Universidade Estadual de Maringá
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Tese de Doutorado:

Funcionais de Lyapunov e a Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para Equações de Evolução Não Lineares

Giovana Alves

Orientador: Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali

Maringá - PR
Março de 2017

Universidade Estadual de Maringá
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Funcionais de Lyapunov e a Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para Equações de Evolução Não Lineares

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática, com Área de Concentração em Análise.
Orientador: Fábio Matheus Amorin Natali.

Giovana Alves

Maringá - PR
Março de 2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá, PR, Brasil)

Alves, Giovana
A474f Funcionais de Lyapunov e a estabilidade de ondas viajantes periódicas para equações de evolução não lineares / Giovana Alves. -- Maringá, 2017.
viii, 78 f. : il. figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2017.

1. Estabilidade orbital. 2. Equações dispersivas - Estabilidade. 3. Estabilidade orbital - Funcional de Lyapunov. 4. Ondas viajantes. I. Natali, Fábio Matheus Amorin, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDD 23.ed. 515.355
AMMA-003415

GIOVANA ALVES

FUNCIONAIS DE LYAPUNOV E A ESTABILIDADE DE ONDAS VIAJANTES PERIÓDICAS PARA EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO NÃO LINEARES

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Adimir Pastor

Prof. Dr. Ademir Pastor Ferreira
Universidade Estadual de Campinas

Nataliia Goloshchapova

Profa. Dra. Nataliia Goloshchapova
Universidade de São Paulo – São Paulo

Marcos Roberto Teixeira Primo

Prof. Dr. Marcos Roberto Teixeira Primo
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Valéria Neves Domingos Cavalcanti

Profa. Dra. Valéria Neves Domingos Cavalcanti
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 09 de março de 2017.
Local de defesa: Auditório do Departamento de Matemática, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Aos meus pais Aparecida (In memoriam) e Isac.
Aos meus irmãos Alan e Marcelo.

Agradecimentos

Ao longo dos anos de trabalho que resultaram nesta tese, pessoas e instituições me ajudaram, ensinando e apoiando. Agora que alcanço meus objetivos não poderia deixar de reconhecê-las.

Começo, como não poderia ser diferente, por agradecer a Deus que me acompanhou e me conduziu nesse processo, e que sempre me deu forças nas horas que fraquejei e nos momentos em que pensei em desistir.

Minha família que foi sempre uma fonte de momentos de alegria e descanso do trabalho. Agradeço a todos vocês e especialmente ao meu pai pelo seu apoio, seu amor e por sempre ter me incentivado a estudar. Aos meus irmãos Alan e Marcelo (Nan e Té), que são minhas fontes de inspiração e que sempre me proporcionaram força, conselhos e muitas risadas. Agradeço à tia Preta por todo cuidado e carinho que dedicou a mim e aos meus irmãos. Ao tio Beto, à tia Fátima, à Tarita e ao Carlinhos, por terem me acolhido enquanto estive em Campinas e por todo incentivo e motivação que me deram.

Agora, dedico um agradecimento mais que especial ao meu orientador, de mestrado e, agora, de doutorado Fábio Natali. Seria um tanto quanto difícil descrever em poucas palavras, seu papel neste trabalho, porque muito do que aprendi, levarei comigo em minha vida profissional e pessoal o seu exemplo. Sou imensamente grata, não só por não ter medido esforços nem dedicação ao realizar a orientação desta tese, pela a constante disponibilidade e atenção, mas também pelo zelo e pela compreensão que sempre me dispensou. Agradeço sua pela paciência, pelo seu incentivo, por seus conselhos, suas críticas e discussões ao longo de todo percurso (e pela minha orelha de Minnie).

Agradeço ao professor Dr. Ademir Pastor, por sua orientação enquanto estive em Campinas, pelos seus valiosos conhecimento, esclarecimentos e sugestões relevantes que foram fundamentais para concretização deste trabalho.

Sou grata à professora Dra. Valéria Neves Domingos Cavalcanti, por seus conselhos, incentivos e préstimos; sem contar a simpatia e o bom humor.

Quero agradecer a todos os amigos especiais que a matemática me trouxe: Alisson, Altair, Amanda, Fabrício, Gilson, Manu, Mariele, Osmar, Sinop, Teló e Waldir, que muito contribuíram para o meu crescimento enquanto matemática e mais ainda como pessoa (exceto no tamanho).

Minha gratidão à UEM, que me acolheu como mestranda e doutoranda, por toda a infraestrutura disponibilizada para a minha formação. Agradeço carinhosamente aos professores e funcionários do Departamento de Matemática e, em especial, ao Zé (pelos churrascos e conversas) e à Lúcia, que sempre me atenderam com muita satisfação.

Não poderia deixar de agradecer ao Suguiura, parceiro de cinema, tequila, artesanato, papel de parede, Matita, por me socorrer nas horas difíceis como matar baratas, LaTeX, inglês, caronas e desabafos, por sua empatia, sua (enorme) paciência e por seu companheirismo (também não é todo dia que você encontra uma pessoa que tem bom gosto para perfume e música como eu).

Agora, dedico um sincero agradecimento ao professor Osvaldo Colleti (Mangueira), que despertou meu interesse pela Matemática, sempre me encorajou a seguir nos estudos e torceu por mim. Pelas aulas extraclasse, por seus conselhos e valiosos ensinamentos (ainda estou buscando meus 5cm de conhecimento). Muito obrigada!

Aos meus amigos de Rinópolis pelas conversas, incentivos, momentos de descontração e pelas amizades sinceras.

Quero agradecer aos membros da banca examinadora por terem aceitado o convite e disponibilizado seu tempo para contribuir no aperfeiçoamento deste trabalho.

À CAPES pelo suporte financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível.

Enfim, gostaria de agradecer a todas as pessoas que acreditaram e confiaram na realização deste sonho. Muito obrigada!

Giovana Alves.

É preciso força pra sonhar e perceber que a
estrada vai além do que se vê.
—— Marcelo Camelo.

Resumo

A presente tese trata de condições suficientes para a estabilidade orbital de ondas periódicas de algumas equações de evolução que suportam ondas dispersivas não lineares. Nosso método pode ser visto como uma extensão da teoria de ondas solitárias, desenvolvida em [51], para ondas periódicas na variável espacial e os resultados não dependem da parametrização da onda. Além disso, se a existência de uma parametrização para onda periódica for determinada, mostramos que a positividade das entradas principais da matriz Hessiana, relacionada a um funcional conveniente, são suficientes para obter a estabilidade. Consequentemente, podemos estabelecer a estabilidade orbital de ondas periódicas para vários modelos dispersivos não lineares. Como exemplos, apresentamos a estabilidade de ondas periódicas associadas à equação de Schrödinger cúbica quíntica, uma equação de Schrödinger não linear de quarta ordem e um equação do tipo Korteweg-de Vries generalizada. Acreditamos que nosso método pode ser aplicado em uma ampla classe de equações de evolução; em particular, pode ser estendido para equações de ondas dispersivas regularizadas.

Palavras chave: Estabilidade orbital, Funcional de Lyapunov, ondas viajantes, ondas periódicas.

Abstract

The present thesis deals with sufficient conditions for orbital stability of periodic waves of some evolution equations supporting nonlinear dispersive waves. Our method can be seen as an extension to spatially periodic waves of the theory of solitary waves recently developed in [51] and the results do not depend on the parametrization of the periodic wave itself. In addition, if the existence of a smooth parametrization of periodic waves is determined, we show that the positiveness of the principal entries of the Hessian matrix related to a convenient functional are also sufficient to obtain the stability. Consequently, we can establish the orbital stability of periodic waves for several nonlinear dispersive models. As examples, we present the stability of periodic waves associated to the cubic-quintic Schrodinger equation, a fourth-order nonlinear Schrodinger equation and a generalized Korteweg-de Vries type equation. We believe our method can be applied in a wide class of evolution equations; in particular it can be extended to regularized dispersive wave equations.

Key words: Orbital stability, Lyapunov functions, travelling waves, periodics wave.

Sumário

Introdução

A estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas para equações de evolução não lineares possui hoje uma quantidade significativa de trabalhos. Isso se deve ao acréscimo considerável de pesquisadores que estão interessados em apresentar técnicas que visam melhorar a compreensão qualitativa dos modelos propostos. Outro fator importante para este acréscimo é a importância física que está relacionada aos modelos evolutivos.

Uma classe de equações de evolução que recebeu importantes contribuições que tangem a estabilidade orbital de ondas periódicas, são as equações dispersivas não lineares. Em linhas gerais, uma equação diferencial parcial é caracterizada como dispersiva se suas soluções se espalham no espaço à medida que o tempo evolui. Tais equações possuem características importantes como a presença de simetrias, que ajudam a entender melhor o funcionamento da dinâmica de suas soluções dentro de um espaço de Sobolev conveniente[1]. Portanto, vamos considerar a estabilidade de ondas periódicas como sendo a estabilidade da órbita gerada por simetrias adequadas (no nosso caso, rotações e/ou translações).

Grosseiramente falando, dizemos que um perfil de onda ϕ é *orbitalmente* estável num espaço de Hilbert X, se ao considerarmos perto de um estado inicial u_0 do modelo evolutivo, a evolução temporal $u(t)$ permanecerá próximo ao perfil ϕ módulo suas simetrias. Nossa proposta com essa tese é apresentar resultados de estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas para três modelos não-lineares específicos. Vamos detalhá-los um de cada vez.

O primeiro modelo estudado é a equação de Schrödinger com não linearidade cúbica-quíntica, à saber,

$$iu_t + u_{xx} + a|u|^2u - b|u|^4u = 0, \tag{1}$$

onde $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função complexa e periódica na variável espacial e a, b são constantes reais positivas. Este modelo surge como um caso específico da equação de Schrödinger,

$$iu_t + u_{xx} + V(x,t)u = 0, \tag{2}$$

[1]Dado um espaço de Sobolev H^s, temos a pergunta natural: para quais valores de $s \in \mathbb{R}$ podemos esperar soluções convenientes? As simetrias da equação dispersiva são úteis para responder esta questão.

onde V é um potencial real. Fisicamente, a equação (2) é usada na mecânica ondulatória para a função de onda de uma partícula. Ela se assenta num modelo atômico inteiramente baseado em ondas estacionárias e constitui a base da física e química modernas. Além disso, a equação de Schrödinger (2) permite calcular a função de onda associada u a uma partícula que se move dentro de um campo de forças descrito por um potencial $V(x,t)$. Especificamente no caso em que $a>0$ e $b>0$, a equação (1) aparece na interação do gás de bóson e ótica não linear (ver [8] e suas referências). Este tipo de não linearidade, dada na equação (1), é interessante posto que a presença da potência dupla nos fornece a absência de invariância de escala. Este fato causa, por exemplo, dificuldades na obtenção do expoente crítico em L^2 para a boa colocação global de soluções (ver [34, Capítulo 6]), quando comparamos a mesma equação não linear de Schrödinger com potência simples, isto é, se $V = a|u|^p u$, $p \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Ademais, a invariância de escala neste último caso é crucial para obtermos resultados de estabilidade/instabilidade de ondas solitárias (soluções que possuem uma crista ondular simples e que decaem à zero no infinito, juntamente com suas derivadas) para o modelo em questão (ver [50]).

No que tange a estabilidade de ondas periódicas, Hernández em [25] apresentou a existência e estabilidade orbital de ondas estacionárias do tipo $u(x,t) = e^{i\omega t}\phi(x)$ para a equação (1) no caso $a=1$ e $b=-1$. Neste trabalho, foi mostrado que ondas de período fixo do tipo *dnoidal* dadas por

$$\phi(x) = \frac{a_1 dn(dx,k)}{\sqrt{1+a_2 dn(dx,k)^2}} \tag{3}$$

são orbitalmente estáveis no espaço de Sobolev periódico $H^1_{per}([0,L])$. Em (3), a_i, $i=1,2$, e d são parâmetros que dependem suavemente da frequência da onda ω, dn é função elíptica de tipo dnoidal e $k \in (0,1)$ é chamado módulo da função elíptica (ver Capítulo 1 para uma definição precisa das funções elípticas). Para este fim, o autor fez o uso da teoria abstrata em [6], com intuito de obter a quantidade e multiplicidade dos autovalores não positivos do operador linearizado $\mathcal{L}_{dn} = -\partial_x^2 + \omega - 3\phi^2 - 5\phi^4$, juntamente com a teoria de estabilidade determinada por Bona, Souganidis e Strauss [10] e Weinstein [52], adaptadas para as equações do tipo Schrödinger.

Nossa proposta é estabelecer a prova da estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas de período fixo para a equação (1) com $a>0$ e $b>0$ da forma $u(x,t) = e^{i\omega t}e^{i\frac{c}{2}(x-ct)}\phi(x-ct)$, onde ω e c são parâmetros reais e $\phi := \phi_\omega$ é uma função suave em relação aos parâmetros ω e c, a qual possui a mesma forma que (3). Para isto, vamos utilizar do recente desenvolvimento apresentado por Stuart [51] (no caso unidimensional). Neste trabalho, o autor determinou condições suficientes para a existência de um funcional de Lyapunov e, de posse deste fato, provou a estabilidade orbital (apenas considerando a órbita gerada por rotações) de ondas solitárias para a equação (2) com $V(x,t) = f(|u|^2)$, sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real e regular (veja também [39]).

Ohta em [43], estudou a estabilidade/instabilidade de ondas estacionárias solitárias para a equação (1), assumindo valores mais abrangentes de $a, b \in \mathbb{R}$. Apesar de nosso trabalho estar condizente com o trabalho de Ohta, infelizmente, devido a dificuldade em se trabalhar com as funções elípticas, não conseguimos um resultado tão geral quanto os que foram obtidos em [43]. A principal dificuldade foi estabelecer uma forma adequada de se calcular a positividade da quantidade[2]

$$I = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \omega}\int_0^L \phi(x)^2 dx, \tag{4}$$

onde L é o período da função ϕ. Neste caso, calcularemos a quantidade I numericamente, seguindo a abordagem em [38].

Outro modelo no qual provaremos a estabilidade orbital de ondas estacionárias será a equação não linear de quarta ordem dada por

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + \frac{1}{2}|u|^2 u + \nu \partial_x^4 u + \nu \mathcal{N}(u, \bar{u}, \partial_x u, \partial_x \bar{u}, \partial_x^2 u, \partial_x^2 \bar{u}) = 0, \tag{5}$$

onde $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é periódica na variável espacial, ν é uma constante real e o termo não linear $\mathcal{N}$ vem dado por

$$\mathcal{N}(u, \bar{u}, \partial_x u, \partial_x \bar{u}, \partial_x^2 u, \partial_x^2 \bar{u}) = \frac{3}{8}|u|^4 u + \frac{3}{2}(\partial_x u)^2 \bar{u} + |\partial_x u|^2 u + \frac{1}{2}u^2 \partial_x^2 \bar{u} + 2|u|^2 \partial_x^2 u.$$

A equação (5) surge no contexto do movimento tridimensional de um filamento de vórtice, o qual está imerso em um líquido invíscido e incompressível em uma região infinita. Além disso, existe uma conexão entre a equação (5) e a bem conhecida equação de Schrödinger com não linearidade cúbica,

$$iu_t + u_{xx} + \frac{1}{2}|u|^2 u = 0, \tag{6}$$

ao fazer $\nu = 0$. Em verdade, Hasimoto em [24] propôs uma transformação (a transformação de Hasimoto) que estabelece uma conexão intrínseca entre as equações (5) e (6) para $\nu \neq 0$.

O estudo da estabilidade orbital para ondas viajantes solitárias da forma $u(x, t) = e^{i\beta t} e^{i\alpha x} \phi_\omega(x - ct)$ (tais soluções são também conhecidas como sólitons de Hasimoto), onde ϕ_ω, $\omega > 0$, resolve a equação diferencial ordinária

$$-\phi_\omega'' + \omega \phi_\omega - \frac{1}{2}\phi_\omega^3 = 0,$$

c e β são parâmetros reais que dependem suavemente de α, ω e ν, possui uma quantidade razoável de contribuidores. De fato, Cazenave e Lions [17] provaram que o sóliton de

[2]A positividade da quantidade I em (4) é uma das condições suficientes para a estabilidade orbital, segundo os trabalhos em [22] e [52], para as equações do tipo Schrödinger.

Hasimoto, para o caso $\nu = 0$, é orbitalmente estável no espaço energia $H^1(\mathbb{R})$. Para o caso $\nu \neq 0$ e $\alpha = 0$ (soluções ondas estacionárias), Maeda e Segata em [35] mostraram que a correspondente onda solitária ϕ_ω é orbitalmente estável em $H^m(\mathbb{R})$, para todo $m \in \mathbb{N}$, usando métodos variacionais[3]. Para o caso $\nu \neq 0$ e $\alpha \neq 0$, Segata [48] provou que o sóliton de Hasimoto é orbitalmente estável em $H^1(\mathbb{R})$ usando o método variacional dado em [17].

No caso periódico, não encontramos na literatura atual algum resultado que permite concluir a estabilidade orbital para o caso $\nu \neq 0$. O caso $\nu = 0$ foi tratado primeiramente por Angulo [4], onde foi mostrado que soluções do tipo dnoidal com período fixo são orbitalmente estáveis em $H^1_{per}([0, L])$. Para este fim, o autor combinou as abordagens em [10] e [52].

Baseado em argumentos similares aos que foram utilizados para a equação (1), vamos mostrar que se $|\nu|$ é suficientemente pequeno, ondas estacionárias periódicas (de período fixo $L > 0$) da forma $u(x,t) = e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ e com perfil dnoidal,

$$\phi_\omega(x) = b_1 dn(b_2 x, k), \tag{7}$$

onde b_i, $i = 1, 2$ são parâmetros que dependem suavemente de ω, são orbitalmente estáveis em $H^{\frac{m}{2}}_{per}([0, L])$, para todo $m \in \mathbb{N}$, par e $m \neq 2$.

Por fim, vamos utilizar a abordagem proposta em [51] para estabelecer condições suficientes para a estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas para equação generalizada do tipo Korteweg-de Vries, dada por,

$$u_t + (f(u))_x - (\mathcal{M}u)_x = 0, \tag{8}$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função suave e $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica de período $L > 0$. Em (8), $\mathcal{M}$ é um operador diferencial ou pseudo-diferencial que pode ser definido como um operador multiplicativo via transformada de Fourier por

$$\widehat{\mathcal{M}g}(\kappa) = \theta(\kappa)\widehat{g}(\kappa), \quad \kappa \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

onde θ é assumido ser uma função par e contínua sobre $\mathbb{R}$ e que satisfaz

$$\upsilon_1|\kappa|^{m_1} \leq \theta(\kappa) \leq \upsilon_2|\kappa|^{m_1}, \quad m_1 > 0, \tag{10}$$

para todo $|\kappa| \geq \kappa_0$ e para alguns $\upsilon_i > 0$, $i = 1, 2$.

Ondas viajantes periódicas para a equação (8) são soluções da forma $u(x,t) = \phi(x - \omega t)$, onde $\omega \in \mathbb{R}$ and $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função suave periódica. Substituindo esta forma

[3] Tal fato ocorre pois a equação (5) possui infinitas leis de conservação (ver [33]), o que permite estudar a estabilidade orbital em espaços com alta regularidade.

de solução em (8), obtém-se

$$\mathcal{M}\phi + \omega\phi - f(\phi) + A = 0, \tag{11}$$

onde A é uma constante de integração.

Conforme já dissemos anteriormente, usando a teoria dada em [51], vamos também construir funcional de Lyapunov conveniente de modo a obter a estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas para a equação (8). Essencialmente, o trabalho em [51] determinou condições suficientes para a estabilidade orbital de ondas estacionárias solitárias para sistemas Hamiltoniano abstratos da forma,

$$u_t(t) = JE'(u(t)), \tag{12}$$

em um espaço de Hilbert X. Aqui, E denota a energia associada à equação (8) (ver Capítulo 4), J é um operador invertível, limitado e antissimétrico. Todavia, apesar de ser possível escrever a equação (8) na forma (12), com $J = \partial_x$, é sabido que, neste caso, o operador J não é invertível (pois $\partial_x\{1\} = 0$). Nossa ideia será modificar os argumentos em [51], com intuito de estabelecer um critério bem amplo para a estabilidade orbital em $H_{per}^{\frac{m_1}{2}}([0, L])$ para a equação (8).

A existência e a estabilidade orbital de ondas periódicas para equações do tipo (8) ganhou mais atenção após o trabalho de Angulo, Bona e Scialom [5] (ver também Benjamin [9]). No referido trabalho, os autores consideraram a equação de Korteweg-de Vries ($\mathcal{M} = -\partial_x^2$ e $f(s) = \frac{s^2}{2}$ em (8)), e provaram a existência e estabilidade orbital de ondas periódicas do tipo *cnoidal* com média nula e período fixo. Neste caso, também foi necessário provar a positividade da quantidade I, em (4), com intuito de obter a estabilidade orbital. A existência de ondas periódicas de período fixo torna possível o cálculo da quantidade I e, consequentemente, pode-se aplicar as técnicas clássicas de estabilidade em [10], [22] e [52] as quais foram feitas para deduzir a estabilidade orbital no caso de ondas solitárias, associados à modelos de evolução não lineares.

Johnson [31] estabeleceu condições suficientes para a estabilidade orbital de ondas periódicas para a seguinte equação de Korteweg-de Vries

$$u_t + u^p u_x + u_{xxx} = 0, \tag{13}$$

onde $p \geq 1$ é um inteiro (basta considerar na equação (8), $\mathcal{M} = -\partial_x^2$ e $f(v) = \frac{v^{p+1}}{p+1}$). Neste trabalho, ele construiu ondas periódicas suaves, da forma $\phi(\cdot, A, B, \omega)$, cujo período $L > 0$ depende da terna $(A, B, \omega) \in \widetilde{\mathcal{O}}$, onde $\widetilde{\mathcal{O}} \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto aberto. Aqui B é uma constante de integração que aparece na forma de quadratura associada à equação diferencial de segunda ordem em (11) e que pode ser interpretada como a energia associada. Com isto, se M e F são as quantidades conservadas convenientes (veja (4.3) e (4.4) para as definições precisas) e assumindo que o sinal dos determinantes Jacobianos L_B, $\{L, M\}_{A,B}$ e $\{L, M, F\}_{A,B,\omega}$ (de acordo com a notação contida no trabalho) são positivos no ponto $(A_0, B_0, \omega_0) \in \widetilde{\mathcal{O}}$, concluí-se a estabilidade orbital da onda $\phi(\cdot, A_0, B_0, \omega_0)$. Em particular, a positividade de tais determinantes foram determinadas no caso de ondas periódicas que estão "próximas" das ondas solitárias e dos pontos de equilíbrio referentes à equação de segunda ordem em (11).

De acordo com todas as referências apresentadas no caso da estabilidade de ondas periódicas para modelos evolutivos, podemos enxergar que foi necessário a construção de uma família suave de ondas periódicas ϕ, de período fixo ou não, que dependem dos parâmetros da equação diferencial que regem tais ondas. Se uma parametrização conveniente de soluções é determinada, a estratégia geral para provar a estabilidade orbital consiste em dois fatos básicos: o primeiro deles é provar a estabilidade em relação a perturbações em uma variedade conveniente, frequentemente dada em termos das quantidades conservadas que o modelo possui. Segundo, é possível estender a classe de perturbações para o espaço todo usando um argumento de desigualdade triangular ou a construção de uma sequência conveniente (ver [2], [3], [4], [5], [6], [7], [10] [12], [13], [15], [21], [22], [25], [27], [31], [30], [38], [41]). Em qualquer um desses últimos casos, é necessário determinar que a matriz Hessiana de um funcional conveniente (ou então, algumas quantidades envolvendo determinantes como os que foram tratados em [31]) seja não singular (em alguns modelos, a quantidade I em (4) corresponde a matriz Hessiana associada). Em geral, esta verificação é bem complicada, ou então bem restrita. Apesar de aplicarmos a abordagem em [51] para modelos particulares, nosso método não requer este tipo de informação sobre a matriz Hessiana e, em particular, uma parametrização de soluções periódicas não se faz necessária (ver Corolário 4.10). Além disso, o período da solução periódica pode ser considerado fixo ou variando em relação aos parâmetros da equação. Esta vantagem se dá graças a construção de um funcional de Lyapunov modificado, que será apresentado em cada um dos modelos propostos.

No Capítulo 1, apresentaremos a notação usada na tese e alguns resultados básicos. A estabilidade de ondas periódicas para a equação (1) será apresentada no Capítulo 2. O Capítulo 3 traz resultados de estabilidade orbital para a equação (5). Finalmente, no Capítulo 4 apresentamos condições suficientes para a estabilidade orbital para a equação de Korteweg-de Vries generalizada (8).

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espaços de Sobolev Periódicos

Nesta seção, introduziremos brevemente o conceito de Transformada de Fourier para funçõs periódicas e definiremos os espaços de Sobolev periódico, que serão usados nos capítulos seguintes. A maioria dos resultados contidos aqui podem ser encontrados em Iório e Iório [29].

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}$. Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis à Lebesgue $f : \Omega \to \mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tais que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \text{ se } 1 \leq p < +\infty,$$

ou

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\Omega} \text{ess}|u(x)| < \infty, \ \textit{se}\ p = +\infty.$$

O espaço normado $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ é um espaço de Banach. No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço Hilbert, munido do produto interno

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\ dx,\ \forall\ f, g \in L^2(\Omega).$$

Seja $L > 0$ um número real fixado. Denotemos por $\mathcal{P} = C^\infty_{per} = C^\infty_{per}([0, L])$ o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, que são infinitamente diferenciáveis e periódicas de período L. Designemos $\mathcal{P}'$, o Espaço das Distribuições Periódicas, como sendo o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos definidos de $\mathcal{P}$ em $\mathbb{C}$. O valor de $\psi \in \mathcal{P}'$ em $\varphi \in \mathcal{P}$ é denotado por $\psi(\varphi) = \langle \psi, \varphi \rangle$.

Consideremos $\kappa \in \mathbb{Z}$ e a função $\Theta_\kappa(x) = e^{\frac{2\pi i \kappa x}{L}}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. A Transformada de Fourier de $\psi \in \mathcal{P}'$ é a função $\widehat{\psi} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, dada pela lei de formação

$$\widehat{\psi}(\kappa) = \frac{1}{L}\langle \psi, \Theta_{-\kappa}\rangle, \ \forall \ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Fixemos p real, de modo que $p \geq 1$. A função $\psi \in L^p([0,L])$ define uma distribuição periódica. Neste caso, $\psi \in \mathcal{P}'$ com

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \int_0^L \psi(x)\varphi(x) \ dx, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{P}.$$

Desta maneira, a Transformada de Fourier da função $\psi \in L^p([0,L])$ é dada por

$$\widehat{\psi}(\kappa) = \frac{1}{L}\int_0^L \psi(x) e^{-\frac{2\pi i \kappa x}{L}} \ dx, \ \forall \ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Dado $s \in \mathbb{R}$, definimos o espaço de Sobolev $H^s_{per}([0,L])$ como sendo o conjunto de todas as distribuições periódicas $f \in \mathcal{P}'$, de modo que

$$\|f\|^2_{H^s_{per}([0,L])} = L \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} (1+|\kappa|^2)^s |\widehat{f}(\kappa)|^2 < \infty.$$

O conjunto $H^s_{per}([0,L])$ é um espaço de Hilbert, munido do produto interno

$$(f,g)_{H^s_{per}([0,L])} := L \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} (1+|\kappa|^2)^s \widehat{f}(\kappa)\overline{\widehat{g}(\kappa)}, \ \forall \ f,g \in H^s_{per}([0,L]).$$

Definamos $L^2_{per}([0,L]) := H^0_{per}([0,L])$. Por sua vez, o conjunto $L^2_{per}([0,L])$ é um espaço de Hilbert, munido do produto interno

$$(f,g)_{L^2_{per}([0,L])} := \int_0^L f(x)\overline{g(x)} \ dx, \ \forall \ f,g \in L^2_{per}([0,L]).$$

Além disso, para todo $s \in \mathbb{R}$, $(H^s_{per}([0,L]))'$, o dual topológico de $H^s_{per}([0,L])$, é isometricamente isomorfo ao espaço $H^{-s}_{per}([0,L])$. Se $f \in H^{-s}_{per}([0,L])$ e $g \in H^s_{per}([0,L])$, o par dualidade é representado por

$$\langle f,g \rangle_{H^{-s}_{per}([0,L]),H^s_{per}([0,L])} := L \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\kappa)\overline{\widehat{g}(\kappa)}.$$

Vemos que $H^s_{per}([0,L]) \hookrightarrow H^r_{per}([0,L])$, sempre que $s \geq r$, onde $s, \ r \in \mathbb{R}$. Em particular, para cada $s \geq 0$, $H^s_{per}([0,L]) \hookrightarrow L^2_{per}([0,L])$. Complementamos que

$$H^1_{per}([0,L]) \hookrightarrow L^{p_1}_{per}([0,L]) \hookrightarrow L^{p_2}_{per}([0,L]), \ \forall \ p_1, p_2 \in [1,+\infty], \ p_1 \geq p_2.$$

Neste último caso, para $p \in [1, +\infty]$, convencionamos que

$$L^p_{per}([0,L]) := \{f;\ f \text{ é uma função } L-\text{periódica e } \ f|_{[0,L]} \in L^p([0,L])\}$$

e

$$\|f\|_{L^p_{per}([0,L])} = \|f\|_{L^p([0,L])},\ \forall\ f \in L^p_{per}([0,L]).$$

Seja $s = m \in \mathbb{Z}^+$. O Espaço de Sobolev $H^m_{per}([0,L])$ pode ser interpretado como o conjunto das distribuições periódicas $f \in \mathcal{P}'$ tais que

$$f^{(j)} \in L^2_{per}([0,L]),\ \forall\ j \in \{0,1,\dots,m\},$$

onde $f^{(j)}$ denota a j-ésima derivada de f, tomada no sentido de $\mathcal{P}'$. A norma

$$\|f\|_{H^m_{per}([0,L])} = \left(\sum_{j=0}^{m} \|f^{(j)}\|^2_{L^2_{per}([0,L])}\right)^{\frac{1}{2}},\ \forall\ f \in H^m_{per}([0,L]),$$

é equivalente à norma de $H^m_{per}([0,L])$ apresentada acima para índice geral.

No decorrer deste tese, por simplicidade, denotaremos a norma em $L^p_{per}([0,L])$ por $\|\cdot\|_{L^p}$ e a norma de $H^s_{per}([0,L])$ por $\|\cdot\|_{H^s}$. Além disso, para simplificar a notação, em alguns casos, denotaremos $L^p_{per}([0,L])$ e $H^s_{per}([0,L])$ simplesmente por L^p_{per} e H^s_{per}, respectivamente.

1.2 Funções Elípticas de Jacobi

Nesta seção, estabeleceremos algumas propriedades das integrais elípticas de Jacobi. Uma descrição mais detalhada pode ser encontrada nas referências [11] e [14].

Sejam $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $k \in (0,1)$. A integral elíptica do primeiro tipo é definida por

$$\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}} \equiv F(\varphi,k),$$

onde $y = \sin(\varphi)$. A integral elíptica do segundo tipo é definida por

$$\int_0^y \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\ dt = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}\ d\theta \equiv E(\varphi,k).$$

O número k é denominado o módulo da integral elíptica e o número $k' := \sqrt{1-k^2}$ é denominado o módulo complementar a k. O parâmetro φ é chamado o argumento da integral elíptica.

Como $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, temos que $0 \leq y \leq 1$. Se $y = 1$, as integrais acima são ditas completas. Neste caso, escrevemos

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}} \equiv F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \equiv K(k) \equiv K$$

e

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}\, d\theta \equiv E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \equiv E(k) \equiv E.$$

Vemos que $\lim\limits_{k\to 0^+} K(k) = \lim\limits_{k\to 0^+} E(k) = \dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{k\to 1^-} E(k) = 1$ e $\lim\limits_{k\to 1^-} K(k) = +\infty$. Além disto, para cada $k \in (0,1)$, $E(k) < K(k)$ e, são válidas as seguintes identidades

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E - k'^2 K}{kk'^2} \quad \text{e} \quad \frac{dE}{dk} = \frac{E-K}{k}.$$

Para $y_1 \in [0,1]$ e $k \in (0,1)$, consideremos a integral elíptica,

$$u(y_1; k) \equiv \int_0^{y_1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}} \equiv F(\varphi_1, k),$$

onde $\varphi_1 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ satisfaz $y_1 = \sin(\varphi_1)$. Para k fixado, u é uma função estritamente crescente na variável y_1. A inversa da função u, para k fixado, define a função senoidal, que é descrita por $sn(u; k) \equiv \sin(\varphi_1) = y_1$ e $\varphi_1 = \mathrm{am}(u; k)$ (a função $\mathrm{am}(u; k)$ é chamada função amplitude de u). Podemos escrever ainda, $y_1 = sn(u)$ quando não é necessário enfatizar o módulo k. As outras duas funções elípticas básicas, as funções cnoidal cn e dnoidal dn, são definidas em termos de sn da seguinte maneira:

$$cn(u;k) \equiv \sqrt{1-y_1^2} = \sqrt{1-sn^2(u;k)} \quad \text{e} \quad dn(u;k) \equiv \sqrt{1-k^2y_1^2} = \sqrt{1-k^2sn^2(u;k)}.$$

Vemos que estas funções são normalizadas, fazendo-se uso de $dn(0;k) = 1$, $cn(0;k) = 1$ e $sn(0;k) = 0$. As funções $dn(\cdot;k)$ e $cn(\cdot;k)$ são pares; a função $sn(\cdot;k)$ é ímpar. Além disso, tais funções são periódicas, com períodos mínimos dados por $2K$, $4K$ e $4K$ respectivamente, isto é,

$$dn(u+2K;k) = dn(u;k),\ cn(u+4K;k) = cn(u;k) \text{ e } sn(u+4K;k) = sn(u;k).$$

Para $k \in (0,1)$, estas as funções satisfazem as seguintes relações:

$$\begin{cases} sn^2(u;k) + cn^2(u;k) = 1,\ k'^2sn^2(u;k) + cn^2(u;k) = dn^2(u;k), \\[2ex] k^2sn^2(u;k) + dn^2(u;k) = 1,\ -1 \le sn(u;k) \le 1,\ -1 \le cn(u;k) \le 1, \\[2ex] k'^2 \le dn(u;k) \le 1,\ sn(u+2K;k) = -sn(u;k) \text{ e } cn(u+2K;k) = -cn(u;k). \end{cases}$$

Temos ainda que,

$$sn(0) = 0, \ \ cn(0) = 1 \ \ sn(K) = 1, \ \ cn(K) = 0,$$

e

$$sn(K) = 1, \ \lim_{k \to 0^+} sn(u;k) = \sin(u) \ \ \text{e} \ \ \lim_{k \to 1^-} sn(u;k) = \tanh(u).$$

Finalmente, tem-se as fórmulas para as derivadas

$$\frac{\partial}{\partial u} sn(u) = cn(u)dn(u), \ \frac{\partial}{\partial u} cn(u) = -sn(u)dn(u), \ \frac{\partial}{\partial u} dn(u) = -k^2 cn(u)sn(u).$$

1.3 Teoria de Floquet e Espectro do Operador de Hill

Nesta seção, apresentaremos um breve estudo da teoria Floquet e alguns resultados que caracterizam o espectro dos operadores de Hill. Além disso, enunciaremos resultados importantes que serão utilizados ao longo de todo o trabalho.

Sejam $L > 0$ e $\mathbb{K}$ designando o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Consideremos $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ uma função de classe C^2, L-periódica e consideremos a equação diferencial

$$-y'' + Q(x)y = 0. \tag{1.1}$$

Conforme [23], a equação (1.1) possui duas soluções $y_1 = y_1(x)$ e $y_2 = y_2(x)$, continuamente diferenciáveis, que são univocamente determinadas pelas condições iniciais

$$y_1(0) = 1, \ y_1'(0) = 0, \ y_2(0) = 0, \ y_2'(0) = 1. \tag{1.2}$$

Antes de estabelecermos o Teorema de Floquet, devemos definir a equação característica e o expoente característico associado à (1.1). Neste contexto, a equação característica é a equação

$$\rho^2 - [y_1(L) + y_2'(L)]\rho + 1 = 0, \tag{1.3}$$

e o expoente característico α é um número que satisfaz as equações

$$e^{i\alpha L} = \rho_1, \qquad e^{-i\alpha L} = \rho_2, \tag{1.4}$$

onde ρ_1 e ρ_2 são raízes da equação (1.3). Nestas condições, segundo [36], podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 1.1 (Teorema de Floquet)**.**

1. *Se $\rho_1 \neq \rho_2$, então, a equação (1.1) tem duas soluções linearmente independentes f_1 e f_2, de forma que $f_1(x) = e^{i\alpha x}P_1(x)$ e $f_2(x) = e^{-i\alpha x}P_2(x)$, onde P_1 e P_2 são duas funções periódicas com período L.*

2. *Se $\rho_1 = \rho_2$, há duas possibilidades: $\rho_1 = \rho_2 = 1$ e $\rho_1 = \rho_2 = -1$. Se $\rho_1 = \rho_2 = 1$, a equação (1.1) tem uma solução não-trivial periódica de período L. Se $\rho_1 = \rho_2 = -1$, a equação (1.1) tem uma solução não-trivial periódica de período $2L$. Suponhamos que $p(x)$ denote uma solução periódica de (1.1) e que $y(x)$ seja uma outra solução de (1.1), linearmente independente a $p(x)$. Então, existe uma constante θ, de modo que*

$$y(x+L) = \rho_1 y(x) + \theta p(x), \forall\ x \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Além disto, $\theta = 0$ se, e somente se,

$$y_1(L) + y_2'(L) = \pm 2,\ \ y_2(L) = 0\ \ e\ y_1'(L) = 0.$$

Demonstração: Ver página 4 em [36]. □

Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, fixo, consideremos agora a equação

$$y'' + [\lambda - Q(x)] = 0, \tag{1.6}$$

e sejam y_1 e y_2 duas soluções linearmente independentes determinadas pelas condições iniciais

$$y_1(0,\lambda) = 1,\ \ y_1'(0,\lambda) = 0,\ \ y_2(0,\lambda) = 0\ \text{ e }\ y_2'(0,\lambda) = 1.$$

O seguinte teorema, devido à Liapounoff e Haupt, juntamente com sua demonstração, pode ser encontrado em [36].

Teorema 1.2 (Teorema da Oscilação)**.** *Existem duas sequências de números reais monótonas não decrescentes,*

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \ldots \tag{1.7}$$

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \ldots, \tag{1.8}$$

tais que (1.6) possui uma solução de período L se, e somente se, $\lambda = \lambda_n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ e uma solução de período $2L$ se, e somente se, $\lambda = \mu_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Os λ_n's e μ_n's satisfazem as desigualdades,

$$\lambda_0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \mu_3 \leq \mu_4 < \lambda_3 \leq \lambda_4 \ldots \tag{1.9}$$

e as relações

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} = 0 \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu_n} = 0. \tag{1.10}$$

As soluções de (1.6) são limitadas nos intervalos

$$(\lambda_0, \mu_1), (\mu_2, \lambda_1), (\lambda_2, \mu_3), (\mu_4, \lambda_3), \ldots. \tag{1.11}$$

Nos pontos finais desses intervalos, (1.6) possui, em geral, soluções ilimitadas. Isto sempre é verdadeiro para $\lambda = \lambda_0$. *As soluções de (1.6) são limitadas para* $\lambda = \lambda_{2n+1}$ *ou* $\lambda = \lambda_{2n+2}$ *se, e somente se,* $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2}$ *e elas são limitadas para* $\lambda = \mu_{2n+1}$ *ou* $\lambda = \mu_{2n+2}$ *se, e somente se,* $\mu_{2n+1} = \mu_{2n+2}$. *Para valores complexos de* λ *(1.6) sempre possui soluções ilimitadas. Os* λ_n*'s são as raízes da equação* $\Delta(\lambda) = 2$ *e os* μ_n*'s são as raízes da equação* $\Delta(\lambda) = -2$, *onde*

$$\Delta(\lambda) = y_1(L, \lambda) + y_2'(L, \lambda). \tag{1.12}$$

Usando o Teorema da Oscilação, podemos caracterizar o espectro do operador de Hill

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}: \quad D(\mathcal{L}) = H^2_{per}([0,L]) \subset L^2_{per}([0,L]) & \to & L^2_{per}([0,L]) \\ y & \mapsto & \mathcal{L}y = -y'' + Q(x)y. \end{array} \tag{1.13}$$

Se $\sigma(\mathcal{L})$ denota o espectro do operador linear $\mathcal{L}$, então $\sigma(\mathcal{L}) = \sigma_{ess}(\mathcal{L}) \cup \sigma_{disc}(\mathcal{L})$, onde $\sigma_{ess}(\mathcal{L})$ e $\sigma_{disc}(\mathcal{L})$ denotam, respectivamente, o espectro essencial e o espectro discreto de $\mathcal{L}$, (veja [47]). Em verdade, temos que espectro de $\mathcal{L}$ coincide com o conjunto de seus autovalores e, portanto, $\sigma_{ess}(\mathcal{L}_\omega) = \emptyset$ (ver [37, Proposição 3.1.1]).

O próximo resultado, devido à Haupt, relaciona a posição do autovalor no espectro e o número de zeros das respectivas autofunções.

Teorema 1.3. *Seja* $y(x, \lambda)$ *uma solução real periódica não trivial de (1.6), com período* L *ou* $2L$.

1. *Se* $\lambda = \lambda_0$, *então* $y(x, \lambda)$ *não possui zeros no intervalo semiaberto* $0 \leq x < L$;
2. *Se* $\lambda = \mu_{2n+1}$ *ou* $\lambda = \mu_{2n}$, *então* y *tem exatamente* $2n + 1$ *zeros no intervalo semiaberto* $0 \leq x < 2L$;
3. *Se* $\lambda = \lambda_{2n-1}$ *ou* $\lambda = \lambda_{2n}$, *então* y *tem exatamente* $2n$ *zeros no intervalo semiaberto* $0 \leq x < L$.

Neves, em [41], apresentou uma nova versão para o item *(2)* do Teorema Floquet. Neste trabalho, o autor mostrou que a função $p(x)$ contém todas as informações necessárias para caracterizar o autovalor λ, a saber se λ é simples ou duplo e quando $\lambda = \lambda_{2n-1}$ ou $\lambda = \lambda_{2n}$.

Primeiramente, nas condições do item *(2)*, Neves apresentou uma caracterização para a solução y, da equação de Hill (1.1).

Teorema 1.4. *Seja $p(x)$ uma solução L-periódica de (1.1). Então, para cada $a \in \mathbb{R}$ fixado,*

$$y(x) = -q(x) + \left(\sum_{x_i \in (a,x]} j(x_i) \right) p(x) + 2p(x) \int_a^x \frac{q'(t)}{p(t)} dt, \tag{1.14}$$

é solução de (1.1) no intervalo $[a, a+L)$, e satisfaz a condição inicial

$$y(a) = -q(a), \;\; y'(a) = q'(a), \tag{1.15}$$

onde

$$q(x) = \frac{x - z_i}{p(x)}, \qquad x \in [x_{i-1}, x_i),$$

com $i = 2, 3, \ldots, 2n+1$, $z_{2n+1} = z_1 + L$ e $x_{2n+1} = x_1 + L$ e

$$j(x_i) = -\frac{z_{i+1} - z_i}{p^2(x_i)}.$$

Aqui, os z_i's e x_i's são os zeros de $p(x)$ e $p'(x)$, respectivamente. Em particular, $y(x)$ é linearmente independente de $p(x)$ e $W(p, y) = 1$.

Em seguida, Neves obteve uma nova versão para o item *(2)* do Teorema Floquet, que nos permite caracterizar a constante θ.

Teorema 1.5. *Se p(x) é uma solução L-periódica de (1.1) e $y(x)$ é a solução linearmente independente com $p(x)$ apresentada no teorema anterior, então*

$$y(x + L) = y(x) + \theta p(x), \tag{1.16}$$

onde θ é dado por

$$\theta = \sum_{x_i \in (0,\, L]} j(x_i) + 2 \int_0^L \frac{q'(x)}{p(x)} dx. \tag{1.17}$$

Em particular, $y(x)$ é L-periódica se, e somente se, $\theta = 0$.

Finalmente, o principal resultado de [41], nos permite saber a posição de um determinado autovalor no espectro, em vista do sinal da constante θ e da quantidade de zeros que a autofunção possui no intervalo $[0, L)$.

Teorema 1.6. *Se $p(x)$ é uma autofunção de $\mathcal{L}$ associada ao autovalor λ_k, $k \geq 1$ e θ é a constante dada pelo Teorema 1.5, então λ_k é simples se, e somente se, $\theta \neq 0$. Além disso, se $p(x)$ possui $2n$ zeros no intervalo semiaberto $[0, L)$, então $\lambda_k = \lambda_{2n-1}$, se $\theta < 0$ e $\lambda_k = \lambda_{2n}$, se $\theta > 0$.*

Seja $\mathcal{L}$ operador autoadjunto definido em um espaço de Hilbert H de dimensão infinita. O índice de inércia $In(L)$ é um par (n, z), onde n é a dimensão do autoespaço negativo de $\mathcal{L}$ (ou seja, a dimensão do espaço gerado pelas autofunções associadas aos autovalores estritamente negativos de $\mathcal{L}$) e z é a dimensão do autoespaço nulo de $\mathcal{L}$ (isto é, a dimensão do autoespaço associado ao autovalor 0 de $\mathcal{L}$).

Notemos que, se $\mathcal{L}$ for o operador autoadjunto definido em (1.13), vale o Teorema da Oscilação e, portanto, o índice $In(\mathcal{L})$ está bem definido. Isto pois, para cada $\gamma > 0$, existe uma quantidade finita de autovalores que são menores do que γ.

Definição 1.7. *Uma família de operadores autoadjuntos $\mathcal{L}_s$, que depende de um parâmetro $s \in \mathcal{V}$, onde $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, é chamada isoinercial se o índice de inércia $In(\mathcal{L}_s)$ não depender de $s \in \mathcal{V}$.*

Segundo [40] e [42], podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 1.8. *Seja $\mathcal{L}_s$ o operador de Hill*

$$\mathcal{L}_s h = -h'' + Q(x,s)h,$$

definido no domínio $D(\mathcal{L}_s) = H^2_{per}([0, L_s])$. Se $\lambda = 0$ é um autovalor para $\mathcal{L}_s$, para cada $s \in \mathcal{V}$, e o potencial $Q(x,s)$ é continuamente diferenciável, então, a família de operadores $\{\mathcal{L}_s\}_{s\in\mathcal{V}}$ é isoinercial com respeito ao parâmetro $s \in \mathcal{V}$. Em particular, a família $\{\mathcal{L}_s\}_{s\in\mathcal{V}}$ é isoinercial com respeito ao período L_s.

Capítulo 2

Estabilidade de Soluções do tipo Onda Viajante Periódica para a Equação de Schrödinger Cúbica-Quíntica

Neste capítulo, investigaremos a estabilidade orbital de soluções do tipo onda viajante para a equação de Schrödinger não linear, com potência cúbica-quíntica

$$iu_t + u_{xx} + a|u|^2u - b|u|^4u = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{2.1}$$

onde $a, b > 0$.

Estamos interessados em soluções da equação (2.1), que são da forma

$$u(x,t) = e^{i\omega t}e^{\frac{ic}{2}(x-ct)}\phi(x-ct), \tag{2.2}$$

onde $\omega, c \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$ e ϕ é uma função real, suave e periódica, de período $L > 0$. Notemos que a função

$$v(\xi) = e^{\frac{ic}{2}(\xi)}\phi(\xi)$$

nem sempre é uma função L-periódica. Assim, vamos assumir que c satisfaz a relação

$$q = \frac{Lc}{4\pi}, \tag{2.3}$$

para algum $q \in \mathbb{N}$.

Substituindo a expressão (2.2) na equação (2.1), vemos que ϕ deve satisfazer a seguinte equação diferencial ordinária

$$\phi''(\xi) + \left(\frac{c^2}{4} - \omega\right)\phi(\xi) + a\phi^3(\xi) - b\phi^5(\xi) = 0, \tag{2.4}$$

onde $\xi = x - ct$.

Para fazer o estudo da estabilidade orbital da equação (2.1), seguiremos as ideias propostas em [51] (ver também [39]), adaptadas para o caso periódico. Para isso, consideraremos as seguintes quantidades conservadas (ver Teorema 2.1)

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_0^L |u_x|^2 - \frac{a}{2}|u|^4 + \frac{b}{3}|u|^6 dx \tag{2.5}$$

e

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_0^L |u|^2 dx. \tag{2.6}$$

Escrevendo $u = u_R + iu_I$ e separando as partes reais e imaginárias, as quantidades (2.5) e (2.6) se tornam

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_0^L u_{R_x}^2 + u_{I_x}^2 - \frac{a}{2}(u_R^2 + u_I^2)^2 + \frac{b}{3}(u_R^2 + u_I^2)^3 dx \tag{2.7}$$

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_0^L u_R^2 + u_I^2 dx. \tag{2.8}$$

Deste modo, definindo o funcional conservado

$$G(u) = E(u) - \left(\frac{c^2}{4} - \omega\right) F(u), \tag{2.9}$$

vemos por (2.4), que $\Phi = (\phi, 0)$ é um ponto crítico de G. Além disso, podemos definir o operador $\mathcal{L}_\omega$, por $\mathcal{L}_\omega \sim G''(\Phi)$ (explicaremos melhor a definição de "$\sim$" na Observação 2.15), ou seja,

$$\mathcal{L}_\omega = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 - 3a\phi^2 + 5b\phi^4 - \left(\frac{c^2}{4} - \omega\right) & 0 \\ 0 & -\partial_x^2 - a\phi^2 + b\phi^4 - \left(\frac{c^2}{4} - \omega\right) \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

cujo conhecimento de quantidade e multiplicidade de autovalores não positivos será necessário na nossa análise de estabilidade.

Na primeira seção deste capítulo, provaremos que o problema de Cauchy, associado à equação (2.1), é globalmente bem colocado em $H^1_{per}([0, L])$. Na Seção 2.2 mostraremos a existência de soluções periódicas explícitas para equação (2.1). As propriedades espectrais de $\mathcal{L}_\omega$ serão estudados na Seção 2.3. Finalmente, na Seção 2.4, construiremos um funcional de Lyapunov conveniente para provar nosso resultado de estabilidade.

2.1 Boa Colocação

Nesta seção, veremos que o problema de Cauchy periódico associado à equação (2.1), dado por

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} = G(u), & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) \in H^s_{per}([0,L]), \end{cases} \tag{2.11}$$

onde $G(u) = -a|u|^2u + b|u|^4u$ e a e b são constantes reais positivas, é bem colocado em $H^s_{per}([0,L])$, com $s > \frac{1}{2}$. Nosso principal propósito é estabelecer um resultado de boa colocação global no espaço $H^1_{per}([0,L])$, pois nossa teoria de estabilidade exige tal resultado.

O resultado de boa colocação local para o nosso problema, segue as mesmas linhas do que foi provado em [25]. Para este fim, foi utilizado a teoria contida em [29], onde os autores estudaram a boa colocação do problema (2.11) assumindo hipóteses mais gerais para a função G, à saber,

(GNLS 1) $G : H^s_{per}([0,L]) \to H^s_{per}([0,L])$, para algum $s \in \mathbb{R}$, e $G(0) = 0$;

(GNLS 2) G é localmente Lipschitz, isto é,

$$\|G(v) - G(w)\|_{H^s} \leq C(\|v\|_{H^s}, \|w\|_{H^s})\|v - w\|_{H^s}, \ \forall v, w \in H^s_{per}([0,L]),$$

onde $C(\cdot,\cdot)$ é uma função contínua, não decrescente com respeito a cada um de seus argumentos. Em particular,

$$\|G(v)\|_{H^s} \leq C(\|v\|_{H^s}, 0)\|v\|_{H^s}, \forall v \in H^s_{per}([0,L]).$$

A demonstração do próximo resultado pode ser encontrada em [29, Capítulo 5] (ver também [25]).

Teorema 2.1. *O problema (2.11) é localmente bem posto em $H^s_{per}([0,L])$, para $s > \frac{1}{2}$ no seguinte sentido: dado $u_0 \in H^s_{per}([0,L])$, existem $T > 0$ e uma única função $u \in C([0,T], H^s_{per})$, tais que $u(0) = u_0$ e a equação diferencial é satisfeita no sentido que*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - i(\partial_x^2 u(t) - G(u(t))) \right\|_{H^{s-2}} = 0, \tag{2.12}$$

onde as derivadas em $t = 0$ e $t = T$ são calculadas pela direita e pela esquerda respectivamente. Ademais, a aplicação $u_0 \mapsto u$ é contínua entre espaços de funções adequados. Tem-se ainda as quantidades conservadas,

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_0^L |u_x|^2 - \frac{a}{2}|u|^4 + \frac{b}{3}|u|^6 dx \tag{2.13}$$

e

$$F(u)=\frac{1}{2}\int_0^L |u|^2dx. \tag{2.14}$$

Consideremos $u_0 \in H^s_{per}$ e definamos

$$T^*(u_0)=\sup\{T>0;\ \text{existe uma única solução de (2.11) em } [0,T]\}.$$

Teorema 2.2. *Sejam $s>\frac{1}{2}$ e $u_0 \in H^s_{per}([0,L])$. Então $T^*(u_0)=\infty$ ou $T^*(u_0)<\infty$ e*

$$\lim_{t\to T^*}\|u(t)\|_{H^s}=\infty. \tag{2.15}$$

Demonstração: Ver [29, Seção 5.2]. □

Teorema 2.3. *Seja $u_0 \in H^1_{per}([0,L])$. Então, a solução u do problema (2.11) é globalmente definida.*

Demonstração: Em virtude do Teorema 2.2, basta mostrarmos que a norma $\|u(t)\|_{H^1}$ com $t \in [0,T^*(u_0))$ é uniformemente limitada. Uma vez que a norma L^2_{per} é conservada, é suficiente provamos a limitação uniforme da quantidade $\|u_x\|^2_{L^2}$. De fato, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, obtemos

$$\|u\|^4_{L^4} \leq d_1(\|u_x\|_{L^2}\|u\|^3_{L^2}+\|u\|^4_{L^2}), \tag{2.16}$$

onde d_1 é uma constante positiva. Por outro lado, segue da desigualdade de Young que

$$\|u\|^4_{L^4} \leq \frac{1}{2a}\|u_x\|^2_{L^2}+\frac{d_1^2a}{2}\|u\|^6_{L^2}+d_1\|u\|^4_{L^2}. \tag{2.17}$$

Usando as estimativas (2.16) e (2.17), assim como as quantidades conservadas E e F, definidas em (2.13) e (2.14) respectivamente, vemos que

$$\begin{aligned}
\|u_x\|^2_{L^2} &= 2E(u)+\frac{a}{2}\|u\|^4_{L^4}-\frac{b}{3}\|u\|^6_{L^6}\\
&\leq 2E(u)+\frac{a}{2}\left(\frac{1}{2a}\|u_x\|^2_{L^2}+\frac{d_1^2a}{2}\|u\|^6_{L^2}+d_1\|u\|^4_{L^2}\right)\\
&= 2E(u)+\frac{1}{4}\|u_x\|^2_{L^2}+\frac{d_1^2a^2}{4}\|u\|^6_{L^2}+\frac{ad_1}{2}\|u\|^4_{L^2}.
\end{aligned}$$

Logo pelo fato de que E e F serem quantidades conservadas, deduzimos que

$$\|u_x\|^2_{L^2} \leq \frac{4}{3}(2E(u_0)+\tilde{C}F(u_0)^3+\tilde{D}F(u_0)^2), \tag{2.18}$$

onde $\tilde{C}$ e $\tilde{D}$ são constantes. Portanto, pelo Teorema 2.2, a solução u é global. □

2.2 Existências de Ondas Viajantes Periódicas

Nesta seção, explicitaremos soluções periódicas para a equação

$$iu_t + u_{xx} + a|u|^2u - b|u|^4u = 0, \tag{2.19}$$

as quais serão objetos de estudo da maior parte deste capítulo. Nossa abordagem é baseada nas referências [26] e [44].

Lembremos que u é uma função complexa nas variávies $x, t \in \mathbb{R}$ e a e b são constantes positivas.

Estamos interessados em soluções do tipo

$$u(x,t) = e^{i\omega t}e^{\frac{ic}{2}(x-ct)}\phi(x-ct), \tag{2.20}$$

onde $\omega, c \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$, ϕ é uma função real, suave e periódica.

Substituindo a função (2.20) na equação (2.19) e escrevendo $\xi = x - ct$, obtemos a equação diferencial ordinária

$$\phi''(\xi) + \left(\frac{c^2}{4} - \omega\right)\phi(\xi) + a\phi^3(\xi) - b\phi^5(\xi) = 0. \tag{2.21}$$

Multiplicando (2.21) por ϕ' e integrando uma vez, obtemos

$$(\phi')^2 = \frac{b}{3}\phi^6 - \frac{a}{2}\phi^4 - \frac{c^2-4\omega}{4}\phi^2 + M, \tag{2.22}$$

onde M é uma constante de integração.

Vamos assumir que a solução da equação (2.22) tem a forma

$$\phi(\xi) = \frac{\psi(\xi)}{\sqrt{\alpha\psi^2(\xi) + \beta}}, \tag{2.23}$$

onde ψ é solução da equação diferencial ordinária auxiliar

$$(\psi')^2 = p\psi^2 + \frac{q}{2}\psi^4 + r. \tag{2.24}$$

Substituindo a expressão (2.23) em (2.21), e comparando os coeficientes de ψ em (2.24), encontramos as seguintes relações

$$12\alpha^3M + 12\alpha^2\omega - 3\alpha^2c^2 + 4b - 6a\alpha = 0,$$

$$6\alpha^2M + 4\alpha\omega - \alpha c^2 - a = \beta q,$$

$$12\alpha M + 4\omega - c^2 = 4p$$

$$M\beta = r.$$

Consideremos $p = 2 - k^2$, $q = -2$ e $r = -(1-k^2)$, $k \in (0,1)$. Desta forma, a equação

(2.24) tem uma solução que é dado por $\psi(\xi) = dn(\xi, k)$. Consequentemente, a equação (2.21) tem como solução

$$\phi(\xi) = \phi_\omega(\xi) = \frac{dn(\xi, k)}{\sqrt{\alpha dn^2(\xi, k) + \beta}}, \tag{2.25}$$

onde ω, β e M satisfazem

$$\omega = \frac{2\alpha^2 k^2 + \alpha^2 c^2 - 2b - 4\alpha^2 + 3a\alpha}{4\alpha^2}, \tag{2.26}$$

$$\beta = \frac{2\alpha^2 k^2 + 2b - 4\alpha^2 - a\alpha}{4\alpha}, \tag{2.27}$$

$$M = -\frac{6\alpha^2 k^2 - 2b - 12\alpha^2 + 3a\alpha}{12\alpha^3}, \tag{2.28}$$

e α é raiz da equação

$$-12\alpha^4 k^4 + \alpha^2 \left(-8bk^2 + 16b + 3a^2\right) - 8a\alpha b + 4b^2 = 0. \tag{2.29}$$

Agora, vamos investigar de que maneira podemos considerar os parâmetro α, β, a fim de garantir $\alpha dn^2(\xi, k) + \beta > 0$, para todo $\xi \in \mathbb{R}$ e para todo $k \in (0, 1)$. É claro que α e β não podem ser negativos simultaneamente e, em virtude da limitação $0 < 1 - k^2 \leq dn(x, k) \leq 1$, devemos ter $\beta > -\alpha(1 - k^2)^2$, para todo $k \in (0, 1)$.

Por outro lado, vemos que (2.29) é uma equação biquadrada em k. Resolvendo esta equação em k, lembrando que $a, b > 0$ e $k \in (0, 1)$, encontramos duas possíveis expressões para k, que dependem do sinal de α,

$$k = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{16b^2 + 48\alpha^2 b - 24a\alpha b + 9a^2\alpha^2} - 2b}}{\sqrt{6}\alpha}. \tag{2.30}$$

Substituindo o valor de k^2 em β, para $a, b > 0$ fixos, podemos olhar β como uma função de α

$$\beta(\alpha) = \frac{\sqrt{16b^2 + (48\alpha^2 - 24a\alpha)\, b + 9a^2\alpha^2} + 4b - 12\alpha^2 - 3a\alpha}{12\alpha}. \tag{2.31}$$

Em verdade, para cada $a, b > 0$ fixos, a função $\beta(\alpha)$ possui duas assíntotas oblíquas, $f(\alpha) = -\alpha + \frac{\sqrt{16b+3a^2} - \sqrt{3}a}{4\sqrt{3}}$ e $g(\alpha) = -\alpha - \frac{\sqrt{16b+3a^2} - \sqrt{3}a}{4\sqrt{3}}$, uma assíntota vertical, $\alpha = 0$, e se anula em $\alpha = -\frac{\sqrt{16b+a^2}}{4} - \frac{a}{4}$ e $\alpha = \frac{\sqrt{16b+a^2}}{4} - \frac{a}{4}$.

Logo, se $\alpha \in (0, \frac{\sqrt{16b+a^2}}{4} - \frac{a}{4})$, então β será positivo, $k = \frac{\sqrt{\sqrt{16b^2+48\alpha^2 b - 24a\alpha b + 9a^2\alpha^2} - 2b}}{\sqrt{6}\alpha}$ e teremos $\alpha dn^2(\xi, k) + \beta > 0$, para todo $\xi \in \mathbb{R}$ e para todo $k \in (0, 1)$.

Com base no que foi apresentado nesta seção, podemos enunciar o seguinte resultado

Teorema 2.4. *Consideremos $L = 2K(k)$ e $c \in \mathbb{R}$, de tal modo que se verifica a igualdade*

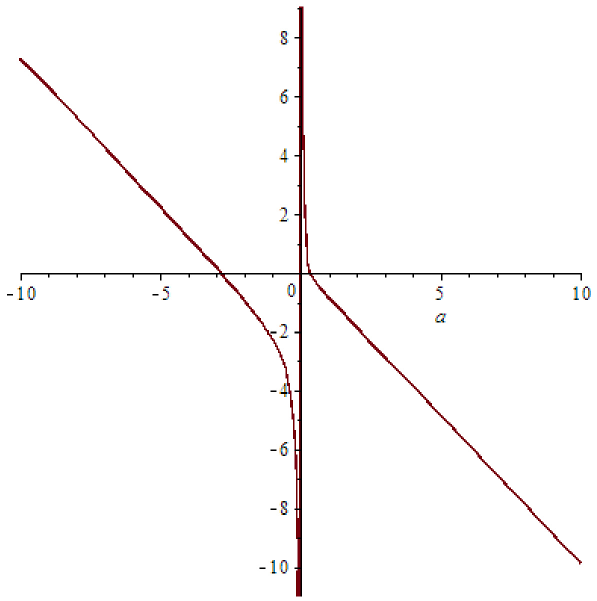

Figura 2.1: Gráfico da função $\beta(\alpha)$, onde $a = 5$, $b = 1$.

(2.3). A equação (2.21) possui solução da forma

$$\phi(\xi) = \frac{dn(\xi,k)}{\sqrt{\alpha dn^2(\xi,k) + \beta}}, \tag{2.32}$$

desde que o os parâmtros ω, β e M satisfaçam

$$\omega = \frac{2\alpha^2k^2 + \alpha^2c^2 - 2b - 4\alpha^2 + 3a\alpha}{4\alpha^2}, \qquad \beta = \frac{2\alpha^2k^2 + 2b - 4\alpha^2 - a\alpha}{4\alpha},$$

$$M = -\frac{6\alpha^2k^2 - 2b - 12\alpha^2 + 3a\alpha}{12\alpha^3},$$

onde α é raiz da equação

$$-12\alpha^4k^4 + \alpha^2\left(-8bk^2 + 16b + 3a^2\right) - 8a\alpha b + 4b^2 = 0. \tag{2.33}$$

Com dn tem período fundamental $2K$, onde $K = K(k)$ é a integral elíptica completa do primeiro tipo, segue que ϕ tem período fundamental $2K(k)$. Vemos que se $k \to 0^+$, então $\alpha \to \frac{4ab \pm 2b\sqrt{a^2-16b}}{16b+3a^2}$, $\beta \to \frac{2b-4\alpha^2-a\alpha}{4\alpha}$, $\omega \to \frac{\alpha^2c^2-2b-4\alpha^2+3a\alpha}{4\alpha^2}$.

Além disso, notemos que quando $k \to 1^-$, obtemos $\alpha \to \alpha_0 = \frac{3a-\sqrt{3}\sqrt{3a^2-16b}}{12}$, $\beta \to \beta_0 = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3a^2-16b}}{6}$, $c \to 0$, $\omega \to 1$, $\xi \to x$ e $dn(\xi, 1^-) \sim sech(\xi)$. Consequentemente,

$$\phi(\xi) \sim \frac{sech(x)}{\sqrt{\alpha_0 sech^2(x) + \beta_0}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\alpha_0 + \beta_0 + \beta_0 cosh\,(2x)}}, \qquad \text{se } k \to 1^-,$$

que é a solução onda solitária para (2.1), obtida em [43], no caso em que $\omega = 1$.

Observação 2.5. *Notemos que, para garantir que os parâmetros ω, β, α sejam reais, devemos considerar $a, b \in \mathbb{R}$, de modo que $a^2 - 16b > 0$. Além disso, se $\alpha \in (0, \frac{\sqrt{16b+a^2}}{4} - \frac{a}{4})$,* *então $\beta > 0$ e $\phi(\xi)$ é definida para todos $\xi \in \mathbb{R}$ e $k \in (0,1)$. Notemos também que existe uma relação entre os parâmetros c e ω, pois podemos escrever*

$$\omega - \frac{c^2}{4} = \frac{2\alpha^2 k^2 - 2b - 4\alpha^2 + 3a\alpha}{4\alpha^2}.$$

2.3 Análise Espectral

Devido à função ϕ, estabelecida em (2.32), podemos estudar as propriedades do operador linear $\mathcal{L}_\omega : H^2_{per}([0,L]) \times H^2_{per}([0,L]) \to L^2_{per}([0,L] \times L^2_{per}([0,L]))$, definido em (2.10). Pelo formato "diagonal" do operador $\mathcal{L}_\omega$, a análise do seu espectro pode ser feita levando em consideração separadamente a análise do espectro dos operadores lineares $\mathcal{L}^1_\omega$ e $\mathcal{L}^2_\omega$, descritos, respectivamente, por

$$\mathcal{L}^1_\omega = -\partial_x^2 - 3a\phi^2 + 5b\phi^4 - \left(\frac{c^2}{4} - \omega\right) \tag{2.34}$$

e

$$\mathcal{L}^2_\omega = -\partial_x^2 - a\phi^2 + b\phi^4 - \left(\frac{c^2}{4} - \omega\right). \tag{2.35}$$

Ao longo do desenvolvimento, mostraremos que, para alguns valores de a e b, o operador $\mathcal{L}_\omega$ possui exatamente um autovalor estritamente negativo, que é simples e, além disso, veremos que 0 é um autovalor duplo.

Teorema 2.6. *Considere $c \in \mathbb{R}$ tal que a relação (2.3) seja verificada. Então para valores de a e b de modo que a solução do tipo dnoidal ϕ é dada por (2.32), temos que o operador $\mathcal{L}^1_\omega$ em (2.34), definido em $L^2_{per}([0,L])$ e com domínio $H^2_{per}([0,L])$ tem exatamente um autovalor negativo o qual é simples; zero é um autovalor simples com autofunção ϕ'. Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.*

Demonstração: O operador linear $\mathcal{L}^1_\omega : H^2_{per}([0,L]) \to L^2_{per}([0,L])$ é um operador de Hill, autoadjunto, com domínio denso em $L^2_{per}([0,L])$. Pelo Teorema da Oscilação, o conjunto dos autovalores do operador $\mathcal{L}^1_\omega$ é infinito, tem apenas elementos reais e apresenta o seguinte comportamento

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \cdots < \lambda_{2n-1} \leq \lambda_{2n} < \ldots,$$

onde a igualdade $\lambda_{2n-1} = \lambda_{2n}$ significa que temos um autovalor duplo. Por outro lado, usando a igualdade

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1_\omega \phi' &= -\partial_x^2 \phi' - 3a\phi^2\phi' + 5b\phi^4\phi' - \left(\frac{c^2}{4} - \omega\right)\phi' && (2.36) \\ &= -\partial_x \left(\phi''(\xi) + \left(\frac{c^2}{4} - \omega\right)\phi(\xi) + a\phi^3(\xi) - b\phi^5(\xi)\right) = 0, && (2.37) \end{aligned}$$

vemos que 0 é um autovalor de $\mathcal{L}_\omega^1$ associado à autofunção ϕ'. Em vista do Teorema 1.8, concluímos que a família de operadores $\{\mathcal{L}_\omega^1\}$ é isoinercial, ou seja, para que conheçamos as outras propriedades espectrais dos operadores da família $\{\mathcal{L}_\omega^1\}$ é suficiente que estudemos o espectro do operador $\mathcal{L}_{\omega_0}^1$, para ω_0 fixo. Consideremos o PVI

$$\begin{cases} -\bar{y}'' - 3a\phi^2\bar{y} + 5b\phi^4\bar{y} - \left(\frac{c^2}{4} - \omega\right)\bar{y} \\ \bar{y}(0) = -\frac{1}{\phi''(0)} \\ \bar{y}'(0) = 0. \end{cases} \tag{2.38}$$

Usando a relação (1.5), temos

$$\theta = \frac{\bar{y}'(L_0)}{\phi''(0)}.$$

Com auxílio do programa *Maple*, deduzimos a constante θ associada a ϕ, para alguns valores de a e b que foram escolhido de acordo com as condições estabelecidas na Observação 2.5.

a	b	k	$\phi(0)$	$\phi'(0)$	$\phi''(0)$	$\bar{y}(0)$	L_0	$\bar{y}(L_0)$	$\bar{y}'(L_0)$	θ
5	1	0,1	0,706	0	-0,006	153,324	3,149	153,324	0,013	-2,079
7	2	0,1	0,599	0	-0,005	181,276	3,149	181,276	0,015	-2,880
8	2	0,1	0,540	0	-0,005	195,448	3,149	195,449	0,018	-3,684
10	3	0,1	0,481	0	-0,004	218,747	3,149	218,747	0,021	-4,666
20	22	0,1	0,384	0	-0,003	301,863	3,149	301,863	0,021	-6,532
30	50	0,1	0,315	0	-0,002	369,456	3,149	369,456	0,026	-9,692

Usando a tabela acima, constatamos que $\theta < 0$ e, desta forma, o Teorema 1.6 nos garante que $\lambda_1 = 0$. Logo, o operador $\mathcal{L}_\omega^1$ tem 0 como um autovalor simples e este operador apresenta um único autovalor estritamente negativo que também é simples. Desde que a família $\{\mathcal{L}_\omega^1\}$ é isoinercial, segue que todos os operadores da família $\{\mathcal{L}_\omega^1\}$, independentemente dos valores de $\omega \in \mathbb{R}$, têm 0 como um autovalor simples e admitem um único autovalor estritamente negativo que também é simples. □

Agora, estudaremos o espectro do operador $\mathcal{L}_\omega^2$.

Teorema 2.7. *O operador linear autoadjunto $\mathcal{L}_\omega^2$ definido em $L^2_{per}([0,L])$com domínio $H^2_{per}([0,L])$ não possui autovalor negativo; zero é um autovalor simples com autofunção ϕ. Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores.*

Demonstração: O operador $\mathcal{L}_\omega^2$, sobre $L^2_{per}([0,L])$, com domínio $H^2_{per}([0,L])$, é linear, autoadjunto e ilimitado. Além disto, usando a equação (2.21), vemos que 0 um autovalor de $\mathcal{L}_\omega^2$, associado à autofunção ϕ, pois

$$\mathcal{L}_\omega^2\phi = -\phi'' - a\phi^3 + b\phi^5 - \left(\frac{c^2}{4} - \omega\right)\phi = 0$$

Desde que função ϕ não tem zeros em $[0, L]$, segue, pela teoria Floquet, que zero é o primeiro autovalor de $\mathcal{L}_\omega^2$ e portanto é simples. $\square$

O próximo resultado garante que existe uma família suave de soluções do tipo onda periódica, com período $L > 0$ fixo, para a equação (2.21).

Proposição 2.8. *Sejam $\omega_0 > 0$ fixo e ϕ_{ω_0} a solução L_0-periódica de (2.21), onde $L_0 = 2K(k_0)$. Se $\theta \neq 0$, onde θ é a constante dada no Teorema 2.6, então existem uma vizinhança aberta $\mathcal{O} \subset (0, +\infty)$ de ω_0 e uma família $\phi_\omega \in H_{per}^1([0, L_0])$ de soluções L_0-periódicas para (2.21), que dependem suavemente de $\omega \in \mathcal{O}$.*

Demonstração: Ver [38, Teorema 3.3]. $\square$

2.4 Estabilidade

Sejam $(a, b) \in \mathcal{Y} := \{(5, 1), (7, 2), (8, 2), (10, 3), (20, 22), (30, 50)\}$, $\omega \in \mathcal{O}$ e $\{\phi_\omega\}_{\omega \in \mathcal{O}}$ a família L_0-periódica estabelecida na Proposição 2.8. Agora, seguindo a teoria proposta em [51] (ver também [39]), construiremos uma função de Lyapunov adequada, para provar a estabilidade da solução onda dnoidal ϕ, em (2.32), da equação (2.1).

Por toda essa seção, ζ denotará uma constante que pode variar com cada desigualdade. Além disso, por simplicidade, vamos adotar as notações $\mathbb{L}_{per}^2 = L_{per}^2 \times L_{per}^2$ e $\mathbb{H}_{per}^s = H_{per}^s \times H_{per}^s$, as normas nestes espaços por $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^2}$, $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^s}$ e os respectivos produtos internos por $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{L}^2}$ e $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{H}^s}$.

Inicialmente, notemos que a equação (2.1) pode ser interpretada como uma equação Hamiltoniana abstrata. De fato, escrevendo $u = u_R + iu_I$, onde u_R e u_I são funções reais, e separando as partes reais e imaginárias, vemos que a equação (2.1) é equivalente ao sistema

$$\frac{d}{dt}U(t) = JE'(U(t)), \tag{2.39}$$

onde E' represente a derivada de Fréchet de E com respeito à $U = \begin{pmatrix} u_R \\ u_I \end{pmatrix}$ e J é a matriz antissimétrica

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

A equação (2.1) possui duas simetrias básicas: translações e rotações. Isso significa que, se $u(x, t)$ é solução de (2.1), então $e^{-i\theta}u$ e $u(x - r, t)$ também são, quaisquer que sejam as constantes reais θ e r. Em outras palavras, se $U = \begin{pmatrix} u_R \\ u_I \end{pmatrix}$ é uma solução de

(2.39), então

$$T_1(\theta)U = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ u_I \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T_2(r)U = \begin{pmatrix} u_R(\cdot - r, \cdot) \\ u_I(\cdot - r, \cdot) \end{pmatrix}, \tag{2.41}$$

também são soluções de (2.39).

As transformações T_1 e T_2 definem grupos unitários sobre $\mathbb{L}^2_{per}([0, L_0])$ e seus geradores infinitesimais são, respectivamente

$$T_1'(0)U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ u_I \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u_R \\ u_I \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T_2'(0)U = \partial_x \begin{pmatrix} u_R \\ u_I \end{pmatrix}. \tag{2.42}$$

Dessa forma, nossa noção de estabilidade será módulo tais simetrias.

Definição 2.9. *Seja m um inteiro par. Definimos o conjunto $\Omega_\Phi \subset \mathbb{H}^{\frac{m}{2}}_{per}$, a óbita gerada por $\Phi = (\phi, 0)$, como sendo,*

$$\Omega_\Phi := \{T_1(\theta)T_2(r)\Phi; \theta, r \in \mathbb{R}\}.$$

Em $\mathbb{H}^{\frac{m}{2}}_{per}$, vamos definir a pseudométrica d por

$$d(f, g) := \inf\{\|f - T_1(\theta)T_2(r)g\|_{\mathbb{H}^{\frac{m}{2}}}; \theta, r \in \mathbb{R}\},$$

em particular, vemos que $d(f, \Omega_\Phi) = d(f, \Phi)$.

Com esta terminologia, dizemos que a solução onda periódica (2.20) da equação (2.39) é orbitalmente estável em $\mathbb{H}^{\frac{m}{2}}_{per}$ se:

1. *Existe $s_0 \in \mathbb{R}$, tal que $\mathbb{H}^{s_0}_{per} \subset \mathbb{H}^{\frac{m}{2}}_{per}$ e o problema de valor inicial associado à (2.39) é globalmente bem posto em $\mathbb{H}^{s_0}_{per}$.*

2. *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para cada $U_0 \in \mathbb{H}^{s_0}_{per}$ satisfazendo $\|U_0 - \Phi\|_{\mathbb{H}^{\frac{m}{2}}} < \delta$, a solução de (2.39), com $U(0, x) = U_0(x)$, satisfaz*

$$d(U(t), \Phi) < \varepsilon.$$

Caso contrário, dizemos que a solução (2.20) é orbitalmente instável em $\mathbb{H}^{\frac{m}{2}}_{per}$.

Antes de enunciarmos o teorema de estabilidade, provaremos alguns resultados úteis.

Lema 2.10. *Existe $\zeta_2 > 0$, tal que*

$$(\mathcal{L}^2_\omega Q, Q)_{L^2} \geq \zeta_2 \|Q\|^2_{L^2}, \tag{2.43}$$

para todo $Q \in H^2_{per}$, satisfazendo $(Q, \phi)_{L^2} = 0$.

Demonstração: Escrevamos $L^2_{per} = [\phi] \oplus M$, onde $\phi \perp Q_1$, para todo $Q_1 \in M$. Como ϕ pertence ao núcleo de $\mathcal{L}^2_\omega$, segue de [32, Teorema 6.17, p.178] que o espectro de $\mathcal{L}^2_\omega|_M$ é igual a $\sigma(\mathcal{L}^2_\omega) \setminus \{0\}$.

Por outro lado, usando o Teorema 2.7 e os argumentos em [32, p. 278], concluímos que o operador $\mathcal{L}^2_\omega$ é limitado por baixo. Sendo assim, existe $\zeta_2 > 0$, tal que

$$(\mathcal{L}^2_\omega Q_1, Q_1)_{L^2} \geq \zeta_2 \|Q_1\|^2_{L^2}, \qquad \text{para todo } Q_1 \in M \cap H^2_{per}. \tag{2.44}$$

Dado $Q \in H^2_{per}$, de modo que $(Q, \phi) = 0$, temos que $Q \in M$, isto conclui a demostração do lema. $\square$

O próximo resultado será estabelecido em vista do Lema E.1, proposto por Weinstein, [52].

Lema 2.11. *Sejam $L_0 > 0$ fixo, ϕ a onda L_0-periódica, obtida na Proposição 2.8 e ζ definido por*

$$\zeta := \inf\{(\mathcal{L}^1_\omega P, P)_{L^2}; P \in H^2_{per}, \|P\|_{L^2} = 1, (P, \phi)_{L^2} = 0\},$$

então, $\zeta = 0$.

Demonstração:

Segue do Teorema 2.6, que $\mathcal{L}^1_\omega$ é limitado por baixo, assim ζ é finito. Por outro lado, como $\mathcal{L}^1_\omega \phi' = 0$ e $(\phi', \phi)_{L^2} = 0$, deduzimos que $\zeta \leq 0$.

Consideremos $(P_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset H^2_{per}$, tal que $\|P_j\|_{L^2} = 1$, $(P_j, \phi)_{L^2} = 0$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e $(\mathcal{L}^1_\omega P_j, P_j)_{L^2} \to \zeta$, quando $j \to \infty$. Deste modo, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $(\mathcal{L}^1_\omega P_j, P_j)_{L^2} \leq M$, para todo $j \in \mathbb{N}$. A desigualdade de Garding (ver [53], p.175), nos garante que existem constantes positivas ϱ_1 e ϵ_1, de modo que

$$(\mathcal{L}^1_\omega P_j, P_j)_{L^2} \geq \epsilon_1 \|P_j\|^2_{H^2} - \varrho_1 \|P_j\|^2_{L^2},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e, em vista disto, obtemos que

$$\|P_j\|^2_{H^2} \leq \frac{M + \varrho_1}{\epsilon_1} = M_0, \ \ \forall j \in \mathbb{N},$$

donde concluímos que a sequência $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é limitada em H^2_{per}. Sendo assim, existem uma subsequência de $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de mesmo nome e uma função $P \in H^2_{per}([0, L])$, tais que $P_j \rightharpoonup P$ fracamente em $H^2_{per}([0, L])$.

Usando argumentos de compacidade, concluímos que $\|P\|_{L^2} = 1$ e $(P, \phi)_{L^2} = 0$. Também vemos que, pelo Lema de Fatou,

$$\zeta \leq (\mathcal{L}^1_\omega P, P)_{L^2} \leq \liminf_{j\in\mathbb{N}} (\mathcal{L}^1_\omega P_j, P_j)_{L^2} = \zeta,$$

o que garante que ζ é atingido na função P.

Veremos agora que existe uma função suave χ, tal que $\mathcal{L}^1_\omega \chi = \phi$. Com efeito, em (2.21), vemos que

$$\phi'' + a\phi^3 - b\phi^5 - \left(\frac{c^2}{4} - \omega\right)\phi = 0 \tag{2.45}$$

Derivando a expressão (2.45) com respeito ao parâmetro ω, encontramos

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \omega}\right)'' + 3a\phi^2 \frac{\partial \phi}{\partial \omega} - 5b\phi^4 \frac{\partial \phi}{\partial \omega} + \phi - \left(\frac{c^2}{4} - \omega\right)\frac{\partial \phi}{\partial \omega} = 0.$$

Logo,

$$\mathcal{L}^1_\omega \left(-\frac{\partial \phi}{\partial \omega}\right) = \phi.$$

Assim, como $\phi' \perp \phi$, temos

$$\chi := -\frac{\partial \phi}{\partial \omega} = (\mathcal{L}^1_\omega)^{-1}\phi.$$

Devido ao Lema E.1, em [52], se mostrarmos que $(\chi, \phi)_{L^2} \leq 0$, podemos concluir que $\zeta \geq 0$. De fato, vemos que

$$-I = (\chi, \phi)_{L^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \omega}\int_0^{L_0} \phi(\xi)^2 d\xi. \tag{2.46}$$

Usando a Proposição 2.8 e as ideias em [38], podemos calcular a quantidade I, resolvendo numericamente o PVI

$$\begin{cases} -\eta'' - 3a\phi^2\eta + 5b\phi^4\eta - \left(\frac{c_0^2}{4} - \omega_0\right)\eta = -\phi \\ \eta(0) = -\frac{1}{\bar{y}'(L_0)}\int_0^{L_0}\phi(x)\bar{y}(x)dx \\ \eta'(0) = 0, \end{cases} \tag{2.47}$$

onde $\eta := \frac{\partial \phi}{\partial \omega}$ e $\bar{y}$ é a solução do PVI (2.38). Aqui a condição inicial $\eta(0)$ foi obtida multiplicando a primeira equação de (2.47) por $\bar{y}$ e integrando o resultado em $[0, L_0]$. A condição $\eta'(0) = 0$ decorre do fato de ϕ ser uma função par.

Com o auxílio do programa *Mathematica*, calculamos a quantidade I para os valores de a, b e c escolhidos no Teorema 2.6.

a	b	k	$\phi(0)$	$\phi'(0)$	$\phi''(0)$	$y(0)$	L_0	I
5	1	0,1	0,706	0	-0,006	153,324	3,149	0,222
7	2	0,1	0,599	0	-0,005	181,276	3,149	0,162
8	2	0,1	0,540	0	-0,005	195,448	3,149	0,113
10	3	0,1	0,481	0	-0,004	218,747	3,149	0,088
20	22	0,1	0,384	0	-0,003	301,863	3,149	0,090
30	50	0,1	0,315	0	-0,002	369,456	3,149	0,062

Baseados na tabela acima, podemos concluir que existe $\widetilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$, tal que $(\chi, \phi)_{L^2} < 0$, para todo $\omega \in \widetilde{\mathcal{O}}$. Logo, pelo Lema E.1, $\zeta = 0$. $\square$

Lema 2.12. *Seja ζ_1 definido por*

$$\zeta_1 := \inf\{(\mathcal{L}_\omega^1 P, P)_{L^2}; P \in H^2_{per}, \|P\|_{L^2} = 1, (P,\phi)_{L^2} = (P,\phi')_{L^2} = 0\},$$

então $\zeta_1 > 0$.

Demonstração: Em virtude do Lema 2.11, temos que $\zeta_1 \geq 0$. Suponhamos, por absurdo que $\zeta_1 = 0$. Usando argumentos similares aos usados na prova do Lema 2.11, podemos concluir que o ínfimo é atingido em uma função $P \in H^2_{per}$, com $(P,\phi)_{L^2} = (P,\phi')_{L^2} = 0$ e $\|P\|_{L^2} = 1$. Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existem constante $\bar{m}, \bar{n}, \bar{r} \in \mathbb{R}$, tais que

$$\mathcal{L}_\omega^1 P = \bar{m}P + \bar{n}\phi + \bar{r}\phi'. \tag{2.48}$$

Fazendo o produto interno em L^2_{per} de (2.48) e P, vemos que $\zeta_1 = \bar{m} = 0$.

Por outro lado, como o operador $\mathcal{L}_\omega^1$ é autoadjunto, temos que

$$(\mathcal{L}_\omega^1 P, \phi')_{L^2} = \bar{r}\|\phi'\|^2_{L^2} = 0. \tag{2.49}$$

e assim $\bar{r} = 0$. Logo, $\mathcal{L}_\omega^1 P = \bar{n}\phi$.

Agora, como $\mathcal{L}_\omega^1 \chi = \bar{n}\phi$, onde $\chi = -\frac{\partial\phi}{\partial\omega}$, segue que $\mathcal{L}_\omega^1(P - \bar{n}\chi) = 0$. Como $\ker(\mathcal{L}_\omega^1) = [\phi']$, deduzimos que $P - \bar{n}\chi = \sigma\phi'$, para algum $\sigma \in \mathbb{R}$.

Calculando $(P - \bar{n}\chi, \phi)_{L^2}$ e usando o fato que $(\chi,\phi)_{L^2} < 0$, para $\alpha \in \widetilde{I} \subset (0, \frac{\sqrt{16b+a^2}}{4} - \frac{a}{4})$, concluímos que $\bar{n} = 0$. Logo, $P = \sigma\phi'$ com $\sigma \neq 0$, pois $\|P\|_{L^2} = 1$. Mas isto contradiz o fato de $(P,\phi')_{L^2} = 0$. Portanto, $\zeta_1 > 0$. $\square$

Corolário 2.13. *Seja $v = (P,Q) \in \mathbb{H}^2_{per}$, tal que*

$$(Q,\phi)_{L^2} = (P,\phi)_{L^2} = (P,\phi')_{L^2} = 0.$$

Então, existe $\zeta > 0$ tal que

$$(\mathcal{L}_\omega v, v)_{\mathbb{L}^2} \geq \zeta\|v\|^2_{\mathbb{L}^2}.$$

Demonstração: Segue dos Lemas 2.10 e 2.12 que existem $\zeta_1, \zeta_2 > 0$ tais que $(\mathcal{L}_\omega^2 Q, Q)_{L^2} \geq \zeta_2\|Q\|^2_{L^2}$ e $(\mathcal{L}_\omega^1 P, P)_{L^2} \geq \zeta_1\|P\|^2_{L^2}$. Como $\mathcal{L}_\omega v = (\mathcal{L}_\omega^1 P, \mathcal{L}_\omega^2 Q)$, basta consideramos $\zeta = \min\{\zeta_1, \zeta_2\}$. $\square$

Lema 2.14. *Existem constantes positivas ϱ e ϵ, tais que*

$$(\mathcal{L}_\omega v, v)_{\mathbb{L}^2} \geq \epsilon\|v\|^2_{\mathbb{H}^1} - \varrho\|v\|^2_{\mathbb{L}^2},$$

para todo $v = (P,Q) \in \mathbb{H}^2_{per}$.

Demonstração: A desigualdade de Garding (ver [53, p.175]) garante que existem constantes positivas $\epsilon_1, \epsilon_2, \varrho_1$ e ϱ_2, tais que

$$(\mathcal{L}^1_\omega P, P)_{L^2} \geq \epsilon_1 \|P\|^2_{H^1} - \varrho_1 \|P\|^2_{L^2} \text{ e } (\mathcal{L}^2_\omega Q, Q)_{L^2} \geq \epsilon_2 \|Q\|^2_{H^1} - \varrho_2 \|Q\|^2_{L^2}.$$

Assim, pela definição de $\mathcal{L}_\omega$, basta consideramos $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ e $\varrho = \max\{\varrho_1, \varrho_2\}$. □

Observação 2.15. *Vemos que $\mathcal{L}_\omega$ é o único operador linear autoadjunto que satisfaz*

$$\langle G''(\Phi)v, z\rangle = (\mathcal{L}_\omega v, z)_{\mathbb{L}^2}, \qquad v \in \mathbb{H}^4_{per}, z \in \mathbb{H}^2_{per}, \tag{2.50}$$

onde G'' representa a segunda derivada de Fréchet de G e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a dualidade em $\mathbb{H}^{-1}_{per}$. Em particular, $G''(\Phi)v = \mathcal{I}\mathcal{L}_\omega v$, para todo $v \in \mathbb{H}^4_{per}$, onde $\mathcal{I} : \mathbb{H}^1_{per} \to \mathbb{H}^{-1}_{per}$ é a injeção natural de $\mathbb{H}^1_{per}$ em $\mathbb{H}^{-1}_{per}$ com respeito ao produto em $\mathbb{L}^2$, isto é

$$\langle \mathcal{I}u, v\rangle = (u, v)_{\mathbb{L}^2}. \tag{2.51}$$

Lema 2.16. *Seja $v = (P, Q) \in \mathbb{H}^1_{per}$, satisfazendo*

$$(Q, \phi)_{L^2} = (P, \phi)_{L^2} = (P, \phi')_{L^2} = 0.$$

Então, existe $\zeta > 0$ tal que

$$\langle G''(\Phi)v, v\rangle \geq \zeta \|v\|^2_{\mathbb{H}^1}.$$

Demonstração: Por densidade, é suficiente considerarmos $v \in \mathbb{H}^4_{per}$. Combinando Corolário 2.13 e o Lema 2.14, obtemos que

$$\left(1 + \frac{\varrho}{\zeta}\right)(\mathcal{L}_\omega v, v)_{\mathbb{L}^2} \geq \epsilon \|v\|^2_{\mathbb{H}^1}.$$

Assim,

$$(\mathcal{L}_\omega v, v)_{\mathbb{L}^2} \geq \frac{\epsilon\zeta}{\varrho + \zeta} \|v\|^2_{\mathbb{H}^1}.$$

Pela observação anterior, concluímos o desejado. □

Seja $\mathcal{R} : \mathbb{H}^1_{per} \to \mathbb{H}^{-1}_{per}$ o isomorfismo de Riesz com respeito ao produto interno em $\mathbb{H}^1_{per}$, isto é

$$\langle \mathcal{R}u, v\rangle = (u, v)_{\mathbb{H}^1} \qquad u, v \in \mathbb{H}^1_{per}. \tag{2.52}$$

O Lema 2.16 estabelece a positividade do operador $G''(\Phi)$ sob condições de ortogonalidade em $\mathbb{L}^2_{per}$. O próximo lema mostra que a positividade é mantida se consideramos condições de ortogonalidade em $\mathbb{H}^1_{per}$.

Lema 2.17. *Sejam $\mathcal{I}$ o operador definido na Observação 2.15 e J definido em (2.40). Consideremos*

$$\mathcal{Z} = \{z \in \mathbb{H}^1; (z, J\Phi)_{\mathbb{H}^1} = (z, \Phi')_{\mathbb{H}^1} = (z, \mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}\Phi)_{\mathbb{H}^1} = 0\}.$$

Então, existe $\zeta > 0$, tal que

$$\langle G''(\Phi)z, z\rangle \geq \zeta \|z\|^2_{\mathbb{H}^1}, \qquad z \in \mathcal{Z}. \tag{2.53}$$

Demonstração: Primeiramente, definamos as funções

$$\varphi_1 := -\frac{1}{\|J\Phi\|_{\mathbb{L}^2}} J\Phi, \quad \varphi_2 := -\frac{1}{\|\Phi'\|_{\mathbb{L}^2}}\Phi', \quad \psi_1 := J\varphi_1, \quad \psi_2 := J\varphi_2.$$

Assim, $\|\varphi_1\|_{\mathbb{L}^2} = \|\varphi_2\|_{\mathbb{L}^2} = \|\psi_1\|_{\mathbb{L}^2} = \|\psi_2\|_{\mathbb{L}^2} = 1$ e sendo J antissimétrica, obtemos

$$(\varphi_1, \psi_1)_{\mathbb{L}^2} = (\varphi_2, \psi_2)_{\mathbb{L}^2} = (\varphi_1, \varphi_2)_{\mathbb{L}^2} = (\psi_1, \varphi_2)_{\mathbb{L}^2} = 0.$$

Dado $z \in \mathcal{Z}$, definamos

$$v := z - (z, \varphi_1)_{\mathbb{L}^2}\varphi_1 - (z, \varphi_2)_{\mathbb{L}^2}\varphi_2 - (z, \psi_1)_{\mathbb{L}^2}\psi_1.$$

Afirmamos que v satisfaz as hipóteses do Lema 2.16. De fato, como

$$(v, \varphi_1)_{\mathbb{L}^2} = (v, \varphi_2)_{\mathbb{L}^2} = (v, \psi_1)_{\mathbb{L}^2} = 0,$$

se assumirmos que v pode ser escrito como (P, Q), a igualdade anterior se torna

$$(Q, \phi)_{L^2} = (P, \phi)_{L^2} = (P, \phi')_{L^2} = 0.$$

Assim, pelo Lema 2.16, existe $\zeta > 0$, de modo que

$$\langle G''(\Phi)v, v\rangle \geq \zeta \|v\|^2_{\mathbb{H}^1} \tag{2.54}$$

e, por (2.52), podemos escrever

$$(\mathcal{R}^{-1}G''(\Phi)v, v)_{\mathbb{H}^1} \geq \zeta \|v\|^2_{\mathbb{H}^1}. \tag{2.55}$$

Notemos que, por (2.51) e (2.52), temos

$$(f, g)_{\mathbb{L}^2} = \langle \mathcal{I}f, g\rangle = (\mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}f, g)_{\mathbb{H}^1}, \qquad f, g \in \mathbb{H}^1_{per}. \tag{2.56}$$

Como, por hipótese

$$(z, \psi_1)_{\mathbb{L}^2} = \frac{1}{\|J\Phi\|_{\mathbb{L}^2}}(\Phi, z)_{\mathbb{L}^2} = \frac{1}{\|J\Phi\|_{\mathbb{L}^2}}(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}\Phi, z)_{\mathbb{H}^1} = 0,$$

segue que

$$v := z - (z, \varphi_1)_{\mathbb{L}^2}\varphi_1 - (z, \varphi_2)_{\mathbb{L}^2}\varphi_2. \tag{2.57}$$

Sendo φ_1 e φ_2 funções suaves e $\mathcal{L}_\omega \varphi_1 = \mathcal{L}_\omega \varphi_2 = 0$, por (2.50) $G''(\Phi)\varphi_1 = G''(\Phi)\varphi_2 = 0$. Portanto, por (2.57), temos

$$G''(\Phi)z = G''(\Phi)v. \tag{2.58}$$

Para simplificar a notação, denotemos $\alpha_1 = (z, \varphi_1)_{\mathbb{L}^2}$, $\alpha_2 = (z, \varphi_2)_{\mathbb{L}^2}$ e $S : \mathbb{H}^1_{per}[0, L_0] \to \mathbb{H}^1_{per}[0, L_0]$ o operador autoadjunto definido por $S := \mathcal{R}^{-1}G''(\Phi)$.

Como $z \in \mathcal{Z}$, vemos que

$$\|z\|^2_{\mathbb{H}^1} = (z, v + \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)_{\mathbb{H}^1} = (z, v)_{\mathbb{H}^1} + \alpha_1(z, \varphi_1)_{\mathbb{H}^1} + \alpha_2(z, \varphi_2)_{\mathbb{H}^1} = (z, v)_{\mathbb{H}^1}.$$

Fazendo uso da desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos

$$\|z\|^2_{\mathbb{H}^1} = |(z, v)_{\mathbb{H}^1}| \leq \|z\|_{\mathbb{H}^1}\|v\|_{\mathbb{H}^1},$$

isto é, $\|z\|_{\mathbb{H}^1} \leq \|v\|_{\mathbb{H}^1}$.

O fato de S ser autoadjunto e a igualdade (2.58) nos permite concluir

$$(Sz, z)_{\mathbb{H}^1} = (Sv, v)_{\mathbb{H}^1} + \alpha_1(Sv, \varphi_1)_{\mathbb{H}^1} + \alpha_2(Sv, \varphi_2)_{\mathbb{H}^1} = (Sv, v)_{\mathbb{H}^1}.$$

Finalmente, combinando a igualdade anterior com (2.55), segue que

$$(Sz, z)_{\mathbb{H}^1} = (Sv, v)_{\mathbb{H}^1} \geq \zeta\|v\|^2_{\mathbb{H}^1} \geq \zeta\|z\|^2_{\mathbb{H}^1}.$$

Logo, por (2.52) concluímos o desejado. □

Definição 2.18. *Dados um número real $\rho > 0$ e m um inteiro par, denotamos por Ω^ρ_Φ a ρ-vizinhança de Ω_Φ, isto é*

$$\Omega^\rho_\Phi = \{v \in \mathbb{H}^{\frac{m}{2}}_{per}, d(v, \Omega_\Phi) < \rho\}.$$

Lema 2.19. *Dados $\rho > 0$ e $v \in \Omega^\rho_\Phi$, existem $r_1, \theta_1 \in \mathbb{R}$ que satisfazem*

$$\|v - T_1(\theta_1)T_2(r_1)\Phi\|_{\mathbb{H}^1} < \rho$$

e

$$(v - T_1(\theta_1)T_2(r_1)\Phi, JT_1(\theta_1)T_2(r_1)\Phi)_{\mathbb{H}^1} = (v - T_1(\theta_1)T_2(r_1)\Phi, T_1(\theta_1)T_2(r_1)\Phi')_{\mathbb{H}^1} = 0.$$

Demonstração: Dado $v \in \Omega^\rho_\Phi$, existem $\theta_0 \in \mathbb{R}$ e $r_0 \in \mathbb{R}$ de modo que $\|v - T_1(\theta_0)T_2(r_0)\Phi\|_{\mathbb{H}^1} < \rho$.

Definamos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $f(\theta, r) = \|v - T_1(\theta)T_2(r)\Phi\|^2_{\mathbb{H}^1}$. Como Φ é suave, temos que f é de classe C^1. Assim, existem $\theta_1 \in [0, 2\pi]$ e $r_1 \in [0, L]$, tais que

$$f(\theta_1, r_1) := \min_{[0,2\pi]\times[0,L]} f(\theta, r) \leq f(\theta_0, r_0) < \rho^2.$$

Por outro lado, sendo f uma função periódica, podemos concluir que este mínimo é global. Logo $\nabla f(\theta_1, r_1) = 0$, isto é

$$(v - T_1(\theta_1)T_2(r_1)\Phi, JT_1(\theta_1)T_2(r_1)\Phi)_{\mathbb{H}^1} = (v - T_1(\theta_1)T_2(r_1)\Phi, T_1(\theta_1)T_2(r_1)\Phi')_{\mathbb{H}^1} = 0.$$

□

Agora, veremos a definição de funcional de Lyapunov, para então definirmos um funcional que atenda as nossas propostas.

Definição 2.20. *Uma função $V : \mathbb{H}^{\frac{m}{2}}_{per} \to \mathbb{R}$ é dita ser um funcional de Lyapunov para a orbita $\Omega_\Phi \subset \mathbb{H}^{\frac{m}{2}}_{per}$ se satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) Existe $\rho > 0$ tal que $V : \Omega^\rho_\Phi \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 e, para todo $v \in \Omega_\Phi$

$$V(v) = 0 \qquad e \qquad V'(v) = 0.$$

(ii) Existe $\kappa > 0$ tal que para todo $v \in \Omega^\rho_\Phi$, temos

$$V(v) \geq \kappa(d(v, \Omega_\Phi))^2.$$

(iii) Para todo $v \in \Omega^\rho_\Phi$, temos

$$\langle V'(v), Jv\rangle = \langle V'(v), \partial_x v\rangle = 0.$$

(iv) Se $u(t)$ é uma solução global para o problema de Cauchy (2.39) com dado inicial u_0, então $V(u(t)) = V(u_0)$, para todo $t \geq 0$.

Consideremos

$$q_1 = G(\Phi), \qquad q_2 = F(\Phi),$$

e definamos

$$V(v) = G(v) - q_1 + N(F(v) - q_2)^2. \tag{2.59}$$

Mostraremos que, para N suficientemente grande, V é uma função de Lyapunov para a óbita $\Omega_\Phi \subset \mathbb{H}^1_{per}$. Para tanto, precisaremos do seguinte resultado:

Lema 2.21. *Consideremos* $S : \mathbb{H}^1_{per}([0, L_0]) \to \mathbb{H}^1_{per}([0, L_0])$ *o operador autoadjunto definido por* $S := \mathcal{R}^{-1}G''(\Phi)$. *Existem constantes positivas* N *e* ζ, *tais que*

$$(Sv, v)_{\mathbb{H}^1} + 2N(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}\Phi, v)^2_{\mathbb{H}^1} \geq \zeta\|v\|^2_{\mathbb{H}^1},$$

para todo $v \in \{J\Phi, \Phi'\}^{\perp} = \{v \in \mathbb{H}^1, (v, J\Phi)_{\mathbb{H}^1} = (v, \Phi')_{\mathbb{H}^1} = 0\}$.

Demonstração: Primeiramente, notemos que, por (2.56), temos

$$(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}\Phi, J\Phi)_{\mathbb{H}^1} = (\Phi, J\Phi)_{\mathbb{L}^2} \tag{2.60}$$

e

$$(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}\Phi, \Phi')_{\mathbb{H}^1} = (\Phi, \Phi')_{\mathbb{L}^2}. \tag{2.61}$$

Deste modo, para $v \in \{J\Phi, \Phi'\}^{\perp}$, podemos encontrar constantes reais $\bar{p}, \bar{q}$ e $\bar{r}$, tais que

$$v = \bar{p}w + \bar{q}J\Phi + \bar{r}\Phi' + z, \tag{2.62}$$

com $w := \mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}\Phi/\|\mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}\Phi\|_{\mathbb{H}^1}$ e $z \in \{J\Phi, \Phi', \mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}\Phi\}^{\perp}$. O Lema 2.17 implica que

$$\begin{aligned}(Sv, v)_{\mathbb{H}^1} &= \bar{p}^2(Sw, w)_{\mathbb{H}^1} + 2\bar{p}(Sw, z)_{\mathbb{H}^1} + (Sz, z)_{\mathbb{H}^1} \\ &\geq \bar{p}^2(Sw, w)_{\mathbb{H}^1} + 2\bar{p}(Sw, z)_{\mathbb{H}^1} + \zeta\|z\|^2_{\mathbb{H}^1}.\end{aligned}$$

Mas, pelas desigualdades de Cauchy-Schwartz e Young, segue que

$$2(Sw, \bar{p}z)_{\mathbb{H}^1} \leq \frac{\zeta}{2}\|z\|^2_{\mathbb{H}^1} + \frac{2\bar{p}^2}{\zeta}\|Sw\|^2_{\mathbb{H}^1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}(Sv, v)_{\mathbb{H}^1} &\geq \bar{p}^2(Sw, w)_{\mathbb{H}^1} + 2\bar{p}(Sw, z)_{\mathbb{H}^1} + \zeta\|z\|^2_{\mathbb{H}^1} \\ &\geq \bar{p}^2(Sw, w)_{\mathbb{H}^1} - 2|(Sw, \bar{p}z)_{\mathbb{H}^1}| + \zeta\|z\|^2_{\mathbb{H}^1} \\ &\geq \bar{p}^2(Sw, w)_{\mathbb{H}^1} - \left(\frac{\zeta}{2}\|z\|^2_{\mathbb{H}^1} + \frac{2\bar{p}^2}{\zeta}\|Sw\|^2_{\mathbb{H}^1}\right) + \zeta\|z\|^2_{\mathbb{H}^1}.\end{aligned} \tag{2.63}$$

Denotando $\sigma := \|\mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}\Phi\|_{\mathbb{H}^1}$, podemos escrever

$$(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}\Phi, v)_{\mathbb{H}^1} = \sigma(w, v)_{\mathbb{H}^1}.$$

Escolhamos $N > 0$, de modo que

$$(Sw, w)_{\mathbb{H}^1} - \frac{2}{\zeta}\|Sw\|^2_{\mathbb{H}^1} + 2N\sigma^2 \geq \frac{\zeta}{2}. \tag{2.64}$$

Observemos que N não depende de v. Deste modo, por (2.64), obtemos

$$\begin{aligned}
(Sv,v)_{\mathbb{H}^1} \ &+ \ 2N(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}\Phi, v)^2_{\mathbb{H}^1} \\
&\geq \ \bar{p}^2(Sw,w)_{\mathbb{H}^1} - \left(\frac{\zeta}{2}\|z\|^2_{\mathbb{H}^1} + \frac{2\bar{p}^2}{\zeta}\|Sw\|^2_{\mathbb{H}^1}\right) + \zeta\|z\|^2_{\mathbb{H}^1} + 2N\bar{p}^2\sigma^2 \\
&\geq \ \bar{p}^2\left((Sw,w)_{\mathbb{H}^1} - \frac{2}{\zeta}\|Sw\|^2_{\mathbb{H}^1} + 2N\sigma^2\right) + \frac{\zeta}{2}\|z\|^2_{\mathbb{H}^1} \\
&\geq \ \frac{\zeta}{2}(\bar{p}^2 + \|z\|^2_{\mathbb{H}^1}).
\end{aligned}$$

Por fim, como $z \in \{J\Phi, \Phi', \mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}\Phi\}^{\perp}$

$$\begin{aligned}
\|v\|^2_{\mathbb{H}^1} \ &= \ (z+\bar{p}w, z+\bar{p}w)_{\mathbb{H}^1} \\
&= \ \|z\|^2_{\mathbb{H}^1} + 2\bar{p}(z,w)_{\mathbb{H}^1} + \bar{p}^2\|w\|^2_{\mathbb{H}^1} \\
&= \ \|z\|^2_{\mathbb{H}^1} + \bar{p}^2\|w\|^2_{\mathbb{H}^1}, \\
&= \ \|z\|^2_{\mathbb{H}^1} + \bar{p}^2,
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Proposição 2.22. *Existe $N > 0$, tal que o funcional definido em (2.59) é um funcional de Lyapunov para a órbita $\Omega_\Phi \subset \mathbb{H}^1_{per}([0, L_0])$.*

Demonstração: Como E e F são quantidades conservadas, e o problema de Cauchy associado à (2.39) é globalmente bem posto, temos que $V(u(t)) = V(u_0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, como E e F são de classe C^2, concluímos que V é de classe C^2. Logo, o item *(iv)* é válido.

Provemos o item *(i)*. Dado $v \in \Omega_\Phi$, existem $\theta_0, r_0 \in \mathbb{R}$ tais que $v = T_1(\theta_0)T_2(r_0)\Phi$. Pela definição de V, vemos que $V(\Phi) = 0$ Uma vez que E e F são invariantes por translação e rotação, podemos concluir que $V(v) = V(T_1(\theta_0)T_2(r_0)\Phi) = 0$. Por outro lado, como

$$\langle V'(u), v\rangle = \langle G'(u), v\rangle + 2N(F(u) - q_2)\langle F'(u), v\rangle, \qquad \forall u, v, \in \mathbb{H}^1_{per} \tag{2.65}$$

e Φ é ponto crítico de G, vemos que $V'(\Phi) = 0$. Portanto, para $v = T_1(\theta_0)T_2(r_0)\Phi$, obtemos $V'(v) = V'(T_1(\theta_0)T_2(r_0)\Phi) = 0$.

Se $v \in \Omega^\rho_\Phi$, como

$$G(T_1(\theta)v) = G(v), \quad F(T_1(\theta)v) = F(v)$$

para todos $\theta \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{H}^1_{per}$, obtemos

$$\langle V'(T_1(\theta)v), JT_1(\theta)v\rangle = \frac{d}{d\theta}V(T_1(\theta)v) = \frac{d}{d\theta}V(v) = 0, \tag{2.66}$$

isto é, $\langle V'(T_1(\theta)v), JT_1(\theta)v\rangle = 0$, para todos $\theta \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{H}^1_{per}$. Em particular, se $\theta = 0$, concluímos que $\langle V'(v), Jv\rangle = 0$. Analogamente, para verificar que $\langle V'(v), \partial_x v\rangle = 0$, basta notarmos que

$$G(T_2(r)v) = G(v), \quad F(T_2(r)v) = F(v),$$

para todos $r \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{H}^1_{per}$. Assim, o item *(iii)* é satisfeito.

Em virtude de (2.65), vemos que

$$\langle V''(u)v, v\rangle = \langle G''(u)v, v\rangle + 2N(F(u) - q_2)\langle F''(u)v, v\rangle + 2N\langle F'(u), v\rangle^2.$$

Em particular,

$$\begin{aligned}\langle V''(\Phi)v, v\rangle &= \langle G''(\Phi)v, v\rangle + 2N\langle F'(\Phi), v\rangle^2 \\ &= (\mathcal{R}^{-1}G''(\Phi), v, v)_{\mathbb{H}^1} + 2N(\mathcal{R}^{-1}F'(\Phi), v)^2_{\mathbb{H}^1}.\end{aligned}$$

Lembrando que

$$F(U) = \frac{1}{2}(U, U)_{\mathbb{L}^2} = \frac{1}{2}(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}U, U)_{\mathbb{H}^1} = \frac{1}{2}\langle \mathcal{I}U, U\rangle,$$

temos que $F' = \mathcal{I}$. Portanto,

$$\langle V''(\Phi)v, v\rangle = (Sv, v)_{\mathbb{H}^1} + 2N(\mathcal{R}\mathcal{I}\Phi, v)^2_{\mathbb{H}^1}$$

Pelo Lema 2.21, deduzimos que existem constantes positivas ζ e N, tais que

$$\langle V'', (\Phi)v, v\rangle \geq \zeta \|v\|^2_{\mathbb{H}^1}, \tag{2.67}$$

para todo $v \in \{J\Phi, \Phi'\}^\perp$. Como V é de classe C^2, usando a expansão de Taylor, vemos que

$$V(v) = V(\Phi) + \langle V'(\Phi), v - \Phi\rangle + \frac{1}{2}\langle V''(\Phi)(v - \Phi), v - \Phi\rangle + h(v),$$

onde h é uma função satisfazendo

$$\lim_{v \to \Phi} \frac{h(v)}{\|v - \Phi\|^2_{\mathbb{H}^1}} = 0.$$

Deste modo, dado $\zeta > 0$, existe $\rho > 0$ tal que

$$|h(v)| \leq \frac{\zeta}{4}\|v - \phi\|^2_{\mathbb{H}^1}, \tag{2.68}$$

para todo $v \in B_\rho(\Phi)$, onde $B_\rho(\Phi)$ denota a bola aberta em $\mathbb{H}^1_{per}$ de centro Φ e raio ρ. Como $V(\Phi) = 0$ e $V'(\Phi) = 0$, usando (2.67) e (2.68), obtemos, para $v \in B_\rho(\Phi)$ tal que

$(v-\Phi) \in \{J\Phi, \Phi'\}^{\perp}$, que

$$\begin{aligned} V(v) &= \frac{1}{2}\langle V''(\Phi)(v-\Phi), v-\Phi\rangle + h(v) \\ &\geq \frac{\zeta}{2}\|v-\Phi\|^2_{\mathbb{H}^1} - \frac{\zeta}{4}\|v-\Phi\|^2_{\mathbb{H}^1} \\ &= \frac{\zeta}{4}\|v-\Phi\|^2_{\mathbb{H}^1} \\ &\geq \frac{\zeta}{4}[d(v,\Phi)]^2. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Agora, consideremos $v \in \Omega^{\rho}_{\Phi}$. Em virtude do Lema 2.19, existem $\theta_1, r_1 \in \mathbb{R}$, tais que $u := T_1(-\theta_1)T_2(-r_1)v \in B_\rho(\Phi)$ e

$$(v - T_1(\theta_1)T_2(r_1)\Phi, JT_1(\theta_1)T_2(r_1)\Phi)_{\mathbb{H}^1} = (v - T_1(\theta_1)T_2(r_1)\Phi, T_1(\theta_1)T_2(r_1)\Phi')_{\mathbb{H}^1} = 0,$$

isto é, $\|u-\Phi\|_{\mathbb{H}^1} < \rho$ e $(u-\Phi) \in \{J\Phi, \Phi'\}^{\perp}$. Consequentemente, por (2.69), concluímos

$$V(v) = V(u) \geq \frac{\zeta}{4}[d(u,\Omega_\Phi)]^2 = \frac{\zeta}{4}[d(v,\Omega_\Phi)]^2,$$

o que prova o item *(ii)* e completa a prova da proposição. □

Finalmente, podemos provar nosso resultado de estabilidade.

Teorema 2.23. *Considere $(a,b) \in \mathcal{Y}$, $\omega \in \mathcal{O}$ e $\{\phi_\omega\}_{\omega\in\mathcal{O}}$ a família de soluções L_0-periódica para a equação (2.21). Então a onda viajante periódica*

$$U(x,t) = \begin{pmatrix} \phi(x-ct)\cos(\omega t + \frac{c}{2}(x-ct)) \\ \phi(x-ct)\sin(\omega t + \frac{c}{2}(x-ct)) \end{pmatrix}$$

é orbitalmente estável em $\mathbb{H}^1_{per}([0,L_0])$.

Demonstração: Fixemos $\varepsilon > 0$ e consideremos $V : \Omega^{\rho}_{\Phi} \to \mathbb{R}$ a função de Lyapunov, dada na Proposição 2.22. Como $V(\Phi) = 0$ e V é contínua, existe $\delta \in (0,\rho)$ tal que

$$V(v) = V(v) - V(\Phi) < \kappa \min\left\{\frac{\rho^2}{4}, \varepsilon^2\right\} \quad v \in B_\delta(\Phi),$$

onde κ é a constante que aparece na Definição 2.20. A invariância de V com respeito as simetrias T_1 e T_2, implica que

$$V(v) < \kappa \min\left\{\frac{\rho^2}{4}, \varepsilon^2\right\} \quad v \in \Omega^{\delta}_{\Phi}. \tag{2.70}$$

Seja $U_0 \in \mathbb{H}^1_{per}$ uma função de modo que $U_0 \in B_\delta(\Phi)$. Pelo Teorema 2.3, a solução $U(t)$ do problema (2.39), associado ao dado inicial U_0, é definido para todo $t \geq 0$. Consideremos $\mathcal{W}$ o intervalo definido por

$$\mathcal{W} = \{s > 0, U(t) \in \Omega^{\rho}_{\Phi} \text{ para todo } t \in [0,s)\}.$$

O fato de $\delta \in (0, \rho)$ e a dependência contínua de $U(t)$ com relação ao dado inicial implicam que $\mathcal{W}$ é um intervalo não vazio e $\inf \mathcal{W} = 0$. Queremos mostrar que $\mathcal{W}$ é um intervalo ilimitado, isto é, $s^* = \sup \mathcal{W} = \infty$. Suponhamos por contradição que $s^* < \infty$. Combinando os itens *(ii)* e *(iv)* da Definição 2.20, obtemos

$$\kappa[d(U(t), \Omega_\Phi)]^2 \leq V(U(t)) = V(U_0) < \kappa \frac{\rho^2}{4},$$

para todo $t \in [0, s^*)$, onde na última desigualdade nós usamos o fato que $U_0 \in B_\delta(\Phi)$ e (2.70). Assim, nós concluímos que $d(U(t), \Omega_\Phi) < \frac{\rho}{2}$, para todo $t \in [0, s^*)$.

Sendo $U(t)$ contínua, temos que a função $t \mapsto d(U(t), \Omega_\Phi)$ é contínua. Consequentemente, $d(U(s^*), \Omega_\Phi) \leq \frac{\rho}{2}$. A continuidade de $U(t)$ implica também que $\sup \mathcal{W} > s^*$, o que é uma contradição. Portanto, $\mathcal{W} = [0, \infty)$ e

$$\kappa[d(U(t), \Omega_\Phi)]^2 \leq V(U(t)) = V(U_0) < \kappa \varepsilon^2,$$

para todo $t \geq 0$, o que completa a prova do teorema. □

Capítulo 3

Estabilidade de Soluções do tipo Onda Estacionária Periódica para uma Equação de Schrödinger de Quarta Ordem

No presente capítulo, vamos estudar a estabilidade de soluções do tipo onda estacionária periódica, associadas à equação de Schrödinger

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + \frac{1}{2}|u|^2 u + \nu\partial_x^4 u + \nu\mathcal{N}(u, \bar{u}, \partial_x u, \partial_x \bar{u}, \partial_x^2 u, \partial_x^2 \bar{u}) = 0, \tag{3.1}$$

onde $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é periódica na variável espacial x, ν é uma constante real e o termo não linear $\mathcal{N}$ é definido por

$$\mathcal{N}(u, \bar{u}, \partial_x u, \partial_x \bar{u}, \partial_x^2 u, \partial_x^2 \bar{u}) = \frac{3}{8}|u|^4 u + \frac{3}{2}(\partial_x u)^2 \bar{u} + |\partial_x u|^2 u + \frac{1}{2}u^2 \partial_x^2 \bar{u} + 2|u|^2 \partial_x^2 u.$$

A equação (3.1) possui infinitas quantidades conservadas. As três primeiras quantidades conservadas são dadas por

$$F(u) := \frac{1}{2}\int_0^L |u|^2 dx, \tag{3.2}$$

$$E_1(u) \;:=\; \frac{1}{2}\int_0^L |\partial_x u|^2 dx - \frac{1}{8}\int_0^L |u|^4 dx, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} E_2(u) \;:=\; & \frac{1}{2}\int_0^L |\partial_x^2 u|^2 dx + \frac{1}{16}\int_0^L |u|^6 dx \\ & + \frac{1}{4}\mathrm{Re}\int_0^L |u|^2 \bar{u}\partial_x^2 u dx - \frac{1}{2}\int_0^L |u|^2 |\partial_x u|^2 dx. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Em geral, as quantidades conservadas podem ser expressas por

$$P_j(u) := \frac{1}{2}\int_0^L |u^{(j)}|^2 dx + \int_0^L q_j(u_R, u_I, ..., u_R^{(j-1)}, u_I^{(j-1)})dx, \qquad j \in \mathbb{N}, \tag{3.5}$$

onde u_R, u_I são as funções reais, $u = u_R + iu_I$ e q_j é um polinômio (para mais detalhes, ver [33], [35] e [49]).

Mediante as quantidades conservadas (3.2)-(3.4), podemos definir a quantidade conservada auxiliar

$$E(u) = E_1(u) - \nu E_2(u), \tag{3.6}$$

e o funcional

$$G(u) = E(u) + cF(u) = E_1(u) - \nu E_2(u) + cF(u). \tag{3.7}$$

Inicialmente, apresentaremos um resultado relativo à boa colocação global desta equação. Conforme [49], podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Seja $m \geq 8$, um inteiro par. Dado $u_0 \in H_{per}^{\frac{m}{2}}([0, L])$, existe uma única solução forte u de (3.1), tal que $u \in C([0, T], H_{per}^{\frac{m}{2}})$, para todo $T > 0$. Além disso, a função dado-solução $H_{per}^{\frac{m}{2}}([0, L]) \to C([0, T]; H_{per}^{\frac{m}{2}}[0, L])$ é contínua.*

Demonstração: Para demonstrar este resultado, basta notar que, combinando a quantidade conservada $P_{\frac{m}{2}}$ e a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, obtemos a estimativa a priori $\|u(t)\|_{H^{\frac{m}{2}}} \leq C(\|u_0\|_{H^{\frac{m}{2}}})$. Portanto, a boa colocação global de (3.1) segue diretamente da teoria de boa colocação local (ver [49, Teorema 1.1]) e da estimativa a priori definida em (3.5) (ver [49, Teorema 1.2]). □

3.1 Existências de Ondas Estacionárias Periódicas

Consideremos $c, \omega \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$, e suponhamos a existência de uma função suave e L-periódica $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$u(x, t) = e^{ict}\phi(x), \tag{3.8}$$

seja uma solução clássica para a equação (3.1), para todo $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Substituindo a função (3.8) na equação (3.1), obtemos a seguinte equação diferencial ordinária não linear

$$-c\phi + \phi'' + \frac{1}{2}\phi^3 + \nu\left(\phi'''' + \frac{3}{8}\phi^5 + \frac{5}{2}(\phi')^2\phi + \frac{5}{2}\phi^2\phi''\right) = 0. \tag{3.9}$$

Notemos que, se $\nu = 0$, então a equação (3.1) se torna a equação de Schrödinger com não-linearidade polinomial cúbica e a equação (3.9) torna-se

$$-\omega\phi + \phi'' + \frac{1}{2}\phi^3 = 0. \tag{3.10}$$

Em [4], o autor mostrou que a equação (3.10) tem solução periódica explícita da forma

$$\phi(x) = \phi_\omega(x) = \eta_1 dn\left(\frac{\eta_1}{2}x, k\right), \qquad \text{com } k^2 = \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{\eta_1^2}, \tag{3.11}$$

onde $0 < \eta_2 < \eta_1$ são constantes reais que dependem de ω e satisfazem

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 = 4\omega. \tag{3.12}$$

Vemos também em [4], que existe uma curva suave (dependendo de ω) de soluções ondas dnoidais para (3.10).

Teorema 3.2. *Seja $L > 0$ arbitrariamente fixado. Consideremos $\omega_0 > \frac{2\pi^2}{L^2}$ e o único $\eta_{2,0} = \eta_2(\omega_0) \in (0, \sqrt{2\omega})$, tal que $T_{\phi_{\omega_0}} := \frac{4}{\sqrt{(4\omega_0 - \eta_{2,0}^2)}} K(k(\eta_{2,0})) = L$. Então,*

1. *Existem um intervalo $J(\omega_0)$ com ω_0 em seu interior, um intervalo $B(\eta_{2,0})$ com η_2 em seu interior e uma única função $\Lambda : J(\omega_0) \to B(\eta_{2,0})$, tal que $\Lambda(\omega_0) = \eta_{2,0}$ e*

$$L = \frac{4}{\sqrt{(4\omega - \eta_2^2)}} K(k(\eta_2)),$$

   onde $\omega \in J(\omega_0)$, $\eta_2 = \Lambda(\omega)$ e $k^2 = k^2(\omega) \in (0, 1)$ é definido por $k^2 = \frac{4\omega - 2\eta_2^2}{4\omega - \eta_2^2}$.

2. *A solução onda dnoidal em (3.11), determinada por $\eta_1 = \eta_1(\omega)$, $\eta_2 = \eta_2(\omega)$ tem período fundamental L e satisfaz (3.10). Além disso, a aplicação*

$$\omega \in J(\omega_0) \mapsto \phi \in H^n_{per}([0, L]) \qquad n \geq 4$$

   é uma função suave.

3. *$J(\omega_0)$ pode ser escolhido como $\left(\frac{2\pi^2}{L^2}, \infty\right)$.*

Demonstração: Ver Teorema 2.1 em [4] □

Corolário 3.3. *Consideremos a aplicação $\Lambda : J(\omega_0) \to B(\eta_{2,0})$ determinado pelo teorema anterior. Então Λ é uma função estritamente decrescente em $J(\omega_0)$.*

Demonstração: Ver Corolário 2.2 em [4]. □

Com o propósito de estudarmos o caso em que $\nu \neq 0$, adaptamos o trabalho em [35], e mostramos que se (3.11) é uma solução periódica de (3.10), então (3.11) é também uma solução periódica para a EDO (3.9). Mais precisamente, provamos o seguinte teorema.

Teorema 3.4. *Sejam ω e ϕ dados no Teorema 3.2. Se c satisfaz $c = \nu\omega^2 + \omega - A\nu$, onde A a constante de integração que aparece na forma da quadratura de (3.10), então $e^{ict}\phi$ é uma solução para (3.1).*

Demonstração: Sabemos que $\phi(x) = \eta_1(\omega) dn(\frac{\eta_1(\omega)}{2}x, k)$ é solução de (3.10). Diferenciando (3.10) duas vezes, temos

$$\phi'''' = \omega^2\phi - \frac{1}{2}\omega\phi^3 - 3\phi(\phi')^2 - \frac{3}{2}\phi^2\phi''. \tag{3.13}$$

Usando as identidades (3.10) e (3.13), obtemos

$$-A\nu\phi - c\phi + \phi'' + \nu\phi'''' = -\frac{1}{2}(1+\nu\omega)\phi^3 - 3\nu\phi(\phi')^2 - \frac{3}{2}\nu\phi^2\phi''. \tag{3.14}$$

Aqui usamos a relação $\nu\omega^2 + \omega - A\nu - c = 0$. Por outro lado, multiplicando (3.10) por ϕ' e integrando o resultado, vemos que

$$(\phi')^2 = \omega\phi^2 - \frac{1}{4}\phi^4 + 2A\phi.$$

Logo,

$$\begin{aligned} -3\nu\phi(\phi')^2 &= \left(\frac{3}{2}\nu - 4\nu\right)\phi(\phi')^2 + \left(-\frac{3}{2}\nu + \nu\right)\phi(\phi')^2 \qquad (3.15)\\ &= \left(\frac{3}{2}\nu - 4\nu\right)\phi(\phi')^2 + \omega\left(-\frac{3}{2}\nu + \nu\right)\phi^3 - \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\nu + \nu\right)\phi^5 - A\nu\phi. \end{aligned}$$

Por outro lado, a identidade (3.10) implica

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}\nu\phi^2\phi'' &= \left(-\frac{3}{2}\nu - \nu\right)\phi^2\phi'' + \left(\frac{3}{2}\nu - \frac{\nu}{2}\right)\phi^2\phi'' \qquad (3.16)\\ &= \left(-\frac{3}{2}\nu - \nu\right)\phi^2\phi'' + \omega\left(\frac{3}{2}\nu - \frac{\nu}{2}\right)\phi^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\nu - \frac{\nu}{2}\right)\phi^5. \end{aligned}$$

Substituindo (3.15) e (3.16) em (3.14), conseguimos

$$-c\phi + \phi'' + \frac{1}{2}\phi^3 + \nu\left(\phi'''' + \frac{3}{8}\phi^5 + \frac{5}{2}(\phi')^2\phi + \frac{5}{2}\phi^2\phi''\right) = 0,$$

o que conclui o desejado. $\square$

3.2 Análise Espectral

Nesta seção estudaremos as propriedades espectrais do operador linearizado $\mathcal{L}_\nu : \mathbb{H}^4_{per}([0,L]) \to \mathbb{L}^2_{per}([0,L])$, caracterizado por

$$\mathcal{L}_\nu(f,g) := \begin{pmatrix} \mathcal{L}^1_\nu f & 0 \\ 0 & \mathcal{L}^2_\nu g \end{pmatrix}, \tag{3.17}$$

onde $\mathcal{L}^1_\nu$ e $\mathcal{L}^2_\nu$ são os operadores lineares definidos, respectivamente, por

$$\mathcal{L}^1_\nu f := -\partial_x^2 f + cf - \frac{3}{2}\phi^2 f - \nu\left(\partial_x^4 f + \frac{15}{8}\phi^4 f + \frac{5}{2}\phi_x^2 f + 5\phi\phi_x\partial_x f + 5\phi\phi_{xx} f + \frac{5}{2}\phi^2\partial_x^2 f\right)$$

e

$$\mathcal{L}_\nu^2 g := -\partial_x^2 g + cg - \frac{1}{2}\phi^2 g - \nu\left(\partial_x^4 g + \frac{3}{8}\phi^4 g + \frac{1}{2}\phi_x^2 g + 3\phi\phi_x\partial_x g + \phi\phi_{xx} g + \frac{3}{2}\phi^2\partial_x^2 g\right).$$

Nossa estratégia para estudar o espectro do operador (3.17) será analisar o espectro do operador $\mathcal{L}_\nu$ no caso em que $\nu = 0$ e, utilizando a teoria da perturbação de operadores, em [32], mostrar que, para ν próximo de zero, o operador $\mathcal{L}_\nu$ possui a mesma estrutura espectral deste operador.

De fato, consideremos o operador linear $\mathcal{L}_0 : \mathbb{H}^4_{per}([0,L]) \to \mathbb{L}^2_{per}([0,L])$, definido por

$$\mathcal{L}_0(f,g) := \begin{pmatrix} -\partial_x^2 f + \omega f - \frac{3}{2}\phi^2 f & 0 \\ 0 & -\partial_x^2 g + \omega g - \frac{1}{2}\phi^2 g \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Fazendo o uso da teoria Floquet associada à equação de Lamé, em [4] o autor mostrou que o operador $\mathcal{L}_0$ possui as seguintes propriedades espectrais:

Teorema 3.5. *Sejam ϕ a onda dnoidal dada em (3.11) e $\omega \in (\frac{2\pi^2}{L^2}, +\infty)$. Então*

1. *o operador linear $\mathcal{L}_0^1 = -\partial_x^2 + \omega - \frac{3}{2}\phi^2$, definido em $L^2_{per}[0,L]$, com domínio $H^4_{per}[0,L]$ tem um único autovalor negativo, que é simples. Além disso, zero é um autovalor simples associado à função ϕ' e o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores limitado longe de zero;*

2. *o operador linear $\mathcal{L}_0^2 = -\partial_x^2 + \omega - \frac{1}{2}\phi^2$, definido em $L^2_{per}[0,L]$, com domínio $H^4_{per}[0,L]$ é um operador não negativo que tem o espectro constituído por um conjunto discreto de autovalores. O autovalor zero é simples, associado à autofunção ϕ, e o restante do espectro é limitado longe de zero.*

Demonstração: Ver Teorema 3.1 em [4]. $\square$

O próximo resultado mostra que $\mathcal{L}_\nu \longrightarrow \mathcal{L}_0$, quando $\nu \longleftrightarrow 0$, em $\mathcal{C}(\mathbb{L}^2_{per})$, o espaço dos operadores fechados de $\mathbb{L}^2_{per}$ em $\mathbb{L}^2_{per}$.

Teorema 3.6. *Consideremos $L > 0$ fixado e $c = \omega + \nu\omega^2 - A\nu$, conforme o Teorema 3.4. Sejam $\mathcal{L}_0 : \mathbb{H}^4_{per}([0,L]) \to \mathbb{L}^2_{per}([0,L])$ e $\mathcal{L}_\nu : \mathbb{H}^4_{per}([0,L]) \to \mathbb{L}^2_{per}([0,L])$ os operadores definidos em (3.18) e (3.17), respectivamente. Então*

$$\lim_{\nu\to 0} \hat{\delta}(\mathcal{L}_\nu, \mathcal{L}_0) = 0,$$

onde $\hat{\delta}$ é a métrica definida em $\mathcal{C}(\mathbb{L}^2_{per})$. Ademais, se $\nu \approx 0$, então o operador $\mathcal{L}_\nu$ tem um único autovalor negativo, que é simples. O autovalor zero é duplo com autofunções associadas $(\phi', 0)$ e $(0, \phi)$. Além disso, o restante do espectro é constituído por um conjunto discreto de autovalores que estão longe de zero.

Demonstração: Mostremos que $\mathcal{L}_\nu^1 \to \mathcal{L}_0^1$ uniformemente. Seja $f \in H^4_{per}([0,L])$ tal que $\|f\|_{H^4} = 1$. Temos que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}_\nu^1 f - \mathcal{L}_0^1 f\|_{L^2} &= |\nu| \|\omega^2 f + \partial_x^4 f + \frac{15}{8}\phi^4 f + \frac{5}{2}\phi_x^2 f + 5\phi\phi_x\partial_x f + 5\phi\phi_{xx} f + \frac{5}{2}\phi^2\partial_x^2 f\|_{L^2} \\
&\leq |\nu|((\omega^2 + c_1)\|f\|_{L^2} + \|\partial_x^4 f\|_{L^2} + c_2\|\partial_x f\|_{L^2} + c_3\|\partial_x^2 f\|_{L^2}) \\
&\leq M|\nu|\|f\|_{H^4} \\
&= M|\nu|
\end{aligned}$$

onde $M = \max\{1, (\omega^2 + c_1), c_2, c_3\}$ e c_1, c_2, c_3 são constante positivas. Logo,

$$\sup_{\|f\|_{H^4}=1} \|\mathcal{L}_\nu^1 f - \mathcal{L}_0^1 f\|_{L^2} \leq M|\nu| \longrightarrow 0 \tag{3.19}$$

Consideremos $B > 0$, por (3.19), temos que $(\mathcal{L}_\nu^1 + B) \longrightarrow (\mathcal{L}_0^1 + B)$ uniformemente em $H^4_{per}([0,L])$, quando $\nu \longrightarrow 0$. Se B é suficientemente grande, o operador $(\mathcal{L}_\nu^1 + B)$ é invertível, com inversa limitada. Pela continuidade da inversa e o fato de $(\mathcal{L}_0^1 + B)$ também ser invertível, com inversa limitada, obtemos que $(\mathcal{L}_\nu^1 + B)^{-1} \longrightarrow (\mathcal{L}_0^1 + B)^{-1}$ uniformemente em $L^2_{per}([0,L])$, quando $\nu \longrightarrow 0$. De modo análogo, concluímos que $(\mathcal{L}_\nu^2 + B)^{-1} \to (\mathcal{L}_0^2 + B)^{-1}$ uniformemente em $L^2_{per}([0,L])$, quando $\nu \longrightarrow 0$. Em virtude de [32, Teorema 2.23, p.206], resulta que

$$\lim_{\nu\to 0} \hat{\delta}(\mathcal{L}_\nu, \mathcal{L}_0) = 0.$$

Usando o Teorema 3.5 e [32, Teorema 3.16, p.212], obtemos o restante da demonstração. □

3.3 Estabilidade

Nesta seção veremos que, se $|\nu|$ for suficientemente pequeno e $\nu > -\frac{1}{2\omega - \frac{\partial A}{\partial \omega}}$, as soluções de (3.1), obtidas na Seção 3.1, são orbitalmente estáveis, no sentido da Definição 2.20, nos espaços de Sobolev periódicos $H^{\frac{m}{2}}_{per}([0,L])$, onde $m \geq 4$ é um inteiro par. No caso em que $m = 4$, provaremos a estabilidade usando o método abordado na Seção 2.4 e, para $m \geq 6$ par, adaptaremos a teoria proposta em [35] para obter a estabilidade.

Notemos inicialmente que, a equação (3.1) é invariante por rotações e translações e é, formalmente, equivalente ao sistema Hamiltoniano

$$\frac{d}{dt}U(t) = JE'(U(t)), \tag{3.20}$$

onde $E(U(t)) := E_1(U(t)) - \nu E_2(U(t))$, E' representa a derivada de Fréchet de E com respeito a $U(t) = \begin{pmatrix} u_R \\ u_I \end{pmatrix}$, e J é a matriz definida em (2.40).

Além disso, temos que $\mathcal{L}_\nu$ é o único operador linear autoadjunto que satisfaz

$$\langle G''(\Phi)v, z\rangle = (\mathcal{L}_\nu v, z)_{\mathbb{L}^2}, \qquad v \in \mathbb{H}^6_{per}, z \in \mathbb{H}^2_{per}, \tag{3.21}$$

onde G'' é a segunda derivada de Fréchet de G, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a dualidade em $\mathbb{H}^{-2}_{per}$ e $\Phi = (\phi, 0)$. Em particular, vemos que $G''(\Phi)v = \mathcal{I}\mathcal{L}_\nu v$, para todo $v \in \mathbb{H}^6_{per}$, onde $\mathcal{I} : \mathbb{H}^2_{per}([0,L]) \to \mathbb{H}^{-2}_{per}([0,L])$ a injeção natural de $\mathbb{H}^2_{per}$ em $\mathbb{H}^{-2}_{per}$, com respeito ao produto interno em $\mathbb{L}^2_{per}([0,L])$, ou seja

$$\langle \mathcal{I}u, v\rangle = (u, v)_{\mathbb{L}^2}, \qquad u, v \in \mathbb{H}^2_{per}([0,L]). \tag{3.22}$$

Assim, devido às propriedades espectrais de $\mathcal{L}_\nu$, apresentadas no Teorema 3.6, se provarmos um resultado semelhante ao Lema 2.11 para o operador $\mathcal{L}^1_\nu$, usando uma argumentação similar àquela detalhada na Seção 2.4, fazendo as alterações necessárias, podemos construir um funcional de Lyapunov para a óbita $\Omega_\Phi \subset \mathbb{H}^2_{per}([0,L])$.

Lema 3.7. *Seja γ definido por*

$$\gamma := \inf\{(\mathcal{L}^1_\nu P, P)_{L^2}; P \in H^4_{per}, \|P\|_{L^2} = 1, (P, \phi)_{L^2} = 0\}.$$

Se $|\nu|$ for suficientemente pequeno, então $\gamma = 0$.

Demonstração: Definamos

$$\zeta := \inf\{\langle \mathcal{L}^1_\nu P, P\rangle; P \in H^2_{per}, \|P\|_{L^2} = 1, (P, \phi)_{L^2} = 0\}. \tag{3.23}$$

Para provar que $\gamma = 0$, é suficiente mostrarmos que $\zeta = 0$ e que o ínfimo em (3.23) é atingido, pois, neste caso, a teoria de Multiplicadores de Lagrange implica que $\zeta = \gamma$.

Uma vez que $|\nu|$ é pequeno, em virtude do Teorema 3.6, temos que $\mathcal{L}^1_\nu$ é limitado por baixo, assim ζ é finito. Por outro lado, como $\mathcal{L}^1_\nu \phi' = 0$ e $(\phi', \phi)_{L^2} = 0$, podemos concluir que $\zeta \le 0$. Vejamos agora que o ínfimo é atingido.

Com efeito, consideremos $(P_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset H^2_{per}$, tal que $\|P_j\|_{L^2} = 1$, $(P_j, \phi)_{L^2} = 0$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e $\langle \mathcal{L}^1_\nu P_j, P_j\rangle \to \zeta$, quando $j \to \infty$. Deste modo, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\langle \mathcal{L}^1_\nu P_j, P_j\rangle \le M$, para todo $j \in \mathbb{N}$. A desigualdade de Garding (ver [53], p.175), nos garante que existem constantes positivas ϱ e ϵ, de modo que

$$\langle \mathcal{L}^1_\nu P_j, P_j\rangle \ge \epsilon\|P_j\|^2_{H^2} - \varrho\|P_j\|^2_{L^2},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e, em vista disto, deduzimos que

$$\|P_j\|^2_{H^2} \le \frac{M + \varrho}{\epsilon} = M_0, \ \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Como $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em H^2_{per}, existem uma subsequência de mesmo nome e $P \in H^2_{per}$, tais que $P_j \rightharpoonup P$ em H^2_{per}. Consequentemente, $P_j \rightharpoonup P$ em L^2_{per} e

$(P,\phi)_{L^2}=0$. Como a imersão $H^2_{per}\hookrightarrow L^2_{per}$ é compacta, temos que $\|P\|_{L^2}=1$ e $P_j\to P$ forte em L^2_{per}. Além disto, pelo Lema de Fatou, segue que

$$\zeta\leq\langle\mathcal{L}^1_\nu P,P\rangle\leq\liminf\langle\mathcal{L}^1_\nu P_j,P_j\rangle=\zeta,$$

o que garante que o ζ é atingido na função P.

Agora, mostraremos que $\zeta\geq 0$ e para isto, usaremos o Lema E.1 em [52]. De fato, derivando a equação (3.9) com relação a ω, lembrando que $c=\nu\omega^2+\omega-A\nu$, obtemos

$$\mathcal{L}^1_\nu\left(\frac{\partial\phi}{\partial\omega}\right)=-\left(2\nu\omega+1-\nu\frac{\partial A}{\partial\omega}\right)\phi. \tag{3.24}$$

Consideremos $\nu\neq-\frac{1}{2\omega-\frac{\partial A}{\partial\omega}}$ e definamos

$$\chi=-\frac{1}{\nu\left(2\omega-\frac{\partial A}{\partial\omega}\right)+1}\frac{\partial\phi}{\partial\omega}.$$

Desde que $\phi\perp\phi'$, podemos escrever

$$(\mathcal{L}^1_\nu)^{-1}(\phi)=\chi.$$

Resta-nos agora verificar que

$$((\mathcal{L}^1_\nu)^{-1}(\phi),\phi)_{L^2}=(\chi,\phi)_{L^2}=-\frac{1}{\nu\left(2\omega-\frac{\partial A}{\partial\omega}\right)+1}\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{1}{2}\int_0^L\phi^2(x)dx\leq 0$$

De fato, como dn é uma função par e tem período fundamental $2K(k)$, fazendo mudança de variável $\xi=\frac{\eta_1 x}{2}$, obtemos

$$\|\phi\|^2_{L^2}=2\eta_1\int_0^{\frac{\eta_1}{2}L}dn^2(\xi,k)d\xi=\frac{16K(k)}{L}\int_0^{K(k)}dn^2(\xi,k)d\xi.$$

Agora usando que

$$\int_0^{K(k)}cn^2(\xi,k)d\xi=\frac{1}{k^2}[E(k)-(1-k^2)K(k)],$$

juntamente com a relação $dn^2(\xi,k)=1-k^2+k^2cn^2(\xi,k)$, vemos que

$$\frac{1}{2}\int_0^L\phi^2(x)dx=\frac{8}{L}K(k)E(k).$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{1}{2}\int_0^L\phi^2(x)dx=\frac{8}{L}\frac{d}{dk}(K(k)E(k))\frac{dk}{d\omega}.$$

Devido ao Teorema 3.2 e ao Corolário 3.3, vemos que a aplicação $\omega\mapsto\Lambda(\omega)=\eta_2(\omega)$

é estritamente decrescente e, sendo assim,

$$\frac{dk}{d\omega}=\frac{1}{2k}\frac{4\eta_2^2-8\omega\eta_2'\eta_2}{\left(4\omega-{\eta_2}^2\right)^2}>0. \tag{3.25}$$

Além disso, uma vez que aplicação $k\in(0,1)\mapsto K(k)E(k)$ é uma função estritamente crescente, entendemos que

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{1}{2}\int_0^L\phi^2(x)dx>0.$$

Provemos agora que $-\frac{1}{2\omega-\frac{\partial A}{\partial\omega}}<0$. De fato, notemos que, usando as relações, em [4], dadas por

$$A=-\frac{1}{8}(4\omega-\eta_2^2)\eta_2^2,\qquad k^2=\frac{4\omega-2\eta_2^2}{4\omega-\eta_2^2}\quad\text{e}\quad L=\frac{4K(k)}{\sqrt{4\omega-\eta_2^2}}, \tag{3.26}$$

encontramos

$$\eta_2=\frac{4\sqrt{1-k^2}K\left(k\right)}{L},\qquad\omega=\frac{4\left(2-k^2\right)K\left(k\right)^2}{L^2}\quad\text{e }A=\frac{32\left(k^2-1\right)K\left(k\right)^4}{L^4}. \tag{3.27}$$

Deste modo,

$$\frac{\partial A}{\partial\omega}=\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{32\left(k^2-1\right)K\left(k\right)^4}{L^4}\right)\frac{\partial k}{\partial\omega}=-\frac{64K\left(k\right)^3\left(k^2K\left(k\right)-2K\left(k\right)+2E\left(k\right)\right)}{kL^4}\frac{\partial k}{\partial\omega}.$$

Como $\frac{\partial k}{\partial\omega}>0$, podemos escrever

$$\frac{\partial k}{\partial\omega}=\frac{1}{\frac{\partial\omega}{\partial k}}=\frac{k\left(1-k^2\right)L^2}{8K\left(k\right)\left(2k^2K\left(k\right)-2K\left(k\right)-k^2E\left(k\right)+2E\left(k\right)\right)}. \tag{3.28}$$

Logo,

$$-\frac{1}{2\omega-\frac{\partial A}{\partial\omega}}=\frac{L^2\left(\left(2-2k^2\right)K\left(k\right)+\left(k^2-2\right)E\left(k\right)\right)}{8K\left(k\right)^2\left(\left(-3k^4+9k^2-6\right)K\left(k\right)+\left(k^4-6k^2+6\right)E\left(k\right)\right)}. \tag{3.29}$$

Notemos inicialmente que $\lim_{k\to0^+}-\frac{1}{2\omega-\frac{\partial A}{\partial\omega}}=-\frac{3L^2}{10\pi^2}$ e $\lim_{k\to1^-}-\frac{1}{2\omega-\frac{\partial A}{\partial\omega}}=0$.

Além disso, vemos que $\left(2-2k^2\right)K\left(k\right)+\left(k^2-2\right)E\left(k\right)<0$, pois definindo a função $f(k)=\left(2-2k^2\right)K\left(k\right)+\left(k^2-2\right)E\left(k\right)$, temos que $\lim_{k\to0^+}f(k)=0$. Assim, como $K(k)>E(k)$ para $k\in(0,1)$, obtemos que $f'(k)=3k\left(E\left(k\right)-K\left(k\right)\right)<0$, donde segue que f é uma função estritamente decrescente em $(0,1)$.

Definamos agora a função $g(k)=\left(-3k^4+9k^2-6\right)K\left(k\right)+\left(k^4-6k^2+6\right)E\left(k\right)$ e observemos que $\lim_{k\to0^+}g(k)=0$. Assim, para mostrarmos que $-\frac{1}{2\omega-\frac{\partial A}{\partial\omega}}<0$, basta verificar que $g(k)$ é estritamente crescente em $(0,1)$. De fato, temos

$$g'(k)=5k\left(\left(3-2k^2\right)K\left(k\right)-\left(3-k^2\right)E\left(k\right)\right) \tag{3.30}$$

Notando que $(3-2k^2)\,K(k) > (3-k^2)\,E(k)$ se $k \in (0,1)$, pela igualdade (3.29) concluímos o desejado.

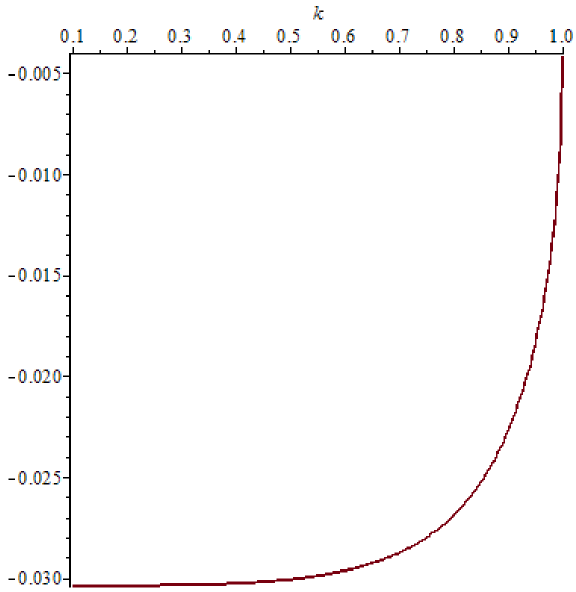

Figura 3.1: Gráfico da função $-(2\omega - \frac{\partial A}{\partial \omega})^{-1}$, para $L = 1$.

Portanto, se $\nu > -\frac{1}{2\omega - \frac{\partial A}{\partial \omega}}$, obtemos

$$-\frac{1}{\nu\left(2\omega - \frac{\partial A}{\partial \omega}\right) + 1}\frac{\partial}{\partial \omega}\frac{1}{2}\int_0^L \phi^2(x)dx < 0.$$

Logo, pelo Lema E1 em [52], temos que $\zeta \geq 0$ e consequentemente, $\zeta = \gamma = 0$. $\square$

Nas condições do Lema 3.7, podemos adaptar os resultados da Seção 2.4 de acordo com os domínios do operador $\mathcal{L}_\nu$ e do funcional G e mostrar o seguinte resultado:

Proposição 3.8. *Existe $N > 0$ tal que o funcional $V : \mathbb{H}^2_{per}([0,L]) \to \mathbb{R}$, definido por*

$$V(v) = G(v) - q_1 + N(F(u) - q_2)^2, \tag{3.31}$$

onde $q_1 = G(\Phi)$ e $q_2 = F(\Phi)$, é um funcional de Lyapunov para a órbita $\Omega_\Phi \subset \mathbb{H}^2_{per}([0,L])$.

Finalmente, estamos em condições de provar o principal teorema deste capítulo.

Teorema 3.9. *Consideremos $|\nu|$ suficientemente pequeno e $\nu > -\frac{1}{2\omega - \frac{\partial A}{\partial \omega}}$. Seja ϕ a solução periódica de (3.20), então a onda*

$$U(x,t) = \begin{pmatrix} \phi(x)\cos(ct) \\ \phi(x)\sin(ct) \end{pmatrix}$$

é orbitalmente estável em $\mathbb{H}^{\frac{m}{2}}_{per}([0,L])$, onde $m \in 2\mathbb{Z}$ e $m \geq 4$.

Demonstração: Uma vez que V, definido em (3.31), é um funcional de Lyapunov, a prova da estabilidade em $\mathbb{H}^2_{per}$ é análoga à demonstração do Teorema 2.23.

Agora, mostraremos a estabilidade no caso em que $m = 6$.

Suponhamos que $U(x,t)$ seja instável em $\mathbb{H}^3_{per}$. Então, existem $U_{0,n} \in \mathbb{H}^4_{per}$, $t_n > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$, tais que

$$\|U_{0,n} - \phi\|_{\mathbb{H}^3} < \frac{1}{n} \text{ e } \inf\{\|U_n(t_n) - T_1(\theta)T_2(r)\phi\|_{\mathbb{H}^3_{per}}; \theta, r \in \mathbb{R}\} > \varepsilon_0, \tag{3.32}$$

onde $U_n(t_n)$ são as soluções do problema de Cauchy associado à (3.20), com dado inicial $U_n(0) = U_{0,n}$. Como já provamos a estabilidade em $\mathbb{H}^2_{per}$, podemos assumir que

$$\inf\{\|U_n'''(t_n) - T_1(\theta)T_2(r)\phi'''\|_{\mathbb{L}^2_{per}}; \theta, r \in \mathbb{R}\} > \frac{\varepsilon_0}{2}, \tag{3.33}$$

para n suficientemente grande.

A quantidade conservada P_3 combinada com as desigualdades de Gagliardo-Nirenberg e Young nos garantem que $\|U_n(t_n)\|_{\mathbb{H}^3} \leq C(\|U_{0,n}\|_{\mathbb{H}^3})$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Mas como $(U_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $\mathbb{H}^3_{per}$, existem $B > 0$ que verifica $\|U_{0,n}\|_{\mathbb{H}^3} < B$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, existe uma subsequência de $(U_n(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de mesmo nome, de modo que $U_n(t_n) \to T_1(\theta_0)T_2(r_0)\phi$ em $\mathbb{H}^2_{per}$, para alguns $\theta_0, r_0 \in \mathbb{R}$ e, consequentemente, $U_n'''(t_n) \rightharpoonup T_1(\theta_0)T_2(r_0)\phi'''$ fraco em $\mathbb{L}^2_{per}$. Ainda pelo fato de P_3 ser uma quantidade conservada, temos que

$$P_3(U_n(t_n)) = P_3(U_{0,n}) \to P_3(\phi). \tag{3.34}$$

Definindo

$$\widetilde{P}_3(U) := P_3(U) - \frac{\|U'''\|^2_{\mathbb{L}^2}}{2}, \tag{3.35}$$

temos que $\widetilde{P}_3$ é um funcional contínuo em $\mathbb{H}^2_{per}$ e, desde que $U_n(t_n)$ converge para $T_1(\theta_0)T_2(r_0)\phi$ em $\mathbb{H}^2_{per}$, concluímos que

$$\widetilde{P}_3(U_n(t_n)) \to \widetilde{P}_3(\phi). \tag{3.36}$$

Assim, $\|U_n'''(t_n)\|_{\mathbb{L}^2} \to \|\phi'''\|_{\mathbb{L}^2}$ e este fato resulta que $U_n(t_n) \to T_1(\theta_0)T_2(r_0)\phi$ forte em $\mathbb{H}^3_{per}$. Portanto, temos uma contradição.

Finalmente, para provar a estabilidade em $\mathbb{H}^{\frac{m}{2}}_{per}$, para $m \geq 8$ par, basta notarmos que $P_{\frac{m}{2}}(U) = \frac{\|U^{(\frac{m}{2})}\|_{\mathbb{L}^2}}{2} + \widetilde{P}_{\frac{m}{2}}(U)$, onde $\widetilde{P}_{\frac{m}{2}}$ é contínua e definida em $\mathbb{H}^{\frac{m-2}{2}}_{per}$.

Suponhamos que $U(x,t)$ seja estável em $\mathbb{H}^{\frac{m-2}{2}}_{per}$ e instável em $\mathbb{H}^{\frac{m}{2}}_{per}$. Usando argumentos similares ao caso $m = 6$, podemos provar a estabilidade em $\mathbb{H}^{\frac{m}{2}}_{per}$ por meio da estabilidade de $\mathbb{H}^{\frac{m-2}{2}}_{per}$. $\square$

Observação 3.10. *A teoria em [22] pode ser usada para concluir os resultados de esta-*

bilidade e instabilidade da órbita gerada pela função Φ*, obtida no Teorema 3.4, desde que* $|\nu|$ *seja pequeno e* $\nu \neq -\frac{1}{2\omega - \frac{\partial A}{\partial \omega}}$*. Primeiramente, como consideramos a solução* ϕ *obtida apenas pela simetria de rotação (ver (3.8)), a óbita* Ω_Φ*, na Definição 2.9, deverá ser restrita apenas a essa simetria. Consequentemente, devemos restringir o espaço energia* $\mathbb{H}^2_{per}$ *ao espaço* $\mathbb{H}^2_{per,e}$*, restrito às funções pares (a translação não é invariante neste espaço). Neste novo espaço, o operador* $\mathcal{L}_\nu$ *em (3.17) possui, usando o Teorema 3.6, apenas um autovalor negativo, o qual é simples, e zero é um autovalor simples associado à autofunção* $(0, \phi)$ *(pois* ϕ' *é ímpar). Com isso, a estabilidade, segundo [22], é verificada desde que o funcional de classe* C^2 $d(c) = E(\Phi) + cF(\Phi)$ *seja estritamente convexo. Então, como* $\Phi = (\phi, 0)$ *é ponto crítico do funcional* $E + cF$*, temos*

$$\begin{aligned} d''(c) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial c}\int_0^L \phi(x)^2 dx &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \omega}\int_0^L \phi(x)^2 dx \frac{\partial \omega}{\partial c} \\ &= \frac{1}{2(2\nu\omega + 1 - \nu\frac{\partial A}{\partial \omega})}\frac{\partial}{\partial \omega}\int_0^L \phi(x)^2 dx. \end{aligned}$$

Consideremos $L > 0$*, fixo, e* $\varepsilon_0 > 0$*, de modo que se* $\nu \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$*, o operador* $\mathcal{L}_\nu$ *possui as propriedades espectrais dadas no Teorema 3.6. Por simplicidade, vamos denotar* $r := -\frac{1}{2\omega - \frac{\partial A}{\partial \omega}}$*.*

Pelo provado anteriormente, se $\nu \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ *e* $\nu > r$*, temos que a órbita gerada por* Φ *é estável em* $\mathbb{H}^2_{per,e}$*. Isto acontece, por exemplo, se* $\nu > 0$*, ou se* $-\varepsilon_0 \geq r$*.*

Por outro lado, pelo Teorema de Instabilidade em [22], temos que se $-\varepsilon_0 < \nu < r < 0$ *(notemos que, se* $L > 0$ *for suficientemente pequeno,* $-\varepsilon_0 < r$*), então a órbita, gerada por rotação, será instável em* $\mathbb{H}^2_{per,e}$*.*

Capítulo 4

Condições Suficientes para Estabilidade Orbital de Ondas Periódicas para Equações do tipo KdV

Neste capítulo, apresentaremos condições suficientes para a estabilidade orbital de soluções do tipo onda viajante periódica, relacionadas à seguinte equação

$$u_t + (f(u))_x - (\mathcal{M}u)_x = 0, \tag{4.1}$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função suave e $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função periódica na variável espacial, com período $L > 0$ (podendo ser fixo ou não). Além disso, $\mathcal{M}$ é um operador diferencial ou pseudo-diferencial no contexto de funções periódicas, conforme (9) e (10).

Formalmente, a equação (4.1) admite as seguintes quantidades conservadas

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_0^L ((\mathcal{M}u)u - W(u))\, dx, \tag{4.2}$$

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_0^L u^2 dx, \tag{4.3}$$

e

$$M(u) = \int_0^L u dx. \tag{4.4}$$

Aqui, W denota a primitiva da função f, isto é, $W' = f$.

Ao longo deste capítulo, vamos assumir que a equação (4.1) admite soluções ondas viajantes da forma

$$u(x,t) = \phi(x - \omega t), \tag{4.5}$$

onde $\omega \in \mathbb{R}$ e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função suave periódica. Substituindo (4.5) na equação

(4.1) e integrando a expressão obtida, encontramos

$$\mathcal{M}\phi + \omega\phi - f(\phi) + A = 0, \tag{4.6}$$

onde A é uma constante de integração.

As quantidades conservadas acima nos permite considerar o funcional

$$G(u) = E(u) + \omega F(u) + AM(u), \tag{4.7}$$

e a quantidade conservada auxiliar

$$Q(u) = aM(u) + bF(u), \qquad a, b \in \mathbb{R}. \tag{4.8}$$

Um importante operador a ser considerado em nossa teoria de estabilidade é o operador linearizado

$$\mathcal{L} = \mathcal{M} + \omega - f'(\phi), \tag{4.9}$$

que será considerado sobre o espaço $L^2_{per}([0, L])$, com domínio $D(\mathcal{L}) = H^{m_1}_{per}([0, L])$. É possível mostrar que o espectro do operador $\mathcal{L}$, em (4.9), é constituído apenas por um conjunto discreto de autovalores, (ver [37, Proposição 3.1.1]).

Não é difícil ver a relação entre o operador (4.9) e o funcional (4.7). De fato, $\mathcal{L}$ é o único operador linear autoadjunto tal que

$$\langle G''(\phi)v, z\rangle = (\mathcal{L}v, z)_{L^2}, \qquad v \in C^\infty_{per}([0, L]),\, z \in H^{\frac{m_1}{2}}_{per}([0, L]), \tag{4.10}$$

onde G'' denota a segunda derivada de Fréchet de G e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a dualidade em $H^{-\frac{m_1}{2}}_{per}([0, L])$. Em particular, vemos que $G''(\phi)v = \mathcal{I}\mathcal{L}v$, para todo $v \in C^\infty_{per}$, onde $\mathcal{I} : H^{\frac{m_1}{2}}_{per}([0, L]) \to H^{-\frac{m_1}{2}}_{per}([0, L])$ é a injeção natural de $H^{\frac{m_1}{2}}_{per}([0, L])$ em $H^{-\frac{m_1}{2}}_{per}([0, L])$, com respeito ao produto interno em $L^2_{per}([0, L])$, isto é

$$\langle \mathcal{I}u, v\rangle = (u, v)_{L^2}, \qquad u, v \in H^{\frac{m_1}{2}}_{per}([0, L]). \tag{4.11}$$

Nossa estratégia para obter a estabilidade será assumir que as hipóteses, que citamos abaixo, são verificadas, construir um funcional de Lyapunov conveniente e, em seguida, provar que, sob estas condições, ϕ é orbitalmente estável no espaço $H^{\frac{m_1}{2}}_{per}([0, L])$.

(H_0) Seja $\phi \in C^\infty_{per}([0, L])$ uma solução onda viajante L-periódica de (4.6), com $L > 0$. O operador $\mathcal{L}$ possui apenas um autovalor negativo, que é simples, e zero é um autovalor simples, com autofução associada ϕ';

(H_1) Existe uma constante positiva ζ, tal que

$$(\mathcal{L}v, v)_{L^2} \geq \zeta \|v\|^2_{L^2},$$

para todo $v \in H^{m_1}_{per}([0,L])$, satisfazendo $(v,\phi')_{L^2} = (v, Q'(\phi))_{L^2} = 0$.

Os argumentos usados aqui seguem a abordagem proposta em [51], onde o autor estabeleceu a estabilidade orbital de ondas estacionárias para um sistema Hamiltoniano abstrato da forma

$$u_t = JE'(u(t)), \tag{4.12}$$

definido sobre um espaço de Hilbert H, onde o operador $J : H \to H$ é antissimétrico, invertível e limitado e $E : H \to \mathbb{R}$ é um funcional de classe C^2.

Porém, a teoria apresentada em [51] não poder ser aplicada diretamente aqui, pois, embora a equação (4.1) possa ser reduzida em um sistema Hamiltoniano como em (4.12), com $J = \partial_x$, o operador J não é invertível. Assim, adaptamos a teoria apresentada em [51], a fim de considerar o caso em que J não é invertível.

4.1 O Funcional de Lyapunov e a Estabilidade Orbital

Uma vez que a equação (4.1) é invariante por translações, nossa definição de estabilidade requer uma pequena modificação em relação à Definição 2.9.

Vamos definir a órbita gerada por ϕ, como

$$\Omega_\phi = \{T_2(r)\phi;\ r \in \mathbb{R}\}, \tag{4.13}$$

e, em $H^{\frac{m_1}{2}}_{per}([0,L])$, consideremos a pseudométrica d dada por

$$d(f,g) = \inf\{\|f - T_2(r)g\|_{H^{\frac{m_1}{2}}},\ r \in \mathbb{R}\}. \tag{4.14}$$

Notemos que a definição de distância entre f e g é a distância entre f e a órbita gerada por g.

Dado $\rho > 0$, definimos a ρ-vizinhança de Ω_ϕ por

$$\Omega^\rho_\phi = \{v \in H^{\frac{m_1}{2}}_{per}([0,L]);\ d(v,\Omega_\phi) < \rho\}.$$

Inicialmente apresentaremos alguns resultados técnicos úteis sobre o operador $\mathcal{L}$ e sua representação dual $G''(\phi)$. Durante estes resultados, τ denotará uma constante que pode variar com cada desigualdade.

Observação 4.1. *Consideremos $v \in C^\infty_{per}([0,L])$. Combinando (9), (10), a suavidade de*

f, e o fato que ϕ é limitada, vemos que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}v, v)_{L^2} &= \int_0^L (\mathcal{M}v)v + \omega v^2 - f'(\phi)v^2 \\
&\geq d_1 \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}} (\theta(\kappa)+1)|\widehat{v}(\kappa)|^2 - d_2\|v\|_{L^2}^2 \\
&\geq d_3 \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}} (1+|\kappa|^{2\frac{m_1}{2}})|\widehat{v}(\kappa)|^2 - d_2\|v\|_{L^2}^2 \qquad (4.15)\\
&\geq d_4 \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}} (1+|\kappa|^2)^{\frac{m_1}{2}}|\widehat{v}(\kappa)|^2 - d_2\|v\|_{L^2}^2 \\
&= d_4\|v\|_{\frac{m_1}{2}}^2 - d_2\|v\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

onde d_i, $i = 1, 2, 3, 4$, são constantes positivas que não dependem de v. Este resultado será útil no próximo lema.

Para simplificar a notação, vamos definir

$$\mathcal{X} = \{v \in H_{per}^{\frac{m_1}{2}}; (v, \phi')_{L^2} = (v, Q'(\phi))_{L^2} = 0\}.$$

Lema 4.2. *Suponha que a hipótese (H_1) seja satisfeita. Então existe uma constante $\tau > 0$, de modo que*

$$\langle G''(\phi)v, v\rangle \geq \tau\|v\|_{H^{\frac{m_1}{2}}}^2, \qquad (4.16)$$

para todo $v \in \mathcal{X}$.

Demonstração: Por densidade, podemos considerar $v \in C_{per}^\infty([0, L])$. Uma vez que a hipótese (H_1) é satisfeita, obtemos, pela Observação 4.1, que

$$\left(1 + \frac{d_4}{\zeta}\right)(\mathcal{L}v, v)_{L^2} \geq d_2\|v\|_{H^{\frac{m_1}{2}}}^2. \qquad (4.17)$$

Logo,

$$(\mathcal{L}v, v)_{L^2} \geq \left(\frac{d_2\zeta}{d_4 + \zeta}\right)\|v\|_{H^{\frac{m_1}{2}}}^2. \qquad (4.18)$$

Por (4.10), obtemos o desejado. □

Agora, vamos considerar $\mathcal{R} : H_{per}^{\frac{m_1}{2}}([0, L]) \to H_{per}^{-\frac{m_1}{2}}([0, L])$ o isomorfismo de Riesz com respeito ao produto interno em $H_{per}^{\frac{m_1}{2}}([0, L])$, ou seja,

$$\langle \mathcal{R}u, v\rangle = (u, v)_{H^{\frac{m_1}{2}}}, \qquad u, v, \in H_{per}^{\frac{m_1}{2}}([0, L]). \qquad (4.19)$$

O Lema 4.2 estabeleceu a positividade do operador $G''(\phi)$ sob condições de ortogonalidade em $L_{per}^2([0, L])$. O próximo lema mostra que esta positividade é mantida, se consideramos condições de ortogonalidade em $H_{per}^{\frac{m_1}{2}}([0, L])$.

Lema 4.3. *Consideremos $\mathcal{I}$ o operador definido em (4.11). Seja*

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \{\phi', \mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}Q'(\phi)\}^{\perp} \\ &= \{z \in H_{per}^{\frac{m_1}{2}}([0,L]); (z,\phi')_{H^{\frac{m_1}{2}}} = (z, \mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}Q'(\phi))_{H^{\frac{m_1}{2}}} = 0\}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Então existe uma constante positiva τ, tal que

$$\langle G''(\phi)z, z\rangle \geq \tau \|z\|^2_{H^{\frac{m_1}{2}}}, \tag{4.21}$$

para todo $z \in \mathcal{Z}$.

Demonstração: Consideremos $\psi = \frac{\phi'}{\|\phi'\|_{L^2}}$ e, para $z \in \mathcal{Z}$, definamos

$$v = z - (z,\psi)_{L^2}\psi. \tag{4.22}$$

Deste modo, $v \in \mathcal{X}$. De fato, como $\|\psi\|_{L^2} = 1$, temos que $(v,\phi')_{L^2} = 0$. Além disso, usando o fato que $Q'(\phi) = a + b\phi$, concluímos que

$$(v, Q'(\phi))_{L^2} = (\mathcal{R}\mathcal{I}Q'(\phi), v)_{H^{\frac{m_1}{2}}} = -\frac{1}{\|\phi'\|_{L^2}}(z,\psi)_{L^2}(Q'(\phi),\phi')_{L^2} = 0 \tag{4.23}$$

Em virtude do Lema 4.2, existe $\tau > 0$, assim

$$\langle G''(\phi)v, v\rangle \geq \tau \|v\|^2_{H^{\frac{m_1}{2}}}, \tag{4.24}$$

isto equivale à

$$(\mathcal{R}^{-1}G''(\phi)v, v)_{H^{\frac{m_1}{2}}} \geq \tau \|v\|^2_{H^{\frac{m_1}{2}}}. \tag{4.25}$$

Por outro lado, desde que $\mathcal{L}\phi' = 0$, por (4.10), vemos que $G''(\phi)\phi' = 0$. Deste modo, pela definição de v, podemos escrever

$$G''(\phi)v = G''(\phi)z. \tag{4.26}$$

Definamos o operador autoadjunto $S : H_{per}^{\frac{m_1}{2}}([0,L]) \to H_{per}^{\frac{m_1}{2}}([0,L])$, por $S = \mathcal{R}G''(\phi)$. Não é difícil ver que

$$(Sv, v)_{H^{\frac{m_1}{2}}} = (Sz, z)_{H^{\frac{m_1}{2}}}. \tag{4.27}$$

Ademais, uma vez que $z \in \mathcal{Z}$, segue da desigualdade de Cauchy-Schwartz que

$$\|z\|^2_{H^{\frac{m_1}{2}}} = (z, v + (z,v)_{L^2}\psi)_{H^{\frac{m_1}{2}}} = (z,v)_{H^{\frac{m_1}{2}}} \leq \|z\|_{H^{\frac{m_1}{2}}}\|v\|_{H^{\frac{m_1}{2}}}, \tag{4.28}$$

isto é, $\|z\|_{H^{\frac{m_1}{2}}} \leq \|v\|_{H^{\frac{m_1}{2}}}$. Finalmente, combinando a desigualdade anterior e a desigualdade (4.25), obtemos

$$(Sz, z)_{H^{\frac{m_1}{2}}} = (Sv, v)_{H^{\frac{m_1}{2}}} \geq \tau\|v\|^2_{H^{\frac{m_1}{2}}} \geq \tau\|z\|^2_{H^{\frac{m_1}{2}}}. \tag{4.29}$$

Por (4.19) e (4.29), concluímos o resultado desejado. $\square$

Lema 4.4. *Existem constantes positivas N e τ tais que*

$$(Sv,v)_{H^{\frac{m_1}{2}}} + 2N(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}Q'(\phi),v)^2_{H^{\frac{m_1}{2}}} \geq \tau\|v\|^2_{H^{\frac{m_1}{2}}},$$

para todo $v \in \{\phi'\}^{\perp} = \{u \in H_{per}^{\frac{m_1}{2}}([0,L]); (u,\phi')_{H^{\frac{m_1}{2}}} = 0\}$.

Demonstração: A demonstração deste resultado é análoga à demostração do Lema 2.21 no Capítulo 3. Notemos que por (4.11) e (4.19), obtemos

$$(\mathcal{R}\mathcal{I}Q'(\phi),\phi')_{H^{\frac{m_1}{2}}} = \langle \mathcal{I}Q'(\phi),\phi\rangle = (Q'(\phi),\phi)_{L^2} = 0. \tag{4.30}$$

Dado $v \in \{\phi'\}^{\perp}$, podemos escrever

$$v = \alpha w + z,$$

onde $w = \frac{\mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}Q'(\phi)}{\|\mathcal{R}\mathcal{I}Q'(\phi)\|_{H^{\frac{m_1}{2}}}}$, $\alpha = (v,w)_{H^{\frac{m_1}{2}}}$ e $z \in \mathcal{Z}$. Pelo Lema 4.3, vemos que

$$(Sv,v)_{H^{\frac{m_1}{2}}} \geq \alpha^2(Sw,w)_{H^{\frac{m_1}{2}}} + 2\alpha(Sw,z)_{H^{\frac{m_1}{2}}} + \tau\|z\|^2_{H^{\frac{m_1}{2}}}.$$

Usando as desigualdades de Cauchy-Schwartz e Young, temos

$$2\alpha(Sw,z)_{H^{\frac{m_1}{2}}} \leq \frac{\tau}{2}\|z\|^2_{H^{\frac{m_1}{2}}} + \frac{2\alpha^2}{\tau}\|Sw\|^2_{H^{\frac{m_1}{2}}}.$$

Assim,

$$(Sv,v)_{H^{\frac{m_1}{2}}} \;\; \geq \;\; \alpha^2(Sw,w)_{H^{\frac{m_1}{2}}} - \left(\frac{\tau}{2}\|z\|^2_{H^{\frac{m_1}{2}}} + \frac{2\alpha}{\tau}\|Sw\|^2_{H^{\frac{m_1}{2}}}\right) + \tau\|z\|^2_{H^{\frac{m_1}{2}}}.$$

Denotando $\beta := \|\mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}Q'(\phi)\|_{H^{\frac{m_1}{2}}}$, podemos escrever

$$(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}Q'(\phi),v)_{H^{\frac{m_1}{2}}} = \sigma(w,v)_{H^{\frac{m_1}{2}}}.$$

Escolhamos $N > 0$, de modo que

$$(Sw,w)_{H^{\frac{m_1}{2}}} - \frac{2}{\zeta}\|Sw\|^2_{H^{\frac{m_1}{2}}} + 2N\beta^2 \geq \frac{\zeta}{2}. \tag{4.31}$$

Observemos que N não depende de v. Deste modo, por (4.31), obtemos

$$(Sv,v)_{H^{\frac{m_1}{2}}} + 2N(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}Q'(\phi),v)^2_{H^{\frac{m_1}{2}}} \geq \frac{\tau}{2}\left(\alpha^2 + \|z\|^2_{H^{\frac{m_1}{2}}}\right) = \frac{\tau}{2}\|v\|^2_{H^{\frac{m_1}{2}}}.$$

$\square$

Lema 4.5. *Dados $\rho > 0$ e $v \in \Omega_\phi^\rho$, existe $r_1 \in \mathbb{R}$, tal que*

$$\|v - T_2(r_1)\phi\|_{H^{\frac{m_1}{2}}} < \rho \quad e \quad (v - T_2(r_1)\phi, T_2(r_1)\phi')_{H^{\frac{m_1}{2}}} = 0. \tag{4.32}$$

Demonstração: Definamos a função $f(r) = \|v - T_2(r)\phi\|^2_{H^{\frac{m_1}{2}}}$, $r \in \mathbb{R}$. Como v e ϕ são periódicas e f é de classe C^1, deduzimos que f possui um ponto de mínimo global em algum $r_1 \in [0, L]$. Logo, $f'(r_1) = 0$ e as relações em (4.32) são válidas. $\square$

Como a equação (4.1) possui apenas uma simetria, nossa definição de funcional de Lyapunov também deve ser adaptada.

Definição 4.6. *Uma função $V : H_{per}^{\frac{m_1}{2}}([0, L]) \to \mathbb{R}$ é dita ser um funcional de Lyapunov para a orbita $\Omega_\phi \subset H_{per}^{\frac{m_1}{2}}([0, L])$, se satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) Existe $\rho > 0$ tal que $V : \Omega_\phi^\rho \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 e, para todo $v \in \Omega_\phi$

$$V(v) = 0 \quad e \quad V'(v) = 0.$$

(ii) Existe $\varsigma > 0$, de modo que para todo $v \in \Omega_\phi^\rho$, temos

$$V(v) \geq \varsigma(d(v, \Omega_\phi))^2.$$

(iii) Para todo $v \in \Omega_\phi^\rho$, temos

$$\langle V'(v), \partial_x v\rangle = 0.$$

(iv) Se $u(t)$ é uma solução global para o problema de Cauchy associado à (4.1) com dado inicial u_0, então $V(u(t)) = V(u_0)$, para todo $t \geq 0$.

Consideremos

$$q_1 = G(\phi) \quad \text{e} \quad q_2 = Q(\phi).$$

Dado uma constante positiva N, definamos o funcional $V : H_{per}^{\frac{m_1}{2}}([0, L]) \to \mathbb{R}$ por

$$V(v) = G(v) - q_1 + N(Q(v) - q_2)^2. \tag{4.33}$$

Agora provaremos o principal resultado desta seção:

Proposição 4.7. *Suponhamos que o problema de Cauchy (4.1) é globalmente bem colocado, em um espaço de Sobolev conveniente $H^s_{per}([0, L])$, $s \geq \frac{m_1}{2}$. Então existe $N > 0$, tal que o funcional definido em (4.33) é um funcional de Lyapunov para a órbita Ω_ϕ.*

Demonstração: Desde que E e Q são quantidades conservadas suaves e o problema de Cauchy associado à equação (4.1) é globalmente bem colocado e V é de classe C^2, concluímos que o item *(iv)* da Definição 4.6 é satisfeito. Por outro lado, como $V(\phi) = 0$, e os funcionais E e Q são invariantes por translação, temos que $V(v) = 0$, para todo $v \in \Omega_\phi$. Além disso, como

$$\langle V'(u), v\rangle = \langle G'(u), v\rangle + 2N(Q(u) - q_2)\langle Q'(u), v\rangle, \tag{4.34}$$

para todos $u, v \in H^{\frac{m_1}{2}}_{per}([0, L])$ e ϕ é um ponto crítico do funcional G, obtemos que $V'(\phi) = 0$. Observando também que $T_2(r)\phi$ é ponto crítico do funcional G, concluímos que $V'(v) = 0$, para todo $v \in \Omega_\phi$, o que mostra o item *(i)*.

Como

$$Q(v(\cdot + r)) = Q(v), \qquad G(v(\cdot + r)) = G(v),$$

para todos $r \in \mathbb{R}$ e $v \in H^{\frac{m_1}{2}}_{per}([0, L])$, derivando as igualdades acima com respeito à r, concluímos o item *(iii)*

Finalmente, mostraremos o item *(ii)*.

Deduzimos por (4.34) que

$$\langle V''(u)v, v\rangle = \langle G''(u)v, v\rangle + 2N(Q(u) - q_2)\langle Q''(u)v, v\rangle + 2N\langle Q'(u), v\rangle^2.$$

Usando (4.19) e o fato de $Q'(\phi) \in C^\infty_{per}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle V''(\phi)v, v\rangle &= \langle G''(\phi)v, v\rangle + 2N\langle Q'(\phi), v\rangle^2 \\
&= (\mathcal{R}^{-1}G''(\phi), v, v)_{H^{\frac{m_1}{2}}} + 2N(Q'(\phi), v)^2_{L^2} \\
&= (Sv, v)_{H^{\frac{m_1}{2}}} + 2N\langle \mathcal{I}Q'(\phi), v\rangle^2 \\
&= (Sv, v)_{H^{\frac{m_1}{2}}} + 2N(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}Q'(\phi), v)^2_{H^{\frac{m_1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\langle V''(\phi), v, v\rangle = (Sv, v)_{H^{\frac{m_1}{2}}} + 2N(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}Q'(\phi), v)^2_{H^{\frac{m_1}{2}}}. \tag{4.35}$$

Pelo Lema 4.4, deduzimos que existem constantes positivas N e τ, tais que

$$\langle V'', (\phi)v, v\rangle \geq \tau \|v\|^2_{H^{\frac{m_1}{2}}}, \tag{4.36}$$

para todo $v \in \{\phi'\}^\perp$. Como V é de classe C^2, a expansão de Taylor nos dá

$$V(v) = V(\phi) + \langle V'(\phi), v - \phi\rangle + \frac{1}{2}\langle V''(\phi)(v - \phi), v - \phi\rangle + h(v),$$

onde h é uma função que satisfaz

$$\lim_{v \to \phi} \frac{h(v)}{\|v - \phi\|^2_{H^{\frac{m_1}{2}}}} = 0.$$

Deste modo, podemos escolher $\rho > 0$ tal que

$$|h(v)| \leq \frac{\tau}{4}\|v - \phi\|^2_{H^{\frac{m_1}{2}}}, \qquad \text{para todo } v \in B_\rho(\phi). \tag{4.37}$$

Uma vez que $V(\phi)=0$ e $V'(\phi)=0$, usando (4.36) e (4.37), obtemos, para v satisfazendo $\|v-\phi\|_{H^{\frac{m_1}{2}}}<\rho$ e $(v-\phi)\in\{\phi'\}^{\perp}$, que

$$\begin{aligned} V(v) &= \frac{1}{2}\langle V''(\phi)(v-\phi), v-\phi\rangle + h(v) \\ &\geq \frac{\tau}{2}\|v-\phi\|^2_{H^{\frac{m_1}{2}}} - \frac{\tau}{4}\|v-\phi\|^2_{H^{\frac{m_1}{2}}} \\ &= \frac{\tau}{4}\|v-\phi\|^2_{H^{\frac{m_1}{2}}} \\ &\geq \frac{\tau}{4}[d(v,\phi)]^2. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Agora, consideremos $v\in\Omega_\phi^\rho$. Em virtude do Lema 4.5, existe $r_1>0$, tal que $u:=T_2(r_1)v\in B_\rho(\phi)$ e

$$(v-T_2(r_1)\phi, T_2(r_1)\phi')_{H^{\frac{m_1}{2}}}=0,$$

isto é, $\|u-\phi\|_{H^{\frac{m_1}{2}}}<\rho$ e $(u-\phi)\in\{\phi'\}^{\perp}$. Consequentemente, por (4.38), concluímos

$$V(v)=V(u)\geq\frac{\tau}{4}[d(u,\Omega_\phi)]^2=\frac{\tau}{4}[d(v,\Omega_\phi)]^2,$$

o que prova o item *(ii)* e completa a prova da proposição. $\square$

Agora, de modo similar ao Teorema 2.23 no Capítulo 3, podemos provar o seguinte resultado.

Teorema 4.8. *Suponha que as hipóteses* (H_0) *e* (H_1) *sejam satisfeitas, então a solução onda viajante periódica* ϕ *de (4.1) é orbitalmente estável em* $H_{per}^{\frac{m_1}{2}}([0,L])$*, no sentido da Definição 2.9, com a órbita* Ω_ϕ *dada em (4.13).*

Demonstração: Fixemos $\varepsilon>0$ e consideremos $V:\Omega_\phi^\rho\to\mathbb{R}$ a função de Lyapunov, dada na Proposição 4.7. Como $V(\phi)=0$ e V é contínua, existe $\delta\in(0,\rho)$ tal que

$$V(v)=V(v)-V(\phi)<\varsigma\min\left\{\frac{\rho^2}{4},\varepsilon^2\right\}\quad v\in B_\delta(\phi),$$

onde ς é a constante que aparece na Definição 4.6. Como V é invariante pela simetria T_2, obtemos

$$V(v)<\varsigma\min\left\{\frac{\rho^2}{4},\varepsilon^2\right\}\quad v\in\Omega_\phi^\delta. \tag{4.39}$$

Seja $u_0\in H_{per}^{\frac{m_1}{2}}$ uma função de modo que $u_0\in B_\delta(\phi)$. Como estamos assumindo um resultado de boa colocação em um espaço de Sobolev conveniente, a solução, digamos $u(t)$, do problema de Cauchy associado a (4.1), com dado inicial u_0, é definido para todo $t\geq 0$.

Consideremos $\mathcal{W}$ o intervalo definido por

$$\mathcal{W}=\{s>0, u(t)\in\Omega_\phi^\rho \text{ para todo } t\in[0,s)\}.$$

O fato de $\delta \in (0,\rho)$ e a dependência contínua de $u(t)$ com relação ao dado inicial implicam que $\mathcal{W}$ é um intervalo não vazio e $\inf \mathcal{W} = 0$. Queremos mostrar que $\mathcal{W}$ é um intervalo ilimitado, isto é, $s^* = \sup \mathcal{W} = \infty$. Suponhamos por contradição que $s^* < \infty$. Combinando os itens *(ii)* e *(iv)* da Definição 4.6, obtemos

$$\varsigma[d(u(t),\Omega_\phi)]^2 \leq V(u(t)) = V(u_0) < \varsigma\frac{\rho^2}{4},$$

para todo $t \in [0,s^*)$, onde na última desigualdade nós usamos o fato que $u_0 \in B_\delta(\phi)$ e (4.39). Assim, nós concluímos que $d(u(t),\Omega_\phi) < \frac{\rho}{2}$, para todo $t \in [0,s^*)$.

Sendo $u(t)$ contínua, temos que a função $t \mapsto d(u(t),\Omega_\phi)$ é contínua. Consequentemente, $d(u(s^*),\Omega_\phi) \leq \frac{\rho}{2}$. A continuidade de $u(t)$ implica também que $\sup \mathcal{W} > s^*$, o que é uma contradição. Portanto, $\mathcal{W} = [0,\infty)$ e

$$\varsigma[d(u(t),\Omega_\phi)]^2 \leq V(u(t)) = V(u_0) < \varsigma\varepsilon^2,$$

para todo $t \geq 0$, o que completa a prova do teorema. □

4.2 Condições Suficientes para a Estabilidade Orbital

Nesta seção, vamos assumir que a hipótese (H_0) é válida e apresentar condições suficientes para obter a hipótese (H_1).

Proposição 4.9. *Suponha que exista $\psi \in H^{m_1}_{per}([0,L])$, tal que $(\mathcal{L}\psi,\varphi)_{L^2} = 0$, para todo $\varphi \in \Upsilon_0 = \{u \in H^{m_1}_{per}([0,L]); (Q'(\phi),u)_{L^2} = 0\}$ e*

$$(\mathcal{L}\psi,\psi)_{L^2} < 0. \tag{4.40}$$

Então existe uma constante $\tau > 0$, tal que

$$(\mathcal{L}v,v)_{L^2} \geq \tau\|v\|^2_{L^2}, \tag{4.41}$$

para todo $v \in \Upsilon_0$, tal que $(v,\phi')_{L^2} = 0$.

Demonstração: A prova deste resultado pode ser encontrada em [10], [31] e [40], para o caso $\mathcal{M} = -\partial_x^2$. Para um melhor compreendimento do leitor, vamos apresentar a prova em sua plenitude. Primeiramente, provemos que

$$\inf\{\varphi \in H^{m_1}_{per}([0,L]); (\varphi,Q'(\phi))_{L^2} = (\varphi,\phi')_{L^2} = 0 \text{ e } \|\varphi\|_{L^2} = 1\} := \tau > 0.$$

Notemos que se a hipótese (H_0) é satisfeita, podemos escrever

$$L^2_{per}([0,L]) = [\chi] \oplus [\phi'] \oplus P, \tag{4.42}$$

onde χ satisfaz $\|\chi\|_{L^2} = 1$, $\mathcal{L}\chi = -\lambda_0^2\chi$, com $\lambda_0 \neq 0$ e $(\chi, p)_{L^2} = (\phi', p)_{L^2} = 0$, para todo $p \in P \subset L^2_{per}([0, L])$. Além disso, como o espetro de $\mathcal{L}$ é limitado por baixo, os argumentos em [32, p. 278] nos permite concluir que $\mathcal{L}$ também é limitado por baixo e, deste modo,

$$(\mathcal{L}v, v)_{L^2} \geq \tau_0\|v\|^2_{L^2}, \forall v \in H^{m_1}_{per}([0, L]) \cap P, \tag{4.43}$$

onde τ_0 é uma constante positiva.

Agora por (4.42), podemos escrever

$$\psi = a_0\chi + b_0\phi' + p_0, \qquad a_0, b_0 \in \mathbb{R} \text{ e } p_0 \in H^{m_1}_{per}([0, L]) \cap P.$$

Desde que $\phi' \in \ker(\mathcal{L})$, $\mathcal{L}\chi = -\lambda_0^2\chi$ e $(\mathcal{L}\psi, \psi)_{L^2} < 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}p_0, p_0)_{L^2} &= (\mathcal{L}(\psi - a_0\chi - b_0\phi'), (\psi - a_0\chi - b_0\phi'))_{L^2} \\
&= (\mathcal{L}\psi, \psi)_{L^2} + 2a_0\lambda_0^2(\chi, \psi)_{L^2} + a_0^2(\mathcal{L}\chi, \chi)_{L^2} \\
&= (\mathcal{L}\psi, \psi)_{L^2} + 2a_0^2\lambda_0^2 - a_0^2\lambda_0^2 \\
&< a_0^2\lambda_0^2.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Considerando $\varphi \in \Upsilon_0$, tal que $\|\varphi\|_{L^2} = 1$ e $(\varphi, \phi')_{L^2} = 0$, vemos que $\varphi = a_1\chi + p_1$, onde $a_1 \in \mathbb{R}$ e $p_1 \in H^{m_1}_{per}([0, L]) \cap P$. Assim,

$$0 = (\mathcal{L}\psi, \varphi)_{L^2} = (-a_0\lambda_0^2\chi + \mathcal{L}p_0, a_1\chi + p_1)_{L^2} = -a_0a_1\lambda_0^2 + (\mathcal{L}p_0, p_1)_{L^2}. \tag{4.45}$$

Deste modo, combinando (4.44) e (4.45), resulta que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}\varphi, \varphi)_{L^2} &= -a_1^2\lambda_0^2 + (\mathcal{L}p_1, p_1)_{L^2} \\
&\geq -a_1^2\lambda_0^2 + \frac{(\mathcal{L}p_1, p_0)^2_{L^2}}{(\mathcal{L}p_0, p_0)_{L^2}} \\
&> -a_1^2\lambda_0^2 + \frac{(a_0a_1\lambda_0^2)^2}{a_0^2\lambda_0^2} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Aqui usamos o fato que a função $\Psi(f, g) = (\mathcal{L}f, g)_{L^2}$, definida em $H^{\frac{m_1}{2}}_{per}([0, L]) \cap P$, é uma forma sesquilinear não negativa em P. Assim, dados $f, g \in H^{\frac{m_1}{2}}_{per}([0, L]) \cap P$ e $s \in \mathbb{R}$,

$$(\mathcal{L}(sf - g), (sf - g))_{L^2} \geq \tau_0\|sf - g\|_{L^2} \geq 0.$$

Desta forma,

$$s^2(\mathcal{L}f, f)_{L^2} - 2s(\mathcal{L}f, g)_{L^2} + (\mathcal{L}g, g)_{L^2} \geq 0, \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Em particular, se $s = (\mathcal{L}f, g)_{L^2}[(\mathcal{L}f, f)_{L^2}]^{-1}$, obtemos

$$|\Psi(f, g)| \leq (\mathcal{L}f, f)_{L^2}(\mathcal{L}g, g)_{L^2}.$$

Notemos que podemos assumir, sem perda de generalidade, que $p_0 \neq 0$, pois, se $p_0 = 0$, como $\mathcal{L}\psi = -a_0\lambda_0^2\chi$ e $(\mathcal{L}\psi, \varphi)_{L^2} = -a_1a_0\lambda_0^2 = 0$, deduzimos que $a_1 = 0$. Assim $\varphi = p_1$ e a desigualdade (4.46) ocorre. Logo, podemos concluir, por (4.46), que $\tau \geq 0$.

Provemos que $\tau > 0$. De fato, suponhamos que $\tau = 0$ e consideremos $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \Upsilon_0$, tal que $(\mathcal{L}\varphi_j, \varphi_j)_{L^2} \longrightarrow 0$, $(\varphi_j, \phi')_{L^2}$ e $\|\varphi_j\|_{L^2} = 1$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Escrevendo $\varphi_j = a_{1,j}\chi + p_{1,j}$, com $p_{1,j} \in P$ com $(\mathcal{L}p_{1,j}, p_0)_{L^2} = a_0a_{1,j}\lambda^2$, vemos que

$$(\mathcal{L}\varphi_j, \varphi_j)_{L^2} \geq -a_{1,j}^2\lambda_0^2 + \frac{(a_0a_{1,j}\lambda_0^2)^2}{(\mathcal{L}p_0, p_0)_{L^2}} = a_{1,j}^2\left(\frac{(a_0\lambda_0^2)^2}{(\mathcal{L}p_0, p_0)_{L^2}} - \lambda_0^2\right) > 0.$$

Usando o fato que $(\mathcal{L}\varphi_j, \varphi_j)_{L^2} \longrightarrow 0$ e a desigualdade anterior, concluímos que $a_{1,j}^2 \longrightarrow 0$. Assim, $(\mathcal{L}p_{1,j}, p_{1,j})_{L^2} \longrightarrow 0$ e como $(\mathcal{L}p_{1,j}, p_{1,j})_{L^2} \geq \tau_0\|p_{1,j}\|_{L^2}^2$, onde τ_0 não depende de j, obtemos que $\|p_{1,j}\|_{L^2}^2 \longrightarrow 0$. Desta forma,

$$1 = \|\varphi_j\|_{L^2}^2 = a_{1,j}^2\|\chi\|_{L^2}^2 + \|p_{1,j}\|_{L^2}^2 \longrightarrow 0,$$

o que é uma contradição. Portanto, $\tau > 0$.

Agora se $v \in \Upsilon_0$ e $(v, \phi')_{L^2} = 0$, temos que

$$\left(\mathcal{L}\left(\frac{v}{\|v\|_{L^2}}\right), \frac{v}{\|v\|_{L^2}}\right)_{L^2} \geq \tau,$$

ou seja,

$$(\mathcal{L}v, v)_{L^2} \geq \tau\|v\|_{L^2}^2.$$

□

Em virtude do Teorema 4.8 e da Proposição 4.9, concluímos que para obtemos a estabilidade orbital da solução onda viajante ϕ de (4.1), assumindo a hipótese (H_0), é suficiente encontrarmos um função $\psi \in H_{per}^{m_1}([0, L])$ que satisfaça as hipóteses da Proposição 4.9. O próximo resultado é uma aplicação imediata deste fato.

Corolário 4.10. *Suponha que o problema de Cauchy associado à (4.1), com* $f(v) = \frac{v^2}{2}$ *seja globalmente com posto, em um espaço de Sobolev conveniente* $H_{per}^s([0, L])$, $s \geq \frac{m_1}{2}$. *Assuma também que* $\mathcal{M}$ *satisfaça (10), com* $\kappa_0 = 0$. *Se a hipótese* (H_0) *for satisfeita e* $M(\phi) > \omega L$, *então a onda periódica* ϕ *é orbitalmente estável.*

Demonstração: Para provar este resultado, basta considerarmos $a = \omega$ e $b = -1$ em (4.8) e tomarmos $\psi = 1$ na Proposição 4.9. □

Observação 4.11. *Podemos observar que, no resultado contido no Corolário 4.10, não é necessário que tenhamos uma família parametrizada de ondas periódicas que dependam dos parâmetros* A *e* ω. *Conforme mencionamos na introdução, em praticamente todos os resultados de estabilidade orbital de ondas periódicas, o conhecimento prévio de tal família foi essencial.*

Nosso próximo passo será obter condições que garantam a existência de uma função ψ, que atenda as exigências da Proposição 4.9.

Antes disso, vamos investigar a estabilidade de uma superfície suave de ondas L-periódicas.

(H_2) Suponha que exista um subconjunto aberto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$, de modo que $(\omega, A) \in \mathcal{O} \mapsto \phi_{(\omega,A)} \in C^\infty_{per}([0, L])$ seja uma superfície suave de ondas viajantes periódicas, com período fixo $L > 0$, que resolvem (4.1). Além disso, vamos assumir que a hipótese espectral em (H_0) permanece válida para $\phi := \phi_{(\omega,A)}$, $(\omega, A) \in \mathcal{O}$.

Agora, tendo a hipótese (H_2) em mente, podemos definir as aplicações

$$\eta := \frac{\partial}{\partial\omega}\phi_{(\omega,A)}, \qquad \beta := \frac{\partial}{\partial A}\phi_{(\omega,A)}, \tag{4.47}$$

$$M_\omega(\phi) = \int_0^L \eta dx, \qquad M_A(\phi) = \int_0^L \beta dx, \tag{4.48}$$

e

$$F_\omega(\phi) = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{\partial}{\partial\omega}(\phi^2_{(\omega,A)})dx, \qquad F_A(\phi) = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{\partial}{\partial A}(\phi^2_{(\omega,A)})dx. \tag{4.49}$$

Temos uma conexão natural entre $\mathcal{L}$ e $M_\omega(\phi)$, $F_\omega(\phi)$, $M_A(\phi)$ e $F_A(\phi)$. De fato, diferenciando (4.6) com respeito à ω e A, obtemos respectivamente $\mathcal{L}\eta = -\phi$ e $\mathcal{L}\beta = -1$. Uma vez que $1, \phi \in [\phi']^\perp$ e $\mathcal{L} : [\phi']^\perp \to [\phi']^\perp$ é invertível, vemos que

$$M_\omega(\phi)_{L^2} = -(\mathcal{L}^{-1}\phi, 1)_{L^2}, \;\; M_A(\phi) = -(\mathcal{L}^{-1}1, 1)_{L^2}, \tag{4.50}$$

e

$$F_\omega(\phi) = -(\mathcal{L}^{-1}\phi, \phi)_{L^2}, \quad F_A(\phi) = -(\mathcal{L}^{-1}1, \phi)_{L^2}. \tag{4.51}$$

O resultado a seguir nos fornece condições suficientes para obter (4.41).

Proposição 4.12. *Seja $\Delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por*

$$\Delta(x, y) = x^2 M_A(\phi) + xy(M_\omega(\phi) + F_A(\phi)) + y^2 F_\omega(\phi).$$

Suponha que exista $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, de modo que $\Delta(x_0, y_0) > 0$. Então existe $\psi \in H^{m_1}_{per}([0, L])$, tal que $(\mathcal{L}\psi, \varphi)_{L^2} = 0$, para todo $\varphi \in \Upsilon_0$ e

$$(\mathcal{L}\psi, \psi)_{L^2} < 0.$$

Demonstração: A demostração deste resultado foi provada primeiramente em [40].

Definamos $\psi := x_0\beta + y_0\eta$ e consideremos $a = x_0$ e $b = y_0$ em (4.8). Como $\mathcal{L}\beta = -1$

e $\mathcal{L}\eta = -\phi$, obtemos que $(\mathcal{L}\psi, \varphi)_{L^2} = 0$, para todo $\varphi \in \Upsilon_0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}\psi, \psi)_{L^2} &= (-x_0 - y_0\phi, x_0\beta + y_0\eta)_{L^2} \\
&= -(x_0^2 M_A(\phi) + x_0 y_0 M_\omega + x_0 y_0 F_A(\phi) + y_0^2 F_\omega(\phi)) \\
&= -\Delta(x_0, y_0) \\
&< 0,
\end{aligned}$$

o que completa a prova. $\square$

Combinando a hipótese (H_2) e as Proposições 4.9 e 4.12, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4.13. *Assuma que o problema de Cauchy associado à (4.1) seja globalmente bem posto, em um espaço de Sobolev conveniente $H^s_{per}([0, L])$, $s \geq \frac{m_1}{2}$. Suponha que a hipótese (H_2) seja válida e que existam $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, tais que $\Delta(x_0, y_0) > 0$, então a onda periódica ϕ é orbitalmente estável. Em particular, o resultado de estabilidade ocorre se pelo menos uma das seguintes hipóteses forem satisfeitas*

(i) $M_A(\phi) = -(\mathcal{L}^{-1}1, 1)_{L^2} > 0$,

(ii) $F_\omega(\phi) = -(\mathcal{L}^{-1}\phi, \phi)_{L^2} > 0$.

(iii) $M_\omega(\phi)^2 - F_\omega(\phi) M_A(\phi) = (\mathcal{L}^{-1}\phi, 1)^2_{L^2} - (\mathcal{L}^{-1}\phi, \phi)_{L^2}(\mathcal{L}^{-1}1, 1)_{L^2} > 0$.

Demonstração: A primeira parte do teorema segue diretamente do que foi exposto acima. Para demonstrar os itens *(i)* e *(ii)*, basta considerarmos, respectivamente, $(x_0, y_0) = (1, 0)$ e $(x_0, y_0) = (0, 1)$ na Proposição 4.12.

Mostremos o item *(iii)*. De fato, derivando a equação (4.6) com respeito à ω, multiplicando o resultado por ϕ e em seguida integrando o resultado final sobre $[0, L]$, obtemos

$$(\mathcal{M}\eta, \phi) + \int_0^L \phi^2 dx + \omega \int_0^L \eta\phi dx - \int_0^L f'(\phi)\eta\phi dx = 0. \tag{4.52}$$

Agora, usando o fato de $\mathcal{M}$ ser autoadjunto e a equação (4.6), vemos que

$$-AM_\omega(\phi) + \int_0^L f(\phi)\eta dx + \int_0^L \phi^2 dx - \int_0^L f'(\phi)\eta\phi dx = 0. \tag{4.53}$$

Da mesma forma, se derivarmos a equação (4.6) com respeito à A, multiplicarmos o resultado por ϕ, integrarmos o resultado sobre $[0, L]$ e, em seguida, usarmos fato de $\mathcal{M}$ ser autoadjunto e (4.6), encontraremos

$$-AM_A(\phi) + \int_0^L f(\phi)\beta dx + \int_0^L \phi dx - \int_0^L f'(\phi)\beta\phi dx = 0. \tag{4.54}$$

Assim, derivando (4.53) com respeito à A, (4.54) com repeito à ω e comparando os resultados obtidos, podemos concluir que

$$F_A(\phi) = M_\omega(\phi). \tag{4.55}$$

Logo,

$$\Delta(x,y) = x^2 M_A(\phi) + 2xyM_\omega + y^2 F_\omega(\phi) = (y,x)S(y,x)^T, \tag{4.56}$$

onde S é a matriz simétrica

$$S := \begin{bmatrix} F_\omega(\phi) & M_\omega(\phi) \\ M_\omega(\phi) & M_A(\phi) \end{bmatrix}.$$

O fato de $det(S) = -(M_\omega(\phi)^2 - F_\omega(\phi)M_A(\phi)) < 0$ implica que S tem dois autovalores com sinais opostos e, por conseguinte, podemos concluir que a forma quadrática Δ é indefinida. Portanto, existem $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, satisfazendo $\Delta(x_0, y_0) > 0$. $\square$

Em muitas situações, os parâmetros ω e A em (4.6) não são independentes. Em vez disso, ambos são dependentes de um terceiro parâmetro, digamos ξ, onde ξ pertence a algum intervalo aberto. Neste caso, em vez de termos uma superfície suave, como em (H_2), teremos uma curva suave de ondas periódicas.

O próximo resultado mostra que nossas condições ainda são suficientes para obter a estabilidade orbital neste contexto.

Corolário 4.14. *Assuma que o problema de Cauchy associado à (4.1) seja globalmente bem posto, em um espaço de Sobolev conveniente $H^s_{per}([0,L])$, $s \geq \frac{m_1}{2}$. Suponha que a hipótese (H_2) seja válida e que ω e A dependam suavemente de ξ. Se $\psi = \frac{\partial}{\partial \xi}\phi_{(\omega(\xi),A(\xi))}$, então a onda periódica $\phi = \phi_{(\omega(\xi),A(\xi))}$ é orbitalmente estável em $H^{\frac{m_1}{2}}_{per}([0,L])$, se*

$$(\mathcal{L}\psi, \psi)_{L^2} = -\frac{dA}{d\xi}\frac{d}{d\xi}M(\phi) - \frac{d\omega}{d\xi}\frac{d}{d\xi}F(\phi) < 0. \tag{4.57}$$

Demonstração: A demonstração segue diretamente da Proposição 4.9, considerando $a = \frac{\partial A}{\partial \xi}$ e $b = \frac{\partial \omega}{\partial \xi}$, em (4.8). De fato, se $\varphi \in \Upsilon_0$, temos que

$$(Q'(\phi), \varphi)_{L^2} = \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{\partial \omega}{\partial \xi}\phi, \varphi\right)_{L^2} = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}\psi, \varphi)_{L^2} &= \left(\mathcal{L}\left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\beta + \frac{\partial \omega}{\partial \xi}\eta\right), \varphi\right)_{L^2} \\ &= \left(-\frac{\partial A}{\partial \xi} - \frac{\partial \omega}{\partial \xi}\phi, \varphi\right)_{L^2} = 0, \end{aligned}$$

o que conclui o resultado. $\square$

Observação 4.15. *Notemos que, (4.57) é uma generalização do critério para a estabilidade orbital de soluções de ondas solitárias, para equações da forma (4.1) (sob condições espectrais adequadas, como em (H_0)). De fato, neste caso é claro que $A = 0$ e $\omega = \xi$. Assim, (4.57) é imediatamente reduzido para*

$$\frac{d}{d\omega}\int_{\mathbb{R}} \phi(x)^2 dx > 0.$$

Para maiores detalhes sobre este fato, veja, por exemplo, [10].

4.3 Aplicações

A fim de ilustrar o que desenvolvemos neste capítulo, vejamos algumas aplicações:

Exemplo 4.16. *Considerando $\mathcal{M} = -\partial_x^2$ e $f(v) = \frac{v^2}{2}$ em (4.1), obtemos a equação de Korteweg-de Vries*

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{4.58}$$

Em [5], os autores apresentaram ondas periódicas com a propriedade média zero, dadas por

$$\phi(x) = \beta\left(dn^2\left(\frac{2K(k)}{L}x, k\right) - \frac{E(k)}{K(k)}\right), \tag{4.59}$$

onde $L > 0$ é fixo e β depende suavemente da velocidade da onda $\omega > 0$. Aqui as funções K e E indicam, respectivamente, as integrais elípticas de primeiro e segundo tipo e ambos depende do módulo $k \in (0,1)$. Lembrando que $dn^2(x) = 1 - k^2(1 - cn^2(x))$, onde cn indica a função elíptica cnoidal, estas soluções são, em verdade, as soluções cnoidais estudadas por Benjamin em [9]. Neste caso, a constante A é dada por $A = \frac{1}{2L}\int_0^L \phi(x)^2 dx$ e, assim, esta depende suavemente de ω.

Para obter as propriedades espectrais requeridas na hipótese (H_0), precisamos usar a teoria Floquet associada com à equação de Lamé (para mais detalhes, ver [5, Seção 5]). Conforme o Corolário 4.14, consideremos $\xi = \omega$ e $\psi = \frac{\partial}{\partial\omega}\phi$. Os argumentos em [5, Teorema 5.2] indicam que $\frac{\partial}{\partial\omega}\int_0^L \phi(x)^2 dx > 0$, para todo $\omega > 0$. Logo, uma vez que ϕ possui média zero, a condição (4.57) implica que

$$(\mathcal{L}\psi, \psi) = -\frac{\partial}{\partial\omega}\int_0^L \phi(x)^2 dx < 0, \qquad \omega > 0. \tag{4.60}$$

Portanto, a onda periódica cnoidal em (4.58) é orbitalmente estável em $H^1_{per}([0,L])$.

Exemplo 4.17. *Se $\mathcal{M} = -\partial_x^2$ e $f(v) = \frac{v^{p+1}}{p+1}$ em (4.1), encontramos a equação de Korteweg-de Vries generalizada*

$$u_t + u^p u_x + u_{xxx} = 0, \tag{4.61}$$

onde $p \geq 1$ é um inteiro. Substituindo $u(x,t) = \phi(x - \omega t)$ na igualdade (4.61), onde $\omega > 0$, encontramos a EDO

$$-\phi'' + \omega\phi - \frac{1}{p+1}\phi^{p+1} + A = 0, \qquad A \in \mathbb{R}. \tag{4.62}$$

Caso 1. *Primeiramente, estudaremos o caso em que existe uma superfície suave de ondas viajantes L-periódicas, de período fixo, que resolvem (4.62).*

Consideremos $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ um aberto. Suponhamos que exista uma superfície $(\omega, A) \in \mathcal{O} \mapsto \phi_{(\omega,A)} = \phi \in H^n_{per}([0,L])$, $n \in \mathbb{N}$, de ondas periódicas, de período fixo $L > 0$, que resolvem (4.62). Sem perda de generalidade, podemos supor que $L > 0$ é o período minimal de ϕ (ver [27, Proposição 2.2]).

Provemos que $\ker \mathcal{L} = [\phi']$, para todo $(\omega, A) \in \mathcal{O}$. De fato, suponhamos por absurdo que exista $(\omega_0, A_0) \in \mathcal{O}$, tal que y, no Teorema 1.1, seja L-periódica no parâmetro (ω_0, A_0) (em outras palavras, suponha que $\ker \mathcal{L} = [\phi', y]$). Pelo Teorema 1.1, temos que $\{\phi', y\}$ é um conjunto linearmente independente de funções que resolvem a EDO linear

$$-z'' + \omega z - \phi^p z = 0, \tag{4.63}$$

o qual podemos assumir, sem perda de generalidade que

$$W(\phi', y) = \phi' y' - \phi'' y = 1, \qquad \forall x \in [0, L]. \tag{4.64}$$

Por (4.64), podemos deduzir, após integração por partes,

$$-2\int_0^L \phi''(x)y(x)dx = L. \tag{4.65}$$

Combinando (4.65) e (4.62), temos

$$\begin{aligned} L &= -2\int_0^L \phi''(x)y(x)dx \\ &= -2\int_0^L \left(\omega\phi(x) - \frac{1}{p+1}\phi(x)^{p+1} + A\right) y(x)dx \\ &= -2\omega\int_0^L \phi(x)y(x)dx + \frac{2}{p+1}\int_0^L \phi(x)^{p+1}y(x)dx - 2A\int_0^L y(x)dx. \end{aligned} \tag{4.66}$$

Agora, por outro lado, pela argumentação feita na página 64, temos

$$\mathcal{L}\eta = -\phi \qquad e \qquad \mathcal{L}\beta = -1. \tag{4.67}$$

Multiplicando (4.67) por y e integrando em $[0, L]$, usando os fatos que y é periódica e que $\mathcal{L} = -\partial_x^2 + \omega - \phi^p$ é autoadjunto, com $\mathcal{L}y = 0$, obtemos

$$\int_0^L \phi(x)y(x)dx = \int_0^L y(x)dx = 0. \tag{4.68}$$

Por fim, multiplicando (4.62) por y, integrando o resultado sobre $[0, L]$ e usando (4.63) e (4.68), concluímos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^L \left(-\phi''(x)y(x) + \omega\phi(x)y(x) - \frac{1}{p+1}\phi(x)^{p+1}y(x) + Ay(x) \right) dx \\ &= \int_0^L \left(-\phi''(x)y(x) - \frac{1}{p+1}\phi(x)^{p+1}y(x) \right) dx \\ &= \int_0^L \left(-\phi(x)y''(x) - \frac{1}{p+1}\phi(x)^{p+1}y(x) \right) dx \\ &= \int_0^L \left(-\phi(x)(\omega y(x) - \phi(x)^p y(x)) - \frac{1}{p+1}\phi(x)^{p+1}y(x) \right) dx \\ &= \frac{p}{p+1}\int_0^L \phi(x)^{p+1}y(x)dx. \end{aligned} \tag{4.69}$$

Assim, combinando os resultados (4.66), (4.68) e (4.69), temos um absurdo. Consequentemente, $\ker \mathcal{L} = [\phi']$, como desejado na hipótese (H_2). Podemos enfraquecer a referida hipótese da seguinte maneira:

(H_2') *Suponha que exista uma aberto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$, de modo que $(\omega, A) \in \mathcal{O} \mapsto \phi_{(\omega,A)} = \phi \in C^\infty_{per}([0, L])$ seja uma superfície suave de ondas viajantes periódicas, de período fixo $L > 0$, para (4.61). Além disso, suponha que o operador correspondente $\mathcal{L}$ tenha um único autovalor negativo, o qual é simples*[1].

Desta forma, assumindo que a hipótese (H_2') seja satisfeita, podemos obter a estabilidade orbital de ondas periódicas usando o Teorema 4.13.

Caso 2. *Agora, veremos o caso em que existe uma superfície suave de ondas viajantes L-periódicas que resolvem (4.62), onde L varia de acordo com parâmetros da equação.*

Em [31], o autor construiu uma superfície suave $\phi = \phi(\cdot, A, B, \omega)$ de ondas L-periódica que resolvem a equação (4.62), onde B é a constante de integração oriunda da forma da quadratura de (4.62),

$$-\phi'^2 + \omega\phi^2 - \frac{2}{(p+1)(p+2)}\phi^{p+2} + 2A\phi + 2B = 0. \tag{4.70}$$

Neste caso específico, o período L é uma função real que também depende dos parâmetros (A, B, ω) e, assim, não podemos aplicar diretamente os resultados contidos na Proposição 4.12 e no Teorema 4.13. Entretanto, como os argumentos na Seção 4.1 não dependem de qualquer parametrização das soluções de (4.62), se admitirmos que a hipótese (H_0) é satisfeita, precisamos apenas encontrar um elemento ψ que cumpra as condições requeridas

[1]Usando a continuidade da constante $\theta = \frac{y'(L)}{\phi''(0)}$ em relação aos parâmetros $(\omega, A) \in \mathcal{O}$ e o fato que $\theta = 0 \Leftrightarrow y$ é L-periódica, podemos concluir que $\theta < 0$ ou $\theta > 0$, para todos $(\omega, A) \in \mathcal{O}$. Com isso, basta saber o sinal de θ num valor específico $(\omega_1, A_1) \in \mathcal{O}$ para determinar o seu sinal, para todos $(\omega, A) \in \mathcal{O}$. Feito isso, podemos usar o Teorema 1.6 para concluir que, se $\theta < 0$, então o operador $\mathcal{L}$ correspondente terá um único autovalor negativo, o qual é simples.

pela Proposição 4.9. Em [31, pag. 1935], o autor definiu uma função periódica ψ *por*

$$\psi = \begin{vmatrix} \phi_A & L_A & M_A(\phi) \\ \phi_B & L_B & M_B(\phi) \\ \phi_\omega & L_\omega & M_\omega(\phi) \end{vmatrix}, \tag{4.71}$$

onde $\phi_A = \frac{\partial}{\partial A}\phi$, $\phi_B = \frac{\partial}{\partial B}\phi$, *etc. Além disso, um cálculo simples mostra que* $\mathcal{L}\psi$ *pode ser expresso em termos de determinantes de Jacobianos convenientes e da onda periódica* ϕ, *como*

$$\mathcal{L}\psi = -\{L, M\}_{B,\omega} - \{L, M\}_{A,B}\phi, \tag{4.72}$$

onde

$$\{L, M\}_{B,\omega} = \begin{vmatrix} L_B & M_B(\phi) \\ L_\omega & M_\omega(\phi) \end{vmatrix} \qquad e \qquad \{L, M\}_{A,B} = \begin{vmatrix} L_A & M_A(\phi) \\ L_B & M_B(\phi) \end{vmatrix}. \tag{4.73}$$

Agora, considerando $a = \{L, M\}_{B,\omega}$ *e* $b = \{L, M\}_{A,B}$, *em (4.8), temos que* $(\mathcal{L}\psi, \varphi) = 0$, *para todo* $\varphi \in \Upsilon_0$ *e*

$$(\mathcal{L}\psi, \psi) = -\{L, M\}_{A,B}\{L, M, F\}_{A,B,\omega}. \tag{4.74}$$

Desta forma, em vista da Proposição 4.9 e do Teorema 4.8, ϕ *é orbitalmente estável em* $H^1_{per}([0, L])$, *se* $\{L, M\}_{A,B}\{L, M, F\}_{A,B,\omega} > 0$. *Assim, sob hipótese* (H_0), *recuperamos o resultado de estabilidade orbital em [31, Lema 4.1].*

Apresentamos agora uma maneira simples de provar a estabilidade orbital de ondas periódicas, com a propriedade de média zero, para a a equação ILW (Intermediate Long Wave Equation), em português, a Equação de Ondas Longas Intermediárias.

Exemplo 4.18. *Supondo que* $\mathcal{M} = \mathcal{T}_\delta\partial_x - \frac{1}{\delta}$ *e* $f(v) = v^2$ *em (4.1), temos a equação ILW*

$$u_t + 2uu_x + \delta^{-1}u_x - (\mathcal{T}_\delta u)_{xx} = 0, \qquad \delta > 0. \tag{4.75}$$

O operador linear $\mathcal{T}_\delta$ *é definido por*

$$\mathcal{T}_\delta u(x) = \frac{1}{L} p.v. \int_{L/2}^{-L/2} \Gamma_{\delta,L}(x - y)u(y)dy, \tag{4.76}$$

onde p.v. denota o valor principal de Cauchy da integral e

$$\Gamma_{\delta,L} = -i \sum_{n\neq 0} \coth\left(\frac{2\pi n\delta}{L}\right) e^{2in\pi\xi/L}. \tag{4.77}$$

É bem sabido que, se o parâmetro $\delta \to \infty$, *(4.75) reduz-se formalmente à equação de Benjamin-Ono*

$$u_t + 2uu_x - \mathcal{H}u_{xx} = 0, \tag{4.78}$$

com $\mathcal{H}$ denotando a transformada de Hilbert periódica e definida, para funções L-periódicas, por

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{L} p.v. \int_{L/2}^{-L/2} \coth\left(\frac{\pi(x-y)}{L}\right) f(y)dy. \tag{4.79}$$

Por outro lado, se $\delta \to 0^+$ em (4.75), tal equação pode ser formalmente interpretada como a variação da equação KdV

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{4.80}$$

A estabilidade orbital para a equação de Benjamin-Ono foi estabelecida em [6] (contudo, podemos usar método desenvolvido neste capítulo para obter uma prova mais simples). Supondo que soluções da equação (4.75) são da forma $u(x,t) = \phi(x - \omega t)$, $\omega > 0$, vemos que ϕ deve satisfazer a equação

$$\omega\phi - \phi^2 + \mathcal{M}\phi + A = 0, \tag{4.81}$$

onde A é uma constante de integração. O símbolo de $\mathcal{M}$ é dado por

$$\theta(\kappa) = \frac{2\pi\kappa}{L} \coth\left(\frac{2\pi\kappa\delta}{L}\right) - \frac{1}{\delta}, \qquad \kappa \in \mathbb{Z}. \tag{4.82}$$

Notemos que, usando a relação, em [1, Lema 4.1], dada por

$$-\frac{1}{\delta} + 2\pi|y| \leq 2\pi \coth(2\pi\delta y) \leq \frac{1}{\delta} + 2\pi|y|, \qquad \delta > 0, y \in \mathbb{R}, \tag{4.83}$$

podemos considerar $v_2 = \frac{2\pi}{L}$, em (10). Escolhendo κ_0 suficientemente grande, de modo que $\delta > \frac{L}{\kappa_0 \pi}$, obtemos

$$\vartheta_0 := \frac{2\pi}{L} - \frac{2}{\kappa_0 \delta} > 0. \tag{4.84}$$

Agora, tomando $v_1 > 0$, tal que $v_1 < \vartheta_0$, podemos concluir que, para $|\kappa| \geq \kappa_0$,

$$v_1|\kappa| \leq -\frac{2}{\delta} + \frac{2\pi|\kappa|}{L} \leq \frac{2\pi\kappa}{L} \coth\left(\frac{2\pi\kappa\delta}{L}\right) - \frac{1}{\delta} = \theta(\kappa). \tag{4.85}$$

Assim, (10) é válido, com $m_1 = 1$, e o espaço natural para estudamos (4.75) é $H^{1/2}_{per}([0,L])$. A solução suave L-periódica com média zero é dada pela expressão

$$\phi(x) = \frac{2K(k)i}{L} \left[Z\left(\frac{2K(k)}{L}(x - i\delta); k\right) - Z\left(\frac{2K(k)}{L}(x + i\delta); k\right)\right], \tag{4.86}$$

onde Z é a função Zeta de Jacobi. Em [7], os autores mostraram que o operador linearizado $\mathcal{L} = \mathcal{M} + \omega - 2\phi$ cumpre todas as propriedades requeridas na hipótese (H_0). Além disso, para um $\delta > 0$ fixado, foi determinado que $\frac{\partial}{\partial\omega}\int_0^L \phi(x)^2 dx > 0$, para todo $\omega > 0$. Agora, tomando $\xi = \omega$ e $\psi = \frac{\partial}{\partial\omega}\phi$ no Corolário 4.14, vemos que

$$(\mathcal{L}\psi, \psi) = \left(-\frac{\partial}{\partial\omega}A - \phi, \frac{\partial}{\partial\omega}\phi\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\omega}\int_0^L \phi(x)^2 dx < 0. \tag{4.87}$$

Portanto, a onda periódica ϕ é orbitalmente estável em $H^{1/2}_{per}([0,L])$.

Observação 4.19. *Não nos preocupamos em estabelecer resultados formais de boa colocação global no espaço energia para os modelos propostos. Todavia é possível responder tais questões de forma satisfatória. No caso dos Exemplos 4.16 e 4.17, podemos utilizar os trabalhos de [18]. No caso do exemplo 4.18, temos o artigo [1] que trata da boa colocação global em $H^{\frac{s}{2}}_{per}([0,L])$, para $s > \frac{3}{2}$.*

4.4 Extensões para o Caso Regularizado

Os argumentos desenvolvidos na seção anterior podem ser usados para determinar condições suficientes para a estabilidade orbital de ondas periódicas relacionadas com a equação generalizada

$$u_t + u_x + f(u)_x + (\mathcal{M}u)_t = 0, \tag{4.88}$$

onde f é uma função suave e $\mathcal{M}$ é definido como em (9) e satisfaz as mesmas condições em (10). Assim como no caso anterior, a equação (4.88) admite soluções ondas viajantes periódicas da forma $u(x,t) = \phi(x - \omega t)$, onde ω pertence a um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Novamente, se substituirmos este tipo de solução em (4.88), obtemos, após integração,

$$(\omega - 1)\phi - f(\phi) + \omega\mathcal{M}\phi + A. \tag{4.89}$$

A equação (4.88) possui, formalmente, pelo menos três quantidades conservadas,

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_0^L ((\mathcal{M}u)u - W(u))\,dx, \tag{4.90}$$

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_0^L (\mathcal{M}u)u + u^2dx, \tag{4.91}$$

e

$$M(u) = \int_0^L udx. \tag{4.92}$$

Aqui a função W denota a primitiva de f, ou seja, $W' = f$.

Definamos o funcional $G(u) = E(u) + (\omega - 1)F(u) + AM(u)$ e a quantidade conservada $Q(u) = aM(u) + bF(u)$, para $a, b \in \mathbb{R}$.

Assumindo que as hipóteses (H_0) e (H_1) são verificadas, podemos repetir os argumentos usados na Seções 4.1 para encontrar resultados similares a respeito da positividade do operador linearizado $\mathcal{L} = \omega\mathcal{M} + (\omega - 1) - f'(\phi)$, bem como construir um funcional de Lyapunov e, consequentemente, mostrar a estabilidade orbital para este caso.

Além disso, vamos assumir que a condição em (H_2) é satisfeita. Consideremos η e β como em (4.47) e definamos

$$M_\omega(\phi) = \int_0^L \eta dx, \qquad M_A(\phi) = \int_0^L \beta dx, \tag{4.93}$$

e

$$F_\omega(\phi) = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{\partial}{\partial \omega}(\phi_{(\omega,A)}\mathcal{M}\phi_{(\omega,A)} + \phi_{(\omega,A)}^2)dx, \; F_A(\phi) = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{\partial}{\partial A}(\phi_{(\omega,A)}\mathcal{M}\phi_{(\omega,A)} + \phi_{(\omega,A)}^2)dx.$$

Deste modo, podemos obter os resultados similares aos da Proposição 4.12 e do Teorema 4.13. Ademais, se assumirmos que $\phi_{(\omega,A)}$ é uma solução onda viajante periódica que soluciona (4.89), com ω e A dependendo de um parâmetro ξ, um resultado similar ao Corolário 4.14 pode ser estabelecido.

Capítulo 5

Comentários e Estudos Futuros

Algumas questões levantadas nessa tese ainda merece nossa atenção para eventuais extensões ou trabalhos futuros, os quais colocamos abaixo:

- O primeiro problema abordado nesta tese foi a estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas para a equação de Schrödinger com não linearidade cúbica-quíntica

  $$iu_t + u_{xx} + a|u|^2u - b|u|^4u = 0, \tag{5.1}$$

  onde $a, b > 0$.

  Este tipo de não linearidade, dada na equação (5.1), é interessante posto que, diferente a mesma equação não linear de Schrödinger com potência simples, neste caso não há invariância de escala.

  A invariância de escala é essencial para obtermos resultados de estabilidade/instabilidade de ondas solitárias no caso de potência simples (ver [50]). Esta é uma das razões pelas quais os modelos relacionados a este último caso foram mais estudados que os modelos envolvendo potências duplas.

  Uma ideia para estudos futuros seria buscar uma forma adequada de se calcular a quantidade I, definida em (4). Deduzida esta quantidade, pretendemos estudar a estabilidade/instabilidade orbital das onda periódicas assumindo valores mais abrangentes de $a, b \in \mathbb{R}$.

- Natali e Pastor, em [39], baseados na teoria em [51], determinaram a estabilidade da onda solitária com perfil secante hiperbólico para a equação de Schrödinger de quarta ordem

  $$iu_t + u_{xx} - u_{xxxx} + |u|^2u = 0. \tag{5.2}$$

  Um problema em aberto que gostaríamos de ter abordado nesta tese, é a estabilidade de soluções periódicas para a equação (5.2). No referido trabalho, os autores calcularam a qualidade I de um modo não trivial, usando polinômios ortogonais, contudo, encontramos dificuldades para adaptar esta abordagem ao caso periódico.

- Ao longo desta tese, estudamos a estabilidade orbital de três modelos que podem ser escritos na forma abstrata

$$\frac{du}{dt} = JE'(u(t)). \tag{5.3}$$

Grillakis, Shatah e Strauss, em [21] e [22] , desenvolveram uma teoria de estabilidade para sistemas Hamiltonianos da forma (5.3) em um espaço de Hilbert X, onde $J : D(J) \subset X^* \to X$ é um operador linear antisimétrico, E é um funcional de classe C^2 definido em X.

Nos referidos trabalhos, autores assumiram que (5.3) é invariante pela representação unitária T de um grupo de Lie G, de dimensão finita. Assim, para todo $g \in G$, $T(g)$ é um grupo unitário fortemente contínuo sobre X. Além disso, os autores consideraram que E é invariante pela ação deste grupo, isto é,

$$E(T(g)u) = E(u), \qquad \text{para } g \in G,\ u \in X$$

e que J "comuta" com T, no seguinte sentido

$$T(g)J = JT^*(-g), \qquad \text{para todo } g \in G,$$

onde $T^*(g) : X^* \to X^*$ é o adjunto de T.

Uma questão natural a ser pensada, que nos direciona para pesquisas futuras, seria ampliar as ideias do nosso trabalho, a fim de obter um critério de estabilidade para sistemas Hamiltonianos arbitrários, que são invariantes sob a ação de simetrias convenientes.

Referências Bibliográficas

[1] ABDELOUHAB, L.; BONA, J.L.; FELLAND, M.; SAUT, J. C. - *Nonlocal models for nonlinear, dispersive equations*. Phys. D 40 (1989), p. 360-392.

[2] ANDRADE, T. P.; PASTOR, A. - *Orbital stability of periodic traveling-wave solutions for the regularized Schamel equation*. Physica D 317 (2016), p. 43-58.

[3] ANGULO, J. - *Nonlinear Dispersive Equations: Existence and Stability of Solitary and Periodic Travelling Waves Solutions*. Mathematical Surveys and Monographs 156, Providence, (2009).

[4] ANGULO, J. - *Nonlinear stability of periodic traveling wave solutions to the Schrödinger and the modified Korteweg-de Vries equations*. Journal of Differential Equations, 235 (2007), p. 1-30.

[5] ANGULO, J.; BONA, L.; SCIALOM, M. - *Stability of cnoidal waves*. Advances in Differential Equations, 11 (2006), p. 1321-1374.

[6] ANGULO, J.; NATALI, F. - *Positivity properties of the Fourier transform and the stability of periodic travelling-wave solutions*. SIAM J. Math. Anal., 40 (2008), p. 1123-1151.

[7] ANGULO, J.; NATALI, F.; CARDOSO JR., E. - *Stability Properties of Periodic Traveling Waves for the Intermediate Long Wave Equation*. to appear in Rev. Ibero-Americana de Matemáticas (2016).

[8] BARASHENKOV, I. V.; GOCHEVA, A. D.; MAKHANKOV V. G.; PUZYNIN, I. V. - *Stability of the soliton-like "bubbles"*. Physica D, 34 (1989), p. 240-254.

[9] BENJAMIN, T.B. - *Lectures on Nonlinear Wave Motion. Lecture Notes in Applied Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, vol. 3 (1974), p. 3-45.

[10] BONA, J.L.; SOUGANIDIS, P.E.; STRAUSS, W.A. - *Stability and instability of solutary waves of Korteweg-de Vries Type*. Proc. R. Soc. Lond. A, 411 (1987).

[11] BOWMAN, F. - *Introduction to Elliptic Functions with Applications*. Dover Publications, New York, (1961).

[12] Bronski J.C.; Johnson M. - *The modulational instability for a generalized Korteweg-de Vries equation*, Arch. Rational Mech. Anal. 197 (2010), p. 357-400.

[13] Bronski, J.C.; Johnson, M.; Kapitula, T. - *An index theorem for the stability of periodic travelling waves of Korteweg-de Vries type*, Proc. Royal Soc. Edinb. A. 141 (2011), p. 1141-1173.

[14] Byrd, P. F; Friedmann, M. D. - *Handbook of elliptical integrals for Enginners and Scientist*. 2nd ed., Springer, New York , (1971).

[15] Cardoso Jr., E. - *Estabilidade de Ondas Periódicas para Modelos Dispersivos Não-Lineares*. Tese de Doutorado, Doutorado em Matemática UEM - Maringá/PR, (2014).

[16] Cavalcanti, M. M.; Domingos Cavalcanti, V. N.; Komornik, V.- *Introdução à Análise Funcional*. Eduem, Maringá, (2011).

[17] Cazenave, T.; Lions, P. L.- *Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations*. Commun. Math. Phys., 85 (1982), p. 549-561.

[18] Colliander, J.; Keel, M.; Staffilani, G.; Takaoka, H.; Tao, T.- *Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on* $\mathbb{R}$ *and* $\mathbb{T}$. J. Amer. Math. Soc. 16 (2003), p. 705-749.

[19] Deconinck, B.; Kapitula, T. - *On the spectral and orbital stability of spatially periodic stationary solutions of generalized Korteweg-de Vries equations*. Hamiltonian Partial Diff. Eq. Appl., 75 285-322, Fields Institute Communications, Springer, New York, (2015).

[20] Gomes, A. M. - *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução*. 2nd ed., Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, (2000).

[21] Grillakis, M.; Shatah, J.; Strauss, W. - *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry II*, J. Functional Anal., 74 (1990), p. 308-348.

[22] Grillakis, M.; Shatah, J.; Strauss, W. - *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I*, J. Functional Anal., 74 (1987), p. 160-197.

[23] Hale, K. J. - *Ordinary Difierential Equations*. Wiley Interscience, New York, (1969).

[24] Hasimoto, H. - *A soliton on a vortex filament*. J. Fluid Mech. 51 (1972), p. 477-485.

[25] Hernández, C. - *Estabilidade de ondas viajantes para equações de Schrödinger do tipo cúbica-quíntica*. Tese de Doutorado, Doutorado em Matemática USP - São Paulo/SP, (2012).

[26] Hong, L.; Beech, R.; Osman, F.; Xian-Tu, H.; Sen-Yue, L.; Hora, H - *Periodic and solitary waves of the cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation.* J Plasma Phys, vol.70 (2004), p. 415-429.

[27] Hur, V.M.; Johnson, M. - *Stability of periodic traveling waves for nonlinear dispersive equations*, SIAM J. Math. Anal. 47 (2015), p. 3528-3554.

[28] Ince, E. L. - *The periodic Lamé functions.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh 60 (1940), p. 47-63.

[29] Iorio, R.; Iorio, V.M. - *Fourier Analysis and Partial Differential Equations.* Cambridge Stud. in Advan. Math, vol. 70 (2001).

[30] Johnson, M. - *On the stability of periodic solutions of the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation*, Phys. D 239 (2010), p. 1892-1908.

[31] Johnson, M. - *Nonlinear stability of periodic traveling wave solutions of the generalized Korteweg-de Vries equation.* SIAM J. Math. Anal., 41 (2009), p. 1921-1947.

[32] Kato, T. - *Perturbation Theory for Linear Operators.* 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, (1995).

[33] Langer, J.; Perline, R. - *Poisson geometry of the filament equation.* Journal of Nonlinear Science, vol. 1, (1991), p. 71-93

[34] Linares, F.; Ponce, G.- *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations* Springer, NY, (2008).

[35] Maeda, M.; Segata, J. - *Existence and Stability of Standing Waves of Fourth Order Nonlinear Schrödinger Type Equation Related to Vortex Filament.* Funkcialaj Ekvacioj, 54 (2011), p. 1-14.

[36] Magnus, W.; Winkler, S. - *Hill's Equation.* Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, vol. 20, Wiley, New York, (1966).

[37] Natali, F. - *Propriedades de positividade e estabilidade de ondas viajantes periódicas.* Tese de Doutorado, Doutorado em Matemática UNICAMP - Campinas/SP, (2007).

[38] Natali, F.; Neves, A. - *Orbital Stability of Solitary Waves.* IMA Journal of Applied Mathematics, (2013).

[39] Natali, F.; Pastor, A. - *The forth-order dispersive nonlinear Schrödinger equation: Orbital stability of a standing wave.* SIAM Journal of Appl. Dyn. System, vol.14, n.3 (2015), p. 1326-1346.

[40] Natali, F.; Pastor, A.; Cristófani, F. - *Orbital Stability of Periodic Waves for the Log-KdV Equation*. Preprint (2015).

[41] Neves, A. - *Floquet's Theorem and Stability of Periodic Solitary Waves*. J. Dynam. Differential Equations 21 (2009), p. 555-565.

[42] Neves, A. - *Isoinertial Family of Operators and Convergence of KdV Cnoidal Waves to Solitons*. J. Differential Equations 244 (2008), p. 875-886.

[43] Ohta, M. - *Stability and Instability of standing waves for one dimensional nonlinear Schrödinger equations with double power nonlinearity*. Kodai Math. J., (1995).

[44] Peng, Y.Z.; Krishnan, V. - *New exact solutions for the cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation*. Commun. Math. Sci., vol.5, n.2 (2007), p. 243-252.

[45] Reed, S.; Simon, B. - *Methods of Modern Mathematical Phisics: Analisys of Operators*. vol.IV, Academic Press, (1978).

[46] Reed, S.; Simon, B. - *Methods of Modern Mathematical Phisics: Analisys of Operators*. vol.II, Academic Press, (1975).

[47] Reed, S.; Simon, B. - *Methods of Modern Mathematical Phisics: Analisys of Operators*. vol.I, Academic Press, (1980).

[48] Segata, J. - *Orbital stability of a two parameter family of solitary waves for a fourth order nonlinear Schrödinger type equation*. J. Math. Phys. 54(6) (2013), p. 061503.

[49] Segata, J. - *Refined energy inequality with application to well-posedness for the fourth order nonlinear Schrödinger type equation on torus*. Journal of Differential Equations, 252 (2012), p. 5994-6011.

[50] Shatah, J.; Strauss, W.A. - *Instability of nonlinear bound states*. Comm. Math. Phys., 100 (1985), p. 173-190.

[51] Stuart, C. A. - *Lectures on the orbital stability of standing waves and applications to the nonlinear Schrödinger equation*. Milan J. Math., 76 (2008), p. 329-399.

[52] Weinstein, M. I. - *Modulation Stability of Ground States of Nonlinear Schrödinger Equations*. SIAM J. Math, 16 (1985), p. 472-490.

[53] Yosida, K. - *Functional Analysis*. 2nd ed., Springer-Verlag, New York, (1968).