UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

JANAINA PEDROSO ZANCHETTA

Decaimento Uniforme para Equações de Klein-Gordon-Schrödinger e para Equação da Onda com Fronteira Dinâmica do Tipo Cauchy-Ventcel

Maringá

2019

JANAINA PEDROSO ZANCHETTA

Decaimento Uniforme para Equações de Klein-Gordon-Schrödinger e para Equação da Onda com Fronteira Dinâmica do Tipo Cauchy-Ventcel

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.
Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti

Maringá

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Zanchetta, Janaina Pedroso
Z27d Decaimento uniforme para equações de Klein-Gordon-Schrödinger e para equação da onda com fronteira dinâmica do tipo Cauchy-Ventcel / Janaina Pedroso Zanchetta. -- Maringá, 2019.
171 f. : il.

Orientador: Prof.º Dr.º Marcelo Moreira Cavalcanti.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2019.

1. Klein-Gordon-Schrödinger. 2. Dissipação localizada. 3. Taxa de decaimento uniforme. 4. Cauchy-Ventcel. 5. Klein-Gordon-Schrödinger. 6. Localized damping. 7. Uniforme decay rates. 6. Cauchy-Ventcel. I. Cavalcanti, Marcelo Moreira, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 515.35

Edilson Damasio CRB9-1.123

JANAINA PEDROSO ZANCHETTA

DECAIMENTO UNIFORME PARA EQUAÇÕES DE KLEIN-GORDON-SCHRÖDINGER E PARA EQUAÇÃO DA ONDA COM FRONTEIRA DINÂMICA DO TIPO CAUCHY-VENTCEL

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Marcelo Moreira Cavalcanti

Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Waldemar D Bastos

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – S. J. Rio Preto

Andréa Cristina Prokopczyk Arita

Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – S. J. Rio Preto

Juan Soriano

Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Claudete Webler

Profa. Dra. Claudete Matilde Webler Martins
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 12 de fevereiro de 2019.
Local de defesa: Auditório do Departamento de Matemática, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

À minha família
dedico.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me amparado em todos os momentos desta trajetória e me dado a força necessária para chegar até aqui.

Agradeço a toda minha família pelo apoio e incentivo. Aos meus pais por todo amor e cuidado e aos meus irmãos pelo carinho e companheirismo.

Ao meu noivo Felipe, por estar sempre ao meu lado e por todo amor e compreensão ao longo desta jornada.

Ao professor Marcelo Moreira Cavalcanti, por aceitar me orientar neste trabalho, pelos ensinamentos, experiências compartilhadas e por toda paciência, dedicação, ajuda e amizade ao longo deste percurso.

Aos meus professores de graduação e pós-graduação da UNESP. Em especial, ao professor Luis Antônio Fernandes de Oliveira e à professora Andréa Cristina Prokopczyk Arita.

Aos professores e funcionários da UEM que contribuíram para minha formação. Em especial, à professora Valéria Cavalcanti e à secretária do PMA Lúcia Kato.

Aos professores Juan, Claudete, Andréa e Waldemar por aceitarem compor a banca examinadora.

Ao carinho e apoio dos meus amigos que mesmo longe fizeram a diferença nesta jornada. Aos amigos que fiz durante o doutorado, por tornarem esta trajetória mais leve. Em especial, Adriana, Vanderléa, Cláudia, Giseli, Luana, Maria, Victor, Emanuela e Alisson, pelos ótimos momentos juntos e por toda paciência e ajuda durante este período.

À CAPES pelo apoio financeiro.

“ A persistência é o caminho do êxito.”

(Charles Chaplin)

RESUMO

Neste trabalho, estudamos a existência, unicidade e decaimento uniforme dos seguintes sistemas de Klein-Gordon-Schrödinger,

$$\begin{cases} i\psi_t + \Delta\psi + i\alpha b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}} b(x)\psi = \phi\psi\chi_\omega \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \\ \phi_{tt} - \Delta\phi + a(x)\phi_t = |\psi|^2\chi_\omega \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \\ \psi = \phi = 0 \text{ em } \Gamma \times (0,\infty), \\ \psi(0) = \psi_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ \phi(0) = \phi_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ \phi_t(0) = \phi_1 \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} i\psi_t + \Delta\psi + i\alpha b(x)(|\psi|^2 + 1)\psi = \phi\psi\chi_\omega \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \\ \phi_{tt} - \Delta\phi + a(x)\phi_t = |\psi|^2\chi_\omega \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \\ \psi = \phi = 0 \text{ em } \Gamma \times (0,\infty), \\ \psi(0) = \psi_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ \phi(0) = \phi_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ \phi_t(0) = \phi_1 \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Além disso, estudamos a estabilidade uniforme da equação da onda com condições de fronteira dinâmica do tipo Cauchy-Ventcel posto em um meio não homogêneo e sujeito a uma dissipação não linear localmente distribuída

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \text{div}[K(x)\nabla u] + a(x)g(u_t) + f(u) = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times (0,\infty), \\ \eta(x)v_{tt} + \eta(x)\partial_{\nu_k} u + \eta(x)v_t = \text{div}[R(x)\nabla_T v] \ \text{ em } \ \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ u = 0 \text{ sobre } \ \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ u = v \text{ sobre } \Gamma \times (0,\infty), \\ (u(x,0), v(x,0)) = (u_0, u_{0_{|\Gamma}} := v_0) \text{ em } \Omega \times \Gamma, \\ (u_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1, u_{1_{|\Gamma}} := v_1) \text{ em } \Omega \times \Gamma. \end{cases}$$

Palavras chave: Klein-Gordon-Schrödinger, dissipação localizada, taxa de decaimento uniforme, Cauchy-Ventcel.

ABSTRACT

In this work, we study the existence, uniqueness and uniform decay of the following Klein-Gordon-Schrödinger systems,

$$\begin{cases} i\psi_t + \Delta\psi + i\alpha b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}} b(x)\psi = \phi\psi\chi_\omega \text{ in } \Omega \times (0,\infty), \\ \phi_{tt} - \Delta\phi + a(x)\phi_t = |\psi|^2\chi_\omega \text{ in } \Omega \times (0,\infty), \\ \psi = \phi = 0 \text{ on } \Gamma \times (0,\infty), \\ \psi(0) = \psi_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ \phi(0) = \phi_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ \phi_t(0) = \phi_1 \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} i\psi_t + \Delta\psi + i\alpha b(x)(|\psi|^2 + 1)\psi = \phi\psi\chi_\omega \text{ in } \Omega \times (0,\infty), \\ \phi_{tt} - \Delta\phi + a(x)\phi_t = |\psi|^2\chi_\omega \text{ in } \Omega \times (0,\infty), \\ \psi = \phi = 0 \text{ on } \Gamma \times (0,\infty), \\ \psi(0) = \psi_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ \phi(0) = \phi_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ \phi_t(0) = \phi_1 \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

In addition, we study the uniform stability of the wave equation with Cauchy-Ventcel type dynamic boundary conditions placed in a inhomogeneous medium and subjected to locally distributed nonlinear damping

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \text{div}[K(x)\nabla u] + a(x)g(u_t) + f(u) = 0 \text{ in } \Omega \times (0,\infty), \\ \eta(x)v_{tt} + \eta(x)\partial_{\nu_k} u + \eta(x)v_t = \text{div}[R(x)\nabla_T v] \text{ in } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ u = 0 \text{ on } \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ u = v \text{ on } \Gamma \times (0,\infty), \\ (u(x,0), v(x,0)) = (u_0, u_{0_{|\Gamma}} := v_0) \text{ in } \Omega \times \Gamma, \\ (u_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1, u_{1_{|\Gamma}} := v_1) \text{ in } \Omega \times \Gamma. \end{cases}$$

Palavras chave: Klein-Gordon-Schrödinger, Localized damping, Uniform decay rates, Cauchy-Ventcel.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O primeiro problema abordado neste trabalho é o seguinte modelo de equações de Klein-Gordon-Schrödinger (KGS) com dissipação localmente distribuída

$$\begin{cases} i\psi_t + \Delta\psi + i\alpha b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi = \phi\psi\chi_\omega \text{ em } \Omega\times(0,\infty), \\ \phi_{tt} - \Delta\phi + a(x)\phi_t = |\psi|^2\chi_\omega \text{ em } \Omega\times(0,\infty), \\ \psi = \phi = 0 \text{ em } \Gamma\times(0,\infty), \\ \psi(0) = \psi_0 \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega), \\ \phi(0) = \phi_0 \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega), \\ \phi_t(0) = \phi_1 \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{1}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^2$, com fronteira Γ suave e ω é um subconjunto aberto de Ω tal que $medida(\omega) > 0$, e satisfazendo a condição geométrica de controle. No que segue, α é uma constante positiva e χ_ω representa a função característica, isto é, $\chi_\omega = 1$ em ω e $\chi_\omega = 0$ em $\Omega\backslash\omega$. Consideremos $a, b \in W^{1,\infty}(\Omega)\cap C^\infty(\Omega)$ funções não negativas tais que

$$a(x) \geq a_0 > 0 \text{ em } \omega, \tag{2}$$

$$b(x) \geq b_0 > 0 \text{ em } \omega, \tag{3}$$

de modo que a não linearidade ψ existe onde os termos de dissipação

$$a(x)\phi_t \text{ e } i\alpha b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi \tag{4}$$

são, de fato, efetivos e reciprocamente. Se a dissipação é efetiva em todo domínio, isto é, $a(x) \geq a_0 > 0$ em Ω e $b(x) \geq b_0 > 0$ em Ω, podemos considerar $\chi_\omega = 1$ em Ω. Isto é necessário para tornar o sistema dissipativo. De fato, a presença dos termos de dissipação em (4) não é necessária, por si só, para garantir que a energia $E(t)$ associada ao problema (1) (veja a definição de $E(t)$ em (2.79)) é uma função não crescente no paramêtro t. Isto será visto mais adiante. Taxas de decaimento uniforme para o problema (1) tem sido consideradas em resultados prévios por Cavalcanti et. al

[26], [13]. Enquanto em [26] uma dissipação cheia é considerada em ambas as equações, em constraste, em [13] uma dissipação cheia é considerada na equação de Schrödinger mas apenas uma dissipação localizada foi considerada na equação da onda. A proposta do nosso segundo capítulo é generalizar substancialmente os dois resultados anteriores considerando apenas duas dissipações localizadas em ambas as equações, a escolha da dissipação $i\alpha b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi$ nos permite usar o efeito regularizante introduzido por Aloui em [3] para domínios limitados, o que desempenha um papel importante na prova, como veremos adiante.

O problema (1) tem sua origem no modelo canônico de interação de Yukawa de campos com núcleos complexos conservativos com campos de mesons reais neutros, dado por

$$\begin{cases} i\psi_t + \Delta\psi = \phi\psi \text{ em } \Omega \times (0,\infty) \\ \phi_{tt} - \Delta\phi + \mu^2\phi = |\psi|^2 \text{ em } \Omega \times (0,\infty) \\ \psi = \phi = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma \times (0,\infty) \\ \psi(0) = \psi_0,\ \phi(0) = \phi_0,\ \phi_t(0) = \phi_1. \end{cases} \tag{5}$$

A função ψ representa o campo complexo, enquanto a função ϕ representa o campo real e a constante positiva μ representa a massa de um meson. Como estamos considerando um domínio limitado, o termo $\mu^2\phi$ não afeta nossos argumentos na prova da estabilidade assintótica. Então, por simplicidade, este termo será omitido.

É importante notar que o problema (5) não é naturalmente dissipativo. Assim, a introdução de mecanismos de dissipação dados pelos termos em (4) são necessários para forçar a energia decair para zero quando t tende para o infinito. Na verdade, a equação dissipativa KGS foi amplamente estudada, veja por exemplo as seguintes referências [37], [46], [47], [49], [59], [60], e suas referências. A maioria dos trabalhos na literatura trata de termos dissipativos lineares que atuam em ambas as equações, com exceção dos trabalhos [48] e [26]. Pouco se sabe em relação a dissipação localizada atuando na equação da onda para este sistema e, no que diz respeito, não há resultado na literatura que trata de dissipação localizada em ambas as equações. Uma questão natural surge a partir desse contexto: Seria possível considerar uma dissipação localizada $ib(x)\psi$ atuando na equação de Schrödinger ao invés do mecanismo presente dado pelo termo $i\alpha b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi$ para obter alguma taxa de decaimento? Isto é um duro problema aberto a ser resolvido uma vez que o chamado efeito regularizante, o qual é crucial para a prova não é mais válido. O efeito regularizante é uma propriedade natural de todo o $\mathbb{R}^n$ ou domínios exteriores, conforme considerado nos trabalhos de Constantin e Saut [36] ou Burq, Gérard e Tzvetkov [23]. Foi considerado anteriormente em domínios ilimitados como uma ferramenta poderosa para alcançar a estabilidade exponencial, como por exemplo nos trabalhos [17] e [29]. Por outro lado, para variedades compactas o efeito regularizante foi introduzido primeiramente por Aloui [3], [4] forçando-o precisamente por meio da dissipação mais forte $i\alpha b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)$, acima mencionada, onde a região ω tal que $b(x) > 0$ satisfaz a condição geométrica de controle (CGC). Vale ressaltar que os pioneiros no uso de tais propriedades para estabilizar a equação puramente Schrödinger sujeita ao mesmo tipo de dissipação foram Bortot e Corrêa [18]. Neste trabalho adotaremos ideias similares para nosso contexto uma vez que estamos considerando uma dissipação linear agindo na equação de Schrödinger e também uma dissipação linear agindo na equação da onda, espera-se que a energia do sistema decaía para zero. Provar este fato é o objetivo principal do segundo capítulo.

O segundo problema deste trabalho é o seguinte modelo de equações de Klein-Gordon-Schrödinger com dissipação localmente distribuída

$$\begin{cases} i\psi_t + \Delta\psi + i\alpha b(x)(|\psi|^2+1)\psi = \phi\psi\chi_\omega \text{ em } \Omega\times(0,\infty), \\ \phi_{tt} - \Delta\phi + a(x)\phi_t = |\psi|^2\chi_\omega \text{ em } \Omega\times(0,\infty), \\ \psi = \phi = 0 \text{ em } \Gamma\times(0,\infty) \\ \psi(0) = \psi_0 \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega), \\ \phi(0) = \phi_0 \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega), \\ \phi_t(0) = \phi_1 \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{6}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^2$, com fronteira Γ suave e ω é um subconjunto aberto de Ω tal que $medida(\omega) > 0$, e satisfazendo a condição geométrica de controle. No que segue, α é uma constante positiva e χ_ω representa a função característica, isto é, $\chi_\omega = 1$ em ω e $\chi_\omega = 0$ em $\Omega\backslash\omega$. Consideremos $a \in L^\infty(\Omega)$ e $b \in L^\infty(\Omega)$ funções não negativas tais que

$$a(x) \geq a_0 > 0 \text{ em } \omega, \tag{7}$$

$$b(x) \geq b_0 > 0 \text{ em } \omega, \tag{8}$$

de modo que a não linearidade ψ existe onde os termos de damping

$$a(x)\phi_t \;\text{ e }\; i\alpha b(x)(|\psi|^2+1)\psi \tag{9}$$

são, de fato, efetivos e reciprocamente. Se a dissipação é efetiva em todo domínio, isto é, $a(x) \geq a_0 > 0$ em Ω e $b(x) \geq b_0 > 0$ em Ω, podemos considerar $\chi_\omega = 1$ em Ω.

No primeiro problema abordado generalizamos resultados prévios considerando duas dissipações localizadas em ambas as equações, ou seja,

$$\begin{aligned} i\psi_t + \Delta\psi + i\alpha b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}} b(x)\psi &= \phi\psi\chi_\omega \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \ (\alpha > 0) \\ \phi_{tt} - \Delta\phi + a(x)\phi_t &= |\psi|^2\chi_\omega \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \end{aligned}$$

e provamos o decaimento uniforme fazendo uso do método dos multiplicadores combinado com desigualdades integrais da energia e um efeito regularizante de Aloui [3], [4].

A nossa proposta neste segundo problema é generalizar substancialmente os resultados prévios acima mencionados considerando a estrutura de dissipação fraca $i\alpha b(x)(|\psi|^2 + 1)\psi$ ao invés de $i\alpha b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}} b(x)\psi$ assumidos em [1]. Para nosso propósito, fizemos uso da desigualdade de observabilidade de ambas as equações lineares, a da onda e Schrödinger, (veja [10] e [39], [64] respectivamente) combinado com outras ferramentas a fim de provar a taxa de decaimento exponencial como foi considerado anteriormente em [38] para a equação de onda. Isto será esclarecido durante a prova. É importante mencionar que o uso da desigualdade de observabilidade associada a equação linear da onda e Schrödinger ao invés do método dos multiplicadores, nos permite considerar regiões "sharp" ω satisfazendo a condição geométrica de controle. Com efeito, as desigualdades dadas em (3.6) e (3.7) são provadas por técnicas de análise microlocal e produzem regiões "sharp" quando comparadas com o método dos multiplicadores. Como uma consequência, nosso resultado generaliza substancialmente nossos resultados prévios não somente ao considerar um dissipação mais fraca, mas também com relação a naturalidade da região ω (menos dissipação possível) onde a dissipação atua.

Gostaríamos de mencionar outros artigos em conexão com o problema (5), a saber: Fukuda e Tsutsumi [41],[42],[43],[44], Bachelot e Chadam [7] e Hayashi e Von Wahl [52]. Nos artigos acima a existência global única para o problema (5) é estabelecida e algumas leis de conservação são verificadas. Também gostaríamos de citar alguns artigos interessantes em conexão com o sistema de Klein-Gordon-Schrödinger (KGS) de vários pontos de vista como: [6], [8], [12], [18],

[35], [37], [46], [50], [51], [52], [59], [60], [73], [75], [77], [78], [79], [84], [85], [87], [88] e suas referências.

O terceiro problema desta tese consiste em estudar a estabilidade uniforme da equação da onda com condições de fronteira do tipo Cauchy-Ventcel dinâmica posto em um meio não homogêneo e sujeito a uma dissipação não linear localmente distribuída

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \text{div}[K(x)\nabla u] + a(x)g(u_t) + f(u) = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \\ \eta(x)v_{tt} + \eta(x)\partial_{\nu_k} u + \eta(x)v_t = \text{div}[R(x)\nabla_T v] \text{ em } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ u = v \text{ sobre } \Gamma \times (0,\infty), \\ (u(x,0), v(x,0)) = (u_0, u_{0_{|\Gamma}}) \text{ em } \Omega \times \Gamma, \\ (u_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1, u_{1_{|\Gamma}}) \text{ em } \Omega \times \Gamma, \end{cases} \tag{10}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado de classe C^2 para $n \geq 2$, com fronteira $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, tal que $\Gamma_i, i = 0, 1$, são subconjuntos não vazios, fechados e disjuntos de Γ, $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $k_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$, são funções $C^\infty(\Omega)$ tais que para todo $x \in \Omega$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\alpha_0 \leq \rho(x) \leq \beta_0, \quad k_{ij}(x) = k_{ji}(x), \quad \alpha|\xi|^2 \leq \xi^\top \cdot K(x) \cdot \xi \leq \beta|\xi|^2, \tag{11}$$

$\alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta$ são constantes positivas, $K(x) = (k_{ij})_{i,j}$ é uma matriz definida simétrica positiva e $\eta : \Gamma \to \mathbb{R}_+$, $r_{ij} : \Gamma \to \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$ são funções $C^\infty(\Gamma)$ tais que para todo $x \in \Gamma$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\alpha_1 \leq \eta(x) \leq \beta_1, \quad r_{ij}(x) = r_{ji}(x), \quad \alpha_2|\xi|^2 \leq \xi^\top \cdot R(x) \cdot \xi \leq \beta_2|\xi|^2, \tag{12}$$

onde $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ são constantes positivas e $R(x) = (r_{ij})_{i,j}$ é uma matriz definida simétrica positivas. Vamos definir por ω_1 uma vizinhança de Γ_1 contida em $\overline{\Omega}$, ω_0 uma vizinhança Γ_0 contida em $\overline{\Omega}$ e $\omega = \omega_1 \cup \omega_0$.

Bey [11] e Hemmina [53, 54] estudaram uma estabilização na fronteira para sistemas elasto-dinâmicos e isotrópicos e equações de ondas com condições do tipo Cauchy-Ventcel. Em [53], Hemmina mostra que sob condições de fronteira dinâmicas e em domínios "star-shaped", o sistema elástico com condições de Cauchy-Ventcel é exponencialmente estável; [53] também faz um contra-exemplo mostrando que se $a \equiv 0$ em (10) então a energia do sistema nunca decai exponencialmente, mesmo se a dissipação for aplicada em toda fronteira.

Condições de fronteira dinâmica do tipo Ventcel foram estudadas por Khemmoundj e Medjden [57]. Esses resultados foram estudados por Cavalcanti, Khemmoundj e Medjen [30] para operadores lineares A e A_T com coeficientes váriaveis (mas ainda em domínios "star-shaped"), usando novas estimativas de energia combinadas com métodos de geometria Riemanniana dados por Lasiecka, Triggiani e Yao [62, 63].

Nosso propósito é estudar as condições de fronteira dinâmica do tipo Ventcel como estudado pelos autores em [30], sem precisar estar em domínios "star-shaped", iremos provar a estabilização para o problema (10) usando técnicas de análise microlocal. Portanto, nosso resultado generaliza substancialmente aqueles estudados em [30], bem como complementam os trabalhos [31], [32], [33] do cenário euclidiano para o Riemanniano.

Inspirados em Dehman, Gérard, Lebeau [39], ou Dehman, G. Lebeau e Zuazua [40], demos uma prova direta da desigualdade inversa para o problema equivalente ao problema (10), ou seja, provamos que para todo $T > T_0$ existe uma constante positiva C tal que

$$E(0) \leq C \int_0^T \int_\Omega a(x) \left(|u_t(x,t)|^2 + |g(u_t)|^2 \right) dxdt + \int_0^T \int_\Gamma |v_t(x,t)|^2 \, d\Gamma dt, \tag{13}$$

desde que os dados iniciais sejam tomados em conjuntos limitados de $\mathbb{V} \times \mathbb{H}$ e a não linearidade f seja considerada como na Hipótese 4.1.

Para provar (13) e portanto o resultado de estabilidade, argumentamos por contradição e encontramos uma sequência de $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de soluções fracas para o problema (4.14) tais que $\frac{1}{C} \leq E_k(0) \leq C$. Para obter uma contradição precisamos provar que $E_k(0) \to 0$ quando $k \to +\infty$. Devemos provar isso explorando as propriedades da função f e de F, a equipartição adequada da energia e um princípio de continuação única tal que

$$\int_0^T \int_\omega \left(|u_n'|^2 + |\nabla_{\mathbf{G}} u_n| \right) dxdt \to 0, \tag{14}$$

quando k tende para o infinito.

Nosso desejo é propagar a convergência (14) de $\omega \times (0,T)$ para o conjunto $\Omega \times (0,T)$. Para fazer isso, podemos usar com sucesso a análise microlocal. De fato, consideramos a medida do defeito microlocal μ, em suma m.d.m., introduzida primeiramente por Gérard [45], associada à solução da equação de onda linear. Notemos que

$$\partial_t Pu_n \to 0 \text{ fortemente em } H^{-1}_{loc}(\Omega \times (0,T)),$$

onde $Pu_n := u_n'' - \Delta_{\mathbf{G}} u_n$, assim, usando propriedades associadas a μ, podemos provar que μ se propaga ao longo do fluxo bicaracterístico do operador de onda $\partial_t Pu_n$, provando a convergência desejada.

Este trabalho organiza-se da seguinte forma: o capítulo 1 consiste dos resultados preliminares. Já os capítulos 2, 3 e 4 abordam, respectivamente, o primeiro, segundo e terceiro problemas apresentados acima.

CAPÍTULO 1

RESULTADOS PRELIMINARES

1.1 Distribuições e Espaços Funcionais

Sejam $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ pontos do $\mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2..., \alpha_n)$ n$-$uplas de números inteiros não negativos. Considerando $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2... + \alpha_n$ e $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n!$, denotaremos o operador derivação em $\mathbb{R}^n$ por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$. Definimos o *suporte* da função φ em Ω, e denotamos por $\mathrm{supp}(\varphi)$, o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$. Quando $\mathrm{supp}(\varphi)$ é compacto, dizemos que φ tem suporte compacto em Ω. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que possuem suporte compacto.

O *espaço das funções testes* de Ω, $\mathcal{D}(\Omega)$, é o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido da seguinte noção de convergência: Dada uma sucessão $\{\varphi_\nu\}$ de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ dizemos que

$$\varphi_\nu \to \varphi \text{ em } \mathcal{D}(\Omega) \tag{1.1}$$

se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω tal que

(i) $\mathrm{supp}(\varphi_\nu) \subset K, \forall \nu$ e $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K$;

(ii) $D^\alpha \varphi_\nu \to D^\alpha \varphi$ uniformemente sobre $K, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Uma *distribuição* sobre Ω é uma forma linear sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência dada em (1.1). Chamaremos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o *espaço vetorial das distribuições* sobre Ω. Diremos que $\{T_\nu\}$, uma sucessão de elementos de $\mathcal{D}'(\Omega)$, converge para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, e escreveremos

$$T_\nu \to T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega),$$

quando

$$\langle T_\nu, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \,, \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dada uma distribuição T sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a derivada distribucional de ordem α da distribuição T, denotada por $D^\alpha T$, é dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \,, \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com essa definição, uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ possui derivada distribucional de todas as ordens, $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e além disso, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) & \to & \mathcal{D}'(\Omega) \\ T & \mapsto & D^\alpha T \end{array}$$

é linear e contínua.

1.2 Espaços $L^p(\Omega)$

Sejam Ω um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ e p um número real tal que $1 \leq p < \infty$. Denotaremos por $L^p(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis u, definidas em Ω tais que $|u|^p$ é Lebesgue integrável sobre Ω.

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach.

Se define por $L^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que u é mensurável e existe uma constante C tal que $|u(x)| \leq C$ para quase todo $x \in \Omega$. Uma norma em $L^\infty(\Omega)$ é dada por

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |u(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\},$$

a qual o torna um espaço de Banach.

Em particular, $L^2(\Omega)$, com o produto interno

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

e a norma $|u|^2 = (u,u)$, é um espaço de Hilbert.

Seja $1 \le p \le \infty$. Diz-se que p' é o *índice conjugado* de p se $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Proposição 1.1 ***(Desigualdade de Young)*** *Se a e b são números reais não negativos então*

$$ab \le \frac{a^q}{q} + \frac{b^p}{p}$$

sempre que $1 < p, q < \infty$ e $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$.

A desigualdade de Young também pode tomar a seguinte forma

$$ab \le \varepsilon a^q + C(\varepsilon) b^p.$$

Demonstração: Ver [15]. □

Proposição 1.2 ***(Desigualdade de Interpolação)*** *Se $u \in L^{q'}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \le q' \le q \le \infty$, então $u \in L^r(\Omega)$ para todo $q' \le r \le q$ e verifica-se a desigualdade*

$$\|u\|_{L^r} \le \|u\|_{L^{q'}}^{\alpha} \|u\|_{L^q}^{1-\alpha},$$

onde $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\alpha}{q'} + \dfrac{1-\alpha}{q}, \quad (0 \le \alpha \le 1)$.

Demonstração: Ver [15]. □

Proposição 1.3 ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$, com $1 \le p \le \infty$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |uv| \le ||u||_{L^p(\Omega)} ||v||_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [15]. □

Proposição 1.4 ***(Desigualdade de Hölder generalizada)*** *Sejam $f_1, f_2, ..., f_k$ funções tais que $f_i \in L^{p_i}(\Omega), 1 \leq i \leq k$, onde $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k} \leq 1$. Então o produto $f = f_1 f_2 ... f_k \in L^p(\Omega)$ e*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [15]. □

Proposição 1.5 ***(Desigualdade de Minkowski)*** *Sejam $u, v \in L^p(\Omega)$ e $1 \leq p \leq \infty$, então*

$$||u + v||_{L^p(\Omega)} \leq ||u||_{L^p(\Omega)} + ||v||_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [70]. □

Teorema 1.6 ***(Convergência Dominada de Lebesgue)*** *Se uma sequência $\{f_k\}$ de funções integráveis a Lebesgue num conjunto Ω converge quase sempre em Ω para um função f, e se $|f_k| \leq \psi$, quase sempre em Ω, $\forall k \in \mathbb{N}$, para um certa função $\psi \in L^1(\Omega)$, então a integral $\displaystyle\int_\Omega f$ existe e*

$$\int_\Omega f dx = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega f_k \, dx.$$

Demonstração: Ver [70]. □

Denota-se por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é Lebesgue integrável sobre cada subconjunto compacto de Ω.

Proposição 1.7 ***(Du Bois Raymond)*** *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x) \, dx = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

então $u = 0$ quase sempre em Ω.

Demonstração: Ver [24]. □

1.3 Espaços de Sobolev

Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \geq 1$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é o espaço vetorial de todas as funções de $L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo $\alpha \leq m$. Simbolicamente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall |\alpha| \leq m\}.$$

Uma norma em $W^{m,p}(\Omega)$ é dada por

$$||u||^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx, \text{ se } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$||u||^p_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess}\, |D^\alpha u(x)|^p \, dx, \text{ se } p = \infty,$$

a qual o torna um espaço de Banach. No caso $p = 2$, escreve-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ e, munindo-o com o produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) \, dx,$$

temos um espaço de Hilbert.

Define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, ou seja,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Quando Ω é limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$, então a norma em $W_0^{m,p}(\Omega)$, dada por

$$||u||^p = \sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx,$$

é equivalente a norma induzida por $W^{m,p}(\Omega)$.

Representa-se por $W^{-m,p'}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$, onde $1 \leq p < \infty$ e p' é o índice conjugado de p. Por $H^{-m}(\Omega)$ denota-se o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$.

Teorema 1.8 *Sejam Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, de classe C^m, com fronteira limitada e m um inteiro tal que $m \geq 1$, e $1 \leq p < \infty$. Então temos as seguintes imersões contínuas:*

(i) *se* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *onde* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$;

(ii) *se* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ \forall\, q \in [p, +\infty[$;

(iii) *se* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Ver [15] □

Teorema 1.9 ***(Teorema de Rellich-Kondrachov)*** *Seja Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$, para $n \geq 2$. Então as seguintes imersões são compactas:*

(i) *se $p < n$ então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega),\ \forall\, 1 \leq q < \frac{np}{n-p}$;

(ii) *se $p = n$ então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega),\ \forall\, q\ \in [1, +\infty[$;

(iii) *se $p > n$ então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^0(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [15]. □

1.3.1 Traço de uma função de $H^m(\Omega)$

Se $u \in C(\overline{\Omega})$, podemos obter os valores de u sobre a fronteira Γ de Ω, basta para isto tomar a restrição $u_{|\Gamma}$. Entretanto, se $u \in H^m(\Omega)$, como a medida n-dimensional de Γ é zero, não tem sentido, a priori, falar dos valores de u em Γ. O objetivo da teoria de traço é dar um significado para $u_{|\Gamma}$.

Conforme explicitado em [24], existe uma única aplicação

$$\gamma : H^m(\Omega) \longrightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma) u \mapsto \gamma u = \{\gamma_0 u, \gamma_1 u, ..., \gamma_{m-1} u\},$$

denominada aplicação traço, que é linear, contínua, sobrejetiva, com núcleo $H_0^m(\Omega)$, verificando

$$\gamma u = \left(u_{|\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial_\nu} |_\Gamma \,, ..., \frac{\partial^{m-1} u}{\partial_\nu^{m-1}} |_\Gamma \right), \forall u \in D(\overline{\Omega}),$$

e admitindo uma inversa à direita γ^{-1} linear e contínua, isto é, existe uma aplicação linear

$$\gamma^{-1} : \prod_{j=0}^{m-1} H_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma) \to H^m(\Omega),$$

que é contínua e satisfaz

$$\gamma(\gamma^{-1}\xi) = \xi, \forall \xi \in \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma).$$

Tomando, em particular, m = 1, temos a aplicação

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$$
$$u \mapsto \gamma_0 u = u_{|\Gamma},$$

que é denominada aplicação traço de ordem zero.

Consideremos $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ munido do produto interno

$$(u, v)_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = (u, v)_{H^1(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)},$$

o que o faz um espaço de Hilbert.

A aplicação

$$\gamma_1 : D(\overline{\Omega}) \to H^{-1/2}(\Gamma)$$
$$u \mapsto \gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_\Gamma$$

prolonga-se, por continuidade, a uma única aplicação linear e contínua $\gamma_1 : \mathcal{H}^1(\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$, posto que $D(\overline{\Omega})$ é denso em $\mathcal{H}^1(\Omega)$.

Proposição 1.10 *A aplicação traço $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ é sobrejetiva e, além disso, $Ker(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [71]. □

1.4 Teorema de Carathéodory

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto cujos elementos são denotados por $(t, x), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ e seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função.

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Dizemos que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições de Carathéodory sobre Ω se:

(i) $f(t, x)$ é mensurável em t para cada x fixado;

(ii) $f(t, x)$ é contínua em x para quase todo t fixado.

(iii) para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real $m_K(t)$ integrável, tal que

$$\|f(t, x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t), \forall (t, x) \in K.$$

Teorema 1.11 *(**Teorema de Carathéodory**) Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre Ω. Então existe uma solução $x(t)$ de (1.2) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta, \beta > 0$.*

Corolário 1.12 *Sejam $\Omega = (0, T) \times B$ com $T > 0$ e $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}, b > 0$. Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ nas condições de Carathéodory sobre Ω. Suponhamos que $x(t)$ é uma solução de (1.2) tal que se tenha $|x(t)| \leq M, \forall t \in I, M$ independente de I e $M < b$. Então, $x(t)$ possui um prolongamento em $(0, T)$.*

Observação 1.13 *Note que o Teorema de Caractheódory pode ser estendido para o caso complexo, isto é, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^n$.*

1.5 Topologias Fracas, Espaços Reflexivos e Separáveis

Nesta seção temos algumas propriedades das topologias fraca e fraca $*$, assim como resultados de convergência nestas topologias envolvendo a reflexividade e a separabilidade dos espaços.

Considerando E um espaço de Banach, a *topologia fraca* $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E que torna contínuas todas as aplicações $f \in E'$.

Seja (x_n) uma sucessão convergente para x na topologia fraca $\sigma(E, E')$. Quando não houver possibilidade de confusão diremos apenas que (x_n) converge fraco para x esse fato denotaremos por

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Proposição 1.14 *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão em E, então:*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ em E se, e somente se, $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$, $\forall f \in E'$;

(ii) Se $x_n \to x$ em E, então $x_n \rightharpoonup x$ em E;

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E, então $||x||_E$ é limitada e $||x||_E \leq \liminf ||x_n||_E$;

(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E e $f_n \to f$ em E', então $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Demonstração: Ver [15]. □

Sejam E um espaço de Banach e $x \in E$ fixo. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rcl} J_x : E' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \langle J_x, f \rangle = \langle f, x \rangle \,, \end{array}$$

que é linear e contínua e portanto $J_x \in E''$, $\forall x \in E$. Deste modo, definamos a aplicação $J : E \to E''$ tal que $J(x) = J_x$, a qual é chamada de *injeção canônica* de E em E''.

A topologia fraca $*$, ou $\sigma(E', E)$, é a topologia menos fina sobre E' que faz contínuas todas as aplicações J_x.

Seja (f_n) uma sucessão convergente para f na topologia fraca $*\ \sigma(E, E')$. Com vistas a simplificação das notações escreveremos apenas que $\{f_n\}$ converge fraco $*$ para f, ou simbolicamente

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } E',$$

quando não houver possibilidade de confusão.

Proposição 1.15 *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão em E', então:*

(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E' *se, e somente se,* $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall x \in E$*;*

(ii) Se $f_n \to f$ *forte, então* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(E', E'')$*;*

(iii) Se $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(E', E'')$*, então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E'*;*

(iv) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E'*, então* $||f_n||_{E'}$ *é limitada e* $||f||_{E'} \leq \liminf ||f_n||_{E'}$*;*

(v) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E' *e* $x_n \to x$ *em* E*, então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$*.*

Demonstração: Ver [15]. □

Dizemos que um espaço de Banach é *reflexivo* quando a injeção canônica $J : E \to E''$ é sobrejetora. Um espaço métrico E é dito *separável* quando existe um subconjunto $M \subset E$ enumerável e denso em E.

Teorema 1.16 *Seja E um espaço de Banach tal que E' é separável. Então E é separável.*

Demonstração: Ver [15]. □

Teorema 1.17 *Seja E um espaço de Banach separável e seja (f_n) uma sequência limitada em E'. Então existe uma subsequência (f_{n_k}) que converge na topologia fraca $*$ $(\sigma(E', E))$.*

Demonstração: Ver [15]. □

Teorema 1.18 *Seja E um espaço de Banach reflexivo e seja (x_n) um sequência limitada em E. Então existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge na topologia fraca ($\sigma(E, E')$).*

Demonstração: Ver [15]. □

1.6 Espaços Funcionais a Valores Vetoriais

Nesta seção iremos determinar espaços envolvendo as variáveis temporal e espacial, os quais são necessários para dar sentido a problemas de evolução.

Para $t \in (0, T)$ fixo, interpretamos a função $x \mapsto u(x, t)$ como um elemento do espaço X. Denotaremos este elemento como $u(t) \in X$ com valores no espaço X.

Sejam X um espaço de Banach e $a, b \in \mathbb{R}$.

O espaço $L^p(a, b; X,)\ \ 1 \leq p < +\infty$, consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[a, b]$ com imagem em X, ou seja, as funções $u : (a, b) \to X$ tais que

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} := \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

O espaço $L^\infty(a, b; X)$ consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[a, b]$ com imagem em X, isto é, as funções $u : (a, b) \to X$ limitadas quase sempre em (a, b). A norma neste espaço é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} := \sup \operatorname{ess} \|u(t)\|_X \, .$$

O espaço $C^m(a, b; X), m = 0, 1, \cdots$, consiste de todas as funções contínuas $u : [a, b] \to X$ que possuem derivadas contínuas até a ordem m sobre $[a, b]$. A norma, neste caso, é dada por

$$\|u\| := \sum_{i=0}^{m} \max_{t \in [a,b]} \left| u^{(i)}(t) \right| .$$

Proposição 1.19 *Sejam $m = 0, 1, \cdots , 1 \leq p < +\infty, X$ e Y espaços de Banach.*

(a) $C^m(a,b;X)$ *é um espaço de Banach sobre* $\mathbb{K}$.

(b) $L^p(a,b;X), 1 \leq p < +\infty$ *e* $L^\infty(a,b;X)$ *são espaços de Banach sobre* $\mathbb{K}$.

(c) $C(a,b;X)$ *é denso* $L^p(a,b;X)$ *e a imersão* $C(a,b;X) \hookrightarrow L^p(a,b;X)$ *é contínua.*

(d) *Se* X *é um espaço de Hilbert com produto interno* $(.,.)_X$ *então* $L^2(a,b;X)$ *é também um espaço de Hilbert com produto interno*

$$(u,v)_{L^2(a,b;X)} := \int_\Omega (u(t),v(t))_X dt.$$

(e) $L^p(a,b;X)$ *é separável se* X *for separável e* $1 \leq p < +\infty$.

(f) *O espaço* $L^p(a;b;X)$ *é reflexivo se* $1 < p < \infty$.

(g) *Se* $X \hookrightarrow Y$*, então* $L^r(a,b;X) \hookrightarrow L^q(a,b;Y)$*,* $1 \leq q \leq r \leq +\infty$.

Demonstração: Ver [90]. □

Proposição 1.20 *Sejam* X *um espaço de Banach e* $1 \leq p \leq +\infty$*. Se* $f \in L^1(0,T;X)$ *e* $\|f\|_X \in L^p(0,T)$*, então* $f \in L^p(0,T;X)$ *e* $\|f\|_{L^p(0,T;X)} = \|f\|_{L^p(0,T)}$.

Demonstração: Ver [83]. □

O espaço dual de $L^p(a,b;X)$. Consideremos $Y = L^p(a,b;X)$. Temos a seguinte relação de dualidade $Y' = L^q(a,b;X')$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, devido ao seguinte teorema:

Teorema 1.21 *Seja* X *um espaço de Banach reflexivo e separável,* $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então cada função* $v \in L^q(a,b,X')$ *corresponde a um único funcional* $\bar{v} \in Y'$ *dada por*

$$\langle \bar{v}, u \rangle = \int_a^b \langle v(t), u(t) \rangle_X dt, \quad \forall u \in Y. \tag{1.3}$$

Reciprocamente, para cada $\bar{v} \in Y'$ *corresponde exatamente uma função* $v \in L^q(a,b;X')$ *dada por* (1.3)*. Além disso,*

$$\|\bar{v}\|_{Y'} = \|v\|_{L^q(a,b;X')} .$$

Demonstração: Ver [90]. □

Seja X um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{D}(a,b;X)$ o espaço localmente convexo e completo das funções vetoriais $\varphi : (a,b) \to X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em (a,b). Dizemos que uma sucessão

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{D}(a,b;X)$$

se:

(i) Existe um compacto K de (a,b) tal que $\operatorname{supp}(\varphi_\nu)$ e $\operatorname{supp}(\varphi)$ estão contidos em K, para todo ν;

(ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{d^k}{dt^k}\varphi_\nu(t) \to \dfrac{d^k}{dt^k}\varphi$ em X, uniformemente em $t \in (a,b)$.

O espaço das aplicações lineares contínuas de $\mathcal{D}(a,b) = \mathcal{D}(a,b;\mathbb{R})$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(a,b;X)$, ou seja, $S \in \mathcal{D}'(a,b;X)$ se $S : \mathcal{D}(a,b) \to X$ é linear e se $\theta_\nu \to \theta$ em $\mathcal{D}(a,b)$ implicar que $\langle S, \theta_\nu \rangle \to \langle S, \theta \rangle$ em X. Diremos que

$$S_\nu \longrightarrow S \text{ em } \mathcal{D}'(a,b;X)$$

se

$$\langle S_\nu, \theta \rangle \to \langle S, \theta \rangle \ \text{ em } , \forall \theta \in \mathcal{D}(a,b).$$

O espaço $\mathcal{D}(a,b;X)$ munido da convergência acima é denominado espaço das *distruibuições vetoriais* de (a,b) com valores em X.

Denotaremos por $H_0^1(a,b;X)$ o espaço de Hilbert

$$H_0^1(a,b;X) := \{v \in L^2(a,b;X);\ v' \in L^2(a,b;X);\ v(a) = v(b) = 0\}$$

munido com o produto interno

$$((w,v)) = \int_a^b (w(t),v(t))_X dt + \int_a^b (w'(t),v'(t))_X dt.$$

Identificando $L^2(a,b;X)$ com o seu dual $[L^2(a,b;X)]'$, via Teorema de Riez, obtemos

$$\mathcal{D}(a,b;X) \hookrightarrow H_0^1(a,b;X) \hookrightarrow L^2(a,b;X) \hookrightarrow H^{-1}(a,b;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(a,b;X),$$

onde $H^{-1}(a,b;X) = [H_0^1(a,b;X)]'$.

Proposição 1.22 *Seja $u \in L^2(a,b;X)$. Então existe um único $f \in H^{-1}(a,b;X)$ que verifica*

$$\langle f, \theta\xi \rangle = (\langle u', \theta \rangle, \xi)_X, \ \ \forall \ \theta \in \mathcal{D}(a,b); \ \ \forall \ \xi \in X.$$

Demonstração: [74]. □

Observação 1.23 *Da proposição anterior podemos identificar f com u', de posse disso, diremos que se $u \in L^2(a,b;X)$ então $u' \in H^{-1}(a,b;X)$.*

Proposição 1.24 *A aplicação*

$$\begin{array}{rccc} g \ : & L^2(a,b;X) & \longrightarrow & H^{-1}(a,b;X) \\ & u & \longmapsto & g(u) = u', \end{array}$$

onde X é um espaço de Hilbert, é linear e contínua.

Demonstração: Ver [74]. □

1.7 Resultados Auxiliares

Teorema 1.25 ***(Fórmulas de Green)***

1. *Se $\gamma \in H^2(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega \nabla\gamma \cdot \nabla u dx = -\int_\Omega u\Delta\gamma dx + \int_\Gamma \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} u ds, \ \ \forall u \in H^1(\Omega).$$

2. *Se $u, \gamma \in H^2(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega u\Delta\gamma - \gamma\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial\gamma}{\partial\nu} - \gamma\frac{\partial u}{\partial\nu} ds.$$

Demonstração: Ver [15] p.316. □

Teorema 1.26 ***(Teorema da Compacidade de Aubin-Lions)*** *Sejam B_0, B e B_1 espaços de Banach tais que $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$ e:*

(i) *B_0 e B_1 são reflexivos;*

(ii) *A imersão $B_0 \hookrightarrow B$ é compacta;*

(iii) *A imersão $B \hookrightarrow B_1$ é contínua.*

Definamos

$$W = \{u \in L^{p_0}(0,T;B_0); u' \in L^{p_1}(0,T;B_1)\},$$

onde $1 < p_0; p_1 < 1$. Consideremos W munido da norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

a qual o torna um espaço de Banach. Então a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Demonstração: Ver [66] p. 57. □

Teorema 1.27 ***(Lema de Lions)*** *Seja (u_μ) uma sucessão de funções pertencentes a $L^q(Q)$ com $1 < q < \infty$. Se*

(i) *$u_\mu \to u$ quase sempre em Q;*

(ii) $\|u_\mu\|_{L^q(Q)} \leq C, \ \ \forall \mu \in \mathbb{N}$;

então $u_\mu \rightharpoonup u$ fraco em $L^q(Q)$.

Demonstração: Ver [66] p. 12. □

Proposição 1.28 ***(Lema de Gronwall)*** *Sejam $z \in L^\infty(0,T)$ e $\varphi \in L^1(0,T)$ tais que $z(x) \geq 0$, $\varphi(t) \geq 0$ e seja $c \geq 0$ uma constante. Se*

$$\varphi(t) \leq c + \int_0^t z(s)\varphi(s)ds, \ \forall t \in (0,T),$$

então

$$\varphi(t) \leq c.e^{\int_0^t z(s)ds}, \ \forall t \in (0,T).$$

Demonstração: Ver [71]. □

Teorema 1.29 ***(Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg)*** *Sejam $1 \leq p, q, r \leq \infty$ e considere j, m dois inteiros tais que $0 \leq j < m$. Se*

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + a\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{N}\right) + \frac{(1-a)}{q}$$

para algum $a \in [j/m, 1]$ $(a < 1$ se $r > 1$ e $m - j - \frac{N}{r} = 0)$, então existe uma constante $C(N, m, j, p, q, r)$ tal que

$$\sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \right)^a \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{1-a}.$$

O resultado ainda é válido quando Ω é um domínio com fronteira regular, isto é,

$$\sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{m,r}(\Omega)}^a \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-a}, \forall u \in D(\Omega),$$

para todo $u \in W^{m,r}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, contanto que $q, r < \infty$ ou $q = \infty$ e $n, mr < \infty$.

Demonstração: Ver [16]. □

Teorema 1.30 ***(Teorema de Representação de Riesz-Fréchet)*** *Seja H um espaço de Hilbert. Dada $\varphi \in H'$, existe $f \in H$ único tal que*

$$\langle \varphi, u \rangle = (f, u), \ \forall u \in H.$$

Além disso,

$$||f||_H = ||\varphi||_{H'}.$$

Demonstração: Ver [15]. □

Definição 1.31 *Seja H um espaço de Hilbert. Se diz que uma forma bilinear $a(\cdot, \cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ é* *(i)* contínua *se existe uma constante C tal que*

$$|a(u,v)| \leq C|u||v|, \; \forall u, v \in H \text{ e}$$

(ii) coerciva *se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$a(v,v) \geq \alpha |v|^2, \; \forall v \in H.$$

Teorema 1.32 ***(Lax-Milgram)*** *Seja $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então para toda $\varphi \in H'$, existe um único $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \,, \; \forall v \in H.$$

Além disso, se a é simétrica, então u se caracteriza pela propriedade

$$u \in H \text{ e } \frac{1}{2}a(u,v) - \langle \varphi, v \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

Demonstração: Ver [15]. □

Teorema 1.33 ***(Teorema de Holmgren)***. *Seja P um operador diferencial com coeficientes constantes em R^n. Seja u solução de $Pu = 0$ em Q_1, onde Q_1 é um aberto de R^n. Suponha $u = 0$ em Q_2, onde Q_2 é um subconjunto aberto e não vazio de Q_1. Então $u = 0$ em Q_3, onde Q_3 é um subconjunto aberto de Q_1 que contém Q_2 e tal que qualquer hiperplano característico do operador P que intersecta Q_3 também intersecta Q_2.*

Demonstração: Ver [66] p. 87. □

Teorema 1.34 ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Suponhamos que Ω seja um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, então, para todo $1 \leq p < \infty$, existe uma constante **C** (dependendo da medida de Ω e de p,) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: Ver [15]. □

Proposição 1.35 ***(Desigualdade de Jensen)*** *Seja B um hipercubo do $\mathbb{R}^n$, então, para toda função côncava F e toda função integrável $g \in L^1(B)$, teremos*

$$F\left(\frac{1}{medB}\int_B g(x)dx\right) \geq \frac{1}{medB}\int_B F(g(x))dx.$$

Demonstração: Ver [81]. □

Teorema 1.36 *Considere $b \in C^\infty$ tal que $\omega = \{b(x) \neq 0\}$ controla geometricamente Ω e v é uma solução do seguinte problema:*

$$\begin{cases} iv_t + \Delta v + ib(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)v = 0 \qquad em \qquad \Omega \times (0,\infty), \\ v = 0 \qquad em \qquad \Gamma \times (0,\infty), \\ v(0) = v_0 \qquad em \qquad \Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

Então,

(i) Existe $c > 0$ tal que u, definido por $u(t) = \int_0^T S(t-\tau)f(\tau)d\tau$ satisfaz

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq c\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{1.5}$$

(ii) Para toda $\phi \in C^\infty((0,\infty))$, existe $c > 0$ tal que v é uma solução de (1.4) com dado inicial $v_0 \in L^2(\Omega)$ satisfazendo

$$\|\phi v\|_{L^2(0,\infty;H^1(\Omega))} \leq c\|v_0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.6}$$

Demonstração: Ver [3]. □

Consideremos V e H dois espaços de Hilbert complexos, tais que $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$ e V é denso em H. Seja também $a(u,v)$ uma forma bilinear, hermitiana e contínua em $V \times V$, tal que existem α_0 e α em $\mathbb{R}$, com $\alpha > 0$, satisfazendo a condição de coercividade

$$Re[a(v,v)] + \alpha_0(v,v)_H \geq \alpha\|v\|_V^2, \forall v \in V.$$

Consideremos

$$D(A) = \{u \in V;\ \text{a forma linear } v \mapsto a(u,v) \text{ é contínua}\},$$

onde V está munido com a topologia de H.

Pelo teorema de Riesz, para cada $u \in D(A)$ existe um único $Au \in H$, tal que $a(u,v) = (Au, v)_H, \forall v \in V$. Note que, desta forma definimos um operador A com domínio

$$D(A) = \{u \in V; \exists f \in H \text{ tal que } a(u,v) = (f,v)_H, \forall v \in V\} \text{ e } Au = f.$$

Portanto, temos que $D(A)$ é um subespaço linear de H e $A : D(A) \subset V \longrightarrow H$ é um operador de H. Assim, diremos que A é definido pela terna $\{V, H, a(u,v)\}$.

Proposição 1.37 ***(Teorema Espectral)*** *Nas condições acima, obtemos:*

(i) A é auto-adjunto e existe um sistema ortonormal completo $(w_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de H constituído de vetores próprios de A.

(ii) Se $(\lambda_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ são os valores próprios de A correspondentes aos $(w_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, então

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_\nu \leq ..., \text{ e } \lambda_\nu \longrightarrow \infty.$$

(iii) O domínio de A é dado por:

$$D(A) = \left\{ u \in H; \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^2 |(u, \omega_\nu)_H|^2 < \infty \right\}.$$

(iv) $Au = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu (u, \omega_\nu)_H \omega_\nu, \forall u \in D(A)$.

Demonstração: Ver [25]. □

Seja $-\Delta$ o operador definido pela terna $\{H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), a(u,v)\}$, onde

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \overline{\nabla v}\, dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega),$$

e

$$D(-\Delta) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

O teorema espectral para operadores auto-adjuntos garante a existência de um sistema (ω_ν) de $L^2(\Omega)$ ortonormal completo constituído pelas autofunções do operador $-\Delta$, soluções do problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta\omega_m &= \lambda_m \omega_m, \\ \omega_m|_\Gamma &= 0. \end{cases}$$

Se $(\lambda_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ são os correspondentes autovalores de $-\Delta$, então

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_m < ... \text{ e } \lambda_m \to +\infty \text{ quando } m \to +\infty. \tag{1.7}$$

Além disso, segue que:

$\left(\dfrac{\omega_m}{\sqrt{\lambda_m}}\right)$ é um sistema ortonormal completo em $H_0^1(\Omega)$,

$\left(\dfrac{\omega_m}{\lambda_m}\right)$ é um sistema ortonormal completo em $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$.

Este operador é densamente definido, injetivo e auto-adjunto. Além disso, pode ser isometricamente estendido para $-\tilde{\Delta} : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, onde $H^{-1}(\Omega)$ é o dual topológico de $H_0^1(\Omega)$. Esta extensão é definida por

$$\langle -\tilde{\Delta} y, z\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = (\nabla y, \nabla z)_{L^2(\Omega)}; \forall y, z \in H_0^1(\Omega).$$

A partir de agora, por simplicidade, denotaremos $-\tilde{\Delta}$ por $-\Delta$. Observe que $-\Delta$ é um operador positivo, de modo que podemos definir suas potências fracionárias. De acordo com Lions-Magenes ([68], (2.7) e (9.1)), temos

$$D(-\Delta^{1/2}) = H_0^1(\Omega) \text{ e } D(-\Delta^{1/4}) = H^{\frac{1}{2}}(\Omega). \tag{1.8}$$

Pela teoria espectral, segue que

$$D(-\Delta) \hookrightarrow D((-\Delta)^{3/4}) \hookrightarrow D((-\Delta)^{1/2}) = H_0^1(\Omega) \hookrightarrow D((-\Delta)^{1/4}) = H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

1.8 Resultados Utilizados de Semigrupos

Seja X um espaço de Banach e X' o seu espaço dual.

Definição 1.38 *Um conjunto $A \subset X \times X'$ é chamado **monótono** se*

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq 0 \text{ para cada } [x_i, y_i] \in A, i = 1, 2.$$

Um subconjunto monótono de $X \times X'$ é dito ser ***maximal monótono*** *se ele não tem a propriedade de conter qualquer outro subconjunto monótono de $X \times X'$.*
Se A é um operador unívoco de X em X', então a condição de monotonia se transforma em

$$(x_1 - x_2, Ax_1 - Ax_2) \geq 0, \ \ \forall x_1, x_2 \in D(A).$$

Demonstração: Ver [9] p.34. □

Definição 1.39 *$H : X \to X$ é dito* ***hemicontínuo*** *se é unívoco e, para todo $x, y \in X$, tem-se $H(x+ty) \stackrel{*}{\rightharpoonup} Hx$ quando $t \to 0$, isto é, $\lim\limits_{t\to 0} \langle H(x+ty), z\rangle_{X,X'} = \langle Hx, z\rangle_{X,X'}$.*

Demonstração: Ver [9] p.34. □

Definição 1.40 *O operador $R : X \to X'$ é chamado* ***coercivo*** *se*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(x_m, x'_m)}{\|x_m\|} = \infty, \ \ \forall \ [x_m, x'_m] \in R \ \textit{ tal que } \ \lim_{m\to\infty} \|x_m\| = \infty.$$

Demonstração: Ver [9] p.34. □

Teorema 1.41 *Sejam H um espaço de Hilbert real e B um operador monótono, hemicontínuo e limitado (leva limitado em limitado) de H. Seja A um operador maximal monótono de H. Então, A + B é um operador maximal monótono.*

Demonstração: Ver [9]. □

Seja $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + \mathbb{A}U + \mathbb{B}U \ni f, \\ U(0) = U_0 \in \mathcal{H}, \end{cases} \tag{1.9}$$

onde $\mathbb{B} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é localmente lipschitz, isto é,

$$\|\mathbb{B}U - \mathbb{B}V\| \leq L(K)\|U - V\|, \ \text{ desde que } \ \|U\| \leq K, \|V\| \leq K. \tag{1.10}$$

Teorema 1.42 *Suponha que* $\mathbb{A}$ *é maximal monótono e que* $0 \in \mathbb{A}0$. *Se* $U_0 \in D(\mathbb{A})$, $f \in W_1^1(0,t,\mathcal{H})$ $\forall t > 0$ *e a aplicação localmente Lipschitz satisfaz* (1.10), *então existe* $t \leq +\infty$ *tal que a equação* (1.9) *tem uma única solução forte no intervalo* $[0, t_{max}[$. *Além disso, se* $U_0 \in \overline{D(\mathbb{A})}$ *e* $f \in L^1(0,t,\mathcal{H})$ $\forall t > 0$ *obtemos uma solução generalizada* $U \in C([0,t_{max}[;\mathcal{H})$ *para a equação* (1.9). *Em ambos os casos, se* $t_{max} < +\infty$, *então* $\lim\limits_{t \nearrow t_{max}} \|U(t)\|_{\mathcal{H}} = +\infty$.

Demonstração: Ver [34] Teorema 7.2. □

1.9 Análise Microlocal

Iniciamos esta seção anunciando alguns resultados devido a Burq e Gérard em [22] e Gérard em [45].

Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.43 *Seja* $m \in \mathbb{R}$. *Definimos um* ***símbolo de ordem*** m *em* Ω *como uma função* $a : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *de classe* C^∞, *com suporte em* $K \times \mathbb{R}^n$, *onde* K *é um subconjunto compacto de* Ω, *que satisfaz a seguinte estimativa: para todo* $\alpha \in \mathbb{N}^n, \beta \in \mathbb{N}^n$, *exite uma constante* $C_{\alpha,\beta} > 0$ *tal que*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m-|\beta|}.$$

Denotamos por $S_c^m(\Omega)$ *o espaço vetorial dos símbolos de ordem no máximo* m *em* Ω.

Proposição 1.44 *Se* $a \in S_c^m(\Omega)$, *a fórmula*

$$Au(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x.\xi} a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)d\xi, \tag{1.11}$$

define, para todo $u \in C_0^\infty(\Omega)$, *um elemento* Au *de* $C_0^\infty(\Omega)$.

A fórmula (1.11) define uma aplicação linear $A : C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(\Omega)$, a qual chamaremos de **operador pseudodiferencial** de símbolo a. Dizemos que o operador pseudodiferencial A admite um símbolo principal, denotado por $\sigma_m(A)$, se existe uma função $a_m = \sigma_m(A) \in$

$C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ com suporte, na primeira variável, compacto em $K \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ e homogênea de ordem m, na segunda variável, tal que, se $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ valendo 0 em uma vizinhança da origem e 1 fora de um compacto suficientemente grande, segue que,

$$a(x,\xi) = a_m(x,\xi)\chi(\xi) + r(x,\xi),$$

onde $r \in S_c^{m-1}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. Nestas condições, $a_m = \sigma_m(A)$ é chamado de símbolo principal de A.

Observe que, no caso em que $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ a aplicação $a \mapsto A$ não é injetora, isto é, um operador pseudodiferencial não é definido unicamente por um símbolo, por outro lado, é possível provar a unicidade do símbolo principal.

Apesar de termos definido operadores pseudodiferenciais sobre o espaço $C_0^\infty(\Omega)$, é possível estender a ação de operadores pseudodiferenciais a espaços de Sobolev. Considerando K um subconjunto compacto contido em Ω e $s \in \mathbb{R}$, denotamos por $H_K^s(\Omega)$ o espaço das distribuições com suporte compacto em K, onde o prolongamento com 0 fora de Ω está em $H^s(\mathbb{R}^n)$. Denotamos por $H_{comp}^s(\Omega) = \bigcup\limits_K H_K^s(\Omega)$, onde K é tomado sobre todos os compactos de Ω.

Teorema 1.45 *Seja $a \in S_c^m(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ e seja K a projeção sobre Ω do suporte de a. Então, para todo real s, o operador definido em* (1.11) *se prolonga de forma única em uma aplicação linear e contínua de $H_{comp}^s(\Omega)$ em $H_K^{s-m}(\Omega)$.*

Vamos introduzir, agora, o conceito de medida microlocal de defeito, para tal, seja $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L_{loc}^2(\Omega)$, i.e.,

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_K |u_k(x)|^2\, dx < +\infty,$$

para todo subconjunto compacto K contido em Ω.

Dizemos que u_k converge fracamente para $u \in L_{loc}^2(\Omega)$ quando, para todo $f \in L_{comp}^2(\Omega)$, tem-se

$$\int_\Omega u_k(x)\, f(x)\, dx \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega u(x)\, f(x)\, dx.$$

Teorema 1.46 *Seja $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$ que converge fracamente para zero em $L^2_{loc}(\Omega)$. Então existe uma subsequência $\{u_k\}$ e uma medida positiva de Radon μ sobre $T^1\Omega := \Omega \times S^{n-1}$ tal que para todo operador pseudodiferencial A de ordem 0 sobre Ω que admite um símbolo principal $\sigma_0(A)$ e para todo $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\chi\sigma_0(A) = \sigma_0(A)$, tem-se*

$$(A(\chi u_k), \chi u_k)_{L^2} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega\times S^{n-1}} \sigma_0(A)(x,\xi)\, d\mu(x,\xi). \tag{1.12}$$

Definição 1.47 *Sob as circunstâncias do Teorema 1.46, μ é chamada de* **medida de defeito microlocal** *(m.d.m.) da sequência $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.*

Observação 1.48 *O Teorema 1.46 assegura, para toda sequência limitada $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $L^2_{loc}(\Omega)$ que converge fracamente para zero, a existência de uma subsequência admitindo uma medida de defeito microlocal. Observamos que de (1.12), em particular quando $A = f \in C_0^\infty(\Omega)$,*

$$\int_\Omega f(x)|u_k(x)|^2\, dx \to \int_{\Omega\times S^{d-1}} f(x)\, d\mu(x,\xi), \tag{1.13}$$

assim u_k converge fortemente para 0 se, e somente se, $\mu = 0$.

Observação 1.49 *Observe que dadas duas sequências (y^k) e (x^k) limitadas em $L^2_{loc}(\Omega)$ convergindo fraco para zero, podemos associar a estas sequências, mesmo passando a uma subsequência, medidas microlocais de defeito μ_y e μ_x, respectivamente. Afirmamos que, se $y^k - x^k \to 0$ em $L^2_{loc}(\Omega)$, então $\mu_y = \mu_x$.*

De fato, dado A um operador pseudodiferencial de ordem zero e $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ uma função nas condições do Teorema 1.46, temos

$$(A(\chi x^k), \chi x^k) \to \int_{\Omega\times S^{d-1}} \sigma_0(A) d\mu_x,$$

$$(A(\chi y^k), \chi y^k) \to \int_{\Omega\times S^{d-1}} \sigma_0(A) d\mu_y,$$

com $\sigma_0(A)$ sendo o símbolo principal de A. Isto nos leva a

$$(A(\chi x^k), \chi x^k) - (A(\chi y^k), \chi y^k) \longrightarrow \int_{\Omega\times S^{d-1}} \sigma_0(A) d(\mu_x - \mu_y). \tag{1.14}$$

Por hipótese temos que $x^k - y^k \to 0$ em $L^2_{loc}(\Omega)$ e, como $A\chi$ é um operador contínuo em $L^2_{loc}(\Omega)$ pelo Teorema 1.45, obtemos

$$A(\chi(x^k - y^k)) \to 0 \text{ em } L^2(\Omega).$$

Assim,

$$\begin{aligned}(A(\chi x^k), \chi x^k) - (A(\chi y^k), \chi y^k) &= (A(\chi x^k), \chi x^k) - (A(\chi y^k), \chi x^k) \\ &\quad + (A(\chi y^k), \chi x^k) - (A(\chi y^k), \chi y^k) \\ &= (A(\chi(x^k - y^k)), \chi x^k) + (A(\chi y^k), \chi(x^k - y^k)) \\ &\longrightarrow 0.\end{aligned} \tag{1.15}$$

Logo, pela unicidade do limite, de (1.14) e (1.15) segue que

$$\int_{\Omega \times S^{d-1}} \sigma_0(A) d(\mu_x - \mu_y) = 0 \text{ para todo } A,$$

o que nos leva a concluir que $\mu_x - \mu_y = 0$ e, portanto, $\mu_x = \mu_y$.

Teorema 1.50 *Seja P um operador diferencial de ordem m sobre Ω e seja $\{u_k\}$ uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$ que converge fracamente para 0 e admite uma m.d.m. μ. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $Pu_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ fortemente em $H^{-m}_{loc}(\Omega)$ $(m > 0)$.

(ii) $\operatorname{supp}(\mu) \subset \{(x,\xi) \in \Omega \times S^{n-1} : \sigma_m(P)(x,\xi) = 0\}$.

Teorema 1.51 *Seja P um operador diferencial de ordem m sobre Ω, verificando $P^* = P$, e seja $\{u_k\}$ uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$ que converge fracamente para 0 e admite uma m.d.m. μ. Vamos assumir que $Pu_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ fortemente em $H^{1-m}_{loc}(\Omega)$. Então, para toda função $a \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^n)\backslash\{0\})$ de grau $1-m$ que é homogênea na segunda variável e com suporte compacto na primeira variável, tem-se*

$$\int_{\Omega \times s^{d-1}} \{a, p\}(x,\xi)\, d\mu(x,\xi) = 0. \tag{1.16}$$

A seguir, apresentaremos algumas ferramentas clássicas referentes ao campo vetorial hamiltoniano e suas curvas bicaracterísticas no $(x,\xi)-$espaço cotangente para funções reais $p(x,\xi)$.

Definição 1.52 *Seja $p \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ uma função real. Chamamos H_p um* ***campo Hamiltoniano*** *de p, o seguinte campo de vetores definido em $\Omega \times \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$:*

$$H_p(x,\xi) = \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_1}(x,\xi), \cdots, \frac{\partial p}{\partial \xi_n}(x,\xi); -\frac{\partial p}{\partial x_1}(x,\xi), \cdots, -\frac{\partial p}{\partial x_n}(x,\xi) \right).$$

A derivada de Lie de uma função f com respeito ao compo Hamiltoniano H_p é dado por $H_p(f) = \{p, f\}$, onde

$$\{p,f\}(x,\xi) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j} \frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \right).$$

Uma ***curva Hamiltoniana*** *de p é uma curva integrável do campo de vetores H_p, isto é, é uma solução maximal $s \in I \mapsto (x(s),\ \xi(s))$ para equações Hamilton-Jacobi*

$$\left\{ \dot{x} = p_\xi(x,\xi) = \frac{\partial p}{\partial \xi}(x,\xi), \quad \dot{\xi} = -p_x(x,\xi) = -\frac{\partial p}{\partial x} \right\}, \tag{1.17}$$

onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

Observação 1.53 *Da identidade $H_p p = 0$ segue que a função p mantém um valor constante em cada uma de suas curvas Hamiltonianas. Dizemos que tal curva é* ***bicaracterística*** *de p se esse valor for nulo.*

Observação 1.54 *Seja λ uma função C^∞ em $T^0\Omega$ com valores reais diferentes de zero. Como*

$$H_{\lambda p} = \lambda H_p + p H_\lambda = \lambda H_p \ \text{ se } p = 0,$$

resulta que as bicaracterísticas de λp e p concidem (módulo uma reparametrização).

Podemos agora traduzir os Teoremas (1.50) e (1.51) em termos mais geométricos.

Teorema 1.55 *Seja P um operador diferencial autoadjunto de ordem m sobre Ω que admite um símbolo principal p. Seja $\{u_k\}_k$ uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$ que converge fracamente para zero, com uma m.d.m. μ. Vamos assumir que Pu_k converge para 0 em $H^{-(m-1)}_{loc}$. Então o suporte de μ, $\mathrm{supp}(\mu)$, é uma união de curvas do tipo $s \in I \mapsto \left(x(s), \frac{\xi(s)}{|\xi(s)|}\right)$, onde $s \in I \mapsto (x(s), \xi(s))$ é uma bicaracterística de p.*

Proposição 1.56 *A menos de uma mudança de variáveis, as bicaracterísticas do símbolo principal do operador de ondas*

$$p(t, x, \tau, \xi) = -\rho(x)\tau^2 + K(x)\,\xi \cdot \xi, \quad \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n), \tag{1.18}$$

são curvas da seguinte forma

$$t \mapsto \left(t, x(t), \tau, -\tau \left(\frac{K(x(t))}{\rho(x(t))} \right)^{-1} \dot{x}(t) \right),$$

onde $t \mapsto x(t)$ é uma geodésica de métrica $G = \left(\frac{K}{\rho}\right)^{-1}$ sobre Ω, parametrizado pela abscissa curvilínea.

CAPÍTULO 2

DECAIMENTO EXPONENCIAL PARA EQUAÇÕES ACOPLADAS DE KLEIN-GORDON-SCHRÖDINGER COM DISSIPAÇÃO LOCALMENTE DISTRIBUÍDA

Este capítulo, realizado em parceria com Adriana Flores de Almeida e Marcelo Moreira Cavalcanti, foi publicado em [1].

Consideremos o seguinte modelo de equações de Klein-Gordon-Schrödinger,

$$\begin{cases} i\psi_t + \Delta\psi + i\alpha b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}} b(x)\psi = \phi\psi\chi_\omega \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \\ \phi_{tt} - \Delta\phi + a(x)\phi_t = |\psi|^2\chi_\omega \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \\ \psi = \phi = 0 \text{ em } \Gamma \times (0,\infty), \\ \psi(0) = \psi_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ \phi(0) = \phi_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ \phi_t(0) = \phi_1 \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{2.1}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^2$, com fronteira Γ suave e ω é um subconjunto aberto de Ω tal que $medida(\omega) > 0$, α é uma constante positiva e χ_ω representa a função característica, isto é, $\chi_\omega = 1$ em ω e $\chi_\omega = 0$ em $\Omega\backslash\omega$. Consideremos $a, b \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ funções não negativas tais que

$$a(x) \geq a_0 > 0 \text{ em } \omega, \tag{2.2}$$

$$b(x) \geq b_0 > 0 \text{ em } \omega. \tag{2.3}$$

Além disso,

$$\text{Se } a(x) \geq a_0 > 0 \text{ em } \Omega, \text{ então consideramos } \chi_\omega \equiv 1 \text{ em } \Omega. \tag{2.4}$$

$$\text{Se } b(x) \geq b_0 > 0 \text{ em } \Omega, \text{ então consideramos } \chi_\omega \equiv 1 \text{ em } \Omega. \tag{2.5}$$

A energia associada ao problema (2.1) é definida por

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\psi(x,t)|^2 + |\nabla\phi(x,t)|^2 + |\phi_t(x,t)|^2\right) dx. \tag{2.6}$$

As seguintes hipóteses são feitas:

Hipótese 2.1 *Assumimos que $a, b \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ são funções não negativas tais que*

$$a(x) \geq a_0 > 0, \quad \textit{q.s em } \omega$$

$$b(x) \geq b_0 > 0, \quad \textit{q.s em } \omega.$$

Além disso,

$$\textit{se } a(x) \geq a_0 > 0 \textit{ q.s em } \Omega, \textit{ então consideramos } \chi_\omega \equiv 1 \textit{ q.s em } \Omega,$$

$$\textit{se } b(x) \geq b_0 > 0 \textit{ q.s em } \Omega, \textit{ então consideramos } \chi_\omega \equiv 1 \textit{ q.s em } \Omega.$$

Hipótese 2.2 *Assumimos que ω é uma vizinhança de $\overline{\Gamma(x^0)}$, onde*

$$\Gamma(x_0) := \{x \in \Gamma; (x - x^0)\cdot\nu(x) > 0\} \tag{2.7}$$

e $\nu(x)$ é um vetor unitário normal a $x \in \Gamma$.

Como um exemplo de domínio Ω satisfazendo a hipótese acima vamos considerar a figura 1:

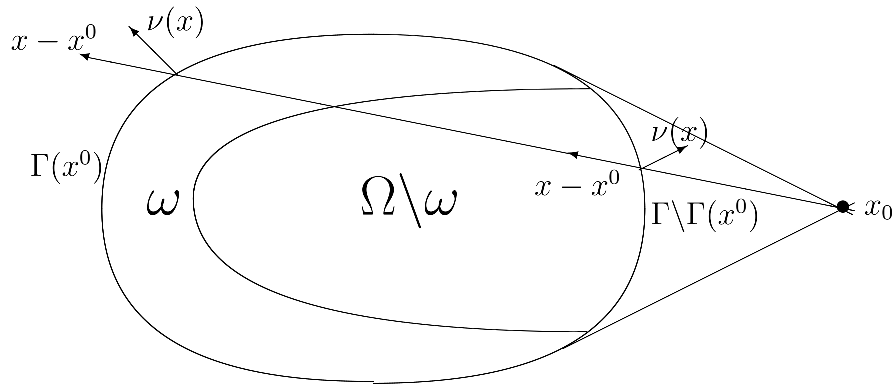

Figura 1

2.1 Existência e Unicidade

Verifiquemos o resultado de existência e unicidade pelo seguinte teorema:

Teorema 2.3 *Dados* $\{\psi_0, \phi_0, \phi_1\} \in \{H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\}^2 \times H_0^1(\Omega)$ *e assumindo que a Hipótese (2.1) vale, então, existe uma única solução regular para o problema (2.1) tal que*

$$\psi \in L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)),\ \psi' \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)),$$
$$\phi \in L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)),\ \phi' \in L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega)),$$
$$e\ \phi'' \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)).$$

Demonstração: Utilizaremos o método de Galerkin para provarmos a existência de solução para o problema (2.1), que consiste em obter, usando o teorema espectral, o problema projetado em um espaço de dimensão finita m, para cada $m \in \mathbb{N}$. Assim obtemos um problema de valor inicial equivalente envolvendo apenas equações diferenciais ordinárias. Pelo teorema de Carathéodory, segue que, para todo $m \in \mathbb{N}$, o problema correspondente possui solução local, a qual, através das estimativas a priori, independentes de t, podem ser estendidas ao intervalo $[0,T], \forall\ T > 0$, obtendo-se assim um par de sequências de funções $\{(\psi_m), (\phi_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ que convergem para a solução do sistema considerado inicialmente e satisfazem as condições iniciais do teorema. $\square$

2.1.1 Problema Aproximado

Representemos por $\{w_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma base em $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ formada por autovetores de $-\Delta$, de acordo com o teorema espectral apresentando na Seção 1.7. Para cada $m\in\mathbb{N}$, denotemos por $V_m=[w_1,w_2,...,w_m]$ o sub-espaço de $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ gerado pelos m-primeiros vetores da base e definamos

$$\psi_m(t)=\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j \ \text{ e } \ \phi_m(t)=\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)w_j,$$

onde $\{\psi_m(t),\phi_m(t)\}$ é a solução do seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases}(\psi_m'(t),w_j)+i(\nabla\psi_m(t),\nabla w_j)+\alpha(b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_m(t),w_j)=-i(\phi_m(t)\psi_m(t)\chi_\omega,w_j),\\ (\phi_m''(t),w_j)+(\nabla\phi_m(t),\nabla w_j)+(a(x)\phi_m'(t),w_j)=(|\psi_m(t)|^2\chi_\omega,w_j),\\ \psi_m(0)=\psi_{0m}\to\psi_0 \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),\\ \phi_m(0)=\phi_{0m}\to\phi_0 \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),\\ \phi_m'(0)=\phi_{1m}\to\phi_1 \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega),\end{cases} \tag{2.8}$$

com $j=1,2,...,m$. O sistema aproximado (2.8) é um sistema finito de equações diferenciais ordinárias que tem solução local em algum intervalo $[0,t_m[$, em virtude do teorema de Carathéodory.

A extensão dessa solução a todo intervalo $[0,T]$, será obtida pela primeira estimativa a priori que iremos estabelecer abaixo.

2.1.2 Estimativas a Priori

Estimativa I:

Em (2.8), multiplicando a primeira equação por $\overline{g_{jm}(t)}$ e somando em $j, 1\le j\le m$, obtemos

$$\begin{aligned}(\psi_m'(t),\psi_m(t))+i(\nabla\psi_m(t),\nabla\psi_m(t))+\alpha(b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_m(t),\psi_m(t))=\\ -i(\phi_m(t)\psi_m(t),\psi_m(t)\chi_\omega).\end{aligned} \tag{2.9}$$

Como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\psi_m(t),\psi_m(t)) &= (\psi_m'(t),\psi_m(t))+(\psi_m(t),\psi_m'(t))\\ &= (\psi_m'(t),\psi_m(t))+\overline{(\psi_m'(t),\psi_m(t))}\\ &= 2Re(\psi_m'(t),\psi_m(t)),\end{aligned}$$

temos

$$Re(\psi_m'(t),\psi_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\alpha(b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_m(t),\psi_m(t)) &= \alpha\int_\Omega b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_m(t)\overline{\psi_m(t)}dx\\ &= \alpha\int_\Omega(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_m(t)b(x)\overline{\psi_m(t)}dt\\ &= \alpha((-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_m(t),b(x)\psi_m(t)).\end{aligned}$$

Por outro lado, do fato do operador $(-\Delta)^{\frac{1}{4}}$ ser auto-adjunto, temos

$$\begin{aligned}((-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_m(t),b(x)\psi_m(t)) &= ((-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_m(t),(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_m(t))\\ &= \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(\cdot)\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Logo,

$$Re[\alpha((-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_m(t),b(x)\psi_m(t))] = \alpha\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(\cdot)\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Assim, tomando a parte real na equação (2.9), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(\cdot)\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Agora, notemos que para $n=2$, $D[(-\Delta)^{\frac{1}{4}}] \equiv H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, assim, em ω temos

$$\alpha\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b_0\psi_m(t)\|^2_{L^2(\omega)} \leq \alpha\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(\cdot)\psi_m(t)\|^2_{L^2(\omega)} \leq \alpha\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(\cdot)\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

e de $H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{b_0^2\alpha}{c}\|\psi_m(t)\|^2_{L^4(\omega)} \leq 0. \tag{2.10}$$

Multiplicando (2.10) por 2 e integrando de 0 a t, $t\in[0,t_m[$, temos

$$\|\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2b_0^2\alpha}{c}\int_0^t\|\psi_m(s)\|^2_{L^4(\omega)}\,ds \leq \|\psi_{0m}\|^2_{L^2(\Omega)},$$

observando em (2.8) que

$$\psi_m(0) = \psi_{0m} \to \psi_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

segue que existe $C > 0$, tal que

$$\sup_{t\in(0,+\infty)} \text{ess}\|\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C = C(\|\psi_0\|_{L^2(\Omega)}), \forall m \in \mathbb{N},$$
$$\int_0^{+\infty} \|\psi_m(t)\|^2_{L^4(\omega)}\, dt \leq C = C(\|\psi_0\|_{L^2(\Omega)}), \forall m \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$(\psi_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)), \tag{2.11}$$

e

$$\int_0^{+\infty} \|\psi_m(t)\|^2_{L^4(\omega)}\, dt \leq C = C(\|\psi_0\|_{L^2(\Omega)}). \tag{2.12}$$

Em (2.8), multiplicando a segunda equação por $h'_{jm}(t)$, ainda somando em $j, 1 \leq j \leq m$, obtemos

$$(\phi''_m(t), \phi'_m(t)) + (\nabla\phi_m(t), \nabla\phi'_m(t)) + (a(x)\phi'_m(t), \phi'_m(t)) = (|\psi_m(t)|^2\chi_\omega, \phi'_m(t)), \tag{2.13}$$

e usando as desigualdades de Hölder e Young, temos

$$\begin{aligned} (|\psi_m(t)|^2\chi_\omega, \phi'_m(t)) &\leq \int_\omega |\psi_m(t)|^2|\phi'_m(t)|dx \\ &\leq \left(\int_\omega |\psi_m(t)|^4\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\omega |\phi'_m(t)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\psi_m(t)\|^2_{L^4(\omega)}\|\phi'_m(t)\|_{L^2(\omega)} \\ &= \|\psi_m(t)\|_{L^4(\omega)}\|\psi_m(t)\|_{L^4(\omega)}\|\phi'_m(t)\|_{L^2(\omega)} \\ &\leq \frac{1}{2}\|\psi_m(t)\|^2_{L^4(\omega)} + \frac{1}{2}\|\psi_m(t)\|^2_{L^4(\omega)}\|\phi'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Assim, de (2.13) e (2.14), segue que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\phi'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\phi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega a(x)|\phi'_m(t)|^2dx \\ &\qquad \leq \frac{1}{2}\|\psi_m(t)\|^2_{L^4(\omega)} + \frac{1}{2}\|\psi_m(t)\|^2_{L^4(\omega)}\|\phi'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Multiplicando (2.15) por 2 e integrando de 0 a t, $t \in [0, t_m[$, temos

$$\|\phi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\int_0^t \int_\Omega a(x)|\phi_m'(s)|^2 dxds \leq \|\phi_{1m}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\phi_{0m}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$+ \int_0^t \|\psi_m(s)\|_{L^4(\omega)}^2 ds + \int_0^t \|\psi_m(s)\|_{L^4(\omega)}^2 \|\phi_m'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\|\phi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|\phi_{1m}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\phi_{0m}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\psi_m(s)\|_{L^4(\omega)}^2 ds \\ &+ \int_0^t \|\psi_m(s)\|_{L^4(\omega)}^2 (\|\phi_m'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\phi_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) ds,\end{aligned}$$

uma vez que,

$$2\int_0^t \int_\Omega a(x)|\phi_m'(s)|^2 dxds \geq 0.$$

Observando em (2.8) que

$$\phi_m(0) = \phi_{0m} \to \phi_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \text{ e } \phi_m'(0) = \phi_{1m} \to \phi_1 \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

e considerando (2.12), temos

$$\|\phi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C + \int_0^t \|\psi_m(s)\|_{L^4(\omega)}^2 (\|\phi_m'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\phi_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2)\, ds,$$

em que $C = C(\|\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\phi_1\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_0\|_{L^2(\Omega)})$. Aplicando o Lema de Gronwall, obtemos a estimativa a saber,

$$\|\phi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C, \tag{2.16}$$

em que $C = C(\|\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\phi_1\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_0\|_{L^2(\Omega)})$. Logo,

$$\begin{aligned}(\phi_m) &\quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega)), \\ (\phi_m') &\quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)).\end{aligned}$$

Estimativa II:

Derivando a primeira equação do sistema (2.8), multiplicando por $\overline{g_{jm}'(t)}$ e somando em j, $1 \leq j \leq m$, obtemos

$$\begin{aligned}(\psi_m''(t), \psi_m'(t)) + i(\nabla\psi_m'(t), \nabla\psi_m'(t)) + \alpha([b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}} b(x)\psi_m(t)]', \psi_m'(t)) \\ = -i([\phi_m(t)\psi_m(t)\chi_\omega]', \psi_m'(t)).\end{aligned} \tag{2.17}$$

De maneira análoga a feita anteriormente na estimativa (I), segue que

$$Re(\psi''_m(t), \psi'_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.18}$$

e

$$Re\,\alpha([b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_m(t)]', \psi'_m(t)) = \alpha\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(\cdot)\psi'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.19}$$

Definindo $I_1 := -i([\phi_m(t)\psi_m(t)\chi_\omega]', \psi'_m(t))$, temos

$$\begin{aligned} I_1 &= -i\int_\Omega [\phi_m(t)\psi_m(t)\chi_\omega]'\overline{\psi'_m(t)}dx \\ &= -i\int_\Omega [\phi'_m(t)\psi_m(t) + \phi_m(t)\psi'_m(t)]\chi_\omega\overline{\psi'_m(t)}dx \\ &= -i\int_\omega [\phi'_m(t)\psi_m(t) + \phi_m(t)\psi'_m(t)]\overline{\psi'_m(t)}dx \\ &= -i\int_\omega \phi'_m(t)\psi_m(t)\overline{\psi'_m(t)}dx - i\int_\omega \phi_m(t)|\psi'_m(t)|^2dx. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Considerando a parte real de I_1, a desigualdade de Hölder generalizada, a desigualdade $ab \leq \frac{1}{4\varepsilon}a^2 + \varepsilon b^2$, e a imersão $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, segue que

$$\begin{aligned} Re(I_1) &= Re\left(-i\int_\omega \phi'_m(t)\psi_m(t)\overline{\psi'_m(t)}dx - i\int_\omega \phi_m(t)|\psi'_m(t)|^2dx\right) \\ &\leq \left|\int_\omega \phi'_m(t)\psi_m(t)\overline{\psi'_m(t)}dx\right| \\ &\leq \int_\omega |\phi'_m(t)||\psi_m(t)||\psi'_m(t)|dx \\ &\leq \|\phi'_m(t)\|_{L^2(\omega)}\|\psi_m(t)\|_{L^4(\omega)}\|\psi'_m(t)\|_{L^4(\omega)} \\ &\leq \varepsilon\|\psi'_m(t)\|^2_{L^4(\omega)} + c_\varepsilon\|\phi'_m(t)\|^2_{L^2(\omega)}\|\psi_m(t)\|^2_{L^4(\omega)} \\ &\leq \varepsilon\|\psi'_m(t)\|^2_{L^4(\omega)} + c_\varepsilon\|\phi'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\|\psi_m(t)\|^2_{L^4(\omega)} \\ &\leq \varepsilon\|\psi'_m(t)\|^2_{L^4(\omega)} + c_\varepsilon\|\nabla\phi'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\|\psi_m(t)\|^2_{L^4(\omega)}. \end{aligned}$$

Tomando a parte real de (2.17), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(\cdot)\psi'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c_\varepsilon\|\psi_m(t)\|^2_{L^4(\omega)}\|\nabla\phi'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon\|\psi'_m(t)\|^2_{L^4(\omega)}. \tag{2.21}$$

Para $n = 2, D(-\Delta)^{\frac{1}{4}} \equiv H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, assim, de maneira análoga a feita na primeira estimativa, temos

$$\alpha\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b_0\psi_m'(t)\|_{L^2(\omega)}^2 \leq \alpha\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(\cdot)\psi_m'(t)\|_{L^2(\omega)}^2 \leq \alpha\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(\cdot)\psi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

e de $H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, segue que existe $c > 0$ tal que,

$$\alpha\|b_0\psi_m'(t)\|_{L^4(\omega)}^2 \leq c\alpha\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b_0\psi_m'(t)\|_{L^2(\omega)}^2. \tag{2.22}$$

Logo, de (2.21) e (2.22), temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{b_0^2\alpha}{c}\|\psi_m'(t)\|_{L^4(\omega)}^2 \leq c_\varepsilon\|\psi_m(t)\|_{L^4(\omega)}^2\|\nabla\phi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon\|\psi_m'(t)\|_{L^4(\omega)}^2,$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{b_0^2\alpha}{c} - \varepsilon\right)\|\psi_m'(t)\|_{L^4(\omega)}^2 \leq c_\varepsilon\|\psi_m(t)\|_{L^4(\omega)}^2\|\nabla\phi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{2.23}$$

Derivando a segunda equação do sistema (2.8), multiplicando por $h_{jm}''(t)$ e somando em $j, 1 \leq j \leq m$, obtemos

$$(\phi_m'''(t), \phi_m''(t)) + (\nabla\phi_m'(t), \nabla\phi_m''(t)) + (a(\cdot)\phi_m''(t), \phi_m''(t)) = ([|\psi_m(t)|^2\chi_\omega]', \phi_m''(t)). \tag{2.24}$$

Definindo $I_2 := ([|\psi_m(t)|^2\chi_\omega]', \phi_m''(t))$, temos

$$\begin{aligned} I_2 &= ([\psi_m(t)\overline{\psi_m(t)}\chi_\omega]', \phi_m''(t)) \\ &= \int_\omega [\psi_m'(t)\overline{\psi_m(t)} + \psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}]\phi_m''(t)dx. \end{aligned}$$

Além disso, temos também

$$\begin{aligned} \psi_m'(t)\overline{\psi_m(t)} + \psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)} &= 2Re\ \psi_m(t)\psi_m'(t) \\ &\leq 2|\psi_m(t)||\psi_m'(t)|. \end{aligned}$$

Logo, pela desigualdade de Hölder generalizada e pela desigualdade $ab \leq \frac{1}{4\varepsilon}a^2 + \varepsilon b^2$, inferimos que

$$\begin{aligned} Re(I_2) &\leq 2\int_\omega |\psi_m(t)||\psi_m'(t)||\phi_m''(t)|dx \\ &\leq 2\|\psi_m(t)\|_{L^4(\omega)}\|\psi_m'(t)\|_{L^4(\omega)}\|\phi_m''(t)\|_{L^2(\omega)} \\ &\leq 2\varepsilon\|\psi_m'(t)\|^2_{L^4(\omega)} + 2c_\varepsilon\|\psi_m(t)\|^2_{L^4(\omega)}\|\phi_m''(t)\|^2_{L^2(\omega)} \\ &\leq 2\varepsilon\|\psi_m'(t)\|^2_{L^4(\omega)} + 2c_\varepsilon\|\psi_m(t)\|^2_{L^4(\omega)}\|\phi_m''(t)\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Tomando a parte real em (2.24), vem que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\phi_m''(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}) + \int_\omega a(x)|\phi_m''(t)|^2dx \\ &\qquad \leq 2\varepsilon\|\psi_m'(t)\|^2_{L^4(\omega)} + 2c_\varepsilon\|\psi_m(t)\|^2_{L^4(\omega)}\|\phi_m''(t)\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Somando (2.23) e (2.25), obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\psi_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi_m''(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}) + \left(\frac{b_0^2\alpha}{c} - 2\varepsilon\right)\|\psi_m'(t)\|^2_{L^4(\omega)} \\ &\qquad \leq 2c_\varepsilon\|\psi_m(t)\|^2_{L^4(\omega)}(\|\nabla\phi_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi_m''(t)\|^2_{L^2(\Omega)}), \end{aligned}$$

assim, concluímos que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\psi_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi_m''(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}) + \left(\frac{b_0^2\alpha}{c} - 2\varepsilon\right)\|\psi_m'(t)\|^2_{L^4(\omega)} \\ &\qquad \leq 2c_\varepsilon\|\psi_m(t)\|^2_{L^4(\omega)}(\|\nabla\phi_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi_m''(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Multiplicando (2.26) por 2, integrando-a de 0 a $t, t \in [0,T]$ e tomando ε suficientemente pequeno, deduzimos

$$\begin{aligned} &\|\psi_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi_m''(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2c_1\int_0^t \|\psi_m'(s)\|^2_{L^4(\omega)}ds \\ &\leq \|\psi_m'(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi_m''(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi_m'(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+ c_2\int_0^t \|\psi_m(s)\|^2_{L^4(\omega)}[\|\psi_m'(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi_m''(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi_m'(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^s \|\psi_m'(\sigma)\|^2_{L^4(\omega)}d\sigma]ds, \end{aligned} \tag{2.27}$$

onde $c_1, c_2 > 0$.

Resta nos mostrar que os termos $\psi_m'(0) + \phi_m''(0)$ são limitados na norma de $L^2(\Omega)$. Para tal, consideremos $v = \psi_m'(0)$ na primeira equação e $\omega = \phi_m''(0)$ na segunda equação do sistema (2.8).

Assim,

$$(\psi'_m(0), \psi'_m(0)) = +i(\Delta\psi_m(0), \psi'_m(0))$$
$$-\alpha(b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_m(0), \psi'_m(0)) - i(\phi_m(0)\psi_m(0)\chi_\omega, \psi'_m(0))$$

Consequentemente, obtemos

$$\begin{aligned}\|\psi'_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \|\Delta\psi_m(0)\|_{L^2(\Omega)}\|\psi'_m(0)\|_{L^2(\Omega)} + \alpha\|b(\cdot)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(\cdot)\psi_m(0)\|_{L^2(\Omega)}\|\psi'_m(0)\|_{L^2(\Omega)}\\ &+ \|\phi_m(0)\psi_m(0)\|_{L^2(\omega)}\|\psi'_m(0)\|_{L^2(\omega)}\\ &\leq \|\Delta\psi_m(0)\|_{L^2(\Omega)}\|\psi'_m(0)\|_{L^2(\Omega)} + \alpha\|b\|_\infty\|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(\cdot)\psi_m(0)\|_{L^2(\Omega)}\|\psi'_m(0)\|_{L^2(\Omega)}\\ &+ \|\phi_m(0)\psi_m(0)\|_{L^2(\Omega)}\|\psi'_m(0)\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\psi'_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\Delta\psi_m(0)\|_{L^2(\Omega)} + \alpha\|b\|_\infty\|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(\cdot)\psi_m(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi_m(0)\psi_m(0)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Usando as desigualdades de Hölder e Young no termo $\|\phi_m(0)\psi_m(0)\|_{L^2(\Omega)}$, obtemos

$$\begin{aligned}\|\phi_m(0)\psi_m(0)\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |\phi_m(0)|^2|\psi_m(0)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \|\phi_m(0)\|_{L^4(\Omega)}\|\psi_m(0)\|_{L^4(\Omega)}\\ &\leq \frac{1}{2}\|\phi_m(0)\|^2_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\psi_m(0)\|^2_{L^4(\Omega)}.\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$\|\psi'_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\Delta\psi_m(0)\|_{L^2(\Omega)} + \alpha\|b\|_\infty\|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(\cdot)\psi_m(0)\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\phi_m(0)\|^2_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\psi_m(0)\|^2_{L^4(\Omega)}.$$

Observando que $D[(-\Delta)^{\frac{1}{2}}] \equiv H^1_0(\Omega), H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ e as convergências em (2.8), concluímos que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|\psi'_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C = C(\|\nabla\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_0\|_{L^2(\Omega)}), \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.28}$$

Também,

$$(\phi''_m(0), \phi''_m(0)) = (\Delta\phi_m(0), \phi''_m(0)) - (a(x)\phi'_m(0), \phi''_m(0)) + (|\psi_m(0)|^2\chi_\omega, \phi''_m(0)).$$

e,

$$\begin{aligned}\||\psi_m(0)|^2\|_{L^2(\omega)}\|\phi''_m(0)\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\int_\omega |\psi_m(0)|^4 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\phi''_m(0)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\psi_m(0)\|^2_{L^4(\omega)}\|\phi''_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\psi_m(0)\|^2_{L^4(\Omega)}\|\phi''_m(0)\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\|\phi''_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\Delta\phi_m(0)\|_{L^2(\Omega)}\|\phi''_m(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|a\|_\infty\|\phi'_m(0)\|_{L^2(\Omega)}\|\phi''_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \\ + \|\psi_m(0)\|^2_{L^4(\Omega)}\|\phi''_m(0)\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\phi''_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\Delta\phi_m(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|a\|_\infty\|\phi'_m(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi_m(0)\|^2_{L^4(\Omega)}.$$

Observando que $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega), H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ e as convergências em (2.8), concluímos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\phi''_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C = C(\|\Delta\phi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_1\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_0\|_{L^2(\Omega)}), \quad \forall m \in \mathbb{N}, \tag{2.29}$$

assim, de (2.28) e (2.29) podemos aplicar o Lema de Gronwall em (2.27), logo

$$\|\psi'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi''_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2c_1\int_0^t \|\psi'_m(s)\|^2_{L^4(\omega)} ds$$

$$\leq (\|\psi'_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi''_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi'(0)\|^2_{L^2(\Omega)})e^{c_3\int_0^\infty \|\psi_m(s)\|^2_{L^4(\omega)} ds} < C, \tag{2.30}$$

onde $C = C(\|\Delta\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\Delta\phi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_1\|_{L^2(\Omega)}) > 0$. De (2.30), concluímos que

$$\begin{cases} \sup\limits_{t\in(0,\infty)} ess\|\psi'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C, \\ \sup\limits_{t\in(0,\infty)} ess\|\phi''_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C, \\ \sup\limits_{t\in(0,\infty)} ess\|\nabla\phi'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C, \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \|\psi'_m(s)\|^2_{L^4(\omega)} \leq C. \end{cases} \tag{2.31}$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&(\psi_m') \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)),\\
&(\phi_m') \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty;H_0^1(\Omega)),\\
&(\phi_m'') \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)),
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

e

$$
\int_0^{+\infty} \|\psi_m'(s)\|^2_{L^4(\omega)} ds \leq C. \tag{2.33}
$$

Estimativa III:

Retornando para (2.9) da estimativa I e tomando a parte imaginária, temos

$$
Im(\psi_m'(t),\psi_m(t)) + \|\nabla\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = -\int_\omega \phi_m(t)|\psi_m(t)|^2\,dx. \tag{2.34}
$$

Logo,

$$
\|\nabla\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = -Im(\psi_m'(t),\psi_m(t)) - \int_\omega \phi_m(t)|\psi_m(t)|^2\,dx. \tag{2.35}
$$

Definindo, $I_3 := -Im(\psi_m'(t),\psi_m(t))$, obtemos

$$
\begin{aligned}
|I_3| &\leq \int_\Omega |\psi_m'(t)||\psi_m(t)|\,dx\\
&\leq \|\psi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.36}
$$

Também, $I_4 := -\int_\omega \phi_m(t)|\psi_m(t)|^2\,dx$,

$$
\begin{aligned}
|I_4| &\leq \int_\omega |\phi_m(t)||\psi_m(t)|^2\,dx\\
&\leq \|\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\psi_m(t)\|^2_{L^4(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.37}
$$

Assim, de (2.35), (2.36) e (2.37) segue que

$$
\begin{aligned}
\|\nabla\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \|\psi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\psi_m(t)\|^2_{L^4(\Omega)}\\
&\leq C\|\psi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + C\|\nabla\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leq C\|\nabla\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\|\nabla\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C.
$$

onde $C := C(\|\Delta\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\Delta\phi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_1\|_{L^2(\Omega)})$.

Daí, $\sup\limits_{t\in(0,\infty)} ess\|\nabla\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C$, logo

$$(\psi_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty; H^1_0(\Omega)). \tag{2.38}$$

Compondo a segunda equação do sistema (2.8) com $\Delta\phi$ temos,

$$(\phi''_m(t), \Delta\phi_m(t)) + (\Delta\phi_m(t), \Delta\phi_m(t)) + (a(x)\phi'_m(t), \Delta\phi_m(t)) \leq (|\psi_m(t)|^2\chi_\omega, \Delta\phi_m(t)). \tag{2.39}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|\Delta\phi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\phi''_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|a\|_\infty\|\phi'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ + \int_\omega |\psi_m(t)|^2|\Delta\phi_m(t)|\,dx. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Temos,

$$\begin{aligned} \int_\omega |\psi_m(t)|^2|\Delta\phi_m(t)|\,dx &\leq \|\psi_m(t)\|^2_{L^4(\Omega)}\|\Delta\phi_m(t)\|^2_{L^2(\omega)} \\ &\leq \|\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta\phi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

De (2.40) e (2.41), vem que

$$\|\Delta\phi_m(t)\|^2 \leq (\|\phi''_m(t)\| + \|a\|_\infty\|\phi'_m(t)\| + \|\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)})\|\Delta\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.42}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|\Delta\phi_m(t)\| &\leq \|\phi''_m(t)\| + \|a\|_\infty\|\phi'_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C = C(\|\Delta\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\Delta\phi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_1\|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned} \tag{2.43}$$

Portanto, $\sup\limits_{t\in(0,\infty)} ess\|\Delta\phi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C$, ou seja,

$$(\phi_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty; H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)). \tag{2.44}$$

Por outro lado, das três estimativas, obtivemos que

$$\begin{aligned} &\psi_m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty; H^1_0(\Omega)), \\ &\phi_m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty; H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)), \\ &\psi'_m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)), \\ &\phi'_m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty; H^1_0(\Omega)), \\ &\phi''_m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{2.45}$$

Em particular, dado $T > 0$, temos

$$
\begin{aligned}
&\psi_m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),\\
&\phi_m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),\\
&\psi_m' \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\\
&\phi_m' \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),\\
&\phi_m'' \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),
\end{aligned} \tag{2.46}
$$

(note que T é fixo, porém arbitrário), o que nos permite, pelo Lema 1.17, extrair subsequências $(\psi_k) \subset (\psi_m)$ e $(\phi_k) \subset (\phi_m)$ tais que

$$
\begin{aligned}
&\psi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \psi \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),\\
&\psi_k' \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\\
&\phi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \phi \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),\\
&\phi_k' \overset{*}{\rightharpoonup} v \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),\\
&\phi_k'' \overset{*}{\rightharpoonup} w \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).
\end{aligned} \tag{2.47}
$$

Como $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, segue que

$$
\begin{aligned}
&\psi_k \rightharpoonup \psi \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)),\\
&\psi_k' \rightharpoonup u \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)),\\
&\phi_k \rightharpoonup \phi \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)),\\
&\phi_k' \rightharpoonup v \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)),\\
&\phi_k'' \rightharpoonup w \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)).
\end{aligned} \tag{2.48}
$$

Lembrando que $L^2(Q) \hookrightarrow D'(Q)$ e que o operador derivação é contínuo em $D'(Q)$, resultam

$$
\begin{aligned}
&u = \psi' \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\\
&v = \phi' \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),\\
&w = \phi'' \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),
\end{aligned} \tag{2.49}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\psi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \psi \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),\\
&\psi_k' \overset{*}{\rightharpoonup} \psi' \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\\
&\phi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \phi \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),\\
&\phi_k' \overset{*}{\rightharpoonup} \phi' \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),\\
&\phi_k'' \overset{*}{\rightharpoonup} \phi'' \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).
\end{aligned} \tag{2.50}
$$

Mas, como $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, pelo teorema da compacidade de Aubin-Lions e de (2.45), resulta na existência de subsequências, que ainda denotaremos por (ψ_k) e (ϕ_k), satisfazendo

$$
\psi_k \longrightarrow \psi, \;\; \phi_k \longrightarrow \phi \;\text{ e }\; \phi_k' \longrightarrow \phi' \;\text{ q.s em }\; Q. \tag{2.51}
$$

Agora, note que $|\psi_k|^2\chi_\omega$ é limitada em $L^2(0,\infty;L^2(\Omega))$. Com efeito, de (2.45) e (2.12)

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \||\psi_k(t)|^2\chi_\omega\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt &\le \int_0^\infty \|\psi_k(t)\|^4_{L^4(\omega)}\,dt\\
&\le C\int_0^\infty \|\psi_k(t)\|^2_{L^4(\omega)}\|\nabla\psi_k(t)\|^2_{L^2(\omega)}\,dt\\
&\le C\int_0^\infty \|\psi_k\|^2_{L^4(\omega)}\,dt\\
&\le C,
\end{aligned} \tag{2.52}
$$

onde $C := C(\|\Delta\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\Delta\phi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_1\|_{L^2(\Omega)})$.

Logo,

$$
(|\psi_k(t)|^2\chi_\omega) \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0,\infty;L^2(\Omega)). \tag{2.53}
$$

Em particular,

$$
(|\psi_k(t)|^2\chi_\omega) \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.54}
$$

Mas de (2.51), temos que $\psi_k(t)\chi_\omega \longrightarrow \psi(t)\chi_\omega$ q.s em Q e, portanto, $|\psi_k(t)|^2\chi_\omega \longrightarrow |\psi(t)|^2\chi_\omega$ q.s em Q. Assim, de (2.54) e pelo lema de Lions, obtemos

$$
|\psi_k(t)|^2\chi_\omega \rightharpoonup |\psi(t)|^2\chi_\omega \quad \text{em} \quad L^2(Q). \tag{2.55}
$$

Portanto, com as convergências obtidas, podemos passar o limite no problema aproximado.

2.1.3 Passagem ao Limite

Consideremos $j \in \mathbb{N}$ fixo e $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq j$, multiplicando as equações do problema aproximado (2.8) por $\theta \in D(0,T)$, e integrando de 0 a T, temos

$$\int_0^T (\psi_k'(t), w_j)\theta(t)\,dt + i\int_0^T (\nabla\psi_k(t), \nabla w_j)\theta(t)\,dt + \alpha\int_0^T (b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_k(t), w_j)\theta(t)\,dt$$
$$= -i\int_0^T (\phi_k(t)\psi_k(t)\chi_\omega, w_j)\theta(t)\,dt \tag{2.56}$$

e

$$\int_0^T (\phi_k''(t), w_j)\theta(t)\,dt + \int_0^T (\nabla\phi_k(t), \nabla w_j))\theta(t)\,dt + \int_0^T (a(x)\phi_k'(t), w_j)\theta(t)\,dt$$
$$= \int_0^T (|\psi_k(t)|^2\chi_\omega, w_j)\theta(t)\,dt. \tag{2.57}$$

No primeiro termo da igualdade (2.56) sabemos que $\psi_k' \overset{*}{\rightharpoonup} \psi'$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, então

$$\int_0^T (\psi_k'(t), \xi(t))\,dt \longrightarrow \int_0^T (\psi'(t), \xi(t))\,dt, \forall \xi \in L^1(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.58}$$

quando $k \longrightarrow \infty$. Agora, tomando em particular $\xi = w_j\theta$, para todo $\theta \in D(0,T)$, vemos que $\xi \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ e substituindo ξ em (2.58), resulta que

$$\int_0^T (\psi_k'(t), w_j)\theta(t)\,dt \longrightarrow \int_0^T (\psi'(t), w_j)\theta(t)\,dt, \forall \theta \in D(0,T),\ \text{quando } k \longrightarrow \infty. \tag{2.59}$$

Analogamente, observando (2.50) e (2.55) podemos verificar as demais convergências quando $k \longrightarrow \infty$. Desta forma, podemos passar o limite nas equações (2.56) e (2.57) quando $k \longrightarrow \infty$, ou seja,

$$\int_0^T (\psi'(t), w_j)\theta(t)\,dt + i\int_0^T (\nabla\psi(t), \nabla w_j)\theta(t)\,dt + \alpha\int_0^T (b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi(t), w_j)\theta(t)\,dt$$
$$= -i\int_0^T (\phi(t)\psi(t)\chi_\omega, w_j)\theta(t)\,dt, j = 1, ..., m,$$

e

$$\int_0^T (\phi''(t), w_j)\theta(t)\,dt + \int_0^T (\nabla\phi(t), \nabla w_j))\theta(t)\,dt + \int_0^T (a(x)\phi'(t), w_j)\theta(t)\,dt$$
$$= \int_0^T (|\psi(t)|^2\chi_\omega, w_j)\theta(t)\,dt, j = 1, ..., m.$$

Como $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é um sistema completo em $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, por densidade, temos

$$\begin{aligned}\int_0^T(\psi'(t),w)\theta(t)\,dt+i\int_0^T(\nabla\psi(t),\nabla w)\theta(t)\,dt+\alpha\int_0^T(b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi(t),w)\theta(t)\,dt\\=-i\int_0^T(\phi(t)\psi(t)\chi_\omega,w)\theta(t)\,dt,\end{aligned}\tag{2.60}$$

para todo $w\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),\theta\in D(0,T)$, e

$$\begin{aligned}\int_0^T(\phi''(t),w)\theta(t)\,dt+\int_0^T(\nabla\phi(t),\nabla w))\theta(t)\,dt+\int_0^T(a(x)\phi'(t),w)\theta(t)\,dt\\=\int_0^T(|\psi(t)|^2\chi_\omega,w)\theta(t)\,dt,\end{aligned}$$

para todo $w\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),\theta\in D(0,T)$. Disto chegamos a

$$\begin{aligned}&\langle(\psi'(t),w),\theta\rangle_{D'(0,T)\times D(0,T)}+i\langle(\nabla\psi(t),\nabla w),\theta\rangle_{D'(0,T)\times D(0,T)}\\&+\alpha\langle(b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi(t),w),\theta\rangle_{D'(0,T)\times D(0,T)}=-i\langle(\phi(t)\psi(t)\chi_\omega,w),\theta\rangle_{D'(0,T)\times D(0,T)},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}&\langle(\phi''(t),w),\theta\rangle_{D'(0,T)\times D(0,T)}+\langle(\nabla\phi(t),\nabla w),\theta\rangle_{D'(0,T)\times D(0,T)}\\&\langle(a(x)\phi'(t),w),\theta\rangle_{D'(0,T)\times D(0,T)}=\langle(|\psi(t)|^2\chi_\omega,w),\theta\rangle_{D'(0,T)\times D(0,T)},\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}(\psi'(t),w)+i(\nabla\psi(t),\nabla w)+\alpha(b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi(t),w)\\=-i(\phi(t)\psi(t)\chi_\omega,w),\end{aligned}\tag{2.61}$$

para todo $w\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ em $D'(0,T)$, e

$$(\phi''(t),w)+(\nabla\phi(t),\nabla w)+(a(x)\phi'(t),w)=(|\psi(t)|^2\chi_\omega,w),\tag{2.62}$$

para todo $\omega\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ em $D'(0,T)$.

Segue que todo conjunto de soluções $\{\psi,\phi\}$ satisfazendo as equações (2.61) e (2.62), respectivamente, é solução do sistema (2.8).

Agora, considerando $w=\varphi\in D(\Omega)$ em (2.60), obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T(\psi'(t),\varphi)\theta(t)\,dt-i\int_0^T(\nabla\psi(t),\nabla\varphi)\theta(t)\,dt+\alpha\int_0^T(b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi(t),\varphi)\theta(t)\,dt\\=-i\int_0^T(\phi(t)\psi(t)\chi_\omega,\varphi)\theta(t)\,dt.\end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\int_Q \psi'(t)\varphi\theta(t)\,dxdt - i\int_Q \Delta\psi(t)\varphi\theta(t)\,dxdt + \alpha\int_Q b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi(t)\varphi\theta(t)\,dxdt$$
$$= -i\int_Q \phi(t)\psi(t)\chi_\omega\phi\theta(t)\,dxdt.$$

Logo, podemos ainda escrever

$$\langle\psi',\varphi\theta\rangle_{D'(Q)\times D(Q)} - i\langle\Delta\psi,\varphi\theta\rangle_{D'(Q)\times D(Q)} + \alpha\langle b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi,\varphi\theta\rangle_{D'(Q)\times D(Q)}$$
$$= -i\langle\phi\psi\chi_\omega,\varphi\theta\rangle_{D'(Q)\times D(Q)}.$$

Assim, segue que

$$\langle\psi' - i\Delta\psi + \alpha b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi,\varphi\theta\rangle_{D'(Q)\times D(Q)} = -i\langle\phi\psi\chi_\omega,\varphi\theta\rangle_{D'(Q)\times D(Q)}.$$

Da totalidade do conjunto $\{\varphi\theta; \varphi\in D(\Omega), \theta\in D(0,T)\}$ em $D(Q)$ vem que

$$\psi' - i\Delta\psi + \alpha b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi + i\phi\psi\chi_\omega = 0 \text{ em } D'(Q),$$

implicando em

$$i\psi' + \Delta\psi + i\alpha b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi = \phi\psi\chi_\omega \text{ em } D'(Q).$$

Analogamente mostramos que

$$\phi'' - \Delta\phi + a(x)\phi' = |\psi|^2\chi_\omega \text{ em } D'(Q),$$

o que nos permite obter o sistema

$$\begin{cases} i\psi_t + \Delta\psi + i\alpha b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi = \phi\psi\chi_\omega \text{ em } D'(Q), \\ \phi_{tt} - \Delta\phi + a(x)\phi_t = |\psi|^2\chi_\omega \text{ em } D'(Q). \end{cases}$$

Logo,

$$\Delta\psi = -i\psi' - i\alpha b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi + \phi\psi\chi_\omega,$$

ou seja,

$$-\Delta\psi(t)\in L^2(\Omega) \text{ p. q. t } t\in(0,T).$$

Portanto, em razão da regularidade do problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta\psi = f, \quad f \in L^2(\Omega) \\ \psi_{|\Gamma} = 0, \end{cases}$$

obtemos que

$$\psi(t) \in H^2(\Omega) \ \text{ e } \ \|\psi(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq \|\Delta\psi(t)\|_{L^2(\Omega)} \ \text{ p. q. t } \ t \in (0,T).$$

Assim, tomando o supremo essencial nesta desigualdade, resulta que

$$\psi \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)).$$

2.1.4 Dados Iniciais

Notemos inicialmente que, em particular, $\psi \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(Q)$ e $\psi' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(Q)$. Então, $\psi \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow C^0([0,T];L^2(\Omega))$. Assim, faz sentido falarmos em $\psi(0)$ e $\psi(T)$.

Seja $\theta \in C^1([0,T];\mathbb{R})$, tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. De (2.59) vem que, se $k > j$ (j arbitrariamente fixado), então

$$\int_0^T (\psi_k'(t), w_j)\theta(t)\,dt \longrightarrow \int_0^T (\psi'(t), w_j)\theta(t)\,dt. \tag{2.63}$$

Integrando-se por partes, temos

$$-(\psi_k(0), w_j) - \int_0^T (\psi_k(t), w_j)\theta'(t)\,dt \longrightarrow -(\psi(0), w_j) - \int_0^t (\psi(t), w_j)\theta'(t)\,dt. \tag{2.64}$$

Agora, de (2.50) resulta que

$$\int_0^T (\psi_k(t), w_j)\theta'(t)\,dt \longrightarrow \int_0^T (\psi(t), w_j)\theta'(t)\,dt, \tag{2.65}$$

o que implica que

$$-(\psi_k(0), w_j) \longrightarrow -(\psi(0), w_j). \tag{2.66}$$

Decorre daí que $\psi_k(0) \rightharpoonup \psi(0)$ em $L^2(\Omega)$. Por outro lado, de (2.8) temos

$$\psi_k(0) \rightharpoonup \psi^0 \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

o que nos leva, por conta da unicidade do limite, a concluir que $\psi(0) = \psi^0$.

Analogamente, mostra-se que $\phi(0) = \phi^0$ e $\phi'(0) = \phi^1$.

2.1.5 Unicidade

Sejam $\{\psi_1, \phi_1\}$ e $\{\psi_2, \phi_2\}$ soluções do problema (2.1). Então, $z = \psi_1 - \psi_2$ e $w = \phi_1 - \phi_2$ satisfazem

$$\begin{cases} iz' + \Delta z + i\alpha(b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_1 - b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_2) = (\phi_1\psi_1 - \phi_2\psi_2)\chi_\omega \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ w'' - \Delta w + a(x)w' = (|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2)\chi_\omega \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ w = z = 0 \text{ em } \Gamma \times (0,T), \\ w(0) = w'(0) = 0, z(0) = 0 \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.67}$$

Multiplicando a primeira equação de (2.67) por $-iz$ e a segunda por w', obtemos

$$\begin{aligned} (z'(t), z(t)) - i(\Delta z(t), z(t)) + \alpha(b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_1 - b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\psi_2, z(t)) \\ = -i([\phi_1(t)\psi_1(t) - \phi_2(t)\psi_2(t)]\chi_\omega, z(t)) \end{aligned} \tag{2.68}$$

e

$$(w''(t), w'(t)) - (\Delta w(t), w'(t)) + (a(x)w'(t), w'(t)) = ([|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2]\chi_\omega, w'(t)). \tag{2.69}$$

Tomando a parte real da equação (2.68) e de (2.69) concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + Re[\alpha(b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_1 - b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_2, z(t))] \\ = Re[-i(\phi_1(t)\psi_1(t)\chi_\omega - \phi_2(t)\psi_2(t)\chi_\omega, z(t))] \end{aligned} \tag{2.70}$$

e

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|w'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}) + \int_\Omega a(x)|w'(t)|^2\,dx = ([|\psi_1(t)|^2 - |\psi_2(t)|^2]\chi_\omega, w'(t)). \tag{2.71}$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
&\alpha(b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_1(t) - b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_2(t), z(t)) \\
&= \alpha\int_\Omega (b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_1(t) - b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_2(t))(\overline{\psi_(t)} - \overline{\psi_2(t)})\,dx \\
&= \alpha\int_\Omega (b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_1(t)\psi_1(t) - b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_1(t)\overline{\psi_2(t)} \\
&- b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_2(t)\psi_1(t) + b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\psi_2(t)\overline{\psi_2(t)})\,dx \\
&= \alpha\int_\Omega (-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_1(t)b(x)\overline{\psi_1(t)}\,dx + \alpha\int_\Omega (-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_2(t)b(x)\overline{\psi_2(t)}\,dx \\
&- \alpha\int_\Omega (-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_2(t)b(x)\overline{\psi_1(t)}\,dx - \alpha\int_\Omega (-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_1(t)b(x)\overline{\psi_2(t)}\,dx \\
&= ((-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_1(t), b(x)\psi_1(t)) + \alpha((-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_2(t), b(x)\psi_2(t)) \\
&- \alpha((-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_2(t), b(x)\psi_1(t)) - \alpha((-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi_1(t), b(x)\psi_2(t)) \\
&= \alpha((-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_1(t), (-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_1(t)) + \alpha((-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_2(t), (-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_2(t)) \\
&- \alpha((-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_2(t), (-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_1(t)) - \alpha((-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_1(t), (-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_2(t)) \\
&= \alpha\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_1(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_2(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&- \alpha((-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_2(t), (-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_1(t)) - \alpha((-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_1(t), (-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_2(t)) \\
&= \alpha\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_2\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&- 2Re((-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_1(t), (-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_2(t)) \\
&= \alpha\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_1(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_2(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&- \alpha\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_1(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \alpha\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_2(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

Notemos que, adicionando e subtraindo o termo $\psi_1\phi_1\chi_\omega$ no lado direito da expressão

(2.70), deduzimos que

$$\begin{aligned}
&([\phi_1(t)\psi_1(t) - \phi_2(t)\psi_2(t)]\chi_\omega(t), \psi_1(t) - \psi_2(t)) \\
&= ([\phi_1(t)(\psi_1(t) - \psi_2(t)) + \psi_2(t)(\phi_1(t) - \phi_2(t)]\chi_\omega(t), \psi_1(t) - \psi_2(t)) \\
&= \int_\omega [\phi_1(t)(\psi_1(t) - \psi_2(t)) + \psi_2(t)(\phi_1(t) - \phi_2(t))](\overline{\psi_1(t)} - \overline{\psi_2(t)})\, dx \\
&= \int_\omega (\phi_1(t)z(t) + \psi_2(t)w(t))\overline{z(t)}\, dx \\
&= \int_\omega \phi_1(t)|z(t)|^2\, dx + \int_\omega \psi_2(t)w(t)\overline{z(t)}\, dx.
\end{aligned}$$

Logo, pelas desigualdades de Holder e Young, e por (2.45), podemos escrever

$$\begin{aligned}
&Re(-i[\phi_1(t)\psi_1(t) - \phi_2(t)\psi_2(t)]\chi_\omega(t), z(t)) \\
&= Re\left(-i\int_\omega \psi_2(t)w(t)\overline{z(t)}\, dx\right) \\
&\leq \int_\omega |\psi_2(t)||w(t)||z(t)|\, dx \\
&\leq \|\psi_2(t)\|_{L^4(\omega)}\|w(t)\|_{L^4(\omega)}\|z(t)\|_{L^2(\omega)} \\
&\leq \frac{1}{2}\|\psi_2(t)\|^2_{L^4(\Omega)}\|w(t)\|^2_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{2}\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{c}{2}\|w(t)\|^2_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{2}\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C(\|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)}).
\end{aligned} \tag{2.73}$$

Também, do lado direito da equação (2.71), temos

$$\begin{aligned}
&Re([|\psi_1(t)|^2 - |\psi_2(t)|^2]\chi_\omega, w'(t)) \\
&= Re\left(\int_\omega (|\psi_1(t)|^2 - |\psi_2(t)|^2)\chi_\omega w'(t)\, dx\right) \\
&= Re\left(\int_\omega [\psi_1(t)\overline{\psi_1(t)} - \psi_2(t)\overline{\psi_1(t)} + \psi_2(t)\overline{\psi_1(t)} - \psi_2(t)\overline{\psi_2(t)}]w'(t)\, dx\right) \\
&= Re\left([\psi_1(t) - \psi_2(t)]\overline{\psi_1(t)}w'(t)\, dx\right) + Re\left(\int_\omega [\psi_1(t) - \overline{\psi_2(t)}]\psi_2(t)w'(t)\, dx\right) \\
&\leq \int_\omega |z(t)||\psi_1(t)||w'(t)|\, dx + \int_\omega |z(t)||\psi_2(t)||w'(t)|\, dx \\
&\leq \int_\omega (|\psi_1(t)| + |\psi_2(t)|)|z(t)||w'(t)|\, dx.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Substituindo em (2.70) as expressões (2.72) e (2.73), e em (2.71) a expressão (2.74), decorre o seguinte

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C(\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} + \|z(t)\|_{L^2(\Omega)}) \tag{2.75}$$

e

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|w'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}) + \int_\Omega a(x)|w'(t)|^2\,dx \\ \leq \int_\omega (|\psi_1(t)| + |\psi_2(t)|)|z(t)||w'(t)|\,dx. \tag{2.76}$$

Somando as expressões (2.75) e (2.76) e levando em conta que $\int_\Omega a(x)|w'(t)|^2\,dx \geq 0$, segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|z(t)\|^2 + \|w'(t)\|^2 + \|\nabla w(t)\|^2) \leq C(\|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)}) \\ + \int_\omega (|\psi_1(t)| + |\psi_2(t)|)|z(t)||w'(t)|\,dx.$$

Convém observar que a solução $\{\psi_1, \psi_2\} \in L^\infty(0,T; H_0^1 \cap H^2(\Omega))$. Além disso, considerando a imersão de Sobolev $H^2(\Omega) \hookrightarrow C_B(\Omega)$, onde $C_B(\Omega) = \{u \in C^0(\Omega); u \text{ é limitada em } \Omega\}$ é um espaço de Banach, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|w'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}) \leq C(\|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|w'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}). \tag{2.77}$$

Multiplicando (2.77) por 2, integrando de 0 a t, $t \in [0,T]$, e observando em (2.67) que $w(0) = w'(0)$ e $z(0) = 0$ em Ω, obtemos a seguinte desigualdade

$$\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|w'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\int_0^t (\|\nabla w(s)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|z(s)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|w'(s)\|^2_{L^2(\Omega)})\,ds.$$

Finalmente, aplicando o lema de Gronwall na expressão anterior chegamos a

$$\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 0, \forall t \in [0,T].$$

Daí vem então que $z = 0$ e $w = 0$ e, portanto, $\psi_1 = \psi_2$ e $\phi_1 = \phi_2$. Assim, provamos a unicidade de soluções do problema (2.1).

Logo, temos

$$\psi \in L^\infty_{loc}(0,\infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)),\ \psi' \in L^\infty_{loc}(0,\infty; L^2(\Omega)),$$
$$\phi \in L^\infty_{loc}(0,\infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)),\ \phi' \in L^\infty_{loc}(0,\infty; H_0^1(\Omega)),$$
$$\text{e } \phi'' \in L^\infty_{loc}(0,\infty; L^2(\Omega)).$$

Agora, lembremos que da primeira estimativa a priori temos

$$(\psi_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)).$$

Assim, pela Proposição 1.15

$$\begin{aligned}\|\psi(t)\|_{L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)} &\leq \liminf_m \|\psi_m(t)\|_{L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)}\\ &\leq C(\|\psi_0\|_{L^2(\Omega)}).\end{aligned}$$

Logo,

$$\psi \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)).$$

Prosseguindo de maneira análoga, segue que todas as limitações obtidas nas estimativas a priori são válidas para $\{\psi,\phi\}$, o que nos permite dizer que

$$\begin{aligned}&\psi \in L^\infty(0,\infty;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),\ \psi' \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)),\\ &\phi \in L^\infty(0,\infty;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),\ \phi' \in L^\infty(0,\infty;H_0^1(\Omega)),\\ &\text{e } \phi'' \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)).\end{aligned}$$

Assim, o teorema está provado.

2.2 Decaimento Uniforme

Nesta seção trabalharemos com soluções regulares $\{\psi(t),\phi(t),\phi_t(t)\}$ para o problema

$$\begin{cases} i\psi_t + \Delta\psi + i\alpha b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi = \phi\psi\chi_\omega \text{ em } \Omega\times(0,\infty),\\ \phi_{tt} - \Delta\phi + a(x)\phi_t = |\psi|^2\chi_\omega \text{ em } \Omega\times(0,\infty),\\ \psi=\phi=0 \ \text{ em } \ \Gamma\times(0,\infty),\\ \psi(0)=\psi_0\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),\\ \phi(0)=\phi_0\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),\\ \phi_t(0)=\phi_1\in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{2.78}$$

cuja energia associada é dada por

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega (|\psi(x,t)|^2 + |\nabla\phi(x,t)|^2 + |\phi_t(x,t)|^2)\,dx. \tag{2.79}$$

Definindo $\mathcal{H} := \{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\}^2 \times H_0^1(\Omega)$ no próximo teorema, provamos o decaimento uniforme local da energia. De fato, consideraremos os dados iniciais tomados em conjuntos limitados de $\mathcal{H}$, ou seja, $||\{\psi_0, \phi_0, \phi_1\}||_{\mathcal{H}} \leq L$, onde L é uma constante positiva. Isto é fortemente necessário devido ao caráter não linear do sistema (2.1) e uma vez que $E(t)$ não é naturalmente uma função não crescente no parâmetro t. Portanto as constantes C e γ que aparecem em (2.87) dependerão de $L > 0$. Vamos denotar $d := c||b||_\infty L$, onde c vem da imersão $H^{1/2}(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$.

No que segue, por simplicidade, denotaremos $\psi_t = \psi'$. Assim, multiplicando a primeira equação de (2.78) por $\overline{\psi}$ e integrando em Ω, temos

$$i\int_\Omega \psi'(t)\overline{\psi(t)}\,dx + \int_\Omega \Delta\psi(t)\overline{\psi(t)}\,dx + i\alpha\int_\Omega b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi(t)\overline{\psi(t)}\,dx = \int_\omega \phi(t)|\psi(t)|^2\,dx,$$

ou seja,

$$(\psi'(t), \psi(t)) + i(\nabla\psi(t), \nabla\psi(t)) + \alpha\int_\Omega b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi(t)\overline{\psi(t)}\,dx = -i\int_\omega \phi(t)|\psi(t)|^2\,dx. \tag{2.80}$$

Tomando a parte real de (2.80) segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\int_0^T \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(\cdot)\psi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{2.81}$$

Agora, multiplicando a segunda equação do problema (2.78) por ϕ' e integrando em Ω, obtemos

$$\int_\Omega \phi''(t)\phi'(t)\,dx + \int_\Omega (-\Delta\phi(t))\phi'(t)\,dx + \int_\Omega a(x)|\phi'(t)|^2\,dx = \int_\omega |\psi(t)|^2\phi'(t)\,dx,$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\phi'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi(t)\|^2_{L^2(\Omega)}) + \int_\Omega a(x)|\phi'(t)|^2\,dx = \int_\Omega |\psi(t)|^2\phi'(t)\,dx. \tag{2.82}$$

Somando as expressões (2.81) e (2.82), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\psi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi(t)\|^2_{L^2(\Omega)}) + \alpha\int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi(t)|^2\,dx \\ + \int_\Omega a(x)|\phi'(t)|^2\,dx = \int_\omega |\psi(t)|^2\phi'(t)\,dx,\end{aligned}$$

ou seja,

$$E'(t) + \alpha\int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi(t)|^2\,dx + \int_\Omega a(x)|\phi'(t)|^2\,dx = \int_\omega |\psi(t)|^2\phi'(t)\,dx. \tag{2.83}$$

A seguir, analisaremos o último termo em (2.83). Da Hipótese (2.1), das desigualdades de Gagliardo Nirenberg e Young, e observando que $D[(-\Delta)^{\frac{1}{4}}] = H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\omega |\psi(t)|^2\phi'(t)\,dx &\leq \int_\omega \left(\frac{1}{\sqrt{a_0}}|\psi(t)|^2\right)(\sqrt{a_0}|\phi'(t)|)\,dx \\
&\leq \int_\omega \frac{1}{2a_0}|\psi(t)|^4\,dx + \frac{1}{2}\int_\omega a_0|\phi'(t)|^2\,dx \\
&\leq \frac{a_0^{-1}}{2}\int_\omega |\psi(t)|^4\,dx + \frac{1}{2}\int_\omega a(x)|\phi'(t)|^2\,dx \\
&= \frac{a_0^{-1}b_0^{-4}}{2}\int_\omega b_0^4|\psi(t)|^4\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\phi'(t)|^2\,dx \\
&\leq \frac{a_0^{-1}b_0^{-4}}{2}\int_\omega |b(x)\psi(t)|^4\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\phi'(t)|^2\,dx \\
&\leq \frac{a_0^{-1}b_0^{-4}}{2}\int_\Omega |b(x)\psi(t)|^4\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\phi'(t)|^2\,dx \\
&= \frac{a_0^{-1}b_0^{-4}}{2}\|b(\cdot)\psi(t)\|^4_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\phi'(t)|^2\,dx \\
&\leq \frac{a_0^{-1}b_0^{-1}}{2}\|b(\cdot)\psi(t)\|^2_{L^4(\Omega)}\|b(\cdot)\psi(t)\|^2_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\phi'(t)|^2\,dx \\
&\leq \frac{a_0^{-1}b_0^{-4}}{2}\|b\|^2_\infty\|\psi(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\psi(t)\|_{L^2(\Omega)}c\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(\cdot)\psi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\phi'(t)|^2\,dx \\
&\leq \frac{a_0^{-1}b_0^{-4}d}{2}\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(\cdot)\psi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\phi'(t)|^2\,dx,
\end{aligned} \tag{2.84}$$

onde $d := c\|b\|_{L^\infty}L$. Logo, combinando (2.83) e (2.84), obtemos

$$\begin{aligned}
E'(t) + \alpha\int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi(t)|^2\,dx + \int_\Omega a(x)|\phi'(t)|^2\,dx \\
\leq \frac{a_0^{-1}b_0^{-4}d}{2}\int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi(t)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\phi'(t)|^2\,dx.
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Dessa forma, considerando α grande o suficiente tal que $\beta = \alpha - \frac{a_0^{-1}b_0^{-4}d}{2} > 0$, segue que

$$\begin{aligned}
E'(t) &\leq -\frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\phi'(t)|^2\,dx - \beta\int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi(t)|^2\,dx \\
&\leq -k\left(\int_\Omega a(x)|\phi'(t)|^2\,dx + \int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi(t)|^2\,dx\right),
\end{aligned} \tag{2.86}$$

onde $k = \min\{\frac{1}{2}, \beta\}$.

Teorema 2.4 *Assuma que as Hipóteses (2.1) e (2.2) valem e, além disso, que* $\alpha > \frac{a_0^{-1} b_0^{-4} d}{2}$ *ou* d *é suficientemente pequeno, então, existem* C, γ *constantes positivas tais que a seguinte taxa de decaimento vale*

$$E(t) \leq C e^{-\gamma t} E(0), \quad \textit{para todo } t \geq 0, \tag{2.87}$$

para cada solução regular do problema (2.1) na classe dada no teorema anterior, uma vez que os dados são tomados em limitados de $\mathcal{H}$.

Passo1 : Multiplicando a primeira equação do problema (2.1) por $\overline{\psi}$ e integrando em $\Omega \times (0,T)$, obtemos

$$\underbrace{\int_0^T \int_\Omega \psi' \overline{\psi}\, dxdt}_{N_1} - i \int_0^T \int_\Omega \Delta\psi \overline{\psi}\, dxdt + \alpha \int_0^T \int_\Omega b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}} b(x)\psi\overline{\psi}\, dxdt = -i \int_0^T \int_\omega \phi|\psi|^2\, dxdt. \tag{2.88}$$

Integrando N_1 por partes, temos

$$\int_0^T \int_\Omega \psi' \overline{\psi}\, dxdt = \left[\int_\Omega \overline{\psi}\psi\, dx\right]_0^T - \int_0^T \int_\Omega \psi \overline{\psi'}\, dxdt.$$

Note que,

$$\int_0^T \int_\Omega \psi' \overline{\psi}\, dxdt + \int_0^T \int_\Omega \psi \overline{\psi'}\, dxdt = 2Re \int_0^T \int_\Omega \psi' \overline{\psi}\, dxdt.$$

Assim,

$$Re \int_0^T \int_\Omega \psi' \overline{\psi}\, dxdt = \left[\int_\Omega \frac{|\psi|^2}{2}\, dx\right]_0^T.$$

Logo, tomando a parte real em (2.88) segue que

$$\left[\int_\Omega \frac{|\psi|^2}{2}\, dx\right]_0^T + \alpha \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} b(\cdot)\psi\|^2_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{2.89}$$

Agora, multiplicando a segunda equação por $(q \cdot \nabla\phi)$, onde $q \in (W^{1,\infty}(\Omega))^2$, e integrando em $\Omega \times (0,T)$, segue que

$$\underbrace{\int_0^T \int_\Omega \phi''(q \cdot \nabla\phi)\, dxdt}_{N_2} - \underbrace{\int_0^T \int_\Omega \Delta\phi(q \cdot \nabla\phi)\, dxdt}_{N_3} + \int_0^T a(x)\phi'(q \cdot \nabla\phi)\, dxdt$$
$$= \int_0^T \int_\omega |\psi|^2 (q \cdot \nabla\phi)\, dxdt. \tag{2.90}$$

Integrando N_2 por partes, temos

$$\int_0^T \int_\Omega \phi''(q\cdot\nabla\phi)\,dxdt = \left[\int_\Omega \phi'(q\cdot\nabla\phi)\,dx\right]_0^T - \underbrace{\int_0^T \int_\Omega \phi'(q\cdot\nabla\phi')\,dxdt}_{N_4}. \tag{2.91}$$

Pondo $q(x) = (q_1(x), q_2(x)), \nabla\phi' = \left(\frac{\partial\phi'}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi'}{\partial x_2}\right)$, aplicando a fórmula de Gauss em N_4, para $k = 1, 2$, e, como $\phi' = 0$ em Γ, segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega \phi'(q\cdot\nabla\phi')\,dxdt &= \int_0^T \int_\Omega \phi'\left(\sum_{k=1}^2 q_k\frac{\partial\phi'}{x_k}\right)\,dxdt \\
&= \int_0^T \left(\sum_{k=1}^2 \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}(\phi')^2 q_k\,dx\right)dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^T \left(\sum_{k=1}^2 \int_\Omega (\phi')^2\frac{\partial q_k}{\partial x_k}\,dx\right)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \left(\sum_{k=1}^2 \int_\Gamma (\phi')^2 q_k\nu_k\,d\Gamma\right)\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (div\ q)(\phi')^2\,dxdt.
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Assim, de (2.91) e (2.92) resulta que

$$\int_0^T \int_\Omega \phi''(q\cdot\nabla\phi)\,dxdt = \left[\int_\Omega \phi'(q\cdot\nabla)\,dx\right]_0^T + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (div\ q)(\phi')^2\,dxdt. \tag{2.93}$$

Por outro lado, aplicando a fórmula de Green em N_3, obtemos

$$-\int_0^T \int_\Omega \Delta\phi(q\cdot\nabla\phi)\,dxdt = \int_0^T \int_\Omega \nabla\phi\cdot\nabla(q\cdot\nabla\phi)\,dxdt - \int_0^T \int_\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial\nu}(q\cdot\nabla\phi)\,d\Gamma dt. \tag{2.94}$$

Assim, usando a notação

$$\int_0^T \int_\Omega \nabla\phi\cdot\nabla(q\cdot\nabla\phi)\,dxdt = \sum_{k,j=1}^2 \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\,dxdt,$$

segue que,

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla(q\cdot\nabla\phi)\,dxdt &= \int_0^T \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}(q\cdot\nabla\phi)\,dx\,dt \\ &= \int_0^T \sum_{j=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{n} q_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right) dx\,dt \\ &= \int_0^T \sum_{j,k=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\,dxdt + \underbrace{\int_0^T \sum_{j,k=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_j} q_k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k}\,dx\,dt}_{N_5}.\end{aligned} \tag{2.95}$$

Temos também da fórmula de Gauss

$$\begin{aligned}N_5 &= \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2}\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right)^2 q_k\,dx\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{k=1}^{2}\int_\Omega \frac{\partial |\nabla\phi|^2}{\partial x_k} q_k\,dx\,dt \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^T \sum_{k=1}^{2}\int_\Omega |\nabla\phi|^2 \frac{\partial q_k}{\partial x_k}\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{k=1}^{2}\int_\Gamma |\nabla\phi|^2 q_k \nu_k\,d\Gamma\,dt \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (div\ q)|\nabla\phi|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Gamma (q\cdot\nu)|\nabla\phi|^2\,d\Gamma dt.\end{aligned}$$

Como $\phi = 0$ em Γ, temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k} = \nu_k \frac{\partial \phi}{\partial \nu}, \forall k = 1,2, \text{ e } |\nabla\phi|^2 = \left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|^2 \text{ em } \Gamma.$$

Assim,

$$N_5 = -\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (div\ q)|\nabla\phi|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Gamma (q\cdot\nu)\left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|^2\,d\Gamma dt. \tag{2.96}$$

Combinando (2.94), (2.95) e (2.96) concluímos que

$$\begin{aligned}-\int_0^T \int_\Omega \Delta\phi(q\cdot\nabla\phi)\,dxdt &= \int_0^T \sum_{j,k=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\,dxdt \\ &- \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (div\ q)|\nabla\phi|^2\,dxdt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Gamma (q\cdot\nu)\left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|^2\,d\Gamma\,dt.\end{aligned} \tag{2.97}$$

Logo, de (2.90), (2.93) e (2.97), temos

$$\left[\int_\Omega \phi'(q\cdot\nabla\phi)\,dx\right]_0^T + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega (div\ q)(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)\,dxdt + \int_0^T \sum_{j,k=1}^{2}\int_\Omega \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\,dx\,dt$$
$$+\int_0^T\int_\Omega a(x)\phi'(q\cdot\nabla\phi)\,dx\,dt - \int_0^T\int_\omega |\psi|^2(q\cdot\nabla\phi)\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma (q\cdot\nu)\left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt. \tag{2.98}$$

Somando (2.89) e (2.98), obtemos

$$\left[\int_\Omega\left(\frac{|\psi|^2}{2}+\phi'(q\cdot\nabla\phi)\right)dx\right]_0^T + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega (div\ q)(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)\,dx\,dt$$
$$+\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\,dxdt - \int_0^T\int_\omega |\psi|^2(q\cdot\nabla\phi)\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega a(x)\phi'(q\cdot\nabla\phi)\,dx\,dt \tag{2.99}$$
$$+\alpha\int_0^T \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(\cdot)\psi\|^2_{L^2(\Omega)}\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma (q\cdot\nu)\left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt.$$

Em (2.99), por simplicidade, omitimos as variáveis das funções sob o sinal da integral e, além disso, usamos a convenção de soma de índices repetidos.

Fazendo $q(x) = m(x) = (x - x_0)$, para algum $x_0 \in \mathbb{R}^2$, e levando em conta a hipótese (2.2), chegamos que

$$\left[\int_\Omega\left(\frac{|\psi|^2}{2}+\phi'(m\cdot\nabla\phi)\right)dx\right]_0^T + \int_0^T\int_\Omega (|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega |\nabla\phi|^2\,dxdt$$
$$-\int_0^T\int_\omega |\psi|^2(m\cdot\nabla\phi)\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega a(x)\phi'(m\cdot\nabla\phi)\,dx\,dt + \alpha\int_0^T\int_\Omega b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\psi\overline{\psi}\,dx\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^T\int_{(\Gamma_{x_0})}(m\cdot\nu)\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma\,dt. \tag{2.100}$$

Note que utilizamos o fato que $\dfrac{\partial q_k}{\partial x_j} = 1$ se $k = j$ e $\dfrac{\partial q_k}{\partial x_j} = 0$ se $k \neq j$, e div q = 2. Agora, multiplicando a segunda equação do problema (2.1) por $\xi\phi$, com $\xi \in W^{1,\infty}(\Omega)$, e integrando em $\Omega\times(0,T)$ temos

$$\int_0^T\int_\Omega \phi''\xi\phi\,dx\,dt - \int_0^T\int_\Omega \Delta\phi\xi\phi\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega a(x)\phi'\xi\phi\,dx\,dt = \int_0^T\int_\omega |\psi|^2\xi\phi\,dx\,dt. \tag{2.101}$$

Pela fórmula de integração por partes, temos

$$\int_0^T\int_\Omega \phi''\xi\phi\,dx\,dt = \left[\int_\Omega \phi'\xi\phi\,dx\right]_0^T - \int_0^T\int_\Omega \xi|\phi'|^2\,dx\,dt. \tag{2.102}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
-\int_0^T\int_\Omega \Delta\phi\xi\phi\,dx\,dt &= \int_0^T\sum_{i=1}^2\int_\Omega \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial(\xi\phi)}{\partial x_i}\,dx\,dt - \int_0^T\int_\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\xi\phi\,d\Gamma\,dt \\
&= \int_0^T\sum_{i=1}^2\int_\Omega \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\phi\,dx\,dt + \int_0^T\sum_{i=1}^2\int_\Omega \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\xi\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\,dx\,dt \\
&= \int_0^T\int_\Omega \phi(\nabla\phi\cdot\nabla\xi)\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega \xi|\nabla\phi|^2\,dx\,dt.
\end{aligned}
\tag{2.103}
$$

Ainda pela fórmula de integração por partes temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega a(x)\phi'\xi\phi\,dx\,dt &= \int_0^T\int_\Omega \frac{a\xi}{2}\frac{d}{dt}|\phi|^2\,dx\,dt \\
&= \int_0^T\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{a\xi}{2}|\phi|^2\,dx\,dt \\
&= \left[\int_\Omega \frac{a\xi}{2}|\phi|^2\right]_0^T\,dx\,dt.
\end{aligned}
\tag{2.104}
$$

Logo, substituindo (2.102), (2.103) e (2.104) em (2.101) concluímos que

$$
\begin{aligned}
\left[\int_\Omega \phi\xi\left(\phi'+\frac{\phi a}{2}\right)\,dx\right]_0^T &= \int_0^T\int_\Omega \xi|\phi'|^2\,dx\,dt - \int_0^T\int_\Omega \phi(\nabla\phi\cdot\nabla\xi)\,dx\,dt \\
&\quad - \int_0^T\int_\Omega \xi|\nabla\phi|^2\,dx\,dt + \int_0^T\int_\omega |\psi|^2\xi\phi\,dx\,dt,
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
\left[\int_\Omega \phi\xi\left(\phi'+\frac{\phi a}{2}\right)\,dx\right]_0^T &= \int_0^T\int_\omega |\psi|^2\xi\phi\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega \xi(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)\,dx\,dt \\
&\quad - \int_0^T\int_\Omega \phi(\nabla\phi\cdot\nabla\xi)\,dx\,dt.
\end{aligned}
\tag{2.105}
$$

Tomando $\xi=\delta\in\mathbb{R}$ em (2.105) e combinando o resultado obtido com (2.100) temos

$$
\begin{aligned}
&\left[\int_\Omega \frac{|\psi|^2}{2}+\phi'(m\cdot\nabla\phi)+\delta\phi\left(\phi'+\frac{\phi a}{2}\right)\,dx\right]_0^T + (1-\delta)\int_0^T\int_\Omega |\phi'|^2\,dx\,dt \\
&+ \delta\int_0^T\int_\Omega |\nabla\phi|^2\,dx\,dt - \int_0^T\int_\omega |\psi|^2(m\cdot\nabla\phi)\,dx\,dt \\
&+ \int_0^T\int_\Omega a(x)\phi'(m\cdot\nabla\phi)\,dx\,dt + \alpha\int_0^T\int_\Omega |(-\Delta)^{\frac14}b(\cdot)\psi|^2\,dx\,dt \\
&- \delta\int_0^T\int_\omega |\psi|^2\phi\,dx\,dt \le \frac12\int_0^T\int_{\Gamma_{x_0}} (m\cdot\nu)\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2\,d\Gamma\,dt.
\end{aligned}
$$

Denotando

$$\chi := \left[\int_\Omega \left(\frac{|\psi|^2}{2} + \phi'(m\cdot\nabla\phi) + \delta\phi(\phi' + \frac{\phi a}{2})\right)\, dx\right] \tag{2.106}$$

e escolhendo $\delta = \dfrac{1}{2}$, deduzimos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T E(t)\, dt + \chi - \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega |\psi|^2\, dx\, dt - \int_0^T\int_\Omega |\psi|^2(m\cdot\nabla\phi)\, dx\, dt\\
&+ \int_0^T\int_\Omega a(x)\phi'(m\cdot\nabla\phi)\, dx\, dt + \alpha\int_0^T\int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(\cdot)\psi|^2\, dxdt - \frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega |\psi|^2\phi\, dx\, dt\\
&\leq \int_0^T\int_{\Gamma_{x_0}} (m\cdot\nu)\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2\, d\Gamma\, dt.
\end{aligned} \tag{2.107}$$

Note que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega |\phi'|^2\, dx\, dt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega |\nabla\phi|^2\, dx\, dt\\
&= \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega (|\phi'|^2 + |\nabla\phi|^2)\, dx\, dt\\
&= \frac{1}{2}\int_0^T \left(2E(t) - \int_\Omega |\psi|^2\, dx\right)\, dt\\
&= \int_0^T E(t)\, dt - \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega |\psi|^2\, dx\, dt.
\end{aligned}$$

A partir de agora, denotaremos

$$R := \sup_{x\in\overline{\Omega}} |x - x_0|. \tag{2.108}$$

A seguir, vamos estimar alguns termos em (2.107).

Estimativa para $I_1 := \int_0^T\int_\omega |\psi|^2(m\cdot\nabla\phi)\, dx\, dt$.

Considerando (2.86), (2.108), lembrando que $[D(-\Delta)]^{\frac{1}{4}} = H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ e pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz, Young, Gagliardo-Nirenberg e também a desigualdade $ab \leq$

$\dfrac{1}{4\varepsilon}a^2 + \varepsilon b^2$, segue que

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \int_0^T \int_\omega |\psi|^2 |m \cdot \nabla\phi| \, dx \, dt \\
&\leq \int_0^T \int_\omega |\psi|^2 |m||\nabla\phi| \, dx \, dt \\
&\leq \int_0^T \left(\frac{1}{4\varepsilon} \int_\omega R^2 |\psi|^4 \, dx + \varepsilon \int_\omega |\nabla\phi|^2 \, dx \right) dt \\
&\leq \frac{R^2}{4\varepsilon} \int_0^T \int_\omega |\psi|^4 \, dx \, dt + 2\varepsilon \int_0^T E(t) \, dt \\
&\leq \frac{R^2}{4\varepsilon b_0^4} \int_0^T \int_\omega |b(x)\psi|^4 \, dx \, dt + 2\varepsilon \int_0^T E(t) \, dt \\
&\leq \frac{R^2}{4\varepsilon b_0^4} \int_0^T \|b(x)\psi\|_{L^4(\omega)}^4 \, dt + 2\varepsilon \int_0^T E(t) \, dt \\
&= \frac{R^2}{4\varepsilon b_0^4} \int_0^T \|b(x)\psi\|_{L^4(\Omega)}^2 \|b(x)\psi\|_{L^4(\Omega)}^2 \, dt + 2\varepsilon \int_0^T E(t) \, dt \\
&\leq \frac{R^2}{4\varepsilon b_0^4} \int_0^T \|b\|_\infty^2 \|\psi\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)} \|b(x)\psi\|_{L^4(\Omega)}^2 \, dt + 2\varepsilon \int_0^T E(t) \, dt \\
&\leq \frac{R^2 d}{4\varepsilon b_0^4} \int_0^T \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} b(x)\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt + 2\varepsilon \int_0^T E(t) \, dt \\
&\leq \frac{R^2 d}{4\varepsilon b_0^4} \int_0^T \left(-\frac{E'(t)}{k} \right) dt + 2\varepsilon \int_0^T E(t) \, dt \\
&\leq \frac{R^2 d}{4\varepsilon b_0^4 k} (E(0) - E(T)) + 2\varepsilon \int_0^T E(t) \, dt.
\end{aligned} \tag{2.109}$$

Estimativa para $I_2 := \int_0^T \int_\Omega a(x)\phi'(m \cdot \nabla\phi) \, dx \, dt$.

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, empregando a desigualdade $ab \leq \dfrac{1}{4\varepsilon}a^2 + \varepsilon b^2$ e considerando (2.86), (2.108), obtemos

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq \int_0^T \int_\Omega a(x)|\phi'|R|\nabla\phi| \, dx \, dt \\
&\leq \int_0^T \left(\int_\Omega \frac{1}{4\varepsilon}(a(x))^2 |\phi'| R^2 \, dx + \varepsilon \int_\Omega |\nabla\phi|^2 \, dx \right) dt \\
&\leq \|a\|_\infty \frac{R^2}{4\varepsilon} \int_0^T \int_\Omega a(x)|\phi'|^2 \, dx \, dt + 2\varepsilon \int_0^T E(t) \, dt \\
&\leq \|a\|_\infty \frac{R^2}{4\varepsilon k} \int_0^T (-E'(t)) \, dt + 2\varepsilon \int_0^T E(t) \, dt \\
&\leq \|a\|_\infty \frac{R^2}{4\varepsilon k} (E(0) - E(T)) + 2\varepsilon \int_0^T E(t) \, dt.
\end{aligned} \tag{2.110}$$

Estimativa para $I_3 := -\alpha \int_0^T \int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{4}} b(x)\psi|^2 \, dx \, dt$.

Por (2.86), temos

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq \alpha \int_0^T \int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{4}} b(x)\psi|^2 \, dx \, dt \\
&\leq \alpha \int_0^T \frac{(-E'(t))}{k} \, dt \\
&= \frac{\alpha}{k}(E(0) - E(T)).
\end{aligned} \tag{2.111}$$

Estimativa para $I_4 := -\frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega |\psi|^2 \phi \, dx \, dt$.

Das desigualdades de Holder, Poincaré, Gagliardo-Nirenberg e da desigualdade $ab \leq \frac{1}{4\varepsilon}a^2 + \varepsilon b^2$, e também considerando (2.86), temos

$$\begin{aligned}
|I_4| &\leq \frac{1}{2} \int_0^T \left[\left(\int_\omega |\psi|^4 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\omega |\phi|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] dt \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^T \left[\left(\int_\omega |\psi|^4 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\omega \lambda^2 |\nabla \phi|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] dt \\
&\leq \frac{1}{8\varepsilon} \lambda \int_0^T \int_\omega |\psi|^4 \, dx + 2\varepsilon \int_0^T E(t) \, dt \\
&\leq \frac{1}{8\varepsilon b_0^4} \lambda \int_0^T \int_\omega |b(x)\psi|^4 \, dx + 2\varepsilon \int_0^T E(t) \, dt \\
&\leq \frac{1}{8\varepsilon b_0^4} \lambda \int_0^T \|b(x)\psi\|^4_{L^4(\Omega)} + 2\varepsilon \int_0^T E(t) \, dt \\
&\leq \frac{1}{8\varepsilon b_0^4} \lambda \int_0^T \|b(x)\psi\|^2_{L^4(\Omega)} \|b(x)\psi\|^2_{L^4(\Omega)} \, dt + 2\varepsilon \int_0^T E(t) \, dt \\
&\leq \frac{1}{8\varepsilon b_0^4} \lambda \int_0^T \|b\|_\infty \|\psi\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)} \|b(x)\psi\|^2_{L^4(\Omega)} \, dt + 2\varepsilon \int_0^T E(t) \, dt \\
&\leq \frac{1}{8\varepsilon b_0^4} \lambda d \int_0^T \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} b(x)\psi\|^2_{L^2(\Omega)} \, dt + 2\varepsilon \int_0^T E(t) \, dt \\
&\leq \frac{1}{8\varepsilon b_0^4} \lambda d \int_0^T \left(\frac{-E'(t)}{k} \right) dt + 2\varepsilon \int_0^T E(t) \, dt \\
&\leq \frac{\lambda d}{8\varepsilon b_0^4 k}(E(0) - E(T)) + 2\varepsilon \int_0^T E(t) \, dt.
\end{aligned} \tag{2.112}$$

Combinando as estimativas de (2.109) a (2.112) e escolhendo $\varepsilon = \frac{1}{8}$, a seguinte desigualdade vale

$$\int_0^T E(t)\,dt \leq |\chi| + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega |\psi|^2\,dx\,dt + \frac{R^2 d}{4\varepsilon b_0^4 k}(E(0) - E(T)) + 2\varepsilon \int_0^T E(t)\,dt$$
$$+ \frac{\|a\|_\infty R^2}{4\varepsilon k}(E(0) - E(T)) + 2\varepsilon \int_0^T E(T)\,dt + \frac{\alpha}{k}(E(0) - E(T)) + \frac{\lambda d}{8\varepsilon b_0^4 k}(E(0) - E(T))$$
$$+ 2\varepsilon \int_0^T E(T)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma(x_0)} (m \cdot \nu)\left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma\,dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int_0^T E(t)\,dt \leq \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma(x_0)} (m \cdot \nu)\left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma\,dx + |\chi| \\ + C_0(E(0) - E(T)) + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega |\psi|^2\,dx\,dt,\end{aligned} \tag{2.113}$$

onde

$$C_0 = \left(\frac{2R^2 d + \|a\|_\infty R^2 b_0^4 k + \alpha b_0^4 + \lambda d}{b_0^4 k}\right).$$

Passo 2: Agora vamos estimar a quantidade $\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma(x_0)} (m \cdot \nu)\left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right) d\Gamma$ em termos do termo de dissipação $\int_0^T \int_\Omega a(x)|\phi'|^2\,dx\,dt$.

De acordo com a prova do Lema 2.3 em Lions [67], podemos construir uma vizinhança $\hat{\omega}$ de $\overline{\Gamma(x_0)}$ tal que

$$\overline{\hat{\omega}} \cap \Omega \subset \omega$$

e um campo vetorial $h \in (C^1(\overline{\Omega}))^2$ tal que $h = \nu$ em $\Gamma(x_0)$, $h \cdot \nu \geq 0$ q.s em Γ e $h = 0$ em $\Omega \setminus \hat{\omega}$, de acordo com a figura 2.

Aplicando a identidade (2.107) com $q = h$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma(x_0)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma\,dt &\leq \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma(x_0)} (h \cdot \nu)\left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma \setminus \Gamma(x^0)} (h \cdot \nu)\left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma\,dt \\ &= \left[\int_\Omega \left(\frac{|\psi|^2}{2} + \phi'(m \cdot \nabla\phi)\right) dx\right]_0^T + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\hat{\omega}} (div\ h)(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2)\,dx\,dt \\ &+ \int_0^T \int_{\hat{\omega}} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\frac{\partial h_k}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\,dx\,dt - \int_0^T \int_{\hat{\omega}} |\psi|^2 (h \cdot \nabla\phi)\,dx\,dt \\ &+ \int_0^T \int_{\hat{\omega}} a(x)\phi'(h \cdot \nabla\phi)\,dx\,dt + \alpha \int_0^T \int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{4}} b(x)\psi|^2\,dx\,dt.\end{aligned} \tag{2.114}$$

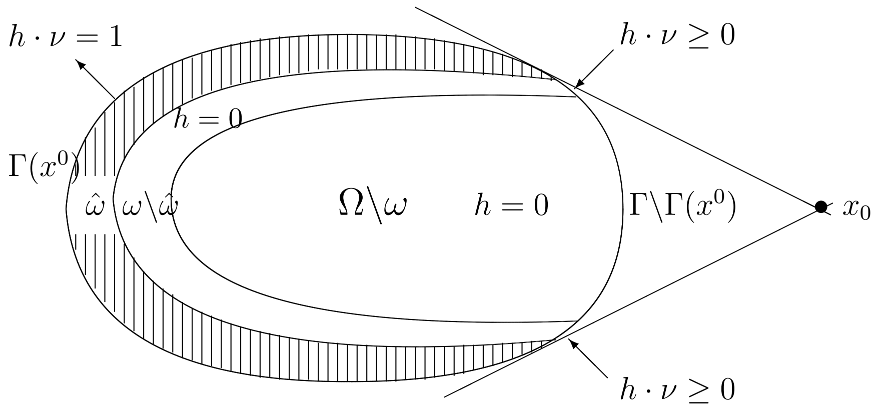

Figura 2

Estimativa para $J_1 := \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\hat{\omega}} (div\ h)(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2)\, dx\, dt$.

De (2.86), temos

$$\begin{aligned}
|J_1| &\leq \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\hat{\omega}} \|h\|_{W^{1,\infty}} |\phi'|^2\, dx\, dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\hat{\omega}} (div\ h)|\nabla\phi|^2\, dx\, dt \\
&\leq \frac{\|h\|_{W^{1,\infty}}}{2a_0} \int_0^T \int_{\hat{\omega}} a(x)|\phi'|^2\, dx\, dt + \frac{\|h\|_{W^{1,\infty}}}{2} \int_0^T \int_{\hat{\omega}} |\nabla\phi|^2\, dx\, dt \\
&\leq \frac{\|h\|_{W^{1,\infty}}}{2a_0} \int_0^T \left(-\frac{E'(t)}{k}\right) dt + \frac{\|h\|_{W^{1,\infty}}}{2} \int_0^T \int_{\hat{\omega}} |\nabla\phi|^2\, dx\, dt \\
&\leq \frac{\|h\|_{W^{1,\infty}}}{2a_0 k} \int_0^T (E(0) - E(T))\, dt + \frac{\|h\|_{W^{1,\infty}}}{2} \int_0^T \int_{\hat{\omega}} |\nabla\phi|^2\, dx\, dt.
\end{aligned} \tag{2.115}$$

Estimativa para $J_2 := \int_0^T \int_{\hat{\omega}} \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial h_k}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\, dx\, dt$.

Temos

$$|J_2| \leq \|h\|_{W^{1,\infty}} \int_0^T \int_{\hat{\omega}} |\nabla\phi|^2\, dx\, dt. \tag{2.116}$$

Estimativa para $J_3 := -\int_0^T \int_{\hat{\omega}} |\psi|^2 (h \cdot \nabla\phi)\, dx\, dt$.

Considerando (2.86), (2.108), lembrando que $[D(-\Delta)]^{\frac{1}{4}} = H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ e pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz, Young, Gagliardo-Nirenberg e também a desigualdade $ab \leq \dfrac{1}{4\varepsilon}a^2 + \varepsilon b^2$, segue que

$$\begin{aligned}
|J_3| &\leq \int_0^T \int_{\hat{\omega}} |\psi|^2 |(h \cdot \nabla\phi)|\, dx\, dt \\
&\leq \frac{\|h\|_\infty^2 d}{4\varepsilon b_0^4 k}(E(0) - E(T)) + 2\varepsilon \int_0^T E(t)\, dt.
\end{aligned} \tag{2.117}$$

Estimativa para $J_4 := \int_0^T \int_{\hat{\omega}} a(x)\phi'(h \cdot \nabla\phi)\, dx\, dt$.

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, empregando a desigualdade $ab \leq \dfrac{1}{4\varepsilon}a^2 + \varepsilon b^2$, e considerando (2.86), (2.108), obtemos

$$\begin{aligned} |J_4| &\leq \int_0^T \int_\Omega a(x)|\phi'||(h \cdot \nabla\phi)|\, dx\, dt \\ &\leq \|a\|_\infty \frac{\|h\|_\infty^2}{4\varepsilon k}(E(0) - E(T)) + 2\varepsilon \int_0^T E(t)\, dt. \end{aligned} \tag{2.118}$$

Estimativa para $J_5 := \alpha \int_0^T \int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{4}} b(x)\psi|^2\, dx\, dt$.

De forma análoga às estimativas anteriores, temos

$$\begin{aligned} J_5 &\leq \alpha \int_0^T \int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{4}} b(x)\psi|^2\, dx\, dt \\ &\leq \frac{\alpha}{k}(E(0) - E(T)). \end{aligned} \tag{2.119}$$

Denotando

$$Y := \left[\int_\Omega \left(\frac{|\psi|^2}{2} + \phi'(h \cdot \nabla\phi) \right) dx \right]_0^T, \tag{2.120}$$

e combinando as estimativas de (2.115) a (2.119), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma(x_0)} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma\, dt \leq |Y| &+ \frac{\|h\|_{W^{1,\infty}}}{2a_0 k}(E(0) - E(T)) + \frac{3\|h\|_{W^{1,\infty}}}{2} \int_0^T \int_{\hat{\omega}} |\nabla\phi|^2\, dx\, dt \\ &+ \frac{\|h\|_\infty^2 d}{4\varepsilon b_0^4 k}(E(0) - E(T)) + 2\varepsilon \int_0^T E(t)\, dt \\ &+ \frac{\|a\|_\infty \|h\|_\infty^2}{4\varepsilon k}(E(0) - E(T)) + 2\varepsilon \int_0^T E(t)\, dt + \frac{\alpha}{k}(E(0) - E(T)), \end{aligned} \tag{2.121}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \frac{R}{2}\int_0^T \int_{\Gamma(x_0)} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right) d\Gamma\, dt &\leq R|Y| + 4R\varepsilon \int_0^T E(t)\, dt + RC_1(E(0) - E(T)) \\ &+ \frac{3R\|h\|_{W^{1,\infty}}}{2} \int_0^T \int_{\hat{\omega}} |\nabla\phi|^2\, dx\, dt, \end{aligned} \tag{2.122}$$

onde

$$C_1 := \left[\frac{\|h\|_{W^{1,\infty}}}{2a_0 k} + \frac{\|h\|_\infty^2 d}{4\varepsilon b_0^4 k} + \frac{\|a\|_\infty \|h\|_\infty^2}{4\varepsilon k} + \frac{\alpha}{k} \right].$$

Combinando (2.113) e (2.122), e escolhendo $\varepsilon = \dfrac{1}{32R}$, deduzimos

$$\frac{1}{8}\int_0^T E(t)\,dt \leq |\chi| + R|Y| + (C_0 + RC_1)(E(0) - E(T)) + \frac{3R\|h\|_\infty}{2}\int_0^T\int_{\hat{\omega}} |\nabla\phi|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega |\psi|^2\,dx\,dt. \tag{2.123}$$

Então, construímos, como no Lema 2.4 em Lions [66], uma função $\eta \in W^{1,\infty}(\Omega)$ satisfazendo

$$0 \leq \eta \leq 1 \text{ q.s em } \Omega, \eta = 1 \text{ q.s em } \hat{\omega},$$

$$\eta = 0 \;\; q.s \;\; \text{em} \;\; \Omega\backslash\omega,$$

$$\frac{|\nabla\eta|^2}{\eta} \in L^\infty(\omega).$$

Tomando $\xi = \eta$ na identidade (2.105) resulta que

$$\left[\int_\Omega \phi\eta\left(\phi' + \frac{\phi a}{2}\right)\,dx\right]_0^T = \int_0^T\int_\omega |\psi|^2\eta\phi\,dx\,dt + \int_0^T\int_\omega \eta(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2)\,dx\,dt - \int_0^T\int_\omega \phi(\nabla\phi\cdot\nabla\eta)\,dx\,dt. \tag{2.124}$$

Em seguida, vamos analisar os termos do lado direito da igualdade acima.

Estimativa para $L_1 := \int_0^T\int_\omega |\psi|^2\eta\phi\,dx\,dt$.

De modo análogo ao feito anteriormente, e agora considerando a desigualdade $ab \leq \frac{1}{4\varepsilon}a^2 + \varepsilon b^2$, segue que

$$\begin{aligned}
|L_1| &\leq \int_0^T\int_\omega |\psi|^2|\eta||\phi|\,dx\,dt \\
&\leq \int_0^T\left[\left(\int_\omega |\psi|^4\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\omega |\phi|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]dt \\
&\leq \int_0^T\left[\left(\int_\omega |\psi|^4\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\omega \lambda^2|\nabla\phi|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]dt \\
&\leq \frac{d}{4\varepsilon b_0^4}(E(0) - E(T)) + 2\lambda^2\varepsilon\int_0^T E(t)\,dt.
\end{aligned} \tag{2.125}$$

Estimativa para $L_2 := \int_0^T\int_\Omega \eta|\phi'|^2\,dx\,dt$.

De (2.86), temos

$$\begin{aligned}|L_2| &\leq \int_0^T \int_\omega |\eta||\phi'|^2\,dx\,dt \\ &\leq \frac{1}{a_0}\int_0^T \int_\omega a(x)|\phi'|^2\,dx\,dt \\ &\leq \frac{1}{a_0 k}(E(0)-E(T)).\end{aligned} \tag{2.126}$$

Estimativa para $L_3 := -\int_0^T \int_\Omega \phi(\nabla\phi\cdot\nabla\eta)\,dx\,dt$.

Pela desigualdade de Young, podemos escrever

$$\begin{aligned}|L_3| &\leq \int_0^T \int_\omega |\phi||\nabla\phi\cdot\nabla\eta|\,dx\,dt \\ &\leq \int_0^T \left(\int_\omega \frac{\eta}{2}|\nabla\phi|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2\eta}|\phi|^2|\nabla\eta|^2\,dx\right)\,dt \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^T \int_\omega \eta|\nabla\phi|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\left\|\frac{|\nabla\eta|^2}{\eta}\right\|_{L^\infty(\omega)} \int_0^T \int_\omega |\phi|^2\,dx\,dt.\end{aligned} \tag{2.127}$$

Definindo

$$Z := \left[\int_\omega \phi\eta(\phi' + \frac{\phi a}{2})\,dx\right]_0^T, \tag{2.128}$$

e combinando as estimativas (2.125)-(2.127) com (2.124) e (2.128), resulta

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\omega \eta|\nabla\phi|^2\,dx\,dt \leq |Z| + \frac{d}{4\varepsilon b_0^4 k}(E(0)-E(T)) + 2\lambda^2\varepsilon\int_0^T E(t)\,dt + \frac{1}{a_0 k}(E(0)-E(t)) \\ + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\omega \eta|\nabla\phi|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\left\|\frac{|\nabla\eta|^2}{\eta}\right\|_{L^\infty(\omega)} \int_0^T \int_\omega |\phi|^2\,dx\,dt,\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\omega \eta|\nabla\phi|^2\,dx\,dt \leq |Z| + C_2(E(0)-E(T)) + 2\lambda^2\varepsilon\int_0^T E(t)\,dt + \\ + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\omega \eta|\nabla\phi|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\left\|\frac{|\nabla\eta|^2}{\eta}\right\|_{L^\infty(\omega)} \int_0^T \int_\omega |\phi|^2\,dx\,dt,\end{aligned} \tag{2.129}$$

onde $C_2 := \left[\frac{d}{4\varepsilon b_0^4} + \frac{1}{a_0 k}\right]$.

Combinando (2.123) e (2.129), tomando $\varepsilon = \frac{1}{32\lambda^2}$ e tendo em mente que

$$\int_0^T \int_{\hat{\omega}} \eta|\nabla\phi|^2\,dx\,dt = \int_0^T \int_{\hat{\omega}} |\nabla\phi|^2\,dx\,dt, \tag{2.130}$$

temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}\int_0^T E(t)\,dt &\leq |\chi| + R|Y| + (C_0 + RC_1)(E(0) - E(T)) + \frac{3R\|h\|_{W^{1,\infty}}}{2}\int_0^T\int_{\hat{\omega}} |\nabla\phi|^2\,dx\,dt \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega |\psi|^2\,dx\,dt \\ &\leq |\chi| + R|Y| + (C_0 + RC_1)(E(0) - E(T)) \\ &+ 3R\|h\|_{W^{1,\infty}}\Bigg(|Z| + C_2(E(0) - E(T)) + 2\varepsilon\lambda^2\int_0^T E(t)\,dt \\ &+ \frac{1}{2}\left\|\frac{|\nabla\eta|^2}{\eta}\right\|_{L^\infty(\omega)}\int_0^T\int_\omega |\phi|^2\,dx\,dt\Bigg) + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega |\psi|^2\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}\int_0^T E(t)\,dt &\leq |\chi| + R|Y| + 3R\|h\|_{W^{1,\infty}}|Z| + (C_0 + RC_1 + 3RC_2\|h\|_{W^{1,\infty}})(E(0) - E(T)) \\ &+ \frac{1}{16}\int_0^T E(t)\,dt + \frac{3R\|h\|_{W^{1,\infty}}}{2}\left\|\frac{|\nabla\eta|^2}{\eta}\right\|_{L^\infty(\omega)}\int_0^T\int_\omega |\phi|^2\,dx\,dt \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega |\psi|^2\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{16}\int_0^T E(t)\,dt &\leq |\chi| + R|Y| + 3R\|h\|_{W^{1,\infty}}|Z| + (C_0 + RC_1 + 3RC_2\|h\|_{W^{1,\infty}})(E(0) - E(T)) \\ &+ \frac{3R\|h\|_{W^{1,\infty}}}{2}\left\|\frac{|\nabla\eta|^2}{\eta}\right\|_{L^\infty(\omega)}\int_0^T\int_\omega |\phi|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega |\psi|^2\,dx\,dt.\end{aligned} \tag{2.131}$$

Por outro lado, de (2.106), (2.120) e (2.128), a seguinte estimativa vale

$$|\chi| + R|Y| + 3R\|h\|_{W^{1,\infty}}|Z| \leq C_3(E(0) + E(T)). \tag{2.132}$$

onde C_3 é uma constante positiva tal que $C_3 = C_3(R, \|a\|_\infty, \lambda, \|h\|_\infty)$. Então, de (2.131) e (2.132), temos

$$\int_0^T E(t)\,dt \leq C(E(0)) + C\left(\int_0^T\int_\Omega |\phi|^2\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega |\psi|^2\,dx\,dt\right), \tag{2.133}$$

onde C é uma constante positiva tal que

$$C = C(R, \|a\|_\infty, \|h\|_\infty, \lambda, \|h\|_{W^{1,\infty}}, k, a_0, b_0, \|b\|_\infty, d).$$

Passo 3: Seja $T_0 > 0$ considerado grande o suficiente para o nosso propósito. Temos o seguinte lema:

Lema 2.5 *Para todo $T > T_0$ existe uma constante positiva $C(T)$ tal que se $\{\psi, \phi\}$ é uma solução regular de (2.1), com valor inicial $\{\psi_0, \phi_0, \phi_1\}$, temos*

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_\Omega |\phi|^2\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega |\psi|^2\, dx\, dt \\ &\leq C(T)\left[\int_0^T \int_\Omega a(x)|\phi'|^2\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{4}} b(x)\psi|^2\, dx\, dt\right].\end{aligned} \tag{2.134}$$

Demonstração: Provaremos por contradição. Suponha que (2.134) não se verifica e seja $\{\psi_k(0), \phi_k(0), \phi_k'(0)\}$ uma sequência de dados iniciais onde as soluções correspondentes $\{\psi_k, \phi_k, \phi_k'\}$, com $E_k(0)$ uniformemente limitada em k, verifiquem

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\int_0^T \int_\Omega |\phi_k|^2\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega |\psi_k|^2\, dx\, dt}{\int_0^T \int_\Omega a(x)|\phi_k'|^2\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{4}} b(x)\psi_k|^2\, dx\, dt} = +\infty, \tag{2.135}$$

ou seja,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\int_0^T \int_\Omega a(x)|\phi_k'|^2\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{4}} b(x)\psi_k|^2\, dx\, dt}{\int_0^T \int_\Omega |\phi_k|^2\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega |\psi_k|^2\, dx\, dt} = 0. \tag{2.136}$$

Como $E_k(t) \leq E_k(0) \leq L$, onde L é uma constante positiva, obtemos uma subsequência, ainda denotada por $\{\psi_k, \phi_k\}$, que verifica

$$\psi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \psi \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \tag{2.137}$$

$$\phi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \phi \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \tag{2.138}$$

$$\phi_k' \overset{*}{\rightharpoonup} \phi' \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \tag{2.139}$$

Temos também, empregando o resultado de Compacidade (Aubin-Lions), que

$$\phi_k \to \phi \text{ fortemente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \tag{2.140}$$

Agora, de (2.136), (2.137) e (2.138) deduzimos que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^T \int_\Omega a(x)|\phi_k'|^2 dx\, dt = 0, \tag{2.141}$$

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^T\int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_k|^2 dx\, dt = 0. \tag{2.142}$$

Por outro lado, pela Hipótese (2.1), temos $b(x)\geq b_0>0$ em ω, assim, considerando (2.142) e lembrando que $D[(-\Delta)^{\frac{1}{4}}]\equiv H^{\frac{1}{2}}(\Omega)\hookrightarrow L^4(\Omega)$ para $n=2$, deduzimos

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T\int_\omega |\psi_k|^4\, dx\, dt = 0. \tag{2.143}$$

De maneira análoga, observando que $D[(-\Delta)^{\frac{1}{4}}]\equiv H^{\frac{1}{2}}(\Omega)\hookrightarrow L^4(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ para $n=2$, obtemos

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T\int_\omega |\psi_k|^2\, dx\, dt = 0. \tag{2.144}$$

A partir de agora vamos focar nossa atenção sobre a equação da onda "acoplada"

$$\phi_k''-\Delta\phi_k+a(x)\phi_k' = |\psi_k|^2\chi_\omega \text{ em } \Omega\times(0,T). \tag{2.145}$$

Vamos dividir a prova em dois casos (nos referimos ao limite ϕ acima):

(a) $\phi\neq 0$.

Passando o limite quando $k\to+\infty$ em (2.145) e considerando as convergências acima, deduzimos que

$$\begin{cases} \phi''-\Delta\phi = 0 \text{ em } \Omega\times(0,T),\\ \phi = 0 \text{ em } \Gamma\times(0,T),\\ \phi' = 0 \ \text{ q. s. em } \ \omega\times(0,T), \end{cases} \tag{2.146}$$

e, para $\phi'=v$, obtemos, no sentido distribucional,

$$\begin{cases} v''-\Delta v = 0 \text{ em } D'(\Omega\times(0,T)),\\ v = 0 \text{ em } \Gamma\times(0,T),\\ v = 0 \ \text{ q. s. em } \ \omega\times(0,T). \end{cases}$$

Logo, segue pelo Teorema de Holmgren que $v\equiv 0$, isto é, $\phi'\equiv 0$. Retornando a (2.146) obtemos a seguinte equação elíptica para quase todo $t\in(0,T)$:

$$\begin{cases} -\Delta\phi = 0 \text{ em } \Omega,\\ \phi = 0 \text{ em } \Gamma. \end{cases} \tag{2.147}$$

Multiplicando (2.147) por ϕ temos

$$\int_\Omega |\nabla\phi|^2\, dx = 0,$$

o que implica que $\phi \equiv 0$, resultando em uma contradição.

Agora, vamos considerar o outro caso.

(b) $\phi \equiv 0$.

Definindo

$$c_k := \left[\int_0^T \int_\Omega |\phi_k|^2 \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega |\psi_k|^2 \, dx \, dt\right]^{1/2}, \tag{2.148}$$

$$\hat{\phi}_k = \frac{1}{c_k}\phi_k \quad \text{e} \quad \hat{\psi}_k = \frac{1}{c_k}\psi_k, \tag{2.149}$$

obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega |\hat{\phi}_k|^2 \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega |\hat{\psi}_k|^2 \, dx \, dt &= \int_0^T \int_\Omega \frac{|\phi_k|^2 + |\psi_k|^2}{|c_k|^2} \, dx \, dt \\ &= \frac{1}{|c_k|^2} \int_0^T \int_\Omega |\phi_k|^2 + |\psi_k|^2 \, dx \, dt \\ &= \frac{\int_0^T \int_\Omega |\phi_k|^2 + |\psi_k|^2 \, dx \, dt}{\int_0^T \int_\Omega |\phi_k|^2 + |\psi_k|^2 \, dx \, dt} \\ &= 1.\end{aligned} \tag{2.150}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\hat{E}_k(t) &= \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |\hat{\psi}_k|^2 \, dx + \int_\Omega |\hat{\phi}_k'|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla \hat{\phi}_k|^2 \, dx\right] \\ &= \frac{1}{2c_k^2}\left[\int_\Omega |\psi_k|^2 \, dx + \int_\Omega |\phi_k'|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla \phi_k|^2 \, dx\right],\end{aligned}$$

isto é,

$$\hat{E}_k(t) = \frac{E_k(t)}{c_k^2}. \tag{2.151}$$

Por outro lado, integrando (2.83) de 0 a T, deduzimos

$$\begin{aligned}E_k(T) = E_k(0) - \alpha \int_0^T \int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{4}} b(x)\psi_k|^2 \, dx \, dt \\ - \int_0^T \int_\Omega a(x)|\phi_k'|^2 \, dx \, dt + \int_0^T \int_\omega |\psi_k|^2 \phi_k' \, dx \, dt.\end{aligned} \tag{2.152}$$

Do fato que $E_k(t) \geq E_k(T)$ para todo $t \in [0,T]$ e considerando (2.152), obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T E_k(t)\,dt &\geq T E_k(T) \\ &= T E_k(0) - \alpha T \int_0^T \int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{4}} b(x)\psi_k|^2\,dx\,dt \\ &- T \int_0^T \int_\Omega a(x)|\phi_k'|^2\,dx\,dt + T \int_0^T \int_\omega |\psi_k|^2 \phi_k'\,dx\,dt.\end{aligned} \tag{2.153}$$

Somando (2.133) e (2.153), usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e considerando a Hipótese (2.1), inferimos

$$\begin{aligned}T E_k(0) &\leq \alpha T \int_0^T \int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{4}} b(x)\psi_k|^2\,dx + T \int_0^T \int_\Omega a(x)|\phi_k'|^2\,dx - T \int_0^T \int_\Omega |\psi_k|^2 \phi_k'\,dx\,dt \\ &+ C E_k(0) + C \int_0^T \int_\Omega |\phi_k|^2\,dx\,dt + C \int_0^T \int_\Omega |\psi_k|^2\,dx\,dt \\ &\leq \alpha T \int_0^T \int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{4}} b(x)\psi_k|^2\,dx + T \int_0^T \int_\Omega a(x)|\phi_k'|^2\,dx + C E_k(0) \\ &+ C \int_0^T \int_\Omega |\phi_k|^2\,dx\,dt + C \int_0^T \int_\Omega |\psi_k|^2\,dx\,dt \\ &+ \left(\frac{a_0^{-1} b_0^{-1} d T}{2}\right) \int_0^T \int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{4}} b(x)\psi|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2} T \int_0^T \int_\Omega a(x)|\phi_k'|^2\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}T E_k(0) &\leq \left(\alpha + \frac{a_0^{-1} b_0^{-4} d}{2} + \frac{3}{2}\right) T \left\{\int_0^T \int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{4}} b(x)\psi_k|^2\,dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega a(x)|\phi_k'|^2\,dx\,dt\right\} \\ &+ C E_k(0) + C \int_0^T \int_\Omega |\phi_k|^2\,dx\,dt + C \int_0^T \int_\Omega |\psi_k|^2\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Da última desigualdade vem que, para um T grande,

$$\begin{aligned}E_k(0) \leq C(T, a_0, b_0, \alpha, d) &\left(\int_0^T \int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{4}} b(x)\psi_k|^2\,dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega a(x)|\phi_k'|^2\,dx\,dt\right. \\ &\left.\int_0^T \int_\Omega |\phi_k|^2\,dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega |\psi_k|^2\,dx\,dt\right).\end{aligned} \tag{2.154}$$

Tendo em mente que $E_k(t) \leq E_k(0)$ para todo $t \in [0,T]$, aplicando a desigualdade

(2.154) e dividindo ambos os lados por $\int_0^T\int_\Omega|\phi_k|^2\,dx\,dt+\int_0^T\int_\Omega|\psi_k|^2\,dx\,dt$ vale que

$$\begin{aligned}&\frac{E_k(t)}{\int_0^T\int_\Omega|\phi_k|^2\,dx\,dt+\int_0^T\int_\Omega|\psi_k|^2\,dx\,dt}\\&\leq C(T,a_0,b_0,\alpha,d)\left(\frac{\int_0^T\int_\Omega|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_k|^2\,dx\,dt+\int_0^T\int_\Omega a(x)|\phi_k'|^2\,dx\,dt}{\int_0^T\int_\Omega|\phi_k|^2\,dx\,dt+\int_0^T\int_\Omega|\psi_k|^2\,dx\,dt}\right.\\&\qquad\left.+1\right).\end{aligned}\tag{2.155}$$

De (2.136), temos

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\int_0^T\int_\Omega|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_k|^2\,dx\,dt+\int_0^T\int_\Omega a(x)|\phi_k'|^2\,dx\,dt}{\int_0^T\int_\Omega|\phi_k|^2\,dx\,dt+\int_0^T\int_\Omega|\psi_k|^2\,dx\,dt}=0,\tag{2.156}$$

então, de (2.155) e (2.156), existe $M>0$ tal que

$$\frac{E_k(t)}{c_k^2}\leq C(T,a_0,b_0,\alpha,d)(M+1),\ \text{para todo } t\in[0,T] \text{ e para todo } k\in\mathbb{N}.\tag{2.157}$$

Consequentemente, de (2.151) e (2.157) resulta que

$$\hat{E}_k(t)\leq C(T,a_0,b_0,\alpha,d)(M+1),\ \text{para todo } t\in[0,T]\ \text{ e para todo } k\in\mathbb{N}.\tag{2.158}$$

Em particular, de (2.156) deduzimos

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}\int_0^T\int_\Omega a(x)|\hat{\phi}_k'|^2\,dx\,dt&=\lim_{k\to+\infty}\frac{\int_0^T\int_\Omega a(x)|\phi_k'|^2\,dx\,dt}{\int_0^T\int_\Omega|\phi_k|^2\,dx\,dt+\int_0^T\int_\Omega|\psi_k|^2\,dx\,dt}\\&=0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}\int_0^T\int_\Omega|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\hat{\psi}_k|^2\,dx\,dt&=\lim_{k\to+\infty}\frac{\int_0^T\int_\Omega|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}b(x)\psi_k|^2\,dx\,dt}{\int_0^T\int_\Omega|\phi_k|^2\,dx\,dt+\int_0^T\int_\Omega|\psi_k|^2dxdt}\\&=0,\end{aligned}\tag{2.159}$$

e de (2.158), para uma subsequência $\{\hat{\psi}_k,\hat{\phi}_k\}$, que ainda denotaremos da mesma forma, tal que

$$\hat{\psi}_k\overset{*}{\rightharpoonup}\hat{\psi}\ \text{ em }\ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\tag{2.160}$$

$$\hat{\phi}_k\overset{*}{\rightharpoonup}\hat{\phi}\ \text{ em }\ L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),\tag{2.161}$$

$$\hat{\phi}_k'\overset{*}{\rightharpoonup}\hat{\phi}'\ \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).\tag{2.162}$$

Temos também, pelo resultado de compacidade (Aubin-Lions), que

$$\hat{\phi}_k \to \hat{\phi} \text{ fortemente em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.163}$$

Além disso, $\hat{\phi}_k$ satisfaz a equação

$$\begin{cases} \hat{\phi}_k'' - \Delta\hat{\phi}_k + a(x)\hat{\phi}_k' = \frac{|\psi_k|^2}{c_k}\chi_\omega \text{ em } \Omega\times(0,T), \\ \hat{\phi}_k = 0 \text{ em } \Gamma\times(0,T), \\ \hat{\phi}_k' \longrightarrow 0 \text{ fortemente em } L^2(0,T;L^2(\omega)). \end{cases}$$

Passando o limite quando $k\to+\infty$ e considerando as convergências acima, temos

$$\begin{cases} \hat{\phi}'' - \Delta\hat{\phi} = 0 \text{ em } \Omega\times(0,T), \\ \hat{\phi} = 0 \text{ em } \Gamma\times(0,T), \\ \hat{\phi}' = 0 \text{ q. s. em } \omega\times(0,T). \end{cases} \tag{2.164}$$

Então, $v = \hat{\phi}'$ verifica, no sentido distribucional,

$$\begin{cases} v'' - \Delta v = 0 \text{ em } D'(\Omega\times(0,T)), \\ v = 0 \text{ em } \Gamma\times(0,T), \\ v = 0 \text{ q. s. em } \omega\times(0,T). \end{cases}$$

Aplicando o teorema de Holmgren novamente, temos $v = \hat{\phi}' = 0$. Retornando para (2.164), obtemos, para quase todo $t\in(0,T)$, que

$$\begin{cases} -\Delta\hat{\phi} = 0 \text{ em } \Omega, \\ \hat{\phi} = 0 \text{ em } \Gamma. \end{cases} \tag{2.165}$$

Multiplicando a equação acima de $\hat{\phi}$, deduzimos

$$0 = -\int_\Omega \Delta\hat{\phi}\,\hat{\phi}\,dx = \int_\Omega |\nabla\hat{\phi}|^2\,dx,$$

isto é, $\hat{\phi} = 0$.

Além disso, temos também que $\hat{\psi}_k$ satisfaz a equação

$$\begin{cases} i\hat{\psi}_k' + \Delta\hat{\psi}_k + i\alpha b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\hat{\psi}_k = \hat{\phi}_k\psi_k\chi_\omega \text{ em } \Omega\times(0,T), \\ \hat{\psi}_k = 0 \text{ em } \Gamma\times(0,T), \\ \hat{\psi}_k(0) = \hat{\psi}_k^0 \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.166}$$

Agora, podemos usar o efeito regularizante de Aloui enunciado no Teorema 1.36. De fato, primeiramente, reescrevemos a solução regular $\hat{\psi}_k$ de (2.166) da seguinte forma: $\hat{\psi}_k = z_k + w_k$, onde z_k é uma solução de

$$\begin{cases} iz_k' + \Delta z_k + i\alpha b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}} b(x) z_k = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ z_k = 0 \text{ em } \Gamma \times (0,T), \\ z_k(0) = \hat{\psi}_k^0 \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{2.167}$$

e w é uma solução do problema

$$\begin{cases} iw_k' + \Delta w_k + i\alpha b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}} b(x) w_k = \hat{\phi}_k \psi_k \chi_\omega \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ w_k = 0 \text{ em } \Gamma \times (0,T), \\ w_k(0) = 0 \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.168}$$

Como $\hat{\psi}_k$ é uma solução regular de (2.166), temos que $(\hat{\psi}_k)$ e w_k satisfazem as equações integrais

$$\hat{\psi}_k = S(t)\hat{\psi}_k(0) + \int_0^T S(T-\tau) F(\psi_k)(\tau)\, d\tau \tag{2.169}$$

e

$$w_k = \int_0^T S(T-\tau) F(\psi_k)(\tau)\, d\tau, \tag{2.170}$$

onde $S(t)$ é o semigrupo gerado por

$$A : D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$
$$y \mapsto Ay := i\Delta y - b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}} b(x) y,$$

e $F(\psi_k) := \hat{\phi}_k \psi_k \chi_\omega$.

Observe que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega |F(\psi_k)|^2\, dx dt &\le \int_0^T \left(\int_\omega |\hat{\phi}_k|^4\, dx \right)^{1/2} \left(\int_\omega |\psi_k|^4\, dx \right)^{1/2} dt \\ &= \int_0^T ||\hat{\phi}_k(t)||^2_{L^4(\omega)} ||\psi_k(t)||^2_{L^4(\omega)}\, dt \\ &\le C ||\hat{\phi}_k||^2_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \int_0^T ||\psi_k(t)||^2_{L^4(\omega)}\, dt. \end{aligned} \tag{2.171}$$

Então, por (2.143), (2.161) e (2.171), temos

$$F(\psi_k) \to 0 \;\text{ fortemente em }\; L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.172}$$

Empregando o efeito regularizante dado em (1.5), inferimos

$$\|w_k\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \le C \|F(\psi_k)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}, \tag{2.173}$$

onde

$$w_k = \int_0^t S(t-\tau)F(\psi_k)(\tau)\,d\tau.$$

Além disso, ainda pelo efeito regularizante dado no Teorema 1.36 vem que

$$\|\varphi z_k\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C\|\hat{\psi}_{k0}\|_{L^2(\Omega)}, \ \forall \varphi \in C^\infty((0,T)). \tag{2.174}$$

Agora, sejam $\varepsilon > 0$ e $\varphi \in C^\infty((0,T))$ tais que $0 \leq \varphi \leq 1$, onde

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, \text{ em } [\varepsilon, T-\varepsilon], \\ 0, \text{ em } \left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right] \cup \left[T - \frac{\varepsilon}{2}, T\right]. \end{cases} \tag{2.175}$$

De (2.173), segue que

$$\begin{aligned} \|\hat{\psi}_k\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} &\leq \|z_k\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|w_k\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\ &\leq \|z_k\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + C\|F(\psi_k)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \end{aligned} \tag{2.176}$$

Por outro lado, de (2.174), lembrando que $\varphi = 1$ em $[\varepsilon, T-\varepsilon]$ e o fato que $\hat{\psi}_k := z_k + w_k \in C([0,T], D(A))$, temos

$$\begin{aligned} \|z_k\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} &\leq \|z_k\|_{L(0,\varepsilon;H_0^1(\Omega))} + \|\varphi z_k\|_{L^2(\varepsilon,T-\varepsilon,H_0^1(\Omega))} + \|z_k\|_{L^2(T-\varepsilon,T;H_0^1(\Omega))} \\ &\leq 2\varepsilon \max_{t\in[0,T]}\|z_k\|_{H_0^1(\Omega)} + C\|\hat{\psi}_{k0}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.177}$$

Além disso, combinando (2.158), (2.176) e (2.177),

$$\begin{aligned} \|\hat{\psi}_k\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} &\leq 2\varepsilon C + C\|\hat{\psi}_{k0}\|_{L^2(\Omega)} + C\|F(\psi_k)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\leq C(T,L), \end{aligned}$$

o que nos permite dizer que

$$\{\hat{\psi}_k\} \text{ é limitada em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.178}$$

uma vez que ε é arbitrário.

Recordando (2.166), temos que para quase todo $t \in (0,T)$

$$\hat{\psi}_k' = i\Delta\hat{\psi}_k - \alpha b(x)(-\Delta)^{\frac{1}{2}}b(x)\hat{\psi}_k - i\hat{\phi}_k\psi_k\chi_\omega \in H^{-1}(\Omega).$$

Portanto,

$$\{\hat{\psi}_k'\} \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.179}$$

Combinando (2.178), (2.179) e a imersão $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, pelo Teorema de Aubin-Lions, temos

$$\hat{\psi}_k \to \hat{\psi} \text{ fortemente em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.180}$$

Além disso, de (2.159), (2.180) e (2.144), temos

$$\hat{\psi}_k \to \tilde{\psi} \text{ fortemente em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.181}$$

onde

$$\tilde{\psi} = \begin{cases} \hat{\psi}, & \text{em } \Omega \setminus \omega, \\ 0, & \text{em } \omega. \end{cases}$$

Note que se $\hat{\psi} = 0$, por (2.163), (2.181), (2.150) e observando que $\hat{\phi} = 0$, temos uma contradição.

Por outro lado, se $\hat{\psi} \neq 0$, passando o limite em (2.166), temos por (2.159) e (2.172), que

$$\begin{cases} i\hat{\psi}' + \Delta\hat{\psi} = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ \hat{\psi} = 0 \text{ em } \Gamma \times (0,T), \\ \hat{\psi} = 0 \text{ q. s. em } \omega \times (0,T), \end{cases}$$

e, pelo teorema de unicidade de Holmgren, concluímos que $\hat{\psi} = 0$ quase sempre em Ω. Portanto, temos $\hat{\psi} = 0$ e $\hat{\phi} = 0$, o que por (2.163), (2.181), (2.150) e observando que $\hat{\phi} = 0$ é uma contradição. Assim, o lema está provado. □

Combinando (2.133) e (2.134), temos

$$\int_0^T E(t)\,dt \leq C_1\,E(0) + C_2 \left[\int_0^T \underbrace{\left(\int_\Omega a(x)|\phi'|^2\,dx\,dt + \int_\Omega |(-\Delta)^{\frac{1}{4}} b(x)\psi|^2\,dx \right)}_{:=D(t)} dt \right], \tag{2.182}$$

onde $C_1 = C(R, ||a||_\infty, \|b\|_\infty, ||h||_\infty, \lambda, ||h||_{W^{1,\infty}}, k, n, \alpha, \beta, a_0, b_0, d)$ and $C_2 = C_2(T)$.

Tomando $T_0 > 0$ suficientemente grande, por (2.182), temos

$$\int_0^{T_0} E(t)\,dt \leq C_1\,E(0) + C_2 \int_0^{T_0} D(t)\,dt,$$

e podemos concluir, uma vez que $E(t)$ é não crescente, que

$$T_0\,E(T_0) \leq C_1\,E(0) + C_2 \int_0^{T_0} D(t)\,dt, \tag{2.183}$$

onde C_1 não depende de T_0, mas $C_2 = C_2(T_0)$.

Por outro lado, pela desigualdade da energia (2.86) temos

$$E(T_0) - E(0) \leq -k \int_0^{T_0} D(t)\,dt,$$

assim, segue que

$$C_2 \int_0^{T_0} D(t)\,dt \leq -\frac{C_2}{k} E(T_0) + \frac{C_2}{k} E(0). \tag{2.184}$$

Combinando (2.183) e (2.184) deduzimos

$$\left(T_0 + \frac{C_2}{k}\right) E(T_0) \leq \left(C_1 + \frac{C_2}{k}\right) E(0),$$

o que implica, escolhendo T_0 suficientemente grande, que

$$E(T_0) \leq \alpha E(0), \ \ \text{com } 0 < \alpha < 1.$$

Assim, tomando T_0 suficientemente grande, para $T > T_0$, obtemos

$$E(T) \leq E(T_0) \leq \alpha E(0).$$

Portanto,

$$E(T) \leq \alpha E(0), \ \ \text{para todo } T > T_0,$$

onde $\alpha < 1$.

Procedendo de maneira similar a feita anteriormente, de T a $2T$, deduzimos que $E(2T) \leq \alpha E(T)$, para todo $T > T_0$, e, consequentemente,

$$E(2T) \leq \alpha^2 E(0), \ \ \text{para todo } T > T_0.$$

Em geral,

$$E(nT) \leq \alpha^n E(0), \text{ para todo } T > T_0.$$

Vamos considerar, agora, $t > T_0$, então $t = nT_0 + r$ para algum $0 \leq r < T_0$. Portanto,

$$E(t) \leq E(t-r) = E(nT_0) \leq \alpha^n E(0) = \alpha^{\frac{t-r}{T_0}} E(0) = e^{\frac{t-r}{T_0} \ln \alpha} E(0),$$

o que implica a estabilidade exponencial.

Capítulo 3

Estabilidade Exponencial para Equações Acopladas de Klein-Gordon-Schrödinger

Este capítulo foi realizado em parceria com Adriana Flores de Almeida e Marcelo Moreira Cavalcanti e foi aceito para publicação em [2].

Consideremos o seguinte modelo de equações de Klein-Gordon-Schröndinger,

$$\begin{cases} i\psi_t + \Delta\psi + i\alpha b(x)(|\psi|^2+1)\psi = \phi\psi\chi_\omega \text{ em } \Omega\times(0,\infty), \\ \phi_{tt} - \Delta\phi + a(x)\phi_t = |\psi|^2\chi_\omega \text{ em } \Omega\times(0,\infty), \\ \psi = \phi = 0 \text{ em } \Gamma\times(0,\infty), \\ \psi(0) = \psi_0 \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega), \\ \phi(0) = \phi_0 \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega), \\ \phi_t(0) = \phi_1 \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{3.1}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^2$ com fronteira Γ suave e ω é um subconjunto aberto de Ω tal que $medida(\omega) > 0$, satisfazendo a condição geométrica de controle. No que segue, α é uma constante positiva e χ_ω representa a função característica, isto é, $\chi_\omega = 1$ em ω e $\chi_\omega = 0$ em $\Omega\backslash\omega$. Consideremos $a \in L^\infty(\Omega)$ e $b \in L^\infty(\Omega)$ funções não negativas tais que

$$a(x) \geq a_0 > 0 \ \text{ em } \omega, \tag{3.2}$$

$$b(x) \geq b_0 > 0 \ \text{ em } \omega. \tag{3.3}$$

Além disso,

$$\text{Se } a(x) \geq a_0 > 0 \text{ em } \Omega, \text{ então consideramos } \ \chi_\omega \equiv 1 \text{ em } \Omega,$$

$$\text{Se } b(x) \geq b_0 > 0 \text{ em } \Omega, \text{ então consideramos } \ \chi_\omega \equiv 1 \text{ em } \Omega.$$

A energia associada ao problema (3.1) é definida por

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_{\Omega} \left(|\psi(x,t)|^2 + |\nabla\phi(x,t)|^2 + |\phi_t(x,t)|^2\right) dx. \tag{3.4}$$

As seguintes hipóteses são feitas:

Hipótese 3.1 *Assumimos que $a, b \in L^\infty(\Omega)$ são funções não negativas tais que*

$$a(x) \geq a_0 > 0, \text{ em } \omega,$$

$$b(x) \geq b_0 > 0, \text{ em } \omega.$$

Além disso,

$$\text{Se } a(x) \geq a_0 > 0 \text{ em } \Omega, \text{ então consideramos } \chi_\omega \equiv 1 \text{ em } \Omega,$$

$$\text{Se } b(x) \geq b_0 > 0 \text{ em } \Omega, \text{ então consideramos } \chi_\omega \equiv 1 \text{ em } \Omega.$$

Definição 3.2 *(Condição Geométrica de Controle): ω controla geometricamente Ω, isto é, existe $T_0 > 0$ tal que toda geodésica de Ω viajando com velocidade 1 no tempo $t = 0$, encontra o conjunto ω no tempo $t < T_0$.*

Assim, o par (ω, T_0) satisfaz a condição geométrica de controle (CGC) se toda geodésica de Ω, viajando com velocidade 1 no tempo t = 0, encontra o conjunto aberto ω antes do tempo T_0.

Hipótese 3.3 *Assuma que ω satisfaz a condição geométrica de controle. O exemplo padrão é quando ω é uma vizinhança de $\overline{\Gamma(x^0)}$ onde*

$$\Gamma(x_0) := \{x \in \Gamma; (x - x^0) \cdot \nu(x) > 0\} \tag{3.5}$$

e $\nu(x)$ é o vetor unitário normal em $x \in \Gamma$.

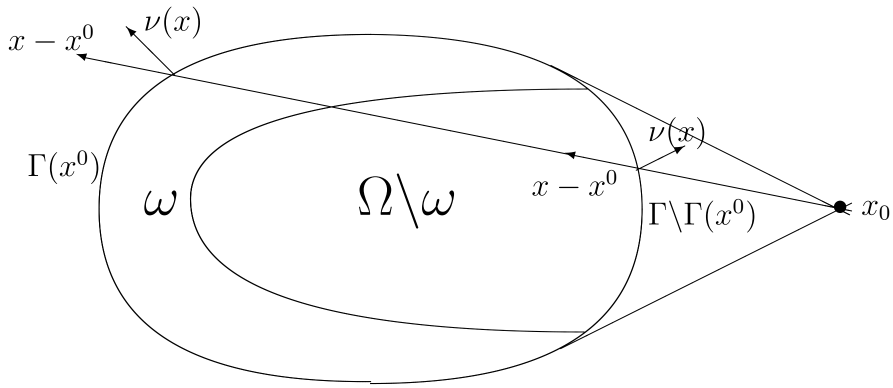

Figura 1

Vamos considerar a figura 1 (ver [67]) como um exemplo de domínio Ω satisfazendo a hipótese acima, embora exista uma ampla variedade de exemplos muito mais interessantes como aqueles considerados em Bardos, Lebeau e Rauch [10].

Como uma consequência da Hipótese (3.3) segue que existe um par (ω, T_0), com $T_0 > 0$, tal que as seguintes desigualdades de observabilidade ocorrem:

$$||\psi_0||^2_{L^2(\Omega)} \leq C \int_0^T \int_\omega |\psi(x,t)|^2 \, dx \, dt,$$

sobre o problema

$$\begin{cases} i\psi_t + \Delta\psi = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ \psi = 0 \text{ em } \Gamma \times (0,T), \\ \psi(0) = \psi_0 \in L^2(\Omega), \end{cases} \tag{3.6}$$

e

$$||\phi_1||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\phi_0||^2_{L^2(\Omega)} \leq C \int_0^T \int_\omega |\phi_t(x,t)|^2 \, dx \, dt,$$

em relação ao problema

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \Delta\phi = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ \phi = 0 \text{ em } \Gamma \times (0,T), \\ \phi(0) = \phi_0 \in H_0^1(\Omega), \\ \phi_t(0) = \phi_1 \in L^2(\Omega), \end{cases} \tag{3.7}$$

para alguma constante positiva $C = C(\omega, T_0)$ e para todo $T > T_0$. A prova de (3.6) pode ser encontrada em [69] e [64], enquanto a prova de (3.7) é estabelecida em [67] e [10].

3.1 Existência e Unicidade

Verifiquemos o resultado de existência e unicidade pelo seguinte teorema:

Teorema 3.4 *Dados* $\{\psi_0, \phi_0, \phi_1\} \in \{H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\}^2 \times H_0^1(\Omega)$, *assumindo que a Hipótese (3.1) vale e que* $\alpha \geq \dfrac{5}{2a_0b_0}$, *então, existe uma única solução regular para o problema (3.1) tal que*

$$\psi \in L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)),\ \psi' \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)),$$

$$\phi \in L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)),\ \phi' \in L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega)),$$

$$e\ \phi'' \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)).$$

Demonstração: Utilizaremos o método de Galerkin para provarmos a existência de solução para o problema (3.1), que consiste em obter, usando o teorema espectral, o problema projetado em um espaço de dimensão finita m, para cada $m \in \mathbb{N}$. Assim obtemos um problema de valor inicial equivalente envolvendo apenas equações diferenciais ordinárias. Pelo teorema de Carathéodory, segue que, para todo $m \in \mathbb{N}$, o problema correspondente possui solução local, a qual, através das estimativas a priori, independentes de t, podem ser estendidas ao intervalo $[0,T], \forall\ T > 0$, obtendo-se assim um par de sequências de funções $\{(\psi_m), (\phi_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ que convergem para a solução do sistema considerado inicialmente e satisfazem as condições iniciais do teorema. $\square$

3.1.1 Problema Aproximado

Representemos por $\{\omega_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma base em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ formada por autovetores de $-\Delta$, de acordo com o teorema espectral apresentado na Seção 1.7.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotemos por $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ o sub-espaço de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ gerado pelos m-primeiros vetores da base e definamos

$$\psi_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j \ \text{ e } \ \phi_m(t) = \sum_{j=1}^m h_{jm}(t) w_j,$$

onde $\{\psi_m(t), \phi_m(t)\}$ é a solução do seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} (\psi_m^{'}(t), w_j) + i(\nabla\psi_m(t), \nabla w_j) + \alpha(b(x)|\psi_m(t)|^2\psi_m(t), w_j) + \alpha(b(x)\psi_m(t), w_j) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = -i(\phi_m(t)\psi_m(t)\chi_\omega, w_j), \\ (\phi_m^{''}(t), w_j) + (\nabla\phi_m(t), \nabla w_j) + (a(x)\phi_m^{'}(t), w_j) = (|\psi_m(t)|^2\chi_\omega, w_j), \\ \psi_m(0) = \psi_{0m} \to \psi_0 \text{ em } H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega) \\ \phi_m(0) = \phi_{0m} \to \phi_0 \text{ em } H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega) \\ \phi_m^{'}(0) = \phi_{1m} \to \phi_1 \text{ em } H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.8}$$

com $j = 1, 2, ..., m$. O sistema aproximado (3.8) é um sistema finito de equações diferenciais ordinárias que tem solução local em algum intervalo $[0, t_m[$, em virtude do teorema de Carathéodory.

A extensão dessa solução a todo intervalo $[0, T]$, será obtida pela primeira estimativa a priori que iremos estabelecer abaixo.

3.1.2 Estimativas a Priori

Estimativa I:

Multiplicando a primeira equação de (3.8) por $\overline{g_{jm}}$ e somando em $j, 1 \leq j \leq m$, obtemos

$$\begin{aligned} &(\psi_m'(t), \psi_m(t)) + i(\nabla\psi_m(t), \nabla\psi_m(t)) + \alpha(b(x)|\psi_m(t)|^2\psi_m(t), \psi_m(t)) \\ &+ \alpha(b(x)\psi_m(t), \psi_m(t)) = -i(\phi_m(t)\psi_m(t)\chi_\omega, \psi_m(t)). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Tomando a parte real em (3.9) segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\int_\Omega b(x)|\psi_m(t)|^4\,dx + \alpha\int_\Omega b(x)|\psi_m(t)|^2\,dx = 0. \tag{3.10}$$

Assim, como $b(x) \geq b_0 > 0$ quase sempre em ω, temos

$$\alpha\int_\omega b_0|\psi_m(t)|^4\,dx \leq \alpha\int_\omega b(x)|\psi_m(t)|^4\,dx \leq \alpha\int_\Omega b(x)|\psi_m(t)|^4\,dx, \tag{3.11}$$

e também,

$$\alpha\int_\omega b_0|\psi_m(t)|^2\,dx \leq \alpha\int_\omega b(x)|\psi_m(t)|^2\,dx \leq \alpha\int_\Omega b(x)|\psi_m(t)|^2\,dx. \tag{3.12}$$

Logo, de (3.10), (3.11) e (3.12), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha b_0\|\psi_m(t)\|^4_{L^4(\omega)} + \alpha b_0\|\psi_m(t)\|^2_{L^2(\omega)} \leq 0. \tag{3.13}$$

Multiplicando (3.13) por 2 e integrando de 0 a $t, t \in [0, t_m]$, temos

$$\|\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\alpha b_0 \int_0^t \|\psi_m(s)\|^4_{L^4(\omega)}\, ds + 2\alpha b_0 \int_0^t \|\psi_m(s)\|^2_{L^2(\omega)}\, ds \le \|\psi_{0m}\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad (3.14)$$

e, observando em (3.8) que

$$\psi_m(0) = \psi_{0m} \to \psi_0 \;\text{ em }\; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

obtemos

$$\|\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\alpha b_0 \int_0^t \|\psi_m(s)\|^4_{L^4(\omega)}\, ds + 2\alpha b_0 \int_0^t \|\psi_m(s)\|^2_{L^2(\omega)}\, ds \le C(\|\psi_0\|^2_{L^2(\Omega)}), \forall m \in \mathbb{N}. \qquad (3.15)$$

De (3.15) segue que,

$$(\psi_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)), \qquad (3.16)$$

e existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\int_0^\infty \|\psi_m(s)\|^4_{L^4(\Omega)}\, dx \le C_1 = C(\|\psi_0\|_{L^2(\Omega)}), \qquad (3.17)$$

$$\int_0^\infty \|\psi_m(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dx \le C_2 = C(\|\psi_0\|_{L^2(\Omega)}). \qquad (3.18)$$

Multiplicando a segunda equação de (3.8) por $h'_{jm}(t)$, ainda somando em $j, 1 \le j \le m$, obtemos

$$(\phi''_m(t), \phi'_m(t)) + (\nabla\phi_m(t), \nabla\phi'_m(t)) + (a(x)\phi'_m(t), \phi'_m(t)) = (|\psi_m(t)|^2\chi_\omega, \phi'_m(t)). \qquad (3.19)$$

Vejamos que pela desigualdade de Hölder e Young e, uma vez que, $a(x) \ge a_0 > 0$ em ω, temos

$$\begin{aligned}
(|\psi_m(t)|^2\chi_\omega, \phi'_m(t)) &= \int_\omega |\psi_m(t)|^2 |\phi'_m(t)|\, dx \\
&\le \left(\int_\omega |\psi_m(t)|^4\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\omega |\phi'_m(t)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \left(\int_\omega |\psi_m(t)|^4\, dx\right)^{\frac{1}{2}} a_0^{-\frac{1}{2}} \left(\int_\omega a_0 |\phi'_m(t)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \frac{1}{2a_0} \int_\omega |\psi_m(t)|^4\, dx + \frac{1}{2}\int_\omega a(x)|\phi'_m(t)|^2\, dx \\
&\le \frac{1}{2a_0} \int_\omega |\psi_m(t)|^4\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\phi'_m(t)|^2\, dx.
\end{aligned} \qquad (3.20)$$

Assim, de (3.19) temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\phi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2) + \int_\Omega a(x)|\phi_m'(t)|^2\,dx = \int_\omega |\psi_m(t)|^2\phi_m'(t)\,dx. \tag{3.21}$$

Então, de (3.21) e (3.20) obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\phi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2) + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\phi_m'(t)|^2\,dx \leq \frac{1}{2a_0}\int_\omega |\psi_m(t)|^4\,dx, \tag{3.22}$$

e, uma vez que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\phi_m'(t)|^2\,dx \geq 0,$$

segue que,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\phi_m'(t)\|^2 + \|\nabla\phi_m(t)\|^2) \leq \frac{1}{2a_0}\|\psi_m(t)\|_{L^4(\omega)}^4. \tag{3.23}$$

Multiplicando (3.23) por 2 e integrando de 0 a $t, t \in [0, t_m]$, temos

$$\|\phi_m'(t)\|^2 + \|\nabla\phi_m(t)\|^2 \leq \|\phi_{1m}\|^2 + \|\nabla\phi_{0m}\|^2 + \frac{1}{a_0}\int_0^t \|\psi_m(s)\|_{L^4(\omega)}^4\,ds, \tag{3.24}$$

e observando em (3.8) que

$$\phi_m(0) = \phi_{0m} \to \phi_0 \text{ em } H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega), \tag{3.25}$$

$$\phi_m'(0) = \phi_{1m} \to \phi_1 \text{ em } H_0^1(\Omega), \tag{3.26}$$

de (3.25), (3.26) e (3.17), concluímos que

$$\|\phi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(\|\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\phi_1\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_0\|_{L^2(\Omega)}). \tag{3.27}$$

Logo,

$$\begin{cases} \sup\limits_{t\in(0,+\infty)} \text{ess}\|\phi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(\|\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\phi_1\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_0\|_{L^2(\Omega)}), \forall m \in \mathbb{N}, \\ \sup\limits_{t\in(0,+\infty)} \text{ess}\|\nabla\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(\|\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\phi_1\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_0\|_{L^2(\Omega)}), \forall m \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.28}$$

Portanto,

$$(\phi_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega)), \tag{3.29}$$

$$(\phi_m') \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)). \tag{3.30}$$

Estimativa II:

Derivando a primeira equação do sistema (3.8), multiplicando por $\overline{g'_{jm}(t)}$ e somando em $j, 1 \leq j \leq m$, obtemos

$$\begin{aligned}(\psi''_m(t), \psi'_m(t)) + i(\nabla\psi'_m(t), \nabla\psi'_m(t)) + \alpha([b(x)|\psi_m(t)|^2\psi_m(t)]', \psi'_m(t)) \\ + \alpha([b(x)\psi_m(t)]', \psi'_m(t)) = -i([\phi_m(t)\psi_m(t)\chi_\omega]', \psi'_m(t)).\end{aligned} \tag{3.31}$$

Considerando

$$\begin{aligned}I_1 &:= ([b(x)|\psi_m(t)|^2\psi_m(t)]', \psi'_m(t)) \\ &= (2b(x)|\psi_m(t)|^2\psi'_m(t) + b(x)(\psi_m(t))^2\overline{\psi'_m(t)}, \psi'_m(t)) \\ &= 2\int_\Omega b(x)|\psi_m(t)|^2\psi'_m(t)\overline{\psi'_m(t)}\,dx + \int_\Omega b(x)(\psi_m(t))^2\overline{\psi'_m(t)\psi'_m(t)}\,dx \\ &= 2\int_\Omega b(x)|\psi_m(t)|^2|\psi'_m(t)|^2\,dx + \int_\Omega b(x)(\psi_m(t)\overline{\psi'_m(t)})^2\,dx,\end{aligned} \tag{3.32}$$

e lembrando que

$$2[Re(z_1\overline{z_2})]^2 = |z_1|^2|z_2|^2 + Re[(z_1\overline{z_2})]^2, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

temos

$$Re[(\psi_m(t)\overline{\psi'_m(t)})]^2 = 2[Re(\psi_m(t)\overline{\psi'_m(t)})]^2 - |\psi_m(t)|^2|\psi'_m(t)|^2.$$

Assim, tomando a parte real de I_1 vem que

$$\begin{aligned}Re(I_1) = 2\int_\Omega b(x)|\psi_m(t)|^2|\psi'_m(t)|^2\,dx + 2\int_\Omega b(x)[Re(\psi_m(t)\overline{\psi'_m(t)})]^2\,dx \\ - \int_\Omega b(x)|\psi_m(t)|^2|\psi'_m(t)|^2\,dx,\end{aligned}$$

ou seja,

$$Re(I_1) = \int_\Omega b(x)|\psi_m(t)|^2|\psi'_m(t)|^2\,dx + 2\int_\Omega b(x)[Re(\psi_m(t)\overline{\psi'_m(t)})]^2\,dx. \tag{3.33}$$

Assim, como $b(x) \geq b_0 > 0$ em ω, temos

$$\begin{aligned}b_0\int_\omega |\psi_m(t)|^2|\psi'_m(t)|^2\,dx + 2b_0\int_\omega [Re(\psi_m(t)\overline{\psi'_m(t)})]^2\,dx \\ \leq \int_\Omega b(x)|\psi_m(t)|^2|\psi'_m(t)|^2\,dx + \int_\Omega b(x)[Re(\psi_m(t)\overline{\psi'_m(t)})]^2\,dx.\end{aligned} \tag{3.34}$$

Agora, seja

$$
\begin{aligned}
I_2 &:= -i((\phi_m(t)\psi_m(t)\chi_\omega)', \psi_m'(t)) \\
&= -i\int_\omega (\phi_m'(t)\psi_m(t) + \phi_m(t)\psi_m'(t))\overline{\psi_m'(t)}\,dx \\
&= -i\int_\omega \phi_m'(t)\psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}\,dx - i\int_\omega \phi_m(t)|\psi_m'(t)|^2\,dx.
\end{aligned}
$$

Considerando a parte real de I_2, temos

$$
\begin{aligned}
Re(I_2) &= Re\left(-i\int_\omega \phi_m'(t)\psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}\,dx - i\int_\omega \phi_m(t)|\psi_m'(t)|^2\,dx\right) \\
&= Re\left(-i\int_\omega \phi_m'(t)\psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)}\,dx\right) \\
&\le \int_\omega |\phi_m'(t)||\psi_m(t)||\psi_m'(t)|\,dx \\
&\le \left(\int_\omega |\phi_m'(t)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\omega |\psi_m(t)|^2|\psi_m'(t)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le a_0^{-\frac{1}{2}}\left(\int_\omega a_0|\phi_m'(t)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\omega |\psi_m(t)|^2|\psi_m'(t)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le a_0^{-\frac{1}{2}}\left(\int_\omega a(x)|\phi_m'(t)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\omega |\psi_m(t)|^2|\psi_m'(t)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\phi_m'(t)|^2\,dx + \frac{1}{2a_0}\int_\omega |\psi_m(t)|^2|\psi_m'(t)|^2\,dx.
\end{aligned} \tag{3.35}
$$

Tomando a parte real de (3.31), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha b_0\int_\omega |\psi_m(t)|^2|\psi_m'(t)|^2\,dx + 2\alpha b_0\int_\omega [Re(\psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)})]^2\,dx \\
&+ \alpha b_0\|\psi_m'(t)\|^2_{L^2(\omega)} \le \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\phi_m'(t)|^2\,dx + \frac{1}{2a_0}\int_\omega |\psi_m(t)|^2|\psi_m'(t)|^2\,dx,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\alpha b_0 - \frac{1}{2a_0}\right)\int_\omega |\psi_m(t)|^2|\psi_m'(t)|^2\,dx + 2\alpha b_0\int_\omega [Re(\psi_m(t)\overline{\psi_m'(t)})]^2\,dx \\
&\qquad + \alpha b_0\|\psi_m'(t)\|^2_{L^2(\omega)} \le \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\phi_m'(t)|^2\,dx.
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

Derivando a segunda equação do sistema (3.8), obtemos

$$
(\phi_m'''(t), \phi_m''(t)) + (\nabla\phi_m'(t), \nabla\phi_m''(t)) + (a(x)\phi_m''(t), \phi_m''(t)) = ([|\psi_m(t)|^2\chi_\omega]', \phi_m''(t)). \tag{3.37}
$$

Definindo $I_3 := ([|\psi_m(t)|^2\chi_\omega]', \phi''_m(t))$, temos

$$I_3 = \int_\omega (\psi'_m(t)\overline{\psi_m(t)} + \psi_m(t)\overline{\psi'_m(t)})\phi''_m(t)\,dx, \tag{3.38}$$

e

$$\psi'_m(t)\overline{\psi_m(t)} + \psi_m(t)\overline{\psi'_m(t)} = 2Re(\overline{\psi_m(t)}\psi'_m(t)) \leq 2|\psi_m(t)||\psi'_m(t)|. \tag{3.39}$$

Assim, tomando a parte real em (3.38) e considerando (3.39) segue que

$$\begin{aligned} Re(I_3) &\leq 2\int_\omega |\psi_m(t)||\psi'_m(t)||\phi''_m(t)|\,dx \\ &\leq 2\left(\int_\omega |\psi_m(t)|^2|\psi'_m(t)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\omega |\phi''_m(t)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\left(\int_\omega |\psi_m(t)|^2|\psi'_m(t)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} a_0^{-\frac{1}{2}}\left(a_0\int_\omega |\phi''_m(t)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{2}{a_0}\int_\omega |\psi_m(t)|^2|\psi'_m(t)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\phi''_m(t)|^2\,dx. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Então, de (3.37) e (3.40) concluímos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\phi''_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\phi''_m(t)|^2\,dx \leq \frac{2}{a_0}\int_\Omega |\psi_m(t)|^2|\psi'_m(t)|^2\,dx. \tag{3.41}$$

Somando (3.22), (3.36) e (3.41), obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\psi'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi''_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\ &+\left(\alpha b_0 - \frac{1}{2a_0} - \frac{2}{a_0}\right)\int_\omega |\psi_m(t)|^2|\psi'_m(t)|^2\,dx + 2b_0\int_\omega [Re(\psi_m(t)\overline{\psi'_m(t)})]^2\,dx \\ &\alpha b_0\|\psi'_m(t)\|^2_{L^2(\omega)} + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\phi'_m(t)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\phi''_m(t)|^2\,dx \leq \frac{1}{2a_0}\|\psi_m(t)\|^4_{L^4(\omega)}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Assim, considerando que $\alpha \geq \dfrac{5}{2a_0b_0}$, temos

$$\left(\alpha b_0 - \frac{1}{2a_0} - \frac{2}{a_0}\right)\int_\omega |\psi_m(t)|^2|\psi'_m(t)|^2\,dx \geq 0 \tag{3.43}$$

e, como

$$2\alpha b_0\int_\omega [Re(\psi_m(t)\overline{\psi'_m(t)}]^2\,dx \geq 0, \quad \int_\Omega a(x)|\phi'_m(t)|^2\,dx \geq 0 \;\text{ e }\; \int_\Omega a(x)|\phi''_m(t)|^2\,dx \geq 0, \tag{3.44}$$

segue de (3.42), (3.43) e (3.44) que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\psi'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi''_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)$$
$$+ \alpha b_0\|\psi'_m(t)\|^2_{L^2(\omega)} \leq \frac{1}{2a_0}\|\psi_m(t)\|^4_{L^4(\omega)}. \tag{3.45}$$

Multiplicando (3.45) por 2 e integrando de 0 a $t, t \in [0,T]$, deduzimos

$$\|\psi'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi''_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+ 2\alpha b_0\int_0^t \|\psi'_m(s)\|^2_{L^2(\omega)}\,ds \leq (\|\psi'_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi'_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi''_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+ \|\nabla\phi'_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)}) + \frac{1}{a_0}\int_0^t \|\psi_m(s)\|^4_{L^4(\omega)}\,ds. \tag{3.46}$$

Resta-nos mostrar que os termos $\psi'_m(0)+\phi''_m(0)$ são limitados na norma de $L^2(\Omega)$. Para tal, consideremos $v = \psi'_m(0)$ na primeira equação e $\omega = \phi''_m(0)$ na segunda equação do sistema (3.8). Assim,

$$(\psi'_m(0), \psi'_m(0)) = +i(\Delta\psi_m(0), \psi'_m(0)) - \alpha(b(x)|\psi_m(0)|^2\psi_m(0), \psi'_m(0))$$
$$- \alpha(b(x)\psi_m(0), \psi'_m(0)) - i(\phi_m(0)\psi_m(0)\chi_\omega, \psi'_m(0)).$$

Consequentemente, obtemos

$$\|\psi'_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\Delta\psi_m(0)\|_{L^2(\Omega)}\|\psi'_m(0)\|_{L^2(\Omega)} + \alpha\|b\|_\infty\||\psi_m(0)|^2\psi_m(0)\|_{L^2(\Omega)}\|\psi'_m(0)\|_{L^2(\Omega)}$$
$$+ \alpha\|b\|_\infty\|\psi_m(0)\|_{L^2(\Omega)}\|\psi'_m(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi_m(0)\psi_m(0)\|_{L^2(\omega)}\|\psi'_m(0)\|_{L^2(\omega)}.$$

Logo,

$$\|\psi'_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\Delta\psi_m(0)\|_{L^2(\Omega)} + \alpha\|b\|_\infty\||\psi_m(0)|^2\psi_m(0)\|_{L^2(\Omega)}$$
$$+ \alpha\|b\|_\infty\|\psi_m(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi_m(0)\psi_m(0)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.47}$$

Note que $\psi_m(0) \in H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$, logo $|\psi_m(0)|^2\psi_m(0) \in L^2(\Omega)$, pois $\||\psi_m(0)\psi_m(0)\| = \|\psi_m(t)\|^3_{L^6(\Omega)}$. Além disso, usando as desigualdades de Hölder e Young no termo $\|\phi_m(0)\psi_m(0)\|_{L^2(\Omega)}$, obtemos

$$\|\phi_m(0)\psi_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\phi_m(0)\|_{L^4(\Omega)}\|\psi_m(0)\|_{L^4(\Omega)}$$
$$\leq \frac{1}{2}\|\phi_m(0)\|^2_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\psi_m(0)\|^2_{L^4(\Omega)}. \tag{3.48}$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}\|\psi'_m(0)\| \leq \|\Delta\psi_m(0)\|_{L^2(\Omega)} + \alpha\|b\|_\infty\|\psi_m(0)\|^3_{L^6(\Omega)} \\ + \frac{1}{2}\|\phi_m(0)\|^2_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\psi_m(0)\|^2_{L^4(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.49}$$

Observando as imersões $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega), H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ e as convergências em (3.8), concluímos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\psi'_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C, \ \ \forall m \in \mathbb{N}, \tag{3.50}$$

onde $C := C(\|\Delta\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_0\|_{L^2(\Omega)})$.

Também,

$$(\phi''_m(0), \phi''_m(0)) = (\Delta\phi_m(0), \phi''_m(0)) - (a(x)\phi'_m(0), \phi''_m(0)) + (|\psi_m(0)|^2\chi_\omega, \phi'_m(0)).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|\phi''_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\Delta\phi_m(0)\|_{L^2(\Omega)}\|\phi''_m(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|a\|_\infty\|\phi'_m(0)\|_{L^2(\Omega)}\|\phi''_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \\ + \||\psi_m(0)|^2\|_{L^2(\omega)}\|\phi''_m(0)\|_{L^2(\omega)}.\end{aligned}$$

Note que,

$$\||\psi_m(0)|^2\|_{L^2(\omega)}\|\phi''_m(0)\|_{L^2(\omega)} = \|\psi_m(0)\|^2_{L^4(\omega)}\|\phi''_m(0)\|_{L^2(\omega)} \leq \|\psi_m(0)\|^2_{L^4(\Omega)}\|\phi''_m(0)\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.51}$$

ou seja,

$$\|\phi''_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\Delta\phi_m(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|a\|_\infty\|\phi'_m(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi_m(0)\|^2_{L^4(\Omega)}. \tag{3.52}$$

Observando as imersões $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega), H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ e as convergências em (3.8), concluímos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\phi''_m(0)\| \leq C, \ \ \forall m \in \mathbb{N}, \tag{3.53}$$

onde $C := C(\|\Delta\phi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_1\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_0\|_{L^2(\Omega)})$.

Por (3.46), (3.50), (3.53) e (3.17), e pelas convergências em (3.8), segue que

$$\begin{aligned}&\|\psi_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi_m''(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi_m''(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &+ 2\alpha b_0\int_0^t \|\psi_m'(s)\|^2_{L^2(\omega)}\,ds \leq C,\end{aligned} \tag{3.54}$$

onde $C := C(\|\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\Delta\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\phi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_1\|_{L^2(\Omega)})$.

Logo, de (3.54)

$$\sup_{t\in(0,+\infty)} \text{ess}(\|\psi_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi_m''(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi_m''(t)\|^2_{L^2(\Omega)}) + \|\nabla\phi_m'(t)\|^2_{L^2(\Omega)})$$
$$\leq C.$$

Portanto, concluímos que

$$(\psi_m') \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)), \tag{3.55}$$

$$(\phi_m') \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty;H_0^1(\Omega)), \tag{3.56}$$

$$(\phi_m'') \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)). \tag{3.57}$$

Estimativa III:

Retornando para (3.9) da estimativa I e tomando a parte imaginária, segue que

$$Im(\psi_m'(t),\psi_m(t)) + \|\nabla\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = -\int_\omega \phi_m(t)|\psi_m(t)|^2\,dx. \tag{3.58}$$

Definindo $I_4 := -Im(\psi_m'(t),\psi_m(t))$, temos

$$|I_4| \leq \int_\Omega |\psi_m'(t)||\psi_m(t)|\,dx = \|\psi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.59}$$

Também, definindo $I_5 := -i\int_\omega \phi_m(t)|\psi_m(t)|^2\,dx$, obtemos

$$|I_5| \leq \int_\omega |\phi_m(t)||\psi_m(t)|^2\,dx \leq \|\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\psi_m(t)\|^2_{L^4(\Omega)}. \tag{3.60}$$

Assim, de (3.55), (3.58), (3.60), e pela desigualdade de Gagliardo-Niremberg, segue que

$$\begin{aligned}\|\nabla\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \|\psi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\psi_m(t)\|^2_{L^4(\Omega)}\\ &\leq C\|\psi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + C\|\nabla\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leq C\|\nabla\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\nabla\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C,$$

onde $C := C(\|\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\Delta\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\phi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_1\|_{L^2(\Omega)})$. Assim,

$$\text{sup ess}_{t\in(0,+\infty)}\|\nabla\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C. \tag{3.61}$$

Logo,

$$(\psi_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega)). \tag{3.62}$$

Compondo a segunda equação do sistema (3.8) com $\Delta\phi_m(t)$, temos

$$(\phi_m''(t), \Delta\phi_m(t)) + (\Delta\phi_m(t), \Delta\phi_m(t)) + (a(x)\phi_m'(t), \Delta\phi_m(t)) \leq (|\psi_m(t)|^2\chi_\omega, \Delta\phi_m(t)). \tag{3.63}$$

Assim,

$$\|\Delta\phi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\phi_m''(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|a\|_\infty\|\phi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.64}$$
$$+ \int_\omega |\psi_m(t)|^2|\Delta\phi_m(t)|\,dx \tag{3.65}$$

e, pela desigualdade de Hölder e a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, segue que

$$\begin{aligned}\int_\omega |\psi_m(t)|^2|\Delta\phi_m(t)|\,dx &\leq \|\psi_m(t)\|^2_{L^4(\Omega)}\|\Delta\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c\|\nabla\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\|\Delta\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.66}$$

De (3.64) e (3.66), vem que

$$\|\Delta\phi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (\|\phi_m''(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|a\|_\infty\|\phi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)} + c\|\nabla\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)})\|\Delta\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.67}$$

Dessa forma,

$$\|\Delta\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\phi_m''(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|a\|_\infty\|\phi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)} + c\|\nabla\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.68}$$

Portanto,

$$\|\Delta\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C, \tag{3.69}$$

onde $C := C(\|\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\Delta\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\phi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_1\|_{L^2(\Omega)})$. Então,

$$\text{sup ess}_{t\in(0,+\infty)}\|\Delta\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C, \tag{3.70}$$

ou seja,

$$(\phi_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)). \tag{3.71}$$

Compondo a primeira equação do sistema (3.8) com $\Delta\psi_m(t)$ temos

$$\begin{aligned}(i\psi_m'(t), \Delta\psi_m(t)) + (\Delta\psi_m(t), \Delta\psi_m(t)) + (i\alpha b(x)|\psi_m(t)|^2\psi_m(t), \Delta\psi_m(t))\\ + (i\alpha b(x)\psi_m(t), \Delta\psi_m(t)) = (\phi_m(t)\psi_m(t)\chi_\omega, \Delta\psi_m(t)),\end{aligned} \tag{3.72}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}(\Delta\psi_m(t), \Delta\psi_m(t)) = &- (i\psi_m'(t), \Delta\psi_m(t)) - (i\alpha b(x)|\psi_m(t)|^2\psi_m(t), \Delta\psi_m(t))\\ &- (i\alpha b(x)\psi_m(t), \Delta\psi_m(t)) + (\phi_m(t)\psi_m(t)\chi_\omega, \Delta\psi_m(t)).\end{aligned} \tag{3.73}$$

Tomando a parte real em (3.73) e uma vez que $Rez \leq |z|$, temos

$$\begin{aligned}\|\Delta\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq &\int_\Omega |\psi_m'(t)||\Delta\psi_m(t)|\,dx + \alpha\int_\Omega b(x)|\psi_m(t)|^2|\psi_m(t)||\Delta\psi_m(t)|\,dx\\ &+ \int_\Omega \alpha b(x)|\psi_m(t)||\Delta\psi_m(t)|\,dx + \int_\omega |\phi_m(t)||\psi_m(t)||\Delta\psi_m(t)|\,dx\end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}\|\Delta\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq &\|\psi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \alpha\|b\|_\infty\|\psi_m(t)\|^3_{L^6(\Omega)}\|\Delta\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\\ &+ \alpha\|b\|_\infty\|\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi_m(t)\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leq \|\psi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \alpha\|b\|_\infty c\|\nabla\psi_m(t)\|^3_{L^2(\Omega)}\|\Delta\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\\ &+ \alpha\|b\|_\infty\|\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi_m(t)\|^2_{L^4(\Omega)}\|\psi_m(t)\|^2_{L^4(\Omega)}\|\Delta\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leq \|\psi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} + \alpha\|b\|_\infty c\|\nabla\psi_m(t)\|^3_{L^2(\Omega)}\|\Delta\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\\ &+ \alpha\|b\|_\infty\|\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\\ &+ c\|\nabla\phi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\|\Delta\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.74}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|\Delta\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq &\|\psi_m'(t)\|_{L^2(\Omega)} + \alpha\|b\|_\infty c\|\nabla\psi_m(t)\|^3_{L^2(\Omega)} + \alpha\|b\|_\infty\|\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)}\\ &+ \|\nabla\phi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\|\nabla\psi_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.75}$$

Portanto, de (3.16), (3.55), (3.62) e (3.71) temos

$$\|\Delta\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\phi_1\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_0\|_{L^2(\Omega)}). \tag{3.76}$$

Daí,

$$\sup_{t\in(0,+\infty)} \text{ess}\|\Delta\psi_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

Logo,

$$(\psi_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)). \tag{3.77}$$

Por outro lado, das três estimativas, obtivemos que

$$\begin{aligned}
&\psi_m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),\\
&\phi_m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),\\
&\psi_m' \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)),\\
&\phi_m' \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega)),\\
&\phi_m'' \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)).
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Em particular, dado $T > 0$, temos

$$\begin{aligned}
&\psi_m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),\\
&\phi_m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),\\
&\psi_m' \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T; L^2(\Omega)),\\
&\phi_m' \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)),\\
&\phi_m'' \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T; L^2(\Omega)),
\end{aligned} \tag{3.79}$$

(note que T é fixo, porém arbitrário), o que nos permite, pelo Lema 1.17, extrair subsequências $(\psi_k) \subset (\psi_m)$ e $(\phi_k) \subset (\phi_m)$ tais que

$$\begin{aligned}
&\psi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \psi \quad L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),\\
&\psi_k' \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad L^\infty(0,T; L^2(\Omega)),\\
&\phi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \phi \quad L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),\\
&\phi_k' \overset{*}{\rightharpoonup} v \quad L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)),\\
&\phi_k'' \overset{*}{\rightharpoonup} w \quad L^\infty(0,T; L^2(\Omega)).
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Como $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, segue que

$$\begin{aligned}
\psi_k &\rightharpoonup \psi \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)),\\
\psi_k' &\rightharpoonup u \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)),\\
\phi_k &\rightharpoonup \phi \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)),\\
\phi_k' &\rightharpoonup v \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)),\\
\phi_k'' &\rightharpoonup w \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)).
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Lembrando que $L^2(Q) \hookrightarrow D'(Q)$ e que o operador derivação é contínuo em $D'(Q)$, resultam

$$\begin{aligned}
u = \psi' &\quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\\
v = \phi' &\quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),\\
w = \phi'' &\quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),
\end{aligned} \tag{3.82}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\psi_k &\overset{*}{\rightharpoonup} \psi \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),\\
\psi_k' &\overset{*}{\rightharpoonup} \psi' \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\\
\phi_m &\overset{*}{\rightharpoonup} \phi \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),\\
\phi_m' &\overset{*}{\rightharpoonup} \phi' \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),\\
\phi_m'' &\overset{*}{\rightharpoonup} \phi'' \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Mas, como $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, pelo teorema da compacidade de Aubin-Lions e de (3.78), resulta na existência de subsequências, que ainda denotaremos por (ψ_k) e (ϕ_k), satisfazendo

$$\psi_k \longrightarrow \psi,\ \ \phi_k \longrightarrow \phi \ \text{ e } \ \phi_k' \longrightarrow \phi' \ \text{ q.s em } \ Q. \tag{3.84}$$

Daí, resulta que

$$|\psi_k(t)|^2\psi_k(t) \longrightarrow |\psi(t)|^2\psi(t) \ \text{ q.s em } \ Q. \tag{3.85}$$

Temos ainda

$$\begin{aligned}\||\psi_k(t)|^2\psi_k\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |\psi_k(t)|^6\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\le \|\psi_k(t)\|^3_{L^6(\Omega)} \le C\|\nabla\psi_k(t)\|^3_{L^2(\Omega)}\\ &\le C(\|\nabla\psi_0\|_{L^2(\Omega)}).\end{aligned}$$

Daí, sup $\text{ess}_{t\in(0,+\infty)}\||\psi_k(t)|^2\psi_k\|_{L^2(\Omega)} \le C(\|\nabla\psi_0\|_{L^2(\Omega)})$.

Logo,

$$(|\psi_k|^2\psi_k) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)).$$

Em particular,

$$(|\psi_k|^2\psi_k) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Logo,

$$(|\psi_k|^2\psi_k) \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.86}$$

De (3.85), (3.86) e do Lema de Lions, concluímos que

$$|\psi_k(t)|^2\psi_k(t) \rightharpoonup |\psi(t)|^2\psi(t) \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.87}$$

Agora, note que $|\psi_k|^2\chi_\omega$ é limitada em $L^2(0,\infty;L^2(\Omega))$. Com efeito, de (3.17)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \||\psi_k(t)|^2\chi_\omega\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt &\le \int_0^\infty \|\psi_k(t)\|^4_{L^4(\omega)}\,dt\\ &\le C,\end{aligned} \tag{3.88}$$

onde $C := C(\|\Delta\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\psi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\Delta\phi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_0\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\phi_1\|_{L^2(\Omega)})$.

Logo,

$$(|\psi_k(t)|^2\chi_\omega) \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0,\infty;L^2(\Omega)). \tag{3.89}$$

Em particular,

$$(|\psi_k(t)|^2\chi_\omega) \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.90}$$

Mas de (3.85), temos que $\psi_k(t)\chi_\omega \longrightarrow \psi(t)\chi_\omega$ q.s em Q e, portanto, $|\psi_k(t)|^2\chi_\omega \longrightarrow |\psi(t)|^2\chi_\omega$ q.s em Q. Assim, de (3.90) e pelo lema de Lions, obtemos

$$|\psi_k(t)|^2\chi_\omega \rightharpoonup |\psi(t)|^2\chi_\omega \quad \text{em} \quad L^2(Q). \tag{3.91}$$

Portanto, com as convergências obtidas, podemos passar o limite no problema aproximado (3.8).

3.1.3 Passagem ao Limite

Consideremos $j \in \mathbb{N}$ fixo e $k \in \mathbb{N}$ tais que $k \geq j$, então, multiplicando as equações do problema aproximado (3.8) por $\theta \in D(0,T)$ e integrando de 0 a T, temos

$$\begin{aligned}\int_0^T (\psi_k'(t), w_j)\theta(t)\,dt + i\int_0^T (\nabla\psi_k(t), \nabla w_j)\theta(t)\,dt + \alpha\int_0^T (b(x)|\psi_k(t)|^2\psi_k(t), w_j)\theta(t)\,dt \\ + \alpha\int_0^T (b(x)\psi_k(t), w_j)\theta(t)\,dt = -i\int_0^T (\phi_k(t), \psi_k(t)\chi_\omega, w_j)\theta(t)\,dt\end{aligned} \tag{3.92}$$

e

$$\begin{aligned}\int_0^T (\phi_k''(t), w_j)\theta(t)\,dt + \int_0^T (\nabla\phi_k(t), \nabla w_j))\theta(t)\,dt + \int_0^T (a(x)\phi_k(t), w_j)\theta(t)\,dt \\ = \int_0^T (|\psi_k(t)|^2\chi_\omega, w_j)\theta(t)\,dt.\end{aligned} \tag{3.93}$$

No primeiro termo da igualdade (3.92) sabemos que $\psi_k' \overset{*}{\rightharpoonup} \psi'$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, então

$$\int_0^T (\psi_k'(t), \xi(t))\,dt \longrightarrow \int_0^T (\psi'(t), \xi(t))\,dt, \forall\xi \in L^1(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.94}$$

quando $k \longrightarrow \infty$. Agora, tomando em particular $\xi = w_j\theta$, para todo $\theta \in D(0,T)$, vemos que $\xi \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ e, substituindo ξ em (3.94), resulta que

$$\int_0^T (\psi_k'(t), w_j)\theta(t)\,dt \longrightarrow \int_0^T (\psi'(t), w_j)\theta(t)\,dt, \forall\theta \in D(0,T), \text{ quando } k \longrightarrow \infty. \tag{3.95}$$

Analogamente, observando (3.83), (3.87) e (3.91) podemos verificar as demais convergências quando $k \longrightarrow \infty$. Desta forma, podemos passar o limite nas equações (3.92) e (3.93) quando $k \longrightarrow \infty$, ou seja,

$$\int_0^T (\psi'(t), w_j)\theta(t)\,dt + i\int_0^T (\nabla\psi(t), \nabla w_j)\theta(t)\,dt + \alpha\int_0^T (b(x)|\psi(t)|^2\psi(t), w_j)\theta(t)\,dt$$
$$+\,\alpha\int_0^T (b(x)\psi(t), w_j)\theta(t)\,dt = -i\int_0^T (\phi(t), \psi(t)\chi_\omega, w_j)\theta(t)\,dt, j = 1, ..., m,$$

e

$$\int_0^T (\phi''(t), w_j)\theta(t)\,dt + \int_0^T (\nabla\phi(t), \nabla w_j))\theta(t)\,dt + \int_0^T (a(x)\phi(t), w_j)\theta(t)\,dt$$
$$= \int_0^T (|\psi(t)|^2\chi_\omega, w_j)\theta(t)\,dt, j = 1, ..., m.$$

Como $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é um sistema completo em $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, por densidade, temos

$$\int_0^T (\psi'(t), w)\theta(t)\,dt + i\int_0^T (\nabla\psi(t), \nabla w)\theta(t)\,dt + \alpha\int_0^T (b(x)|\psi(t)|^2\psi(t), w)\theta(t)\,dt$$
$$+\,\alpha\int_0^T (b(x)\psi(t), w)\theta(t)\,dt = -i\int_0^T (\phi(t)\psi(t)\chi_\omega, w)\theta\,dt, j = 1, ..., m,$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega), \theta \in D(0,T)$, e

$$\int_0^T (\phi''(t), w)\theta(t)\,dt + \int_0^T (\nabla\phi(t), \nabla w))\theta(t)\,dt + \int_0^T (a(x)\phi(t), w)\theta(t)\,dt$$
$$= \int_0^T (|\psi(t)|^2\chi_\omega, w)\theta(t)\,dt,$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega), \theta \in D(0,T)$. Disto chegamos a

$$\langle(\psi'(t), v), \theta\rangle_{D'(0,T)\times D(0,T)} + i\langle(\nabla\psi(t), \nabla v), \theta\rangle_{D'(0,T)\times D(0,T)}$$
$$+\,\alpha\langle(b(x)|\psi(t)|^2\psi(t), v), \theta\rangle_{D'(0,T)\times D(0,T)} + \alpha\langle(b(x)\psi(t), v), \theta\rangle_{D'(0,T)\times D(0,T)}$$
$$= -i\langle(\phi(t)\psi(t)\chi_\omega, v), \theta\rangle_{D'(0,T)\times D(0,T)}$$

e

$$\langle(\phi''(t), w), \theta\rangle_{D'(0,T)\times D(0,T)} + \langle(\nabla\phi(t), \nabla w), \theta\rangle_{D'(0,T)\times D(0,T)}$$
$$\langle(a(x)\phi(t), w), \theta\rangle_{D'(0,T)\times D(0,T)} = \langle(|\psi(t)|^2\chi_\omega, w), \theta\rangle_{D'(0,T)\times D(0,T)},$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}&(\psi'(t), v) + i(\nabla\psi(t), \nabla v) + \alpha(b(x)|\psi(t)|^2\psi(t), v)\\ &+\alpha(b(x)\psi(t), v) = -i(\phi(t)\psi(t)\chi_\omega, v_j),\end{aligned} \tag{3.96}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ em $D'(0,T)$, e

$$(\phi''(t), w) + (\nabla\phi(t), \nabla w) + (a(x)\phi'(t), w) = (|\psi(t)|^2\chi_\omega, w), \tag{3.97}$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ em $D'(0,T)$.

Assim, segue que todo conjunto de soluções $\{\psi, \phi\}$ satisfazendo as equações (3.96) e (3.97), respectivamente, é solução do sistema (3.1).

3.1.4 Dados Iniciais

Notemos inicialmente que, em particular, $\psi \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(Q)$ e $\psi' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(Q)$. Então, $\psi \in H^1(0,T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow C^0([0,T]; L^2(\Omega))$. Assim, faz sentido falarmos em $\psi(0)$ e $\psi(T)$.

Seja $\theta \in C^1([0,T]; \mathbb{R})$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. De (3.95) vem que, se $k > j$ (j arbitrariamente fixado), então

$$\int_0^T (\psi_k'(t), w_j)\theta(t)\,dt \longrightarrow \int_0^T (\psi'(t), w_j)\theta(t)\,dt. \tag{3.98}$$

Integrando-se por partes, temos

$$-(\psi_k(0), w_j) - \int_0^T (\psi_k(t), w_j)\theta'(t)\,dt \longrightarrow -(\psi(0), w_j) - \int_0^t (\psi(t), w_j)\theta'(t)\,dt. \tag{3.99}$$

Agora, de (3.83) resulta que

$$\int_0^T (\psi_k(t), w_j)\theta'(t)\,dt \longrightarrow \int_0^T (\psi(t), w_j)\theta'(t)\,dt \tag{3.100}$$

o que implica que

$$-(\psi_k(0), w_j) \longrightarrow -(\psi(0), w_j) \tag{3.101}$$

Decorre daí que $\psi_k(0) \rightharpoonup \psi(0)$ em $L^2(\Omega)$. Por outro lado, de (2.8) temos

$$\psi_k(0) \rightharpoonup \psi^0 \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

o que nos leva, por conta da unicidade do limite, a concluir que $\psi(0) = \psi^0$.

Analogamente, mostra-se que $\phi(0) = \phi^0$ e $\phi'(0) = \phi^1$.

3.1.5 Unicidade

Sejam $\{\psi_1, \phi_1\}$ e $\{\psi_2, \phi_2\}$ soluções do problema (3.1). Então, $z = \psi_1 - \psi_2$ e $w = \phi_1 - \phi_2$ satisfazem:

$$\begin{cases} iz' + \Delta z + i\alpha(b(x)|\psi_1|^2\psi_1 - |\psi_2|^2\psi_2) + i\alpha b(x)z = (\phi_1\psi_1 - \phi_2\psi_2)\chi_\omega \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \\ w'' - \Delta w + a(x)w' = (|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2)\chi_\omega \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \\ w = z = 0 \text{ em } \Gamma \times (0,\infty), \\ w(0) = w'(0) = 0, z(0) = 0 \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{3.102}$$

Multiplicando a primeira equação de (3.102) por $-i$ e a compondo com z, e a segunda com w', obtemos

$$\begin{aligned} &(z'(t), z(t)) - i(\Delta z(t), z(t)) + \alpha(b(x)|\psi_1(t)|^2\psi_1(t) - b(x)|\psi_2(t)|^2\psi_2(t), z(t)) \\ &\qquad +\alpha(b(x)z(t), z(t)) = -i(\phi_1(t)\psi_1(t) - \phi_2(t)\psi_2(t))\chi_\omega, z(t)) \end{aligned} \tag{3.103}$$

e

$$(w''(t), w'(t)) - (\Delta w(t), w'(t)) + (a(x)w'(t), w'(t)) = ((|\psi_1(t)|^2 - |\psi_2(t)|^2)\chi_\omega, w'(t)). \tag{3.104}$$

Tomando a parte real da equação (3.103) e de (3.104) concluímos que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + Re[\alpha(b(x)|\psi_1(t)|^2\psi_1(t) - b(x)|\psi_2(t)|^2\psi_2(t), z(t))] \\ &+ \alpha\int_\Omega b(x)|z(t)|^2\,dx = Re[-i(\phi_1(t)\psi_1(t)\chi_\omega - \phi_2(t)\psi_2(t)\chi_\omega, z(t))] \end{aligned} \tag{3.105}$$

e

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|w'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \int_\Omega a(x)|w'(t)|^2\,dx = ((|\psi_1(t)|^2 - |\psi_2(t)|^2)\chi_\omega, w'(t))]. \tag{3.106}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} &(b(x)|\psi_1(t)|^2\psi_1(t) - b(x)|\psi_2(t)|^2\psi_2(t), \psi_1(t) - \psi_2(t)) \\ &= \int_\Omega (b(x)|\psi_1(t)|^2\psi_1(t) - b(x)|\psi_2(t)|^2\psi_2(t)(\overline{\psi_1(t)} - \overline{\psi_2(t)})\,dx \\ &= \int_\Omega (b(x)|\psi_1(t)|^2\psi_1(t)\overline{\psi_1(t)} - b(x)|\psi_1(t)|^2\psi_1(t)\overline{\psi_2(t)} \\ &- b(x)|\psi_2(t)|^2\psi_2(t)\overline{\psi_1(t)} + b(x)|\psi_2(t)|^2\psi_2(t)\overline{\psi_2(t)})\,dx \\ &= \int_\Omega (b(x)|\psi_1(t)|^4 + b(x)|\psi_2(t)|^4 - b(x)|\psi_1(t)|^2\psi_1(t)\overline{\psi_2(t)} - b(x)|\psi_2(t)|^2\psi_2(t)\overline{\psi_1(t)})\,dx. \end{aligned} \tag{3.107}$$

Então, usando o fato que $Re(z_1\overline{z_2}) = Re(\overline{z_1}z_2)$ e $Rez \leq |z|$, obtemos

$$\begin{aligned}
&Re(b(x)|\psi_1(t)|^2\psi_1(t) - b(x)|\psi_2(t)|^2\psi_2(t), \psi_1(t) - \psi_2(t)) \\
&= \int_\Omega [b(x)|\psi_1(t)|^4 + b(x)|\psi_2(t)|^4 - (b(x)|\psi_1(t)|^2 - b(x)|\psi_2(t)|^2)Re(\psi_1(t)\overline{\psi_2(t)})]\, dx \\
&\geq \int_\Omega b(x)|\psi_1(t)|^4 + b(x)|\psi_2(t)|^4 - |\psi_1(t)\overline{\psi_2(t)}|(b(x)|\psi_1(t)|^2 + b(x)|\psi_2(t)|^2)\, dx \\
&= \int_\Omega (b(x)|\psi_1(t)|^4 + b(x)|\psi_2(t)|^4 - b(x)|\psi_1(t)|^3|\psi_2(t)| - b(x)|\psi_2(t)|^3|\psi_1(t)|)\, dx \\
&= \int_\Omega b(x)|\psi_1(t)|^3(|\psi_1(t)| - |\psi_2(t)|) - b(x)|\psi_2(t)|^3(|\psi_1(t)| - |\psi_2(t)|)\, dx \\
&\int_\Omega (b(x)|\psi_1(t)|^3 - b(x)|\psi_2(t)|^3)(|\psi_1(t)| - |\psi_2(t)|)\, dx.
\end{aligned} \tag{3.108}$$

Notemos que, adicionando e subtraindo o termo $\psi_2\phi_1\chi_\omega$ no lado direito da expressão (3.105), deduzimos que

$$\begin{aligned}
&([\phi_1(t)\psi_1(t) - \phi_2(t)\psi_2(t)]\chi_\omega, \psi_1(t) - \psi_2(t)) \\
&= ([\phi_1(t)(\psi_1(t) - \psi_2(t)) + \psi_2(t)(\phi_1(t) - \phi_2(t))]\chi_\omega, \psi_1(t) - \psi_2(t)) \\
&= \int_\omega [\phi_1(t)(\psi_1(t) - \psi_2(t)) + \psi_2(t)(\phi_1(t) - \phi_2(t))](\overline{\psi_1(t)} - \overline{\psi_2(t)})\, dx \\
&= \int_\omega [\phi_1(t)z(t) + \psi_2(t)\omega(t)]\overline{z(t)}\, dx \\
&= \int_\omega \phi_1(t)|z(t)|^2\, dx + \int_\omega \psi_2(t)\omega(t)\overline{z(t)}\, dx.
\end{aligned} \tag{3.109}$$

Logo, pelas desigualdades de Hölder, Young e por (3.109), temos

$$\begin{aligned}
Re(-i(\phi_1(t)\psi_1(t) - \phi_2(t)\psi_2(t))\chi_\omega, z(t)) &= Re\left(-i\int_\omega |\psi_2(t)||\omega(t)||z(t)|\, dx\right) \\
&\leq \int_\omega |\psi_2(t)||w(t)||z(t)|\, dx \\
&\leq \|\psi_2(t)\|_{L^4(\omega)}\|w(t)\|_{L^4(\omega)}\|z(t)\|_{L^2(\omega)} \\
&\leq \frac{1}{2}\|\psi_2(t)\|^2_{L^4(\Omega)}\|w(t)\|^2_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{2}\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{c}{2}\|w(t)\|^2_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{2}\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C(\|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)}).
\end{aligned} \tag{3.110}$$

Também, do lado direito da equação (3.106), temos

$$
\begin{aligned}
&Re([|\psi_1(t)|^2 - |\psi_2(t)|^2]\chi_\omega, w'(t)) \\
&= Re\left(\int_\omega (|\psi_1(t)|^2 - |\psi_2(t)|^2)\chi_\omega w'(t)\,dx\right) \\
&= Re\left(\int_\omega [\psi_1(t)\overline{\psi_1(t)} - \psi_2(t)\overline{\psi_1(t)} + \psi_2(t)\overline{\psi_1(t)} - \psi_2(t)\overline{\psi_2(t)}]w'(t)\,dx\right) \\
&= Re\left([\psi_1(t) - \psi_2(t)]\overline{\psi_1(t)}w'(t)\,dx\right) + Re\left(\int_\omega [\psi_1(t) - \overline{\psi_2(t)}]\psi_2(t)w'(t)\,dx\right) \\
&\leq \int_\omega |z(t)||\psi_1(t)||w'(t)|\,dx + \int_\omega |z(t)||\psi_2(t)||w'(t)|\,dx \\
&\leq \int_\omega (|\psi_1(t)| + |\psi_2(t)|)|z(t)||w'(t)|\,dx.
\end{aligned} \tag{3.111}
$$

Substituindo em (3.105) as expressões (3.108) e (3.110), e em (3.106) a (3.111), decorre que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega (b(x)|\psi_1(t)|^3 - b(x)|\psi_2(t)|^3)(|\psi_1(t)| - |\psi_2(t)|)\,dx + \alpha\int_\Omega b(x)|z(t)|^2\,dx \\
\leq c(\|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)})
\end{aligned} \tag{3.112}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|w'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}) + \int_\Omega a(x)|w'(t)|^2\,dx \\
\leq \int_\omega (|\psi_1(t)| + |\psi_2(t)|)|z(t)||w'(t)|\,dx.
\end{aligned} \tag{3.113}
$$

Somando as expressões (3.112) e (3.113), e levando em conta que

$$\int_\Omega (b(x)|\psi_1(t)|^3 - b(x)|\psi_2(t)|^3)(|\psi_1(t)| - |\psi_2(t)|)\,dx \geq 0$$

e

$$\alpha\int_\Omega b(x)|z(t)|^2\,dx \geq 0, \ \text{ e } \ \int_\Omega a(x)|w'(t)|^2\,dx \geq 0,$$

segue que,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}) &\leq C(\|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)}) \\
&+ \int_\omega (|\psi_1(t)| + |\psi_2(t)|)|z(t)||w'(t)|\,dx \\
&\leq C(\|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)}) + \int_\omega M|z(t)||w'(t)|\,dx \\
&\leq C(\|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)}) + \frac{M}{2}\int_\omega |z(t)|^2 + |w'(t)|^2\,dx.
\end{aligned} \tag{3.114}$$

Convém observar que a solução $(\psi_1, \psi_2) \in L^\infty(0,\infty, H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega))$. Além disso, considerando que pela imersão de Sobolev $H^2(\Omega) \hookrightarrow C_B(\Omega)$, onde

$C_B(\Omega) = \{u \in C^0(\Omega); u$ é limitada em $\Omega\}$ é um espaço de Banach, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}) \leq C(\|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}). \tag{3.115}$$

Multiplicando (3.115) por 2, integrando de 0 a $t, t \in [0,T]$, e observando em (3.102) que $w(0) = w'(0) = 0$ e $z(0) = 0$ em Ω, obtemos a seguinte desigualdade

$$\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2C\int_0^t (\|z(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w'(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w(s)\|^2_{L^2(\Omega)})\,ds.$$

Finalmente, aplicando o Lema de Gronwall na expressão anterior chegamos a

$$\|z(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 0, \ \ \forall t \in [0,T].$$

Então, segue que $z = 0$ e $w = 0$, ou seja, $\psi_1 = \psi_2$ e $\phi_1 = \phi_2$.

Portanto, provamos a unicidade de soluções do problema (3.1), o que conclui a prova do teorema.

Agora, lembremos que da primeira estimativa a priori temos

$$(\psi_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)).$$

Assim, pela Proposição 1.15,

$$\begin{aligned}
\|\psi(t)\|_{L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))} &\leq \liminf_m \|\psi_m(t)\|_{L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))} \\
&\leq C(\|\psi_0\|_{L^2(\Omega)}).
\end{aligned}$$

Logo,

$$(\psi) \quad \text{é limitada em} \quad L^{\infty}(0,\infty;L^2(\Omega)).$$

Prosseguindo de maneira análoga, segue que todas as limitações obtidas nas estimativas a priori são válidas para $\{\psi,\phi\}$, o que nos permite dizer que

$$\psi \in L^{\infty}(0,\infty;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),\ \psi^{'} \in L^{\infty}(0,\infty;L^2(\Omega)),$$
$$\phi \in L^{\infty}(0,\infty;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),\ \phi^{'} \in L^{\infty}(0,\infty;H_0^1(\Omega)),$$
$$\text{e } \phi^{''} \in L^{\infty}(0,\infty;L^2(\Omega)).$$

Assim, o teorema está provado.

3.2 Decaimento Uniforme

Nesta seção vamos trabalhar com soluções regulares $\{\psi(t),\phi(t),\phi_t(t)\}$ para o problema (3.1), isto é, aquelas que estão em $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$, e tomando $\{\psi_0,\phi_0,\phi_1\}\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega) := \mathcal{H}$, tais que $\|\{\psi_0,\phi_0,\phi_1\}\|_{\mathcal{H}} \le L$, onde $L>0$. Assim, pela primeira equação do problema (3.1), temos

$$\psi' - i\Delta\psi + \alpha b(x)(|\psi|^2+1)\psi = -i\phi\psi\chi_{\omega}. \tag{3.116}$$

Multiplicando (3.116) por $\overline{\psi}$ e integrando em Ω, temos

$$\int_{\Omega}\psi'\overline{\psi}\,dx + i\int_{\Omega}|\nabla\psi|^2\,dx + \alpha\int_{\Omega} b(x)(|\psi|^4+|\psi|^2)\,dx = -i\int_{\omega}\phi|\psi|^2\,dx. \tag{3.117}$$

Tomando a parte real em (3.117), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\int_{\Omega}(b(x)(|\psi|^4+|\psi|^2)\,dx = 0. \tag{3.118}$$

Multiplicando a segunda equação por ϕ', integrando em Ω e fazendo uso da fórmula de Green, deduzimos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\phi'\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi\|^2_{L^2(\Omega)})\,dx + \int_{\Omega}a(x)|\phi'|^2\,dx = \int_{\omega}|\psi|^2\phi'\,dx. \tag{3.119}$$

Somando (3.118) e (3.119), obtemos

$$E'(t) + \alpha \int_\Omega b(x)(|\psi|^4 + |\psi|^2)\, dx + \int_\Omega a(x)|\phi'|^2\, dx = \int_\omega |\psi|^2 \phi'\, dx. \tag{3.120}$$

Agora, vamos analisar o termo a direita em (3.120). Temos, pela Hipótese 3.1, e fazendo uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
\left| \int_\omega |\psi|^2 \phi'\, dx \right| &\leq \left(\int_\omega |\psi|^4\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\omega |\phi'|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq b_0^{-\frac{1}{2}} \left(\int_\omega b_0 |\psi|^4\, dx \right)^{\frac{1}{2}} a_0^{-\frac{1}{2}} \left(\int_\omega a_0 |\phi'|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq b_0^{-\frac{1}{2}} \left(\int_\omega b(x) |\psi|^4\, dx \right)^{\frac{1}{2}} a_0^{-\frac{1}{2}} \left(\int_\omega a(x) |\phi'|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2a_0 b_0} \int_\Omega b(x)|\psi|^4\, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega a(x)|\phi'|^2\, dx.
\end{aligned} \tag{3.121}$$

Combinando (3.120), (3.121) e uma vez que $\alpha \geq \dfrac{5}{2a_0 b_0}$, segue que $\beta := \alpha - \frac{1}{2a_0 b_0} > 0$, e vale

$$\begin{aligned}
E'(t) &\leq -\beta \int_\Omega b(x)|\psi|^4\, dx - \alpha \int_\Omega b(x)|\psi|^2\, dx - \frac{1}{2} \int_\Omega a(x)|\phi'|^2\, dx \\
&\leq -k \left[\int_\Omega b(x)(|\psi|^4 + |\psi|^2)\, dx + \int_\Omega a(x)|\phi'|^2\, dx \right] dt,
\end{aligned} \tag{3.122}$$

onde $k = \min\{\frac{1}{2}, \beta\}$.

De (3.122) deduzimos dois fatos: (i) a aplicação $t \in (0, \infty) \mapsto E(t)$ é não crescente e, além disso, (ii) temos a seguintes desigualdade de energia

$$E(t_2) - E(t_1) \leq -k \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_\Omega a(x)|\phi'|^2\, dx + \int_\Omega b(x)(|\psi|^4 + |\psi|^2)\, dx \right] dt,$$

para $0 \leq t_1 \leq t_2 < +\infty$, o que é fundamental para a prova.

Agora, vamos enunciar nosso resultado de estabilidade.

Teorema 3.5 *Assuma que a hipótese do Teorema 3.4 e a Hipótese 3.3 são válidas. Então, existem C, γ constantes positivas tais que*

$$E(t) \leq C e^{-\gamma t} E(0), \quad \textit{para todo } t \geq 0, \tag{3.123}$$

e para toda solução regular do problema (3.1) na classe dada no teorema anterior, desde que os dados iniciais são tomados em conjuntos limitados de $\mathcal{H}$.

Seja $T_0 > 0$ considerado suficientemente grande para nosso propósito. Vamos provar o seguinte lema:

Lema 3.6 *Para todo $T > T_0$ existe uma constate positiva $C = C(T)$ tal que se $\{\psi, \phi, \phi'\}$ é uma solução regular de (3.1), com valores iniciais $\{\psi_0, \phi_0, \phi_1\}$ tomados em um limitado de $\mathcal{H}$, temos*

$$E(0) \leq C \int_0^T \left[\int_\Omega b(x)(|\psi|^4 + |\psi|^2)\, dx + \int_\Omega a(x)|\phi'|^2\, dx \right] dt. \tag{3.124}$$

Demonstração: Vamos argumentar por contradição. Suponha que (3.124) não se verifica e seja $\{\psi_k(0), \phi_k(0), \phi_k'(0)\}$ uma sequência de dados iniciais onde as soluções correspondentes $\{\psi_k, \phi_k, \phi_k'\}$, com $E_k(0)$ uniformemente limitada em k, verificam

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{E_k(0)}{\int_0^T \int_\Omega b(x)(|\psi_k|^4 + |\psi_k|^2)\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega a(x)|\phi_k'|^2\, dx\, dt} = +\infty,$$

ou

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\int_0^T \int_\Omega b(x)(|\psi_k|^4 + |\psi_k|^2)\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega a(x)|\phi_k'|^2\, dx\, dt}{E_k(0)} = 0. \tag{3.125}$$

Como $E_k(t)$ é não crescente e $E_k(0)$ limitada então, obtemos uma subsequência, ainda denotada por $\{\psi_k, \phi_k, \phi_k'\}$, que verifica

$$\psi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \psi \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \tag{3.126}$$

$$\phi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \phi \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \tag{3.127}$$

$$\phi_k' \overset{*}{\rightharpoonup} \phi' \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \tag{3.128}$$

Temos também, pelo Teorema 1.26 (Aubin-Lions) que

$$\phi_k \to \phi \text{ fortemente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \tag{3.129}$$

Retornando para (3.125) e uma vez que $E_k(0) \leq L$, deduzimos que

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^T\int_\Omega a(x)|\phi_k'|^2 dx\,dt = 0, \tag{3.130}$$

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^T\int_\Omega b(x)(|\psi_k|^4 + |\psi_k|^2)\,dx\,dt = 0. \tag{3.131}$$

Considere a sequência de problemas

$$\begin{cases} i\psi_k' + \Delta\psi_k + i\alpha b(x)(|\psi_k|^2\psi_k + \psi_k) = \phi_k\psi_k\chi_\omega, \text{ em } \Omega\times(0,T), \\ \phi_k'' - \Delta\phi_k + a(x)\phi_k' = |\psi_k|^2\chi_\omega, \text{ em } \Omega\times(0,T), \\ \psi_k = 0 \text{ em } \Gamma\times(0,T), \\ \phi_k = 0 \text{ em } \Gamma\times(0,T), \\ \phi_k' \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0,T;L^2(\omega)). \end{cases} \tag{3.132}$$

Definindo

$$c_k := [E_k(0)]^{\frac{1}{2}},$$
$$\hat{\phi}_k = \frac{1}{c_k}\phi_k \quad \text{e} \quad \hat{\psi}_k = \frac{1}{c_k}\psi_k,$$

inferimos que

$$\begin{aligned} \hat{E}_k(t) &= \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |\hat{\psi}_k|^2\,dx + \int_\Omega |\hat{\phi}_k'|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla\hat{\phi}_k|^2\,dx\right] \\ &= \frac{1}{2c_k^2}\left[\int_\Omega |\psi_k|^2\,dx + \int_\Omega |\phi_k'|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla\phi_k|^2\,dx\right] \\ &= \frac{E_k(t)}{c_k^2}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\hat{E}_k(t) = \frac{E_k(t)}{E_k(0)}. \tag{3.133}$$

Em particular,

$$\hat{E}_k(0) = 1. \tag{3.134}$$

Agora, considere a sequência de problemas

$$\begin{cases} i\hat{\psi}_k' + \Delta\hat{\psi}_k + i\alpha b(x)(|\psi_k|^2\hat{\psi}_k + \hat{\psi}_k) = \hat{\phi}_k\psi_k\chi_\omega, \text{ em } \Omega\times(0,T), \\ \hat{\phi}_k'' - \Delta\hat{\phi}_k + a(x)\hat{\phi}_k' = \frac{|\psi_k|^2}{c_k}\chi_\omega, \text{ em } \Omega\times(0,T), \\ \hat{\psi}_k = 0 \text{ em } \Gamma\times(0,T), \\ \hat{\phi}_k = 0 \text{ em } \Gamma\times(0,T), \end{cases} \tag{3.135}$$

e, por (3.134), para uma subsequência $\{\hat{\psi}_k, \hat{\phi}_k, \hat{\phi}'_k\}$, obtemos

$$\hat{\psi}_k \overset{*}{\rightharpoonup} \hat{\psi} \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.136}$$

$$\hat{\phi}_k \overset{*}{\rightharpoonup} \hat{\phi} \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{3.137}$$

$$\hat{\phi}'_k \overset{*}{\rightharpoonup} \hat{\phi}' \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.138}$$

$$\hat{\phi}_k \to \hat{\phi} \text{ fortemente em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.139}$$

Consequentemente, por (3.130) e (3.131), e uma vez que $E_k(0) \leq L$, valem

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^T \int_\Omega a(x)|\hat{\phi}'_k|^2 dx\, dt = 0, \tag{3.140}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^T \int_\Omega b(x) \left(\frac{|\psi_k|^4}{c_k^2} + |\hat{\psi}_k|^2 \right) dx\, dt = 0. \tag{3.141}$$

e de (3.140), temos

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^T \int_\omega |\hat{\phi}'_k|^2 dx\, dt = 0$$

Considerando a imersão $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ para $n = 2$ e (3.131) temos

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T \int_\Omega |i\alpha b(x)|\psi_k|^2 \hat{\psi}_k|^2\, dx\, dt = 0 \tag{3.142}$$

e, por (3.131), temos também

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T \int_\omega |\hat{\phi}_k \psi_k|^2\, dx\, dt = 0. \tag{3.143}$$

Passando o limite quando $k \to \infty$ em (3.135) e considerando as convergências (3.130), (3.131), (3.142) e (3.143), obtemos

$$\begin{cases} \hat{\phi}'' - \Delta\hat{\phi} = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ \hat{\phi} = 0 \text{ em } \Gamma \times (0,T), \\ \hat{\phi}' = 0 \text{ q. s. em } \omega \times (0,T), \end{cases} \tag{3.144}$$

e

$$\begin{cases} i\hat{\psi}' + \Delta\hat{\psi} = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ \hat{\psi} = 0 \text{ em } \Gamma \times (0,T), \\ \hat{\psi} = 0 \text{ q. s. em } \omega \times (0,T). \end{cases} \tag{3.145}$$

Então, para $\hat{\phi}' = v$ em (3.144), obtemos, no sentido distribucional,

$$\begin{cases} v'' - \Delta v = 0 \text{ em } D'(\Omega \times (0,T)), \\ v = 0 \text{ em } \Gamma \times (0,T), \\ v = 0 \ \text{ q. s. em } \ \omega \times (0,T). \end{cases} \tag{3.146}$$

Pelo teorema de unicidade de Holmgren, concluímos que $v \equiv 0$, isto é, $\phi' \equiv 0$. Retornando para (3.144) obtemos a seguinte equação para quase todo $t \in (0,T)$:

$$\begin{cases} -\Delta\hat{\phi} = 0 \text{ em } \Omega, \\ \hat{\phi} = 0 \text{ em } \Gamma. \end{cases} \tag{3.147}$$

Multiplicando a equação acima por $\hat{\phi}$, deduzimos

$$0 = -\int_\Omega \Delta\hat{\phi}\,\hat{\phi}\,dx = \int_\Omega |\nabla\hat{\phi}|^2\,dx,$$

ou seja, $\hat{\phi} = 0$. Analogamente, pelo teorema de Holmgren concluímos que $\hat{\psi} = 0$ q. s. em Ω. Portanto, temos que $\hat{\phi} = \hat{\psi} = 0$ e então, as convergências dadas acima em (3.136) - (3.139) são válidas com $\hat{\psi} = \hat{\phi} = \hat{\phi}' = 0$.

Para chegar a uma contradição basta provar que $\hat{E}_k(0) \to 0$ onde $k \to \infty$. De fato, temos

$$\hat{E}_k(0) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[|\hat{\psi}_k(x,0)|^2 + |\hat{\phi}_k'(x,0)|^2 + |\nabla\hat{\phi}_k(x,0)|^2\right]\,dx\,dt.$$

Uma vez que

$$E_{\hat{\psi}_k}(0) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\hat{\psi}_k(x,0)|^2\,dx$$

e

$$E_{\hat{\phi}_k}(0) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\hat{\phi}_k'(x,0)|^2 + |\nabla\hat{\phi}_k(x,0)|^2\right)\,dx,$$

deduzimos que

$$\hat{E}_k(0) = E_{\hat{\psi}_k}(0) + E_{\hat{\phi}_k}(0).$$

Devemos provar que $\hat{E}_k(0) \to 0$ quando $k \to \infty$ mostrando, separadamente, que $E_{\hat{\psi}_k}(0) \to 0$, quando $k \to \infty$, $E_{\hat{\phi}_k}(0) \to 0$, $k \to \infty$, e usando os resultados de observabilidade para a equação da onda e Schrödinger, ou seja, considerando

$$\begin{cases} iu' + \Delta u = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ u = 0 \text{ em } \Gamma \times (0,T), \\ u(0) = u_0 \text{ em } L^2(\Omega), \end{cases} \tag{3.148}$$

e

$$\begin{cases} y'' + \Delta y = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ y = 0 \text{ em } \Gamma \times (0,T), \\ y(0) = y_0 \in H_0^1(\Omega), \\ y'(0) = y_1 \in L^2(\Omega), \end{cases} \tag{3.149}$$

então, sabemos que existem constantes $c_1, c_2 > 0$ e $T_0 > 0$ tais que

$$E_u(0) = \frac{1}{2}\int_\Omega |u(x,0)|^2\,dx \le c_1 \int_0^T \int_\omega |u(x,t)|^2\,dx\,dt \tag{3.150}$$

e

$$E_y(0) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|y'(x,0)|^2 + |\nabla y(x,0)|^2)\,dx \le c_2 \int_0^T \int_\omega |y'(x,t)|^2\,dx\,dt, \tag{3.151}$$

para todo $T > T_0$, onde c_1 e c_2 independem dos dados iniciais.

Considere os seguintes problemas

$$\begin{cases} i\hat{\psi}_k{}' + \Delta\hat{\psi}_k + i\alpha b(x)(|\psi_k|^2\hat{\psi}_k + \hat{\psi}_k) = \hat{\phi}_k\psi_k\chi_\omega \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ \hat{\psi}_k = 0 \text{ em } \Gamma \times (0,T), \\ \hat{\psi}_k(0) = \hat{\psi_{0k}} \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{3.152}$$

$$\begin{cases} iv_k' + \Delta v_k = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ v_k = 0 \text{ em } \Gamma \times (0,T), \\ v_k(0) = \hat{\psi_{0k}} \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{3.153}$$

e

$$\begin{cases} iw_k' + \Delta w_k = -i\alpha b(x)(|\psi_k|^2\hat{\psi}_k + \hat{\psi}_k) + \hat{\phi}_k\psi_k\chi_\omega \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ w_k = 0 \text{ em } \Gamma \times (0,T), \\ \hat{w}_k(0) = 0 \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{3.154}$$

Note que $\hat{\psi}_k = v_k + w_k$ é a solução de (3.152), onde v_k é a solução de (3.153) e w_k é a solução de (3.154). Além disso, $\hat{\psi}_k = v_k + w_k = 0$ em $\Gamma \times (0,T)$ e $\hat{\psi}_k(0) = v_k(0) + w_k(0) = \hat{\psi_{0k}}$. Portanto, segue que

$$\begin{aligned} E_{\hat{\psi}_k}(0) = E_{v_k}(0) &\le c_1 \int_0^T \int_\omega |v_k|^2\,dx\,dt \\ &\le c_1 \int_0^T \int_\omega |\hat{\psi}_k|^2 + |w_k|^2\,dx\,dt \\ &\le \hat{c_1}\left(\int_0^T \int_\Omega b(x)|\hat{\psi}_k|^2\,dx\,dt + \int_0^T \int_\omega |w_k|^2\,dx\,dt\right). \end{aligned} \tag{3.155}$$

Vamos definir a seguinte forma linear e contínua

$$\begin{aligned} T : L^2(\Omega) \times L^1(0,T,L^2(\Omega)) &\to L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \\ (z_0, f) &\mapsto T(z_0,f) = z, \end{aligned}$$

onde z é a solução do problema

$$\begin{cases} iz' + \Delta z = f \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ z = 0 \text{ em } \Gamma \times (0,T), \\ z(0) = z_0 \in L^2(\Omega). \end{cases} \tag{3.156}$$

Claramente T é linear. Vamos provar que T é contínua. De fato, z é uma solução de (3.156) assim, z satisfaz a equação integral

$$z(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds,$$

onde $S(t)$ é o semigrupo gerado pelo operador maximal monótono A, e

$$\begin{aligned} A : D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset L^2(\Omega) \quad &\rightarrow \quad L^2(\Omega) \\ y \quad &\mapsto \quad Ay = -i\Delta y. \end{aligned}$$

Então, levando em conta que $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \leq M$, temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \|z(t)\|_2^2 &\leq c_3\|z_0\|_2^2 + c_4\left(\int_0^t \|f(s)\|_2\,ds\right)^2 \\ &\leq C(\|z_0\|_2^2 + \|f\|^2_{L^1(0,T,L^2(\Omega))}) = C(\|(z_0,f)\|^2_{L^2(\Omega)\times L^1(0,T,L^2(\Omega))}), \end{aligned}$$

o que mostra que T é contínua.

Desta forma, como $L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T,L^2(\Omega))$, e denotando $f(t) = -i\alpha b(x)(|\psi_k(t)|^2\hat{\psi}_k(t) + \hat{\psi}_k(t)) + \hat{\phi}_k(t)\psi_k(t)\chi_\omega$, $z_0 = 0$, segue, pela desigualdade de Hölder e a continuidade de T, que

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^T \int_\omega |w_k|^2\,dx\,dt \\ &\leq \|w_k\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \\ &\leq C\|f\|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \\ &\leq C(T)\left(\int_0^T \int_\Omega |\hat{\phi}_k\psi_k\chi_\omega - i\alpha b(x)(|\psi_k|^2\hat{\psi}_k + \hat{\psi}_k)|^2\,dx\,dt\right). \end{aligned} \tag{3.157}$$

Portanto, de (3.155) e (3.157), temos

$$\begin{aligned} E_{\hat{\psi}_k}(0) &\leq C(T)\left(\int_0^T \int_\Omega b(x)|\hat{\psi}_k|^2\,dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega |\hat{\phi}_k\psi_k\chi_\omega - i\alpha b(x)(|\psi_k|^2\hat{\psi}_k + \hat{\psi}_k)|^2\,dx\,dt\right) \\ &\leq C(T)\left(\int_0^T \int_\Omega b(x)|\hat{\psi}_k|^2\,dx\,dt + \int_0^T \int_\omega |\hat{\phi}_k\psi_k|^2\,dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega |i\alpha b(x)|\psi_k|^2\hat{\psi}_k|^2\,dx\,dt\right. \\ &\quad + \left.\int_0^T \int_\Omega |i\alpha b(x)\hat{\psi}_k|^2\,dx\,dt\right). \end{aligned}$$

Logo, por (3.141), (3.142) e (3.143), obtemos

$$E_{\hat{\psi}_k}(0) \to 0, \tag{3.158}$$

quando $k \to \infty$. Analogamente, considere os seguintes problemas

$$\begin{cases} \hat{\phi_k}'' - \Delta\hat{\phi_k} + a(x)\hat{\phi_k}' = \frac{|\psi_k|^2}{c_k}\chi_\omega \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ \hat{\phi_k} = 0 \text{ em } \Gamma \times (0,T), \\ \hat{\phi_k}(0) = \hat{\phi_{0k}} \text{ em } \Omega, \\ \hat{\phi_k}'(0) = \hat{\phi_{1k}} \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{3.159}$$

$$\begin{cases} v_k' + \Delta v_k = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ v_k = \hat{\phi_{0k}} \text{ em } \Gamma \times (0,T), \\ v_k(0) = \hat{\phi_{0k}} \text{ em } \Omega, \\ v_k'(0) = \hat{\phi_{1k}} \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{3.160}$$

e

$$\begin{cases} w_k'' + \Delta w_k = -a(x)\hat{\phi}_k' + \frac{|\psi_k|^2}{c_k}\chi_\omega \text{ em } \Omega \times (0,T) \\ w_k = 0 \text{ em } \Gamma \times (0,T), \\ w_k(0) = 0 \text{ em } \Omega, \\ w_k'(0) = 0 \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{3.161}$$

Note que $\hat{\phi}_k = v_k + w_k$ é a solução de (3.159), onde v_k é a solução de (3.160) e w_k é a solução de (3.161). Além disso, $\hat{\phi}_k = v_k + \omega_k = 0$ em $\Gamma \times (0,T), \hat{\phi}_k(0) = v_k(0) + w_k(0) = \hat{\phi_{0k}}$, e $\hat{\phi}_k'(0) = v_k'(0) + w_k'(0) = \hat{\phi_{1k}}$. Então, segue que

$$\begin{aligned} E_{\hat{\phi}_k}(0) = E_{v_k}(0) &\le c_1 \int_0^T \int_\omega |v_k'|^2 \, dx \, dt \\ &\le c_1 \int_0^T \int_\omega |\hat{\phi_k}'|^2 + |w_k'|^2 \, dx \, dt \\ &\le \hat{c_1} \left(\int_0^T \int_\Omega a(x)|\hat{\phi_k}'|^2 \, dx \, dt + \int_0^T \int_\omega |w_k'|^2 \, dx \, dt \right). \end{aligned} \tag{3.162}$$

Vamos definir a seguinte forma linear e contínua

$$\begin{aligned} T : \mathcal{R} \times L^1(0,T,L^2(\Omega)) &\to L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \\ (z_0, z_1, f) &\mapsto T(z_0,z_1,f) = z', \end{aligned}$$

onde $\mathcal{R} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e z é a solução do problema

$$\begin{cases} z'' - \Delta z = f \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ z = 0 \text{ em } \Gamma \times (0,T), \\ z(0) = z_0 \in H_0^1(\Omega), \\ z'(0) = z_1 \in L^2(\Omega). \end{cases} \tag{3.163}$$

Claramente T é linear. Vamos provar que T é contínua. Com efeito, como $Z = \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}$ é a solução do problema

$$\begin{cases} Z' + AZ = F, \\ Z(0) = Z_0, \end{cases} \tag{3.164}$$

onde $A = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}$ e $F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$, temos que Z satisfaz a equação integral

$$Z(t) = S(t)Z_0 + \int_0^t S(t-s)F(s)\,ds,$$

em que $S(t)$ é o semigrupo gerado pelo operador maximal monótono A. Portanto, considerando que $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \leq M$, chegamos na seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \|z'(t)\|_2^2 &\leq \|Z(t)\|_{\mathcal{R}}^2 \\ &\leq c_1\|(z_0, z_1)\|_{\mathcal{R}}^2 + c_2\left(\int_0^t \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{R}} ds\right)^2 \\ &\leq c_3(\|(z_0, z_1)\|_{\mathcal{R}}^2 + c_3\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}^2) \\ &\leq c_4\|((z_0, z_1), f)\|_{\mathcal{R}\times L^1(0,T;L^2(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|z'\|_\infty^2 \leq c_4\|((z_0, z_1), f)\|_{\mathcal{R}\times L^1(0,T;L^2(\Omega))}^2,$$

de modo que $c_4 = \max\{c_1, c_3\}$, o que mostra que T é contínua.

Desta forma, como $L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T,L^2(\Omega))$, e denotando $f(t) = -a(x)\hat{\phi_k}'(t) + \frac{\hat{\psi_k}^2(t)}{c_k}\chi_\omega$ e $z_0 = z_1 = 0$, segue, pela desigualdade de Holder e a continuidade de T, que

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^T \int_\omega |w_k'|^2\,dx\,dt \\ &\leq \|w_k\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \\ &\leq C\|f\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 \\ &\leq C(T)\left(\int_0^T \int_\Omega \left|\frac{|\psi_k|^2}{c_k}\chi_\omega - a(x)\phi_k'\right|^2 dx\,dt\right). \end{aligned} \tag{3.165}$$

Portanto, por (3.162) e (3.165) temos

$$\begin{aligned} E_{\hat{\phi_k}}(0) &\leq C(T)\left(\int_0^T \int_\Omega a(x)|\hat{\phi_k}'|^2\,dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega \left|\frac{|\psi_k|^2}{c_k}\chi_\omega - a(x)\hat{\phi}_k'\right|^2\right) \\ &\leq \left(\int_0^T \int_\Omega a(x)|\hat{\phi_k}'|^2\,dx\,dt + \int_0^T \int_\omega \frac{|\psi_k|^4}{c_k^2}\,dxdt + \int_0^T \int_\Omega a(x)|\hat{\phi_k}'|^2\,dx\,dt\right). \end{aligned}$$

Então, por (3.140) e (3.141) obtemos

$$E_{\hat{\phi}_k}(0) \to 0, \tag{3.166}$$

quando $k \to \infty$.

Portanto,

$$\hat{E}_k(0) = E_{\hat{\psi}_k}(0) + E_{\hat{\phi}_k}(0) \to 0$$

quando $k \to +\infty$, o que é absurdo em vista de (3.134). Portanto, o lema está provado. $\square$

Tome T_0 suficientemente grande. Pela desigualdade da energia deduzimos

$$E(T_0) - E(0) \le -k \int_0^{T_0} \underbrace{\left(\int_\Omega a(x)|\phi'|^2\,dx + \int_\Omega b(x)(|\psi|^4 + |\psi|^2)\,dx \right)}_{:=D(t)} dt \tag{3.167}$$

e, pelo Lema 3.6, temos

$$E(0) \le C \int_0^{T_0} D(t). \tag{3.168}$$

De (3.167) segue que

$$C \int_0^{T_0} D(t)\,dt \le -\frac{C}{k} E(T_0) + \frac{C}{k} E(0). \tag{3.169}$$

Combinando (3.168) e (3.169), obtemos

$$E(T_0) \le E(0) \le C \int_0^{T_0} D(t)\,dt \le -\frac{C}{k} E(T_0) + \frac{C}{k} E(0).$$

Assim,

$$\left(1 + \frac{C}{k}\right) E(T_0) \le \frac{C}{k} E(0).$$

Então,

$$E(T_0) \le \frac{C}{k + C} E(0),$$

ou seja,

$$E(T_0) \le \alpha E(0),$$

onde $0 < \alpha < 1$.

Logo, tomando T_0 suficientemente grande, para $T > T_0$ obtemos

$$E(T) \leq E(T_0) \leq \alpha E(0).$$

Portanto,

$$E(T) \leq \alpha E(0), \text{ para todo } T > T_0,$$

onde $0 < \alpha < 1$.

Procedendo de forma similar como feito anteriormente para T e $2T$, deduzimos $E(2T) \leq \alpha E(T)$, para todo $T > T_0$, e, consequentemente,

$$E(2T) \leq \alpha^2 E(0), \text{ para todo } T > T_0.$$

Em geral,

$$E(nT) \leq \alpha^n E(0), \text{ para todo } T > T_0.$$

Vamos considerar, agora, $t > T_0$, então $t = nT_0 + r$ para algum $0 \leq r < T_0$. Portanto,

$$E(t) \leq E(t-r) = E(nT_0) \leq \alpha^n E(0) = \alpha^{\frac{t-r}{T_0}} E(0) = e^{\frac{t-r}{T_0} \ln \alpha} E(0),$$

o que implica a estabilidade exponencial.

CAPÍTULO 4

ESTABILIZAÇÃO PARA EQUAÇÃO DA ONDA SEMILINEAR EM UM MEIO NÃO HOMOGÊNEO COM DISSIPAÇÃO LOCALMENTE DISTRIBUÍDA E CONDIÇÕES DE FRONTEIRA DINÂMICA DO TIPO CAUCHY-VENTCEL

Este capítulo, foi realizado em parceria com Adriana Flores de Almeida, Marcelo Moreira Cavalcanti e Victor Hugo Gonzalez Martinez.

Neste capítulo vamos estudar a estabilidade uniforme da equação da onda com condições de fronteira dinâmica do tipo Cauchy-Ventcel posto em um meio não homogêneo e sujeito a uma dissipação não linear localmente distribuída

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \text{div}[K(x)\nabla u] + a(x)g(u_t) + f(u) = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \\ \eta(x)v_{tt} + \eta(x)\partial_{\nu_k}u + \eta(x)v_t = \text{div}[R(x)\nabla_T v] \text{ em } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ u = v \text{ sobre } \Gamma \times (0,\infty), \\ (u(x,0), v(x,0)) = (u_0, u_{0_{|\Gamma}} := v_0) \text{ em } \Omega \times (0,T) \\ (u_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1, u_{1_{|\Gamma}} := v_1) \text{ em } \Omega \times \Gamma. \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado de classe C^2 para $n \geq 2$, com fronteira $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, tal que $\Gamma_i, i = 0, 1$ são subconjuntos não vazios, fechados e disjuntos de Γ, $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $k_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$ são funções em $C^\infty(\Omega)$ tais que para todo $x \in \Omega$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\alpha_0 \leq \rho(x) \leq \beta_0, \quad k_{ij}(x) = k_{ji}(x), \quad \alpha|\xi|^2 \leq \xi^\top \cdot K(x) \cdot \xi \leq \beta|\xi|^2, \tag{4.2}$$

onde $\alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta$ são constantes positivas, $K(x) = (k_{ij})_{i,j}$ é uma matriz definida simétrica positiva e $\eta : \Gamma \to \mathbb{R}_+$, $r_{ij} : \Gamma \to \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$, são funções em $C^\infty(\Gamma)$ tais que, para todo $x \in \Gamma$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\alpha_1 \leq \eta(x) \leq \beta_1, \quad r_{ij}(x) = r_{ji}(x), \quad \alpha_2|\xi|^2 \leq \xi^\top \cdot R(x) \cdot \xi \leq \beta_2|\xi|^2, \tag{4.3}$$

onde $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ são constantes positivas e $R(x) = (r_{ij})_{i,j}$ é uma matriz definida simétrica positivas. Vamos definir por ω_1 uma vizinhança de Γ_1 contida em $\overline{\Omega}, \omega_0$ uma vizinhança Γ_0 contida em $\overline{\Omega}$ e $\omega = \omega_1 \cup \omega_0$. No que segue consideremos os seguintes espaços

$$\begin{aligned}
&H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u_{|\Gamma_0} = 0\},\\
&\mathbb{V} = \{z = (u, v) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma); u_{|\Gamma} = v\},\\
&\mathbb{H} = L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma).
\end{aligned}$$

Equipados com as normas canônicas

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{H^1_{\Gamma_0}} = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)},\\
&\|z\|^2_{\mathbb{H}} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Gamma)},\\
&\|z\|^2_{\mathbb{V}} = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \int_\Gamma |\nabla v|^2\, d\Gamma,
\end{aligned}$$

$\mathbb{V}$ e $\mathbb{H}$ são dois espaços de Hilbert e $\mathbb{V}$ é denso em $\mathbb{H}$.

Vamos assumir as seguintes hipóteses:

Hipótese 4.1 • *O termo não linear $f \in C^2(\mathbb{R})$ é uma função real e satisfaz*

$$f(0) = 0, \quad |f^j(s)| \leq k_0(1 + |s|)^{p-j},\ j = 1, 2,\ \forall s \in \mathbb{R}, \tag{4.4}$$

o que implica, em particular, que para algum $C > 0$,

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leq C\left(1 + |s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1}\right)|s_1 - s_2|,\ \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

• *Sua primitiva $F(s) = \int_0^s f(\tau)d\tau$ verifica*

$$0 \leq F(s) \leq f(s)s,\ \forall s \in \mathbb{R}, \tag{4.6}$$

e

$$p \geq 1 \ \ \textit{para} \ \ n = 2, \ \ \textit{e} \ \ 1 \leq p \leq \frac{n}{n-2} \ \ \textit{para} \ \ n \geq 3.$$

Hipótese 4.2 *A função $a = a(x) \in L^{\infty}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ é uma função não negativa de valores reais e satisfaz a seguinte condição*

$$a \in L^{\infty}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}); \ a(x) \geq a_0 > 0 \ \textit{em} \ \omega \subset \Omega. \tag{4.7}$$

Hipótese 4.3 *Seja, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, monótona não crescente tal que*

$$\begin{cases} g(s)s > 0 \ \textit{para todo} \ s \neq 0, \\ k_1|s| \leq |g(s)| \leq k_2|s| \ \textit{para todo} \ |s| \geq 1, \end{cases} \tag{4.8}$$

para algumas constantes positivas k_1, k_2. Inspirado em [61], seja h uma função côncava, estritamente crescente, com $h\,(0) = 0$, e tal que

$$h\,(s\,g(s))) \geq s^2 + g^2(s), \ \textit{para} \ |s| < 1. \tag{4.9}$$

Hipótese 4.4 *ω controla geometricamente Ω, isto é, existe $T_0 > 0$, tal que toda geodésica de métrica $G(x)$, onde $G(x) = \left(\frac{K(x)}{\rho(x)}\right)^{-1}$, viajando com velocidade constante igual a 1 e partindo de $t = 0$, encontra o conjunto ω em um tempo $t < T_0$.*

A Hipótese 4.4 é a chamada de Condição Geométrica de Controle (C.G.C.). É sabido que a C.G.C é uma condição necessária e suficiente para a estabilização e controle da equação da onda linear (veja [10], [21], [27], [28], [40], [80] e suas referências).

Hipótese 4.5 *Para todo $T > 0$, a única solução v pertencente ao espaço $C((0,T); \mathbb{H}) \cap C((0,T), \mathbb{V}')$ para o sistema*

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - div[(K/\rho)\nabla v] + V(x,t)v = 0 \ \textit{em} \ \Omega \times (0,T), \\ v = 0 \ \textit{em} \ \omega, \end{cases} \tag{4.10}$$

onde $V(x,t) \in L^{\frac{n+1}{2}}((0,T), L^{\frac{n+1}{2}}(\Omega))$, é a trivial $v \equiv 0$.

Observação 4.6 *Observe que no caso que $V \equiv 0$, a Hipótese 4.5 é satisfeita pelo trabalho de Burq [20], ou pelas notas de leitura devido a Burq e Gérard [22](veja* (6.28)-(6.29) *na p. 75). Para $V(t,x) \in L^{\infty}((0,T), L^{n}(\Omega))$ e considerando $G(x) = I_d$, segue pelo trabalho pioneiro de Ruiz [82]. De acordo com Koch e Tataru [58] (veja Teorema 15), no caso mais geral onde $V \in L^{\frac{n+1}{2}}((0,T), L^{\frac{n+1}{2}}(\Omega))$ e G podem não ser identidades, o princípio de continuação vale. Consequentemente, sob condições específicas em [58], a Hipótese 4.5 cumpre-se.*

Observação 4.7 *É importante observar que a Hipótese 4.4 não é verificada para toda $G = (K/\rho)^{-1}$. Veja em [5] exemplos em que essa situação ocorre. Acontece facilmente quando $G(x) = I_d$, neste caso as geodésicas são linhas retas e, necessariamente, eles vão encontrar a região ω.*

O principal objetivo deste capítulo é provar a existência e unicidade de soluções regulares e fracas para o problema (4.1) e, além disso, que essas soluções decaem uniformemente para zero, ou seja, definindo

$$\begin{aligned} E(t) := &\int_{\Omega} \rho(x)|\partial_t u(x,t)|^2 + \nabla u(x,t)^T \cdot K(x) \cdot \nabla u(x,t) + F(u(x,t))\, dx \\ &+ \int_{\Gamma} \eta(x)|\partial_t v(x,t)|^2 + \nabla v(x,t)^T \cdot R(x) \cdot \nabla_T v(x,t)\, d\Gamma, \end{aligned} \tag{4.11}$$

onde $F(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(s)\, ds$, temos

$$E(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right), \text{para todo } t > T_0, \tag{4.12}$$

com $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$, em que o semigrupo de contração $S(t)$ é uma solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt} S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = E(0), \tag{4.13}$$

com q dado como em (4.117) para toda a solução fraca do problema (4.1), desde que os dados iniciais $\{u_0, u_{0_{|_\Gamma}} u_1, u_{1_{|_\Gamma}}\}$ sejam tomados em conjuntos limitados de $\mathbb{V} \times \mathbb{H}$. Este resultado é um *resultado de estabilização local*. De fato, as taxas de decaimento dadas por (4.12) são uniformes em cada bola sobre o espaço da energia $\mathbb{V} \times \mathbb{H}$ com raio $R > 0$ mas, este resultado não garante que as taxas decaem globalmente, isto é, que (4.12) vale independente dos dados iniciais.

Em vez de estudar o problema específico (4.1), vamos considerar o problema auxiliar, que será descrito na sequência. Para este propósito, vamos induzir em Ω uma métrica Riemanniana

$\mathbf{G}$ de modo que $(\Omega, \mathbf{G})$ é uma variedade Riemanniana conexa, compacta, orientável n-dimensional com métrica $\mathbf{G}$ de classe C^∞ e fronteira suave $\partial\Omega$. Da mesma forma, vamos induzir em Γ uma métrica Riemanniana $\mathbf{g}$ de modo que $(\Gamma, \mathbf{g})$ é uma variedade Riemanniana conexa, compacta e orientável, com métrica $\mathbf{g}$ de classe C^∞.

Denotaremos $\Delta_{\mathbf{G}}$ o operador Laplace-Beltrami em $(\Omega, \mathbf{G})$ e $\nabla_{\mathbf{G}}$ sua conexão Riemanniana. Também, denotaremos $\Delta_{\mathbf{g}}$ o operador Laplace-Beltrami em $(\Gamma, \mathbf{g})$ e $\nabla_{\mathbf{g}}$ sua conexão Riemanniana. Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\mathbf{G}} u + f(u) + a(x) g(u_t) = 0 \text{ em } \Omega \times (0, \infty), \\ v_{tt} + \partial_\nu u + v_t = \Delta_{\mathbf{g}} v \text{ em } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u = 0 \text{ em } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ u = v \text{ em } \Gamma \times (0, \infty), \\ (u(x,0), v(x,0)) = (u_0, u_{0_{|_\Gamma}} := v_0) \text{ em } \mathbb{V}, \\ (u_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1, u_{1_{|_\Gamma}} := v_1) \text{ em } \mathbb{H}. \end{cases} \tag{4.14}$$

A energia associada ao problema (4.14) é dada por

$$\begin{aligned} E(t) := & \int_\Omega \left[\frac{1}{2} |u_t(x,t)|^2 + \frac{1}{2} |\nabla_{\mathbf{G}} u(x,t)|^2 + F(u(x,t)) \right] dx \\ & + \int_\Gamma \left[\frac{1}{2} |v_t(x,t)|^2 + \frac{1}{2} |\nabla_{\mathbf{g}} v(x,t)|^2 \right] d\Gamma. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Finalmente, voltemos ao problema original (4.1) tendo em mente que $\rho \in C^\infty(\Omega)$ e $\alpha_0 \leq \rho(x) \leq \beta_0$. Fixe um sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ em (Ω, G) com métrica Riemanniana $G = \langle \cdot, \cdot \rangle$, denote $G_{ij} = \langle \partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j \rangle$, seja $G^{ij} = K_{ij}/\rho$ a matriz inversa de G_{ij} e o conjunto $\rho = \sqrt{\det(G_{ij})}$. O operador Laplace-Beltrami neste sistema de coordenadas é dado por

$$\Delta_{\mathbf{G}} u = \frac{1}{\sqrt{\det G_{ij}}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det G_{ij}} G^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{\rho(x)} \text{div}(K(x) \nabla u),$$

onde ∇ é o gradiente usual correspondente a métrica Euclidiana no domínio $(x_1, \ldots, x_n)$. Consequentemente,

$$\rho(x) \partial_t^2 u - \text{div}[K(x) \nabla u] = 0 \Leftrightarrow \partial_t^2 u - \Delta_G u = 0.$$

Analogamente, tendo em mente que $\eta \in C^\infty(\Gamma)$ e $\alpha_1 \leq \eta(x) \leq \beta_1$. Fixe um sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ em (Γ, g) com métrica Riemanniana $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, seja $g_{ij} =$

$\langle \partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j \rangle$, seja $g^{ij} = R_{ij}/\eta$ a matriz inversa de R_{ij} e o conjunto $\eta = \sqrt{\det(g_{ij})}$. O operador Laplace-Beltrami neste sistema de coordenadas é dado por

$$\Delta_{\mathbf{g}} v = \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det g_{ij}} g^{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{\eta(x)} \text{div}(R(x) \nabla_T v),$$

onde ∇_T é o gradiente tangencial usual correspondente a métrica Euclidiana no domínio $(x_1, \ldots, x_n)$. Consequentemente,

$$\eta(x)\partial_t^2 v - \text{div}[R(x)\nabla_T v] = 0 \Leftrightarrow \partial_t^2 v - \Delta_g v = 0,$$

e assim, analisar o problema (4.1) é equivalente a analisar o problema auxiliar (4.14).

4.1 Existência e Unicidade

Tomando $U(t) = (u, v, u_t, v_t)^\top$ o problema de valor inicial (4.14) pode ser reescrito como um problema de primeira ordem como segue

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt}(t) + \mathcal{A}U(t) = \mathcal{F}(U(t)), \\ U(0) = U^0, \end{cases} \tag{4.16}$$

onde $U^0 = (u^0, u^0_{|\Gamma}, u^1, u^1_{|\Gamma})$ e o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathbb{V} \times \mathbb{H} \to \mathbb{V} \times \mathbb{H}$ é dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ -\Delta_{\mathbf{G}} & 0 & a(x)g(\cdot) & 0 \\ \partial_\nu & -\Delta_{\mathbf{g}} & 0 & I \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

em que $D(\mathcal{A}) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{V} \times \mathbb{H} : (z, w) \in \mathbb{V}, -\Delta_{\mathbf{G}} x + ag(z) \in L^2(\Omega), -\Delta_{\mathbf{g}} y + \partial_\nu x + \omega \in L^2(\Gamma)\}$ e operador $\mathcal{F} : \mathbb{V} \times \mathbb{H} \to \mathbb{V} \times \mathbb{H}$ é dado por

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f(\cdot) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Teorema 4.8 *Assuma que as hipóteses do termo não linear f especificadas na Hipótese 4.1 são satisfeitas, com a restrição $p \geq 1$ se $n = 2$ e $1 \leq p \leq \frac{n}{n-2}$ se $n \geq 3$ e o valor inicial $(u^0, u^0_{|\Gamma}, u^1, u^1_{|\Gamma}) \in \mathbb{V} \times \mathbb{H}$. Então, o problema (4.14) possui uma única solução fraca $(u, v, u_t, v_t) \in C([0, T]; \mathbb{V} \times \mathbb{H})$. Além disso, se $(u^0, u^0_{|\Gamma}, u^1, u^1_{|\Gamma}) \in D(\mathcal{A})$, então a solução é regular.*

Demonstração: Para provarmos que $\mathcal{A}$ gera um semigrupo em $\mathbb{V} \times \mathbb{H}$ devemos mostrar que $\mathcal{A}$ é maximal monótono. A fim de provarmos que $\mathcal{A}$ é maximal monótono, consideremos $\mathcal{A} = -(A+B)$ com operadores A e B definidos por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ \Delta_{\mathbf{G}} & 0 & 0 & 0 \\ -\partial_\nu & \Delta_{\mathbf{g}} & 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

onde $D(A) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{V} \times \mathbb{H} : (z,w) \in \mathbb{V}, \Delta_{\mathbf{G}} x \in L^2(\Omega), \Delta_{\mathbf{g}} y - \partial_\nu x - w \in L^2(\Gamma)\}$ e

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(x)g(\cdot) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.20}$$

em que $D(B) = \mathbb{V} \times \mathbb{H}$. Pelo Teorema 1.41 é suficiente mostrarmos que:

i) O operador $-A$ é maximal monótono;

ii) $-B$ é monótono, hemicontínuo e um operador limitado.

Prova de i): Primeiramente mostremos que $-A$ é monótono. De fato,

$$\begin{aligned}
(-AU, U)_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}} &= \left(\begin{pmatrix} -z \\ -w \\ -\Delta_{\mathbf{G}} x \\ \partial_\nu x - \Delta_{\mathbf{g}} y + w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}} \\
&= -\int_\Omega (\nabla_{\mathbf{G}} z)(\nabla_{\mathbf{G}} x)\, dx - \int_\Gamma (\nabla \mathbf{g} w)(\nabla \mathbf{g} y)\, d\Gamma + \int_\Omega (\nabla_{\mathbf{G}} x)(\nabla_{\mathbf{G}} z)\, dx \\
&- \langle \partial_\nu x, z \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} + \langle \partial_\nu x, w \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} + \int_\Gamma (\nabla \mathbf{g} y)(\nabla \mathbf{g} w)\, d\Gamma + \int_\Gamma |w|^2\, d\Gamma \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, A é monótono.

Agora, mostremos que $-A$ é maximal, ou seja, $Im(I-A) = \mathbb{V}\times\mathbb{H}$. Dado $(x_0, y_0, z_0, w_0) \in \mathbb{V} \times \mathbb{H}$, devemos mostrar que existe $(x,y,z,w) \in D(A)$ tal que

$$(I - A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ w_0 \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z \\ w \\ \Delta_{\mathbf{G}} x \\ -\partial_\nu x + \Delta_{\mathbf{g}} y - w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ w_0 \end{pmatrix}, \tag{4.22}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} x - z = x_0 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega), \\ y - w = y_0 \in H^1(\Gamma), \\ z - \Delta_{\mathbf{G}} x = z_0 \in L^2(\Omega), \\ 2w + \partial_\nu x - \Delta_{\mathbf{g}} y = w_0 \in L^2(\Gamma), \end{cases} \tag{4.23}$$

e então, uma vez que

$$\begin{cases} z = x - x_0, \\ w = y - y_0, \end{cases} \tag{4.24}$$

temos,

$$\begin{cases} x - \Delta_{\mathbf{G}} x = z_0 + x_0 \in L^2(\Omega), \\ 2y + \partial_\nu x - \Delta_{\mathbf{g}} y = w_0 + 2y_0 \in L^2(\Gamma). \end{cases} \tag{4.25}$$

Assim, podemos definir

$$b : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$b((x,y),(\widetilde{x},\widetilde{y})) = \int_\Omega x\widetilde{x}\, dx + \int_\Omega \nabla_{\mathbf{G}} x \nabla_{\mathbf{G}} \widetilde{x}\, dx + \int_\Gamma 2y\widetilde{y}\, d\Gamma + \int_\Gamma \nabla_{\mathbf{g}} y \nabla_{\mathbf{g}} \widetilde{y}\, d\Gamma.$$

Observe que b é uma forma bilinear, contínua e coerciva em $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$. De fato, que b é bilinear é trivial. Vejamos que b é contínua e coerciva. Note que, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} |b((x,y),(\tilde{x},\tilde{y}))| &\leq \left(\int_\Omega |\nabla_{\mathbf{G}} x||\nabla_{\mathbf{G}} \widetilde{x}| dx + \int_\Gamma |\nabla_{\mathbf{g}} y||\nabla_{\mathbf{g}} \widetilde{y}|\, d\Gamma + \int_\Omega |x||\widetilde{x}|\, dx + \int_\Gamma 2|y||\widetilde{y}|\, d\Gamma \right) \\ &\leq \|\nabla_{\mathbf{G}} x\|^2_{L^2(\Omega)} \|\nabla_{\mathbf{G}} \tilde{x}\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|\nabla_{\mathbf{g}} y\|^2_{L^2(\Gamma)} \|\nabla_{\mathbf{g}} \tilde{y}\|^2_{L^2(\Gamma)} \\ &+ \|x\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{x}\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|y\|^2_{L^2(\Gamma)} \|\tilde{y}\|^2_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq C(\|x\|^2_{H^1(\Omega)} \|\tilde{x}\|^2_{H^1(\Omega)} + \|y\|^2_{H^1(\Gamma)} \|\tilde{y}\|^2_{H^1(\Gamma)}) \\ &\leq C(\|(x,y)\|_{\mathbb{V}} \cdot \|(\tilde{x},\tilde{y})\|_{\mathbb{V}}) \end{aligned}$$

e, portanto, b é contínua. Além disso,

$$\begin{aligned} b((x,y),(x,y)) &= \int_\Omega |\nabla_{\mathbf{G}} x|^2\, dx + \int_\Gamma |\nabla_{\mathbf{g}} y|^2\, d\Gamma + \int_\Omega |x|^2\, dx + \int_\Gamma 2|y|^2\, d\Gamma \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

e, portanto, b é coerciva.

Dessa forma, b é uma forma bilinear, contínua e coerciva em $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ e como $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{H}$, $\mathbb{V}$ é denso em $\mathbb{H}$, segue que o operador

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \subset \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{H} \\ (x,y) &\mapsto (x - \Delta_{\mathbf{G}} x, 2y + \partial_\nu x - \Delta_{\mathbf{g}} y), \end{aligned}$$

onde $D(\mathcal{B}) = \{(x,y) \in \mathbb{V}; x - \Delta_{\mathbf{G}} x \in L^2(\Omega), 2y + \partial_\nu x + \Delta_{\mathbf{g}} y \in L^2(\Gamma)\}$, é definido pela terna $\{\mathbb{V}; \mathbb{H}; b((x,y),(\tilde{x},\tilde{y}))\}$. Pelo teorema de Lax-Milgran podemos estender $\mathcal{B} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}'$ e tal extensão é um isomorfismo. Dessa forma, dado $(X^0, Y^0) \in \mathbb{H} \subset \mathbb{V}'$ existe um único $(x,y) \in \mathbb{V}$ tal que $\mathcal{B}(x,y) = (X^0, Y^0)$ e

$$\begin{cases} x - \Delta_{\mathbf{G}} x = z_0 + x_0 = X^0 \in D'(\Omega), \\ 2y + \partial_\nu x - \Delta_{\mathbf{g}} y = w_0 + 2y_0 = Y^0 \in D'(\Gamma). \end{cases} \tag{4.26}$$

Como x e $X^0 \in L^2(\Omega)$, segue que $\Delta_G x \in L^2(\Omega)$. Da mesma forma, como $2y$ e $Y^0 \in L^2(\Gamma)$, segue que, $\partial_\nu x - \Delta_g y \in L^2(\Gamma)$. Além disso, uma vez que $(x,y) \in \mathbb{V}$, ou seja, $x \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega), y \in H^1(\Gamma)$, segue que

$$\begin{cases} z = x - x_0 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega), \\ w = y - y_0 \in H^1(\Gamma), \end{cases} \tag{4.27}$$

e $z = w$ em Γ. Sendo assim, $(x,y,z,w) \in D(A)$. Dessa forma, o sistema (4.23) tem solução única e portanto, A é maximal monótono em $\mathbb{V} \times \mathbb{H}$.

Prova de ii) Mostremos que $-B$ é monótono, para isso considere $U = (x_1, y_1, z_1, w_1)^\top$ e $V = (x_2, y_2, z_2, w_2)^\top$,

$$\begin{aligned} (-BU + BV, U - V)_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}} &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a(x)g(z_1) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a(x)g(z_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \\ w_1 - w_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}} \\ &= (a(x)g(z_1) - a(x)g(z_2), z_1 - z_2)_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_\Omega a(x)g(z_1)[z_1 - z_2]\,dx - \int_\Omega a(x)g(z_2)[z_1 - z_2]\,dx \\ &= \int_\Omega a(x)(g(z_1) - g(z_2))[z_1 - z_2]\,dx \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

pela monotonicidade de g e do fato que a é não negativa.

Mostremos também que $-B$ é hemicontínuo.

De fato, temos que provar que dada $(x_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $x_n \to 0$, então,

$$\lim_{n\to+\infty} (-B(U + x_nV), W)_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}} = (BU, W)_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}},$$

para todo $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^\top, V = (v_1, v_2, v_3, v_4)^\top$ e $W = (w_1, w_2, w_3, w_4)^\top \in \mathbb{V} \times \mathbb{H}$, isto é,

$$\lim_{n\to+\infty} (ag(u_3 + x_nv_3), w_3)_{L^2(\Omega)} = (ag(u_3), w_3)_{L^2(\Omega)}. \tag{4.28}$$

Com efeito, definimos $b_n := ag(u_3 + x_nv_3)w_3$, então

$$\begin{aligned} |b_n(x)| &\leq a(x)|w_3(x)|K|u_3(x) + x_nv_3(x)| \\ &\leq a(x)K|w_3(x)||u_3(x)| + a(x)CK|w_3(x)||v_3(x)|, \end{aligned}$$

quase sempre em Ω, onde C é tal que $|x_n| \leq C$. Devido ao fato de $a \in L^\infty(\Omega)$ e $u_3, v_3, w_3 \in L^2(\Omega)$, obtemos que $b_n \in L^1(\Omega)$. Além disso, definindo

$$h := aK|w_3||u_3| + aCK|w_3||v_3|,$$

segue que $h \in L^1(\Omega)$ e $|b_n(x)| \leq h(x)$ quase sempre em Ω. Na sequência, observe que devido a continuidade de g, temos que

$$\lim_{n\to+\infty} a(x)g(u_3(x) + x_n(v_3(x))(w_3(x)) = a(x)g(u_3(x))w_3(x).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega a(x)g(u_3(x) + x_nv_3(x))w_3(x)\,dx = \int_\Omega a(x)g(u_3(x))w_3(x)\,dx,$$

e consequentemente (4.28) está provado.

Agora, mostremos que $-B$ é limitado (leva limitados em limitados).

De fato, seja $U = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{V} \times \mathbb{H}$ tal que $\|U\|_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}} \leq L$, logo

$$\begin{aligned} \|-BU\|^2_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}} &= \|a(x)g(u_3)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|a\|^2_\infty K^2\|u_3\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|a\|^2_\infty K^2L^2. \end{aligned}$$

Portanto, $-A$ é um operador maximal monótono, $-B$ é um operador monótono, hemicontínuo e limitado. De acordo com o Teorema 1.41 segue que $\mathcal{A} = -(A+B)$ é maximal monótono em $\mathbb{V} \times \mathbb{H}$.

Vamos mostrar agora que o operador não linear $\mathcal{F} : \mathbb{V} \times \mathbb{H} \to \mathbb{V} \times \mathbb{H}$ dado por $\mathcal{F}(x,y,z,w)^T = (0,0,-f(x),0)^T$ é um operador contínuo localmente Lipschitz.

Provemos, primeiramente, que $\mathcal{F}$ está bem definida.

Com efeito, note que se $u_1 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ então $f(u_1) \in L^2(\Omega)$. De fato, por (4.5) e, como $f(0) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(u_1)|^2 dx &\leq C \int_\Omega [(1+|u_1|^{p-1})|u_1|]^2 dx \\ &\leq C\left(\int_\Omega |u_1|^2 dx + \int_\Omega (|u_1|^{2(p-1)})|u_1|^2 dx \right). \end{aligned} \tag{4.29}$$

Pela imersão $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega |u_1|^2 dx = \|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\|u_1\|^2_{H^1_{\Gamma_0}(\Omega)} < +\infty. \tag{4.30}$$

Por outro lado, como $1 \leq p \leq \frac{n}{n-2}$, então $2 \leq 2p \leq \frac{2n}{n-2}$, assim, vale a imersão $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$, donde segue que

$$\int_\Omega (|u_1|^{2(p-1)})|u_1|^2 dx = \int_\Omega |u_1|^{2p} dx = \|u_1\|^{2p}_{L^{2p}(\Omega)} \leq C\|u_1\|^{2p}_{H^1_{\Gamma_0}}(\Omega) < +\infty. \tag{4.31}$$

Portanto, por (4.29), (4.30) e (4.31) concluímos que $f(u_1) \in L^2(\Omega)$.

Dessa forma, dado $U = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{V} \times \mathbb{H}$ temos

$$\|\mathcal{F}U\|^2_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}} = \int_\Omega |f(u_1)|^2 \, dx < +\infty.$$

Mostraremos agora que $\mathcal{F}$ é localmente Lipschitz, para tal, considere B um conjunto limitado em $\mathbb{V} \times \mathbb{H}$ tal que $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^\top, V = (v_1, v_2, v_3, v_4)^\top \in$ B. Desse modo,

$$\mathcal{F}(U) - \mathcal{F}(V) = (0, 0, -f(u_1) + f(v_1), 0)^T, \tag{4.32}$$

e então,

$$\|\mathcal{F}(U) - \mathcal{F}(V)\|^2_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}} \leq \| - f(u_1) + f(v_1)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.33}$$

Observe que por (4.1), temos que

$$\begin{aligned}
\|f(u_1)-f(v_1)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega |f(u_1)-f(v_1)|^2\,dx \\
&\le C\int_\Omega [1+|u_1|^{p-1}+|v_1|^{p-1})|u_1-v_1|]^2\,dx \\
&\le C\int_\Omega (1+|u_1|^{2(p-1)}+|v_1|^{2(p-1)})|u_1-v_1|^2\,dx \\
&= C\left(\int_\Omega |u_1-v_1|^2\,dx+\int_\Omega |u_1|^{2(p-1)}|u_1-v_1|^2\,dx+\int_\Omega |v_1|^{2(p-1)}|u_1-v_1|^2\,dx\right) \\
&= C\left(\|u_1-v_1\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_\Omega |u_1|^{2(p-1)}|u_1-v_1|^2\,dx+\int_\Omega |v_1|^{2(p-1)}|u_1-v_1|^2\,dx\right).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Usando a desigualdade de Hölder para os conjugados $\frac{p-1}{p}$ e $\frac{1}{p}$ e pela imersão $H^1_{\Gamma_0} \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$ concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_1|^{2(p-1)}|u_1-v_1|^2\,dx &\le \|u_1\|^{2(p-1)}_{L^{2p}(\Omega)}\|u_1-v_1\|^2_{L^{2p}(\Omega)} \\
&\le C\|u_1\|^{2(p-1)}_{H^1(\Omega)}\|u_1-v_1\|^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Além disso, temos $\|u_1\|^{2(p-1)}_{H^1(\Omega)} \le \|U\|_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}} \le R^{2(p-1)}$, então segue que,

$$\int_\Omega |u_1|^{2(p-1)}|u_1-v_1|^2\,dx \le CR^{2(p-1)}\|u_1-v_1\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{4.35}$$

Portanto, de (4.34) e (4.35) temos,

$$\|f(u_1)-f(v_1)\|^2_{L^2(\Omega)} \le CR^{2(p-1)}\|u_1-v_1\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{4.36}$$

Assim, de (4.33) vale que

$$\begin{aligned}
\|F(U)-F(V)\|^2_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}} &\le \widehat{C}(\|u_1-v_1\|^2_{H^1(\Omega)} \\
&\le \widehat{C}(\|U-V\|^2_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}}).
\end{aligned}$$

Consequentemente, pelo Teorema 1.42, o problema de Cauchy (4.16) tem uma única solução generalizada $U=(u,v,u_t,v_t)$ no intervalo $[0,T_{\max})$. Além disso, se $U^0\in D(\mathbb{A})$ a solução é regular.

Mostremos que $T_{\max} = +\infty$. Com efeito, suponhamos por absurdo que $T_{\max} < +\infty$, então, pelo Teorema 1.42,

$$\lim_{t \nearrow T_{max}} \|U(t)\|_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}} = +\infty. \tag{4.37}$$

Como a energia $E(t)$ definida em (4.15) é não crescente, temos $E(t) \leq E(0)$, para todo $t \in [0, T_{\max})$.

Por outro lado, de (4.1), deduzimos que

$$\begin{aligned} E(t) &\geq \frac{1}{2}(\|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_t(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} + \|\nabla_{\mathbf{G}} u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_{\mathbf{g}} v\|^2_{L^2(\Gamma)}) \\ &= \frac{1}{2}\|(u, v, u_t, v_t)\|_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\|U\|^2_{\mathbb{V}\times\mathbb{H}} \leq E(t) \leq E(0), \forall t \in [0, T_{\max}),$$

o que contradiz (4.37). Portanto, $T_{\max} = +\infty$. □

4.2 Decaimento Uniforme

Consideremos novamente o seguinte problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\mathbf{G}} u + f(u) + a(x)g(u_t) = 0 \text{ em } \Omega \times (0, \infty), \\ v_{tt} + \partial_\nu u + v_t = \Delta_{\mathbf{g}} v \text{ em } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u = 0 \text{ em } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ u = v \text{ em } \Gamma \times (0, \infty), \\ (u(x, 0), v(x, 0)) = (u_0, u_{0_{|\Gamma}} := v_0) \text{ em } \Omega, \\ (u_t(x, 0), v_t(x, 0)) = (u_1, u_{1_{|\Gamma}} := v_1) \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{4.38}$$

Sabemos que a energia associada ao problema (4.38) é dada por

$$\begin{aligned} E(t) := \int_\Omega \frac{1}{2}\left(|u_t(x, t)|^2 + |\nabla_{\mathbf{G}} u(x, t)|^2\right) dx \quad &+ \quad \int_{\Gamma_1} \left(|v_t(x, t)|^2 + |\nabla_{\mathbf{g}} v(x, t)|^2\right) d\Gamma \\ &+ \quad \int_\Omega F(u(x, t))\, dx. \end{aligned} \tag{4.39}$$

No que segue consideremos $\{u(t), v(t)\}$ soluções regulares para o problema (4.38). Assim, multiplicando a primeira equação de (4.38) por u' e integrando em Ω tem-se

$$(u'', u') - (\Delta_{\mathbf{G}} u, u') + (a(x)g(u'), u') + (f(u), u') = 0. \tag{4.40}$$

Daí,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega \Delta_{\mathbf{G}} u u'\,dx + \int_\Omega a(x)g(u')u'\,dx + \int_\Omega f(u)u' = 0. \tag{4.41}$$

Aplicando o Teorema de Green, temos

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta_{\mathbf{G}} u u'\,dx &= (\nabla_{\mathbf{G}} u, \nabla_{\mathbf{G}} u') - \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u u'\,d\Gamma \\ &= (\nabla_{\mathbf{G}} u, \nabla_{\mathbf{G}} u') - \int_{\Gamma_1} (-v'' - v' + \Delta_{\mathbf{g}} v)v'\,d\Gamma \\ &= (\nabla_{\mathbf{G}} u, \nabla_{\mathbf{G}} u') + \int_{\Gamma_1} v''v'\,d\Gamma + \int_{\Gamma_1} |v'|^2\,d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \Delta_{\mathbf{g}} v v'\,d\Gamma \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla_{\mathbf{G}} u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v'\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \int_{\Gamma_1} |v'|^2\,d\Gamma + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla_{\mathbf{g}} v\|^2_{L^2(\Gamma_1)}. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Logo, de (4.41) e (4.42) obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|u'\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_{\mathbf{G}} u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v'\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \|\nabla_{\mathbf{g}} v\|^2_{L^2(\Gamma_1)}] + \int_\Omega f(u)u'\,dx \\ = -\int_\Omega a(x)g(u')u'\,dx - \int_{\Gamma_1} |v'|^2\,d\Gamma, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|u'\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_{\mathbf{G}} u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v'\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \|\nabla_{\mathbf{g}} v\|^2_{L^2(\Gamma_1)}] + \frac{d}{dt}\int_\Omega F(u)\,dx \\ = -\int_\Omega a(x)g(u')u'\,dx - \int_{\Gamma_1} |v'|^2\,d\Gamma. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq 0.$$

Além disso, obtemos a seguinte identidade da energia

$$E(t_2) - E(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega a(x)g(u')u'\,dx\,dt - \int_{\Gamma_1} |v'|^2\,d\Gamma, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 < \infty. \tag{4.43}$$

Por argumentos de densidade, a identidade acima, bem como o lema a seguir, permanecem válidos para toda solução fraca.

Lema 4.9 *Dados $L > 0$ e $T > T_0$ existe $C = C(L,T) > 0$ tal que a seguinte desigualdade ocorre*

$$E(0) \leq C\left(\int_0^T\int_\Omega a(x)|g(u')|^2\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega a(x)|u'|^2\,dx\,dt + \int_0^T\int_{\Gamma_1} |v'|^2\,d\Gamma\,dt\right), \tag{4.44}$$

para toda solução regular de (4.38), assumindo que $E(0) \leq L$.

Demonstração: Vamos argumentar por contradição. Suponha por absurdo que (4.44) não se verifica e seja $\{u_k(0), u_k'(0), v_k(0), v_k'(0)\}$ uma sequência de dados iniciais regulares onde a solução correspondente $\{u_k, u_k', v_k, v_k'\}$, com $E_k(0)$ uniformemente limitada em k, verifica

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{E_k(0)}{\int_0^T \int_\Omega a(x)|g(u')|^2\,dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega a(x)|u'|^2\,dx\,dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |v'|^2\,dx\,d\Gamma} = +\infty, \tag{4.45}$$

ou equivalentemente,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\int_0^T \int_\Omega a(x)|g(u')|^2\,dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega a(x)|u'|^2\,dx\,dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |v'|^2\,dx\,d\Gamma}{E_k(0)} = 0. \tag{4.46}$$

Como $E_k(t) \leq E_k(0) \leq L$, onde L é uma constante positiva, obtemos uma subsequência, ainda denotada por $\{u_k\}$ que verifica

$$u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T;\mathbb{V}), \tag{4.47}$$

$$u_k' \overset{*}{\rightharpoonup} u' \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{4.48}$$

$$v_k' \overset{*}{\rightharpoonup} v' \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)). \tag{4.49}$$

Assim, por argumentos de compacidade clássicos segue que

$$u_k \to u \text{ fortemente em } L^2(0,T;L^q(\Omega)), \text{ para todo } q \in [2, 2^*), \tag{4.50}$$

$$v_k \to v \text{ fortemente em } L^2(0,T;L^q(\Gamma_1)), \text{ para todo } q \in [2, 2^*), \tag{4.51}$$

onde $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$. De (4.46) deduzimos que,

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^T \int_\Omega a(x)|u_k'|^2\,dx\,dt = 0, \tag{4.52}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^T \int_\Omega a(x)|g(u_k')|^2\,dx\,dt = 0 \tag{4.53}$$

e

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |v_k'|^2\,dx\,d\Gamma = 0. \tag{4.54}$$

Como $a(x) \geq a_0 > 0$ em $\omega \subset \Omega$, vem que

$$\lim_{k \to +\infty} \int_0^T \int_\omega |u_k'|^2 \, dx \, dt = 0 \tag{4.55}$$

e, por (4.48), temos que

$$u'(x,t) = 0 \;\text{ q.s em }\; \omega \times (0,T). \tag{4.56}$$

Temos também, de (4.54), que

$$v_k'(x,t) \to 0 \;\text{ em }\; L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)) \tag{4.57}$$

e, por (4.49),

$$v'(x,t) = 0 \;\text{ q.s em }\; \Gamma_1 \times (0,T). \tag{4.58}$$

Além disso, de (4.50) temos

$$f(u_k) \to f(u) \;\text{ q.s em }\; \Omega \times (0,T).$$

Da convergência acima e desde que $\{f(u_k)\}$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ segue, pelo Lema de Lions em (1.27), que

$$f(u_k) \rightharpoonup f(u) \;\text{ em }\; L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.59}$$

Vamos dividir a prova em dois casos:

i) Caso $u \neq 0$:

Tome a seguinte sequência de problemas

$$\begin{cases} u_k'' - \Delta_{\mathbf{G}} u_k + a(x) g(u_k') + f(u_k) = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ v_k'' + \partial_{\nu_K} u_k + v_k' = \Delta_{\mathbf{g}} v_k \text{ em } \Gamma_1 \times (0,T), \\ u_k = 0 \text{ em } \Gamma_0 \times (0,T), \\ v_k = u_k \text{ em } \Gamma \times (0,T), \\ (u_k(0), v_k(0)) = (u_k^0, u_{k_{|\Gamma}}^0 := v_k^0) \text{ em } \Omega \times \Gamma, \\ (u_k'(0), v_k'(0)) = (u_k^1, u_{k_{|\Gamma}}^1 := v_k^1) \text{ em } \Omega \times \Gamma, \end{cases} \tag{4.60}$$

com $E_k(t)$ a energia associada ao sistema (4.60).

Passando o limite em (4.60) e levando em conta (4.53), (4.47)-(4.51), (4.56), (4.58) e (4.59), temos

$$\begin{cases} u'' - \Delta_{\mathbf{G}} u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ u'(x,t) = 0 \text{ em } \omega \times (0,T). \end{cases} \tag{4.61}$$

Derivando em relação à t,

$$\begin{cases} u''' - \Delta_{\mathbf{G}} u' + f'(u)u' = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ u'(x,t) = 0 \text{ em } \omega \times (0,T). \end{cases} \tag{4.62}$$

Fazendo $u' = y$, temos

$$\begin{cases} y'' - \Delta_{\mathbf{G}} y + V_1 y = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ y = 0, \text{ em } \omega \times (0,T), \end{cases} \tag{4.63}$$

onde $V_1 = f'(u) \in L^{\frac{n+1}{2}}(\Omega)$.

Observe que $V_1 \in L^\infty(0,T; L^{\frac{n+1}{2}}(\Omega))$, pois

$$|f'(\lambda)|^{\frac{n+1}{2}} \leq C(1+|\lambda|)^{\frac{(p-1)(n+1)}{2}}$$

e, como $p \leq \frac{n}{n-2}$, então $p-1 < \frac{2}{n-2}$, assim $\frac{(p-1)(n+1)}{2} \leq \frac{n+1}{n-2} \leq \frac{2n}{n-2}$, se $n \geq 3$, e por

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), q \in \left[2, \frac{2n}{n-2}\right] \text{ para } n \geq 3,$$

segue o desejado.

Se $n = 2, V_1 \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$.

De fato,

$$|f'(u)|^{\frac{3}{2}} \leq (1+|u|)^{\frac{(p-1)3}{2}}. \tag{4.64}$$

Como $p - 1 \geq 0$, então $\frac{(p-1)3}{2} \geq 0$ e, para $n = 2$, sabemos que

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), q \in [2, \infty). \tag{4.65}$$

Logo, $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Assim, se $\frac{(p-1)3}{2} < 2$, temos $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{(p-1)3}{2}}$. Logo, como $u \in L^2(\Omega)$, temos que $u \in L^{\frac{(p+1)3}{2}}(\Omega)$ e, portanto,

$$\int_\Omega (1+|u|)^{\frac{(p-1)3}{2}} < \infty. \tag{4.66}$$

Se $\frac{(p-1)3}{2} \geq 2$, então, segue de (4.65).

Logo, pela Hipótese 4.5 segue que $y = u' = 0$.

Retornando para (4.61), temos

$$-\Delta_{\mathbf{G}} u + f(u) = 0, \tag{4.67}$$

donde

$$\begin{aligned}
0 &= -\int_\Omega \Delta_{\mathbf{G}} u u \, dx + \int_\Omega f(u) u \, dx \\
&= \int_\Omega |\nabla_{\mathbf{G}} u|^2 \, dx - \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u u \, d\Gamma + \int_\Omega f(u) u \, dx \\
&= \int_\Omega |\nabla_{\mathbf{G}} u|^2 \, dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\mathbf{g}} v|^2 \, d\Gamma + \int_\Omega f(u) u \, dx. \\
&= \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Gamma)} + \int_\Omega f(u) u \, dx \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Consequentemente, $u = 0$, o que é absurdo.

ii) Caso $u = 0$:

Defina

$$\alpha_k := \sqrt{E_k(0)}; \ \hat{u}_k := \frac{u_k}{\alpha_k} \ \text{ e } \ \hat{v}_k := \frac{v_k}{\alpha_k}. \tag{4.68}$$

Então de (4.60) e (4.68) temos a sequência de problemas normalizados

$$\begin{cases}
\hat{u}_k'' - \Delta_{\mathbf{G}} \hat{u}_k + \frac{1}{\alpha_k} a(x) g(u_k') + \frac{1}{\alpha_k} f(u_k) = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\
\hat{v}_k'' + \partial_{\nu_K} \hat{u}_k + \hat{v}_k' = \Delta_{\mathbf{g}} \hat{v}_k \text{ em } \Gamma_1 \times (0,T), \\
\hat{u}_k = \hat{v}_k \text{ em } \Gamma \times (0,T), \\
\hat{u}_k = 0 \text{ em } \Gamma_0 \times (0,T), \\
(\hat{u}_k(0), \hat{v}_k(0)) = (\frac{u_k^0}{\alpha_k}, \frac{v_k^0}{\alpha_k}) \text{ em } \Omega \times \Gamma, \\
(\hat{u}_k'(0), \hat{v}_k'(0)) = (\frac{u_k^1}{\alpha_k}, \frac{v_k^1}{\alpha_k}) \text{ em } \Omega \times \Gamma.
\end{cases} \tag{4.69}$$

Observe que

$$\widehat{E}_k(t) = \frac{1}{\alpha_k^2} E_k(t), \tag{4.70}$$

onde $\widehat{E}_k(t)$ é a energia associada ao problema (4.69).

De fato,

$$\begin{aligned}\widehat{E}_k(t) &= \frac{1}{2}\left\{\int_\Omega \left(|\hat{u}_k'|^2 + |\nabla_{\mathbf{G}}\hat{u}_k|^2\right)\,dx + \int_{\Gamma_1}\left(|\hat{v}_k'|^2 + |\nabla_{\mathbf{g}}\hat{v}_k|^2\right)\,d\Gamma + \frac{1}{\alpha_k^2}\int_\Omega F(u_k)\,dx\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{\int_\Omega \left(\left|\frac{u_k'}{\alpha_k}\right|^2 + \left|\nabla_{\mathbf{G}}\left(\frac{u_k}{\alpha_k}\right)\right|^2\right)\,dx + \int_{\Gamma_1}\left(\left|\nabla_{\mathbf{g}}\left(\frac{v_k}{\alpha_k}\right)\right|^2 + \left|\frac{v_k'}{\alpha_k}\right|^2\right)\,d\Gamma\right. \qquad (4.71)\\ &\left.+\frac{1}{\alpha_k^2}\int_\Omega F(u_k)\,dx\right\} = \frac{1}{\alpha_k^2}E_k(t).\end{aligned}$$

Em particular,

$$\widehat{E}_k(0) = \frac{1}{\alpha_k^2}E_k(0) = 1, \forall k \in \mathbb{N}. \qquad (4.72)$$

Vamos encontrar uma contradição provando que $\widehat{E}_k(0) \to 0$, quando $k \to +\infty$.

De (4.72), podemos extrair uma subsequência de (v_k) tal que

$$\hat{u}_k \overset{*}{\rightharpoonup} \hat{u} \text{ em } L^\infty(0,T;\mathbb{V}), \qquad (4.73)$$

$$\hat{u}_k' \overset{*}{\rightharpoonup} \hat{u}' \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \qquad (4.74)$$

$$\hat{v}_k' \overset{*}{\rightharpoonup} \hat{v}' \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)). \qquad (4.75)$$

Assim, empregando resultados clássicos de compacidade, segue que

$$\hat{u}_k \to \hat{u} \text{ fortemente em } L^2(0,T;L^q(\Omega)), \text{para todo } q \in [2,2^*), \qquad (4.76)$$

$$\hat{v}_k \to \hat{v} \text{ fortemente em } L^2(0,T;L^q(\Gamma_1)), \text{para todo } q \in [2,2^*), \qquad (4.77)$$

onde $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$.

Além disso, de (4.46) e (4.68), temos

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^T\int_\Omega a(x)|\hat{u}_k'|^2\,dx\,dt = 0 \qquad (4.78)$$

daí,

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^T\int_\omega |\hat{u}_k'|^2\,dx\,dt = 0, \qquad (4.79)$$

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^T\int_\Omega a(x)\frac{1}{{\alpha_k}^2}|g(u_k')|^2\,dx\,dt = 0, \qquad (4.80)$$

e

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^T\int_{\Gamma_1}|\hat{v}_k'|^2\,dx\,dt=0. \tag{4.81}$$

Note que de (4.79) e (4.81) resulta que

$$\hat{u}'=0 \text{ q.s em } \omega\times(0,T) \tag{4.82}$$

e

$$\hat{v}_k'\to 0 \text{ em } L^2(\Gamma_1\times(0,T)), \tag{4.83}$$

o que implica que

$$\hat{v}'=0 \text{ q.s em } \Gamma_1\times(0,T). \tag{4.84}$$

Por outro lado, sendo $\alpha_k := \sqrt{E_k(0)} \leq \sqrt{L}$, por hipótese, então pelo Teorema de Bolzano Weierstrass, (α_k) admite uma subsequência, que ainda denotaremos por (α_k), tal que $\alpha_k\to\alpha\in[0,R)$, para algum $R>0$. Temos dois casos a considerar:

Caso $i) : \alpha>0$

Passando o limite em (4.69), e uma vez que $\alpha_k\hat{u}_k=u_k\to 0$ fortemente em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, temos que

$$\begin{cases}\hat{u}''-\Delta_{\mathbf{G}}\hat{u}=0 \text{ em } \Omega\times(0,T),\\ \hat{u}'=0 \text{ em } \omega\times(0,T),\end{cases} \tag{4.85}$$

e derivando em relação a t,

$$\begin{cases}\hat{u}'''-\Delta_{\mathbf{G}}\hat{u}'=0 \text{ em } \Omega\times(0,T),\\ \hat{u}'=0 \text{ em } \omega\times(0,T).\end{cases} \tag{4.86}$$

Para $y=\hat{u}'$, temos

$$\begin{cases}y''-\Delta_{\mathbf{G}}y=0 \text{ em } \Omega\times(0,T),\\ y=0 \text{ em } \omega\times(0,T),\end{cases} \tag{4.87}$$

o que implica, pela Hipótese 4.5, que $y=0$. Assim, retornando para (4.85) e compondo com v, temos

$$\begin{aligned}0=-\int_\Omega\Delta_{\mathbf{G}}\hat{u}\hat{u}\,dx &= \int_\Omega|\nabla_{\mathbf{G}}\hat{u}|^2\,dx-\int_{\Gamma_1}\partial_\nu\hat{u}\hat{u}\,d\Gamma\\ &= \int_\Omega|\nabla_{\mathbf{G}}\hat{u}|^2\,dx+\int_{\Gamma_1}|\nabla_{\mathbf{g}}\hat{v}|^2\,d\Gamma\\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Consequentemente $\hat{u} = 0$.

Caso $ii) : \alpha = 0$

Se $\alpha = 0$, então $\alpha_k \to 0$, quando $k \to +\infty$. Note que podemos escrever

$$f(s) = f'(0)s + R(s),$$

onde $|R(s)| \leq c(|s|^2 + |s|^p)$. Então,

$$\frac{1}{\alpha_k} f(\alpha_k \hat{u}_k) = f'(0)\hat{u}_k + \frac{R(\alpha_k \hat{u}_k)}{\alpha_k},$$

com

$$\frac{R(\alpha_k \hat{u}_k)}{\alpha_k} \leq C(\alpha_k |\hat{u}_k|^2 + |\alpha_k|^{p-1} |\hat{u}_k|^p).$$

Note que

$$\alpha_k |\hat{u}_k|^2 + |\alpha_k|^{p-1} |\hat{u}_k|^p \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \tag{4.88}$$

De fato,

$$\begin{aligned} \||\hat{u}_k|^p\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &= \int_0^T \||\hat{u}_k|^p\|^2_{L^2(\Omega)} \, dt = \int_0^T \int_\Omega |\hat{u}_k|^{2p} \, dx \, dt \\ &= \int_0^T \|\hat{u}_k\|^{2p}_{L^{2p}(\Omega)} \, dt = \|\hat{u}_k\|_{L^{2p}(0,T;L^{2p}(\Omega))}. \end{aligned} \tag{4.89}$$

Temos que $\hat{u}_k$ é limitada em $L^\infty(0, T; \mathbb{V})$, em particular, $\hat{u}_k$ é limitada em $L^\infty(0, T; H^1_{\Gamma_0}(\Omega))$ e, como $1 \leq p \leq \dfrac{n}{n-2}$, então $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$, assim, segue que $\hat{u}_k$ é limitada em $L^\infty(0, T; L^{2p}(\Omega))$, donde $\hat{u}_k$ é limitada em $L^{2p}(0, T; L^{2p}(\Omega))$ e, de (4.89), temos que $|\hat{u}_k|^p$ é limitada em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, e como $\alpha_k \longrightarrow 0$, quando $k \longrightarrow \infty$, segue (4.88).

Portanto,

$$\frac{1}{\alpha_k} f(\alpha_k \hat{u}_k) \longrightarrow f'(0)\hat{u} \text{ fortemente em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \tag{4.90}$$

Dessa forma, passando o limite em (4.69), temos

$$\begin{cases} \hat{u}'' - \Delta_{\mathbf{G}} \hat{u} + f'(0)\hat{u} = 0 \text{ em } \Omega \times (0, T), \\ \hat{u}' = 0 \text{ em } \omega \times (0, T). \end{cases}$$

Derivando em relação a t segue que

$$\begin{cases} \hat{u}''' - \Delta_{\mathbf{G}}\hat{u}' + f'(0)\hat{u}' = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ \hat{u}' = 0 \text{ em } \omega \times (0,T). \end{cases}$$

Fazendo $y = \hat{u}'$, temos

$$\begin{cases} y'' - \Delta_{\mathbf{G}} y + f'(0)y = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \\ y = 0 \text{ em } \omega \times (0,T), \end{cases}$$

assim, como $V = f'(0) \in L^{\frac{n+1}{2}}(\Omega)$, segue pela Hipótese (4.5), que $y = \hat{u}' = 0$. Portanto, $\hat{u} = 0$.

Lembre-se que nosso objetivo é mostrar que $\widehat{E}_k(0) \to 0$, quando $k \to +\infty$. Daí, todas as convergências (4.73), (4.74) e (4.75) terão limites nulos. Para chegarmos a uma contradição com (4.72).

De (4.74) e do fato que $\hat{u}' = 0$ em $\Omega \times (0,T)$ vem que

$$\hat{u}_k' \rightharpoonup 0 \text{ em } L^2_{loc}(\Omega \times (0,T)). \tag{4.91}$$

Então, podemos considerar a medida de defeito microlocal (m.d.m) μ associada a $(\hat{u}_k')$ (garantida pelo Teorema 1.46 conforme observado em (1.48)).

Por outro lado, denotando

$$P\hat{u}_k := \Box\hat{u}_k = \partial_t^2 - \Delta_{\mathbf{G}}, \tag{4.92}$$

de (4.80), (4.90) e tendo em mente que $\hat{u} = 0$ em $\Omega \times (0,T)$, temos

$$\Box\hat{u}_k \to 0 \text{ fortemente em } L^2(\Omega \times (0,T)), \tag{4.93}$$

o que implica que

$$\partial_t\Box\hat{u}_k \to 0 \text{ fortemente em } H^{-1}_{loc}(\Omega \times (0,T)). \tag{4.94}$$

Da convergência em (4.94) deduzimos dois fatos:

(i) O supp(μ) está contido no conjunto característico do operador de ondas $\{\tau^2 = \frac{K(x)}{\rho(x)}\|\xi\|^2\}$ (pelo Teorema 1.50).

(ii) O supp(μ) é uma união de curvas do tipo

$$t \in I\cap]0,\infty[\longmapsto m\pm(t) = \left(t, x(t), \pm\frac{1}{\sqrt{1+|G(x)\dot{x}|^2}}, \pm\frac{G(x)\dot{x}}{\sqrt{1+|G(x)\dot{x}|^2}}\right), \tag{4.95}$$

onde $t \in I \longmapsto x(t) \in \Omega$ é uma geodésica para a métrica $G = \left(\frac{K(x)}{\rho(x)}\right)^{-1}$. (Pelo Teorema 1.55 e Proposição 1.56).

Dessa forma, tem-se que μ se propaga ao longo do fluxo bicaracterístico do operador P de ondas, isto significa que se algum ponto $\omega_0 = (t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ não pertence a supp(μ) então toda bicaracterística começando por ω_0 está fora do supp(μ).

Como por (4.79) temos que $\hat{u}_k' \to 0$ fortemente em $L^2(\omega \times (0,T))$ deduzimos (pela Observação 1.48) que $\mu = 0$ em $\omega \times (0,T)$ e, consequentemente, supp$(\mu) \subset (\Omega\backslash\omega) \times (0,T)$.

Por outro lado, sejam $t_0 \in (0,+\infty)$ e x uma geodésica definida perto de t_0. Como as geodésicas no interior de $\Omega\backslash\omega$, entram necessariamente na região ω, então para cada geodésica de métrica G, com $0 \in I$ existe $t > 0$ tal que $m\pm(t)$ não pertence ao $\operatorname{supp}(\mu)$, de modo que $m\pm(t_0)$ também não pertece ao $\operatorname{supp}(\mu)$. Como o tempo t_0 e a geodésica x são tomadas arbitrariamente, concluímos que $\operatorname{supp}(\mu)$ é vazio. Isto é, $\mu = 0$ em todo $\Omega \times (0,T)$.

Assim, por propagação, (pela Observação 1.48), tem-se que

$$\hat{u}_k' \to 0 \text{ fortemente em } L^2(\Omega \times (0,T). \tag{4.96}$$

Seja $\theta \in C_0^\infty(0,T)$ com $0 \le \theta \le 1$ e $\theta = 1$ em $(\varepsilon, T-\varepsilon)$. Multiplicando (4.69) por $\theta\hat{u}_k$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T \theta(t)(\hat{u}_k''(t), \hat{u}_k(t))\,dt - \int_0^T \theta(t)(\Delta_{\mathbf{G}}\hat{u}_k(t), \hat{u}_k(t))\,dt + \frac{1}{\alpha_k}\int_0^T (a(x)g(u_k'(t)), \hat{u}_k(t)) \\ + \frac{1}{\alpha_k}\int_0^T \theta(t)(f(\alpha_k\hat{u}_k(t)), \hat{u}_k(t)) = 0.\end{aligned} \tag{4.97}$$

Observe que,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\theta(t)(\hat{u}_k'(t), \hat{u}_k(t))_{L^2(\Omega)}\right] = \theta(t)(\hat{u}_k''(t), \hat{u}_k(t))_{L^2(\Omega)} + \theta(t)(\hat{u}_k'(t), \hat{u}_k'(t))_{L^2(\Omega)} \\ + (\hat{u}_k'(t), \hat{u}_k(t))_{L^2(\Omega)}\theta'(t).\end{aligned} \tag{4.98}$$

Integrando (4.98) de 0 a T, temos

$$\int_0^T \theta(t)(\hat{u}_k''(t), \hat{u}_k(t))_{L^2(\Omega)} = -\int_0^T \theta(t) \int_\Omega |\hat{u}_k'|^2 \, dxdt - \int_0^T \theta'(t)(\hat{u}_k'(t), \hat{u}_k(t))_{L^2(\Omega)} \, dt. \tag{4.99}$$

Além disso, pela fórmula de Green, temos

$$-\int_0^T \theta(t)(\Delta_{\mathbf{G}} \hat{u}_k(t), \hat{u}_k(t))_{L^2(\Omega)} = \int_0^T \theta(t) \int_\Omega |\nabla_{\mathbf{G}} \hat{u}_k(t)|^2 \, dxdt - \int_0^T \theta(t) \int_{\Gamma_1} \partial_\nu \hat{u}_k \hat{u}_k \, d\Gamma dt.$$

Logo,

$$\begin{aligned} -\int_0^T \theta(t)(\Delta_{\mathbf{G}} \hat{u}_k(t), \hat{u}_k(t))_{L^2(\Omega)} &= \int_0^T \theta(t) \int_\Omega |\nabla_{\mathbf{G}} \hat{u}_k(t)|^2 \, dxdt + \int_0^T \theta(t)(\hat{v}_k''(t), \hat{v}_k(t))_{L^2(\Gamma_1)} \\ &+ \int_0^T \theta(t) \int_{\Gamma_1} |\nabla_g \hat{v}_k|^2 \, d\Gamma dt + \int_0^T \theta(t)(\hat{v}_k'(t), \hat{v}_k(t))_{L^2(\Gamma_1)}. \end{aligned} \tag{4.100}$$

Note que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\theta(t)(\hat{v}_k'(t), \hat{v}_k(t))_{L^2(\Gamma_1)}\right] &= \theta(t)(\hat{v}_k''(t), \hat{v}_k(t))_{L^2(\Gamma_1)} + \theta(t)(\hat{v}_k'(t), \hat{v}_k'(t))_{L^2(\Gamma_1)} \\ &+ (\hat{v}_k'(t), \hat{v}_k(t))_{L^2(\Gamma_1)}\theta'(t). \end{aligned} \tag{4.101}$$

Integrando (4.101) de 0 a T, obtemos

$$\int_0^T \theta(t)(\hat{v}_k''(t), \hat{v}_k(t))_{L^2(\Gamma_1)} \, dt = -\int_0^T \theta(t) \int_{\Gamma_1} |\hat{v}_k'|^2 \, d\Gamma dt - \int_0^T \theta'(t)(\hat{v}_k'(t), \hat{v}_k(t))_{L^2(\Gamma_1)} \, dt. \tag{4.102}$$

De (4.99), (4.100), (4.102) e (4.97) temos,

$$\begin{aligned} &-\int_0^t \theta(T) \int_\Omega |\hat{u}_k'|^2 \, dxdt - \int_0^T \theta'(t)(\hat{u}_k'(t), \hat{u}_k(t))_{L^2(\Omega)} \, dt + \int_0^T \theta(t) \int_\Omega |\nabla_{\mathbf{G}} \hat{u}_k(t)|^2 \, dxdt \\ &-\int_0^T \theta(t) \int_{\Gamma_1} |\hat{v}_k'(t)|^2 \, dxdt - \int_0^T \theta_k'(t)(\hat{v}_k'(t), \hat{v}_k(t))_{L^2(\Gamma_1)} + \int_0^T \theta(t) \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\mathbf{g}} \hat{v}_k|^2 \, d\Gamma dt \\ &+ \frac{1}{\alpha_k} \int_0^T (a(x)g(u_k'(t), \hat{u}_k(t))_{L^2(\Omega)} \, dt + \int_0^T \theta(t)(\hat{v}_k'(t), \hat{v}_k(t))_{L^2(\Gamma_1)} \\ &+ \frac{1}{\alpha_k} \int_0^T \theta(t)(f(\alpha_k \hat{u}_k), \hat{u}_k)_{L^2(\Omega)} = 0. \end{aligned} \tag{4.103}$$

Considerando as convergências (4.76), (4.77), (4.80), (4.96), (4.83), (4.90) e tendo em mente que $\hat{u} = 0$, de (4.103) deduzimos que

$$\lim_{k \to +\infty} \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \left(\int_\Omega |\nabla_{\mathbf{G}} \hat{u}_k|^2 \, dxdt + \int_{\Gamma_1} |\nabla_{\mathbf{g}} \hat{v}_k|^2 \, d\Gamma dt \right) = 0. \tag{4.104}$$

Portanto,

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon}\int_{\Omega}|\nabla_{\mathbf{G}}\hat{v}_k|^2\,dxdt=0$$

e

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon}\int_{\Gamma_1}|\nabla_{\mathbf{g}}\hat{v}_k|^2\,d\Gamma\,dt=0.$$

Além disso, como

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\alpha_k}\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon}\int_{\Omega}f(\alpha_k\hat{u}_k)\hat{u}_k=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\alpha_k^2}\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon}\int_{\Omega}f(u_k)u_k\,dxdt=0, \tag{4.105}$$

então, por (4.105) e (4.1),

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\alpha_k^2}\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon}\int_{\Omega}F(u_k)\,dxdt=0, \tag{4.106}$$

o que implica, pelas convergências anteriores, que

$$\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon}\widehat{E}_k(t)\,dt\to 0. \tag{4.107}$$

Então, pelo decrescimento da energia, para todo $t\in[\varepsilon,T-\varepsilon]$, temos

$$\widehat{E}_k(T-\varepsilon)\leq\widehat{E}_k(t).$$

Logo,

$$\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon}\widehat{E}_k(T-\varepsilon)\,dt\leq\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon}\widehat{E}_k(t)\,dt\to 0,$$

quando $k\longrightarrow+\infty$. Assim,

$$(T-2\varepsilon)\widehat{E}_k(T-\varepsilon)\to 0. \tag{4.108}$$

Por outro lado, pela identidade da energia, temos

$$\widehat{E}_k(T-\varepsilon)-\widehat{E}_k(\varepsilon)=-\left(\frac{1}{\alpha_k}\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon}\int_{\Omega}a(x)g(u_k')\hat{u}_k'\,dx\,dt+\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon}\int_{\Gamma_1}|\hat{v}_k'|^2\,d\Gamma dt.\right), \tag{4.109}$$

assim,

$$\widehat{E}_k(\varepsilon)=\widehat{E}_k(T-\varepsilon)+\frac{1}{\alpha_k}\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon}\int_{\Omega}a(x)g(u_k')\hat{u}_k'\,dx\,dt-\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon}\int_{\Gamma_1}|\hat{v}_k'|^2\,d\Gamma\,dt. \tag{4.110}$$

Portanto, de (4.80), (4.96), (4.81) e (4.108) segue que

$$\widehat{E}_k(\varepsilon) \longrightarrow 0, \tag{4.111}$$

quando $k \longrightarrow +\infty$. Assim, escrevendo

$$\widehat{E}_k(0) = -[\widehat{E}_k(\varepsilon) - \widehat{E}_k(0)] + \widehat{E}_k(\varepsilon) \tag{4.112}$$

$$= \frac{1}{\alpha_k}\int_0^\varepsilon a(x)g(u_k')\hat{u}_k'\,dx\,dt + \int_0^\varepsilon \int_{\Gamma_1} |\hat{v}_k'|^2\,d\Gamma\,dt + \widehat{E}_k(\varepsilon), \tag{4.113}$$

de (4.80), (4.96), (4.81) e (4.111), segue que

$$\widehat{E}_k(0) \to 0, \text{ quando } k \to +\infty,$$

o que é absurdo, logo a prova do lema está completa. □

Antes de enunciar nosso resultado de estabilidade definiremos algumas funções. Para este propósito, estamos seguindo as ideias introduzidas primeiramente em Lasiecka e Tataru [61], as quais repetiremos brevemente. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função côncava, estritamente crescente com $h(0) = 0$ e tal que

$$h(sg(s)) \geq |s|^2 + |g(s)|^2 \text{ para } |s| < 1. \tag{4.114}$$

Note que tal função pode ser construída diretamente, das hipóteses de g dadas em (4.3). Com esta função, definimos

$$r(\cdot) = h\left(\frac{\cdot}{\text{med}(Q)}\right), \text{ onde } Q := \Omega \times (0,T). \tag{4.115}$$

Observe que r é monótona crescente, então $cI + r$ é invertível para todo $c \geq 0$. Para L uma constante positiva, colocamos

$$z(x) = (cI + r)^{-1}(Lx),\; L := (C\text{med}(Q))^{-1}, \tag{4.116}$$

onde C é uma constante positiva que será estabelecida posteriormente.

Dessa forma, a função z é positiva, contínua e estritamente crescente com $z(0) = 0$. Finalmente, seja

$$q(x) = x - (I + z)^{-1}(x). \tag{4.117}$$

Teorema 4.10 *(Taxa de decaimento uniforme). Suponha que as Hipóteses 4.2 e 4.3 sejam satisfeitas. Seja u a solução fraca do problema (4.38) com a energia E(t) definida como em (4.39), Então existe* $T_0 > 0$ *tal que*

$$E(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right), \forall t > T_0, \tag{4.118}$$

com $\lim_{t \to +\infty} S(t) = 0$, *onde o semigrupo de contração* $S(t)$ *é a solução da equação diferencial*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} S(t) + q(S(t)) = 0, \\ S(0) = E(0), \end{cases} \tag{4.119}$$

em que q *é dado em (4.117). Aqui a constante c (da definição (4.116)) é* $c = \dfrac{k^{-1} + K}{med(Q)(1 + \|a\|_\infty)}$.

Demonstração: Seja

$$\Sigma_\alpha = \{(x,t) \in Q; |u'| > 1 \text{ q.s}\}, \tag{4.120}$$

$$\Sigma_\beta = Q \setminus \Sigma_\alpha. \tag{4.121}$$

Então, por (4.3), temos

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_\alpha} a(x)(|g(u')|^2 + |u'|^2)\, d\Sigma_\alpha &\leq \int_{\Sigma_\alpha} a(x)(K|g(u')u'| + k^{-1}|g(u')u'|)\, d\Sigma_\alpha \\ &\leq (k^{-1} + K) \int_{\Sigma_\alpha} a(x) g(u') u'\, d\Sigma_\alpha. \end{aligned} \tag{4.122}$$

Além disso, de (4.114) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_\beta} a(x)(|g(u')|^2 + |u'|^2)\, d\Sigma_\beta &\leq \int_{\Sigma_\beta} a(x) h(g(u')u')\, d\Sigma_\beta \\ &= \int_{\Sigma_\beta} (1 + \|a\|_\infty) \frac{a(x)}{1 + \|a\|_\infty} h(g(u')u')\, d\Sigma_\beta \end{aligned} \tag{4.123}$$

e, como h é côncava, $h(0) = 0, a(x) \leq \|a\|_\infty + 1, h$ é crescente e $\dfrac{a(x)}{1 + \|a\|_\infty} < a(x)$ deduzimos, respectivamente,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_\beta} (1 + \|a\|_\infty) \frac{a(x)}{1 + \|a\|_\infty} h(g(u')u')\, d\Sigma_\beta &\leq \int_{\Sigma_\beta} (1 + \|a\|_\infty) h\left(\frac{a(x)}{1 + \|a\|_\infty}(g(u')u')\right) d\Sigma_\beta \\ &\leq \int_{\Sigma_\beta} (1 + \|a\|_\infty) h(a(x) g(u') u')\, d\Sigma_\beta. \end{aligned} \tag{4.124}$$

Dessa forma, de (4.123) e (4.124), vem que

$$\int_{\Sigma_\beta} a(x)(|g(u')|^2 + |u'|^2)\, d\Sigma_\beta \leq \int_{\Sigma_\beta} (1 + \|a\|_\infty) h(a(x)g(u')u')\, d\Sigma_\beta. \tag{4.125}$$

Pela Desigualdade de Jensen, temos que

$$\begin{aligned}(1 + \|a\|_\infty) \int_{\Sigma_\beta} h(a(x)g(u')u')\, d\Sigma_\beta &\leq (1 + \|a\|_\infty)\text{med}(Q) h\left(\frac{1}{\text{med}(Q)} \int_Q a(x)g(u')u'\, dQ\right) \\ &= (1 + \|a\|_\infty \text{med}(Q) r\left(\int_Q a(x)g(u')u'\, dQ\right), \end{aligned}\tag{4.126}$$

onde $r(s) = h\left(\dfrac{s}{\text{med}(Q)}\right)$ é definida em (4.115). Então, de (4.122), (4.125) e (4.126), segue que

$$\begin{aligned}\int_Q a(x)(|g(u')|^2 + |u'|^2)\, dQ &\leq (k^{-1} + K) \int_Q a(x)g(u')u'\, dQ \\ &+ (1 + \|a\|_\infty)\text{med}(Q) r\left(\int_Q a(x)g(u')u'\, dQ\right). \end{aligned}\tag{4.127}$$

Pelo Lema 4.9, temos

$$\begin{aligned} E(T) &\leq E(0) \leq C\left(\int_0^T \int_\Omega a(x)|g(u')|^2\, dxdt\right. \\ &+ \left.\int_0^T \int_\Omega a(x)|u'|^2\, dxdt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |v'|^2\, d\Gamma dt\right). \end{aligned}\tag{4.128}$$

Assim, de (4.127) e (4.128), vem que

$$\begin{aligned} E(T) &\leq (1 + \|a\|_\infty) C\left[\frac{k_0}{1 + \|a\|_\infty} \int_Q a(x)g(u')u'\, dQ\right. \\ &+ \left.\text{med}(Q) r\left(\int_Q a(x)g(u')u'\, dQ\right) + \frac{1}{1 + \|a\|_\infty} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |v'|^2\, d\Gamma dt\right], \end{aligned}\tag{4.129}$$

onde $k_0 = k^{-1} + K$.

Agora, note que

$$\begin{aligned} r\left(\int_Q a(x)g(u')u'\, dQ\right) &= h\left(\int_Q \frac{a(x)g(u')u'}{\text{med}(Q)}\, dQ\right) \\ &\leq h\left(\frac{\int_Q a(x)g(u')u'\, dQ + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |v'|^2\, d\Gamma dt}{\text{med}(Q)}\right) \\ &= r\left(\int_Q a(x)g(u')u'\, dQ + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |v'|^2\, d\Gamma dt\right). \end{aligned}\tag{4.130}$$

Assim, de (4.130) e (4.129), obtemos

$$\begin{aligned} E(T) \leq (1+\|a\|_\infty)C \Bigg[\frac{k_0}{(1+\|a\|_\infty)} \int_Q a(x)g(u')u'\, dQ + \frac{1}{1+\|a\|_\infty} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |v'|^2\, d\Gamma dt \\ + \text{med}(Q)\, r \left(\int_Q a(x)g(u')u'\, dQ + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |v'|^2\, d\Gamma dt\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{4.131}$$

Definindo

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{C\text{med}(Q)(1+\|a\|_\infty)}, \\ c &= \frac{k_0}{\text{med}(Q)(1+\|a\|_\infty)}, \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} z(E(t)) &\leq \int_Q a(x)g(u')u'\, dQ - \int_0^T \int_{\Gamma_1} |v'|^2\, d\Gamma dt \\ &= E(0) - E(T), \end{aligned} \tag{4.132}$$

onde a função z é definida em (4.116).

De fato, aplicando z em ambos os lados de (4.131), temos

$$\begin{aligned} z(E(T)) &\leq z\left(\frac{1}{L}(cI+r)\left(\int_Q a(x)g(u')u'\, dQ + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |v'|^2\, d\Gamma\, dt\right)\right) \\ &= (cI+r)^{-1}\left[L\left(\frac{1}{L}(cI+r)\right)\left(\int_Q a(x)g(u')u'\, dQ + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |v'|^2\, \Gamma\, dt\right)\right] \\ &= E(0) - E(T). \end{aligned}$$

Lembramos que a desigualdade acima é válida para T fixo suficientemente grande, isto é, para todo $T > T_0$, para algum $T_0 > 0$. Para finalizar a prova do Teorema, vamos invocar o seguinte resultado devido a Lasiecka e Tataru.

Lema 4.11 *Seja z uma função positiva e crescente tal que $z(0) = 0$. Como z é crescente, podemos definir uma função crescente $q, q(x) = x - (I+z)^{-1}(x)$. Considere a sequência s_m de números positivos que satisfaz*

$$s_{m+1} + z(s_{m+1}) \leq s_m.$$

Então, $s_m \leq S(m)$, onde $S(t)$ é a solução da equação diferencial

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) &= 0, \\ S(0) &= s_0. \end{cases}$$

Além disso, se $z(x) > 0$ *para* $x > 0$, *então* $\lim\limits_{t \to +\infty} S(t) = 0.$

Demonstração: Ver [61]. $\square$

Com este resultado em mente, substituímos T (respectivamente 0) em (4.132) por $m(T+1)$ (respectivamente mT) para obter

$$E(m(T+1)) + z(E(m(T+1))) \leq E(mT) \text{ para } m = 0, 1, ...$$

Aplicando o Lema 4.11 com $s_m = E(mT)$, resulta em

$$E(mT) \leq S(m), \text{ para } m = 0, 1, ...$$

Finalmente, usando a dissipatividade de $E(t)$, temos para $t = mT + \tau, 0 \leq \tau \leq T$,

$$E(t) \leq E(mT) \leq S(m) = S\left(\frac{T - \tau}{T}\right) \leq S\left(\frac{t}{T} - 1\right), \text{ para } t > T,$$

onde usamos acima o fato que $S(\cdot)$ é dissipativo. Com isto, a prova do Teorema está completa. $\square$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. F. Almeida, M. M. Cavalcanti and J. P. Zanchetta, Exponential decay for the coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations with locally distributed damping, *Communications on Pure & Applied Analysis,* 17 (2018), no. 5.

[2] A. F. Almeida, M. M. Cavalcanti and J. P. Zanchetta, Exponential stability for the coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations with locally distributed damping, to appear in *Evolution Equations & Control Theory,* (2019).

[3] L. Aloui, Smoothing effect for regularized Schrödinger equation on bounded domains, *Asymptot. Anal.*, **59** (2008), 179–193.

[4] L. Aloui, Smoothing effect for regularized Schrödinger equation on compact manifolds, *Collect. Math.*, **59** (2008), no. 1, 53–62.

[5] M. Astudillo, M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuosa, A. B. Pampu, Uniform Decay Rates estimates for the semilinear for the semilinear wave equation in inhomogeneous media with locally distributed nonlinear damping, *Nonlinearity.* 31. (2018), pp. 4031-4064.

[6] A. Bachelot, Problème de Cauchy pour des systèmes hyperboliques semi-linéares, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. non Linéaire*, **1** (1984), 453–478.

[7] J. B. Baillon and J. M. Chadam, The Cauchy problem for the coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations, in *Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations*, North Holland, Amsterdam,(1978), 37–44.

[8] C. Banquet, L. C. F. Ferreira and E. J. Villamizar-Roa, On existence and scattering theory for the Klein-Gordon-Schrödinger system in an infinite L2-norm setting, *Ann. Mat. Pura Appl.* **4**(194) (2015), no. 3, 781–804.

[9] V. Barbu, Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces, Noordhoff International Publishing, Bucharest, Romania, 1976.

[10] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch, Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Control Optim.* 30 (1992), no. 5, 1024-1065.

[11] Bey R. Bey, A. Hemmina and J. P. Lohéac, Boundary stabilization of the linear elastodinamic system by a Lyspunov-type method, *Revista Matemática Complutense* 16 (2), (2003), 417-441.

[12] P. Biler, Attractors for the system of Schrödinger and Klein-Gordon equations with Yukawa coupling, *SIAM J. Math. Anal.* **21** (1990), 1190–1212.

[13] V. Bisognin, M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti and J. Soriano, Uniform decay for the Klein-Gordon-Schrödinger equations with locally distributed damping, *NoDEA, Nonlinear differ. equ. appl.,* **15** (2008), 91–113 .

[14] H. Brezis, Opérateurs Maximaux Monotones et Semigroupes de Contractions dans le Espaces de Hilbert, Math. Stud. 5, North Holland, Amsterdam, 1973.

[15] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Springer, New York, 2011.

[16] H. Brezis e T. Cazenave, Nonlinear Evolution Equations. Preliminary version of chapters 1,2 and 3 and the appendix. UFRJ,1994.

[17] C. A. Bortot and M. M. Cavalcanti, Asymptotic stability for the damped Schrödinger equation on noncompact Riemannian manifolds and exterior domains, *Comm. Partial Differential Equations,* **39** (2014), no. 9, 1791–1820.

[18] C. A. Bortot and W. J. Corrêa, Exponential stability for the defocusing semilinear Schrödinger equation with locally distributed damping on a bounded domain, *Differential and Integral Equations,* **31** (2018), no. 3-4, 273–300.

[19] R. Buffe, Stabilization of the wave equation with Ventcel boundary, *J. Math. Pures Appl.* 108 (2017), 207-259.

[20] N. Burq, Controlabilité exacte de léquation des ondes dans des ouverts peu réguliers, *Asymptot. Anal.*, 14 (1997), pp. 157-191.

[21] N. Burq and P. Gérard, Condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte des ondes. (French) [A necessary and sufficient condition for the exact controllability of the wave equation] C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 325 (1997), no. 7, 749-752.

[22] N. Burq and P. Gérard, Contrôle Optimal des équations aux dérivées partielles. 2001, Url:http://www.math.u-psud.fr/ burq/articles/coursX.pdf

[23] N. Burq, P. Gérard and N. Tzvetkov, On nonlinear Schrödinger equations in exterior domains, [Equations de Schrödinger non linéaires dans des domaines extérieurs,] *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire,* **21** (2004), 295–318.

[24] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, Iniciação à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev. Maringá: Eduem, Brasil, 2009.

[25] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti e V. Komornik, Introdução à Análise Funcional, Maringá: Eduem, 2011.

[26] M. Cavalcanti and V. Domingos Cavalcanti, Global existence and uniform decay for the coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations, *NoDEA, Nonlinear differ. equ. appl.,* **7** (2000), 285–307.

[27] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka, J. A. Soriano, Asymptotic stability of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping-a sharp result. *Trans. Amer. Math. Soc.* 361 (2009), no. 9, 4561-4580.

[28] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka, J. A. Soriano, Asymptotic stability of the wave equation on compact manifolds and locally distributed damping: a sharp result. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 197 (2010), no. 3, 925-964.

[29] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. A. Soriano, F. Natali, Qualitative aspects for the cubic nonlinear Schrödinger equations with localized damping: exponential and polynomial stabilization, *J. Differential Equations,* **248** (2010), no. 12, 2955–2971.

[30] M. M. Cavalcanti, A. Khemmoudj and M. Medjen, Uniform stabilization of the damped Cauchy-Ventcel Problem with variable coefficients and dinamic boundary condition, *J. Math. Anal. Appl.* 328 (2), (2007), 900-930.

[31] M. M. Cavalcanti, I. Lasiecka and D. Toundykov, Wave equation with damping affecting only a subset of static Wentzell boundary in uniformly stable, *Transactions of the American Mathematical Society* (2012).

[32] M. M. Cavalcanti, I. Lasiecka and D. Toundykov, Geometrically constrained stabilization of wave equations with Wentzell boundary conditions, *Applicable Analysis: An international Journal*, (2012), 1427-1452.

[33] M. M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka and D. Toundykov, Stabilization of the damped wave equation with Cauchy-Ventcel boundary conditions. *J. Evol. Equ.* 9 (2009), no. 1, 143-169.

[34] I. Chueshov, M. Eller, I. Lasiecka, On the attractor for a semilinear wave equation with critical exponent and nonlinear boundary dissipation. *Comm. Partial Differential Equations* 27 (2002), no. 9-10, 1901-1951.

[35] J. Colliander, J. Holmer, N. Tzirakis, Low regularity global well-posedness for the Zakharov and Klein- Gordon-Schrödinger systems, *Trans. Amer. Soc. Math.,* **360** (2008), 4619–4638.

[36] P. Counstantin and J. C. Saut, Local smoothing properties of dispersive equation, *Journal of the American Mathematical Society,* **1**, (1988), 413–439.

[37] Z. Dai and P. Gao, Exponential attractor for dissipative Klein-Gordon-Schrödinger equations in $\mathbf{R}^3$, *Chim. Ann. Math. Ser. A.,* **21**(2) (2000), 241–250.

[38] M. Daoulatli, I. Lasiecka, D. Toundykov, Uniform energy decay for a wave equation with partially supported nonlinear boundary dissipation without growth restrictions, *Discrete Continuous Dynamical Systems - S,* 2 (1), (2009), 67-94.

[39] B. Dehman, P. Gérard, G. Lebeau, Stabilization and control for the nonlinear Schrödinger equation on a compact surface. *Math. Z.* 254 (2006), no. 4, 729-749.

[40] Dehman, B.; Lebeau, G.; Zuazua, E., Stabilization and control for the subcritical semilinear wave equation, Anna. Sci. Ec. Norm. Super. **36**, 525-551 (2003).

[41] I. Fukuda and M. Tsutsumi, On coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations I, *Bull. Sci. Engrg. Res. Lab. Waseda Univ.,* **69** (1975), 51–62.

[42] I. Fukuda and M. Tsutsumi, On coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations II, J. Math. Analysis Applic., **66** (1978), 358–378.

[43] I. Fukuda and M. Tsutsumi, On coupled Klein-Gordon Schrödinger equations III - Higher order interaction, decay and blow-up, *Math. Japonica,* **24** (1979), 307–321.

[44] I. Fukuda and M. Tsutsumi, On the Yukawa-coupled Klein-Gordon-Schödinger equations in three space dimensions, *Proc. Japan Acad.,* **51** (1975), 402–405.

[45] P. Gérard, Microlocal defect measures, *Comm. Partial Differential Equations* 16 (1991) 1761-1794.

[46] O. Goubet, A. Hakim and A. Mostafa, Regularity of the attractor for a coupled Klein-Gordon-Schrödinger system, *Diff. Integal Equ.,* **16**(5) (2003), 573–581.

[47] B. Guo and Y. Li, Attractor for dissipative Klein-Gordon-Schrödinger equations in $\mathbf{R}^3$, *Journal of Differential Equations,* **136** (1997), 356–377.

[48] B. Guo and Y. Li, Attractor for the dissipative generalized Klein-Gordon-Schrödinger equations, *J. Partial Differ. Equations,* **11** (3) (1998), 260–272.

[49] B. Guo and Y. Li, Asymptotic smoothing effect of solutions to weakly dissipative Klein-Gordon-Schrödinger equations, *J. Math. Anal. Appl.,* **282** (2003), 256–265.

[50] Y. Han, On the Cauchy problem for the coupled Klein-Gordon-Schrödinger system with rough data, *Discret. Contin. Dyn. Syst.,* **12** (2005), 233–242.

[51] N. Hayashi, Global strong solutions of coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations, *Funkcialaj Ekvacioj,* **29** (1986), 299–307.

[52] N. Hayashi and W. Von Wahl, On the global strong solutions of coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations, *J. Math. Soc. Japan,* **39** (1987), 489–497.

[53] A. Hemmina, Stalibization frontère de problèmes de Ventcel, *ESAIM, Control Optim. Calc. Var.* 5, (2000), 591-622.

[54] A. Hemmina, Exact controllabity of the linear elasticity system with evolutive Ventcel conditions, *Port. Math.,* 58 (3), (2001), 271-315.

[55] A. Hemmina, Contrôlabilité exacte d'un problème avec conditions de Ventcel évolutives pour le système linéaire de l'élasticité, *Optimal Control* 324 (1), (1997), 195-200.

[56] J. Jost. Riemannian Geometry and Geometric Analysis. Springer Verlag, 2008.

[57] A. Khemmoudj, M. Medjen, Exponential decay for the semilinear damped Cauchy-Ventcel problem, *Bol. Soc. Paran. Mat.* 22 (2), (2004), 97-116.

[58] H. Koch, D. Tataru, Dispersive estimates for principally normal pseudodifferential operators. *Commun. Pure Appl. Math.* 58(2), 217-284 (2005)

[59] H. Lange and B. Wang, Regularity of the global attractor for the Klein-Gordon-Schrödinger equation, *Math. Methods Appl. Sci.,* **22**(17) (1999), 1535–1554.

[60] H. Lange and B. Wang, Attractors for the Klein-Gordon-Schrödinger equation, *J. Math. Phys.,* **40**(5) (1999), 2445–2457.

[61] I. Lasiecka and D. Tataru, Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping, *Differential and integral Equations*, 6 (1993), 507-533.

[62] I. Lasiecka, R. Triggiani and P. F. Yao, Exact controllability for second-order hyperbolic equations with variable coefficients-principal part and first-order term, *Nonlinear Analysis Theory, Methods and Application,* 30 (1), Proc. 2nd World Congress of Nonlinear Analysis, (1997), 111-122.

[63] I. Lasiecka, R. Triggiani, and P. F. Yao, Inverse/Observability estimates for second-order hyperbolic equations with variable coefficients, *J. Math. Anal. Appl.* 235, (1999), 13-57.

[64] G. Lebeau, Controle de l'equation de Schrödinger. (french) [control of the Schrödinger equation], *J. Math. Pures Appl.* (9) 71 no. 3, (1992), 267-291.

[65] Y. Li, Q. Shi, C. Wang and S. Wang, Well-posedness for the nonlinear Klein-Gordon-Schrödinger equations with heterointeractions. *J. Math. Phys.* 51, (2010), 032-102.

[66] J. L. Lions, *Quelques Métodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires,* Dunod, Paris, (1969).

[67] J. L. Lions, *Controlabilité exacte, perturbations et Stabilisation de systèmes distribués,* Tome 1, Masson, Paris, (1988).

[68] J.L. Lions-E.Magenes, *Problèmes Aux Limites Non Homogènes et Applications,* Dunod, Paris, (1968), Vol. 1.

[69] E. Machtyngier, Exact controllability for the Schrödinger equation. *J. Control and Optimization.* 32, no1, (1994), 24-34.

[70] L.A Medeiros; E.A Mello, A integral de Lebesgue. Textos Matemáticos, Vol.18, ed. 4, Instituto de Matemática-UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1989.

[71] L. A, Medeiros , Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações. Textos de Métodos Matemáticos, Vol. 16, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1983.

[72] D. Mercier, S. Nicaise, M. A. Sammoury and A. Wehbe, Indirect stability of the wave equation with a dynamic boundary control, *Mathematische Nachrichten* (2017), 1-33.

[73] C. Miao and G. Xu, Global solutions of the Klein-Gordon-Schrödinger system with rough data in $\mathbb{R}^{2+1}$, *J. Differ. Equ.,* **227** (2006) 365–405.

[74] M. M. Miranda, Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev, Bol. So. Paran. Mat. (2 série), vol 11, num 2 (1990), 131-137.

[75] M. Ohta, Stability of Stationary States for the Coupled Klein-Gordon-Schrödinger Equations, *Nonlinear Analysis, Theory , Methods and Appl.,* **27**(4) (1996), 455–461.

[76] T. Ozawa and Y. Tsutsumi, Asymptotic behaviour of solutions for the coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations, *Adv. Stud. Pure Math.,* **23** (1994), 295–305.

[77] H. Pecher, Global solutions of the Klein-Gordon-Schrödinger system with rough data, *Differ. Int. Equ.,* **17** (2004), 179–214.

[78] M. N. Poulou and N. M. Stavrakakis, Global attractor for a system of Klein-Gordon-Schrödinger type in all R, *Nonlinear Anal.,* **74** (2011), no. 7, 2548–2562.

[79] M. N. Poulou and N. M. Stavrakakis, Uniform decay for a local dissipative Klein-Gordon-Schrödinger type system, *Electron. J. Differential Equations,* (2012), No. 179. 16pp.

[80] J. Rauch - M. Taylor, Decay of solutions to n ondissipative hyperbolic systems on compact manifolds. *Comm. Pure Appl. Math.* 28(4) (1975), 501-523.

[81] J.E.M. Rivera, Teoria das Distribuções e Equações Diferenciais Parciais.

[82] A. Ruiz, Unique Continuation for Weak Solutions of the Wave Equation plus a Potential, *J. Math. Pures. Appl.* 71 (1992) 455-467.

[83] J. Simon, Compact Sets in the space $L^p(0, T, B)$. Ann. Mat. Pura Appl. 146 65-96 (1987).

[84] A. Shimomura, Scattering theory for the coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations in two space dimensions, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo,* **10** (2003), 661–685.

[85] A. Shimomura, Scattering theory for the coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations in two space dimensions. II, *Hokkaido Math. J.,* **34** (2005), 405–433.

[86] J. Simon, Compact Sets in the space $L^p(0,T,B)$. Ann. Mat. Pura Appl. 146 65-96 (1987).

[87] N. Tzirakis, The Cauchy problem for the Klein-Gordon-Schrödinger system in low dimensions below the energy space, *Comm. Partial Differ. Equ.,* **30** (2005), 605–641.

[88] B. Wang, Classical global solutions for non-linear Klein-Gordon-Schrödinger equations, *Math. Methods Appl. Sci.,* **20** (1997), 599–616.

[89] H. Yukawa, On the interaction of elementary particles I, *Proc. Physico-Math. Soc. Japan,* **17** (1935), 48–57.

[90] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Aplications. Vol 2A: Linear monotone operators, Springer-Verlag, 1990.