi(x,v) \leq \phi(x,w) \leq s < \phi(x,v)$, o que é uma contradição. Agora, afirmamos que $\phi(x,w) = \phi(y,u) + s$. De fato, notemos que

$$w \cdot s(t) = \begin{cases} v \cdot s(t), & \text{se } t \leq 0 \\ u(t), & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

Como $\phi(x,w) - s > 0$, segue que

$$\varphi(\phi(x,w) - s, y, u) = \varphi(\phi(x,w) - s, \varphi(s,x,w), w \cdot s) = \varphi(\phi(x,w), x, w) \in M_\varphi$$

e, portanto, $\phi(y,u) \leq \phi(x,w) - s$. Por outro lado, como $\varphi(\phi(y,u),y,u) \in M_\varphi$ e

$$\varphi(\phi(y,u),y,u) = \varphi(\phi(y,u), \varphi(s,x,w), w \cdot s) = \varphi(\phi(y,u) + s, x, w),$$

temos que $\phi(x,w) \leq \phi(y,u) + s$. Portanto, $\phi(x,w) = \phi(y,u) + s$. Agora, consideremos as semitrajetórias impulsivas através de y e x com respeito a u e w, respectivamente. Vamos utilizar as seguintes notações:

$$s_0 = \phi(y,u), \qquad \hat{s}_0 = \phi(x,w),$$

$$s_k = \phi\left(y_k^+, u \cdot \sum_{i=0}^{k-1} s_i\right) \quad e \quad \hat{s}_k = \phi\left(x_k^+, w \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \hat{s}_i\right),$$

para todo $k \geq 1$. Temos, então, que $\hat{s}_0 = \phi(x,w) = \phi(y,u) + s = s_0 + s$. Para $t \geq 0$, segue que $w \cdot \hat{s}_0(t) = w \cdot s(s_0 + t) = u \cdot s_0(t)$. Analogamente, $w \cdot \sum\limits_{i=0}^{k-1} \hat{s}_i = u \cdot \sum\limits_{i=0}^{k-1} s_i$, para

$k \geq 1$. Além disso,

$$\begin{aligned} y_1^+ &= I\left(\varphi\left(s_0, y, u\right)\right) = I\left(\varphi\left(s_0, \varphi\left(s, x, w\right), w \cdot s\right)\right) \\ &= I\left(\varphi\left(s_0 + s, x, w\right)\right) = I\left(\varphi\left(\hat{s}_0, x, w\right)\right) = x_1^+. \end{aligned}$$

De modo análogo, mostramos que $y_k^+ = x_k^+$, para todo $k \geq 1$ e, portanto, $s_k = \hat{s}_k$, para todo $k \geq 1$. Daí, para $0 \leq t \leq \phi\left(y_0^+, u\right)$, temos que $\varphi\left(t, y_0^+, u\right) = \varphi\left(t + s, x_0^+, w\right)$, com $s \leq t + s \leq \phi\left(x_0^+, w\right)$. Disto, segue que

$$\sup_{0 \leq t \leq \phi\left(y_0^+, u\right)} \frac{d_A\left(\varphi\left(t, y_0^+, u\right)\right)}{1 + d_A\left(\varphi\left(t, y_0^+, u\right)\right)} \leq \sup_{0 \leq t \leq \phi\left(x_0^+, w\right)} \frac{d_A\left(\varphi\left(t, x_0^+, w\right)\right)}{1 + d_A\left(\varphi\left(t, x_0^+, w\right)\right)}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} &\sup_{k \geq 0} \left(\sup_{0 \leq t \leq \phi\left(y_k^+, u \cdot \sum_{i=0}^{k-1} s_i\right)} \frac{d_A\left(\varphi\left(t, y_k^+, u \cdot \sum_{i=0}^{k-1} s_i\right)\right)}{1 + d_A\left(\varphi\left(t, y_k^+, u \cdot \sum_{i=0}^{k-1} s_i\right)\right)} \right) \\ \leq\ &\sup_{k \geq 0} \left(\sup_{0 \leq t \leq \phi\left(x_k^+, w \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \hat{s}_i\right)} \frac{d_A\left(\varphi\left(t, x_k^+, w \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \hat{s}_i\right)\right)}{1 + d_A\left(\varphi\left(t, x_k^+, w \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \hat{s}_i\right)\right)} \right). \end{aligned}$$

Assim, $\psi\left(\varphi\left(s, x, v\right)\right) = \psi\left(y\right) \leq \psi\left(x\right)$.

Por fim, vejamos o caso em que $s = \phi\left(x, v\right)$. Logo, $s = \phi\left(x, w\right)$, pois $\varphi\left(s, x, w\right) = \varphi\left(s, x, v\right) \in M_\varphi$. Isto significa que a semitrajetória impulsiva através de $I\left(\varphi\left(s, x, v\right)\right)$ com respeito a u coincide com a semitrajetória impulsiva através de x com respeito a w a partir de $x_1^+ = I\left(\varphi\left(s, x, v\right)\right)$, pois $x_1 = \varphi\left(s, x, w\right) = \varphi\left(s, x, v\right)$. Segue que $\psi\left(I\left(\varphi\left(s, x, v\right)\right)\right) \leq \psi\left(x\right)$. Daí, pela própria definição,

$$\psi\left(\varphi\left(s, x, v\right)\right) = \psi\left(I\left(\varphi\left(s, x, v\right)\right)\right) \leq \psi\left(x\right).$$

Isto finaliza a demonstração. □

O próximo resultado segue como uma consequência imediata do Teorema 2.3.6. Ele nos mostra que é possível obter a continuidade de ψ em todo o espaço de fase M, se considerarmos $M_\varphi \subset A$.

Corolário 2.3.1. *Seja A um subconjunto fechado de M tal que $M_\varphi \subset A$. Então, A é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$ se, e somente se, existe uma função $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades:*

1. *ψ é contínua;*

2. *para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi\left(x\right) \geq \delta$, se $d_A\left(x\right) \geq \epsilon$;*

3. *para toda sequência (w_n) em M tal que $w_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x \in A$, temos $\psi\left(w_n\right) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$;*

4. $\psi(\varphi(t,x,u)) \leq \psi(x)$, *se* $t \geq 0$, $x \in M \backslash M_\varphi$ *e* $u \in \mathcal{U}_{cp}$, *e* $\psi(I(x)) \leq \psi(x)$, *se* $x \in M_\varphi$.

Apresentamos, agora, a caracterização de um conjunto fechado e equiestável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Na sequência, enunciamos o resultado imediato que garante a continuidade de ψ em M para esse caso.

Teorema 2.3.7. *Seja* A *um subconjunto fechado de* M. *Suponhamos que* $I(M_\varphi \backslash A) \subset (M \backslash A) \setminus M_\varphi$. *Então,* A *é equiestável por* $\widetilde{\mathcal{S}}$ *se, e somente se, existe uma função* $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ *com as seguintes propriedades:*

1. ψ *é contínua em* $M \backslash (M_\varphi \backslash A)$;

2. $\psi(x) = 0$, *para* $x \in A$, *e* $\psi(x) > 0$, *para* $x \notin A \cup M_\varphi$;

3. *para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que* $\psi(x) \leq \epsilon$, *se* $d_A(x) \leq \delta$;

4. $\psi(\varphi(t,x,u)) \leq \psi(x)$, *se* $0 \leq t \leq \phi(x,u)$, $x \in M \backslash M_\varphi$ *e* $u \in \mathcal{U}_{cp}$, *e* $\psi(I(x)) \leq \psi(x)$, *se* $x \in M_\varphi$.

Demonstração. Suponhamos que tal função $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ exista. Seja $x \notin A$ com $d_A(x) = \epsilon$. Vamos considerar dois casos. Primeiro, suponhamos que $x \notin M_\varphi$. Segue, da propriedade 2, que $\psi(x) > 0$. Seja $\psi(x) = \mu$. Pela propriedade 3, existe $\eta > 0$ tal que $\psi(x) \leq \frac{\mu}{2}$, se $d_A(x) \leq \eta$. Escolhemos $\delta < \min(\eta, \epsilon)$. Afirmamos que $x \notin \overline{\widetilde{\mathcal{S}}B(A,\delta)}$. De fato, suponhamos, por absurdo, que existam sequências (T_n) em $[0,+\infty)$, (y_n) em $B(A,\delta)$ e (u_n) em $\mathcal{U}_{cp}$ tais que $\widetilde{\varphi}(T_n, y_n, u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Como $x \notin M_\varphi$ e M_φ é fechado, podemos encontrar $\alpha > 0$ tal que $B(x,\alpha) \cap M_\varphi = \emptyset$. Podemos assumir que $\widetilde{\varphi}(T_n, y_n, u_n) \in B(x,\alpha)$, para todo n, uma vez que $\widetilde{\varphi}(T_n, y_n, u_n)$ converge para x. Isto implica que $\widetilde{\varphi}(T_n, y_n, u_n) \notin M_\varphi$, para todo n. Logo, $\psi(\widetilde{\varphi}(T_n, y_n, u_n)) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \psi(x) = \mu$, pois ψ é contínua em $M \backslash (M_\varphi \backslash A)$. Daí, podemos encontrar $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|\psi(\widetilde{\varphi}(T_n, y_n, u_n)) - \mu| < \frac{\mu}{3}$, para $n \geq n_1$. Portanto, $\frac{2\mu}{3} < \psi(\widetilde{\varphi}(T_{n_1}, y_{n_1}, u_{n_1})) < \frac{4\mu}{3}$.

Afirmamos que $\psi(\widetilde{\varphi}(t,w,u)) \leq \psi(w)$, para quaisquer $t \geq 0$, $w \in M \backslash M_\varphi$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$. De fato, sejam $w \in M \backslash M_\varphi$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$. Segue, da propriedade 4, que $\psi(\widetilde{\varphi}(t,w,u)) = \psi(\varphi(t,w,u)) \leq \psi(w)$, para $0 \leq t \leq \phi(w,u)$. Além disso,

$$\psi\left(w_1^+\right) = \psi(I(w_1)) \leq \psi(w_1) = \psi(\varphi(\phi(w,u), w, u)) \leq \psi(w).$$

Agora, para $\phi(w,u) < t < \phi(w,u) + \phi\left(w_1^+, u \cdot s_0\right)$, temos que

$$\psi(\widetilde{\varphi}(t,w,u)) = \psi\left(\varphi\left(t - s_0, w_1^+, u \cdot s_0\right)\right) \leq \psi\left(w_1^+\right) \leq \psi(w).$$

Ainda,

$$\begin{aligned} \psi\left(\widetilde{\varphi}\left(\phi(w,u) + \phi\left(w_1^+, u \cdot s_0\right), w, u\right)\right) &= \psi\left(w_2^+\right) = \psi(I(w_2)) \leq \psi(w_2) \\ &= \psi\left(\varphi\left(\phi\left(w_1^+, u \cdot s_0\right), w_1^+, u \cdot s_0\right)\right) \\ &\leq \psi\left(w_1^+\right) \leq \psi(w). \end{aligned}$$

Continuando com esse processo, obtemos que $\psi\left(\widetilde{\varphi}\left(t,w,u\right)\right)\leq\psi\left(w\right)$, para quaisquer $t\geq 0$, $w\in M\backslash M_{\varphi}$ e $u\in\mathcal{U}_{cp}$. Em particular, $\psi\left(\widetilde{\varphi}\left(T_{n_1},y_{n_1},u_{n_1}\right)\right)\leq\psi\left(y_{n_1}\right)$. Como $y_{n_1}\in B\left(A,\delta\right)$, segue que $d_A\left(y_{n_1}\right)<\delta<\eta$ e, portanto, $\psi\left(y_{n_1}\right)\leq\frac{\mu}{2}$. Então, $\psi\left(\widetilde{\varphi}\left(T_{n_1},y_{n_1},u_{n_1}\right)\right)\leq\frac{\mu}{2}$, o que é uma contradição. Assim, $x\notin\overline{\widetilde{\mathcal{S}}B\left(A,\delta\right)}$ e A é equiestável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

No segundo caso, vamos supor que $x\in M_{\varphi}$. Novamente, suponhamos, por absurdo, que $x\in\overline{\widetilde{\mathcal{S}}B\left(A,\delta\right)}$, para todo $\delta>0$. Logo, para cada $\delta>0$, podemos encontrar sequências $\left(t_n^{\delta}\right)$ em $[0,+\infty)$, $\left(w_n^{\delta}\right)$ em $B\left(A,\delta\right)$ e $\left(u_n^{\delta}\right)$ em $\mathcal{U}_{cp}$ tais que $\widetilde{\varphi}\left(t_n^{\delta},w_n^{\delta},u_n^{\delta}\right)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}x$. Vamos considerar dois subcasos. No primeiro, suponhamos que exista uma quantidade enumerável de elementos de $\left\{\widetilde{\varphi}\left(t_n^{\delta},w_n^{\delta},u_n^{\delta}\right)\right\}_{n\geq 1}$, denotados por $\left\{\widetilde{\varphi}\left(t_{n_k}^{\delta},w_{n_k}^{\delta},u_{n_k}^{\delta}\right)\right\}_{k\geq 1}$, tais que

$$\phi\left(\widetilde{\varphi}\left(t_{n_k}^{\delta},w_{n_k}^{\delta},u_{n_k}^{\delta}\right),u_{n_k}^{\delta}\cdot t_{n_k}^{\delta}\right)\overset{k\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

e, portanto,

$$\varphi\left(\phi\left(\widetilde{\varphi}\left(t_{n_k}^{\delta},w_{n_k}^{\delta},u_{n_k}^{\delta}\right),u_{n_k}^{\delta}\cdot t_{n_k}^{\delta}\right),\widetilde{\varphi}\left(t_{n_k}^{\delta},w_{n_k}^{\delta},u_{n_k}^{\delta}\right),u_{n_k}^{\delta}\cdot t_{n_k}^{\delta}\right)\overset{k\to+\infty}{\longrightarrow}x.$$

Como I é contínua, segue que

$$\begin{aligned}&\widetilde{\varphi}\left(\phi\left(\widetilde{\varphi}\left(t_{n_k}^{\delta},w_{n_k}^{\delta},u_{n_k}^{\delta}\right),u_{n_k}^{\delta}\cdot t_{n_k}^{\delta}\right),\widetilde{\varphi}\left(t_{n_k}^{\delta},w_{n_k}^{\delta},u_{n_k}^{\delta}\right),u_{n_k}^{\delta}\cdot t_{n_k}^{\delta}\right)\\ =\;& I\left(\varphi\left(\phi\left(\widetilde{\varphi}\left(t_{n_k}^{\delta},w_{n_k}^{\delta},u_{n_k}^{\delta}\right),u_{n_k}^{\delta}\cdot t_{n_k}^{\delta}\right),\widetilde{\varphi}\left(t_{n_k}^{\delta},w_{n_k}^{\delta},u_{n_k}^{\delta}\right),u_{n_k}^{\delta}\cdot t_{n_k}^{\delta}\right)\right)\overset{k\to+\infty}{\longrightarrow}I\left(x\right).\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}&\widetilde{\varphi}\left(\phi\left(\widetilde{\varphi}\left(t_{n_k}^{\delta},w_{n_k}^{\delta},u_{n_k}^{\delta}\right),u_{n_k}^{\delta}\cdot t_{n_k}^{\delta}\right),\widetilde{\varphi}\left(t_{n_k}^{\delta},w_{n_k}^{\delta},u_{n_k}^{\delta}\right),u_{n_k}^{\delta}\cdot t_{n_k}^{\delta}\right)\\ =\;&\widetilde{\varphi}\left(t_{n_k}^{\delta}+\phi\left(\widetilde{\varphi}\left(t_{n_k}^{\delta},w_{n_k}^{\delta},u_{n_k}^{\delta}\right),u_{n_k}^{\delta}\cdot t_{n_k}^{\delta}\right),w_{n_k}^{\delta},u_{n_k}^{\delta}\right),\end{aligned}$$

segue que

$$\widetilde{\varphi}\left(t_{n_k}^{\delta}+\phi\left(\widetilde{\varphi}\left(t_{n_k}^{\delta},w_{n_k}^{\delta},u_{n_k}^{\delta}\right),u_{n_k}^{\delta}\cdot t_{n_k}^{\delta}\right),w_{n_k}^{\delta},u_{n_k}^{\delta}\right)\overset{k\to+\infty}{\longrightarrow}I\left(x\right). \tag{2.1}$$

Por outro lado, como $x\in M_{\varphi}\backslash A$, segue por hipótese que $I\left(x\right)\notin A\cup M_{\varphi}$. Então, pelo caso anterior, podemos encontrar $\widehat{\delta}>0$ tal que $I\left(x\right)\notin\overline{\widetilde{\mathcal{S}}B\left(A,\widehat{\delta}\right)}$, o que contradiz (2.1). Portanto, $x\notin\overline{\widetilde{\mathcal{S}}B\left(A,\delta\right)}$ para algum $\delta>0$ e A é equiestável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

No segundo subcaso, suponhamos que exista $c>0$ tal que $c\leq\phi\left(\widetilde{\varphi}\left(t_n^{\delta},w_n^{\delta},u_n^{\delta}\right),u_n^{\delta}\cdot t_n^{\delta}\right)$, para todo n. Como $\mathcal{U}$ é compacto, podemos assumir que $u_n^{\delta}\cdot t_n^{\delta}\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}u\in\mathcal{U}$. Segue, da continuidade de φ, que

$$\varphi\left(t,\widetilde{\varphi}\left(t_n^{\delta},w_n^{\delta},u_n^{\delta}\right),u_n^{\delta}\cdot t_n^{\delta}\right)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\varphi\left(t,x,u\right),$$

para todo $0\leq t<\min\left\{\phi\left(x,u\right),c\right\}$. Como $x\notin A$ e A é fechado, segue que existe $\mu>0$ tal que $B\left(x,\mu\right)\cap A=\emptyset$. Então, podemos encontrar $t_0>0$, $t_0<\min\left\{\phi\left(x,u\right),c\right\}$, tal que $\varphi\left(t_0,x,u\right)\notin A\cup M_{\varphi}$. Daí, pelo caso anterior, existe $\overline{\delta}>0$ tal que $\varphi\left(t_0,x,u\right)\notin\overline{\widetilde{\mathcal{S}}B\left(A,\overline{\delta}\right)}$. Por outro lado,

$$\varphi\left(t_0,\widetilde{\varphi}\left(t_n^{\delta},w_n^{\delta},u_n^{\delta}\right),u_n^{\delta}\cdot t_n^{\delta}\right)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\varphi\left(t_0,x,u\right),$$

onde

$$\varphi\left(t_0, \widetilde{\varphi}\left(t_n^\delta, w_n^\delta, u_n^\delta\right), u_n^\delta \cdot t_n^\delta\right) = \widetilde{\varphi}\left(t_0, \widetilde{\varphi}\left(t_n^\delta, w_n^\delta, u_n^\delta\right), u_n^\delta \cdot t_n^\delta\right) = \widetilde{\varphi}\left(t_n^\delta + t_0, w_n^\delta, u_n^\delta\right),$$

o que contradiz o fato de que $\varphi(t_0, x, u) \notin \overline{\widetilde{\mathcal{S}}B\left(A, \overline{\delta}\right)}$. Isto finaliza a demonstração no caso $x \in M_\varphi$. Portanto, $x \notin \overline{\widetilde{\mathcal{S}}B(A, \delta)}$ para algum $\delta > 0$ e A é equiestável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

A recíproca segue de modo análogo ao caso referente a um conjunto fechado e estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. □

Corolário 2.3.2. *Seja A um subconjunto fechado de M tal que $M_\varphi \subset A$. Então, A é equiestável por $\widetilde{\mathcal{S}}$ se, e somente se, existe uma função $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades:*

1. *ψ é contínua;*
2. *$\psi(x) = 0$, para $x \in A$, e $\psi(x) > 0$, para $x \notin A$;*
3. *para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi(x) \leq \epsilon$, se $d_A(x) \leq \delta$;*
4. *$\psi(\varphi(t, x, u)) \leq \psi(x)$, se $t \geq 0$, $x \in M\backslash M_\varphi$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$, e $\psi(I(x)) \leq \psi(x)$, se $x \in M_\varphi$.*

Antes de apresentarmos a caracterização de um conjunto fechado e uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$, vejamos o seguinte lema que será utilizado.

Lema 2.3.2. *Sejam A um subconjunto fechado de M e $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua em $M\backslash(M_\varphi\backslash A)$ com as seguintes propriedades:*

1. *para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi(x) \geq \delta$, se $d_A(x) \geq \epsilon$ e $x \notin M_\varphi$;*
2. *para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi(x) \leq \epsilon$, se $d_A(x) \leq \delta$.*

Suponhamos também que exista $\widetilde{\delta} > 0$ tal que $\psi(\widetilde{\varphi}(t, w, u)) \leq \psi(w)$, para quaisquer $t \geq 0$, $w \in \overline{B\left(A, \widetilde{\delta}\right)}\backslash M_\varphi$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$. Então, existe $\overline{\delta} > 0$, $0 < \overline{\delta} \leq \widetilde{\delta}$, tal que $\widetilde{\mathcal{S}}B\left(A, \overline{\delta}\right) \subset B\left(A, \widetilde{\delta}\right)$.

Demonstração. Por absurdo, suponhamos que, para cada $\delta_n = \frac{\widetilde{\delta}}{n} > 0$, $n \in \mathbb{N}$, existam $t_0^n \in (0, +\infty)$, $w_n \in B\left(A, \frac{\widetilde{\delta}}{n}\right)$ e $u_n \in \mathcal{U}_{cp}$ tais que $\widetilde{\varphi}(t_0^n, w_n, u_n) \notin B\left(A, \widetilde{\delta}\right)$. Definimos $\mu = \inf\left\{\psi(x) : x \notin M_\varphi \text{ e } d_A(x) \geq \widetilde{\delta}\right\}$. Segue, da propriedade 1, que $\mu > 0$.

Afirmamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\psi(w_{n_0}) \leq \frac{\mu}{2}$. De fato, existe $\eta > 0$, $\eta < \widetilde{\delta}$, tal que $\psi(y) \leq \frac{\mu}{2}$, se $d_A(y) \leq \eta$. Ainda, é possível encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B(A, \delta_{n_0}) = B\left(A, \frac{\widetilde{\delta}}{n_0}\right) \subset B(A, \eta)$. Como $w_{n_0} \in B\left(A, \frac{\widetilde{\delta}}{n_0}\right) \subset B(A, \eta)$, segue que $d_A(w_{n_0}) < \eta$ e, portanto, $\psi(w_{n_0}) \leq \frac{\mu}{2}$.

Vamos considerar dois casos. No primeiro, suponhamos que $w_{n_0} \notin M_\varphi$. Notemos que

$$w_{n_0} \in B\left(A, \delta_{n_0}\right) \subset B\left(A, \widetilde{\delta}\right) \subset \overline{B\left(A, \widetilde{\delta}\right)}.$$

Daí, $w_{n_0} \in \overline{B\left(A, \widetilde{\delta}\right)} \backslash M_\varphi$. Por hipótese, $\psi\left(\widetilde{\varphi}\left(t_0^{n_0}, w_{n_0}, u_{n_0}\right)\right) \leq \psi\left(w_{n_0}\right) \leq \frac{\mu}{2}$. Agora, como $\widetilde{\varphi}\left(t_0^{n_0}, w_{n_0}, u_{n_0}\right) \notin B\left(A, \widetilde{\delta}\right)$, segue que $d_A\left(\widetilde{\varphi}\left(t_0^{n_0}, w_{n_0}, u_{n_0}\right)\right) \geq \widetilde{\delta}$. Além disso, $\widetilde{\varphi}\left(t_0^{n_0}, w_{n_0}, u_{n_0}\right) \notin M_\varphi$, já que $M_\varphi \cap I\left(M_\varphi\right) = \emptyset$. Portanto, $\psi\left(\widetilde{\varphi}\left(t_0^{n_0}, w_{n_0}, u_{n_0}\right)\right) \geq \mu$, o que é uma contradição.

No segundo caso, suponhamos que $w_{n_0} \in M_\varphi$. É possível encontrar $\epsilon_0 \in (0, t_0^{n_0})$ tal que

$$\widetilde{\varphi}\left(\epsilon_0, w_{n_0}, u_{n_0}\right) = \varphi\left(\epsilon_0, w_{n_0}, u_{n_0}\right) \in B\left(A, \frac{\widetilde{\delta}}{n_0}\right) \backslash M_\varphi \subset B\left(A, \eta\right) \backslash M_\varphi.$$

Então, $d_A\left(\widetilde{\varphi}\left(\epsilon_0, w_{n_0}, u_{n_0}\right)\right) < \eta$ e, portanto, $\psi\left(\widetilde{\varphi}\left(\epsilon_0, w_{n_0}, u_{n_0}\right)\right) \leq \frac{\mu}{2}$. Daí, como

$$\widetilde{\varphi}\left(\epsilon_0, w_{n_0}, u_{n_0}\right) \in B\left(A, \eta\right) \backslash M_\varphi \subset B\left(A, \widetilde{\delta}\right) \backslash M_\varphi \subset \overline{B\left(A, \widetilde{\delta}\right)} \backslash M_\varphi,$$

segue que

$$\begin{aligned} \psi\left(\widetilde{\varphi}\left(t_0^{n_0}, w_{n_0}, u_{n_0}\right)\right) &= \psi\left(\widetilde{\varphi}\left(t_0^{n_0} - \epsilon_0, \widetilde{\varphi}\left(\epsilon_0, w_{n_0}, u_{n_0}\right), u_{n_0} \cdot \epsilon_0\right)\right) \\ &\leq \psi\left(\widetilde{\varphi}\left(\epsilon_0, w_{n_0}, u_{n_0}\right)\right) \leq \frac{\mu}{2}. \end{aligned}$$

De modo análogo ao caso onde $w_{n_0} \notin M_\varphi$, podemos perceber que isto é uma contradição. Isto finaliza a demonstração. □

Apresentamos, então, a caracterização de um conjunto fechado e uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Teorema 2.3.8. *Seja A um subconjunto fechado de M. Então, A é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$ se, e somente se, existe uma função $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades:*

1. *ψ é contínua em $M \backslash \left(M_\varphi \backslash A\right)$;*
2. *para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi(x) \geq \delta$, se $d_A(x) \geq \epsilon$ e $x \notin M_\varphi$;*
3. *para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi(x) \leq \epsilon$, se $d_A(x) \leq \delta$;*
4. *$\psi\left(\varphi\left(t, x, u\right)\right) \leq \psi(x)$, se $0 \leq t \leq \phi(x, u)$, $x \in M \backslash M_\varphi$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$, e $\psi\left(I(x)\right) \leq \psi(x)$, se $x \in M_\varphi$.*

Demonstração. Suponhamos que tal função $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ exista. Usando os mesmos argumentos utilizados na demonstração do Teorema 2.3.7, podemos mostrar que $\psi\left(\widetilde{\varphi}\left(t, x, u\right)\right) \leq \psi(x)$, para quaisquer $t \geq 0$, $x \in M \backslash M_\varphi$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$. Seja $\epsilon > 0$, em particular, $\psi\left(\widetilde{\varphi}\left(t, x, u\right)\right) \leq \psi(x)$, para quaisquer $t \geq 0$, $x \in \overline{B\left(A, \epsilon\right)} \backslash M_\varphi$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$. Segue, do

Lema 2.3.2, que existe $\delta > 0$ tal que $\widetilde{\mathcal{S}}B\left(A, \delta\right) \subset B\left(A, \epsilon\right)$. Portanto, A é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

A recíproca segue de modo análogo ao caso referente a um conjunto fechado e estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. $\square$

Para a continuidade de ψ em M nos termos do Teorema 2.3.8, temos o corolário a seguir.

Corolário 2.3.3. *Seja A um subconjunto fechado de M tal que $M_\varphi \subset A$. Então, A é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$ se, e somente se, existe uma função $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades:*

1. *ψ é contínua;*
2. *para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi\left(x\right) \geq \delta$, se $d_A\left(x\right) \geq \epsilon$;*
3. *para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi\left(x\right) \leq \epsilon$, se $d_A\left(x\right) \leq \delta$;*
4. *$\psi\left(\varphi\left(t, x, u\right)\right) \leq \psi\left(x\right)$, se $t \geq 0$, $x \in M \backslash M_\varphi$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$, e $\psi\left(I\left(x\right)\right) \leq \psi\left(x\right)$, se $x \in M_\varphi$.*

Por fim, apresentamos a caracterização de um conjunto compacto e assintoticamente estável fraco por $\widetilde{\mathcal{F}}$, seguido do corolário que fornece a continuidade de ψ em M para esse caso.

Teorema 2.3.9. *Seja A um subconjunto compacto de M. Então, A é assintoticamente estável fraco por $\widetilde{\mathcal{F}}$ se, e somente se, existe uma função $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades:*

1. *ψ é contínua em $M \backslash \left(M_\varphi \backslash A\right)$;*
2. *para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi\left(x\right) \leq \epsilon$, se $d_A\left(x\right) \leq \delta$;*
3. *para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi\left(x\right) \geq \delta$, se $d_A\left(x\right) \geq \epsilon$ e $x \notin M_\varphi$;*
4. *$\psi\left(\varphi\left(t, x, u\right)\right) \leq \psi\left(x\right)$, se $0 \leq t \leq \phi\left(x, u\right)$, $x \in M \backslash M_\varphi$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$, e $\psi\left(I\left(x\right)\right) \leq \psi\left(x\right)$, se $x \in M_\varphi$;*
5. *existe $\delta > 0$ tal que se $x \in B\left(A, \delta\right) \backslash A$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$, então $\psi\left(\widetilde{\varphi}\left(t, x, u\right)\right) \to 0$ quando $t \to +\infty$.*

Demonstração. Suponhamos que tal função $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ exista. Pelo Teorema 2.3.8, temos que A é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Resta, então, provar que A é um atrator fraco com respeito a $\widetilde{\mathcal{F}}$. Pela propriedade 5, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in B\left(A, \delta\right) \backslash A$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$, então $\psi\left(\widetilde{\varphi}\left(t, x, u\right)\right) \to 0$ quando $t \to +\infty$. Segue, da estabilidade uniforme por $\widetilde{\mathcal{S}}$ de A, que existe $\delta' > 0$, $\delta' < \delta$, tal que $\widetilde{\mathcal{S}}B\left(A, \delta'\right) \subset B\left(A, \delta\right)$.

Afirmamos que $B\left(A, \delta'\right) \subset \mathcal{A}_f\left(A, \widetilde{\mathcal{F}}\right)$. De fato, suponhamos, por absurdo, que exista $x \in B\left(A, \delta'\right) \backslash \mathcal{A}_f\left(A, \widetilde{\mathcal{F}}\right)$. Pelo Teorema 2.2.2, temos que A é positivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$ e, por isso, $A \subset \mathcal{A}_f\left(A, \widetilde{\mathcal{F}}\right)$. Isto implica que $x \notin A$. Ainda, existe um par $\epsilon, \tau > 0$ tal que $\widetilde{\mathcal{S}}_{\geq\tau}(x) \cap B(A,\epsilon) = \emptyset$, já que $x \notin \mathcal{A}_f\left(A, \widetilde{\mathcal{F}}\right)$. Seja $u \in \mathcal{U}_{cp}$, para $t \geq \tau$, temos que $\widetilde{\varphi}(t,x,u) \in \widetilde{\mathcal{S}}_{\geq\tau}(x) \setminus B(A,\epsilon)$. Podemos assumir que $\widetilde{\varphi}(t,x,u) \notin B(A,\epsilon)$, para todo $t > 0$ e, portanto, $d_A(\widetilde{\varphi}(t,x,u)) \geq \epsilon$. Ainda, de acordo com a construção das semitrajetórias positivas impulsivas, $\widetilde{\varphi}(t,x,u) \notin M_\varphi$, para todo $t > 0$. Segue, da propriedade 3, que existe $\delta > 0$ tal que $\psi(\widetilde{\varphi}(t,x,u)) \geq \delta$, para todo $t > 0$. Por outro lado, pela propriedade 5, temos que $\psi(\widetilde{\varphi}(t,x,u)) \to 0$ quando $t \to +\infty$, o que é uma contradição. Portanto, $B(A,\delta') \subset \mathcal{A}_f\left(A, \widetilde{\mathcal{F}}\right)$ e A é um atrator fraco com respeito a $\widetilde{\mathcal{F}}$, concluindo que A é assintoticamente estável fraco por $\widetilde{\mathcal{F}}$.

A recíproca segue de modo análogo ao caso referente a um conjunto fechado e estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. $\square$

Corolário 2.3.4. *Seja A um subconjunto compacto de M tal que $M_\varphi \subset A$. Então, A é assintoticamente estável fraco por $\widetilde{\mathcal{F}}$ se, e somente se, existe uma função $\psi : M \to \mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades:*

1. *ψ é contínua;*
2. *para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi(x) \leq \epsilon$, se $d_A(x) \leq \delta$;*
3. *para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi(x) \geq \delta$, se $d_A(x) \geq \epsilon$;*
4. *$\psi(\varphi(t,x,u)) \leq \psi(x)$, se $t \geq 0$, $x \in M \setminus M_\varphi$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$, e $\psi(I(x)) \leq \psi(x)$, se $x \in M_\varphi$;*
5. *existe $\delta > 0$ tal que se $x \in B(A,\delta) \setminus A$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$, então $\psi(\widetilde{\varphi}(t,x,u)) \to 0$ quando $t \to +\infty$.*

Para encerrar essa seção, apresentamos uma aplicação do Teorema 2.3.6.

Exemplo 2.3.1. *Consideremos o sistema de controle afim*

$$\begin{gathered}\dot{x} = \mathrm{X}(x, u(t)) = \mathrm{X}_0(x) + u(t)\,\mathrm{X}_1(x), \\ u \in \mathcal{U}_{cp} = \{u : \mathbb{R} \to [0,4] : u \textit{ constante por partes}\}\end{gathered}$$

sobre $M = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq 1\right\}$, *onde* X_0 *e* X_1 *são dados por*

$$\begin{aligned}\mathrm{X}_0(x_1,x_2) &= (-x_2, x_1), \\ \mathrm{X}_1(x_1,x_2) &= \frac{1 - \|x\|^2}{\|x\|^2}(x_1, x_2),\end{aligned}$$

com

$$M_\varphi = \{(0, x_2) : x_2 \in [1,2]\}, \qquad I((0,x_2)) = (x_2, 0), \quad \textit{para todo } x_2 \in [1,2].$$

Seja $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$. *Consideremos a função* $\psi : M \to [0,1]$ *definida por*

$$\psi(x) = \frac{\|x\| - 1}{\|x\|}.$$

Vamos mostrar que A *é estável por* $\widetilde{\mathcal{S}}$. *Para isso, utilizando o Teorema 2.3.6, basta mostrar que* ψ *satisfaz as quatro propriedades lá enunciadas. É evidente que* ψ *satisfaz a propriedade 1, já que* ψ *é diferenciável e, portanto, contínua em* M *e, em particular, em* $M \setminus (M_\varphi \setminus A)$.

Para provar a propriedade 2, sejam $\epsilon > 0$ *e* $x \notin M_\varphi$. *Escolhemos* $\delta = \dfrac{\epsilon}{1+\epsilon}$. *Daí, se* $d_A(x) \geq \epsilon$, *então*

$$\psi(x) = \frac{\|x\| - 1}{\|x\|} \geq \frac{d_A(x)}{1 + d_A(x)} \geq \frac{\epsilon}{1+\epsilon} = \delta.$$

Isto prova a propriedade 2.

Provemos a propriedade 3. Para isso, seja (w_n) *uma sequência em* M *tal que* $w_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \in A$. *Como* $x \in A$, *segue que* $\|w_n\| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|x\| = 1$ *e, portanto,* $\psi(w_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Resta provar a propriedade 4. Notemos que

$$\begin{aligned} d\psi_x(\mathrm{X}(x, u(t))) &= \frac{x_1}{\|x\|^3}\left(\frac{1 - \|x\|^2}{\|x\|^2} u(t)\, x_1 - x_2\right) + \frac{x_2}{\|x\|^3}\left(\frac{1 - \|x\|^2}{\|x\|^2} u(t)\, x_2 + x_1\right) \\ &= u(t)\,\frac{x_1^2 + x_2^2}{\|x\|^3}\frac{1 - \|x\|^2}{\|x\|^2} - \frac{x_1 x_2}{\|x\|^3} + \frac{x_1 x_2}{\|x\|^3} \\ &= u(t)\,\frac{1 - \|x\|^2}{\|x\|^3} \leq 0. \end{aligned}$$

Portanto, para $x \in M \setminus M_\varphi$ *e* $u \in \mathcal{U}_{pc}$, $\psi(\varphi(t, x, u))$ *é decrescente, para* $t \in [0, \phi(x, u)]$. *Se* $x \in M_\varphi$, *temos que* $\psi(I(x)) = \psi(x)$ *e, portanto,* ψ *também satisfaz a propriedade 4 do Teorema 2.3.6. Isto prova que* A *é estável por* $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Capítulo 3

Estabilidade de Poisson para sistemas de controle afins impulsivos

Este capítulo tem como objetivo estudar conceitos recursivos da teoria clássica de sistemas dinâmicos e reproduzi-los para um sistema de controle impulsivo. Nesse sentido, vamos introduzir as definições de pontos positivamente recursivos com respeito a $\widetilde{\varphi}$, positivamente Poisson estáveis por $\widetilde{\varphi}$, não vagantes com respeito a $\widetilde{\varphi}$ e Poincaré recorrentes com respeito a $\widetilde{\mathcal{F}}$. Um dos principais resultados apresenta caracterizações para os pontos positivamente Poisson estáveis por $\widetilde{\varphi}$. Vemos, ao longo desse capítulo, que a estabilidade de Poisson positiva por $\widetilde{\varphi}$ se relaciona com os conceitos de recorrência, periodicidade, controlabilidade e pontos não vagantes com respeito a $\widetilde{\varphi}$. Finalizamos o capítulo com a reprodução do Teorema da Recorrência de Poincaré.

Consideremos dado um sistema de controle impulsivo sobre uma variedade M de classe C^∞ e de dimensão d, com conjunto impulsivo M_φ e função impulsiva I.

3.1 Definições básicas

Esta primeira seção é destinada à introdução dos conceitos básicos utilizados no estudo de estabilidade de Poisson, recorrência e pontos não vagantes. As notações e definições gerais introduzidas no Capítulo 1 serão adotadas também nesse capítulo. Com relação aos conceitos recursivos no contexto geral de ações de semigrupos, nos referimos a [29] e [33].

A seguir, introduzimos os conceitos relacionados à recursividade para um sistema de controle impulsivo.

Definição 3.1.1. *Sejam A e B dois subconjuntos de M. Dizemos que A é* ***positivamente recursivo com respeito a*** *B* ***e*** *$\widetilde{\varphi}$ se, para cada $T \geq 0$, temos que $\widetilde{\mathcal{S}}_{\geq T}B \cap A \neq \emptyset$, ou seja, se, para cada $T \geq 0$, existem $t \geq T$, $u \in \mathcal{U}$ e $x \in B$ tais que $\widetilde{\varphi}(t, x, u) \in A$.*

Definição 3.1.2. *Seja $x \in M$. Dizemos que x é* ***positivamente Poisson estável por*** *$\widetilde{\varphi}$ se toda vizinhança de x é positivamente recursiva com respeito a $\{x\}$ e $\widetilde{\varphi}$.*

Definição 3.1.3. *Seja $x \in M$. Dizemos que x é* ***não vagante com respeito a*** $\widetilde{\varphi}$ *se toda vizinhança de x é positivamente recursiva com respeito a si própria e $\widetilde{\varphi}$.*

Vejamos, agora, um exemplo de um conjunto positivamente recursivo com respeito a $\widetilde{\varphi}$ e vamos descrever os conjuntos dos pontos positivamente Poisson estáveis por $\widetilde{\varphi}$ e dos pontos não vagantes com respeito a $\widetilde{\varphi}$.

Exemplo 3.1.1. *Consideremos o sistema de controle sobre $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ determinado pelos campos de vetores $\{X, Y\}$ dados por*

$$X(x_1, x_2) = \left(x_2 + x_1\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right), -x_1 + x_2\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)\right)$$

e

$$Y(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1 - x_1^3 - x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2 - x_1^2 x_2 - x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}\right),$$

com

$$M_\varphi = \left\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 4\right\}, \qquad I((x_1, x_2)) = \left(\frac{x_1}{4}, \frac{x_2}{4}\right), \quad \text{para todo } (x_1, x_2) \in M_\varphi.$$

Consideremos o círculo unitário $\mathbb{S}^1 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. As trajetórias de X possuem o seguinte comportamento:

i) para $\|x\| = 1$, as trajetórias se movem sobre o círculo $\mathbb{S}^1$;

ii) para $0 < \|x\| < 1$, as trajetórias se movem sobre espirais que se aproximam do círculo $\mathbb{S}^1$ em tempo positivo e se aproximam da origem $0 \in \mathbb{R}^2$ em tempo negativo;

iii) para $\|x\| > 1$, as trajetórias se movem sobre espirais do infinito para círculo $\mathbb{S}^1$.

As trajetórias de Y possuem o seguinte comportamento:

i) os pontos de $\mathbb{S}^1$ são pontos de equilíbrio para Y;

ii) se x estiver fora do círculo unitário, então a trajetória é uma linha reta convergindo para $\frac{x}{\|x\|} \in \mathbb{S}^1$, quando $t \to +\infty$.

Reunindo todas essas trajetórias, obtemos todas as trajetórias do sistema de controle. Dado um subconjunto B de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, percebemos que toda vizinhança de $\mathbb{S}^1$ é positivamente recursiva com respeito a B e $\widetilde{\varphi}$. Além disso, o círculo $\mathbb{S}^1$ é o conjunto dos pontos positivamente Poisson estáveis por $\widetilde{\varphi}$ e também o conjunto dos pontos não vagantes com respeito a $\widetilde{\varphi}$. A Figura 3.1 ilustra as trajetórias do sistema de controle.

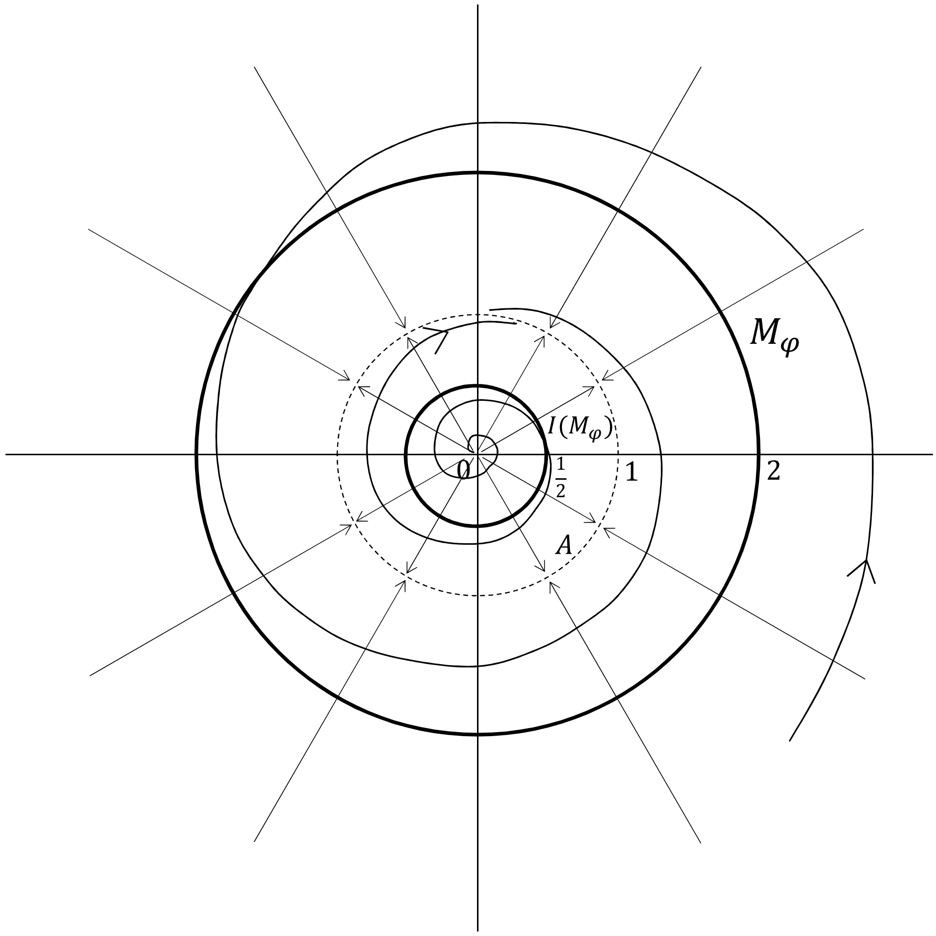

Figura 3.1: Trajetórias do sistema de controle.

3.2 Estabilidade de Poisson

O principal objetivo desta seção é fornecer caracterizações de um ponto positivamente Poisson estável por $\widetilde{\varphi}$. Além disso, apresentamos condições que garantem a invariância positiva por $\widetilde{\mathcal{S}}$ do conjunto formado pelos pontos positivamente Poisson estáveis por $\widetilde{\varphi}$.

Por todo este capítulo, vamos assumir as seguintes hipóteses:

1. Cada elemento $x \in M_\varphi$ satisfaz φ-CFT e, portanto, ϕ é contínua em $(M \backslash M_\varphi) \times \mathcal{U}$;

2. $M_\varphi \cap I(M_\varphi) = \emptyset$.

Com o intuito de obter as caracterizações de um ponto positivamente Poisson estável por $\widetilde{\varphi}$, precisamos de dois resultados preliminares. O primeiro deles apresenta uma descrição do fecho de $\widetilde{\mathcal{S}}(x)$, onde $x \in M$, através dos pontos impulsivos e do conjunto limite. Assim, inicialmente, introduzimos o conceito de conjunto limite para um sistema de controle impulsivo. No contexto geral de ações de semigrupos, esse conceito foi introduzido em [11].

Definição 3.2.1. *Seja $x \in M$. O* ***conjunto*** $\widetilde{\omega}$***-limite*** *de x é definido por*

$$\widetilde{\omega}(x) = \left\{ \begin{array}{c} y \in M : \text{existem sequências } (u_n) \text{ em } \mathcal{U} \text{ e } t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ \text{tais que } \widetilde{\varphi}(t_n, x, u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \end{array} \right\}.$$

Observação 3.2.1. *Para cada $x \in M$, o conjunto $\widetilde{\omega}(x)$ é fechado. De fato, seja $y \in \overline{\widetilde{\omega}(x)}$, então existe uma sequência (y_k) em $\widetilde{\omega}(x)$ tal que $y_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} y$. Assim, para cada k, existem sequências $\left(u_n^k\right)$ em $\mathcal{U}$ e $t_n^k \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ tais que $\widetilde{\varphi}\left(t_n^k, x, u_n^k\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y_k$. Podemos assumir que $t_n^k \geq k$ e $d\left(y_k, \widetilde{\varphi}\left(t_n^k, x, u_n^k\right)\right) < \frac{1}{k}$, para $n \geq k$. Agora, consideremos as sequências (t_n) e (u_n) definidas por $t_n = t_n^n$ e $u_n = u_n^n$, respectivamente. Evidentemente, $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Além disso,*

$$d(y, \widetilde{\varphi}(t_n, x, u_n)) \leq d(y, y_n) + d(y_n, \widetilde{\varphi}(t_n, x, u_n)) \leq d(y, y_n) + \frac{1}{n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo, $\widetilde{\varphi}(t_n, x, u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$ e, portanto, $y \in \widetilde{\omega}(x)$.

Introduzimos, agora, algumas notações utilizadas nos próximos resultados. Sejam $x \in M$ e $u \in \mathcal{U}$. Denotemos por $\widetilde{\varphi}_u^+(x)$ o conjunto $\{\widetilde{\varphi}(t, x, u) : t \geq 0\}$. Notemos que

$$\widetilde{\mathcal{S}}(x) = \widetilde{\mathcal{O}}^+(x) = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \widetilde{\varphi}_u^+(x).$$

Além disso, consideremos

$$x_{u,1} = \varphi(s_0, x, u), \quad x_{u,1}^+ = \widetilde{\varphi}(s_0, x, u),$$

$$x_{u,i} = \varphi\left(s_{i-1}, x_{u,i-1}^+, u \cdot \sum_{j=0}^{i-2} s_j\right) \quad \text{e} \quad x_{u,i}^+ = \widetilde{\varphi}\left(s_{i-1}, x_{u,i-1}^+, u \cdot \sum_{j=0}^{i-2} s_j\right),$$

para $i = 2, 3, ...$, onde $s_0 = \phi(x, u)$ e $s_i = \phi\left(x_{u,i}^+, u \cdot \sum_{j=0}^{i-1} s_j\right)$, para $i = 1, 2, ...$

Segue, então, o lema que descreve o fecho da $\widetilde{\mathcal{S}}$-órbita de um ponto $x \in M$.

Lema 3.2.1. *Seja $x \in M$. Se $s_i < +\infty$, para quaisquer $i = 0, 1, 2, ...$ e $u \in \mathcal{U}$, então*

$$\overline{\widetilde{\mathcal{S}}(x)} = \widetilde{\mathcal{S}}(x) \cup \widetilde{\omega}(x) \cup \left(\bigcup_{u \in \mathcal{U}} \{x_{u,i} : i = 1, 2, \ldots\} \right).$$

Se $s_i < +\infty$ e $s_{k+1} = +\infty$, para $i = 0, ..., k$, $k \in \mathbb{N}$, e $u \in \mathcal{U}$, então

$$\overline{\widetilde{\mathcal{S}}(x)} = \widetilde{\mathcal{S}}(x) \cup \widetilde{\omega}(x) \cup \left(\bigcup_{u \in \mathcal{U}} \{x_{u,i} : i = 1, 2, \ldots, k+1\} \right).$$

Demonstração. Seja $x \in M$. Para demonstrar este resultado, basta provar que

$$\overline{\widetilde{\mathcal{S}}(x)} \subset \widetilde{\mathcal{S}}(x) \cup \widetilde{\omega}(x) \cup \left(\bigcup_{u \in \mathcal{U}} \{x_{u,i} : i = 1, 2, \ldots\} \right),$$

visto que a inclusão inversa é imediata. Seja $y \in \overline{\widetilde{\mathcal{S}}(x)}$, logo, existe um sequência (y_n) em $\widetilde{\mathcal{S}}(x)$ tal que $y_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} y$. Isto significa que existem sequências (t_n) em $[0, +\infty)$ e (u_n) em $\mathcal{U}$ tais que $y_n = \widetilde{\varphi}(t_n, x, u_n)$, para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$. Pela compacidade de $\mathcal{U}$, podemos assumir que $u_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} u \in \mathcal{U}$. Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos as seguintes notações:

$$s_0^n = \phi(x, u_n) \text{ e}$$

$$s_i^n = \phi\left(x_{u_n,i}^+, u_n \cdot \sum_{j=0}^{i-1} s_j^n \right), \text{ para } i = 1, 2, \ldots$$

Vamos supor que $y \notin \widetilde{\omega}(x)$ e mostrar que $y \in \widetilde{\mathcal{S}}(x) \cup \left(\bigcup_{u \in \mathcal{U}} \{x_{u,i} : i = 1, 2, \ldots\} \right)$. Notemos que se $y \notin \widetilde{\omega}(x)$, então (t_n) é uma sequência limitada e, por isso, podemos assumir que $t_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} t \geq 0$. Se $0 \leq t < s_0$, então podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq t_n < s_0^n$, para $n > n_0$. Daí, segue que

$$y_n = \widetilde{\varphi}(t_n, x, u_n) = \varphi(t_n, x, u_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \varphi(t, x, u) = \widetilde{\varphi}(t, x, u)$$

e, portanto, $y = \widetilde{\varphi}(t, x, u) \in \widetilde{\varphi}_u^+(x) \subset \widetilde{\mathcal{S}}(x)$.

Se $s_0 \leq t < s_0 + s_1$, então podemos analisar dois casos. No primeiro, suponhamos que $t_k < s_0^k$, para uma quantidade infinita de índices k. Isto implica que $t \leq s_0$, donde, $t = s_0 = \phi(x, u)$. Segue, então, que

$$y_k = \widetilde{\varphi}(t_k, x, u_k) = \varphi(t_k, x, u_k) \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \varphi(t, x, u) = \varphi(\phi(x, u), x, u) = x_{u,1}$$

e, portanto, $y = x_{u,1} \in \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \{x_{u,i} : i = 1, 2, \ldots\}$.

No segundo caso, suponhamos que $s_0^k \leq t_k$, para uma quantidade infinita de índices k. Afirmamos que $x_{u_k,1}^+ \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} x_{u,1}^+$. De fato, pelo Teorema 1.2.2, temos que $s_0^k = \phi(x, u_k) \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \phi(x, u) = s_0$. Segue, da continuidade de I e de φ, que

$$x_{u_k,1}^+ = I\left(\varphi\left(s_0^k, x, u_k\right)\right) \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} I(\varphi(s_0, x, u)) = x_{u,1}^+.$$

Como ϕ é contínua em $(M \backslash M_\varphi) \times \mathcal{U}$, segue que

$$s_1^k = \phi\left(x_{u_k,1}^+, u_k \cdot s_0^k\right) \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \phi\left(x_{u,1}^+, u \cdot s_0\right) = s_1.$$

Agora, notemos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_k < s_0^k + s_1^k$, para $k > k_0$, pois $t < s_0 + s_1$. Logo, $s_0^k \leq t_k < s_0^k + s_1^k$, para $k > k_0$. Assim,

$$y_k = \widetilde{\varphi}(t_k, x, u_k) = \varphi\left(t_k - s_0^k, x_{u_k,1}^+, u_k \cdot s_0^k\right) \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \varphi\left(t - s_0, x_{u,1}^+, u \cdot s_0\right) = \widetilde{\varphi}(t, x, u)$$

e, portanto, $y = \widetilde{\varphi}(t, x, u) \in \widetilde{\varphi}_u^+(x) \subset \widetilde{\mathcal{S}}(x)$.

Para cada $i = 0, 1, ...$, podemos mostrar que $s_i^k \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} s_i$ e $x_{u_k,i}^+ \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} x_{u,i}^+$, utilizando os mesmos argumentos usados anteriormente. Suponhamos que $\sum_{i=0}^{n-1} s_i \leq t < \sum_{i=0}^{n} s_i$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Novamente, consideremos dois casos. No primeiro, suponhamos que $t_k < \sum_{i=0}^{n-1} s_i^k$, para uma quantidade infinita de índices k. Isto implica que $t \leq \sum_{i=0}^{n-1} s_i$, donde, $t = \sum_{i=0}^{n-1} s_i$. Além disso, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=0}^{n-2} s_i^k < t_k$, para $k > k_0$, uma vez que $\sum_{i=0}^{n-2} s_i < t$. Daí, $\sum_{i=0}^{n-2} s_i^k < t_k < \sum_{i=0}^{n-1} s_i^k$, para $k > k_0$. Segue que

$$\begin{aligned} y_k &= \widetilde{\varphi}(t_k, x, u_k) = \varphi\left(t_k - \sum_{i=0}^{n-2} s_i^k, x_{u_k,n-1}^+, u_k \cdot \sum_{i=0}^{n-2} s_i^k\right) \\ &\overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \varphi\left(t - \sum_{i=0}^{n-2} s_i, x_{u,n-1}^+, u \cdot \sum_{i=0}^{n-2} s_i\right) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{n-1} s_i - \sum_{i=0}^{n-2} s_i, x_{u,n-1}^+, u \cdot \sum_{i=0}^{n-2} s_i\right) \\ &= \varphi\left(s_{n-1}, x_{u,n-1}^+, u \cdot \sum_{i=0}^{n-2} s_i\right) = x_{u,n} \end{aligned}$$

e, portanto, $y = x_{u,n} \in \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \{x_{u,i} : i = 1, 2, \ldots\}$.

No segundo caso, suponhamos que $\sum_{i=0}^{n-1} s_i^k \leq t_k$, para uma quantidade infinita de índices k. Podemos encontrar $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_k < \sum_{i=0}^{n} s_i^k$, para $k > k_0$, pois $t < \sum_{i=0}^{n} s_i$. Daí, temos que $\sum_{i=0}^{n-1} s_i^k \leq t_k < \sum_{i=0}^{n} s_i^k$, para $k > k_0$. Segue que

$$\begin{aligned} y_k &= \widetilde{\varphi}(t_k, x, u_k) = \varphi\left(t_k - \sum_{i=0}^{n-1} s_i^k, x_{u_k,n}^+, u_k \cdot \sum_{i=0}^{n-1} s_i^k\right) \\ &\overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \varphi\left(t - \sum_{i=0}^{n-1} s_i, x_{u,n}^+, u \cdot \sum_{i=0}^{n-1} s_i\right) = \widetilde{\varphi}(t, x, u) \end{aligned}$$

e, portanto, $y = \widetilde{\varphi}(t, x, u) \in \widetilde{\varphi}_u^+(x) \subset \widetilde{\mathcal{S}}(x)$. $\square$

Uma das principais características de um sistema impulsivo é, sem dúvida, sua descontinuidade. Apesar disso, o próximo lema mostra que, embora $\widetilde{\varphi}$ não seja uma função contínua, ainda assim ela satisfaz uma interessante propriedade de continuidade.

Lema 3.2.2. *Sejam $w \in M \backslash M_\varphi$ e $u \in \mathcal{U}$. Consideremos duas sequências (z_n) em M e (u_n) em $\mathcal{U}$ tais que $z_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} w$ e $u_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} u$. Então, para qualquer $t \in [0, +\infty)$, existe uma sequência (ϵ_n) em $\mathbb{R}$, com $\epsilon_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, tal que $\widetilde{\varphi}(t + \epsilon_n, z_n, u_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\varphi}(t, w, u)$.*

Demonstração. Seja $w \in M \backslash M_{\varphi}$. Como M_{φ} é fechado, podemos encontrar $\eta > 0$ tal que $B(w, \eta) \cap M_{\varphi} = \emptyset$. Segue, da convergência de (z_n) para w, que existe $N > 0$ tal que $z_n \in B(w, \eta)$, para $n > N$. Isto implica que $\phi(z_n, u_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \phi(w, u)$, visto que ϕ é contínua em $B(w, \eta) \times \mathcal{U}$. Vamos considerar dois casos. No primeiro, suponhamos que $\phi(w, u) < +\infty$. Assim, podemos assumir que $\phi(z_n, u_n) < +\infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Suponhamos que $0 \leq t < \phi(w, u)$. Escolhemos $\epsilon > 0$ e assumimos que $\epsilon < \phi(w, u) - t$. Podemos, então, encontrar $N_1 > N$ tal que $|\phi(z_n, u_n) - \phi(w, u)| < \epsilon$, para $n > N_1$, pois $\phi(z_n, u_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \phi(w, u)$. Assim, $t < \phi(w, u) - \epsilon < \phi(z_n, u_n)$, para $n > N_1$. Segue, da continuidade de φ, que

$$\widetilde{\varphi}(t, z_n, u_n) = \varphi(t, z_n, u_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \varphi(t, w, u) = \widetilde{\varphi}(t, w, u).$$

Isto mostra que o resultado é válido para $\epsilon_n = 0$, para todo n.

Suponhamos, agora, que $t = \phi(w, u)$. Consideremos três subcasos. No primeiro, vamos supor que $\phi(z_n, u_n) > \phi(w, u)$, para uma quantidade infinita de índices n. Para cada n, escolhemos $\epsilon_n > 0$ tal que $t + \epsilon_n = \phi(z_n, u_n)$. Como $\phi(z_n, u_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \phi(w, u) = t$, segue que $\epsilon_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Notemos que $(z_n)_1 \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} w_1$, pois, pela continuidade de φ, temos que

$$(z_n)_1 = \varphi(\phi(z_n, u_n), z_n, u_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \varphi(\phi(w, u), w, u) = w_1.$$

Daí, utilizando a continuidade de I, segue que $(z_n)_1^+ = I((z_n)_1) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} I(w_1) = w_1^+$. Assim,

$$\widetilde{\varphi}(t + \epsilon_n, z_n, u_n) = \widetilde{\varphi}(\phi(z_n, u_n), z_n, u_n) = (z_n)_1^+ \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} w_1^+ = \widetilde{\varphi}(\phi(w, u), w, u) = \widetilde{\varphi}(t, w, u).$$

O segundo subcaso, que consiste em supor que $\phi(z_n, u_n) = \phi(w, u)$, para uma quantidade infinita de índices n, é imediato.

Vejamos, então, o terceiro subcaso em que $\phi(z_n, u_n) < \phi(w, u)$, para uma quantidade infinita de índices n. Para cada n, escolhemos $\lambda_n > 0$ tal que $t - \lambda_n = \phi(z_n, u_n)$ e, então, definimos $\epsilon_n = -\lambda_n \in \mathbb{R}$. Logo, $t + \epsilon_n = \phi(z_n, u_n)$, para todo n. Novamente, $\epsilon_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, pois $\phi(z_n, u_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \phi(w, u) = t$. Assim, a demonstração segue de modo análogo ao caso em que $\phi(z_n, u_n) > \phi(w, u)$, para uma quantidade infinita de índices n.

Agora, vamos supor que $\phi(w, u) < t < \phi(w, u) + \phi\left(w_1^+, u \cdot s_0\right)$. Podemos encontrar $t' \in \left[0, \phi\left(w_1^+, u \cdot s_0\right)\right)$ tal que $t = \phi(w, u) + t'$. Utilizando a continuidade de ϕ em $(M \backslash M_{\varphi}) \times \mathcal{U}$, podemos assumir que $t' \in \left[0, \phi\left((z_n)_1^+, u_n \cdot \phi(z_n, u_n)\right)\right)$, para todo n, uma vez que $\phi\left((z_n)_1^+, u_n \cdot \phi(z_n, u_n)\right) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \phi\left(w_1^+, u \cdot s_0\right)$. Para cada n, definimos $\epsilon_n = \phi(z_n, u_n) - \phi(w, u)$. Evidentemente, $\epsilon_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Pela continuidade de φ,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(t + \epsilon_n, z_n, u_n) &= \widetilde{\varphi}(\phi(z_n, u_n) + t', z_n, u_n) \\
&= \widetilde{\varphi}(t', \widetilde{\varphi}(\phi(z_n, u_n), z_n, u_n), u_n \cdot \phi(z_n, u_n)) \\
&= \widetilde{\varphi}\left(t', (z_n)_1^+, u_n \cdot \phi(z_n, u_n)\right) = \varphi\left(t', (z_n)_1^+, u_n \cdot \phi(z_n, u_n)\right) \\
&\overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \varphi\left(t', w_1^+, u \cdot \phi(w, u)\right) = \widetilde{\varphi}\left(t', w_1^+, u \cdot \phi(w, u)\right) \\
&= \widetilde{\varphi}(t', \widetilde{\varphi}(\phi(w, u), w, u), u \cdot \phi(w, u)) = \widetilde{\varphi}(t' + \phi(w, u), w, u) \\
&= \widetilde{\varphi}(t, w, u).
\end{aligned}$$

Continuando com esse processo, mostramos que o resultado é válido para o caso em que $\phi(w,u) < +\infty$.

Por fim, analisemos o segundo caso, onde $\phi(w,u) = +\infty$. Temos que $\phi(z_n,u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(w,u) = +\infty$ e, portanto, para qualquer $t \in [0,+\infty)$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(z_n,u_n) > t$, para $n \geq n_0$. Segue, da continuidade de φ, que

$$\widetilde{\varphi}(t,z_n,u_n) = \varphi(t,z_n,u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(t,w,u) = \widetilde{\varphi}(t,w,u),$$

para $n \geq n_0$. Isto mostra que o resultado é válido para $\epsilon_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Como foi visto no Lema 3.2.2, a convergência obtida depende de uma sequência (ϵ_n). Considerando condições adequadas, é possível evitar isso, como mostra a próxima proposição.

Proposição 3.2.1. *Sejam $w \in M\backslash M_\varphi$ e $u \in \mathcal{U}$. Consideremos duas sequências (z_n) em M e (u_n) em $\mathcal{U}$ tais que $z_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} w$ e $u_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$. Então, para qualquer $t \neq \sum_{j=0}^{k}\phi\left(w_j^+, u\cdot\sum_{i=0}^{j-1}s_i\right)$, $k = 0,1,2,...$, temos que $\widetilde{\varphi}(t,z_n,u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\varphi}(t,w,u)$.*

Demonstração. Seja $w \in M\backslash M_\varphi$. Como M_φ é fechado, podemos encontrar $\eta > 0$ tal que $B(w,\eta)\cap M_\varphi = \emptyset$. Como $z_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} w$, existe $N > 0$ tal que $z_n \in B(w,\eta)$, para todo $n > N$. Pela continuidade de ϕ em $B(w,\eta)\times\mathcal{U}$, temos que $\phi(z_n,u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(w,u)$. Vamos considerar dois casos. No primeiro, suponhamos que $\phi(w,u) < +\infty$. Dessa forma, podemos assumir que $\phi(z_n,u_n) < +\infty$, para todo n.

Suponhamos que $0 \leq t < \phi(w,u)$. Escolhemos $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \phi(w,u) - t$. Como $\phi(z_n,u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(w,u)$, podemos encontrar $N_1 > N$ tal que $|\phi(z_n,u_n) - \phi(w,u)| < \epsilon$ e, portanto, $t < \phi(w,u) - \epsilon < \phi(z_n,u_n)$, para todo $n > N_1$. Segue, da continuidade de φ, que

$$\widetilde{\varphi}(t,z_n,u_n) = \varphi(t,z_n,u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(t,w,u) = \widetilde{\varphi}(t,w,u).$$

Suponhamos, agora, que $\phi(w,u) < t < \phi(w,u) + \phi\left(w_1^+, u\cdot s_0\right)$. Novamente, podemos encontrar $N_2 > N$ tal que $|\phi(z_n,u_n) - \phi(w,u)| < t - \phi(w,u)$, para $n > N_2$, pois $\phi(z_n,u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(w,u)$. Assim, $\phi(z_n,u_n) < t$, para $n > N_2$. Por outro lado, como $0 < t - \phi(w,u) < \phi\left(w_1^+, u\cdot s_0\right)$, segue que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$(t - \phi(w,u) - \delta_1, t - \phi(w,u) + \delta_1) \cap \left(\phi\left(w_1^+, u\cdot s_0\right) - \delta_1, \phi\left(w_1^+, u\cdot s_0\right) + \delta_1\right) = \emptyset.$$

Podemos encontrar $N_3 > N$ tal que

$$t - \phi(z_n,u_n) \in (t - \phi(w,u) - \delta_1, t - \phi(w,u) + \delta_1), \qquad \text{para } n > N_3,$$

já que $\phi(z_n,u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(w,u)$.

Agora, $w_1^+ \notin M_\varphi$, pois $M_\varphi \cap I(M_\varphi) = \emptyset$. Como M_φ é fechado, existe $\eta_1 > 0$ tal que $B\left(w_1^+, \eta_1\right) \cap M_\varphi = \emptyset$. Disto, ϕ é contínua em $B\left(w_1^+, \eta_1\right) \times \mathcal{U}$. Notemos que $(z_n)_1^+ =$

$I\left(\left(z_n\right)_1\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I\left(w_1\right) = w_1^+$, pela continuidade de I. Isto implica que $\left(z_n\right)_1^+ \in B\left(w_1^+, \eta_1\right)$, para n suficientemente grande. Daí,

$$\phi\left(\left(z_n\right)_1^+, u_n \cdot \phi\left(z_n, u_n\right)\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi\left(w_1^+, u \cdot \phi\left(w, u\right)\right) = \phi\left(w_1^+, u \cdot s_0\right).$$

Logo, existe $N_4 > N$ tal que

$$\phi\left(\left(z_n\right)_1^+, u_n \cdot \phi\left(z_n, u_n\right)\right) \in \left(\phi\left(w_1^+, u \cdot s_0\right) - \delta_1, \phi\left(w_1^+, u \cdot s_0\right) + \delta_1\right), \qquad \text{para } n > N_4.$$

Assim, para $n > \max\{N_3, N_4\}$,

$$t - \phi\left(z_n, u_n\right) < \phi\left(\left(z_n\right)_1^+, u_n \cdot \phi\left(z_n, u_n\right)\right)$$

e, portanto, para $n > \max\{N_2, N_3, N_4\}$, segue que

$$\phi\left(z_n, u_n\right) < t < \phi\left(z_n, u_n\right) + \phi\left(\left(z_n\right)_1^+, u_n \cdot \phi\left(z_n, u_n\right)\right).$$

Pela continuidade de φ,

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}\left(t, z_n, u_n\right) &= \varphi\left(t - \phi\left(z_n, u_n\right), \left(z_n\right)_1^+, u_n \cdot \phi\left(z_n, u_n\right)\right) \\ &\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi\left(t - \phi\left(w, u\right), w_1^+, u \cdot \phi\left(w, u\right)\right) = \widetilde{\varphi}\left(t, w, u\right). \end{aligned}$$

Continuando com esse processo, mostramos que o resultado é válido para o caso em que $\phi\left(w, u\right) < +\infty$.

No segundo caso, suponhamos que $\phi\left(w, u\right) = +\infty$. Como $\phi\left(z_n, u_n\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \phi\left(w, u\right) = +\infty$, então, para qualquer $t \in [0, +\infty)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\phi\left(z_n, u_n\right) > t$, para $n \geq n_0$. Portanto, para $n \geq n_0$, segue, da continuidade de φ, que

$$\widetilde{\varphi}\left(t, z_n, u_n\right) = \varphi\left(t, z_n, u_n\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi\left(t, w, u\right) = \widetilde{\varphi}\left(t, w, u\right).$$

$\square$

Podemos, agora, apresentar as caracterizações de um ponto positivamente Poisson estável por $\widetilde{\varphi}$.

Teorema 3.2.1. *Seja $x \in M \backslash M_\varphi$. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *x é positivamente Poisson estável por $\widetilde{\varphi}$;*
2. *dada uma vizinhança U de x e dado $T \geq 0$, existem $t \geq T$ e $u \in \mathcal{U}$ tais que $\widetilde{\varphi}\left(t, x, u\right) \in U$;*
3. *$x \in \widetilde{\omega}\left(x\right)$;*
4. *$\overline{\widetilde{\mathcal{S}}\left(x\right)} = \widetilde{\omega}\left(x\right)$;*
5. *$\widetilde{\mathcal{S}}\left(x\right) \subset \widetilde{\omega}\left(x\right)$;*

6. para todo $\epsilon > 0$, existem $t \geq 1$ e $u \in \mathcal{U}$ tais que $\widetilde{\varphi}(t, x, u) \in B(x, \epsilon)$.

Demonstração.
As implicações $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ e $4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6$ são imediatas. Assim, resta provar $3 \Rightarrow 4$ e $6 \Rightarrow 1$. Suponhamos que a condição 3 seja válida. Evidentemente, $\widetilde{\omega}(x) \subset \overline{\widetilde{\mathcal{S}}(x)}$. Assim, resta provar a inclusão inversa. Seja $y \in \widetilde{\mathcal{S}}(x)$, então existe $\tau \geq 0$ e $u \in \mathcal{U}$ tais que $\widetilde{\varphi}(\tau, x, u) = y$. Por hipótese, $x \in \widetilde{\omega}(x)$, logo, existem sequências (u_n) em $\mathcal{U}$ e $t_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ tais que $\widetilde{\varphi}(t_n, x, u_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$. Pelo Lema 3.2.2, como $x \in M \backslash M_\varphi$, podemos encontrar uma sequência (ϵ_n) em $\mathbb{R}$, com $\epsilon_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, tal que

$$\widetilde{\varphi}(\tau + \epsilon_n, \widetilde{\varphi}(t_n, x, u_n), u) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\varphi}(\tau, x, u) = y.$$

Consideremos, agora, para cada n, a t_n-concatenação de u_n e u, que será denotada por w_n. Segue, do Corolário 1.1.1, que

$$\widetilde{\varphi}(\tau + \epsilon_n, \widetilde{\varphi}(t_n, x, u_n), u) = \widetilde{\varphi}(\tau + \epsilon_n + t_n, x, w_n)$$

e, então, $\widetilde{\varphi}(\tau + \epsilon_n + t_n, x, w_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} y$, onde $\tau + \epsilon_n + t_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Assim, $y \in \widetilde{\omega}(x)$, donde, $\widetilde{\mathcal{S}}(x) \subset \widetilde{\omega}(x)$. Como $\widetilde{\omega}(x)$ é fechado, segue que $\overline{\widetilde{\mathcal{S}}(x)} \subset \widetilde{\omega}(x)$ e, portanto, a condição 4 é válida.

Antes de provar que $6 \Rightarrow 1$, percebemos que não é difícil mostrar que $3 \Rightarrow 1$. De fato, sejam U uma vizinhança de x e $T \geq 0$. Por hipótese, $x \in \widetilde{\omega}(x)$, logo, existem sequências (u_n) em $\mathcal{U}$ e $t_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ tais que $\widetilde{\varphi}(t_n, x, u_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$. Isto implica que $x \in \overline{\bigcup_{u \in \mathcal{U}} \widetilde{\varphi}([T, +\infty), x, u)}$ e, portanto, $\bigcup_{u \in \mathcal{U}} \widetilde{\varphi}([T, +\infty), x, u) \cap U \neq \emptyset$. Assim, podemos encontrar $t \geq T$ e $u \in \mathcal{U}$ tais que $\widetilde{\varphi}(t, x, u) \in U$, donde, x é positivamente Poisson estável por $\widetilde{\varphi}$. Desse modo, para provar $6 \Rightarrow 1$, basta mostrar que $6 \Rightarrow 3$. Então, suponhamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existam $t_n \geq 1$ e $u_n \in \mathcal{U}$ tais que $\widetilde{\varphi}(t_n, x, u_n) \in B\left(x, \frac{1}{n}\right)$. Logo, $\widetilde{\varphi}(t_n, x, u_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$. Como $\mathcal{U}$ é compacto, podemos assumir que $u_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} u \in \mathcal{U}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, vamos considerar as seguintes notações:

$$s_0^n = \phi(x, u_n) \text{ e}$$

$$s_i^n = \phi\left(x_{u_n,i}^+, u_n \cdot \sum_{j=0}^{i-1} s_j^n\right), \text{ para } i = 1, 2, ...$$

Se existir uma subsequência (t_{n_k}) de (t_n) tal que $t_{n_k} \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, então $x \in \widetilde{\omega}(x)$ e o resultado fica provado. Assim, suponhamos que tal subsequência não exista, então (t_n) é uma sequência limitada e, por isso, podemos assumir que $t_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} t$, passando a uma subsequência se necessário. Como $t_n \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $t \geq 1$.

Suponhamos que $0 \leq t < s_0$. Nesse caso, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq t_n < s_0^n$, para $n > n_0$. Segue, da continuidade de φ, que

$$\widetilde{\varphi}(t_n, x, u_n) = \varphi(t_n, x, u_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \varphi(t, x, u) = \widetilde{\varphi}(t, x, u)$$

e, portanto, $\widetilde{\varphi}(t,x,u)=x$. Então, definimos $v_1=u$ e $v_2=(u,u)(t)$. Notemos que

$$\widetilde{\varphi}(2t,x,v_2)=\widetilde{\varphi}(t,\widetilde{\varphi}(t,x,u),u)=\widetilde{\varphi}(t,x,u)=x.$$

Agora, definimos $v_3=(u,u,u)(t,2t)$. Daí,

$$\widetilde{\varphi}(3t,x,v_3)=\widetilde{\varphi}(t,\widetilde{\varphi}(t,\widetilde{\varphi}(t,x,u),u),u)=\widetilde{\varphi}(t,\widetilde{\varphi}(t,x,u),u)=\widetilde{\varphi}(t,x,u)=x.$$

Continuando com esse processo, definimos $v_m=(u,...,u)(t,2t,...,(m-1)t)$, para $m=1,2,...$ e, então,

$$\widetilde{\varphi}(mt,x,v_m)=\widetilde{\varphi}(t,\widetilde{\varphi}(t,\ldots,\widetilde{\varphi}(t,x,u),\ldots,u),u)=x.$$

Obtemos, assim, uma sequência (v_m) em $\mathcal{U}$ tal que $\widetilde{\varphi}(mt,x,v_m)=x$, para todo $m\in\mathbb{N}$. Disto, segue que $x\in\widetilde{\omega}(x)$, pois $mt\overset{m\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ já que $mt\geq m$, para todo m.

Agora, suponhamos que $s_0\leq t<s_0+s_1$. Inicialmente, provemos que $s_0^k\leq t_k$, para uma quantidade infinita de índices k. De fato, suponhamos, por absurdo, que $t_k<s_0^k$, para uma quantidade infinita de índices k. Disto, $t\leq s_0$ e, portanto, $t=s_0$. Daí,

$$\widetilde{\varphi}(t_k,x,u_k)=\varphi(t_k,x,u_k)\overset{k\to+\infty}{\longrightarrow}\varphi(t,x,u)=\varphi(s_0,x,u)=x_{u,1},$$

donde, $x=x_{u,1}\in M_\varphi$, o que contradiz o fato de que $x\in M\backslash M_\varphi$. Portanto, $s_0^k\leq t_k$, para uma quantidade infinita de índices k.

Agora, $s_0^k\overset{k\to+\infty}{\longrightarrow}s_0$, já que ϕ é contínua em $(M\backslash M_\varphi)\times\mathcal{U}$. Então, pela continuidade de I e φ,

$$x^+_{u_k,1}=I\left(\varphi\left(s_0^k,x,u_k\right)\right)\overset{k\to+\infty}{\longrightarrow}I(\varphi(s_0,x,u))=x^+_{u,1}.$$

Utilizando a continuidade de ϕ em $(M\backslash M_\varphi)\times\mathcal{U}$ novamente, temos que

$$s_1^k=\phi\left(x^+_{u_k,1},u_k\cdot s_0^k\right)\overset{k\to+\infty}{\longrightarrow}\phi\left(x^+_{u,1},u\cdot s_0\right)=s_1.$$

Por outro lado, como $t<s_0+s_1$, então podemos encontrar $k_0\in\mathbb{N}$ tal que $t_k<s_0^k+s_1^k$, para $k>k_0$. Assim, $s_0^k\leq t_k<s_0^k+s_1^k$, para $k>k_0$ e, então,

$$\widetilde{\varphi}(t_k,x,u_k)=\varphi\left(t_k-s_0^k,x^+_{u_k,1},u_k\cdot s_0^k\right)\overset{k\to+\infty}{\longrightarrow}\varphi\left(t-s_0,x^+_{u,1},u\cdot s_0\right)=\widetilde{\varphi}(t,x,u),$$

donde, $\widetilde{\varphi}(t,x,u)=x$. É possível obter uma sequência (v_m) em $\mathcal{U}$ tal que $mt\overset{m\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ e $\widetilde{\varphi}(mt,x,v_m)=x$, para todo $m\in\mathbb{N}$, utilizando a mesma estratégia usada anteriormente. Portanto, $x\in\widetilde{\omega}(x)$.

Continuando com esse processo, fica provado que a condição 3 é válida. □

Observação 3.2.2. *Um ponto $x\in M$ tal que $x\in\widetilde{\omega}(x)$ também é chamado de* ***Poincaré recorrente com respeito a $\widetilde{\mathcal{F}}$*** *(veja [29]). Além disso, o fecho do conjunto formado por todos os pontos Poincaré recorrentes com respeito a $\widetilde{\mathcal{F}}$ é chamado de* ***centro de Birkhoff com respeito a $\widetilde{\mathcal{F}}$*** *do sistema de controle impulsivo.*

Analisemos, agora, a invariância dos pontos positivamente Poisson estáveis. No caso de sistemas dinâmicos convencionais, o conjunto formado por esses pontos é invariante. Isto quer dizer que se x é um ponto positivamente Poisson estável, então tx também o é, para todo $t \in \mathbb{R}$. Desejamos, assim, obter resultados similares a esse para um sistema de controle impulsivo. O primeiro resultado alcançado depende da escolha da função de controle $u \in \mathcal{U}$. Antes de apresentá-lo, vamos precisar definir um outro conceito de conjunto limite, agora com respeito a uma função de controle u dada.

Definição 3.2.2. *Sejam $x \in M$ e $u \in \mathcal{U}$. O **conjunto $\widetilde{\omega}$-limite de x com respeito a u** é definido por*

$$\widetilde{\omega}_u(x) = \left\{ y \in M : \text{existe uma sequência } t_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ tal que } \widetilde{\varphi}(t_n, x, u) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} y \right\}.$$

Evidentemente, $\bigcup\limits_{u \in \mathcal{U}_{cp}} \widetilde{\omega}_u(x) \subset \widetilde{\omega}(x)$.

Proposição 3.2.2. *Sejam $x \in M \backslash M_\varphi$ e $u \in \mathcal{U}$. Se $x \in \widetilde{\omega}_u(x)$, então $\widetilde{\varphi}(t, x, u)$ é positivamente Poisson estável por $\widetilde{\varphi}$, para todo $t \geq 0$.*

Demonstração. Sejam $x \in M \backslash M_\varphi$ e $u \in \mathcal{U}$. Por hipótese, $x \in \widetilde{\omega}_u(x)$, logo, existe uma sequência $t_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ tal que $\widetilde{\varphi}(t_n, x, u) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$. Seja $t \geq 0$. Afirmamos que $\widetilde{\varphi}(t, x, u) \in \widetilde{\omega}(\widetilde{\varphi}(t, x, u))$. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $s_n = t_n - t$. Podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_n \geq 0$, para $n > n_0$, já que $t_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Notemos que

$$\widetilde{\varphi}(t_n, x, u) = \widetilde{\varphi}(s_n + t, x, u) = \widetilde{\varphi}(s_n, \widetilde{\varphi}(t, x, u), u \cdot t)$$

e, portanto, $\widetilde{\varphi}(s_n, \widetilde{\varphi}(t, x, u), u \cdot t) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$. Segue, do Lema 3.2.2, que existe uma sequência (ϵ_n) em $\mathbb{R}$, com $\epsilon_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, tal que

$$\widetilde{\varphi}(t + \epsilon_n, \widetilde{\varphi}(s_n, \widetilde{\varphi}(t, x, u), u \cdot t), u) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\varphi}(t, x, u),$$

onde

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(t + \epsilon_n, \widetilde{\varphi}(s_n, \widetilde{\varphi}(t, x, u), u \cdot t), u) &= \widetilde{\varphi}(t + \epsilon_n + s_n, \widetilde{\varphi}(t, x, u), (u \cdot t, u)(s_n)) \\ &= \widetilde{\varphi}(t_n + \epsilon_n, \widetilde{\varphi}(t, x, u), (u \cdot t, u)(s_n)). \end{aligned}$$

Então,

$$\widetilde{\varphi}(t_n + \epsilon_n, \widetilde{\varphi}(t, x, u), (u \cdot t, u)(s_n)) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\varphi}(t, x, u),$$

com $t_n + \epsilon_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Logo, $\widetilde{\varphi}(t, x, u) \in \widetilde{\omega}(\widetilde{\varphi}(t, x, u))$ e, portanto, $\widetilde{\varphi}(t, x, u)$ é positivamente Poisson estável por $\widetilde{\varphi}$. $\square$

O segundo resultado obtido não depende da escolha de u e, portanto, garante a invariância positiva por $\widetilde{\mathcal{S}}$ do conjunto dos pontos positivamente Poisson estáveis por $\widetilde{\varphi}$. Contudo, é preciso adicionar uma condição adequada sobre a base de filtro $\widetilde{\mathcal{F}} = \left\{ \widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t} : t > 0 \right\}$. Para isso, consideremos a definição a seguir.

Definição 3.2.3. *Dizemos que a base de filtro* $\widetilde{\mathcal{F}} = \left\{ \widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t} : t > 0 \right\}$ *satisfaz a **hipótese*** H_3 *se, para quaisquer* $g \in \widetilde{\mathcal{S}}$ *e* $t > 0$*, existe* $\tau > 0$ *tal que* $\widetilde{\mathcal{S}}_{\geq \tau} \subset \widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t} g$.

Obtemos, assim, o seguinte resultado.

Proposição 3.2.3. *Suponhamos que a base de filtro* $\widetilde{\mathcal{F}}$ *satisfaça a hipótese* H_3*. Seja* $x \in M \backslash M_{\varphi}$*. Se* x *é positivamente Poisson estável por* $\widetilde{\varphi}$*, então* $\widetilde{\varphi}(t, x, u)$ *é positivamente Poisson estável por* $\widetilde{\varphi}$*, para quaisquer* $t \geq 0$ *e* $u \in \mathcal{U}$.

Demonstração. Seja $x \in M \backslash M_{\varphi}$. Por hipótese, x é positivamente Poisson estável por $\widetilde{\varphi}$. Isto significa que $x \in \widetilde{\omega}(x)$, logo, existem sequências (u_n) em $\mathcal{U}$ e $t_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ tais que $\widetilde{\varphi}(t_n, x, u_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$. Sejam $t \geq 0$ e $u \in \mathcal{U}$. Afirmamos que $\widetilde{\varphi}(t, x, u) \in \widetilde{\omega}(\widetilde{\varphi}(t, x, u))$. De fato, definimos $g = \widetilde{\varphi}(t, \cdot, u) \in \widetilde{\mathcal{S}}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $\tau_k > 0$ tal que $\widetilde{\mathcal{S}}_{\geq \tau_k} \subset \widetilde{\mathcal{S}}_{\geq k} g$, já que $\widetilde{\mathcal{F}}$ satisfaz a hipótese H_3. Escolhendo $n_k > k$ tal que $t_{n_k} \geq \tau_k$, temos que $\widetilde{\varphi}(t_{n_k}, x, u_{n_k}) \in \widetilde{\mathcal{S}}_{\geq \tau_k}(x) \subset \widetilde{\mathcal{S}}_{\geq k}(\widetilde{\varphi}(t, x, u))$. Daí, para cada $k \in \mathbb{N}$, existem $s_k \geq k$ e $v_k \in \mathcal{U}$ tais que $\widetilde{\varphi}(t_{n_k}, x, u_{n_k}) = \widetilde{\varphi}(s_k, \widetilde{\varphi}(t, x, u), v_k)$. Disto, $\widetilde{\varphi}(s_k, \widetilde{\varphi}(t, x, u), v_k) \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} x$. Segue, do Lema 3.2.2, que existe uma sequência (ϵ_k) em $\mathbb{R}$, com $\epsilon_k \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, tal que

$$\widetilde{\varphi}(t + \epsilon_k, \widetilde{\varphi}(s_k, \widetilde{\varphi}(t, x, u), v_k), u) \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\varphi}(t, x, u),$$

onde

$$\widetilde{\varphi}(t + \epsilon_k, \widetilde{\varphi}(s_k, \widetilde{\varphi}(t, x, u), v_k), u) = \widetilde{\varphi}(t + \epsilon_k + s_k, \widetilde{\varphi}(t, x, u), (v_k, u)(s_k)).$$

Então,

$$\widetilde{\varphi}(t + \epsilon_k + s_k, \widetilde{\varphi}(t, x, u), (v_k, u)(s_k)) \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\varphi}(t, x, u),$$

com $t + \epsilon_k + s_k \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Logo, $\widetilde{\varphi}(t, x, u) \in \widetilde{\omega}(\widetilde{\varphi}(t, x, u))$ e, portanto, $\widetilde{\varphi}(t, x, u)$ é positivamente Poisson estável por $\widetilde{\varphi}$. □

Encerramos esta seção mencionando alguns exemplos de pontos positivamente Poisson estáveis por $\widetilde{\varphi}$. É fácil perceber que pontos estacionários e pontos periódicos são positivamente Poisson estáveis por $\widetilde{\varphi}$. Em particular, os pontos Lyapunov estáveis também o são. De fato, recordemos que um ponto $x \in M$ é **Lyapunov estável** com respeito a $\widetilde{\varphi}$ e $u \in \mathcal{U}$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(y, x) < \delta$ implica $d(\widetilde{\varphi}(t, y, u), x) < \epsilon$, para todo $t \geq 0$. Assim, em particular, x é estacionário com respeito a $\widetilde{\varphi}$ e u, donde, x é positivamente Poisson estável por $\widetilde{\varphi}$. Por fim, notemos que

$$\widetilde{\omega}(x) = \bigcap_{t > 0} \overline{\widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t}(x)}.$$

Segue, então, que x é positivamente Poisson estável por $\widetilde{\varphi}$ se, e somente se, $x \in \overline{\widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t}(x)}$, para todo $t \geq 0$. Isto significa que x é um ponto controlável para todo semigrupo $\widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t}$, $t \geq 0$. Dizemos, então, que x é **assintoticamente controlável por** $\widetilde{\varphi}$ (veja [29, 33]).

3.3 Pontos não vagantes com respeito a $\widetilde{\varphi}$

Nesta seção, vamos estabelecer relações entre os pontos positivamente Poisson estáveis por $\widetilde{\varphi}$ e os pontos não vagantes com respeito a $\widetilde{\varphi}$.

Primeiramente, vamos introduzir o conceito de conjunto limite prolongacional para um sistema de controle impulsivo. No contexto geral de ações de semigrupos, esse conceito foi introduzido em [8].

Definição 3.3.1. *Seja $x \in M$. O* ***conjunto limite prolongacional de x com respeito a $\widetilde{\varphi}$*** *é definido por*

$$\widetilde{J}(x) = \left\{ \begin{array}{c} y \in M : \textit{existem sequências } (x_n) \textit{ em } M,\ (u_n) \textit{ em } \mathcal{U} \textit{ e } t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ \textit{tais que } x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \textit{ e } \widetilde{\varphi}(t_n, x_n, u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \end{array} \right\}.$$

Observação 3.3.1. *Notemos que*

$$\widetilde{J}(x) = \bigcap_{t>0} \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t} B(x, \varepsilon)}.$$

Como $\widetilde{\omega}(x) = \bigcap_{t>0} \overline{\widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t}(x)}$, uma relação imediata é a de que todo ponto positivamente Poisson estável por $\widetilde{\varphi}$ é não vagante com respeito a $\widetilde{\varphi}$, visto que $\widetilde{\omega}(x) \subset \widetilde{J}(x)$.

O teorema, a seguir, apresenta outras relações possíveis entre esses dois tipos de pontos.

Teorema 3.3.1. *Seja $x \in M$.*

1. *x é não vagante com respeito a $\widetilde{\varphi}$ se, e somente se, $x \in \widetilde{J}(x)$;*
2. *todo ponto $y \in \widetilde{\omega}(x)$ é não vagante com respeito a $\widetilde{\varphi}$;*
3. *seja P um subconjunto de M tal que todo ponto $y \in P$ é positivamente Poisson estável por $\widetilde{\varphi}$. Então, todo ponto $y \in \overline{P}$ é não vagante com respeito a $\widetilde{\varphi}$.*

Demonstração.

1. Suponhamos que x seja não vagante com respeito a $\widetilde{\varphi}$. Consideremos uma sequência (ϵ_n) em $(0, +\infty)$, com $\epsilon_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, e uma sequência (t_n) em $[0, +\infty)$, com $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Como x é não vagante com respeito a $\widetilde{\varphi}$, segue que, para cada n, $B(x, \epsilon_n)$ é positivamente recursivo com respeito a si próprio e $\widetilde{\varphi}$. Logo, para cada n, existem $\tau_n > t_n$, $u_n \in \mathcal{U}$ e $x_n \in B(x, \epsilon_n)$ tais que $\widetilde{\varphi}(\tau_n, x_n, u_n) \in B(x, \epsilon_n)$. Evidentemente, $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ e $\widetilde{\varphi}(\tau_n, x_n, u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, uma vez que $\epsilon_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Como $\tau_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, segue que $x \in \widetilde{J}(x)$.

   Reciprocamente, suponhamos que $x \in \widetilde{J}(x)$, logo, existem sequências (x_n) em M, (u_n) em $\mathcal{U}$ e $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ tais que $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ e $\widetilde{\varphi}(t_n, x_n, u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Sejam $T \geq 0$ e U uma vizinhança de x. Então, podemos encontrar $N > 0$ tal que $t_n > T$, $x_n \in U$ e $\widetilde{\varphi}(t_n, x_n, u_n) \in U$, para $n \geq N$. Portanto, x é não vagante com respeito a $\widetilde{\varphi}$.

2. Seja $y \in \widetilde{\omega}(x)$, logo, existem sequências (u_n) em $\mathcal{U}$ e $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ tais que $\widetilde{\varphi}(t_n, x, u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. Afirmamos que $y \in \widetilde{J}(y)$. De fato, como $t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, podemos assumir que $t_{n+1} - t_n \geq n$, para cada n, passando a uma subsequência se necessário. Para cada n, definimos $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ e $y_n = \widetilde{\varphi}(t_n, x, u_n)$. Assim, $\tau_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $y_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. Além disso,
$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(\tau_n, y_n, u_n \cdot t_n) &= \widetilde{\varphi}(\tau_n, \widetilde{\varphi}(t_n, x, u_n), u_n \cdot t_n) = \widetilde{\varphi}(\tau_n + t_n, x, u_n)\\ &= \widetilde{\varphi}(t_{n+1}, x, u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y.\end{aligned}$$
Portanto, $y \in \widetilde{J}(y)$. Segue, do item 1, que y é não vagante com respeito a $\widetilde{\varphi}$.

3. Seja $y \in \overline{P}$, logo, existe uma sequência (y_n) em P tal que $y_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. Assim, $y_n \in \widetilde{\omega}(y_n)$, para todo n, uma vez que cada y_n é positivamente Poisson estável por $\widetilde{\varphi}$. Daí, para cada n, existem $t_n > n$ e $u_n \in \mathcal{U}$ tais que $d(y_n, \widetilde{\varphi}(t_n, y_n, u_n)) \leq \frac{1}{n}$. Então,
$$d(y, \widetilde{\varphi}(t_n, y_n, u_n)) \leq d(y, y_n) + d(y_n, \widetilde{\varphi}(t_n, y_n, u_n)) \leq \frac{1}{n},$$
donde, $\widetilde{\varphi}(t_n, y_n, u_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$. Portanto, $y \in \widetilde{J}(y)$. Segue, do item 1, que y é não vagante com respeito a $\widetilde{\varphi}$.

□

Uma consequência imediata do Teorema 3.3.1 é dada pelo corolário a seguir.

Corolário 3.3.1. *Todos os pontos que pertencem ao centro de Birkhoff com respeito a $\widetilde{\mathcal{F}}$ são não vagantes com respeito a $\widetilde{\varphi}$. Em particular, se o centro de Birkhoff com respeito a $\widetilde{\mathcal{F}}$ coincide com M, então todo ponto em M é não vagante com respeito a $\widetilde{\varphi}$.*

O próximo teorema apresenta uma recíproca parcial para o Corolário 3.3.1.

Teorema 3.3.2. *Seja M um espaço métrico completo. Suponhamos que as seguintes condições sejam válidas:*

1. *todo ponto $x \in M$ é não vagante com respeito a $\widetilde{\varphi}$;*
2. *se $\widetilde{\varphi}(t, V, u) \cap V \neq \emptyset$, onde V é um subconjunto aberto de M, $t \geq 0$ e $u \in \mathcal{U}$, então $\widetilde{\varphi}(t, V, u) \cap V$ contém um subconjunto aberto;*
3. *para $W \subset M$, $\operatorname{diam}(\widetilde{\varphi}(t, W, u)) \leq \operatorname{diam}(W)$, se $t \geq 0$ e $u \in \mathcal{U}$.*

Então, o centro de Birkhoff com respeito a $\widetilde{\mathcal{F}}$ coincide com M.

Demonstração. Sejam $x \in M$ e $\epsilon > 0$. Para mostrar que o fecho do conjunto dos pontos positivamente Poisson estáveis por $\widetilde{\varphi}$ coincide com M, precisamos mostrar que existe um ponto p positivamente Poisson estável por $\widetilde{\varphi}$ tal que $p \in B(x, \epsilon)$. Vamos considerar dois casos. No primeiro, suponhamos que $x \notin M_\varphi$. Logo, podemos assumir que $B(x, \epsilon) \cap M_\varphi = \emptyset$, já que M_φ é fechado. Definimos $U_0 = B(x, \epsilon)$. Pela condição 1, x é não vagante com respeito a $\widetilde{\varphi}$. Segue que U_0 é positivamente recursivo com respeito a si próprio e $\widetilde{\varphi}$. Podemos, então, encontrar $t_1 > 1$ e $u_1 \in \mathcal{U}$ tais que $\widetilde{\varphi}(t_1, U_0, u_1) \cap U_0 \neq \emptyset$. Segue, da condição 2, que $\widetilde{\varphi}(t_1, U_0, u_1) \cap U_0$ contém um subconjunto aberto. Assim, podemos escolher $z_1 \in \widetilde{\varphi}(t_1, U_0, u_1) \cap U_0$ e $\epsilon_1 < \frac{1}{2}$ tais que

$$U_1 = B(z_1, \epsilon_1) \subset \widetilde{\varphi}(t_1, U_0, u_1) \cap U_0 \quad \text{e} \quad \overline{U_1} \subset U_0.$$

Notemos que U_1 é também positivamente recursivo com respeito a si próprio e $\widetilde{\varphi}$, uma vez que z_1 é não vagante com respeito a $\widetilde{\varphi}$. Logo, existem $t_2 > 2$ e $u_2 \in \mathcal{U}$ tais que $\widetilde{\varphi}(t_2, U_1, u_2) \cap U_1 \neq \emptyset$. Então, podemos novamente escolher $z_2 \in \widetilde{\varphi}(t_2, U_1, u_2) \cap U_1$ e $\epsilon_2 < \frac{1}{2^2}$ tais que

$$U_2 = B(z_2, \epsilon_2) \subset \widetilde{\varphi}(t_2, U_1, u_2) \cap U_1.$$

Podemos continuar com esse processo. Assim, dado $n \in \{1, 2, ...\}$, existem $t_n > n$, $u_n \in \mathcal{U}$, $z_n \in \widetilde{\varphi}(t_n, U_{n-1}, u_n) \cap U_{n-1}$ e $\epsilon_n < \frac{1}{2^n}$ tais que

$$U_n = B(z_n, \epsilon_n) \subset \widetilde{\varphi}(t_n, U_{n-1}, u_n) \cap U_{n-1}.$$

Como $U_n \supset U_{n+1}$, segue que $\overline{U_n} \supset \overline{U_{n+1}}$, para todo $n = 0, 1, 2, ...$ Ainda, como diam $\left(\overline{U_n}\right) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ e M é completo, temos que $\bigcap \left\{\overline{U_n} : n = 0, 1, 2, ...\right\} = \{y\}$, com $y \in \overline{U_1} \subset U_0 = B(x, \epsilon)$.

Afirmamos que $y \in \widetilde{\omega}(y)$. De fato, inicialmente, notemos que $\widetilde{\varphi}\left(t_n, \overline{U_{n-1}}, u_n\right) \cap \overline{U_{n-1}} \neq \emptyset$, para cada n, visto que $\widetilde{\varphi}(t_n, U_{n-1}, u_n) \cap U_{n-1} \neq \emptyset$. Assim, para cada n, podemos escolher $a_n \in \widetilde{\varphi}\left(t_n, \overline{U_{n-1}}, u_n\right) \cap \overline{U_{n-1}}$. Como $y \in \overline{U_{n-1}}$, segue, da condição 3, que

$$\begin{aligned} d(\widetilde{\varphi}(t_n, y, u_n), y) &\leq d(\widetilde{\varphi}(t_n, y, u_n), a_n) + d(a_n, y) \\ &\leq \text{diam}\left(\widetilde{\varphi}\left(t_n, \overline{U_{n-1}}, u_n\right)\right) + \text{diam}\left(\overline{U_{n-1}}\right) \\ &\leq 2\text{diam}\left(\overline{U_{n-1}}\right) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Isto significa que $\widetilde{\varphi}(t_n, y, u_n) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} y$, com $t_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Logo, $y \in \widetilde{\omega}(y)$. Isto mostra que y é um ponto positivamente Poisson estável por $\widetilde{\varphi}$ tal que $y \in B(x, \epsilon)$ e o resultado fica provado.

No segundo caso, suponhamos que $x \in M_\varphi$. Seja $u \in \mathcal{U}$. Escolhemos $\theta > 0$ tal que $\widetilde{\varphi}(\theta, x, u) = \varphi(\theta, x, u) \in B(x, \epsilon) \backslash M_\varphi$. Definimos $a = \widetilde{\varphi}(\theta, x, u)$. Notemos que existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $B(a, \epsilon_1) \subset B(x, \epsilon)$, já que $a \in B(x, \epsilon)$. Ainda, como $a \notin M_\varphi$ e M_φ é fechado, podemos assumir que $B(a, \epsilon_1) \cap M_\varphi = \emptyset$. Assim, pelo caso anterior, existe um ponto b positivamente Poisson estável por $\widetilde{\varphi}$ tal que $b \in B(a, \epsilon_1) \subset B(x, \epsilon)$. Isto finaliza a prova para o segundo caso e completa a demonstração. □

3.4 Teorema da Recorrência de Poincaré

Para encerrar este capítulo, apresentamos uma versão do conhecido Teorema da Recorrência de Poincaré para sistemas de controle impulsivos. Para o caso de sistemas dinâmicos convencionais, esse teorema pode ser encontrado em [21]. Já no contexto geral de ações de semigrupos, nos referimos a [29].

Primeiramente, vamos introduzir algumas definições relacionadas ao conceito de medida.

Definição 3.4.1. *Seja μ uma medida sobre a variedade M a valores reais. Dizemos que μ é*

1. ***invariante por*** $\widetilde{\mathcal{S}}$ *se, para todo subconjunto mensurável A de M, tivermos*
$$\mu(A) = \mu\left(\widetilde{\varphi}_t^u(A)\right) = \mu\left(\left(\widetilde{\varphi}_t^u\right)^{-1}(A)\right), \quad \textit{para quaisquer } t \geq 0 \textit{ e } u \in \mathcal{U},$$
onde $\widetilde{\varphi}_t^u(A) = \{\widetilde{\varphi}(t,x,u) : x \in A\}$ *e* $\left(\widetilde{\varphi}_t^u\right)^{-1}(A) = \{z \in M : \widetilde{\varphi}(t,z,u) \in A\}$*;*

2. ***positiva*** *se, para todo subconjunto mensurável A de M, tivermos $\mu(A) \geq 0$.*

Definição 3.4.2. *Dizemos que uma medida positiva μ é* ***normalizada*** *se $\mu(M) = 1$.*

A seguir, apresentamos o Teorema da Recorrência de Poincaré para sistemas de controle impulsivos.

Teorema 3.4.1. *Seja μ uma medida invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$ e normalizada sobre M. Então, quase todo ponto em M é positivamente Poisson estável por $\widetilde{\varphi}$, ou seja, se E denota o conjunto dos pontos em M que não são positivamente Poisson estáveis por $\widetilde{\varphi}$, então $\mu(E) = 0$.*

Demonstração. Sejam A um subconjunto mensurável de M tal que $\mu(A) > 0$ e $u \in U$ uma função de controle constante. Para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$, definimos $A_n = \left(\widetilde{\varphi}_n^u\right)^{-1}(A)$. Agora, definimos

$$A_{0,1} = A_0 \cap A_1, \ \ldots \ , A_{0,n} = A_0 \cap A_n, \ \ldots \ , A_{0,\infty} = A_0 \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{0,i}\right),$$

$$A_{1,2} = A_1 \cap A_2, \ \ldots \ , A_{1,n} = A_1 \cap A_n, \ \ldots \ , A_{1,\infty} = A_1 \backslash \left(\bigcup_{i=2}^{\infty} A_{1,i}\right),$$

$$\vdots$$

Afirmamos que $\mu(A_{0,\infty}) = 0$. De fato, suponhamos, por absurdo, que $\mu(A_{0,\infty}) = \ell > 0$. Como u é constante,

$$\begin{aligned} a \in \left(\widetilde{\varphi}_1^u\right)^{-1}\left(\left(\widetilde{\varphi}_i^u\right)^{-1}(A)\right) &\Leftrightarrow \widetilde{\varphi}(1,a,u) \in \left(\widetilde{\varphi}_i^u\right)^{-1}(A) \\ &\Leftrightarrow \widetilde{\varphi}(i, \widetilde{\varphi}(1,a,u), u) \in A \overset{\text{Corolário 1.1.1}}{\Leftrightarrow} \widetilde{\varphi}(i+1, a, (u,u)(1)) \in A \\ &\Leftrightarrow \widetilde{\varphi}(i+1,a,u) \in A \Leftrightarrow a \in \left(\widetilde{\varphi}_{i+1}^u\right)^{-1}(A) \end{aligned}$$

e, portanto, $\left(\widetilde{\varphi}_1^u\right)^{-1}\left(\left(\widetilde{\varphi}_i^u\right)^{-1}(A)\right) = \left(\widetilde{\varphi}_{i+1}^u\right)^{-1}(A)$, para todo $i = 1, 2, \ldots$. Daí, para todo $i = 1, 2, \ldots$, segue que

$$\left(\widetilde{\varphi}_1^u\right)^{-1}(A_i) = \left(\widetilde{\varphi}_1^u\right)^{-1}\left(\left(\widetilde{\varphi}_i^u\right)^{-1}(A)\right) = \left(\widetilde{\varphi}_{i+1}^u\right)^{-1}(A) = A_{i+1}$$

e, então,

$$\begin{aligned}(\widetilde{\varphi}_1^u)^{-1}(A_{0,i}) &= (\widetilde{\varphi}_1^u)^{-1}(A_0 \cap A_i) = (\widetilde{\varphi}_1^u)^{-1}(A_0) \cap (\widetilde{\varphi}_1^u)^{-1}(A_i) \\ &= (\widetilde{\varphi}_1^u)^{-1}(A) \cap (\widetilde{\varphi}_1^u)^{-1}(A_i) = A_1 \cap A_{i+1} = A_{1,i+1}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}(\widetilde{\varphi}_1^u)^{-1}(A_{0,\infty}) &= (\widetilde{\varphi}_1^u)^{-1}\left(A_0 \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{0,i}\right)\right) = (\widetilde{\varphi}_1^u)^{-1}(A_0) \backslash (\widetilde{\varphi}_1^u)^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{0,i}\right) \\ &= (\widetilde{\varphi}_1^u)^{-1}(A) \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (\widetilde{\varphi}_1^u)^{-1}(A_{0,i})\right) = A_1 \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{1,i+1}\right) \\ &= A_1 \backslash \left(\bigcup_{i=2}^{\infty} A_{1,i}\right) = A_{1,\infty}.\end{aligned}$$

De modo análogo, mostramos que

$$(\widetilde{\varphi}_n^u)^{-1}(A_{0,\infty}) = A_{n,\infty}, \qquad n = 1, 2, ...$$

Como μ é invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$, temos que

$$\mu(A_{n,\infty}) = \mu\left((\widetilde{\varphi}_n^u)^{-1}(A_{0,\infty})\right) = \mu(A_{0,\infty}) = \ell > 0, \qquad n = 1, 2, ...$$

Por construção, para cada $j = 0, 1, 2, ...$, temos que $A_{j,\infty} \cap A_i = \emptyset$, para $i = j+1, j+2, ...$ Como $A_{i,\infty} \subset A_i$, segue que $A_{j,\infty} \cap A_{i,\infty} = \emptyset$, para $i = j+1, j+2, ...$ Portanto, $\{A_{i,\infty}\}$ é uma coleção enumerável de conjuntos mensuráveis disjuntos e, por isso, temos que

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_{i,\infty}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_{i,\infty}) = +\infty,$$

visto que $\mu(A_{i,\infty}) = \ell > 0$, para todo $i = 0, 1, 2, ...$ Isto contradiz o fato de que $\mu(M) = 1$. Portanto, $\mu(A_{0,\infty}) = 0$.

Consideremos, agora, uma base enumerável $\{U^{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ de vizinhanças em M. Para cada $m = 1, 2, ...$, definimos $U_n^{(m)} = (\widetilde{\varphi}_n^u)^{-1}\left(U^{(m)}\right)$, $n = 0, 1, 2, ...$ Agora, para cada $m = 1, 2, ...$, definimos

$$U_{0,1}^{(m)} = U_0^{(m)} \cap U_1^{(m)}, \ \ldots, \ U_{0,n}^{(m)} = U_0^{(m)} \cap U_n^{(m)}, \ \ldots, \ U_{0,\infty}^{(m)} = U_0^{(m)} \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_{0,i}^{(m)}\right),$$

$$U_{1,2}^{(m)} = U_1^{(m)} \cap U_2^{(m)}, \ \ldots, \ U_{1,n}^{(m)} = U_1^{(m)} \cap U_n^{(m)}, \ \ldots, \ U_{1,\infty}^{(m)} = U_1^{(m)} \backslash \left(\bigcup_{i=2}^{\infty} U_{1,i}^{(m)}\right),$$

$$\vdots$$

Como fizemos anteriormente, podemos concluir que $\mu\left(U_{0,\infty}^{(m)}\right) = 0$, para todo $m = 1, 2, ...$

Agora, definimos $\mathcal{E} = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_{0,\infty}^{(m)}$. Evidentemente, $\mu(\mathcal{E}) = 0$. Afirmamos que todo ponto em $M \backslash \mathcal{E}$ é positivamente Poisson estável por $\widetilde{\varphi}$. De fato, seja $p \in M \backslash \mathcal{E}$. Então, $p \notin U_{0,\infty}^{(m)}$, para todo $m = 1, 2, \ldots$. Seja $U^{(k)}$ uma vizinhança de p. Em particular, $p \notin U_{0,\infty}^{(k)}$. Contudo,

$$\begin{aligned} U_{0,\infty}^{(k)} &= U_0^{(k)} \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_{0,i}^{(k)} \right) = U_0^{(k)} \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \left(U_0^{(k)} \cap U_i^{(k)} \right) \right) \\ &= U^{(k)} \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \left(U^{(k)} \cap U_i^{(k)} \right) \right) = U^{(k)} \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \left(U^{(k)} \cap \left(\widetilde{\varphi}_i^u\right)^{-1} \left(U^{(k)} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Logo, existe $r \geq 1$ tal que $p \in \left(\widetilde{\varphi}_r^u\right)^{-1} \left(U^{(k)} \right)$ e, por isso, $\widetilde{\varphi}(r, p, u) \in U^{(k)}$. Portanto, p é positivamente Poisson estável por $\widetilde{\varphi}$, pelo Teorema 3.2.1.

Finalmente, se E denota o conjunto dos pontos em M que não são positivamente Poisson estáveis por $\widetilde{\varphi}$, segue que $E \subset \mathcal{E}$ e, por isso, $\mu(E) \leq \mu(\mathcal{E}) = 0$. Portanto, $\mu(E) = 0$. $\square$

Agora, suponhamos que μ seja uma medida de Radon sobre M. Seja N um subconjunto de M dado pela união de todos os subconjuntos abertos U de M tais que $\mu(U) = 0$. Temos, então, que N é aberto e $\mu(N) = 0$. Chamamos de **suporte** de μ o complementar do conjunto N, que será denotado por $\mathrm{supp}(\mu)$.

Agora, seja V um subconjunto aberto de M tal que $V \backslash N \neq \emptyset$. Afirmamos que $\mu(V) > 0$. De fato, suponhamos, por absurdo, que $\mu(V) = 0$. Isto implica que $V \subset N$ e, por isso, $V \backslash N = \emptyset$, o que é uma contradição. Portanto, $\mu(V) > 0$.

Finalizamos esta seção apresentando uma consequência do Teorema da Recorrência de Poincaré.

Corolário 3.4.1. *Suponhamos que μ seja uma medida de Radon. Denotemos por P o subconjunto de M formado por todos os pontos positivamente Poisson estáveis por $\widetilde{\varphi}$. Então, $\mathrm{supp}(\mu) \subset \overline{P}$. Em particular, se $\mu(U) > 0$, para qualquer subconjunto não vazio aberto U de M, então P é denso em M, ou seja, o centro de Birkhoff com respeito a $\widetilde{\mathcal{F}}$ coincide com M.*

Demonstração. Consideremos o conjunto $U = M \backslash \overline{P}$. Evidentemente, U é aberto. Pelo Teorema 3.4.1, temos que $\mu(P) = 1$ e, portanto, $\mu\left(\overline{P}\right) = 1$. Disto, segue que $\mu(U) = 0$, donde, $U \subset N$. Portanto, $\mathrm{supp}(\mu) = M \backslash N \subset M \backslash U = \overline{P}$. $\square$

Capítulo

4

Ações de semigrupos impulsivas

Motivados pelos sistemas de controle afins impulsivos, encerramos nosso trabalho com um capítulo dedicado ao estudo de ações de semigrupos impulsivas. A definição para esse tipo de ação também segue a formulação estabelecida por Kaul, que considera um conjunto impulsivo M_π junto com uma função impulsiva $I : M_\pi \to M$. O espaço escolhido para se trabalhar é o espaço de Tychonoff, que possui propriedades análogas aos espaços métricos, devido à existência de uma família admissível de coberturas abertas. Desenvolvemos, então, resultados com respeito à invariância e estabilidade para ações de semigrupos impulsivas.

4.1 Ações de semigrupos impulsivas

A primeira seção deste capítulo é destinada à apresentação de uma ação de semigrupo impulsiva. Introduzimos as definições básicas e as notações utilizadas.

Começamos apresentando a definição de uma ação de semigrupo contínua, a partir da qual será construída uma ação de semigrupo impulsiva.

Sejam $\mathcal{S}$ um monóide topológico com identidade 1 e $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$ o espaço de todas as aplicações contínuas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{S}$ munido com a topologia compacto-aberta. Denotemos por $\mathcal{H}(\mathbb{R}^+, \mathcal{S}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$ o subespaço de todos os homomorfismos de monóides contínuos. Suponhamos que exista um conjunto $\Gamma \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$ que forneça um conjuto gerador para $\mathcal{S}$, ou seja,

$$\mathcal{S} = \{\gamma_1(t_1)\ldots\gamma_n(t_n) : \gamma_i \in \Gamma, t_i \geq 0, n \in \mathbb{N}\}.$$

Sejam M um espaço topológico e $\mathcal{T}(M)$ o semigrupo de transformações de M munido com a operação composição. Seja $\mathcal{C}(M) \subset \mathcal{T}(M)$ o subsemigrupo de transformações contínuas de M.

Definição 4.1.1. *Uma **ação contínua** de $\mathcal{S}$ sobre M é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \pi \ : \ & \mathcal{S} \times M \to M \\ & (g, x) \mapsto \pi(g, x) = gx \end{aligned}$$

contínua satisfazendo as seguintes condições:

1. $\pi(1,x) = x$, *para todo* $x \in M$;

2. $\pi(gh,x) = \pi(g,\pi(h,x))$, *para quaisquer* $x \in M$ *e* $g,h \in \mathcal{S}$.

Neste caso, dizemos que $\mathcal{S}$ ***age continuamente*** *em* M.

Usamos a notação $(M,\mathcal{S},\pi)$ para indicar uma ação contínua π de $\mathcal{S}$ sobre M.
Para cada $g \in \mathcal{S}$, consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \pi_g \ : \ & M \to M \\ & x \mapsto \pi_g(x) = \pi(g,x). \end{aligned}$$

Notemos que

$$\pi_{gh}(x) = \pi(gh,x) = \pi(g,\pi(h,x)) = \pi(g,\pi_h(x)) = \pi_g(\pi_h(x)) = \pi_g \circ \pi_h(x), \quad x \in M.$$

Desse modo, podemos representar $\mathcal{S}$ como um subsemigrupo de $\mathcal{C}(M)$.
Sejam A um subconjunto de $\mathcal{S}$ e X um subconjunto de M. Definimos

$$AX = \pi(A \times X) = \{y \in M : \text{ existem } g \in A \text{ e } x \in X \text{ tais que } gx = y\} \text{ e}$$

$$A^*X = \bigcup_{g \in A} \pi_g^{-1}(X) = \{y \in M : \text{ existem } g \in A \text{ e } x \in X \text{ tais que } gy = x\}.$$

Em particular, para $g \in \mathcal{S}$ e $x \in M$, definimos

$$gx = \pi(g,x) \qquad \text{e} \qquad g^*x = \pi_g^{-1}(x).$$

Seja $x \in M$. Os conjuntos

$$\mathcal{S}(x) = \{y \in M : \text{ existe } g \in \mathcal{S} \text{ tal que } gx = y\} \text{ e}$$

$$\mathcal{S}^*(x) = \{y \in M : \text{ existe } g \in \mathcal{S} \text{ tal que } gy = x\}$$

são denominados **$\mathcal{S}$-órbita** e **$\mathcal{S}$-órbita regressiva** de x, respectivamente.
A partir da ação contínua $(M,\mathcal{S},\pi)$, definimos a ação de semigrupo impulsiva.

Definição 4.1.2. *Uma* ***ação de semigrupo impulsiva*** $(M,\mathcal{S},\pi,\Gamma,M_\pi,I)$ *consiste de uma ação de semigrupo contínua* $(M,\mathcal{S},\pi)$ *junto com um conjunto gerador* $\Gamma \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^+,\mathcal{S})$, *um subconjunto não vazio e fechado* M_π *de* M *tal que, para cada* $x \in M_\pi$ *e cada* $\gamma \in \Gamma$, *existe um* $\epsilon_{x,\gamma} > 0$ *tal que*

$$\gamma((0,\epsilon_{x,\gamma}))^* x \cap M_\pi = \emptyset \quad e \quad \gamma((0,\epsilon_{x,\gamma}))\, x \cap M_\pi = \emptyset,$$

e uma aplicação contínua $I : M_\pi \to M$. *O conjunto* M_π *é chamado de* ***conjunto impulsivo*** *e a aplicação* I *é chamada de* ***função impulsiva***.

Para cada $x \in M$ e cada $\gamma \in \Gamma$, definimos o conjunto

$$M_{\gamma}^{+}(x) = \gamma((0,+\infty))\, x \cap M_{\pi}.$$

Se $M_{\gamma}^{+}(x) \neq \emptyset$, então existe $s > 0$ tal que $\gamma(s)\, x \in M_{\pi}$ e $\gamma(t)\, x \notin M_{\pi}$, para todo $t \in (0,s)$. Essa propriedade nos permite definir uma função $\phi_{\gamma} : M \to (0,+\infty]$ dada por

$$\phi_{\gamma}(x) = \begin{cases} s, \text{ se } \gamma(s)\, x \in M_{\pi} \text{ e } \gamma(t)\, x \notin M_{\pi}, \text{ para } t \in (0,s) \\ +\infty, \text{ se } M_{\gamma}^{+}(x) = \emptyset. \end{cases}$$

Se $\phi_{\gamma}(x) < +\infty$, o ponto $\gamma(\phi_{\gamma}(x))\, x \in M_{\pi}$ é chamado de **ponto impulsivo** de x com respeito a γ.

Além disso, para cada $x \in M$ e cada $\gamma \in \Gamma$, definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \pi_{\gamma} \; : \; & \mathbb{R}^{+} \times M \to M \\ & (t,x) \mapsto \pi_{\gamma}(t,x) = \gamma(t)\, x. \end{aligned}$$

Como $\gamma \in \Gamma \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^{+}, \mathcal{S})$, segue que $\gamma : \mathbb{R}^{+} \to \mathcal{S}$ é um homomorfismo de monóides contínuo. Assim, π_{γ} é uma aplicação contínua tal que

i) $\pi_{\gamma}(0,x) = \gamma(0)\, x = 1x = x$, para todo $x \in M$;

ii) $\pi_{\gamma}(t+s,x) = \gamma(t+s)\, x = \gamma(t)\gamma(s)\, x = \gamma(t)\, \pi_{\gamma}(s,x) = \pi_{\gamma}(t, \pi_{\gamma}(s,x))$, para quaisquer $x \in M$ e $t,s \in \mathbb{R}^{+}$.

Portanto, $\pi_{\gamma} : \mathbb{R}^{+} \times M \to M$ é um sistema semidinâmico sobre M.

Definimos, então, a **semitrajetória positiva impulsiva** de $x \in M$ com respeito a $\gamma \in \Gamma$ como sendo uma aplicação $\widetilde{\pi}_{\gamma}(\cdot,x)$ definida em um intervalo $J_{x,\gamma} \subset \mathbb{R}^{+}$, com $0 \in J_{x,\gamma}$, dada de modo indutivo pela seguinte regra:

- Se $M_{\gamma}^{+}(x) = \emptyset$, então definimos

  $$\widetilde{\pi}_{\gamma}(t,x) = \pi_{\gamma}(t,x),$$

  para todo $t \in \mathbb{R}^{+}$ e, nesse caso, $\phi_{\gamma}(x) = +\infty$.

- Se $M_{\gamma}^{+}(x) \neq \emptyset$, então definimos $\widetilde{\pi}_{\gamma}(\cdot,x)$ sobre $[0, \phi_{\gamma}(x)]$ pondo

  $$\widetilde{\pi}_{\gamma}(t,x) = \begin{cases} \pi_{\gamma}(t,x), \text{ se } 0 \le t < \phi_{\gamma}(x) \\ I(\pi_{\gamma}(\phi_{\gamma}(x), x)), \text{ se } t = \phi_{\gamma}(x). \end{cases}$$

  Utilizamos as seguintes notações:

  $$x_0^{+} = x,\ s_0 = \phi_{\gamma}\left(x_0^{+}\right),\ x_1 = \pi_{\gamma}\left(s_0, x_0^{+}\right) \text{ e } x_1^{+} = I\left(\pi_{\gamma}\left(s_0, x_0^{+}\right)\right).$$

  Nesse caso, $s_0 < +\infty$ e o processo continua, porém iniciando agora em x_1^{+}.

- Se $M_\gamma^+\left(x_1^+\right)=\emptyset$, então definimos

$$\widetilde{\pi}_\gamma\left(t,x\right)=\pi_\gamma\left(t-s_0,x_1^+\right),$$

para todo $t\in[s_0,+\infty)$ e, nesse caso, $\phi_\gamma\left(x_1^+\right)=+\infty$.

- Se $M_\gamma^+\left(x_1^+\right)\neq\emptyset$, então definimos $\widetilde{\pi}_\gamma\left(\cdot,x\right)$ sobre $\left[s_0,s_0+\phi_\gamma\left(x_1^+\right)\right]$ pondo

$$\widetilde{\pi}_\gamma\left(t,x\right)=\begin{cases}\pi_\gamma\left(t-s_0,x_1^+\right), \text{ se } s_0\leq t<s_0+\phi_\gamma\left(x_1^+\right)\\ I\left(\pi_\gamma\left(\phi_\gamma\left(x_1^+\right),x_1^+\right)\right), \text{ se } t=s_0+\phi_\gamma\left(x_1^+\right).\end{cases}$$

Utilizamos, então, as seguintes notações:

$$s_1=\phi_\gamma\left(x_1^+\right),\ x_2=\pi_\gamma\left(s_1,x_1^+\right) \text{ e } x_2^+=I\left(\pi_\gamma\left(s_1,x_1^+\right)\right).$$

Esse processo termina após um número finito de etapas se $M_\gamma^+\left(x_n^+\right)=\emptyset$, para algum $n\in\mathbb{N}$, ou ele pode continuar indefinidamente e, nesse caso, $M_\gamma^+\left(x_n^+\right)\neq\emptyset$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Denotamos, então,

$$s_n=\phi_\gamma\left(x_n^+\right),\ x_{n+1}=\pi_\gamma\left(s_n,x_n^+\right) \text{ e } x_{n+1}^+=I\left(\pi_\gamma\left(s_n,x_n^+\right)\right)$$

e $\widetilde{\pi}_\gamma\left(\cdot,x\right)$ é definido no intervalo $[0,T_\gamma\left(x\right))$, onde $T_\gamma\left(x\right)=\sum\limits_{i=0}^{+\infty}s_i$, pondo

$$\widetilde{\pi}_\gamma\left(t,x\right)=\begin{cases}\pi_\gamma\left(t-\sum\limits_{i=0}^{n-1}s_i,x_n^+\right), \text{ se } \sum\limits_{i=0}^{n-1}s_i\leq t<\sum\limits_{i=0}^{n-1}s_i+\phi_\gamma\left(x_n^+\right)\\ I\left(\pi_\gamma\left(\phi_\gamma\left(x_n^+\right),x_n^+\right)\right), \text{ se } t=\sum\limits_{i=0}^{n-1}s_i+\phi_\gamma\left(x_n^+\right).\end{cases}$$

Essa construção nos fornece uma aplicação $\widetilde{\gamma}:\Omega_\gamma\subset\mathbb{R}^+\times M\to M$, com $\Omega_\gamma=\bigcup\limits_{x\in M}[0,T_\gamma\left(x\right))\times\{x\}$, dada por $\widetilde{\gamma}\left(t,x\right)=\widetilde{\pi}_\gamma\left(t,x\right)$ que satisfaz a propriedade de semifluxo:

i) $\widetilde{\gamma}\left(0,x\right)=x$, para todo $x\in M$;

ii) $\widetilde{\gamma}\left(t+s,x\right)=\widetilde{\gamma}\left(t,\widetilde{\gamma}\left(s,x\right)\right)$, para quaisquer $x\in M$ e $t,s\in[0,T_\gamma\left(x\right))$ tais que $t+s\in[0,T_\gamma\left(x\right))$.

Para cada $\gamma\in\Gamma$ e $t\in\mathbb{R}^+$ tais que $t<T_\gamma\left(x\right)$, para algum $x\in M$, obtemos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned}\widetilde{\gamma}\left(t\right)\ :\ &\operatorname{dom}\left(\widetilde{\gamma}\left(t\right)\right)\to M\\ &x\mapsto\widetilde{\gamma}\left(t\right)x=\widetilde{\gamma}\left(t,x\right).\end{aligned}$$

Agora, definimos o semigrupo

$$\widetilde{\mathcal{S}}=\left\{\widetilde{\gamma}_1\left(t_1\right)\circ\cdots\circ\widetilde{\gamma}_n\left(t_n\right):\gamma_i\in\Gamma,t_i\geq0,n\in\mathbb{N}\right\},$$

onde a composição $\widetilde{\gamma}_1(t_1) \circ \cdots \circ \widetilde{\gamma}_n(t_n)$ faz sentido.

Para cada $x \in M$, definimos a **$\widetilde{\mathcal{S}}$-órbita de** x como

$$\widetilde{\mathcal{S}}(x) = \left\{ y \in M : \text{ existe } \sigma \in \widetilde{\mathcal{S}} \text{ tal que } \sigma(x) = y \right\}.$$

A partir de agora, assumimos que $T_\gamma(x) = +\infty$, para quaisquer $x \in M$ e $\gamma \in \Gamma$. Consequentemente, para cada $\gamma \in \Gamma$, a aplicação $\widetilde{\gamma}(t)$ está definida, para todo $t \in \mathbb{R}^+$, e $\operatorname{dom}(\widetilde{\gamma}(t)) = M$. Assim, definimos a ação de semigrupo $\left(M, \widetilde{\mathcal{S}}, \widetilde{\pi}\right)$ como sendo a aplicação

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi} \ &: \ \widetilde{\mathcal{S}} \times M \to M \\ &(\sigma, x) \mapsto \widetilde{\pi}(\sigma, x) = \sigma(x). \end{aligned}$$

Essa nova ação de semigrupo é obtida da anterior $(M, \mathcal{S}, \pi)$ tomando impulsos sobre os geradores de $\mathcal{S}$. O semigrupo $\widetilde{\mathcal{S}}$ é denominado **semigrupo impulsivo**.

Para encerrar, apresentamos alguns exemplos para essa seção.

Exemplo 4.1.1. *Consideremos um semifluxo $\pi : \mathbb{R}^+ \times M \to M$. Para $t \in \mathbb{R}^+$ fixo, seja $\pi_t : M \to M$ a aplicação dada por $\pi_t(x) = \pi(t, x)$. Definimos $\mathcal{S} = \{\pi_t : t \geq 0\}$. Notemos que o semifluxo π corresponde à ação de $\mathcal{S}$ sobre M. Agora, definimos*

$$\begin{aligned} \gamma \ &: \ \mathbb{R}^+ \to \mathcal{S} \\ &t \mapsto \gamma(t) = \pi_t. \end{aligned}$$

Então, $\Gamma = \{\gamma\} \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$ fornece um conjunto gerador para $\mathcal{S}$.

Exemplo 4.1.2. *Definimos um semifluxo multidimensional como uma ação de um cone convexo $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ sobre um espaço topológico M. Assim, existem n vetores linearmente independentes $u_1, ..., u_n \in \mathbb{R}^n$ tais que $\mathcal{S} = \{t_1 u_1 + \cdots + t_n u_n : t_i \geq 0\}$. Para cada $i = 1, ..., n$, definimos*

$$\begin{aligned} \gamma_i \ &: \ \mathbb{R}^+ \to \mathcal{S} \\ &t \mapsto \gamma_i(t) = t u_i. \end{aligned}$$

Então, $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_n\} \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$ fornece um conjunto gerador para $\mathcal{S}$.

Exemplo 4.1.3. *Sejam F uma família de campos de vetores sobre uma variedade diferenciável M e $\mathcal{S}$ o semigrupo do sistema de controle determinado por F, ou seja,*

$$\mathcal{S} = \{\exp(t_n X_n) \exp(t_{n-1} X_{n-1}) \cdots \exp(t_1 X_1) : X_j \in F, t_j \geq 0, n \in \mathbb{N}\}.$$

Para cada $X \in F$, definimos

$$\begin{aligned} \gamma_X \ &: \ \mathbb{R}^+ \to \mathcal{S} \\ &t \mapsto \gamma_X(t) = \exp(tX). \end{aligned}$$

Então, $\Gamma = \{\gamma_X : X \in F\} \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$ fornece um conjunto gerador para $\mathcal{S}$.

Exemplo 4.1.4. *Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Consideremos a aplicação exponencial* $\exp : \mathfrak{g} \to G$. *Logo, existem vizinhanças U da origem $0 \in \mathfrak{g}$ e V da identidade $1 \in G$ tais que $\exp|_U : U \to V$ é um difeomorfismo. Notemos que*

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n,$$

uma vez que G é conexo e V é uma vizinhança de $1 \in G$. Seja $g \in G$. Existe $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ tal que $g \in V^k$, ou seja, podemos encontrar $h_i \in V$, $i = 1, ..., k$, tais que $g = h_1 \cdots h_k$. Para cada $i = 1, ..., k$, existe $X_i \in U$ tal que $h_i = \exp(X_i)$. Assim,

$$g = \exp(X_1) \cdots \exp(X_k).$$

Isto implica que o semigrupo do sistema de controle sobre G determinado por U é um grupo.

Exemplo 4.1.5. *Em geral, se F é conjunto simétrico de campos de vetores sobre uma variedade M, então o semigrupo do sistema de controle determinado por F é um grupo que coincide com o grupo do sistema.*

Exemplo 4.1.6. *Sejam G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $F = \{X_1, ..., X_n\} \subset \mathfrak{g}$ um subconjunto finito de campos de vetores dois a dois comutativos. Consideremos uma ação de G sobre M. Então, a ação do semigrupo $\mathcal{S} = \{\exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_n X_n) : t_i \geq 0\}$ sobre M corresponde a um semifluxo multidimensional.*

4.2 Família admissível de coberturas abertas

O principal objetivo deste capítulo é reproduzir resultados provenientes de um sistema de controle impulsivo no contexto de ações de semigrupos impulsivas. Ao não trabalhar em um espaço métrico e considerar um espaço topológico arbitrário, é natural que se busque adequar esse novo espaço para que ele possua propriedades análogas aos espaços métricos. Um meio de se obter isso é através da existência de uma família admissível de coberturas abertas. Este conceito foi introduzido em [22] e ele fornece condições que viabilizam o estudo em um espaço topológico. Assim, nesta seção, apresentamos os conceitos básicos da teoria de família admissível de coberturas abertas que são necessários ao nosso estudo.

Comecemos com a definição de um refinamento.

Definição 4.2.1. *Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ coberturas abertas de um espaço topológico M. Dizemos que $\mathcal{V}$ é um* ***refinamento*** *de $\mathcal{U}$, e escrevemos $\mathcal{V} \preccurlyeq \mathcal{U}$, se, para cada $V \in \mathcal{V}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subset U$. Além disso, escrevemos $\mathcal{V} \preccurlyeq \frac{1}{2}\mathcal{U}$ se, para quaisquer $V, V' \in \mathcal{V}$, com $V \cap V' \neq \emptyset$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \cup V' \subset U$.*

A relação $\preccurlyeq$ é uma pré-ordem no conjunto das coberturas abertas de M.

Sejam $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de M e K um subconjunto compacto de M. Definimos

$$[\mathcal{U}, K] = \{U \in \mathcal{U} : K \cap U \neq \emptyset\}.$$

Definição 4.2.2. *Sejam V um subconjunto aberto de M, K um subconjunto compacto de M contido em V e $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de M. Dizemos que $\mathcal{U}$ é* ***K-subordinada*** *ao conjunto V se, para qualquer $U \in [\mathcal{U}, K]$, temos que $U \subset V$.*

Apresentamos, agora, a definição de uma família admissível de coberturas abertas.

Definição 4.2.3. *Dizemos que uma família $\mathcal{O}$ de coberturas abertas de M é* ***admissível*** *quando satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V} \preccurlyeq \frac{1}{2}\mathcal{U}$;*

2. *se V é um subconjunto aberto de M e K é um subconjunto compacto de M contido em V, então existe uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ que é K-subordinada a V;*

3. *dadas $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ que refina $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ simultaneamente.*

Dizemos que M é um ***espaço admissível*** *se existe uma família admissível de coberturas abertas em M.*

A partir desse momento, assumimos que M é um espaço de Tychonoff e, portanto, existe uma família admissível de coberturas abertas em M (veja [22, Proposição 3.19]).

Seja X um subconjunto de M. Em um espaço métrico, dado $\epsilon > 0$, já temos definido o conceito de ϵ-vizinhança como sendo o conjunto dado por $B(X, \epsilon) = \{x \in M : d_X(x) < \epsilon\}$. Um conceito análogo a esse em um espaço topológico é dado pelo conjunto apresentado na definição a seguir.

Definição 4.2.4. *Sejam X um subconjunto de M e $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de M. A* ***$\mathcal{U}$-vizinhança*** *de X é definida por*

$$\begin{aligned} B(X,\mathcal{U}) &= \{y \in M : \text{ existem } x \in X \text{ e } U \in \mathcal{U} \text{ tais que } x, y \in U\} \\ &= \bigcup \{U \in \mathcal{U} : U \cap X \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

O conjunto apresentado na definição anterior também é chamado de **estrela** de X com respeito à cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e é denotado por $St(X,\mathcal{U})$. Para $x \in M$, utilizamos a notação $B(x,\mathcal{U})$ ao invés de $B(\{x\},\mathcal{U})$. Evidentemente, $B(X,\mathcal{U})$ é um conjunto aberto.

Finalizando essa seção, colocamos aqui um resultado básico que será utilizado posteriormente.

Proposição 4.2.1. *Sejam V um subconjunto aberto de M e K um subconjunto compacto de M contido em V. Então, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $B(K,\mathcal{U}) \subset V$.*

Demonstração. Como $\mathcal{O}$ é uma família admissível de coberturas abertas de M, segue que existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ que é K-subordinada a V e, portanto, $B(K,\mathcal{U}) \subset V$. $\square$

4.3 Invariância e estabilidade

Reproduzimos, nesta seção, alguns resultados obtidos para uma ação de semigrupo impulsiva referentes à invariância e estabilidade. A partir de agora, consideremos dada uma ação de semigrupo impulsiva $(M, \mathcal{S}, \pi, \Gamma, M_\pi, I)$, onde M é um espaço de Tychonoff.

Vamos, inicialmente, introduzir os conceitos de invariância.

Definição 4.3.1. *Seja X um subconjunto de M. Dizemos que X é*

1. ***progressivamente invariante por** $\mathcal{S}$ se $\mathcal{S}(x) \subset X$, para todo $x \in X$;*

2. ***progressivamente invariante por** $\widetilde{\mathcal{S}}$ se $\widetilde{\mathcal{S}}(x) \subset X$, para todo $x \in X$;*

3. ***invariante por** I se $I(x) \in X$, para todo $x \in M_\pi \cap X$.*

Observação 4.3.1. *Para provar que $\widetilde{\mathcal{S}}(x) \subset X$, para todo $x \in X$, é necessário mostrar que*

$$\widetilde{\gamma}_1(t_1) \circ \cdots \circ \widetilde{\gamma}_n(t_n)\, x \in X,$$

para todo $x \in X$, onde $\gamma_i \in \Gamma$, $t_i \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Desse modo, basta considerar uma única aplicação $\gamma \in \Gamma$ e provar que $\widetilde{\gamma}(t)\, x \in X$, para quaisquer $x \in X$ e $t \geq 0$, já que, nesse caso, a composição anterior irá automaticamente pertencer ao conjunto X.

O primeiro teorema mostra que para que a invariância progressiva por $\mathcal{S}$ implique invariância progressiva por $\widetilde{\mathcal{S}}$, basta acrescentar a hipótese de invariância por I.

Teorema 4.3.1. *Seja X um subconjunto de M. Se X é progressivamente invariante por $\mathcal{S}$ e invariante por I, então X é progressivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $\gamma \in \Gamma$. Mostremos que $\widetilde{\gamma}(t)\, x \in X$, para todo $t \geq 0$. Para $t \in [0, \phi_\gamma(x))$, temos que

$$\widetilde{\gamma}(t)\, x = \gamma(t)\, x \in X,$$

pois X é progressivamente invariante por $\mathcal{S}$. Evidentemente, $x_1 = \gamma(\phi_\gamma(x))\, x \in X$. Segue, da invariância por I de X, que $\widetilde{\gamma}(\phi_\gamma(x))\, x = x_1^+ = I(x_1) \in X$. Consequentemente, para $t \in \left(\phi_\gamma(x), \phi_\gamma(x) + \phi_\gamma\left(x_1^+\right)\right)$, temos que

$$\widetilde{\gamma}(t)\, x = \gamma(t - \phi_\gamma(x))\, x_1^+ \in X.$$

Continuando com esse processo, obtemos que $\widetilde{\gamma}(t)\, x \in X$, para todo $t \geq 0$ e, portanto, X é progressivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$. □

Analisando a situação inversa, é possível garantir que a invariância progressiva por $\widetilde{\mathcal{S}}$ implique invariância progressiva por $\mathcal{S}$ considerando conjuntos fechados, como mostra o próximo teorema.

Teorema 4.3.2. *Seja X um subconjunto de M. Se X é fechado e progressivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$, então X é progressivamente invariante por $\mathcal{S}$.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $\gamma \in \Gamma$. Mostremos que $\gamma(t)\,x \in X$, para todo $t \geq 0$. Suponhamos, por absurdo, que exista $s \geq 0$ tal que $\gamma(s)\,x \notin X$. Definimos $t = \inf\{s : \gamma(s)\,x \notin X\}$. Por hipótese, X é progressivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Assim, em particular, $\gamma(\tau)\,x = \widetilde{\gamma}(\tau)\,x \in X$, para todo $\tau \in [0, \phi_\gamma(x))$. Logo, $t \geq \phi_\gamma(x) > 0$. Agora,

$$\gamma(\tau)\,x \in X, \text{ para todo } \tau \in [0,t) \in X \quad \text{e} \quad \gamma(t)\,x \in \overline{X} = X.$$

Afirmamos que existe $\delta > 0$ tal que $\gamma(\tau)\,x \in X$, para todo $\tau \in [0, t+\delta)$. De fato, para $\tau \in (t, t + \phi_\gamma(\gamma(t)\,x))$,

$$\gamma(t)\,x = \gamma(\tau - t)\,\gamma(t)\,x = \widetilde{\gamma}(\tau - t)\,\gamma(t)\,x \in X,$$

pois $\tau - t \in (0, \phi_\gamma(\gamma(t)\,x))$. Disto, segue que $\gamma(\tau)\,x \in X$, para todo $\tau \in [0, t + \phi_\gamma(\gamma(t)\,x))$, com $\phi_\gamma(\gamma(t)\,x) > 0$, o que contradiz a definição de t. Portanto, $\gamma(t)\,x \in X$, para todo $t \geq 0$, donde, X é progressivamente invariante por $\mathcal{S}$. □

Para uma componente conexa de um conjunto fechado, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.3.3. *Sejam X um subconjunto fechado e progressivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$ de M e E uma componente conexa invariante por I de X. Então, E é progressivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$.*

Demonstração. Sejam $x \in E$ e $\gamma \in \Gamma$. Pelo Teorema 4.3.2, temos que X é progressivamente invariante por $\mathcal{S}$, já que X é fechado e progressivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Como $x \in E \subset X$, segue que $\gamma(t)\,x \in X$, para todo $t \in [0, \phi_\gamma(x))$. Portanto, $\gamma(t)\,x \in E$, para todo $t \in [0, \phi_\gamma(x))$. Se $\phi_\gamma(x) = +\infty$, então $\gamma(t)\,x \in E$, para todo $t \in [0, +\infty)$, e $M_\gamma^+(x) = \emptyset$. Daí, $\widetilde{\gamma}(t)\,x = \gamma(t)\,x \in E$, para todo $t \in [0, +\infty)$, donde, E é progressivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Se $\phi_\gamma(x) < +\infty$, então $x_1 = \gamma(\phi_\gamma(x))\,x \in \overline{E} = E$. Como E é invariante por I, segue que $\widetilde{\gamma}(\phi_\gamma(x))\,x = I(x_1) \in E$. Continuando com esse processo, obtemos que $\widetilde{\gamma}(t)\,x \in E$, para todo $t \in [0, +\infty)$, concluindo que E é progressivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$. □

Introduzimos, agora, as noções de estabilidade de Lyapunov para uma ação de semigrupo contínua.

Definição 4.3.2. *Seja X um subconjunto de M. Dizemos que X é*

1. ***estável por** $\mathcal{S}$ se, para quaisquer $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $x \in X$, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{S}B(x, \mathcal{V}) \subset B(X, \mathcal{U})$;*

2. ***uniformemente estável por** $\mathcal{S}$ se, para toda $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{S}B(X, \mathcal{V}) \subset B(X, \mathcal{U})$;*

3. ***orbitalmente estável por** $\mathcal{S}$ se, para toda vizinhança U de X, existe uma vizinhança V progressivamente invariante por $\mathcal{S}$ de X com $V \subset U$;*

4. ***BH-equiestável por** $\mathcal{S}$ se, para quaisquer $x \in X$ e $y \notin X$, existem $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tais que $B(y, \mathcal{V}) \cap \mathcal{S}B(x, \mathcal{U}) = \emptyset$;*

5. ***equiestável*** $\mathcal{S}$ *se, para todo* $y \notin X$*, existe* $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ *tal que* $y \notin \overline{\mathcal{S}B(X,\mathcal{U})}$*.*

Recordemos que a BH-equiestabilidade significa a estabilidade no sentido de Bhatia e Hajek, como foi nomeada por Ciesielski ([14]).

De modo análogo, são obtidas as noções de estabilidade para uma ação de semigrupo impulsiva, substituindo $\mathcal{S}$ por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Podemos, então, relacionar os conceitos de invariância e estabilidade, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 4.3.4. *Seja* X *um subconjunto de* M*.*

1. *Se* X *é BH-equiestável por* $\widetilde{\mathcal{S}}$*, então* X *é progressivamente invariante por* $\widetilde{\mathcal{S}}$ *e invariante por* I*. Além disso, se* X *é também fechado, então* X *é progressivamente invariante por* $\mathcal{S}$*.*

2. *Se* X *é fechado e estável por* $\widetilde{\mathcal{S}}$*, então* X *é progressivamente invariante por* $\widetilde{\mathcal{S}}$*, progressivamente invariante por* $\mathcal{S}$ *e invariante por* I*.*

Demonstração.

1. Suponhamos, por absurdo, que X não seja progressivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Então, existem $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$ e $x \in X$ tais que $\sigma(x) \notin X$. Por hipótese, X é BH-equiestável por $\widetilde{\mathcal{S}}$, logo, existem $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tais que $B(\sigma(x), \mathcal{V}) \cap \widetilde{\mathcal{S}}B(x,\mathcal{U}) = \emptyset$. Isto é uma contradição, já que $\sigma(x) \in B(\sigma(x), \mathcal{V}) \cap \widetilde{\mathcal{S}}B(x,\mathcal{U})$. Portanto, X é progressivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

   Agora, suponhamos, por absurdo, que X não seja invariante por I. Logo, existe $x \in M_\pi \cap X$ tal que $I(x) \notin X$. Como X é BH-equiestável por $\widetilde{\mathcal{S}}$, existem $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tais que $B(I(x), \mathcal{V}) \cap \widetilde{\mathcal{S}}B(x,\mathcal{U}) = \emptyset$. Dado $\gamma \in \Gamma$, podemos encontrar $y \in M$ e $t > 0$ tais que
   $$\gamma(t)\, y = x \quad \text{e} \quad \gamma([0,t))\, y \cap M_\pi = \emptyset.$$
   Isto significa que $\phi_\gamma(y) = t$. Pela continuidade de γ, podemos encontrar $s \in [0,t)$ tal que $\gamma(s)\, y \in B(x,\mathcal{U})$.

   Afirmamos que $\phi_\gamma(\gamma(s)\, y) = t - s$. De fato, $\gamma(t-s)\gamma(s)\, y = \gamma(t)\, y = x \in M_\pi$ e, para qualquer $\tau \in (0, t-s)$, temos que $\gamma(\tau)\gamma(s)\, y = \gamma(\tau + s)\, y \notin M_\pi$, uma vez que $\tau + s < t$ e $\phi_\gamma(y) = t$. Portanto, $\phi_\gamma(\gamma(s)\, y) = t - s$. Daí,
   $$I(x) = I(\gamma(t)\, y) = I(\gamma(t-s)\gamma(s)\, y) = \widetilde{\gamma}(t-s)\gamma(s)\, y \in \widetilde{\mathcal{S}}B(x,\mathcal{U}),$$
   donde, $I(x) \in B(I(x), \mathcal{V}) \cap \widetilde{\mathcal{S}}B(x,\mathcal{U})$, o que contradiz $B(I(x), \mathcal{V}) \cap \widetilde{\mathcal{S}}B(x,\mathcal{U}) = \emptyset$. Portanto, X é invariante por I. Pelo Teorema 4.3.2, temos que se X é também fechado, então X é progressivamente invariante por $\mathcal{S}$. Isto finaliza a demonstração.

2. Sejam $x \in X$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Como X é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$, existe uma cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\widetilde{\mathcal{S}}B(x,\mathcal{V}) \subset B(X,\mathcal{U})$. Em particular, $\widetilde{\mathcal{S}}(x) \subset B(X,\mathcal{U})$. Segue que $\widetilde{\mathcal{S}}(x) \subset \bigcap \{B(X,\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathcal{O}\} = \overline{X} = X$. Portanto, X é progressivamente

invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Pelo Teorema 4.3.2, temos que X é progressivamente invariante por $\mathcal{S}$.

Resta mostrar que X é invariante por I. Sejam $x \in M_\pi \cap X$ e $\gamma \in \Gamma$. Podemos encontrar $y \in M$ e $t > 0$ tais que

$$\gamma(t)\, y = x \quad \text{e} \quad \gamma([0,t))\, y \cap M_\pi = \emptyset,$$

donde, $\phi_\gamma(y) = t$. Como X é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$, segue que, dada uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\widetilde{\mathcal{S}}B(x, \mathcal{V}) \subset B(X, \mathcal{U})$. Pela continuidade de γ, podemos encontrar $s \in [0,t)$ tal que $\gamma(s)\, y \in B(x, \mathcal{V})$. Utilizando a mesma estratégia apresentada no item 1, provamos que $\phi_\gamma(\gamma(s)\, y) = t - s$. Daí,

$$I(x) = I(\gamma(t)\, y) = I(\gamma(t-s)\,\gamma(s)\, y) = \widetilde{\gamma}(t-s)\,\gamma(s)\, y \in \widetilde{\mathcal{S}}B(x, \mathcal{V}) \subset B(X, \mathcal{U}),$$

donde, $I(x) \in \bigcap \{B(X, \mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathcal{O}\} = \overline{X} = X$. Portanto, X é invariante por I.

□

Apresentamos, agora, os resultados que relacionam os conceitos de estabilidade por $\mathcal{S}$ e $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Teorema 4.3.5. *Seja X um subconjunto uniformemente estável por $\mathcal{S}$ de M. Para todo $y \in M$, suponhamos que as seguintes condições sejam válidas:*

1. *se $y \in M_\pi$ e A é um subconjunto de M tal que $y \in A$ e $X \subset A$, então existe $\mathcal{Q} \in \mathcal{O}$, com $B(X, \mathcal{Q}) \subset A$, tal que $I(y) \in B(X, \mathcal{Q})$ e $y \notin B(X, \mathcal{Q})$;*

2. *se $y \in I(M_\pi)$, $\gamma \in \Gamma$, $\phi_\gamma(y) < +\infty$ e C é um subconjunto de M tal que $y \in C$ e $X \subset C$, então existe $\mathcal{R} \in \mathcal{O}$, com $B(X, \mathcal{R}) \subset C$, tal que $\gamma(\phi_\gamma(y))\, y \in B(X, \mathcal{R})$ e $y \notin B(X, \mathcal{R})$.*

Então, X é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Demonstração. Seja $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Por hipótese, X é uniformemente estável por $\mathcal{S}$, logo, existe uma cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{S}B(X, \mathcal{V}) \subset B(X, \mathcal{U})$. Seja $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$. Então, podemos escrever $\sigma = \widetilde{\gamma}_1(t_1) \circ \cdots \circ \widetilde{\gamma}_n(t_n)$, onde $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_i \in \Gamma$ e $t_i \geq 0$, para todo $i = 1, ..., n$. Afirmamos que $\widetilde{\gamma}_n(t_n)\, B(X, \mathcal{V}) \subset \mathcal{S}B(X, \mathcal{V})$. De fato, seja $x \in B(X, \mathcal{V})$. Se $\phi_{\gamma_n}(x) = +\infty$, então $\widetilde{\gamma}_n(t_n)\, x = \gamma_n(t_n)\, x \in \mathcal{S}B(X, \mathcal{V})$. Se $\phi_{\gamma_n}(x) < +\infty$, então $\widetilde{\gamma}_n(t_n)\, x = \gamma_n(t_n)\, x \in \mathcal{S}B(X, \mathcal{V})$, se $t_n \in [0, \phi_{\gamma_n}(x))$. Notemos que $x_{n,1} := \gamma_n(\phi_{\gamma_n}(x))\, x \in \mathcal{S}B(X, \mathcal{V})$. Segue, da hipótese 1, que existe $\mathcal{Q} \in \mathcal{O}$, com $B(X, \mathcal{Q}) \subset \mathcal{S}B(X, \mathcal{V})$, tal que $x^+_{n,1} := I(x_{n,1}) \in B(X, \mathcal{Q})$ e $x_{n,1} \notin B(X, \mathcal{Q})$. Desse modo, $x^+_{n,1} \in B(X, \mathcal{Q}) \subset \mathcal{S}B(X, \mathcal{V})$. Logo,

$$\widetilde{\gamma}_n(t_n)\, x = \gamma_n(t_n - \phi_{\gamma_n}(x))\, x^+_{n,1} \in \mathcal{S}(\mathcal{S}B(X, \mathcal{V})) \subset \mathcal{S}B(X, \mathcal{V}),$$

se $t_n \in \left[\phi_{\gamma_n}(x), \phi_{\gamma_n}(x) + \phi_{\gamma_n}\left(x^+_{n,1}\right)\right)$.

Por outro lado, como $x^+_{n,1} \in \mathcal{S}B(X, \mathcal{V})$, segue, da hipótese 2, que existe $\mathcal{R} \in \mathcal{O}$, com $B(X, \mathcal{R}) \subset \mathcal{S}B(X, \mathcal{V})$, tal que $x_{n,2} := \gamma_n\left(\phi_{\gamma_n}\left(x^+_{n,1}\right)\right) x^+_{n,1} \in B(X, \mathcal{R})$ e $x^+_{n,1} \notin B(X, \mathcal{R})$.

Desse modo, $x_{n,2} \in B(X,\mathcal{R}) \subset \mathcal{S}B(X,\mathcal{V})$. Segue, da hipótese 1, que existe $\mathcal{Q}' \in \mathcal{O}$, com $B(X,\mathcal{Q}') \subset \mathcal{S}B(X,\mathcal{V})$, tal que $x_{n,2}^{+} := I(x_{n,2}) \in B(X,\mathcal{Q}')$ e $x_{n,2} \notin B(X,\mathcal{Q}')$. Logo, $x_{n,2}^{+} \in B(X,\mathcal{Q}') \subset \mathcal{S}B(X,\mathcal{V})$ e, então,

$$\widetilde{\gamma}_n(t_n)\,x = \gamma_n\left(t_n - \left(\phi_{\gamma_n}(x) + \phi_{\gamma_n}\left(x_{n,1}^{+}\right)\right)\right)x_{n,2}^{+} \in \mathcal{S}\left(\mathcal{S}B(X,\mathcal{V})\right) \subset \mathcal{S}B(X,\mathcal{V}),$$

se $t_n \in \left[\phi_{\gamma_n}(x) + \phi_{\gamma_n}\left(x_{n,1}^{+}\right), \phi_{\gamma_n}(x) + \phi_{\gamma_n}\left(x_{n,1}^{+}\right) + \phi_{\gamma_n}\left(x_{n,2}^{+}\right)\right)$. Continuando com esse processo, obtemos $\widetilde{\gamma}_n(t_n)\,x \in \mathcal{S}B(X,\mathcal{V})$, donde, $\widetilde{\gamma}_n(t_n)\,B(X,\mathcal{V}) \subset \mathcal{S}B(X,\mathcal{V})$.

Agora, afirmamos que $\widetilde{\gamma}_{n-1}(t_{n-1})\,\mathcal{S}B(X,\mathcal{V}) \subset \mathcal{S}B(X,\mathcal{V})$. De fato, seja $y \in \mathcal{S}B(X,\mathcal{V})$. Se $\phi_{\gamma_{n-1}}(y) = +\infty$, então

$$\widetilde{\gamma}_{n-1}(t_{n-1})\,y = \gamma_{n-1}(t_{n-1})\,y \in \mathcal{S}\left(\mathcal{S}B(X,\mathcal{V})\right) \subset \mathcal{S}B(X,\mathcal{V}).$$

Suponhamos que $\phi_{\gamma_{n-1}}(y) < +\infty$. Temos que

$$\widetilde{\gamma}_{n-1}(t_{n-1})\,y = \gamma_{n-1}(t_{n-1})\,y \in \mathcal{S}\left(\mathcal{S}B(X,\mathcal{V})\right) \subset \mathcal{S}B(X,\mathcal{V}),$$

se $t_{n-1} \in \left[0, \phi_{\gamma_{n-1}}(y)\right)$. Notemos que

$$y_{n-1,1} := \gamma_{n-1}\left(\phi_{\gamma_{n-1}}(y)\right)y \in \mathcal{S}\left(\mathcal{S}B(X,\mathcal{V})\right) \subset \mathcal{S}B(X,\mathcal{V}).$$

Segue, da hipótese 1, que existe $\mathcal{Q}'' \in \mathcal{O}$, com $B(X,\mathcal{Q}'') \subset \mathcal{S}B(X,\mathcal{V})$, tal que $y_{n-1,1}^{+} := I(y_{n-1,1}) \in B(X,\mathcal{Q}'')$ e $y_{n-1,1} \notin B(X,\mathcal{Q}'')$. Desse modo, $y_{n-1,1}^{+} \in B(X,\mathcal{Q}'') \subset \mathcal{S}B(X,\mathcal{V})$. Disto, segue que

$$\widetilde{\gamma}_{n-1}(t_{n-1})\,y = \gamma_{n-1}\left(t_{n-1} - \phi_{\gamma_{n-1}}(y)\right)y_{n-1,1}^{+} \in \mathcal{S}\left(\mathcal{S}B(X,\mathcal{V})\right) \subset \mathcal{S}B(X,\mathcal{V}),$$

se $t_{n-1} \in \left[\phi_{\gamma_{n-1}}(y), \phi_{\gamma_{n-1}}(y) + \phi_{\gamma_{n-1}}\left(y_{n-1,1}^{+}\right)\right)$. Continuando com esse processo, obtemos $\widetilde{\gamma}_{n-1}(t_{n-1})\,y \in \mathcal{S}B(X,\mathcal{V})$, donde, $\widetilde{\gamma}_{n-1}(t_{n-1})\,\mathcal{S}B(X,\mathcal{V}) \subset \mathcal{S}B(X,\mathcal{V})$.

De modo análogo, mostramos que

$$\widetilde{\gamma}_{j-1}(t_{j-1})\,\mathcal{S}B(X,\mathcal{V}) \subset \mathcal{S}B(X,\mathcal{V}), \text{ para todo } j = 2, ..., n-1.$$

Isto implica que

$$\sigma(x) = \widetilde{\gamma}_1(t_1) \circ \cdots \circ \widetilde{\gamma}_n(t_n)\,x \in \mathcal{S}B(X,\mathcal{V}) \subset B(X,\mathcal{U}),$$

donde, $\widetilde{\mathcal{S}}B(X,\mathcal{V}) \subset B(X,\mathcal{U})$. Portanto, X é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. □

Teorema 4.3.6. *Seja X um subconjunto uniformemente estável por $\mathcal{S}$ de M. Suponhamos que exista uma cobertura aberta $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que $I(M_\pi \cap B(X,\mathcal{W})) \subset X$. Então, X é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Como $\mathcal{O}$ é admissível, podemos assumir que $\mathcal{U} \preccurlyeq \mathcal{W}$. Por hipótese, X é uniformemente estável por $\mathcal{S}$, logo, existe uma cobertura $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{S}B(X,\mathcal{V}) \subset B(X,\mathcal{U})$. Seja $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$. Então, podemos escrever $\sigma = \widetilde{\gamma}_1(t_1) \circ \cdots \circ \widetilde{\gamma}_n(t_n)$, onde $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_i \in \Gamma$ e $t_i \geq 0$, para todo $i = 1, ..., n$. Afirmamos que $\widetilde{\gamma}_n (t_n) B (X, \mathcal{V}) \subset \mathcal{S}B (X, \mathcal{V})$. De fato, seja $x \in B (X, \mathcal{V})$. Se $\phi_{\gamma_n} (x) = +\infty$, então

$$\widetilde{\gamma}_n (t_n) x = \gamma_n (t_n) x \in \mathcal{S}B (X, \mathcal{V}).$$

Suponhamos que $\phi_{\gamma_n} (x) < +\infty$. Temos que

$$\widetilde{\gamma}_n (t_n) x = \gamma_n (t_n) x \in \mathcal{S}B (X, \mathcal{V}),$$

se $t_n \in [0, \phi_{\gamma_n} (x))$. Notemos que

$$x_{n,1} := \gamma_n (\phi_{\gamma_n} (x)) x \in \mathcal{S}B (X, \mathcal{V}) \subset B (X, \mathcal{U}) \subset B (X, \mathcal{W}).$$

Por hipótese, segue que

$$x^+_{n,1} := I (x_{n,1}) \in I (M_\pi \cap B (X, \mathcal{W})) \subset X \subset B (X, \mathcal{V}).$$

Isto implica que

$$\widetilde{\gamma}_n (t_n) x = \gamma_n (t_n - \phi_{\gamma_n} (x)) x^+_{n,1} \in \mathcal{S}B (X, \mathcal{V}),$$

se $t_n \in \left[\phi_{\gamma_n} (x), \phi_{\gamma_n} (x) + \phi_{\gamma_n} \left(x^+_{n,1}\right)\right)$. Continuando com esse processo, obtemos que $\widetilde{\gamma}_n (t_n) x \in \mathcal{S}B (X, \mathcal{V})$, donde, $\widetilde{\gamma}_n (t_n) B (X, \mathcal{V}) \subset \mathcal{S}B (X, \mathcal{V})$.

Agora, afirmamos que $\widetilde{\gamma}_{n-1} (t_{n-1}) \mathcal{S}B (X, \mathcal{V}) \subset \mathcal{S}B (X, \mathcal{V})$. De fato, seja $y \in \mathcal{S}B (X, \mathcal{V})$. Se $\phi_{\gamma_{n-1}} (y) = +\infty$, então

$$\widetilde{\gamma}_{n-1} (t_{n-1}) y = \gamma_{n-1} (t_{n-1}) y \in \mathcal{S} (\mathcal{S}B (X, \mathcal{V})) \subset \mathcal{S}B (X, \mathcal{V}).$$

Suponhamos que $\phi_{\gamma_{n-1}} (y) < +\infty$. Temos que

$$\widetilde{\gamma}_{n-1} (t_{n-1}) y = \gamma_{n-1} (t_{n-1}) y \in \mathcal{S} (\mathcal{S}B (X, \mathcal{V})) \subset \mathcal{S}B (X, \mathcal{V}),$$

se $t_{n-1} \in \left[0, \phi_{\gamma_{n-1}} (y)\right)$. Notemos que

$$y_{n-1,1} := \gamma_{n-1} \left(\phi_{\gamma_{n-1}} (y)\right) y \in \mathcal{S} (\mathcal{S}B (X, \mathcal{V})) \subset \mathcal{S}B (X, \mathcal{V}) \subset B (X, \mathcal{U}) \subset B (X, \mathcal{W}).$$

Por hipótese, segue que

$$y^+_{n-1,1} := I (y_{n-1,1}) \in I (M_\pi \cap B (X, \mathcal{W})) \subset X \subset B (X, \mathcal{V}).$$

Isto implica que

$$\widetilde{\gamma}_{n-1} (t_{n-1}) y = \gamma_n \left(t_{n-1} - \phi_{\gamma_{n-1}} (y)\right) y^+_{n-1,1} \in \mathcal{S}B (X, \mathcal{V}),$$

se $t_{n-1} \in \left[\phi_{\gamma_{n-1}} (y), \phi_{\gamma_{n-1}} (y) + \phi_{\gamma_{n-1}} \left(y^+_{n-1,1}\right)\right)$. Continuando com esse processo, obtemos que $\widetilde{\gamma}_{n-1} (t_{n-1}) y \in \mathcal{S}B (X, \mathcal{V})$, donde, $\widetilde{\gamma}_{n-1} (t_{n-1}) \mathcal{S}B (X, \mathcal{V}) \subset \mathcal{S}B (X, \mathcal{V})$.

De modo análogo, mostramos que

$$\widetilde{\gamma}_{j-1} (t_{j-1}) \mathcal{S}B (X, \mathcal{V}) \subset \mathcal{S}B (X, \mathcal{V}), \text{ para todo } j = 2, ..., n-1.$$

Logo,

$$\sigma (x) = \widetilde{\gamma}_1 (t_1) \circ \cdots \circ \widetilde{\gamma}_n (t_n) x \in \mathcal{S}B (X, \mathcal{V}) \subset B (X, \mathcal{U}),$$

donde, $\widetilde{\mathcal{S}}B (X, \mathcal{V}) \subset B (X, \mathcal{U})$. Portanto, X é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. □

Teorema 4.3.7. *Seja X um subconjunto compacto e estável por $\mathcal{S}$ de M e suponhamos que $X \cap M_\pi = \emptyset$. Então, X é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.*

Demonstração. Como X é compacto e M_π é fechado, existe uma cobertura aberta $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que $B(X, \mathcal{W}) \cap M_\pi = \emptyset$. Sejam $x \in X$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Como $\mathcal{O}$ é admissível, podemos assumir que $\mathcal{U} \preccurlyeq \mathcal{W}$. Por hipótese, X é estável por $\mathcal{S}$, logo, existe uma cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{S}B(x, \mathcal{V}) \subset B(X, \mathcal{U}) \subset B(X, \mathcal{W})$, o que implica que $\mathcal{S}B(x, \mathcal{V}) \cap M_\pi = \emptyset$, donde, $\widetilde{\mathcal{S}}B(x, \mathcal{V}) = \mathcal{S}B(x, \mathcal{V}) \subset B(X, \mathcal{U})$. Portanto, X é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. □

4.4 Funcionais de Lyapunov

Por fim, vamos analisar, nesta seção, cada tipo de estabilidade através de um funcional de Lyapunov.

Inicialmente, introduzimos o conceito de estabilidade assintótica por $\widetilde{\mathcal{F}}$ para uma ação de semigrupo impulsiva.

Para $t > 0$, definimos o seguinte conjunto

$$\widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t} = \left\{ \widetilde{\gamma}_1(t_1) \circ \cdots \circ \widetilde{\gamma}_n(t_n) : \gamma_i \in \Gamma, \sum_{i=1}^{n} t_i \geq t, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

A família $\widetilde{\mathcal{F}} = \left\{ \widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t} : t > 0 \right\}$ é uma base de filtro de subconjuntos de $\widetilde{\mathcal{S}}$, pois $\emptyset \notin \widetilde{\mathcal{F}}$ e $\widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t+s} \subset \widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t} \cap \widetilde{\mathcal{S}}_{\geq s}$, para quaisquer $t, s > 0$.

Definição 4.4.1. *Seja A um subconjunto de M. O* ***domínio de atração de A com respeito a $\widetilde{\mathcal{F}}$*** *é definido por*

$$\mathcal{A}\left(A, \widetilde{\mathcal{F}}\right) = \left\{ x \in M : \textit{para cada } \mathcal{U} \in \mathcal{O}, \textit{ existe } t > 0 \textit{ tal que } \widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t}(x) \subset B(A, \mathcal{U}) \right\}.$$

O conjunto A é chamado ***atrator com respeito a $\widetilde{\mathcal{F}}$*** *se existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $B(A, \mathcal{V}) \subset \mathcal{A}\left(A, \widetilde{\mathcal{F}}\right)$.*

Definição 4.4.2. *Seja A um subconjunto de M. Dizemos que A é* ***assintoticamente estável por $\widetilde{\mathcal{F}}$*** *se ele é um atrator com respeito a $\widetilde{\mathcal{F}}$ e é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.*

Apresentemos, agora, os resultados. O primeiro teorema fornece condições para a estabilidade por $\widetilde{\mathcal{S}}$ de um conjunto em termos de um funcional de Lyapunov.

Teorema 4.4.1. *Sejam A e X dois subconjuntos de M tais que $A \subset X$ e X seja aberto e progressivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Suponhamos que exista uma função $\psi : X \to \mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades:*

1. *$\psi(x) = 0$ se, e somente se, $x \in A$;*

2. *para toda cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi(x) \geq \delta$, se $x \in X \backslash B(A, \mathcal{U})$;*

3. *$\psi(x_{\mathcal{V}}) \to 0$, se $(x_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}}$ é uma rede em X com $x_{\mathcal{V}} \to x \in A$ (ψ é contínua em $x \in A$);*

4. *$\psi(\sigma(x)) \leq \psi(x)$, para quaisquer $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$ e $x \in X$.*

Então, A é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Demonstração. Suponhamos que tal função $\psi : X \to \mathbb{R}^+$ exista. Consideremos uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e seja $x \in A$. Definimos $m_0 = \inf\{\psi(z) : z \in X \backslash B(A,\mathcal{U})\}$. Pela propriedade 2, temos que $m_0 > 0$. Além disso, pela propriedade 3, existe uma cobertura aberta $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que $|\psi(y) - \psi(x)| < m_0$, para todo $y \in B(x,\mathcal{W}) \cap X$. Agora, $\psi(x) = 0$, já que $x \in A$. Logo, $\psi(y) < m_0$, para todo $y \in B(x,\mathcal{W}) \cap X$. Segue, da Proposição 4.2.1, que existe uma cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $B(x,\mathcal{V}) \subset B(x,\mathcal{W}) \cap X$. Afirmamos que $\widetilde{\mathcal{S}}B(x,\mathcal{V}) \subset B(A,\mathcal{U})$. De fato, suponhamos, por absurdo, que existam $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$ e $y \in B(x,\mathcal{V})$ tais que $\sigma(y) \notin B(A,\mathcal{U})$. Notemos que $\sigma(y) \in X$, pois $B(x,\mathcal{V}) \subset X$ e X é progressivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Então, $\psi(\sigma(y)) \geq m_0$. Mas, pela propriedade 4, temos que $\psi(\sigma(y)) \leq \psi(y) < m_0$, pois $y \in B(x,\mathcal{V})$, obtendo uma contradição. Portanto, $\widetilde{\mathcal{S}}B(x,\mathcal{V}) \subset B(A,\mathcal{U})$, donde, A é estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. □

Se considerarmos M um espaço métrico, é possível obter uma recíproca do Teorema 4.4.1, como mostra o resultado a seguir.

Teorema 4.4.2. *Suponhamos que M seja um espaço métrico com métrica d. Seja A um subconjunto fechado e estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$ de M. Então, existe uma função $\psi : M \to [0,1]$ com as seguintes propriedades:*

1. *$\psi(x) = 0$ se, e somente se, $x \in A$;*

2. *para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi(x) \geq \delta$, se $d_A(x) \geq \epsilon$;*

3. *$\psi(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, se (x_n) é uma sequência em M com $x_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \in A$ (ψ é contínua em $x \in A$);*

4. *$\psi(\sigma(x)) \leq \psi(x)$, para quaisquer $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$ e $x \in M$.*

Demonstração. A demonstração segue de modo análogo à prova do Teorema 2.3.1, utilizando o Teorema 4.3.4 ao invés do Teorema 2.2.2. □

Apresentamos, agora, as condições para a estabilidade uniforme por $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Teorema 4.4.3. *Sejam A e X dois subconjuntos de M tais que $A \subset X$ e X seja aberto e progressivamente invariante por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Suponhamos que exista uma função $\psi : X \to \mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades:*

1. *para toda cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi(x) \geq \delta$, se $x \in X \backslash B(A,\mathcal{U})$;*

2. *para todo $\epsilon > 0$, existe uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $B(A,\mathcal{U}) \subset X$ e $\psi(x) < \epsilon$, se $x \in B(A,\mathcal{U})$;*

3. $\psi(\sigma(x)) \leq \psi(x)$, *para quaisquer* $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$ *e* $x \in X$.

Então, A *é uniformemente estável por* $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Demonstração. Suponhamos que tal função $\psi : X \to \mathbb{R}^+$ exista. Consideremos uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $\psi(x) \geq \delta$, se $x \in X \backslash B(A, \mathcal{U})$, pela propriedade 1. Segue, da propriedade 2, que existe uma cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $B(A, \mathcal{V}) \subset X$ e $\psi(x) < \delta$, se $x \in B(A, \mathcal{V})$. Afirmamos que $\widetilde{\mathcal{S}} B(A, \mathcal{V}) \subset B(A, \mathcal{U})$. De fato, sejam $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$ e $x \in B(A, \mathcal{V})$. Como $x \in B(A, \mathcal{V})$, segue, da propriedade 3, que $\psi(\sigma(x)) \leq \psi(x) < \delta$. Portanto, $\widetilde{\mathcal{S}} B(A, \mathcal{V}) \subset B(A, \mathcal{U})$ e A é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. □

A recíproca do Teorema 4.4.3 é válida em espaços métricos, como vemos a seguir.

Teorema 4.4.4. *Suponhamos que* M *seja um espaço métrico com métrica* d. *Seja* A *um subconjunto fechado e uniformemente estável por* $\widetilde{\mathcal{S}}$ *de* M. *Então, existe uma função* $\psi : M \to [0, 1]$ *com as seguintes propriedades:*

1. *para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que* $\psi(x) \geq \delta$, *se* $d_A(x) \geq \epsilon$;
2. *para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que* $\psi(x) < \epsilon$, *se* $d_A(x) < \delta$;
3. $\psi(\sigma(x)) \leq \psi(x)$, *para quaisquer* $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$ *e* $x \in M$.

Demonstração. A demonstração segue de modo análogo à prova do Teorema 2.3.2. □

O próximo teorema apresenta condições para a estabilidade assintótica por $\widetilde{\mathcal{F}}$.

Teorema 4.4.5. *Sejam* A *e* X *dois subconjuntos de* M *tais que* $A \subset X$ *e* X *seja aberto e progressivamente invariante por* $\widetilde{\mathcal{S}}$. *Suponhamos que exista uma função* $\psi : X \to \mathbb{R}^+$ *com as seguintes propriedades:*

1. *para toda cobertura aberta* $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, *existe* $\delta > 0$ *tal que* $\psi(x) \geq \delta$, *se* $x \in X \backslash B(A, \mathcal{U})$;
2. *para todo* $\epsilon > 0$, *existe uma cobertura aberta* $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ *tal que* $B(A, \mathcal{U}) \subset X$ *e* $\psi(x) < \epsilon$, *se* $x \in B(A, \mathcal{U})$;
3. $\psi(\sigma(x)) \leq \psi(x)$, *para quaisquer* $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$ *e* $x \in X$;
4. *existe uma cobertura aberta* $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ *tal que* $B(A, \mathcal{U}) \subset X$ *e* $\psi(\sigma_{\mathcal{V}}(x)) \to 0$, *se* $x \in B(A, \mathcal{U})$, *para toda rede* $(\sigma_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V} \in \mathcal{O}}$ *em* $\widetilde{\mathcal{S}}$ *com* $\sigma_{\mathcal{V}} \to_{\widetilde{\mathcal{F}}} \infty$.

Então, A *é assintoticamente estável por* $\widetilde{\mathcal{F}}$.

Demonstração. Suponhamos que tal função $\psi : X \to \mathbb{R}^+$ exista. Segue, do Teorema 4.4.3, que as propriedades 1, 2 e 3 juntas implicam que A é uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Resta, então, mostrar que A é um atrator com respeito a $\widetilde{\mathcal{F}}$. Segue, da propriedade 4, que existe uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $B(A, \mathcal{U}) \subset X$ e $\psi(\sigma_{\mathcal{V}}(x)) \to 0$

quando $\sigma_{\mathcal{V}} \to_{\widetilde{\mathcal{F}}} \infty$, se $x \in B(A, \mathcal{U})$. Afirmamos que $B(A, \mathcal{U}) \subset \mathcal{A}\left(A, \widetilde{\mathcal{F}}\right)$. De fato, suponhamos, por absurdo, que exista $x \in B(A, \mathcal{U}) \backslash \mathcal{A}\left(A, \widetilde{\mathcal{F}}\right)$. Logo, existe uma cobertura aberta $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que $\widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t}(x) \not\subseteq B(A, \mathcal{W})$, para todo $t > 0$. Isto significa que existe uma rede $(\sigma_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V} \in \mathcal{O}}$ em $\widetilde{\mathcal{S}}$, com $\sigma_{\mathcal{V}} \to_{\widetilde{\mathcal{F}}} \infty$, tal que $\sigma_{\mathcal{V}}(x) \notin B(A, \mathcal{W})$, para todo $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$. Como $x \in B(A, \mathcal{U})$, segue, da propriedade 4, que $\psi(\sigma_{\mathcal{V}}(x)) \to 0$. Por outro lado, como $\sigma_{\mathcal{V}}(x) \in X \backslash B(A, \mathcal{W})$, para todo $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, segue, da propriedade 1, que existe $\delta > 0$ tal que $\psi(\sigma_{\mathcal{V}}(x)) \geq \delta$, para todo $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, o que é uma contradição. Assim, $B(A, \mathcal{U}) \subset \mathcal{A}\left(A, \widetilde{\mathcal{F}}\right)$ e, por isso, A é um atrator com respeito a $\widetilde{\mathcal{F}}$. Portanto, A é assintoticamente estável por $\widetilde{\mathcal{F}}$. □

Para finalizar, se considerarmos M um espaço métrico, é possível obter uma recíproca do Teorema 4.4.5.

Teorema 4.4.6. *Suponhamos que M seja um espaço métrico com métrica d. Seja A um subconjunto fechado e assintoticamente estável por $\widetilde{\mathcal{F}}$ de M. Então, existe uma função $\psi : M \to [0,1]$ com as seguintes propriedades:*

1. *para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi(x) \geq \delta$, se $d_A(x) \geq \epsilon$;*
2. *para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\psi(x) < \epsilon$, se $d_A(x) < \delta$;*
3. *$\psi(\sigma(x)) \leq \psi(x)$, para quaisquer $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$ e $x \in X$;*
4. *existe $\epsilon > 0$ tal que se $x \in B(A, \epsilon)$, então $\psi(\sigma_n(x)) \to 0$, para toda sequência $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\widetilde{\mathcal{S}}$ com $\sigma_n \to_{\widetilde{\mathcal{F}}} \infty$ e $n \to +\infty$.*

Demonstração. Definimos a função $\psi : M \to [0,1]$ pondo

$$\psi(x) = \sup_{\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}} \frac{d_A(\sigma(x))}{1 + d_A(\sigma(x))}.$$

Por hipótese, A é assintoticamente estável por $\widetilde{\mathcal{F}}$. Em particular, segue que A é também uniformemente estável por $\widetilde{\mathcal{S}}$. Logo, podemos usar os mesmos argumentos utilizados na demonstração do Teorema 4.4.4 para provar as propriedades 1, 2 e 3.

Assim, resta provar a propriedade 4. Notemos que existe $\epsilon > 0$ tal que $B(A, \epsilon) \subset \mathcal{A}\left(A, \widetilde{\mathcal{F}}\right)$, pois A é um atrator com respeito a $\widetilde{\mathcal{F}}$. Seja $x \in B(A, \epsilon)$ e consideremos uma sequência $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\widetilde{\mathcal{S}}$ tal que $\sigma_n \to_{\widetilde{\mathcal{F}}} \infty$, quando $n \to +\infty$. Como $x \in \mathcal{A}\left(A, \widetilde{\mathcal{F}}\right)$, dado $\delta > 0$, podemos encontrar $t > 0$ tal que $\widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t}(x) \subset B(A, \delta)$. Como $\sigma_n \to_{\widetilde{\mathcal{F}}} \infty$, quando $n \to +\infty$, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma_n \in \widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t}$, para $n > n_0$. Logo, $\sigma_n(x) \in \widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t}(x)$ e, por isso, $\widetilde{\mathcal{S}}(\sigma_n(x)) \subset \widetilde{\mathcal{S}}_{\geq t}(x) \subset B(A, \delta)$, para $n > n_0$. Isto significa que, para todo $\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}$, $d_A(\sigma(\sigma_n(x))) < \delta$, para $n > n_0$. Então,

$$\psi(\sigma_n(x)) = \sup_{\sigma \in \widetilde{\mathcal{S}}} \frac{d_A(\sigma(\sigma_n(x)))}{1 + d_A(\sigma(\sigma_n(x)))} \leq \frac{\delta}{1 + \delta} < \delta,$$

para $n > n_0$. Portanto, $\psi\left(\sigma_n\left(x\right)\right) \to 0$, quando $n \to +\infty$. Isto finaliza a demonstração. $\square$

Capítulo 5

Conclusões

A principal característica de um sistema impulsivo é a sua descontinuidade. À primeira vista, é difícil imaginarmos que possa haver uma relação entre os comportamentos dinâmicos do sistema impulsivo e do original, uma vez que a função impulsiva I pode ser interpretada como um agente externo capaz de mudar totalmente o comportamento do sistema. Além disso, no caso de sistemas de controle impulsivos, a influência das funções de controle é mais um aspecto com o qual temos que lidar. Porém, foi possível comprovar que, apesar desses fatores, ainda assim conseguimos obter relações entre os sistemas, assumindo condições adequadas. Nesse sentido, estendemos diversos resultados existentes na teoria clássica para o caso impulsivo, referentes às noções de invariância, estabilidade e recursividade.

Vale ressaltar ainda a importância da escolha da formulação adotada para definir um sistema de controle impulsivo, uma vez que esta também nos permitiu trabalhar sob o ponto de vista de uma ação de semigrupo em casos convenientes. Fica evidente, então, a relevância da teoria de ações de semigrupos contínuas que, nesse estudo, foi intensamente aplicada em sistemas de controle afins impulsivos e ações de semigrupos impulsivas.

A próxima etapa é desenvolver um estudo sobre os conceitos recursivos para ações de semigrupos impulsivas. Futuramente, objetivamos analisar o conceito de controlabilidade total para o caso impulsivo.

Bibliografia

[1] Arutyunov, A., Karamzin, D., Pereira, F. L., A nondegenerate maximum principle for the impulsive control problem with state constraints. *SIAM J. Control Opt.*, 43 (2005) 1812–1843.

[2] Arutyunov, A., Karamzin, D., Pereira, F. L., On constrained impulsive control problems: controlling system jumps. *J. Math. Sciences*, 165 (2010) 654–688.

[3] Arutyunov, A., Karamzin, D., Pereira, F. L., A generalization of the impulsive control concept: controlling system jumps. *Discr. Contin. Dynam. Systems Series A*, 29 (2011) 403–415.

[4] Bonotto, E. M., Bortolan, M. C., Caraballo, T., Collegari, R., Impulsive nonautonomous dynamical systems and impulsive cocycle attractors. *Math. Methods Appl. Sci.*, 40 (2017) 1095–1113.

[5] Bonotto, E. M., Bortolan, M. C., Caraballo, T., Collegari, R., Attractors for impulsive non-autonomous dynamical systems and their relations. *J. Differential Equations*, 262 (2017) 3524–3550.

[6] Bonotto, E. M., Federson, M., Poisson stability for impulsive semidynamical systems. *Nonlinear Analysis*, 71 (2009) 6148–6156.

[7] Bonotto, E. M., Grulha Jr., N. G., Lyapunov stability of closed sets in impulsive semidynamical systems. *Electronic Journal of Differential Equations*, 78 (2010) 1–18.

[8] Braga Barros, C. J., Rocha, V. H. L., Souza, J. A., Lyapunov stability for semigroup actions. *Semigroup Forum*, 88 (2014) 227–249.

[9] Braga Barros, C. J., Rocha, V. H. L., Souza, J. A., Lyapunov stability and attraction under equivariant maps. *Canad. J. Math.*, 67 (2015) 1247–1269.

[10] Braga Barros, C. J., Rocha, V. H. L., Souza, J. A., On attractors and stability for semigroup actions and control systems. *Math. Nachr.*, 289 (2016) 272–287.

[11] Braga Barros, C. J., Souza, J. A., Attractors and chain recurrence for semigroup actions. *J. Dyn. Differ. Equ.*, 22 (2010) 723–740.

[12] Bressan, A., Rampazzo, F., Impulsive control systems with commutative vector fields. *J. Optim. Theory Appl.*, 71 (1991) 67–83.

[13] Ciesielski, K., On semicontinuity in impulsive systems. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, 52 (2004) 71–80.

[14] Ciesielski, K., On stability in impulsive dynamical systems. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, 52 (2004) 81–91.

[15] Colonius, F., Kliemann, W., The dynamics of control. Birkhäuser, Boston, 2000.

[16] Ellis, D. B., Ellis R., Nerurkar, M., The topological dynamics of semigroup actions. *Transactions American Mathematical Society*, 353 (2000) 1279–1320.

[17] Ellis, R., Lectures on Topological Dynamics. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.

[18] Karamzin, D., Oliveira, V., Pereira, F. L., Silva, G. N., On the properness of the extension of dynamic optimization problems to allow impulsive controls. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 21 (2015) 867–875.

[19] Kaul, S. K., On impulsive semidynamical systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 150 (1990), no. 1, 120–128.

[20] Lakshmikantham, V., Baĭnov, D. D., Simeonov, P. S., Theory of impulsive differential equations. *Series in Modern Applied Mathematics*, vol. 6, World Scientific Publishing Co. Inc., Teaneck, NJ, 1989.

[21] Nemytskii, V. V., Stepanov, V. V., Qualitative Theory of Differential Equations. *Princeton Mathematical Series*, vol. 22, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1960.

[22] Patrão, M. M. A., San Martin, L. A. B., Semiflows on topological spaces: chain transitivity and semigroups. *J. Dyn. Diff. Eq.*, 19 (2007) 155–180.

[23] Pereira, F. L., Silva, G. N., Necessary conditions of optimality for vector-valued impulsive control problems. *Syst. Control Lett.*, 40 (2000) 205–215.

[24] Pereira, F. L., Silva, G. N., Stability for impulsive control systems. *Dynamical Systems*, 17 (2002) 421–434.

[25] Pereira, F. L., Silva, G. N., Lyapunov stability of measure driven differential inclusions. *J. Differential Equations*, 40 (2004) 1122–1130.

[26] Raminelli, S. A., Souza, J. A., Global attractors for semigroup actions. *J. Math. Anal. Appl.*, 407 (2013) 316–327.

[27] Rozko V., A class of almost periodic motions in pulsed system. *Differentsial'nye Uravneniya*, 8 (1972) 2012–2022.

[28] Rozko V., Stability in terms of Lyapunov discontinuous dynamic systems. *Differentsial'nye Uravneniya*, 11 (1975) 1005–1012.

[29] Souza, J. A., Recurrence theorem for semigroup actions. *Semigroup Forum*, 83 (2011) 351–370.

[30] Souza, J. A., A Course on Geometric Control Theory: Transitivity and Minimal Sets. LAP Lambert Academic Publishing, Deutschland, 2016.

[31] Souza, J. A., Takamoto, L. H., Lyapunov stability for impulsive control affine systems. *Journal of Differential Equations* (2018), https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.09.033.

[32] Souza, J. A., Tozatti, H. V. M., Prolongational limit sets of control systems. *J. Differential Equations*, 254 (2013) 2183–2195.

[33] Souza, J. A., Tozatti, H. V. M., Some aspects of stability for semigroup actions and control systems. *J. Dyn. Diff. Equations*, 26 (2014) 631–654.

[34] Tang, S., Cheke, R. A., State-dependent impulsive models of integrated pest management (IPM) strategies and their dynamic consequences. *J. Math. Biol.*, 50 (2005) 257–292.

[35] Yang, T., Impulsive control theory. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 272, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[36] Zhang, R., Xu, Z., Yang, S. X., He, X., Generalized synchronization via impulsive control. *Chaos Solitons Fractals*, 38 (2008) 97–105.