

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
(Doutorado)

FABRÍCIO CRISTÓFANI

**ESTABILIDADE ORBITAL DE ONDAS  
VIAJANTES PERIÓDICAS PARA EQUAÇÕES DO  
TIPO KORTEWEG-DE VRIES E DISPERSIVA  
REGULARIZADA**

Maringá/PR

2018

FABRÍCIO CRISTÓFANI

**ESTABILIDADE ORBITAL DE ONDAS  
VIAJANTES PERIÓDICAS PARA EQUAÇÕES DO  
TIPO KORTEWEG-DE VRIES E DISPERSIVA  
REGULARIZADA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.  
Área de Concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali

Maringá/PR

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

C933e Cristófani, Fabrício  
Estabilidade orbital de ondas viajantes  
periódicas para equações do tipo Korteweg-de Vries e  
dispersiva regularizada / Fabrício Cristófani. --  
Maringá, 2018.  
vi, 92 p. : il., tabs., color.

Orientador: Prof<sup>o</sup>. Dr<sup>o</sup>. Fábio Matheus Amorin  
Natali.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de  
Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-  
Graduação em Matemática - Área de Concentração:  
Análise, 2018.

1. Estabilidade orbital. 2. Ondas viajantes  
periódicas. 3. Equação de Kawahara. 4. Equação  
logarítima de Korteweg-de Vries. 5. Equação  
dispersiva regularizada. 6. Orbital stability. 7.  
Periodic traveling waves. 8. Kawahara equation. 9.  
Logarithmic Korteweg-de Vries equation. 10.  
Regularized dispersive equation. I. Natali, Fábio  
Matheus Amorin, orient. II. Universidade Estadual de  
Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-  
Graduação em Matemática - Área de Concentração:  
Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 515.353

Edilson Damasio CRB9-1.123

FABRÍCIO CRISTÓFANI

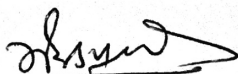
ESTABILIDADE ORBITAL DE ONDAS VIAJANTES PERIÓDICAS PARA EQUAÇÕES  
DO TIPO KORTEWEG-DE VRIES E DISPERSIVA REGULARIZADA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

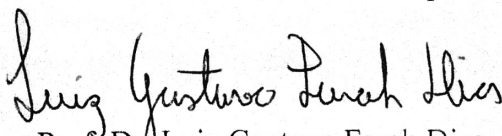
COMISSÃO JULGADORA:



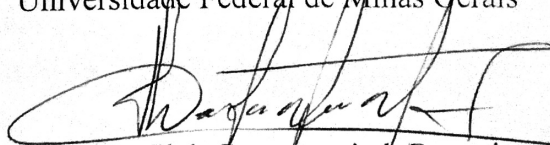
Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali  
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)



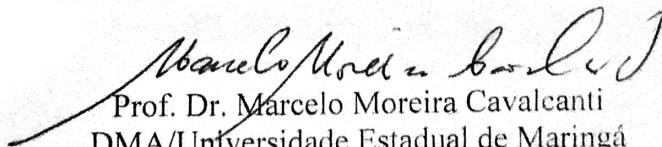
Prof. Dr. Mahendra Prasad Panthee  
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Luiz Gustavo Farah Dias  
Universidade Federal de Minas Gerais



Prof. Dr. Gleb Germanovitch Doronin  
DMA/Universidade Estadual de Maringá



Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti  
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 23 de fevereiro de 2018.

Local de defesa: Auditório do Departamento de Matemática, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

*Dedico esta tese à minha família e amigos.*

---

---

# AGRADECIMENTOS

---

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus, pois ele me deu força e coragem para seguir em frente e não desistir.

Agradeço aos meus pais, que sempre me apoiaram e incentivaram a trilhar esse caminho. À toda minha família: avós, tios, tias, primas e primos, muito obrigado por me ajudarem nessa conquista.

A todos meus amigos, que constituem a minha segunda família. Obrigado por me ajudarem em momentos difíceis de minha vida e por me proporcionarem ótimos encontros ao lado de vocês.

Agradeço a todos os professores e funcionários do Departamento de Matemática que contribuíram para minha formação. Em especial, agradeço ao professor Fábio Matheus Amorin Natali pela paciência e confiança depositada em meu trabalho.

À capes, pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todas as pessoas que acreditaram em mim e que, de alguma maneira, fazem parte desta conquista e da minha vida.

---

---

# RESUMO

---

Esta tese aborda o estudo da estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas relacionadas a três importantes equações dispersivas não lineares. Inicialmente, estudamos a estabilidade orbital com perfil dnoidal associada a equação de Kawahara baseando-se nos argumentos desenvolvidos em [7] e [13]. Num segundo momento, motivados pelo trabalho apresentado em [28], determinamos resultados de boa colocação bem como a estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas relacionadas a equação logarítmica de Korteweg-de Vries. Neste contexto, construímos uma superfície suave de ondas periódicas utilizando um aperfeiçoamento da teoria desenvolvida em [63]. O mesmo trabalho foi utilizado para estabelecermos as propriedades espectrais do operador linearizado em torno da onda periódica. Após este ocorrido, uma adaptação das teorias de estabilidade contidas em [45], [54] e [79] foi apresentada afim de obtermos nossos resultados de estabilidade. Por fim, apresentamos um novo critério para se obter a estabilidade orbital de ondas periódicas relacionadas a uma classe geral de equações dispersivas regularizadas. O estudo é baseado nas recentes ideias desenvolvidas em [6] e possui, como aplicação direta do nosso método, o fato de que uma classe especial de equações regularizadas fracionárias de Korteweg-de Vries sempre admite ondas periódicas estáveis.

**Palavras-chave:** Estabilidade orbital, Ondas viajantes periódicas, Equação de Kawahara, Equação logarítmica de Korteweg-de Vries, Equação dispersiva regularizada.

---

---

# ABSTRACT

---

This thesis concerns the study of orbital stability of periodic traveling waves related for three important nonlinear dispersive equations. Initially, we study the orbital stability with dnoidal profile associated to the Kawahara equation based on the arguments developed in [7] and [13]. After, motivated by [28], we determine a global well-posedness result as well as the orbital stability of periodic waves related to the logarithmic Korteweg-de Vries equation. To do so, we have presented a smooth surface of periodic waves by using an improvement of the theory in [63]. The same work was used to establish the spectral properties of the linearized operator around the periodic wave. Next, an adaptation of the stability theories developed in [45], [54] and [79] were presented to get our stability results. Finally, we showed a new criterion to obtain the orbital stability of periodic traveling waves related to a general class of regularized dispersive equations. The study is based on the recent ideas from [6] and it has, as a direct application of our method, the fact that a special class of regularized fractionary Korteweg-de Vries equations always admit stable periodic waves.

**Key-words:** Orbital stability, Periodic traveling waves, Kawahara equation, Logarithmic Korteweg-de Vries equation, Regularized dispersive equation.



---

# LISTA DE FIGURAS

---

2.1	Gráfico de $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\log g(x))$ com $L = 2\pi$ . . . . .	22
2.2	Lado esquerdo: gráfico da função $Z(k)$ . Lado direito: gráfico da função $\tilde{p}(k)$ . . . . .	24
3.1	Lado esquerdo: Gráficos das funções $g = g_\omega$ e $G = G_\omega$ para $\omega = 1$ . Lado direito: Plano de fase da equação $-\phi'' + \omega\phi - \phi \log \phi^2 = 0$ . As órbitas em azul são aquelas tais que $\phi$ é periódica e não muda de sinal. . . . .	40
3.2	Lado esquerdo: Gráfico das funções $g$ (vermelho) e $G$ (azul) para $\omega \in \mathbb{R}$ e $ A  < 2e^{\omega/2-1}$ , $A < 0$ . Lado direito: Gráfico das funções $g$ (vermelho) e $G$ (azul) para $\omega \in \mathbb{R}$ e $ A  < 2e^{\omega/2-1}$ , $A > 0$ . . . . .	45
3.3	Lado esquerdo: Gráfico das funções $g$ (vermelho) e $G$ (azul) para $\omega \in \mathbb{R}$ e $A = 2e^{\omega/2-1}$ . Lado direito: Gráfico das funções $g$ (vermelho) e $G$ (azul) para $\omega \in \mathbb{R}$ e $A = -2e^{\omega/2-1}$ . . . . .	45
3.4	Lado esquerdo: Gráfico das funções $g$ (vermelho) e $G$ (azul) para $\omega \in \mathbb{R}$ e $ A  > 2e^{\omega/2-1}$ , $A < 0$ . Lado direito: Gráfico das funções $g$ (vermelho) e $G$ (azul) para $\omega \in \mathbb{R}$ e $ A  > 2e^{\omega/2-1}$ , $A > 0$ . . . . .	46
3.5	Lado esquerdo: Plano de fase para $ A  < 2e^{\omega/2-1}$ , $A < 0$ . Lado direito: Plano de fase para $ A  < 2e^{\omega/2-1}$ , e $A > 0$ . Nos dois casos, as órbitas em azul são aquelas em que $\phi_{(\omega,A)}$ é periódico e não muda de sinal. . . . .	47
3.6	Lado esquerdo: Plano de fase para $ A  > 2e^{\omega/2-1}$ , $A < 0$ . Lado direito: Plano de fase para $ A  > 2e^{\omega/2-1}$ , e $A > 0$ . Neste caso, as órbitas em azul são aquelas em que $\phi_{(\omega,A)}$ é positivo. . . . .	47
4.1	Gráfico de $\omega_0$ dado em 4.47. . . . .	69
4.2	Gráfico de $g(k) := 48KE - 16K^2(2 - k^2)$ . . . . .	70
4.3	Gráfico de $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\log g(x))$ . . . . .	78
4.4	Gráfico de $j_1$ . . . . .	79

---

---

# SUMÁRIO

---

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>8</b>
1.1	Espaços de Sobolev Periódicos . . . . .	8
1.2	Teoria Floquet e o Espectro do Operador de Hill . . . . .	11
1.2.1	Existência de Ondas Periódicas . . . . .	11
1.2.2	Propriedades Espectrais . . . . .	13
1.3	Espectro de Operadores via Propriedades de Positividade . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Estabilidade Orbital de Ondas Periódicas para a Equação de Kawahara</b>	<b>18</b>
2.1	Existência de Solução Explícita e Propriedades Espectrais . . . . .	19
2.2	Estabilidade Orbital . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Estabilidade Orbital de Ondas Periódicas para a Equação log-KdV</b>	<b>31</b>
3.1	Resultado de Boa Colocação . . . . .	31
3.2	Estabilidade Orbital . . . . .	39
3.2.1	Primeiro caso: $A = 0$ . . . . .	39
3.2.2	Segundo caso: $A \neq 0$ . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Estabilidade Orbital de Soluções Ondas Periódicas para Equações Dispersivas Regularizadas</b>	<b>58</b>
4.1	Estabilidade Orbital de Ondas Periódicas . . . . .	59
4.2	Aplicações . . . . .	68
4.2.1	Equação Benjamin-Bona-Mahony . . . . .	68
4.2.2	Equação de Quinta Ordem . . . . .	71
4.2.3	Estabilidade Orbital de Minimizadores . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Apêndice</b>	<b>84</b>
5.1	Funções Elípticas de Jacobi . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Comentários e Estudos Futuros</b>	<b>86</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>87</b>

---

# INTRODUÇÃO

---

Atualmente, o estudo da estabilidade orbital de ondas viajantes para modelos de evolução não lineares está se destacando significativamente no cenário atual de pesquisa em Matemática. Tal fato é justificado pelos recentes resultados publicados que visam abordar as simetrias naturais características de modelos onde os problemas envolvidos se relacionam a fenômenos presentes na natureza tais como: fluxos de água, íons, ondas eletromagnéticas e comportamento de partículas.

As equações diferenciais de evolução estudadas nesta tese são do tipo dispersiva e algumas delas pertencem à classe de equações que possuem a forma abstrata

$$u_t = JE'(u) \tag{1}$$

onde  $u : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ ,  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ , é uma função com valores em  $\mathbb{K}^n$ ,  $n \geq 1$ , sendo  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $J$  é um operador definido em um espaço de Hilbert  $X$  e  $E$  é o funcional energia associado a equação com  $E'$  representando a derivada de Fréchet do mesmo. As equações oriundas da forma (1) que estudaremos possuem ao menos três quantidades conservadas. Além disso, neste contexto, as leis de conservação são funcionais de classe  $C^2$  e definidos em espaços de Hilbert adequados ao problema (iremos detalhar estes fatos nos próximos capítulos).

Um dos primeiros estudos do comportamento desses modelos dispersivos se iniciou na metade do século XVIII quando John Scott Russell observou que ondas criadas na superfície de um canal de águas rasas se propagavam com velocidade constante e sem mudar o seu formato. Estas ondas foram chamadas de ondas viajantes. Após esta observação, várias equações que admitem este tipo de solução tem sido estudada na literatura corrente. Dentre tais modelos destacamos as seguintes equações dispersivas unidimensionais ( $n = 1$ ) que são frutos de estudo desta tese.

(I) Equação de Kawahara

$$u_t + uu_x + u_{xxx} - u_{xxxx} = 0;$$

(II) Equação de Korteweg-de Vries com não linearidade logarítmica

$$u_t + u_{xxx} + (u \log(u^2))_x = 0;$$

(III) Equação do tipo regularizada dispersiva

$$u_t + u_x + uu_x + (\mathcal{M}u)_t = 0.$$

onde  $\mathcal{M}$  é um operador diferencial ou pseudo-diferencial definido via multiplicador de Fourier por

$$\widehat{\mathcal{M}g}(\kappa) = \theta(\kappa)\widehat{g}(\kappa), \quad \kappa \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

com  $\theta$  contínuo e satisfazendo

$$v_1|\kappa|^{m_2} \leq \theta(\kappa) \leq v_2|\kappa|^{m_2}, \quad m_2 > 0, \quad (3)$$

para todo  $\kappa \in \mathbb{Z}$  e para algum  $v_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Nas as equações citadas anteriormente, a única que não se encaixa na forma (1) é a equação (III). Entretanto, as equações apresentadas em (I), (II) e (III) possuem uma característica em comum: elas são invariantes pela ação do grupo  $\mathbb{R}$  de translações. Neste contexto, as ondas viajantes consideradas são soluções da forma

$$u(x, t) = \varphi(x - \omega t), \quad (4)$$

onde  $\omega \in \mathbb{R}$  é a velocidade da onda e  $\varphi$  é uma função periódica suave. Deste modo, as ondas do tipo (4) a serem estudadas possuem um perfil periódico com período fixado  $L > 0$ , isto é, satisfaz as condições

$$\varphi(0) = \varphi(L), \quad \text{e} \quad \varphi'(0) = \varphi'(L).$$

De um modo geral, o processo para encontrar estas ondas viajantes se resume em obter soluções de uma EDO da forma

$$\mathcal{F}(\mathcal{M}(\varphi), \varphi, \omega, A) = 0, \quad (5)$$

onde  $\mathcal{F}$  é uma função suave,  $\omega$  e  $A$  são parâmetros reais, e  $\mathcal{M}$  é o operador definido em (2). Sendo assim, é esperado que  $\varphi$  seja dependente de  $\omega$  e  $A$  e, conseqüentemente, podemos denotar  $\varphi := \varphi_{(\omega, A)}$ .

Suponhamos que uma equação dispersiva arbitrária possua existência e unicidade de soluções globais. Quando pensamos em ondas viajantes para esta equação, uma pergunta natural de se fazer é: se considerarmos um dado inicial suficientemente próximo de uma onda viajante, será que as soluções evoluídas em qualquer tempo  $t$  com este dado inicial se manterão perto da órbita gerada por translações dessa onda? Esta pergunta se resume ao conceito de estabilidade orbital. *Formalmente, dizemos que uma onda viajante do tipo (4) é orbitalmente estável em um espaço de Hilbert  $X$ , se para cada  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $\delta > 0$  tal que se  $\|u_0 - \varphi\|_X < \delta$  e  $u(x, t)$  é uma solução da equação com dado  $u(x, 0) = u_0(x)$ , então  $u(x, t)$  existe para todo  $t \in \mathbb{R}$  e*

$$\inf_{y \in \mathbb{R}} \|u(\cdot, t) - \varphi(\cdot + y)\|_X < \varepsilon,$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . *Caso contrário, dizemos que a onda viajante é orbitalmente instável. É importante salientar que o conceito de estabilidade orbital acima está relacionado a equações que possuem invariância por translações. Para o estudo da estabilidade orbital onde as equações possuem outras simetrias, recomendamos ao leitor as referências [45] e [46].*

Descreveremos agora o que nos motivou a estudar esses três problemas. Uma das motivações para estudarmos a estabilidade orbital para a equação de Kawahara apresentada em (I) foi o trabalho realizado por Albert [4] onde ele provou que a onda solitária da forma

$$u(x, t) = \varphi(x - c_0 t) = \operatorname{sech}^4 \left( x - \frac{12}{35} t \right), \quad (6)$$

com  $c_0 = \frac{12}{35}$ , é uma solução orbitalmente estável com respeito ao fluxo da equação de Kawahara

$$u_t + uu_x + \frac{13}{420} u_{xxx} - \frac{1}{1680} u_{xxxxx} = 0. \quad (7)$$

Para obter este resultado, Albert usou a ortogonalidade dos polinômios de Gegenbauer para provar que a quantidade  $I = \langle \Psi, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$  é estritamente negativa, onde  $\Psi \in H^4(\mathbb{R})$  é tal que  $\mathcal{L}\Psi = \varphi$ . Em outras palavras, ele obteve seu resultado de estabilidade considerando apenas a órbita gerada por uma única solução uma vez que, com o perfil apresentado em (6), não era possível construir uma curva suave de soluções ondas solitárias associadas a equação (7) conforme é necessário para que a teoria da estabilidade de Grillakis, Shatah e Strauss [45] possa ser aplicada. No contexto periódico, também podemos citar como motivação para estudarmos esta equação, o trabalho desenvolvido por Haragus, Lombardi e Scheel [49], onde os autores provaram a estabilidade linear de ondas periódicas com amplitude pequena relacionadas a equação de Kawahara. Mais detalhadamente, eles estabeleceram a estabilidade espectral de ondas viajantes com velocidade  $c$  desde que a amplitude  $\lambda$  satisfizesse a condição  $\lambda = o(|c|^{\frac{5}{4}})^2$ . A título de comparação, em nosso estudo desta equação, provamos a estabilidade orbital de ondas periódicas viajantes para qualquer velocidade  $c$  real.

No que tange a estabilidade orbital para a equação de Korteweg-de Vries com não linearidade logarítmica apresentada em (II) (log-KdV daqui em diante), vimos que no trabalho desenvolvido por Carles e Pelinovsky [28], os autores estabelecem a estabilidade espectral de soluções com perfil onda solitária Gaussiana da forma

$$\phi_\omega(x) = e^{\frac{1}{2} + \frac{\omega}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Neste caso, os autores estudaram a estabilidade espectral para esta solução via operador linear, proveniente da linearização da equação log-KdV em torno de (8), no espaço  $L^2(\mathbb{R})$ . Em particular, eles mostraram que tal operador possui um espectro puramente discreto com um autovalor duplo no zero e uma sequência simétrica de autovalores imaginários puramente simples. Além disso, eles verificaram que as autofunções associadas não decaem da mesma forma que as funções Gaussianas, porém, decaem algebricamente. Vale ressaltar que, em [28], os autores também apresentaram a estabilidade orbital de ondas viajantes da forma (8). Entretanto, devido a necessidade da unicidade e dependência contínua do problema, este resultado foi apresentado de maneira condicionada. Mais precisamente, os autores estabeleceram a estabilidade orbital (no espaço de energia) desde que a unicidade e a dependência contínua do problema ocorressem em um espaço adequado de  $H^1(\mathbb{R})$  com a condição

$$\partial_x(\log |u|) \in L^\infty(\mathbb{R}; L^\infty(\mathbb{R})). \quad (9)$$

Notemos que nos deparamos com um grande problema, pois a solução dada em (8) não satisfaz a condição (9). Em nossa abordagem, apesar de ser necessário assumir (9) para que o problema de Cauchy associado à equação log-KdV (II) possua unicidade de solução, provamos que as soluções periódicas construídas são regulares e limitadas. Portanto, satisfazem claramente a condição (9).

Por fim, podemos dizer que a motivação para estudar a equação regularizada apresentada em (III) surgiu das ideias desenvolvidas no estudo da equação log-KdV dada em (II) e do trabalho desenvolvido por Hur e Johnson [51]. Neste artigo, os autores apresentaram a estabilidade orbital no contexto periódico de soluções ondas viajantes oriundas da equação de Korteweg-de Vries fracionária (f-KdV daqui por diante) dada por

$$u_t - \Lambda^\alpha u_x + (u^2)_x = 0$$

com  $\alpha \in (1/3, 2]$  e  $\Lambda = \sqrt{-\partial_x^2}$ . Mais precisamente, os autores mostraram que a existência de uma superfície de soluções ondas viajantes provenientes de uma minimização de funcionais relacionados a energia do problema são cruciais para a obtenção de estabilidade. Apesar de grande relevância do problema, tal resultado ficou condicionado a não singularidade de uma matriz Jacobiana associada as quantidades conservadas do problema (os detalhes sobre essa condição podem ser encontrados no Capítulo 4).

Quatro dos principais trabalhos pioneiros ao conceito de estabilidade orbital, cuja as ideias apresentadas são utilizadas até os dias atuais, foram as teorias de estabilidade não linear desenvolvidas por Bona [20], Bona, Souganidis e Strauss [21], Grillakis, Shatah e Strauss [45] e Weinstein [79], [80] e [81]. Os trabalhos citados anteriormente estabelecem resultados de estabilidade orbital para ondas solitárias, isto é, soluções  $\varphi = \varphi_\omega$  que satisfazem

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi^{(n)}(x) = 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

É importante observar que, nestes casos mencionados, temos  $A \equiv 0$  na equação (5).

Por outro lado, quando estamos no contexto periódico, temos que  $A$  pode ser não nulo. Desta forma, uma das maneiras de contornar esta dificuldade e provar a estabilidade usando as teorias até então conhecidas foi assumir a condição de média zero para a onda viajante conforme foi apresentado na referência [12]. Com o decorrer do tempo, vários trabalhos de grande relevância (ver [9], [10], [13], [14], [63], [67], [69] e [70]) abordaram o caso onde as soluções ondas viajantes periódicas foram obtidas assumindo-se que  $A \equiv 0$ . Vale ressaltar que, neste caso, além de soluções ondas solitárias, também é possível de se obter soluções ondas periódicas. O motivo de assumir a condição  $A \equiv 0$  era devido ao fato que nas teorias clássicas de estabilidade havia a necessidade de se provar que a onda  $\varphi$  era um ponto crítico de um funcional conveniente.

Recentemente, vários trabalhos estão sendo desenvolvidos considerando-se o caso  $A \neq 0$ . Como exemplo, podemos citar o trabalho de Johnson [54], onde o autor explora a estabilidade de ondas viajantes para a equação GKdV dada por

$$u_t = u_{xxx} + f(u)_x, \tag{10}$$

onde  $f$  é uma função suficientemente suave satisfazendo algumas hipóteses de convexidade. Nesta abordagem, Johnson não utiliza a forma explícita da onda viajante. A princípio, este fato parece vantajoso. Todavia, é necessário supor a positividade de certos determinantes Jacobianos que dependem das quantidades conservadas referentes a equação (10).

Um outro trabalho de grande relevância a ser citado é o artigo desenvolvido por Natali e Neves [66], onde os autores também abordaram o caso  $A \neq 0$ . Nesta caso, os autores seguiram as ideias desenvolvidas por Weinstein [79], [80] e [81], e conseguiram obter a estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas pares para as equações 3-KdV (equação (10) com  $f(u) = u^4$ ) e logarítmica Schrödinger

$$iu_t + u_{xx} + \log(|u|^2)u = 0$$

onde  $u$  é uma função de valores complexos.

De um modo geral, para a obtenção de estabilidade orbital, baseando-se principalmente nos argumentos desenvolvidos por Grillakis, Shatah e Strauss [45] e Weinstein [79], [80] e [81], consiste em usar as quantidades conservadas para se obter a uniformidade no tempo necessária na condição imposta pela definição de orbitalmente estável. Mais detalhadamente, é preciso definir um funcional  $G : X \rightarrow \mathbb{R}$  de tal modo que a solução onda viajante seja um ponto crítico de  $G$ , ou seja,  $G'(\varphi) = 0$ . Tal funcional pode ser escrito como

$$G = E + \omega F + AM, \tag{11}$$

onde  $E$ ,  $F$  e  $M$  são funcionais conservados que não dependem de  $\omega$  e  $A$ . A seguir, mostra-se que a onda viajante  $\varphi$  é um mínimo local do funcional  $E$  restrito a um certo vínculo. É importante mencionar que, recentemente, tem se observado que tal restrição não é mais necessária (veja por exemplo [6]) e, conseqüentemente, resultados mais abrangentes estão surgindo. Em todo este processo, a análise do espectro do operador

$$\mathcal{L} := G''(\varphi) \tag{12}$$

é essencial, uma vez que a minimização citada é obtida via método variacional.

Basicamente, para se obter a estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas para os modelos (I), (II) e (III) (dentre outros) é preciso determinar quatro propriedades listadas a seguir.

(P1) Mostrar a existência uma curva suave não trivial de soluções ondas viajantes periódicas para a equação (5) da forma

$$k \in \mathcal{J} \subset \mathbb{R} \rightarrow \varphi_{(\omega(k), A(k))} \in C_{per}^\infty([0, L]),$$

ou mostrar a existência de uma superfície suave de soluções ondas viajantes periódicas para a equação (5) da forma

$$(\omega, A) \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \varphi_{(\omega, A)} \in C_{per}^\infty([0, L]).$$

Esta escolha vai depender da equação e da diretriz que será tomada para se obter os resultados desejados;

- (P2) Provar que o operador  $\mathcal{L} := G'''(\varphi)$  possui autovalores reais e um único autovalor negativo  $\lambda_0$  sendo este simples. Este fato é essencial para conseguirmos as minimizações necessárias para o teorema de estabilidade;
- (P3) Concluir que o autovalor 0 é simples para o operador  $\mathcal{L}$  e está associado a autofunção  $\varphi'$ . O fato de 0 ser autovalor decorre diretamente da equação (5);
- (P4) Considerar um espaço tangente  $\Upsilon_0$  a uma variedade adequada ao problema dependente das quantidades  $F$  e  $M$ , e mostrar que existe  $\Phi \in X$  tal que  $\langle \mathcal{L}\Phi, \varphi \rangle = 0$ , para todo  $\varphi \in \Upsilon_0$ , e

$$I := \langle \mathcal{L}\Phi, \Phi \rangle < 0, \quad (13)$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  representa o produto interno em  $L^2_{per}([0, L])$  com período  $L > 0$ . Esta condição é extremamente importante pois desta forma conseguimos mostrar a existência de uma constante  $B > 0$  tal que

$$\langle \mathcal{L}v, v \rangle \geq B\|v\|_X^2,$$

para todo  $v \in \Upsilon_0$  tal que  $\langle v, \varphi' \rangle = 0$ . Vale mencionar que, recentemente, foram desenvolvidos trabalhos nos quais a condição (13) é trocada por uma condição de não singularidade de uma matriz Jacobiana (veja, por exemplo, [51]). Neste caso estudado, tal resultado é provado usando a existência de uma superfície suave de soluções ondas periódicas oriunda de uma minimização de funcionais.

Nesta tese, iremos nos basear nestas quatro propriedades. Além disso, melhoraremos a relevância dos argumentos citados e forneceremos uma importante contribuição para se obter a estabilidade orbital usando a existência de curva e superfície de soluções ondas viajantes periódicas.

No capítulo 2, provamos a estabilidade de ondas viajantes periódicas para a equação de Kawahara (I). Mais precisamente, mostramos a existência de uma curva suave de soluções periódicas da forma

$$\begin{aligned} \varphi(x) = a &+ b \left( \operatorname{dn}^2 \left( \frac{2K}{L}x, k \right) - \frac{E}{K} \right) \\ &+ d \left( \operatorname{dn}^4 \left( \frac{2K}{L}x, k \right) - (2 - k^2) \frac{2E}{3K} + \frac{1 - k^2}{3} \right), \end{aligned}$$

onde  $K = K(k)$  é a integral elíptica do primeiro tipo,  $E = E(k)$  é a integral elíptica do segundo tipo e ambas dependem do módulo  $k \in (0, 1)$ . As propriedades espectrais para o operador  $\mathcal{L}$  citadas em (P2) e (P3) são provadas baseando-se na teoria desenvolvida por Angulo e Natali [13]. E, por fim, a condição (P4) é provada utilizando-se a forma explícita de  $\varphi$ .

No capítulo 3, provamos a boa colocação para a equação logarítmica de Korteweg-de Vries (II). Além disso, mostramos a existência e, em seguida, a estabilidade orbital de ondas



viajantes periódicas para tal equação sem o conhecimento da forma explícita de tais ondas baseando-se na teoria desenvolvida em [66].

Finalmente, baseando-se no trabalho de Hur e Johnson [51], mostramos no Capítulo 4 que a equação regularizada dispersiva apresentada em (III) sempre possui ondas viajantes orbitalmente estáveis.

A presente tese deu origem aos seguintes artigos:

- NATALI, F.; CRISTÓFANI, F.; ANDRADE, T. P. **Orbital Stability of Periodic Traveling Wave Solutions for the Kawahara Equation.** Journal of Mathematical Physics, **58** (2017), pg. 051504.
- NATALI, F.; CRISTÓFANI, F.; PASTOR, A. **Orbital Stability of Periodic Traveling-Wave Solutions for the Log-KdV Equation.** J. Diff. Equat., **263** (2017), pg. 2630-2660.
- CRISTÓFANI, F.; NATALI, F.; PASTOR, A. **Periodic Traveling-Wave Solutions for Regularized Dispersive Equations: Sufficient Conditions for Orbital Stability with Applications.** Preprint, (2017).

# Preliminares

## 1.1 Espaços de Sobolev Periódicos

Nesta seção, veremos resumidamente o conceito de transformada de Fourier para funções periódicas e, usando tal conceito, definiremos os espaços de Sobolev periódicos. As informações aqui apresentadas podem ser encontradas detalhadamente em Iório e Iório, [53].

Sejam o intervalo  $J \subset \mathbb{R}$  e  $p$  tal que  $1 \leq p \leq \infty$ . Denotemos por  $L^p(J)$  o espaço de todas as funções mensuráveis à Lebesgue  $f : J \rightarrow \mathbb{K}$ , onde  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , tais que

$$\|f\|_{L^p(J)} = \left( \int_J |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \text{ se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|f\|_{L^p(J)} = \sup_{x \in J} \text{ess } |f(x)| < \infty, \text{ se } p = \infty.$$

O espaço normado  $(L^p(J), \|\cdot\|_{L^p(J)})$  é um espaço de Banach. Além disto,  $L^2(J)$  é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle_{L^2(J)} = \int_J f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \forall f, g \in L^2(J).$$

Seja  $L > 0$  um número real fixado. Denotemos por  $\mathcal{P} = C_{per}^\infty = C_{per}^\infty([0, L])$  o conjunto de todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  que são infinitamente diferenciáveis e periódicas de período  $L$ . Designemos  $\mathcal{P}'$ , o espaço das distribuições periódicas, como sendo o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos definidos de  $\mathcal{P}$  em  $\mathbb{C}$ . O valor de  $\psi \in \mathcal{P}'$  em  $\varphi \in \mathcal{P}$  é denotado por  $\psi(\varphi) = [\psi, \varphi]$ .

Consideremos  $k \in \mathbb{Z}$  e a função  $\Theta_k(x) = e^{\frac{2\pi i k x}{L}}, \forall x \in \mathbb{R}$ . A transformada de Fourier de  $\psi \in \mathcal{P}'$  é a função  $\widehat{\psi} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  dada pela lei de formação

$$\widehat{\psi}(k) = \frac{1}{L} [\psi, \Theta_{-k}], \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

O espaço das sequências rapidamente decrescentes, denotado por  $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ , é o conjunto de todas as sequências de valores complexos  $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  tais que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^j |\alpha_k| < \infty, \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots$$

A transformada de Fourier inversa de  $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$  é a função  $\check{\alpha} \in \mathcal{P}$  dada por

$$\check{\alpha}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \Theta_k(x).$$

Fixemos  $p$  real, de modo que  $p \geq 1$ . A função  $\psi \in L^p([0, L])$  define uma distribuição periódica. Neste caso,  $\psi \in \mathcal{P}'$  com

$$[\psi, \varphi] = \int_0^L \psi(x)\varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}.$$

Desta maneira, a transformada de Fourier da função  $\psi \in L^p([0, L])$  é dada por

$$\widehat{\psi}(k) = \frac{1}{L} \int_0^L \psi(x)e^{-\frac{2\pi i k x}{L}} dx, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

O espaço das sequências  $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  denotado por  $\ell^2$  é definido como sendo

$$\ell^2 = \left\{ \alpha; \|\alpha\|_{\ell^2} := \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

Seja  $s \in \mathbb{R}$ . O espaço de Sobolev  $H_{per}^s([0, L])$  é definido como o conjunto de todas as distribuições periódicas  $f \in \mathcal{P}'$  com

$$\|f\|_{H_{per}^s([0, L])}^2 = L \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 < \infty.$$

O conjunto  $H_{per}^s([0, L])$  é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle_{H_{per}^s([0, L])} = L \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)}, \quad \forall f, g \in H_{per}^s([0, L]).$$

Definamos  $L_{per}^2([0, L]) := H_{per}^0([0, L])$ . Por sua vez, o conjunto  $L_{per}^2([0, L])$  é, na verdade, um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle_{L_{per}^2([0, L])} = \int_0^L f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \forall f, g \in L_{per}^2([0, L])$$

e norma  $\|\cdot\|_{L_{per}^2([0, L])}$ . Adicionalmente, para todo  $s \in \mathbb{R}$ ,  $(H_{per}^s([0, L]))'$ , o dual topológico de  $H_{per}^s([0, L])$ , é isometricamente isomorfo ao espaço  $H_{per}^{-s}([0, L])$ . Se  $f \in H_{per}^{-s}([0, L])$  e  $g \in H_{per}^s([0, L])$ , o par dualidade é representado por

$$[f, g]_{H_{per}^{-s}([0, L]), H_{per}^s([0, L])} = L \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)}.$$

Vemos que  $H_{per}^s([0, L]) \hookrightarrow H_{per}^r([0, L])$  sempre que  $s \geq r$ , onde  $s, r \in \mathbb{R}$ . Em particular, para cada  $s \geq 0$ ,  $H_{per}^s([0, L]) \hookrightarrow L_{per}^2([0, L])$ . Complementamos que

$$H_{per}^1([0, L]) \hookrightarrow L_{per}^{m_1}([0, L]) \hookrightarrow L_{per}^{m_2}([0, L]), \quad \forall m_1, m_2 \in [1, +\infty], \quad m_1 \geq m_2.$$

Neste último caso, para  $m \in [1, +\infty]$ , convencionamos que

$$L_{per}^m([0, L]) := \{f; f \text{ é uma função } L\text{-periódica e } f|_{[0, L]} \in L^m([0, L])\}$$

e

$$\|f\|_{L_{per}^m([0,L])} = \|f\|_{L^m([0,L])}, \quad \forall f \in L_{per}^m([0,L]).$$

Seja  $s = n \in \mathbb{Z}^+$ . O espaço de Sobolev  $H_{per}^n([0,L])$  pode ser interpretado como o conjunto das distribuições periódicas  $f \in \mathcal{P}'$  tais que

$$f^{(j)} \in L_{per}^2([0,L]), \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, n\},$$

onde  $f^{(j)}$  denota a  $j$ -ésima derivada de  $f$  tomada no sentido de  $\mathcal{P}'$ . A norma

$$\|f\|_{H_{per}^n([0,L])} = \left( \sum_{j=0}^n \|f^{(j)}\|_{L_{per}^2([0,L])}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f \in H_{per}^n([0,L]),$$

é equivalente à norma de  $H_{per}^n([0,L])$  apresentada acima para índice geral.

Sejam  $L > 0$  e  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Definamos  $H_{per,e}^n([0,L])$  como o conjunto de todas as funções  $f : [0,L] \rightarrow \mathbb{K}$  tais que  $f \in H_{per}^n([0,L])$  e a extensão  $L$ -periódica de  $f$  sobre  $\mathbb{R}$  é uma função par. Denotemos  $L_{per,e}^2([0,L]) := H_{per,e}^0([0,L])$  e, para cada  $n \in \mathbb{Z}^+$ , podemos provar que  $H_{per,e}^n([0,L])$  é um espaço de Hilbert.

Sejam  $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  e  $\beta = (\beta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  duas sequências de números complexos e  $s \in \mathbb{R}$ . O espaço  $\ell_{s,L}^2 := \ell_{s,L}^2(\mathbb{Z})$  é definido por

$$\ell_{s,L}^2(\mathbb{Z}) = \left\{ \alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}; \|\alpha\|_{\ell_{s,L}^2} := L \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s |\alpha_k|^2 < \infty \right\}$$

O espaço  $\ell_{s,L}^2$  definido acima é um espaço de Hilbert com relação ao produto interno

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{\ell_{s,L}^2} = L \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s \alpha_k \overline{\beta_k}$$

De acordo com o que foi visto, temos que  $f \in H_{per}^s([0,L])$  se, e somente se  $(\widehat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell_{s,L}^2$  e, além disso,  $\|f\|_{H_{per}^s([0,L])} = \|\widehat{f}\|_{\ell_{s,L}^2}$ . Definamos a convolução de  $\alpha$  e  $\beta$  com sendo a sequência  $\alpha * \beta$  dada por

$$(\alpha * \beta)_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_{k-j} \beta_j,$$

sempre que o lado direito da igualdade acima faça sentido.

Denotemos por  $PC_{per}$  o espaço das funções contínuas por partes e periódicas de período  $L$ . Dado  $f \in PC_{per}$ , a transformada de Fourier de  $f$  é sequência de números complexos  $\widehat{f} = (\widehat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  definida por

$$\widehat{f}(k) = c_k = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-\frac{2\pi i k x}{L}} dx.$$

Os números  $\widehat{f}(k) = c_k$  são os coeficientes de Fourier de  $f$  e a série

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k x}{L}}$$

é a série de Fourier gerada por  $f$ .

## 1.2 Teoria Floquet e o Espectro do Operador de Hill

Nesta seção, estudaremos uma versão aprimorada da teoria Floquet. Natali e Neves apresentaram, em [66], uma adaptação da teoria Floquet que permite o estudo de características espectrais do operador de Hill em vista da dedução do sinal de uma determinada constante. Este estudo foi recentemente aprimorado por Natali, Pastor e Cristófani (veja [65]) e nos permite compreender que, sob certas exigências, independentemente do período relativo ao espaço de Sobolev periódico considerado, é possível construirmos famílias de operadores com os mesmos índices de inércia e, conseqüentemente, com as mesmas características espectrais.

### 1.2.1 Existência de Ondas Periódicas

Consideremos a equação de Euler-Lagrange

$$-\varphi'' + g(\mu, \varphi) = 0, \quad (1.1)$$

onde  $g : \mathcal{P} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ . Nosso intuito é estudar a existência de soluções periódicas para a equação (1.1). Assumamos que  $\mu \in \mathcal{P}$ , onde  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto aberto. Considerando que a função  $g(\cdot, \varphi)$  seja diferenciável em  $\mathcal{P}$  e  $g(\mu, \cdot)$  seja, no mínimo, localmente Lipschitziana, temos que a ocorrência do teorema da unicidade para problemas de valores iniciais associado a (1.1) é válido para este caso. Como a equação (1.1) é conservativa, segue que suas soluções periódicas estão contidas em curvas de nível de energia do tipo

$$\mathcal{H}(\varphi, \xi) = -\frac{\xi^2}{2} + G(\mu, \varphi), \quad (1.2)$$

onde  $\varphi' = \xi$ ,  $\partial G / \partial \varphi = g$  e  $G(\mu, 0) = 0$ .

Adicionalmente, suponhamos que a função  $g$  atenda às seguintes condições:

- (a1) Para cada  $\mu \in \mathcal{P}$ , a função  $g(\mu, \cdot)$  admite duas raízes consecutivas  $r_1 = r_1(\mu)$  e  $r_2 = r_2(\mu)$  que correspondem aos pontos de equilíbrio  $(\varphi, \varphi') = (r_1, 0)$  e  $(\varphi, \varphi') = (r_2, 0)$  tais que  $r_1 < r_2$ . Assumamos que  $(\varphi, \varphi') = (r_1, 0)$  seja um ponto de sela e que  $(\varphi, \varphi') = (r_2, 0)$  seja um ponto de centro.
- (a2) A curva de nível  $\mathcal{H}(\varphi, \xi) = \mathcal{H}(r_1, 0)$  contém uma curva simples fechada  $C^\infty$ , denotada por  $\Gamma$ , de modo que o par  $(r_2, 0)$  encontra-se no interior da região delimitada por  $\Gamma$ .
- (a3) Para  $\mu \in \mathcal{P}$  e para  $(\varphi, \xi)$  no interior da região delimitada pela curva  $\Gamma$ , a função  $g(\mu, \varphi)$  é de classe  $C^1$  e  $g'(\mu, r_2) < 0$ , onde  $g'$  denota a derivada à Fréchet da função  $g$  com respeito ao parâmetro  $\varphi$ .

Todas as órbitas de soluções  $\varphi$  da equação (1.1) que, no plano de fase, estão no interior da região delimitada pela curva  $\Gamma$  são periódicas, estão em torno do par  $(r_2, 0)$  e pertencem a uma curva de nível  $\mathcal{H}(\varphi, \xi) = B$ , de tal modo que  $\mathcal{H}(r_1, 0) < B < \mathcal{H}(r_2, 0)$ .

Seja  $\mu \in \mathcal{P}$ . Pela teoria das EDO's, existe uma função periódica  $\varphi = \varphi_\mu$  que satisfaz a equação (1.1) e a condição inicial  $(\varphi(0), \varphi'(0)) = (\alpha_1, \alpha_2)$ , onde  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$  e  $(\alpha_1, \alpha_2) \neq$

$(r_2, 0)$ , é considerada no interior da região delimitada pela curva  $\Gamma$ . Além disso, é esperado que o período  $L$  da função  $\varphi$  satisfaça

$$L > \alpha(\mu) := \frac{2\pi}{\sqrt{-g'(\mu, r_2)}}, \quad (1.3)$$

onde  $\alpha(\mu)$  denota o período das soluções da linearização de (1.1) no ponto de equilíbrio  $(r_2, 0)$ . Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_1 > r_2$  e  $g(\mu, \alpha_1) < 0$ . Em vista da simetria associada ao problema, obtemos que as soluções de (1.1) são periódicas e par. Além disso,  $x = 0$  é máximo local de  $\varphi$ .

Prova-se, em [65], o seguinte resultado:

**Teorema 1.1.** *Suponhamos que (a1) – (a3) ocorre. Então, para todo  $\mu \in \mathcal{P}$  e  $B \in \mathbb{R}$  satisfazendo  $\mathcal{H}(r_1, 0) < B < \mathcal{H}(r_2, 0)$ , a equação (1.1) possui soluções periódicas pares de período  $L$  na qual podemos denotar por  $\varphi$ . Ademais,  $\varphi = \varphi_{\mu, B}$  e  $L_{\mu, B}$  são continuamente diferenciáveis com respeito a  $\mu$  e  $B$ .*

*Em particular, se adicionarmos a hipótese*

$$L_B := \frac{\partial L}{\partial B} < 0, \quad (1.4)$$

*segue que  $L$  pertence ao intervalo  $(\alpha(\mu), \infty)$ .*

*Demonstração.* Os detalhes desta demonstração podem ser encontrados em [65].  $\square$

**Observação 1.2.** *O Teorema 1.1 ainda continua válido se enfraquecermos algumas condições das hipóteses (a1) – (a3). De fato, é suficiente assumirmos que  $g(\mu, \cdot)$  possui uma raiz, digamos  $r_2$ , na qual é máximo local de  $G(\mu, \cdot)$ . Neste caso, todas as órbitas em uma região de  $(r_2, 0)$  deverão ser periódicas e simétricas com respeito ao eixo  $\phi$  no plano  $(\phi, \xi)$  (veja [47, página 178]).*

Uma das vantagens da demonstração do Teorema 1.1 é a determinação de procedimentos que permitem deduzir numericamente o período mínimo de uma solução periódica para a equação de Euler-Lagrange (1.1). Seja  $\mu \in \mathcal{P}$  fixado. Consideremos  $\varphi = \varphi_\mu$  uma solução da equação (1.1) deduzida pela proposta desta seção. Ou seja, suponhamos que  $(\varphi(0), \varphi'(0)) = (\alpha_1, 0)$ , onde  $r_1 < r_2 < \alpha_1$  e o par  $(\alpha_1, 0)$  encontra-se no interior da região delimitada pela curva  $\Gamma$ . Assumamos que  $L_\mu$  seja o período minimal da função  $\varphi$ . Seja  $B$  de forma que  $\mathcal{H}(\varphi, \varphi') = B$ . Consideremos a função  $G$  vista em (1.2) e denotemos  $G(\zeta) = G(\mu, \zeta)$ . Finalmente, consideremos que  $b_1$  e  $b_2$  sejam as duas raízes admissíveis para a equação  $\mathcal{H}(\zeta, 0) = B$ . O período minimal  $L_\mu$  é dado por

$$L_\mu = 2 \int_{b_1}^{b_2} \frac{d\zeta}{\sqrt{2G(\zeta) - 2B}}. \quad (1.5)$$

A demonstração do Teorema 1.1 também estabelece que o período minimal de  $\varphi$  pode, alternativamente, ser obtido como

$$L_\mu = -\frac{2}{\sqrt{-g'(\mu, r_2)}} \int_0^{2\pi} \frac{r(t)}{D(t)} dt, \quad (1.6)$$

onde

$$D(t) = \frac{2 \cdot g(\mu, \psi(t)) \cdot \cos(t)}{\sqrt{-g'(\mu, r_2)}} - 2 \cdot \chi(t) \cdot \sin(t), \quad \chi(t) = r(t) \cdot \sin(t),$$

$$\psi(t) = r_2 + \frac{r(t) \cdot \cos(t)}{\sqrt{-g'(\mu, r_2)}}$$

e a função  $r(t)$  soluciona o problema de valor inicial

$$\begin{cases} D(t)r'(t) = 2 \cdot r(t) \cdot \left[ \frac{g(\mu, \psi(t)) \cdot \sin(t)}{\sqrt{-g'(\mu, r_2)}} + \chi(t) \cdot \cos(t) \right] \\ r(0) = (\alpha_1 - r_2) \cdot \sqrt{-g'(\mu, r_2)}. \end{cases}$$

No próximo resultado, veremos que, para  $L$  fixado, é possível encontrarmos soluções periódicas de período  $L$  quando  $\mu$  varia em um subconjunto de  $\mathcal{P}$ .

**Corolário 1.3.** *Suponhamos que (1.4) ocorre e consideremos  $\mu_0 \in \mathcal{P}$  fixado. Seja  $L$  um número real satisfazendo  $L > \alpha(\mu_0)$ , onde  $\alpha(\mu)$  é definido em (1.3). Então, existe uma vizinhança  $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}$  de  $\mu_0$  tal que para todo  $\mu \in \mathcal{O}$ , a equação (1.1) possui soluções periódicas de período  $L$  denotado por  $\psi_\mu$ .*

*Em particular, se  $\alpha = \alpha(\mu)$  não depende de  $\mu \in \mathcal{P}$ , então  $\mathcal{O} = \mathcal{P}$ .*

*Demonstração.* Fixando  $\mu_0 \in \mathcal{P}$  e  $L > \alpha(\mu_0)$ , segue imediatamente do Teorema 1.1 que (1.1) possui soluções periódicas de período  $L$ . Além disso, a continuidade da função  $\mu \mapsto \alpha(\mu)$  nos permite concluir que  $L > \alpha(\mu_0)$  em uma vizinhança de  $\mu_0$ . Portanto, aplicando novamente o Teorema 1.1 obtemos o desejado.  $\square$

## 1.2.2 Propriedades Espectrais

Seja  $\varphi_{\mu,B}$  uma solução qualquer de (1.1) estabelecida em vista do Teorema 1.1. Notemos que  $\varphi_{\mu,B}$  é uma função suave e periódica de período minimal  $L$  com  $\mu \in \mathcal{P}$ . Definamos o operador de Hill

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mu,B} : H_{per}^2([0, L]) &\rightarrow L_{per}^2([0, L]) \\ y &\mapsto \mathcal{L}_{\mu,B}(y) = -y'' + g'(\mu, \varphi_{\mu,B})y. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Este operador é autoadjunto e seu espectro coincide com o conjunto de seus autovalores. Nestas condições é válido o Teorema da Oscilação que garante que o espectro de  $\mathcal{L}_{\mu,B}$  é constituído por uma sequência ilimitada de números reais  $\{\lambda_\kappa\}_{\kappa=0}^\infty$ , de forma que

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \dots < \lambda_{2\kappa-1} \leq \lambda_{2\kappa} < \dots, \quad (1.8)$$

onde a igualdade indica que o autovalor  $\lambda_{2\kappa-1} = \lambda_{2\kappa}$  é duplo.

Considerando a derivada com respeito a  $x$  em (1.1), resulta de imediato que  $\varphi'_{\mu,B}$  pertence ao núcleo do operador  $\mathcal{L}_{\mu,B}$ . Além disso, pela nossa construção,  $\varphi'_{\mu,B}$  possui exatamente dois zeros no intervalo semi-aberto  $[0, L)$ . Desta forma, pelo Teorema de Haupt (veja Teorema 2.14 em [62] para mais detalhes), resulta que zero é o segundo ou terceiro autovalor de  $\mathcal{L}_{\mu,B}$ .

**Lema 1.4.** *Suponhamos que (a1)–(a3) e (1.4) ocorrem. Então, o operador  $\mathcal{L}_{\mu,B}$  definido em  $L^2_{per}([0, L])$  com domínio  $H^2_{per}([0, L])$  possui exatamente um autovalor negativo, um autovalor simples no zero e o resto do seu espectro é positivo e limitado longe do zero.*

*Demonstração.* Ver Lema 4.2 em [54]. □

É fundamental notarmos que em [54] o autor não considerou o sinal de menos na frente da segunda derivada em (1.1), ou seja, ele considerou uma EDO da forma  $\varphi'' + g(\varphi) = 0$ . Consequentemente, a hipótese  $\partial L/\partial B > 0$  em [54] é equivalente a (1.4) em nosso caso.

Consideremos, conforme visto acima,  $\varphi_{\mu,B}$  solução periódica com período  $L$  de (1.1) obtida pelo Teorema 1.1. Seja a função  $\bar{y}$ , a única solução do problema auxiliar

$$\begin{cases} -\bar{y}'' + g'(\mu, \varphi_{\mu,B}(x))\bar{y} = 0 \\ \bar{y}(0) = -\frac{1}{\varphi''_{\mu,B}(0)} \\ \bar{y}'(0) = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Resultados descritos em [66], em [65] e em suas referências, apontam que a função  $\bar{y}(x)$  é linearmente independente a  $\varphi'_{\mu,B}(x)$  e existe uma constante  $\theta$  de tal modo que

$$\bar{y}(x + L_{\mu_1}) = \bar{y}(x) + \theta\varphi'_{\mu,B}(x). \quad (1.10)$$

Desta forma, derivando a última expressão e considerando  $x = 0$ , obtemos

$$\bar{y}'(L) = \bar{y}'(0) + \theta\varphi'_{\mu,B}(0) \Rightarrow \theta = \frac{\bar{y}'(L)}{\varphi''_{\mu,B}(0)}. \quad (1.11)$$

Segundo [66] e [65], é válido o seguinte resultado:

**Teorema 1.5.** *Seja  $\theta$  a constante dada em (1.11). O número 0 é um autovalor simples de  $\mathcal{L}_{\mu,B}$ , se e somente se,  $\theta \neq 0$ . Supondo  $\theta \neq 0$ , tem-se que  $\lambda_1 = 0$  se  $\theta < 0$  e,  $\lambda_2 = 0$  se  $\theta > 0$ .*

Uma pergunta que podemos fazer é: qual é a relação entre  $\theta$  e  $\partial L/\partial B$ ? O Lema 4.2 em [54] estabelece que o zero é um autovalor simples de  $\mathcal{L}_{\mu,B}$  se, e somente se  $\partial L/\partial B \neq 0$ . Desta forma, se  $\bar{y}$  é qualquer solução de  $\mathcal{L}_{\mu,B}(\bar{y}) = 0$  e  $\theta$  é a constante definida acima, obtemos que  $\partial L/\partial B \neq 0$  se, e somente se  $\theta \neq 0$ . Veremos a seguir que, na verdade, temos que  $\partial L/\partial B = \theta$ .

**Teorema 1.6.**  *$\frac{\partial L}{\partial B} = \theta$ , onde  $\theta$  é a constante em (1.11).*

*Demonstração.* Consideremos  $\bar{y}$  e  $\varphi'_{\mu,B}$  conforme visto anteriormente. Como  $\varphi'_{\mu,B}$  é ímpar e periódica, segue que  $\varphi'_{\mu,B}(0) = \varphi'_{\mu,B}(L) = 0$ . Portanto, a suavidade de  $\varphi'_{\mu,B}$  com relação ao parâmetro  $B$  nos permite concluir que

$$\varphi'_{\mu,B}(L) \frac{\partial L}{\partial B} + \frac{\partial \varphi'_{\mu,B}(L)}{\partial B} = 0. \quad (1.12)$$

Multiplicando a equação (1.1) por  $\varphi'_{\mu,B}$ , deduzimos, após uma integração, a seguinte quadratura

$$-\frac{\varphi'^2_{\mu,B}(x)}{2} + G(\mu, \varphi_{\mu,B}(x)) = B, \quad (1.13)$$



para todo  $x \in [0, L]$ . Derivando a equação (1.13) com respeito a  $B$  e considerando  $x = 0$ , concluímos de (1.1) que  $\frac{\partial \varphi_{\mu,B}(0)}{\partial B} = \frac{1}{\varphi''_{\mu,B}(0)}$ . Ademais, como  $\varphi_{\mu,B}$  é par, segue que  $\frac{\partial \varphi_{\mu,B}}{\partial B}$  também é par e, conseqüentemente,  $\frac{\partial \varphi_{\mu,B}(0)}{\partial B} = 0$ . O teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias aplicado ao problema (1.9) nos permite concluir que  $\bar{y} = -\frac{\partial \varphi_{\mu,B}}{\partial B}$ . Estas informações combinadas com (1.12) nos dá o resultado desejado uma vez que  $\varphi''_{\mu,B}$  é par.  $\square$

O resultado apresentado anteriormente é novo na literatura corrente e nos ajuda a finalmente entender a relação entre  $\theta$  e  $\partial L / \partial B$ . Além disso, utilizando o Teorema 1.6, podemos reformular o Lema 1.4 da seguinte forma

**Corolário 1.7.** *Suponhamos que (a1) – (a3) ocorre e que  $\theta < 0$  onde  $\theta$  é dado em (1.11). Então, o operador  $\mathcal{L}_{\mu,B}$  definido em  $L^2_{per}([0, L])$  com domínio  $H^2_{per}([0, L])$  possui exatamente um autovalor negativo, um autovalor simples no zero e o resto do seu espectro é positivo e limitado longe do zero.*

Veremos a seguir que, sob determinadas condições,  $\theta$  não muda de sinal quando  $\mu$  e  $B$  varia. Dada uma solução periódica  $\varphi_{\mu,B}$ , denotaremos por  $\theta_{\mu,B}$  a constante correspondente em (1.11).

**Definição 1.8.** *Seja  $Q$  uma função periódica de período  $L$  suave. Seja também  $\mathcal{L}$  um operador de Hill definido em  $H^2_{per}([0, L])$  com domínio  $H^2_{per}([0, L])$  dado por*

$$\mathcal{L} = -\partial_x^2 + Q(x)$$

*O índice inercial de  $\mathcal{L}$  denotado por  $in(\mathcal{L})$ , é o par  $(n, z)$ , onde  $n$  denota a dimensão do subespaço negativo de  $\mathcal{L}$  e  $z$  denota a dimensão do núcleo de  $\mathcal{L}$ .*

**Definição 1.9.** *Seja  $Q(x) = Q_\iota(x)$  uma função periódica e dependente do parâmetro  $\iota \in \Omega$  em algum aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . A família de operadores  $\mathcal{L}_\iota = -\partial_x^2 + Q_\iota(x)$  é dita ser isonercial se  $in(\mathcal{L}_\iota)$  é constante para todo  $\iota \in \Omega$ .*

Segundo [65], podemos enunciar o seguinte resultado:

**Teorema 1.10.** *Suponhamos que (a1) – (a3) ocorre. Seja  $\varphi_{\mu,B}$  a família de soluções periódicas obtida no Teorema 1.1 e suponhamos que  $g'(\mu, \varphi_{\mu,B}(x))$  seja de classe  $C^1$ . Então a família de operadores  $\mathcal{L}_{\mu,B}$  é isonercial. Em particular, se  $\theta_{\mu_0, B_0} < 0$  para algum  $(\mu_0, B_0)$ , então  $\theta_{\mu,B} < 0$  para todo  $(\mu, B)$ .*

Observemos que o Teorema anterior estabelece que para calcularmos o índice de inércia de  $\mathcal{L}_{\mu,B}$  é suficiente calcularmos para alguma par  $(\mu_0, B_0)$ .

### 1.3 Espectro de Operadores via Propriedades de Positividade

Consideremos a equação

$$u_t + u^p u_x - (\mathcal{M}u)_x = 0, \quad (1.14)$$

com  $p \geq 1$  inteiro e  $\mathcal{M}$  operador diferencial ou pseudo-diferencial no contexto das funções periódicas. Mais precisamente,  $\mathcal{M}$  é definido como sendo um operador multiplicador de Fourier da forma

$$\widehat{\mathcal{M}g}(k) = \theta(k)\widehat{g}(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1.15)$$

onde  $\theta$  é assumido ser uma função real, mensurável, localmente limitada, par e satisfazendo as condições

$$A_1|n|^{m_1} \leq |\theta(n)| \leq A_2(1 + |n|)^{m_2}$$

para  $m_1 \leq m_2$ ,  $|n| \geq n_0$ ,  $\theta(n) > b$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $c > -b$  e  $A_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Suponhamos que (1.14) admite soluções viajantes periódicas da forma

$$u(x, t) = \varphi(x - ct), \quad c \in \mathbb{R},$$

onde  $\varphi$  é uma função suave e periódica com um período  $L > 0$ . Então, substituindo esta forma de  $u$  em (1.14) e integrando de 0 a  $L$ , obtemos que  $\varphi$  é solução da equação

$$(\mathcal{M} + c)\varphi - \frac{1}{1+p}\varphi^{p+1} + A = 0, \quad (1.16)$$

onde  $A > 0$  é uma constante de integração. Assumindo à priori que existe solução periódica e suave  $\varphi$  para a equação (1.16), podemos considerar o operador linear  $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \rightarrow L^2_{per}([0, L])$  definido em um subespaço denso de  $L^2_{per}([0, L])$  dado por

$$\mathcal{L}u = (\mathcal{M} + c)u - \varphi^p u. \quad (1.17)$$

**Proposição 1.11.** *O operador  $\mathcal{L}$  definido em (1.17) é fechado, não-limitado e autoadjunto sobre  $L^2_{per}([0, L])$ . Seu espectro consiste em um número enumerável infinito de autovalores (que se acumulam no infinito), isto é, tem-se  $\sigma_{ess}(\mathcal{L}) = \emptyset$  (onde  $\sigma_{ess}(\mathcal{L})$  denota o espectro essencial do operador  $\mathcal{L}$ ). Em particular,  $\mathcal{L}$  tem o autovalor 0 com autofunção  $\varphi'$ .*

*Demonstração.* Ver [63]. □

Encontraremos agora condições suficientes para obtermos propriedades tais como:

- $\mathcal{L}$  possui um único autovalor negativo e simples;
- o autovalor 0 é simples.

Essas propriedades serão essenciais para obtermos algumas minimizações locais de operadores estudados nesta tese.

**Definição 1.12.** Dizemos que uma sequência de números reais  $\alpha = (\alpha_n)_{\alpha \in \mathbb{Z}}$  está na classe  $PF(2)$  estrita e discreta se:

- (i)  $\alpha_n > 0$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,
- (ii)  $\alpha_{n_1-m_1}\alpha_{n_2-m_2} - \alpha_{n_1-m_2}\alpha_{n_2-m_1} \geq 0$  para  $n_1 < n_2$  e  $m_1 < m_2$ .
- (iii) a desigualdade dada em (ii) ocorrer estritamente sempre que os intervalos  $(n_1, n_2)$  e  $(m_1, m_2)$  se interceptarem.

Esta definição é, na verdade, uma discretização do caso contínuo com funções reais  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Neste caso, dizemos que  $g$  está na classe  $PF(2)$  se:

- (i)  $g(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,
- (ii)  $g(x_1 - y_1)g(x_2 - y_2) - g(x_1 - y_2)g(x_2 - y_1) \geq 0$  para  $x_1 < x_2$  e  $y_1 < y_2$ .
- (iii) a desigualdade dada em (ii) ocorrer estritamente sempre que os intervalos  $(x_1, x_2)$  e  $(y_1, y_2)$  se interceptarem.

O próximo resultado nos traz uma condição suficiente para que uma função  $g$  esteja na classe  $PF(2)$ . A demonstração pode ser encontrado em Albert e Bona [5].

**Lema 1.13.** *Suponha que  $g$  é uma função positiva duas vezes diferenciável sobre  $\mathbb{R}$  e satisfaz  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\log g(x)) < 0$  para  $x \neq 0$ . Então  $g \in PF(2)$ .*

*Demonstração.* Ver [5]. □

Para o caso de sequências pares em  $PF(2)$  estrito e discreto, temos o seguinte resultado que será muito útil nas aplicações mais adiante.

**Teorema 1.14.** *A convolução de duas sequências pares em  $PF(2)$  estrito e discreto está em  $PF(2)$  estrito e discreto.*

*Demonstração.* Ver [55]. □

Finalmente, temos o principal resultado desta subseção.

**Teorema 1.15.** *Seja  $\varphi$  uma solução onda viajante periódica positiva e par para (1.16). Suponhamos que  $\widehat{\varphi} > 0$  e  $\widehat{\varphi}^p \in PF(2)$  estrito e discreto, então o operador  $\mathcal{L}$  definido em (1.17) possui um único autovalor negativo e este autovalor é simples. Além disso, o autovalor 0 também é simples.*

*Demonstração.* Ver [63]. □

Afim de simplificarmos nossa notação, nesta tese a norma e o produto interno em  $L^2_{per}([0, L])$  serão denotados, respectivamente, por  $\|\cdot\|$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

# Estabilidade Orbital de Ondas Periódicas para a Equação de Kawahara

Neste capítulo, estudaremos a estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas para a equação de Kawahara

$$u_t + uu_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} = 0, \quad (2.1)$$

onde  $u(x, t)$  é uma função de valor real com domínio  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Esta equação modela a propagação de ondas com baixa amplitude em uma dimensão e possui fundamental importância nos modelos dispersivos.

Suponhamos à priori que a equação (2.1) admite soluções da forma  $u(x, t) = \varphi(x - ct)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Substituindo essas soluções em (2.1) e integrando de 0 a  $L$ , obtemos que elas satisfazem a equação diferencial ordinária

$$c\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2 - \varphi'' + \varphi'''' + A = 0, \quad (2.2)$$

onde  $A$  é uma constante de integração.

No contexto periódico, temos que (2.1) admite formalmente as seguintes identidades conservadas

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^L u_{xx}^2 + u_x^2 - \frac{1}{3}u^3 dx, \quad F(u) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2 dx \quad \text{e} \quad M(u) = \int_0^L u dx. \quad (2.3)$$

Estas identidades possui grande importância em nosso estudo, uma vez que precisamos definir e estudar o funcional conservado

$$S(u) = E(u) + cF(u) + AM(u). \quad (2.4)$$

Note que, devido a (2.2),  $\varphi$  é um ponto crítico do funcional  $S$ , ou seja,  $S'(\varphi) = 0$ . Além disso, podemos definir o operador linear

$$\mathcal{L} := S''(\varphi) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c - \varphi \quad (2.5)$$

definido em  $L^2_{per}([0, L])$  com domínio denso  $D(\mathcal{L}) = H^4_{per}([0, L])$ .

Nosso intuito é provar a existência de minimizadores locais associados ao funcional de Lyapunov  $S$  utilizando o comportamento do espectro do operador  $\mathcal{L}$ . Estas condições são

fundamentais e muito aplicadas em resultados clássicos de estabilidade orbital de modelos dispersivos (veja por exemplo Grillakis, Shatah e Strauss [45]). Em outras palavras, para obtermos a estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas para a equação de Kawahara, precisamos verificar as propriedades (P1)-(P4) apresentadas na introdução desta tese. Para este caso em específico elas são requisitadas da seguinte forma:

(P1) Existe uma curva não trivial de soluções periódicas para a equação (2.1) da forma  $c \in \mathcal{J} \subset \mathbb{R} \rightarrow \varphi_c \in H_{per}^n([0, L])$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;

(P2)  $\mathcal{L}$  possui um único autovalor negativo  $\lambda_0$  sendo este simples;

(P3) O autovalor 0 é simples e está associado a autofunção  $\varphi'_c$ ;

(P4)  $I := \langle \mathcal{L} \left( \frac{\partial \varphi_c}{\partial c} \right), \frac{\partial \varphi_c}{\partial c} \rangle < 0$ .

As ideias que serão utilizadas na próxima seção são baseadas no trabalho desenvolvido em [7].

## 2.1 Existência de Solução Explícita e Propriedades Espectrais

Nesta seção, estudaremos a existência de soluções ondas viajantes periódicas explícitas para o problema (2.1). Mais especificamente, encontraremos soluções do tipo funções elípticas (ver Apêndice) para a equação (2.2). Em seguida, entenderemos o comportamento do espectro do operador  $\mathcal{L}$  para futura aplicação em minimizações locais que serão necessárias para o Teorema de Estabilidade.

Antes de verificarmos a existência de soluções ondas viajantes citadas no parágrafo anterior, precisamos do resultado de boa colocação para o problema de Cauchy periódico associado à equação (2.1) dado por

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, L], \end{cases} \quad (2.6)$$

Note que o espaço desejado para tal resultado é o espaço de energia  $H_{per}^2([0, L])$  uma vez que na próxima seção utilizaremos o funcional (2.4) para obtermos a estabilidade orbital em nosso contexto.

Pelo princípio de Duhamel,

$$u(t, x) = U(t)u_0(x) - \int_0^t U(t-t')u(t', x)u_x(t', x)dt' \quad (2.7)$$

é a equação integral associada ao problema de Cauchy (2.6) onde  $U$  é o semigrupo de contrações de classe  $C^0$  que possui o operador  $A = \partial_x^5 - \partial_x^3$  como seu gerador infinitesimal.

**Teorema 2.1.** *O problema de valor inicial (2.6) é localmente bem posto com dados iniciais  $u_0$  em  $H_{per}^2([0, L])$ . Mais precisamente, existe  $T_0 = T_0(\|u_0\|_{H_{per}^2}) > 0$  e uma única solução, definida em  $[-T_0, T_0]$ , satisfazendo (2.6) no sentido da equação integral associada (2.7). Além disso, as identidades de energia em (2.3) são válidas para todo  $t \in [-T_0, T_0]$ .*

*Demonstração.* A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [57].  $\square$

**Observação 2.2.** *Usando as identidades conservadas (2.3) e a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, obtemos que as soluções encontradas no teorema anterior para o problema (2.1) são, na verdade, soluções globais em  $H_{per}^2([0, L])$ , ou seja, as soluções encontradas no Teorema 2.1 estão definidas em  $[-T, T]$  para todo  $T > 0$  (para mais detalhes veja [35]).*

Com a ajuda do programa Maple 16 no auxílio dos cálculos, vamos agora verificar a ocorrência da propriedade (P1), ou seja, que existe uma curva não trivial de soluções periódicas para a equação (2.1). Com efeito, substituindo o ansatz (ver [73])

$$\begin{aligned} \varphi(x) = a &+ b \left( \operatorname{dn}^2 \left( \frac{2K}{L}x, k \right) - \frac{E}{K} \right) \\ &+ d \left( \operatorname{dn}^4 \left( \frac{2K}{L}x, k \right) - (2 - k^2) \frac{2E}{3K} + \frac{1 - k^2}{3} \right), \end{aligned} \quad (2.8)$$

na equação (2.2), obtemos os valores de  $a$ ,  $b$  e  $d$  dados por

$$\begin{aligned} a = c + \frac{1}{507L^4} &((-k^4 + k^2 + 1)302848K^4 + 14560L^2K^2(k^2 - 2) \\ &+ 43680L^2EK - 31L^4), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$b = \frac{1120}{13L^4}((208k^2 - 416)K^2 + L^2)K^2 \quad \text{e} \quad d = \frac{26880K^4}{L^4}. \quad (2.10)$$

onde a função  $K = K(k)$  é a integral elíptica do primeiro tipo,  $E = E(k)$  é a integral elíptica do segundo tipo e ambas dependem do módulo  $k \in (0, 1)$  (ver Apêndice). Observemos em (2.8), (2.9) e (2.10) que  $\varphi$  depende linearmente de  $c$  e, devido a este fato, denotaremos  $\varphi_c := \varphi$ . Formalmente, podemos escrever  $\varphi_c(x) = c + \varphi_0(x)$ .

Em adicional a esse contexto, também temos que  $A$  é dado por

$$A = z(k, L) - \frac{c^2}{2} \quad (2.11)$$

com  $z(k, L)$  dependendo suavemente de  $k$  e  $L$ . Mais detalhadamente, temos

$$\begin{aligned} z(k, L) = \frac{1}{514098} \frac{1}{L^8} &((91716911104k^8 - 4114158583808k^6 \\ &+ 15998049779712k^4 - 4114158583808k^2 + 91716911104)K^8 \\ &- 8818933760L^2(k^2 + 1)(k^2 + 3k + 1)(k^2 - 3k + 1)K^6 \\ &+ 230770176L^4(k^4 - k^2 + 1)K^4 - 902720L^6(k^2 + 1)K^2) + 961. \end{aligned}$$

Devido a estas relações, torna-se necessário considerar um par  $(k, L)$  no qual resolva a seguinte equação implícita:

$$\frac{89989120}{31}(k^2 - 2) \left( k^2 - \frac{1}{2} \right) (k^2 + 1)K^6 - \frac{908544}{31}L^2(k^4 - k^2 + 1)K^4 + L^6 = 0. \quad (2.12)$$

Notemos que se considerarmos  $Z = L^2$ , então a equação anterior se torna uma equação polinomial de grau 3, donde resulta que sempre existe solução para tal equação. Seja  $(k_0, L_0) \in (0, 1) \times (0, +\infty)$  solução da equação (2.12). Uma simples aplicação do Teorema da Função Implícita nos garante a existência de dois intervalos  $J_2 \subset (0, +\infty)$  e  $J_1 \subset (0, 1)$  com  $L_0 \in J_2$  e  $k_0 \in J_1$  tais que a função  $k \in J_1 \mapsto L(k) \in J_2$  é suave e  $(k, L(k))$  é solução de (2.12) para todo  $k \in J_1$ . Portanto, sendo  $c$  um parâmetro livre, obtemos a existência de uma curva suave de soluções  $c \in \mathbb{R} \rightarrow \varphi_c$ , onde  $\varphi_c$  é dada por (2.8). Além disso,  $\varphi_c$  tem período fixo  $L \in J_2$ .

A seguir, veremos que o operador  $\mathcal{L}$  possui as propriedades espectrais necessárias (P2) e (P3) para o nosso problema.

**Teorema 2.3.** *Seja  $L \in J_2$  fixo. Para todo  $c \in \mathbb{R}$ , o operador  $\mathcal{L}$  definido em (2.5) é fechado, ilimitado e autoadjunto sobre  $L^2_{per}([0, L])$ . Seu espectro consiste em um conjunto enumerável infinito de autovalores e, além disso,  $\mathcal{L}$  possui um único autovalor negativo no qual é simples e zero é um autovalor simples com autofunção  $\varphi'_c$ .*

*Demonstração.* A primeira parte segue imediatamente da Proposição 1.11. Provaremos a segunda parte utilizando o Teorema 1.15. Com efeito, escrevendo a solução (2.8) em série de Fourier (ver [59]), temos que

$$\varphi_c(x) = a + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi K'}{K} \right) \cos \left( \frac{2\pi n}{L} x \right),$$

com  $\gamma = \left( \frac{b\pi^2}{K^2} + \frac{d\pi^2}{k^2 K^2} \left( \frac{4-2k^2}{3} + \frac{n^2\pi^2}{6K} \right) \right)$ . Deste modo, os coeficientes de Fourier são da forma

$$\widehat{\varphi}_c(n) = \begin{cases} a, & n = 0 \\ \sigma(n), & n \neq 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

onde  $\sigma(n) = \frac{\gamma}{2} n \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi K'}{K} \right)$ .

Consideremos agora  $c > 0$  suficientemente grande tal que  $a > g(0)$  e definamos  $g(x) = \frac{\gamma}{2} x \operatorname{csch} \left( \frac{x\pi K'}{K} \right)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Notemos que  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\log g(x)) < 0$  (veja a Figura 2.1). Pelo Lema 1.13 segue que  $g$  pertence a classe  $PF(2)$  e, conseqüentemente, como  $a > g(0)$ , podemos redefinir a função  $g$  por uma função diferenciável  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de modo que  $s(0) = a$  e  $s(x) = g(x)$  em  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ . Logo, podemos concluir que  $s(n) = \widehat{\varphi}_c(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , está na classe  $PF(2)$  estrito e discreto. Portanto, resulta pelo Teorema 1.15 que as propriedades requeridas (P2) e (P3) ocorrem para todo  $c > 0$  suficientemente grande.

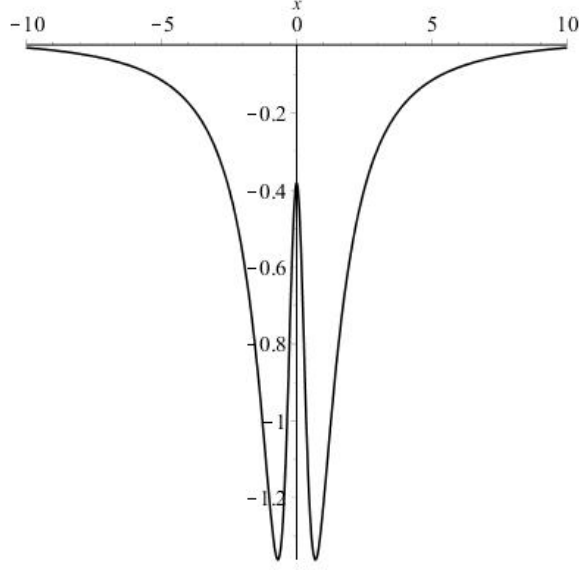


Figura 2.1: Gráfico de  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\log g(x))$  com  $L = 2\pi$ .

Seja  $\mu \in \mathbb{R}$ . Provaremos usando a Invariância Galileana da equação (2.2) que, na verdade, as propriedades (P1) e (P2) ocorrem para todo  $c \in \mathbb{R}$ . Com efeito, definamos  $\tilde{\varphi}_c = \mu + \varphi_c$ , onde  $\varphi_c$  é solução da equação (2.2). Então, resulta que  $\tilde{\varphi}_c$  soluciona a equação

$$(c + \mu)\tilde{\varphi}_c - \frac{1}{2}\tilde{\varphi}_c^2 - \tilde{\varphi}_c'' + \tilde{\varphi}_c'''' + \tilde{A} = 0,$$

com  $\tilde{A} = A - c\mu - \frac{\mu^2}{2}$ . Ou seja,  $\tilde{\varphi}_c$  soluciona uma equação similar a (2.2) com velocidade  $c + \mu$ . Portanto, segue imediatamente que

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c - \varphi_c = \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c + \mu - \tilde{\varphi}_c =: \mathcal{L}_{c+\mu}.$$

Através desta última desigualdade concluímos o desejado. □

## 2.2 Estabilidade Orbital

Apresentaremos, nesta seção, a validade da propriedade (P4) e todos os demais argumentos necessários para a estabilidade orbital do nosso problema. Primeiramente, precisamos considerar a variedade suave  $\Sigma_c$  definida por

$$\Sigma_c := \{u \in H_{per}^2([0, L]); Q(u) = Q(\varphi_c)\},$$

onde  $Q(u) := \frac{\partial S(u)}{\partial c} = F(u) + \frac{\partial A}{\partial c}M(u)$ . Adicionalmente, definamos também a variedade tangente associada à  $\Sigma_c$ , isto é,

$$\Upsilon_c := \left\{ u \in H_{per}^2([0, L]); \langle u, Q'(\varphi_c) \rangle = \left\langle u, \varphi_c + \frac{\partial A}{\partial c} \right\rangle = 0 \right\}.$$



Com o intuito de provarmos nosso resultado de estabilidade orbital, precisamos considerar a semi-distância dada por

$$\rho(u, \varphi_c) := \inf_{r \in \mathbb{R}} \|u - \varphi_c(\cdot + r)\|_{H_{per}^2}.$$

No Lema a seguir, concluiremos a veracidade da propriedade (P4).

**Lema 2.4.** *Existe um intervalo aberto  $\tilde{J}_2 \subset J_2 \subset (0, +\infty)$  tal que se  $L \in \tilde{J}_2$  é arbitrariamente fixado, então*

$$I = \left\langle \mathcal{L} \left( \frac{\partial \varphi_c}{\partial c} \right), \frac{\partial \varphi_c}{\partial c} \right\rangle = - \left\langle Q'(\varphi_c), \frac{\partial \varphi_c}{\partial c} \right\rangle < 0.$$

*Demonstração.* Seja  $L \in J_2$ . Do fato de  $F$  e  $M$  em (2.3) serem funcionais suaves definidos em  $H_{per}^2([0, L])$ , temos que

$$F'(\varphi_c) = \varphi_c \quad \text{e} \quad M'(\varphi_c) = 1.$$

Logo, derivando (2.2) com respeito a  $c$ , obtemos

$$\mathcal{L} \left( \frac{\partial \varphi_c}{\partial c} \right) = - \left( \frac{\partial A}{\partial c} + \varphi_c \right) = -Q'(\varphi_c).$$

Desta forma, usando que  $\frac{\partial \varphi_c}{\partial c} = \frac{\partial a}{\partial c} = 1$  e  $\frac{\partial A}{\partial c} = -c$ , podemos concluir que

$$I = - \left\langle Q'(\varphi_c), \frac{\partial \varphi_c}{\partial c} \right\rangle = -(M(\varphi_c) - cL).$$

Sabemos que  $M(\varphi_c) = aL$  e, além disso, podemos deduzir de (2.9) que  $a - c$  depende somente do par  $(k, L) \in J_1 \times J_2$ . Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} I &= -L(a - c) \\ &= -\frac{302848(-k^4 + k^2 + 1)K^4 + 14560L^2K^2(k^2 - 2) + 43680L^2EK - 31L^4}{507L^3} \\ &= -\frac{1}{507L^3}p(k, L^2). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Denotando  $Z = L^2$ , conseguimos reescrever a função  $p(k, L^2)$  como  $p(k, Z)$ . Ademais, esta mudança de variável simplifica a relação implícita entre  $k$  e  $L$  em (2.12), ou seja, podemos escrever (2.12) da seguinte forma

$$\frac{89989120}{31}(k^2 - 2) \left( k^2 - \frac{1}{2} \right) (k^2 + 1)K^6 - \frac{908544}{31}Z(k^4 - k^2 + 1)K^4 + Z^3 = 0. \tag{2.15}$$

Usando o programa *Maple 16*, podemos resolver algebricamente a equação (2.15) em termos do módulo, isto é,

$$Z(k) = \frac{104}{31} \frac{r(k)}{q(k)},$$

onde  $r(k)$  e  $q(k)$  são complicadas expressões contendo algumas potências de  $k$ . Como  $I = -\frac{1}{507L^3}p(k, Z) = -\frac{1}{507L^3}\tilde{p}(k)$ , podemos plotar o gráfico de  $Z$  e  $\tilde{p}(k)$  afim de entender o

comportamento de tais funções. A figura abaixo mostra que existe  $\tilde{J}_2 \subset J_2$  tal que  $I < 0$ , para todo  $L \in \tilde{J}_2$ .

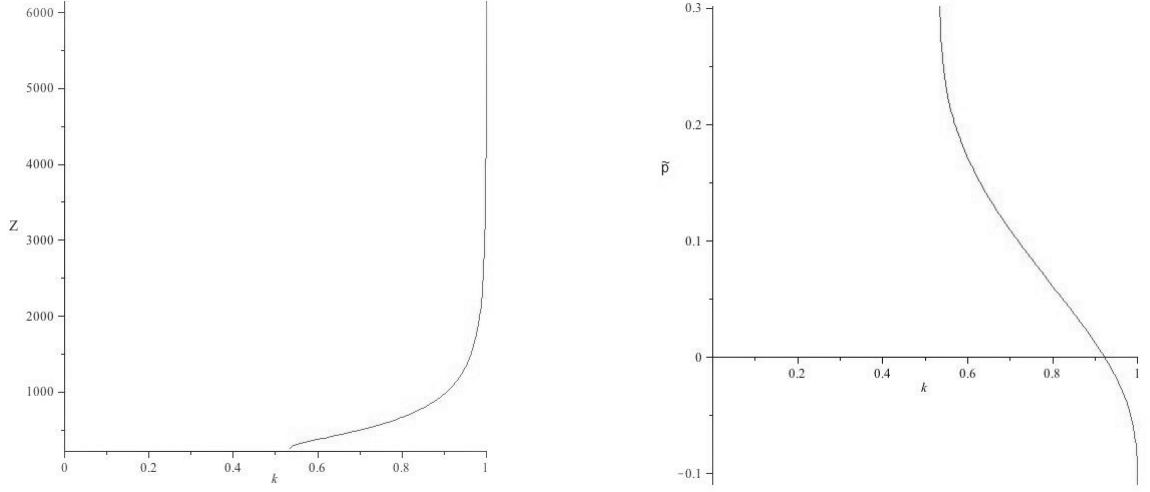


Figura 2.2: Lado esquerdo: gráfico da função  $Z(k)$ . Lado direito: gráfico da função  $\tilde{p}(k)$ .

□

Seja  $L \in \tilde{J}_2$ . Para o próximo lema precisamos definir

$$U_\alpha(\varphi_c) = \{u \in H_{per}^2([0, L]); \rho(u, \varphi_c) < \alpha\}.$$

Este conjunto será o domínio de uma função auxiliar necessária aos próximos resultados.

**Lema 2.5.** *Existem  $\alpha > 0$  e uma função  $\Gamma : U_\alpha(\varphi_c) \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tal que para todo  $u \in U_\alpha(\varphi_c)$ , temos*

$$\langle u(\cdot + \Gamma(u)), \varphi_c' \rangle = 0.$$

*Demonstração.* Definamos o funcional

$$(u, \Gamma) \rightarrow G(u, \Gamma) = \int_0^L u(x + \Gamma) \varphi_c'(x) dx.$$

onde  $(u, \Gamma) \in H_{per}^2([0, L]) \times \mathbb{R}$ . Como  $G(\varphi_c, 0) = 0$ ,  $G$  é de classe  $C^1$  e

$$\frac{\partial}{\partial \Gamma} G(\varphi_c, 0) = \|\varphi_c'\|^2 \neq 0,$$

segue pelo Teorema da Função Implícita que existem  $\alpha > 0$  e uma única função  $\Gamma(u)$  tal que

$$G(u, \Gamma(u)) = 0 \quad \text{para todo } u \in B_\alpha(\varphi_c),$$

onde  $B_\alpha(\varphi_c) = \{u \in H_{per}^2([0, L]); \|u - \varphi_c\|_{H_{per}^2} < \alpha\}$ .

Vamos agora estender  $\Gamma$  para o conjunto  $U_\alpha(\varphi_c)$ . Com efeito, notemos primeiramente que se  $u \in B_\alpha(\varphi_c)$  e  $\beta \in \mathbb{R}$  é um número tal que  $\tau_\beta u := u(\cdot + \beta) \in B_\alpha(\varphi_c)$ , então

$$G(\tau_\beta u, \Gamma(u) - \beta) = G(u, \Gamma(u)) = 0.$$

Consequentemente, pela unicidade de  $\Gamma$ , resulta que

$$\Gamma(\tau_\beta u) = \Gamma(u) - \beta. \quad (2.16)$$

Agora, olhando por outro lado, temos que se  $u \in U_\alpha$  então existe  $\beta_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\|u - \tau_{\beta_0} \varphi_c\|_{H_{per}^2} < \alpha$ , ou seja,  $\tau_{-\beta_0} u \in B_\alpha(\varphi_c)$ . Deste modo, para  $u \in U_\alpha$ , basta definirmos a extensão

$$\tilde{\Gamma}(u) := \Gamma(\tau_{-\beta_0} u) - \beta_0.$$

Esta definição não depende de  $\beta_0$ . De fato, se para algum  $\beta_1 \neq \beta_0$ , temos  $\|u - \tau_{\beta_1} \varphi_c\|_{H_{per}^2} < \alpha$ , então  $\tau_{-\beta_1} u \in B_\alpha(\varphi_c)$ . Daí, como  $\tau_{-\beta_0} u \in B_\alpha(\varphi_c)$ , temos que, usando (2.16),

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau_{-\beta_1} u) - \beta_1 &= \Gamma(\tau_{\beta_0 - \beta_1} \tau_{-\beta_0} u) - \beta_1 \\ &= \Gamma(\tau_{-\beta_0} u) - (\beta_0 - \beta_1) - \beta_1 \\ &= \Gamma(\tau_{-\beta_0} u) - \beta_0. \end{aligned}$$

Logo, a afirmação está provada.

Finalmente, temos que se  $u \in U_\alpha$ , então para algum  $\tilde{\beta} \in \mathbb{R}$  segue que  $\tau_{-\tilde{\beta}} u \in B_\alpha(\varphi_c)$  e, consequentemente,  $G(\tau_{-\tilde{\beta}} u, \Gamma(\tau_{-\tilde{\beta}} u)) = 0$ . Portanto, usando (2.16), concluímos que

$$\begin{aligned} 0 &= G(\tau_{-\tilde{\beta}} u, \Gamma(\tau_{-\tilde{\beta}} u)) \\ &= \int_0^L \tau_{-\tilde{\beta}} u(x + \Gamma(\tau_{-\tilde{\beta}} u)) \varphi'_c(x) dx \\ &= \int_0^L u(x + \Gamma(\tau_{-\tilde{\beta}} u) - \tilde{\beta}) \varphi'_c(x) dx \\ &= G(u, \tilde{\Gamma} u). \end{aligned}$$

Isto conclui nossa demonstração. □

No próximo resultado, exibiremos um subconjunto de  $H_{per}^2([0, L])$  onde o operador  $\mathcal{L}$  é positivo definido.

**Lema 2.6.** *Suponhamos que (P1)-(P4) ocorrem e consideremos*

$$\mathcal{A} = \Upsilon_c \cap \{v \in H_{per}^2([0, L]); \langle v, \varphi'_c \rangle = 0\}.$$

Então, existe  $C > 0$  tal que

$$\langle \mathcal{L}v, v \rangle \geq C \|v\|_{H_{per}^2}^2, \text{ para todo } v \in \mathcal{A}.$$

*Demonstração.* Primeiramente, provaremos que

$$\inf\{\langle \mathcal{L}v, v \rangle; v \in \mathcal{A}, \|v\| = 1\} := \zeta > 0.$$

Com efeito, como as propriedades (P1) e (P2) são verdadeiras para  $\mathcal{L}$  e, além disso,  $\mathcal{L}$  é um operador fechado, ilimitado e autoadjunto sobre  $L_{per}^2([0, L])$ , segue que podemos escrever (veja [58, pag. 278])

$$L_{per}^2([0, L]) = [\xi_c] \oplus [\varphi'_c] \oplus P,$$

onde  $\xi_c \in D(\mathcal{L})$ ,  $\|\xi_c\| = 1$  e  $\mathcal{L}(\xi_c) = -\lambda_0^2 \xi_c$ ,  $\lambda_0 > 0$ . Ademais, sendo  $P$  um espaço positivo, temos que existe  $\eta > 0$  tal que

$$\langle \mathcal{L}p, p \rangle > \eta \|p\|^2, \quad \text{para todo } p \in H_{per}^2([0, L]) \cap P.$$

Desta maneira, usando as informações acima, podemos escrever

$$\frac{\partial \varphi_c}{\partial c} = a_0 \xi_c + b_0 \varphi'_c + p_0,$$

com  $p_0 \in H_{per}^2([0, L]) \cap P$  e  $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ . Note que, neste caso,  $p_0 \in H_{per}^2([0, L])$  pois  $\xi_c, \varphi'_c$  e  $\frac{\partial \varphi_c}{\partial c}$  pertencem a  $H_{per}^2([0, L])$ . Lembremos que  $\mathcal{L}$  é autoadjunto e  $\varphi'_c \in \ker(\mathcal{L})$ , logo,

$$\langle \mathcal{L}p_0, p_0 \rangle = \left\langle \mathcal{L} \left( \frac{\partial \varphi_c}{\partial c} - a_0 \xi_c - b_0 \varphi'_c \right), \frac{\partial \varphi_c}{\partial c} - a_0 \xi_c - b_0 \varphi'_c \right\rangle = \left\langle \mathcal{L} \left( \frac{\partial \varphi_c}{\partial c} \right), \frac{\partial \varphi_c}{\partial c} \right\rangle + a_0^2 \lambda_0^2.$$

Deste modo, usando o Lema 2.4, podemos concluir que  $\langle \mathcal{L}p_0, p_0 \rangle < a_0^2 \lambda_0^2$ .

Por outro lado, consideremos agora  $v \in \mathcal{A}$  tal que  $\|v\| = 1$ . Devido a esta consideração, podemos escrever  $v = a \xi_c + p_1$ , com  $p_1 \in H_{per}^2([0, L]) \cap P$ . Portanto,

$$0 = -\langle M'(\varphi_c), v \rangle = \left\langle \mathcal{L} \left( \frac{\partial \varphi_c}{\partial c} \right), v \right\rangle = -a_0 a \lambda_0^2 + \langle \mathcal{L}p_0, p_1 \rangle.$$

Como  $\langle \mathcal{L}p_1, \xi_c \rangle = \langle p_1, \mathcal{L}\xi_c \rangle = -\lambda_0^2 \langle p_1, \xi_c \rangle = 0$ , então usando a igualdade anterior, a desigualdade  $\langle \mathcal{L}p_0, p_0 \rangle < a_0^2 \lambda_0^2$  e o fato de que a função  $(f, g) \mapsto (\mathcal{L}f, g)$  definida para  $f, g \in H_{per}^2([0, L]) \cap P$  é uma forma sesquilinear não negativa em  $P$ , obtemos que

$$\langle \mathcal{L}v, v \rangle = -a^2 \lambda_0^2 + \langle \mathcal{L}p_1, p_1 \rangle \geq -a^2 \lambda_0^2 + \frac{|\langle \mathcal{L}p_0, p_1 \rangle|^2}{\langle \mathcal{L}p_0, p_0 \rangle} > -a^2 \lambda_0^2 + \frac{(a_0 a \lambda_0^2)^2}{a_0^2 \lambda_0^2} = 0. \quad (2.17)$$

A desigualdade (2.17) nos permite concluir que  $\zeta \geq 0$ . Provaremos agora que  $\zeta > 0$ . De fato, suponhamos que  $\zeta = 0$ , então existe uma sequência  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  tal que  $\langle \mathcal{L}v_n, v_n \rangle \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , escrevemos  $v_n = a_n \xi_c + p_n$ . Desta forma, segue que  $\langle \mathcal{L}p_n, p_0 \rangle = a_0 a_n \lambda_0^2$  e

$$\langle \mathcal{L}v_n, v_n \rangle \geq a_n^2 \left( \frac{a_0^2 \lambda_0^4}{\langle \mathcal{L}p_0, p_0 \rangle} - \lambda_0^2 \right) > 0.$$

Esta última desigualdade implica que  $a_n^2 \rightarrow 0$ , isto é,  $\langle \mathcal{L}p_n, p_n \rangle \rightarrow 0$ . Como consequência resulta que  $\|p_n\| \rightarrow 0$ , pois para todo  $n$  natural,  $\langle \mathcal{L}p_n, p_n \rangle > \eta \|p_n\|^2$ ,  $\eta > 0$ . Portanto, concluímos que

$$1 = \|v_n\|^2 = a_n^2 \|\xi_c\|^2 + \|p_n\|^2 \rightarrow 0,$$

o que é uma contradição. Logo,  $\zeta > 0$ .

Pela definição de  $\zeta$ , temos que

$$\langle \mathcal{L}v, v \rangle \geq \zeta \|v\|^2, \quad \text{para todo } v \in \mathcal{A}. \quad (2.18)$$

Além disso, utilizando a desigualdade (2.18) e a definição de  $\mathcal{L}$  (2.5), segue que para qualquer  $b > 0$ ,

$$\begin{aligned} \|v\|^2 + b(\|v'\|^2 + \|v''\|^2) &\leq \left(\frac{1}{\zeta} + b\right) \langle \mathcal{L}v, v \rangle - b \int_0^L (c - \varphi_c(x))v^2(x)dx \\ &\leq \left(\frac{1}{\zeta} + b\right) \langle \mathcal{L}v, v \rangle + b\|c - \varphi_c\|_{L_{per}^\infty} \|v\|^2. \end{aligned}$$

Logo, escolhendo  $b > 0$  conveniente tal que  $(1 - b\|c - \varphi_c\|_{L_{per}^\infty}) > 0$ , deduzimos que

$$\langle \mathcal{L}v, v \rangle \geq C(b, \zeta) (\|v\|^2 + \|v'\|^2 + \|v''\|^2),$$

para todo  $v \in \mathcal{A}$ .

Finalmente da desigualdade anterior, podemos concluir que

$$\langle \mathcal{L}v, v \rangle \geq C\|v\|_{H_{per}^2}^2, \quad \text{para todo } v \in \mathcal{A}.$$

Logo, o lema está provado.  $\square$

A seguir, apresentamos um Lema que será extremamente útil para obtermos a uniformidade em  $t$  requerida na definição de estabilidade orbital.

**Lema 2.7.** *Existem  $\alpha > 0$  e  $C(\alpha) > 0$  tais que*

$$S(u) - S(\varphi_c) \geq C\rho(u, \varphi_c)^2, \quad (2.19)$$

para todo  $u \in U_\alpha(\varphi_c)$  que satisfaz a igualdade  $Q(u) = Q(\varphi_c)$ .

*Demonstração.* Seja  $\alpha > 0$  proveniente do Lema 2.5. Consideremos  $u \in U_\alpha(\varphi_c) \cap \Sigma_c$  e definamos

$$v := u(\cdot + \Gamma(u)) - \varphi_c = C_1 Q'(\varphi_c) + y, \quad (2.20)$$

onde  $y \in \tau_c := \{Q'(\varphi_c)\}^\perp \cap \{\varphi'_c\}^\perp$  e  $C_1$  é uma constante. Notemos que, fazendo uma translação em  $\varphi_c$  se necessário, podemos assumir que  $\|v\|_{H_{per}^2} < \alpha$ . Com efeito, se  $u \in U_\alpha$ , então existe  $r_0$  tal que  $\|u - \varphi_c(\cdot + r_0)\|_{H_{per}^2} < \alpha$ . Desta forma, escolhendo  $s_0 = \Gamma(u) + r_0$ , obtêm-se que

$$\|u(\cdot + \Gamma(u)) - \varphi_c(\cdot + s_0)\|_{H_{per}^2} = \|u - \varphi_c(\cdot + r_0)\|_{H_{per}^2} < \alpha,$$

o que prova afirmação.

Aplicando a expansão de Taylor em  $Q(u)$  no ponto  $\varphi_c$ , temos que

$$Q(u) = Q(u(\cdot + \Gamma(u))) = Q(\varphi_c) + \langle Q'(\varphi_c), v \rangle + O(\|v\|^2).$$

Como  $y \in \tau_c$ , também temos que  $\langle Q'(\varphi_c), v \rangle = C_1 \langle Q'(\varphi_c), Q'(\varphi_c) \rangle$ . Desta forma, utilizando que  $Q(u) = Q(\varphi_c)$ , deduzimos que

$$C_1 = O(\|v\|^2) = O(\|v\|_{H_{per}^2}^2). \quad (2.21)$$

Por outro lado, sendo  $S$  suave,  $S'(\varphi_c) = 0$  e  $S''(\varphi_c) = \mathcal{L}$ , deduzimos pelo teorema de Taylor que

$$S(u) - S(\varphi_c) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}v, v \rangle + o(\|v\|^2). \quad (2.22)$$

Devido a relação entre  $v$  em  $y$  dada em (2.20), podemos escrever  $\langle \mathcal{L}v, v \rangle$  como

$$\langle \mathcal{L}v, v \rangle = C_1^2 \langle \mathcal{L}Q'(\varphi_c), Q'(\varphi_c) \rangle + 2C_1 \langle \mathcal{L}Q'(\varphi_c), y \rangle + \langle \mathcal{L}y, y \rangle. \quad (2.23)$$

Agora, usando (2.21) e a desigualdade

$$\begin{aligned} |2C_1 \langle \mathcal{L}Q'(\varphi_c), y \rangle| &\leq 2|C_1| \|\mathcal{L}Q'(\varphi_c)\| \|y\| \\ &\leq 2|C_1| \|\mathcal{L}Q'(\varphi_c)\| (\|v\| + \|C_1 Q'(\varphi_c)\|) \\ &\leq C_2 (\|v\|^3 + \|v\|^4), \end{aligned}$$

onde  $C_2 > 0$  é uma constante que não depende de  $v$ , resulta que

$$C_1^2 \langle \mathcal{L}Q'(\varphi_c), Q'(\varphi_c) \rangle + 2C_1 \langle \mathcal{L}Q'(\varphi_c), y \rangle = O(\|v\|^3). \quad (2.24)$$

Logo, por (2.23) e (2.24), obtemos que

$$\langle \mathcal{L}v, v \rangle = \langle \mathcal{L}y, y \rangle + O(\|v\|^3). \quad (2.25)$$

Prosseguindo com a demonstração, vemos que utilizando (2.22) e a igualdade anterior (2.25), segue que

$$S(u) - S(\varphi_c) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}y, y \rangle + o(\|v\|^2). \quad (2.26)$$

Como  $y \in \tau_c$ , podemos usar o Lema 2.6 para concluir que existe  $C > 0$  tal que

$$\langle \mathcal{L}y, y \rangle \geq C \|y\|_{H_{per}^2}^2. \quad (2.27)$$

Portando, de (2.26) e (2.27), concluimos que

$$S(u) - S(\varphi_c) \geq C \|y\|_{H_{per}^2}^2 + o(\|v\|^2). \quad (2.28)$$

Analisando agora por outro lado, vemos que usando (2.20) e (2.21), podemos deduzir

$$\|y\|_{H_{per}^2} \geq \|v\|_{H_{per}^2} - C \|v\|_{H_{per}^2}^2 > 0,$$

para  $\|v\|_{H_{per}^2}$  suficientemente pequeno. Portanto,

$$C \|y\|_{H_{per}^2}^2 \geq C \|v\|_{H_{per}^2}^2 + O(\|v\|_{H_{per}^2}^3). \quad (2.29)$$

Finalmente, podemos concluir por (2.28) e (2.29) que a desigualdade

$$S(u) - S(\varphi_c) \geq C \|v\|_{H_{per}^2}^2 + o(\|v\|_{H_{per}^2}^2)$$

ocorre e, portanto, para  $\alpha$  suficientemente pequeno temos que existirá  $\sigma(\alpha) > 0$  tal que  $C(\alpha) := C - \sigma(\alpha) > 0$  e

$$S(u) - S(\varphi_c) \geq C \|v\|_{H_{per}^2}^2 + o(\|v\|_{H_{per}^2}^2) \geq C(\alpha) \|v\|_{H_{per}^2}^2 \geq C(\alpha) \rho(u, \varphi_c)^2.$$

□

A seguir, temos o teorema no qual garante a estabilidade orbital desejada para nosso problema. Em sua demonstração utilizaremos ideias baseadas em [21] e [54].

**Teorema 2.8** (Estabilidade). *Seja  $L \in \tilde{J}_2$  fixo. Para todo  $c \in \mathbb{R}$ , a onda viajante periódica  $\varphi_c$  em (2.8) é orbitalmente estável em  $H_{per}^2([0, L])$  com respeito ao fluxo da equação de Kawahara (2.1).*

*Demonstração.* Seja  $L \in \tilde{J}_2$ , onde  $\tilde{J}_2$  é o intervalo aberto obtido no Lema 2.4, e consideremos  $\alpha > 0$  como sendo a constante dada pelo Lema 2.5. Dividiremos nossa demonstração em dois casos:  $c = 0$  e  $c \neq 0$ .

Primeiramente, consideremos  $c = 0$ . Neste caso, como  $\left. \frac{\partial}{\partial c} A \right|_{c=0} = 0$ , temos que  $Q(\varphi_0) = F(\varphi_0)$ . Logo, a demonstração ocorre usando argumentos similares aos utilizados em [21, Teorema 4.1].

Vejam agora o caso  $c \neq 0$ . Com efeito, sem perda de generalidade, vamos supor que  $c > 0$  (o caso  $c < 0$  pode ser feito usando argumentos similares). Como  $S$  é contínuo em  $\varphi_c$ , temos que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta \in (0, \alpha)$  tal que se  $\|u_0 - \varphi_c\|_{H_{per}^2} < \delta$ , então

$$S(u_0) - S(\varphi_c) < C\varepsilon^2, \quad (2.30)$$

onde  $C > 0$  é a constante dada pelo Lema 2.7. Dividiremos agora esta parte da demonstração em duas situações:  $u_0 \in \Sigma_c$  e  $u_0 \notin \Sigma_c$ .

Suponhamos que  $u_0 \in \Sigma_c$ . Como  $F$  e  $M$  são quantidades conservadas, temos que  $u(t) \in \Sigma_c$ , para todo  $t \geq 0$ . Além disto, também temos que a continuidade no tempo da função  $\rho(u(t), \varphi_c)$  nos permite escolher  $T > 0$  tal que

$$\rho(u(t), \varphi_c) < \alpha, \quad \text{para todo } t \in [0, T], \quad (2.31)$$

isto é, temos  $u(t) \in U_\alpha(\varphi_c)$ , para todo  $t \in [0, T]$ . Desta forma, combinando o Lema 2.7 com (2.30), concluímos que

$$\rho(u(t), \varphi_c) < \varepsilon, \quad \text{para todo } t \in [0, T]. \quad (2.32)$$

Vejam que, na verdade, em (2.31) ocorre  $\rho(u(t), \varphi_c) < \alpha$ , para todo  $t \in [0, +\infty)$ . De fato, seja  $T_1 > 0$  o supremo de todos os valores  $T > 0$  tal que (2.31) ocorre. Suponhamos por contradição que  $T_1 < +\infty$ . Temos então que escolhendo  $\varepsilon < \frac{\alpha}{2}$ , obtemos de (2.32) que

$$\rho(u(t), \varphi_c) < \frac{\alpha}{2}, \quad \text{para todo } t \in [0, T_1).$$

Como a aplicação  $t \in [0, +\infty) \mapsto \rho(u(t), \varphi_c)$  é contínua, resulta que existe  $T_0 > 0$  tal que  $\rho(u(t), \varphi_c) < \frac{3}{4}\alpha < \alpha$ , para  $t \in [0, T_1 + T_0)$  o que contradiz a maximalidade de  $T_1$ . Logo,  $T_1 = +\infty$  e a afirmação está provada. Usando o Lema 2.7 e a desigualdade (2.30), concluímos

$$\rho(u(t), \varphi_c) < \varepsilon, \quad \text{para todo } t \in [0, \infty).$$

Portanto, o teorema está provado para o caso  $u_0 \in \Sigma_c$ .

Consideremos agora  $u_0 \notin \Sigma_c$ . Primeiramente, afirmamos que existe  $c_1 > 0$  tal que  $Q(\varphi_{c_1}) = Q(u_0)$ . Com efeito, definamos  $v(c) = Q(\varphi_c)$ ,  $c > 0$ . Como  $v'(c) = -cL < 0$ , a aplicação  $v : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é um difeomorfismo local. Consequentemente, existe um único  $c_1 > 0$  tal que  $Q(u_0) = Q(\varphi_{c_1})$ . Isto prova a afirmação.

Prosseguindo com a demonstração, temos, de modo análogo a primeira situação, que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $0 < \delta_1 < \varepsilon$  tal que se tivermos  $\|u_0 - \varphi_{c_1}\|_{H_{per}^2} < \delta_1$ , então

$$\rho(u(t), \varphi_{c_1}) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo } t \in [0, \infty). \quad (2.33)$$

Como a aplicação  $c \mapsto \varphi_c$  é suave, também temos que existe  $\delta_2 > 0$  tal que se tivermos  $|c - c_1| < \delta_2$ , então

$$\|\varphi_c - \varphi_{c_1}\|_{H_{per}^2} < \frac{\delta_1}{2}. \quad (2.34)$$

Observemos agora que, utilizando o difeomorfismo local  $v$  e continuidade de  $Q$ , podemos escolher  $0 < \delta < \frac{\delta_1}{2}$  suficientemente pequeno tal que se  $\|u_0 - \varphi_c\|_{H_{per}^2} < \delta$ , então

$$|c - c_1| < \delta_2.$$

Desta forma, se  $\|u_0 - \varphi_c\|_{H_{per}^2} < \delta$  para este  $\delta$  escolhido, temos que, utilizando (2.34),

$$\|u_0 - \varphi_{c_1}\|_{H_{per}^2} \leq \|u_0 - \varphi_c\|_{H_{per}^2} + \|\varphi_c - \varphi_{c_1}\|_{H_{per}^2} < \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2} = \delta_1.$$

Daí, por (2.33), resulta que

$$\rho(u(t), \varphi_{c_1}) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo } t \in [0, \infty).$$

Consequentemente, utilizando (2.34) e a desigualdade anterior, podemos concluir que

$$\rho(u(t), \varphi_c) \leq \rho(u(t), \varphi_{c_1}) + \rho(\varphi_c, \varphi_{c_1}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta_1}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Portanto, o teorema está provado. □



# Estabilidade Orbital de Ondas Periódicas para a Equação log-KdV

Neste capítulo, estudaremos resultados de boa colocação e estabilidade orbital de ondas periódicas viajantes relacionados a equação logarítmica Korteweg-de Vries

$$u_t + u_{xxx} + 2(u \log(|u|))_x = 0, \quad (3.1)$$

onde  $u = u(x, t)$  denota uma função de valor real de variáveis  $x$  e  $t$ .

A equação (3.1) é uma equação dispersiva. Logo, dependendo das condições impostas pelo problema físico, é natural considerarmos casos especiais de soluções do tipo ondas viajantes. Em nosso contexto, tais ondas são da forma  $u(x, t) = \phi(x - \omega t)$ , onde  $\omega \in \mathbb{R}$  indica a velocidade da onda e  $\phi$  é uma função suave. Substituindo estas soluções em (3.1), obtemos a seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$-\phi'' + \omega\phi - \phi \log \phi^2 + A = 0, \quad (3.2)$$

onde  $A$  é uma constante de integração.

Para apresentarmos nossos resultados precisamos, primeiramente, observar que a equação (3.1) possui formalmente as seguintes identidades conservadas: a energia

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (u_x^2 + u^2 - u^2 \log(u^2)) dx, \quad (3.3)$$

a massa

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2 dx, \quad (3.4)$$

e a carga

$$M(u) = \int_0^L u dx. \quad (3.5)$$

Nossos resultados serão obtidos no espaço de energia  $X := H_{per}^1([0, L])$ ,  $L > 0$ .

## 3.1 Resultado de Boa Colocação

Nesta parte da tese, veremos a demonstração da teoria de boa colocação global para a equação log-KDV baseando-se nos argumentos contidos em [28] e [29]. Além disto, provaremos tal resultado em todo o espaço de energia  $X$ . Em outras palavras, nosso objetivo é

provar o resultado de existência e unicidade de soluções fracas para o problema

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + (u \log(u^2))_x = 0, & t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, L], \end{cases} \quad (3.6)$$

no espaço de energia  $X$ . Aqui e em toda seção,  $L > 0$  será um número fixado representando o período das funções em questão.

**Observação 3.1.** *Se considerarmos o problema (3.6) em  $\mathbb{R}$ , a energia (3.3) somente faz sentido para funções na classe*

$$Y := \{u \in H^1(\mathbb{R}); u^2 \log |u| \in L^1(\mathbb{R})\}. \quad (3.7)$$

*Isto fez com que os autores em [28] estudassem o problema de existência e unicidade para (3.6) em  $Y$ . Por outro lado, em vista da desigualdade de log-Sobolev (veja [39, Teorema 4.1])*

$$\int_0^L |v|^2 \log(|v|^2) dx \leq C \left[ \int_0^L v_x^2 dx + \log \left( \frac{1}{L} \int_0^L v^2 dx \right) \int_0^L v^2 dx \right], \quad (3.8)$$

*tal restrição não é necessária para o problema periódico. Deste modo, o espaço de energia  $X$  é apropriado para estudarmos (3.6).*

O teorema a seguir nos mostra o resultado de existência e unicidade de soluções fracas para o problema (3.6) no espaço periódico  $X = H_{per}^1([0, L])$ .

**Teorema 3.2.** *Para todo  $u_0 \in X$ , existe uma solução global  $u \in C(\mathbb{R}; X)$  de (3.6) tal que*

$$M(u(t)) = M(u_0), \quad F(u(t)) = F(u_0) \quad e \quad E(u(t)) \leq E(u_0), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

*Além disso, se*

$$\partial_x(\log |u|) \in L^\infty(\mathbb{R}; L_{per}^\infty([0, L])), \quad (3.10)$$

*então a solução  $u$  existe em  $C(\mathbb{R}; X)$ , é única, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , satisfaz  $M(u(t)) = M(u_0)$ ,  $F(u(t)) = F(u_0)$  e  $E(u(t)) = E(u_0)$  e, para todo  $T > 0$ , a função dado-solução  $u_0 \in X \mapsto u \in C([-T, T]; X)$  é contínua.*

Para demonstrarmos o teorema anterior é necessário relembramos o seguinte resultado de boa colocação associado a equação KdV (generalizada) no contexto periódico

**Teorema 3.3.** *O problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + f'(u)u_x = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, L], \end{cases} \quad (3.11)$$

*é localmente bem posto desde que  $f$  seja uma função  $C^6$  e o dado inicial pertença a  $H_{per}^s([0, L])$ ,  $s > 1/2$ . Mais precisamente, existe  $T_0 = T_0(\|u_0\|_{H_{per}^s}, f) > 0$  e uma única solução  $u \in C([-T_0, T_0], H_{per}^s([0, L]))$  para (3.11) satisfazendo tal equação no sentido da equação integral associada.*

*Demonstração.* Veja Teorema 1.3 em [50]. □

Finalmente, podemos apresentar nossa demonstração do Teorema de boa colocação.

*Demonstração - Teorema 3.2.* A suavidade da função  $f$  no Teorema 3.3 nos permite estabelecer que

$$M(u(t)) = M(u_0), \quad F(u(t)) = F(u_0), \quad \text{para todo } t \in [-T_0, T_0], \quad (3.12)$$

e

$$\tilde{E}(u(t)) = \tilde{E}(u_0), \quad \text{para todo } t \in [-T_0, T_0], \quad (3.13)$$

onde  $\tilde{E}$  é a energia modificada definida por

$$\tilde{E}(u) = \frac{1}{2} \int_0^L u_x^2 dx - \int_0^L W(u) dx, \quad W(u) := \int_0^u f(s) ds. \quad (3.14)$$

Como consequência, deduzimos que se  $u_0$  pertence a  $H_{per}^1([0, L])$ , então a solução obtida no Teorema 3.3 pode ser estendida globalmente no tempo (veremos isso detalhado mais adiante).

É óbvio que  $f(u) = 2u \log |u|$  não satisfaz as hipóteses do Teorema 3.3. Devemos então regularizar a não linearidade. Seja  $0 < \varepsilon < 1$ , definamos a família de não linearidades regularizadas da seguinte forma

$$f_\varepsilon(u) = \begin{cases} f(u), & |u| \geq \varepsilon, \\ p_\varepsilon(u), & |u| \leq \varepsilon, \end{cases} \quad (3.15)$$

onde  $f(u) = 2u \log(|u|)$  e  $p_\varepsilon$  é um polinômio de grau 13 definido por

$$p_\varepsilon(u) := \left( \log(\varepsilon) - \frac{1}{2} \right) u + \sum_{i=1}^6 \frac{a_i}{\varepsilon^{2i}} u^{2i+1},$$

com  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , determinado pela igualdade  $\partial_u^k p_\varepsilon(\varepsilon) = \partial_u^k f(\varepsilon)$ , para todo  $0 \leq k \leq 6$ .

Consideremos agora o problema de Cauchy aproximado

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + u_{xxx}^\varepsilon + f'_\varepsilon(u^\varepsilon) u_x^\varepsilon = 0, & t > 0, \\ u^\varepsilon(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (3.16)$$

e suponhamos que  $u_0 \in H_{per}^1([0, L])$ . Pelo Teorema 3.3, segue que existe  $T_\varepsilon > 0$  e uma única solução  $u^\varepsilon$  em  $C([-T_\varepsilon, T_\varepsilon]; H_{per}^1([0, L]))$  satisfazendo (3.16). Além disto, temos que

$$M(u^\varepsilon(t)) = M(u_0), \quad F(u^\varepsilon(t)) = F(u_0), \quad \text{para todo } t \in [-T_\varepsilon, T_\varepsilon], \quad (3.17)$$

e

$$E_\varepsilon(u(t)) = E_\varepsilon(u_0), \quad \text{para todo } t \in [-T_\varepsilon, T_\varepsilon], \quad (3.18)$$

onde  $E_\varepsilon$  é a energia definida por

$$E_\varepsilon(u) := \frac{1}{2} \int_0^L u_x^2 dx - \int_0^L W_\varepsilon(u) dx, \quad W_\varepsilon(u) := \int_0^u f_\varepsilon(s) ds. \quad (3.19)$$

Mostraremos agora que a solução  $u^\varepsilon$  pode ser estendida a qualquer intervalo de tempo  $[-T, T]$ ,  $T > 0$ . Para fazermos isto, iremos majorar a norma de  $u^\varepsilon$  em  $X$  por uma constante utilizando o fato de que  $E_\varepsilon$  é uma identidade conservada. Com efeito, notemos primeiramente que

$$W_\varepsilon(u) = \begin{cases} \frac{u^2}{2} (\log(u^2) - 1), & \text{se } |u| \geq \varepsilon, \\ \frac{(\log(\varepsilon) - \frac{1}{2})}{2} u^2 + \sum_{i=1}^6 \frac{\tilde{a}_i}{\varepsilon^{2i}} u^{2i+2}, & \text{se } |u| \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (3.20)$$

onde  $\tilde{a}_i$  são constantes reais que dependem somente de  $a_i$ . Assim, podemos dizer, para  $t \in [-T_\varepsilon, T_\varepsilon]$ , que

$$\begin{aligned} \int_0^L W_\varepsilon(u^\varepsilon(x, t)) dx &\leq \frac{1}{2} \int_0^L u^\varepsilon(x, t)^2 (\log(u^\varepsilon(x, t)^2) - 1) dx \\ &+ \frac{|\log(\varepsilon) - \frac{1}{2}|}{2} \|u^\varepsilon(t)\|^2 + \sum_{i=1}^6 |\tilde{a}_i| \int_0^L \varepsilon^{-2i} u^\varepsilon(x, t)^{2i+2} dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, observemos que se  $0 < |u^\varepsilon(x, t)| \leq \varepsilon$ , então

$$|u^\varepsilon(x, t)|^{-2i} \geq \varepsilon^{-2i}, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (3.21)$$

Além disso, como  $0 < \varepsilon < 1$ , temos

$$\frac{|\log(\varepsilon) - \frac{1}{2}|}{2} < b_0, \quad (3.22)$$

com  $b_0 > 0$  constante.

Logo, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \int_0^L W_\varepsilon(u^\varepsilon(x, t)) dx &\leq \frac{1}{2} \int_0^L 2u^\varepsilon(x, t)^2 \log(u^\varepsilon(x, t)^2) - u^\varepsilon(x, t)^2 dx \\ &+ b_0 \|u^\varepsilon(t)\|^2 + \sum_{i=1}^6 |\tilde{a}_i| \|u^\varepsilon(t)\|^2 \\ &\leq \int_0^L u^\varepsilon(x, t)^3 dx - \frac{1}{2} \|u^\varepsilon(t)\|^2 + b_1 \|u^\varepsilon(t)\|^2 \\ &\leq \|u^\varepsilon(t)\|_{L_{per}^\infty} \|u^\varepsilon(t)\|^2 + \left(b_1 - \frac{1}{2}\right) \|u^\varepsilon(t)\|^2 \\ &\leq \|u^\varepsilon(t)\|_{H_{per}^1} \|u^\varepsilon(t)\|^2 + \left(b_1 - \frac{1}{2}\right) \|u^\varepsilon(t)\|^2. \end{aligned}$$

Isto é,

$$- \int_0^L W_\varepsilon(u^\varepsilon(x, t)) dx \geq -\|u^\varepsilon(t)\|_{H_{per}^1} \|u^\varepsilon(t)\|^2 - \left(b_1 - \frac{1}{2}\right) \|u^\varepsilon(t)\|^2. \quad (3.23)$$

onde  $b_1$  é uma constante positiva independente de  $\varepsilon$ . Considerando  $\delta > 0$  e utilizando a desigualdade de Young, temos a estimativa

$$\|u^\varepsilon(t)\|_{H_{per}^1} \|u^\varepsilon(t)\|^2 \leq \frac{\delta^2}{2} \|u^\varepsilon(t)\|_{H_{per}^1}^2 + \frac{1}{2\delta^2} \|u^\varepsilon(t)\|^4.$$

Desta forma, utilizando (3.23) e (3.18), podemos estimar, para todo  $t \in [-T_\varepsilon, T_\varepsilon]$ , que

$$\begin{aligned}
E_\varepsilon(u_0) &= E_\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \\
&= \frac{1}{2} \|u_x^\varepsilon(t)\|^2 - \int_0^L W_\varepsilon(u^\varepsilon(x, t)) dx \\
&= \frac{1}{2} \|u^\varepsilon(t)\|_{H_{per}^1}^2 - \frac{1}{2} \|u^\varepsilon(t)\|^2 - \int_0^L W_\varepsilon(u^\varepsilon(x, t)) dx \\
&\geq \frac{1}{2} \|u^\varepsilon(t)\|_{H_{per}^1}^2 - b_1 \|u^\varepsilon(t)\|^2 - \frac{\delta^2}{2} \|u^\varepsilon(t)\|_{H_{per}^1}^2 - \frac{1}{2\delta^2} \|u^\varepsilon(t)\|^4
\end{aligned}$$

Escolhendo,  $\delta$  tal que  $\frac{1}{2} - \frac{\delta^2}{2} > 0$ , concluímos que

$$\begin{aligned}
E_\varepsilon(u_0) &\geq b_2 \|u^\varepsilon(t)\|_{H_{per}^1}^2 - b_3 \|u^\varepsilon(t)\|^4 - b_1 \|u^\varepsilon(t)\|^2 \\
&= b_2 \|u^\varepsilon(t)\|_{H_{per}^1}^2 - b_3 \|u_0\|^4 - b_1 \|u_0\|^2
\end{aligned} \tag{3.24}$$

com  $b_1, b_2, b_3 > 0$  independentes de  $\varepsilon$ . Portanto,

$$\|u^\varepsilon(t)\|_{H_{per}^1}^2 \leq C(u_0, \varepsilon), \quad t \in [-T_\varepsilon, T_\varepsilon].$$

onde  $C = C(u_0, \varepsilon)$  é uma constante positiva que depende somente de  $u_0$  e  $\varepsilon$ . Consequentemente, podemos concluir que  $u^\varepsilon \in C(\mathbb{R}; H_{per}^1([0, L]))$  (para mais detalhes veja página 82 em [35]), ou seja,  $u^\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , pode ser estendida a qualquer intervalo de tempo.

Dividiremos agora a nossa demonstração em duas etapas.

**Etapa 1: Passagem ao limite.** Suponhamos que  $u_0 \in H_{per}^1([0, L])$ . Então temos a seguinte afirmação.

*Afirmação 1:*  $E_\varepsilon(u_0) \rightarrow E(u_0)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

Primeiramente, notemos que para  $u_0$  e  $x \in [0, L]$  fixados, temos que se escolhermos  $\varepsilon$  suficientemente pequeno tal que  $|u_0(x)| \geq \varepsilon$ , então

$$W(u_0(x)) = \frac{u_0(x)^2}{2} (\log(u_0(x)^2) - 1) = W_\varepsilon(u_0(x)).$$

Logo, podemos dizer que

$$W_\varepsilon(u_0(x)) \rightarrow W(u_0(x)) \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0^+. \tag{3.25}$$

Vejam agora que  $W_\varepsilon(u_0(x))$  é uniformemente limitado. Com efeito, como  $u_0 \in H_{per}^1([0, L]) \hookrightarrow C_{per}([0, L])$ , então existe  $b_4 > 0$  tal que  $|u_0(x)| \leq b_4$ , para todo  $x \in [0, L]$ . Desta maneira, se  $|u_0(x)| \geq \varepsilon$ , obtemos que

$$\begin{aligned}
|W_\varepsilon(u_0(x))| &= \left| \frac{u_0(x)^2}{2} (\log(u_0(x)^2) - 1) \right| \\
&\leq |u_0(x)|^3 + \frac{1}{2} |u_0(x)|^2 \\
&\leq b_4^3 + \frac{b_4^2}{2}.
\end{aligned}$$

Além disso, se  $|u_0(x)| \leq \varepsilon$ , podemos afirmar, utilizando (3.21) e (3.22) que

$$\begin{aligned} |W_\varepsilon(u_0(x))| &\leq \frac{|\log(\varepsilon) - \frac{1}{2}|}{2} |u_0(x)|^2 + \sum_{i=1}^6 |\tilde{a}_i| \varepsilon^{-2i} |u_0(x)|^{2i+2} \\ &\leq b_0 b_4^2 + \sum_{i=1}^6 |\tilde{a}_i| |u_0(x)|^2 \\ &\leq b_0 b_4^2 + \sum_{i=1}^6 |\tilde{a}_i| b_4^2. \end{aligned}$$

Assim, concluímos o desejado, ou seja,  $W_\varepsilon(u_0(x))$  é uniformemente limitado.

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, resulta que

$$\int_0^L W_\varepsilon(u_0(x)) dx \rightarrow \int_0^L W(u_0(x)) dx, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

Isto prova a afirmação 1.

De acordo com a afirmação 1, segue que existe  $\varepsilon_0$  tal que

$$E_\varepsilon(u_0) \leq E(u_0) + 1 \quad \text{para todo } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Assim, utilizando (3.24), podemos afirmar que

$$\|u^\varepsilon(t)\|_{H_{per}^1}^2 \leq \frac{1}{b_2} (E(u_0) + 1 + b_3 F(u_0)^4 + b_1 F(u_0)^2),$$

para todo  $t$  real. Consequentemente, temos que  $\{u^\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0}$  é uma sequência limitada em  $C([-T, T], H_{per}^1([0, L]))$ , para todo  $T > 0$ . Ademais, utilizando a igualdade (3.16), temos que a sequência  $\{u_t^\varepsilon\}$  é limitada em  $L^\infty([-T, T], H_{per}^{-2}([0, L]))$ . Pelo Teorema de Aubin-Lions (veja [61]), resulta que existe  $u \in C([-T, T], H_{per}^1([0, L]))$  tal que, a menos de subsequência, temos

$$u^\varepsilon \rightarrow u \quad \text{forte em } C([-T, T], L_{per}^2([0, L])) \quad (3.26)$$

para todo  $T > 0$ .

*Afirmação 2:*  $F(u(t)) = F(u_0)$ ,  $t \in [-T, T]$ , para todo  $T > 0$ .

Basta ver que, utilizando (3.26), temos

$$\int_0^L |u_0(x)|^2 dx = \int_0^L |u^\varepsilon(x, t)|^2 dx \rightarrow \int_0^L |u(x, t)|^2 dx,$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Logo, a afirmação está provada.

*Afirmação 3:*  $E(u(t)) \leq E(u_0)$ ,  $t \in [-T, T]$ , para todo  $T > 0$ .

Sabemos, devido a semicontinuidade inferior fraca de  $H_{per}^1([0, L])$ , que

$$\|u(t)\|_{H_{per}^1}^2 \leq \lim_{k \rightarrow \varepsilon \rightarrow 0^+} \|u^\varepsilon(t)\|_{H_{per}^1}^2. \quad (3.27)$$

Por outro lado, refazendo as mesmas contas em que fizemos para demonstrar a afirmação 1, temos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_0^L W(u(x, t)) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^L W_\varepsilon(u^\varepsilon(x, t)) dx, \quad t \in [-T, T], \quad (3.28)$$

para todo  $T > 0$ . Desta forma, utilizando a desigualdade (3.27), a igualdade (3.28) e a afirmação 1, podemos concluir que

$$\begin{aligned} E(u(t)) &= \frac{1}{2} \left( \|u(t)\|_{H_{per}^1}^2 - \|u(t)\|^2 \right) - \int_0^L W(u(x, t)) dx \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u^\varepsilon(t)) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} E_\varepsilon(u_0) \\ &= E(u_0) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Portanto, a afirmação 3 está provada.

Mostraremos agora que o limite encontrado  $u \in C([-T, T], H_{per}^1([0, L]))$  é uma solução fraca para o problema de valor inicial (3.6) para todo  $T > 0$ . De fato, consideremos  $u^\varepsilon \in C([-T, T], H_{per}^1([0, L]))$ ,  $T > 0$ , solução do problema (3.16), então para quaisquer funções teste  $\psi \in C_0^\infty([0, L])$  e  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , temos

$$\int_{\mathbb{R}} \langle u^\varepsilon, \psi \rangle \varphi'(t) + \langle u^\varepsilon, \psi''' \rangle \varphi(t) dt + \int_{\mathbb{R}} \int_0^L f_\varepsilon(u^\varepsilon) \psi'(x) \varphi(t) dx dt = 0$$

lembrando que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno em  $L_{per}^2([0, L])$ . Como  $f_\varepsilon(u^\varepsilon) \rightarrow f(u)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , temos que, aplicando o limite (3.26) na equação acima,

$$\int_{\mathbb{R}} \langle u, \psi \rangle \varphi'(t) + \langle u, \psi''' \rangle \varphi(t) dt + \int_{\mathbb{R}} \int_0^L f(u) \psi'(x) \varphi(t) dx dt = 0$$

onde  $\psi$  e  $\psi$  são funções teste arbitrárias. Portanto,  $u \in C([-T, T], H_{per}^1([0, L]))$  é uma solução fraca para o problema de valor inicial (3.6) para todo  $T > 0$ .

**Etapa 2: Unicidade da Solução.** Nesta etapa, usaremos a condição  $\partial_x(\log |u|) \in L^\infty(\mathbb{R}; L_{per}^\infty([0, L]))$  afim de mostramos a unicidade do problema (3.6).

Suponhamos que  $u$  e  $v$  pertencentes a  $C([-T, T], H_{per}^1([0, L]))$  sejam duas soluções do problema (3.6), para todo  $T > 0$ , com o mesmo dado inicial  $u_0$ . Definamos  $w := v - u$ , então  $w \in C([-T, T], H_{per}^1([0, L]))$  e, além disso,  $w$  é uma solução global fraca para o problema

$$\begin{cases} w_t + w_{xxx} + (v \log(v^2) - u \log(u^2))_x = 0, & t \in [-T, T], \\ w(x, 0) = 0, & x \in [0, L], \end{cases} \quad (3.30)$$

para todo  $T > 0$ .

Multiplicando a equação (3.30) acima por  $w$  e integrando sobre  $[0, L]$ , temos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \int_0^L w^2 dx \right) + \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} (v \log(v^2) - u \log(u^2)) w dx = 0. \quad (3.31)$$

Mas notemos que

$$\frac{\partial}{\partial x} (v \log(v^2) - u \log(u^2)) = v_x \log(v^2) + 2v_x - (u_x \log(u^2) + 2u_x).$$

Logo, devido a periodicidade de  $u$  e  $v$ , podemos escrever (3.31) da forma

$$\frac{\partial}{\partial t} F(w) + 2 \int_0^L (v_x \log(|v|) - u_x \log(|u|)) w dx = 0. \quad (3.32)$$

Nossa intenção agora é usarmos a limitação

$$|\log |v| - \log |u|| \leq \frac{|v - u|}{\min(|v|, |u|)} \quad (3.33)$$

apresentada em [29], e a igualdade (3.32) afim de majorarmos  $\frac{\partial}{\partial t} F(w)$ . Com efeito, primeiramente, notemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} F(w) &= - \int_{|v| < |u|} (v_x \log(|v|) - u_x \log(|u|)) w dx \\ &\quad - \int_{|v| \geq |u|} (v_x \log(|v|) - u_x \log(|u|)) w dx \\ &= - \int_{|v| < |u|} v_x (\log(|v|) - \log(|u|)) w dx - \int_{|v| < |u|} \log(|u|) w w_x dx \\ &\quad - \int_{|v| \geq |u|} u_x (\log(|v|) - \log(|u|)) w dx - \int_{|v| \geq |u|} \log(|v|) w w_x dx \end{aligned}$$

Desta forma, aplicando (3.33), estabelecemos que

$$\begin{aligned} &\left| \int_{|v| < |u|} v_x (\log(|v|) - \log(|u|)) w dx + \int_{|v| \geq |u|} u_x (\log(|v|) - \log(|u|)) w dx \right| \\ &\leq \int_{|v| < |u|} \left| \frac{v_x}{v} \right| w^2 dx + \int_{|v| \geq |u|} \left| \frac{u_x}{u} \right| w^2 dx \\ &\leq \left( \left\| \frac{v_x}{v} \right\|_{L^\infty} + \left\| \frac{u_x}{u} \right\|_{L^\infty} \right) 2F(w). \end{aligned}$$

Por outro lado, integrando por partes, também temos que

$$\begin{aligned} &- \int_{|v| < |u|} \log(|u|) w w_x dx - \int_{|v| \geq |u|} \log(|v|) w w_x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{|v| < |u|} (\log(|u|))_x w^2 dx + \frac{1}{2} \int_{|v| \geq |u|} (\log(|v|))_x w^2 dx \\ &\leq \left( \left\| \frac{v_x}{v} \right\|_{L^\infty} + \left\| \frac{u_x}{u} \right\|_{L^\infty} \right) F(w). \end{aligned}$$

Logo, utilizando as desigualdades acima, podemos afirmar que

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} F(w) \right| \leq 6 \left( \left\| \frac{v_x}{v} \right\|_{L^\infty} + \left\| \frac{u_x}{u} \right\|_{L^\infty} \right) F(w). \quad (3.34)$$

Como  $w_0 := w(x, 0) = 0$ , resulta pela desigualdade de Gronwall que  $F(w) = 0$  para todo  $t$ , o que prova a unicidade desejada.



Para concluirmos que  $E(u(t)) = E(u_0)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  basta utilizarmos os argumentos apresentados no Teorema 3.3.9 da referência [29]. A igualdade  $M(u(t)) = M(u_0)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  segue da afirmação 2 e do fato de  $L_{per}^2([0, L])$  estar imerso em  $L_{per}^1([0, L])$ . A dependência contínua também pode ser provada utilizando os argumentos contidos na Seção 9.3 em [29]. Portanto, finalmente podemos dizer que o teorema está provado.  $\square$

## 3.2 Estabilidade Orbital

Nesta seção, usaremos a teoria introduzida nas preliminares desta tese para estabelecermos a existência e estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas para a equação (3.1).

Inicialmente, observemos que (3.2) é da forma (1.1) com

$$g(\omega, A, \phi) = \omega\phi - \phi \log \phi^2 + A. \quad (3.35)$$

Claramente,  $g$  é suave com respeito a  $(\omega, A) \in \mathbb{R}^2$  e localmente Lipschitziana em  $\phi$ .

Iremos agora dividir nossa análise em dois casos.

### 3.2.1 Primeiro caso: $A = 0$

Já é conhecido que, se  $A = 0$ , então a equação (3.2) admite solução com perfil de onda solitária (veja, por exemplo, [30] e [31])

$$\tilde{\phi}_\omega(x) = e^{\frac{1}{2} + \frac{\omega}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (3.36)$$

Desta forma, a dinâmica associada a (3.2) para o caso de onda solitária é um pouco mais rica que a estudada nesta subseção, uma vez que no contexto de ondas solitárias, as ondas viajantes estão apresentadas de forma explícita.

A função  $g$  em (3.35) pode ser reduzida a função

$$g(\omega, 0, \phi) := g_\omega(\phi) = \omega\phi - \log(\phi^2)\phi. \quad (3.37)$$

Pode ser visto facilmente que  $g_\omega$  possui três raízes, a saber, 0 e  $\pm e^{\omega/2}$ . Afim de verificarmos que  $g_\omega$  satisfaz a hipótese (a1) enunciada na seção 1.2 e obtermos soluções positivas, consideraremos  $r_1 = 0$  e  $r_2 = e^{\omega/2}$ . Como  $r_1$  e  $r_2$  são, respectivamente, mínimo e máximo local da função (veja a Figura 3.1)

$$G(\omega, 0, \phi) := G_\omega(\phi) = \frac{\omega + 1}{2}\phi^2 - \frac{1}{2}\phi^2 \log \phi^2,$$

segue que  $(r_1, 0)$  é um ponto de cela degenerado e  $(r_2, 0)$  é um ponto central (veja [47, pag. 179]). Isto mostra que a hipótese (a1) é satisfeita, para todo  $\omega \in \mathbb{R}$ .

Neste contexto apresentado, a função energia é dado por

$$\mathcal{E}(\phi, \xi) = -\frac{\xi^2}{2} + G_\omega(\phi) = -\frac{\xi^2}{2} + \frac{\omega + 1}{2}\phi^2 - \frac{1}{2}\phi^2 \log \phi^2.$$

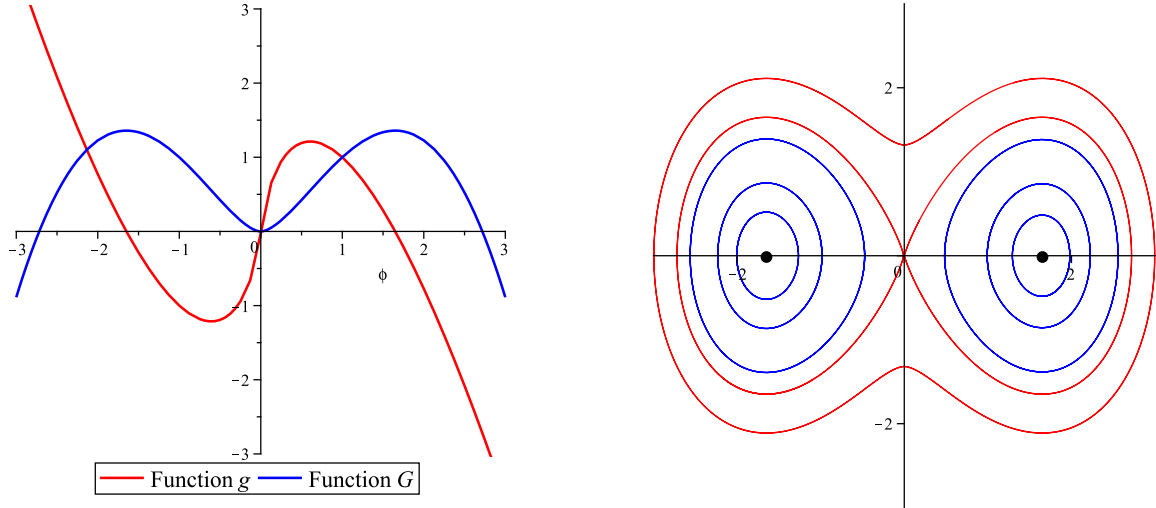


Figura 3.1: Lado esquerdo: Gráficos das funções  $g = g_\omega$  e  $G = G_\omega$  para  $\omega = 1$ . Lado direito: Plano de fase da equação  $-\phi'' + \omega\phi - \phi \log \phi^2 = 0$ . As órbitas em azul são aquelas tais que  $\phi$  é periódica e não muda de sinal.

Como a onda solitária (3.36) satisfaz

$$-\frac{(\phi')^2}{2} + \frac{\omega + 1}{2}\phi^2 - \frac{1}{2}\phi^2 \log \phi^2 = 0,$$

podemos concluir que  $\mathcal{E}(\phi, \phi') = \mathcal{E}(0, 0) = 0$ . Isto significa que é possível tomar uma curva fechada  $\Gamma$ , condizente com a hipótese (a2) apresentada na seção 1.2, em torno da órbita de (3.36) junto com o ponto de equilíbrio  $(r_1, 0) = (0, 0)$  (veja Figura 3.1). Como a origem pertence a  $\Gamma$ , fica claro que  $g_\omega$  é suave na região dentro de  $\Gamma$  e  $g'_\omega(r_2) = -2 < 0$ , para todo  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Portanto,  $g_\omega$  satisfaz as hipóteses (a1)-(a3) enunciadas na seção 1.2 com  $\mathcal{P} = \mathbb{R}$ .

A seguir veremos que o Teorema 1.1 e o Corolário 1.3 podem ser aplicados afim de provarmos a existência de soluções periódicas positivas com período  $L$ , on  $L$  pertence ao intervalo  $(\alpha, +\infty)$ , com  $\alpha = 2\pi/\sqrt{-g'_\omega(r_2)} = \pi\sqrt{2}$ . Mais precisamente, temos

**Proposição 3.4.** *Seja  $L \in (\sqrt{2}\pi, +\infty)$  fixado. Então, para todo  $\omega \in \mathbb{R}$ , a equação*

$$-\phi'' + \omega\phi - \phi \log \phi^2 = 0 \tag{3.38}$$

*possui soluções periódicas de período  $L$  nas quais são pares e estritamente positivas.*

Antes de demonstrarmos a proposição acima precisamos do seguinte resultado.

**Lema 3.5.** *Consideremos a equação diferencial*

$$x''(t) + g(x(t)) = 0.$$

*e suponhamos que existem  $a^*$  e  $b^*$  tais que  $-\infty \leq a^* < 0 < b^* \leq +\infty$  e uma função suave positiva tal que*

$$g(x) = xh(x), \quad a^* < x < b^*, \tag{3.39}$$

e

$$0 < G(a^*) = G(b^*) = c^* \leq \infty, \quad (3.40)$$

onde

$$G(x) = \int_0^x g(s) ds.$$

Se

$$g(0) = 0, \quad g'(0) > 0, \quad g''(x) > 0, \quad g'''(x) \leq 0, \quad x \in (a^*, b^*), \quad (3.41)$$

então a função energia-período  $c \in (0, c^*) \mapsto T(c)$  é diferenciável e  $T'(c) > 0$ ,  $c \in (0, c^*)$ .

*Demonstração.* Basta combinar o Corolário 2.5 e a Proposição 3.1 (ii) em [33].  $\square$

Agora sim podemos demonstrar a Proposição 3.4.

*Dem. da Proposição 3.4.* Primeiramente, observemos que se  $\phi_0$  é uma solução periódica com período  $L$  de

$$-\phi_0'' - \phi_0 \log \phi_0^2 = 0, \quad (3.42)$$

então  $\psi_\omega = e^{\omega/2} \phi_0$  é solução periódica também com período  $L$  de (3.38) para qualquer  $\omega \in \mathbb{R}$ . Consequentemente, em vista do Teorema 1.1 e Corolário 1.3, é suficiente mostrarmos que as soluções periódicas de (3.42) satisfazem

$$\frac{\partial L}{\partial B} < 0, \quad B \in (0, 1/2). \quad (3.43)$$

Notemos que  $\mathcal{E}(0, 0) = 0$  e  $\mathcal{E}(0, r_2) = \mathcal{E}(0, 1) = 1/2$ . Reescrevendo (3.42) como

$$\phi_0'' + \phi_0 \log \phi_0^2 = 0, \quad (3.44)$$

podemos ver que, na verdade, é suficiente provarmos que as soluções periódicas de (3.44) satisfazem

$$\frac{\partial L}{\partial B} > 0, \quad B \in (-1/2, 0). \quad (3.45)$$

Afim de encaixarmos nosso problema na estrutura do Lema 3.5 devemos fazer a mudança de variável  $\phi_0 = \psi_0 + 1$ . Assim,  $\phi_0$  é uma solução periódica de (3.44) se, e somente se  $\psi_0$  é solução periódica de

$$\psi_0'' + (\psi_0 + 1) \log(\psi_0 + 1)^2 = 0. \quad (3.46)$$

Seja  $g(x) = (x + 1) \log(x + 1)^2$ . É fácil ver que

$$G(x) = \int_0^x g(s) ds = -\frac{(x+1)^2}{2} + \frac{(x+1)^2}{2} \log(x+1)^2 + \frac{1}{2}.$$

Para obtermos (3.45), é suficiente mostrarmos que as soluções periódicas de (3.46) satisfazem

$$\frac{\partial L}{\partial B} > 0, \quad B \in (0, 1/2). \quad (3.47)$$

Finalmente, usaremos o Lema 3.5 para demonstrar tal fato. Com efeito, notemos que  $a^* = -1$ ,  $b^* = -1 + e^{1/2}$ , e  $c^* = 1/2$ . Ademais, em  $(a^*, b^*)$ , temos que

$$g(x) = x \left( \log(x+1)^2 + \frac{1}{x} \log(x+1)^2 \right) = xh(x).$$

Com o intuito de verificarmos a positividade de  $h(x)$  (para  $x > -1$ ), notemos que  $h(-1) = 0$  e

$$h'(x) = \frac{1}{x+1} \left( 2 + \frac{2}{x} - \frac{(x+1)}{x^2} \log(x+1)^2 \right).$$

Logo,  $h(x) > 0$  se, e somente se  $h'(x) > 0$ , ou seja, se, e somente se  $x > \log(x+1)$ , mas isto é verdade para todo  $x > -1$ . Deste modo, resta agora mostrarmos (3.41). Para este fato, basta ver que  $g'(x) = 2 + \log(x+1)^2$ ,  $g''(x) = 2/(x+1)$  e  $g'''(x) = -2/(x+1)^2$ . Aplicando o Lema 3.5 temos, portanto, a conclusão da nossa demonstração.  $\square$

Com o Corolário 1.3 e a Proposição 3.4 em mãos podemos, enfim, estabelecer a existência de uma curva de soluções periódicas de período  $L$ , para cada  $L > \sqrt{2}\pi$ . Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

**Proposição 3.6.** *Sejam  $L \in (\sqrt{2}\pi, +\infty)$  fixo e  $\phi_0$  a solução periódica de período  $L$  obtida na Proposição 3.4 com  $\omega = 0$ . Então,*

$$\omega \in \mathbb{R} \mapsto \psi_\omega = e^{\omega/2} \phi_0 \in H_{per}^2([0, L])$$

*é uma família suave de soluções positivas e periódicas de período  $L$  para (3.38).*

É fácil ver que se  $\phi$  é solução de (3.38), então  $-\phi$  também é. Desta forma, em vista da proposição anterior, também podemos obter uma curva suave de soluções negativas e periódicas de período  $L$ . Mais detalhadamente, temos o seguinte resultado.

**Proposição 3.7.** *Sejam  $L \in (\sqrt{2}\pi, +\infty)$  fixo e  $\phi_0$  a solução periódica de período  $L$  obtida na Proposição 3.4 com  $\omega = 0$ . Então,*

$$\omega \in \mathbb{R} \mapsto \psi_\omega = -e^{\omega/2} \phi_0 \in H_{per}^2([0, L])$$

*é uma família suave de soluções negativas e periódicas de período  $L$  para (3.38).*

Colocaremos nossa atenção agora em resultados de estabilidade orbital das ondas periódicas obtidas nas Proposições 3.6 e 3.7. Deste modo, no que segue nesta seção,  $L \in (\sqrt{2}\pi, +\infty)$  está fixado e  $\psi_\omega$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$  é a solução positiva obtida na Proposição 3.6 ou a solução negativa obtida na Proposição 3.7. Recordemos que as quantidades  $E$  e  $F$ , definidas em (3.3) e (3.4) são conservadas com respeito ao fluxo de (3.1) e invariante sobre a ação do grupo de translações  $T(s)f(\cdot) = f(\cdot + s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Em nosso problema, temos que o funcional  $E$  não é suave na origem em  $H_{per}^1([0, L])$ . Entretanto, os argumentos usados anteriormente implicam que  $\psi_\omega^2$  é estritamente positiva, para qualquer  $\omega \in \mathbb{R}$ , e isto garante a suavidade do funcional

$E$  em torno de qualquer solução onda viajante periódica  $\psi_\omega$ . Isto é suficiente para aplicarmos a teoria de estabilidade, pois a estabilidade orbital é determinada para dados iniciais suficientemente próximos de  $\psi_\omega$ .

Definamos o funcional  $H = E + \omega F$ . Segue de imediato que  $H$  é suave em uma vizinhança de  $\psi_\omega$ . Isto nos permite calcular a derivada Fréchet de  $H$  em  $\psi_\omega$  e concluir, via (3.2), que  $\psi_\omega$  é ponto crítico de  $H$ , isto é,

$$H'(\psi_\omega) = (E + \omega F)'(\psi_\omega) = -\psi_\omega'' + \omega\psi_\omega - \psi_\omega \log \psi_\omega^2 = 0.$$

Além do mais, podemos reescrever a equação (3.1) como um sistema Hamiltoniano abstrato, a saber,

$$u_t = JE'(u), \tag{3.48}$$

com  $J = \partial_x$ . Apesar de  $J$  não ser sobrejetor sobre  $L_{per}^2([0, L])$ , ainda assim podemos aplicar a teoria desenvolvida em [45], uma vez que tal hipótese somente deve ser imposta para demonstrar resultados de instabilidade. Conforme enfatizamos acima, nossos resultados mostrarão a estabilidade de ondas viajantes  $\psi_\omega$ .

Precisamos agora considerar o operador linearizado  $\mathcal{L}_{\psi_\omega} := H''(\psi_\omega)$ , isto é,

$$\mathcal{L}_{\psi_\omega}(v) = H''(\psi_\omega)v = -v'' + (\omega - 2 - \log \psi_\omega^2)v. \tag{3.49}$$

Temos que  $\mathcal{L}_{\psi_\omega}$  é um operador ilimitado devido sobre  $L_{per}^2([0, L])$  com domínio  $H_{per}^2([0, L])$ .

Afim de enunciarmos o resultado de estabilidade, recordemos que se as hipóteses (P1), (P2), (P3) e (P4) anunciadas abaixo ocorrerem, então a teoria apresentada em [45] garante que  $\psi_\omega$  é orbitalmente estável.

(P1) Existem um intervalo aberto  $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$  e uma curva suave de soluções periódicas,  $\omega \in \mathcal{J} \subset \mathbb{R} \mapsto \psi_\omega \in H_{per}^1([0, L])$  para (3.38).

(P2) O operador  $\mathcal{L}_{\psi_\omega}$ , definido em (3.49), possui somente um autovalor negativo no qual este é simples.

(P3) O autovalor 0 é simples para o operador  $\mathcal{L}_{\psi_\omega}$  definido em (3.49), e está associado com a autofunção  $\psi_\omega'$ ,  $\omega \in \mathcal{J}$ .

(P4) Se  $d : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  é a função definida como  $d(\omega) = H(\psi_\omega)$ , então

$$d''(\omega) = \frac{d}{d\omega}F(\psi_\omega) > 0, \quad \text{para todo } \omega \in \mathcal{J}.$$

**Observação 3.8.** *Notemos que as hipóteses (P1)-(P4) acima estão inteiramente relacionadas com as propriedades (P1)-(P4) citadas na introdução desta tese. Todavia, vale ressaltar que as hipóteses inseridas aqui são aplicadas ao caso  $A = 0$  e fazem parte da teoria clássica de estabilidade orbital já desenvolvida em [45].*

Finalmente, podemos provar nosso resultado de estabilidade.

**Teorema 3.9.** *Suponhamos que a unicidade e a dependência contínua ocorrem para (3.6) de acordo com o Teorema 3.2. Fixemos  $L \in (\sqrt{2}\pi, +\infty)$  e seja  $\omega \in \mathbb{R} \mapsto \psi_\omega \in H_{per}^2([0, L])$  uma família suave de soluções periódicas com período  $L$  obtida na Proposição 3.6 ou Proposição 3.7. Então  $\psi_\omega$  é orbitalmente estável em  $X$  com respeito ao fluxo de (3.1).*

*Demonstração.* Considere  $\psi_\omega$  como sendo a solução periódica dada na Proposição 3.6. O caso para  $\psi_\omega$  obtida na Proposição 3.7 é análogo. Conforme visto acima, provaremos que (P1)-(P4) ocorrem. De fato, basta conferir os argumentos abaixo.

Etapa 1: (P1) ocorre. A existência da curva suave segue imediatamente da Proposição 3.6. Além disto,  $\mathcal{J} = \mathbb{R}$ .

Etapa 2: (P2) e (P3) ocorrem. Segue da Proposição 3.4 e Lema 1.4.

Etapa 3: (P4) ocorre. Afim de concluirmos nossa demonstração, resta provarmos que

$$d''(\omega) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} \int_0^L \psi_\omega^2 dx > 0. \quad (3.50)$$

Mas sendo  $\psi_\omega = e^{\omega/2} \phi_0$ , concluimos imediatamente que

$$d''(\omega) = \frac{1}{2} \left( \int_0^L \phi_0^2 dx \right) \frac{d}{d\omega} e^\omega > 0.$$

Logo, (3.50) está provado e a demonstração está concluída.  $\square$

### 3.2.2 Segundo caso: $A \neq 0$

Suponhamos agora que  $A \neq 0$ . Neste caso, a função  $g$  é vista da mesma forma que (3.35) e  $G$  é dada por

$$G(\omega, A, \phi) = \frac{\omega + 1}{2} \phi^2 - \frac{1}{2} \phi^2 \log \phi^2 + A\phi.$$

Primeiramente, vamos analisar as raízes de  $g$ . Com efeito, observemos que  $g(\omega, A, \phi) = 0$  é equivalente a  $g_\omega(\phi) = -A$ , onde  $g_\omega(\phi)$  é a função definida em (3.37). Sendo assim, é conveniente analisarmos  $g_\omega$ . Fazendo uma conta simples, temos que  $x_0 = e^{\omega/2-1}$  e  $-x_0$  são os únicos pontos críticos de  $g_\omega$ . Além disto, para todo  $\omega \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_\omega(x) = -\infty \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g_\omega(x) = +\infty.$$

Como  $g_\omega(x_0) = 2e^{\omega/2-1}$  e  $g_\omega(x) = -g_\omega(-x)$ , obtemos três cenários diferentes a ser estudado para as raízes de  $g$ .

**Caso 1:**  $|A| < 2e^{\omega/2-1}$ . Para este caso, existem exatamente três números reais  $r_0 < r_1 < r_2$  satisfazendo

$$g_\omega(r_0) = g_\omega(r_1) = g_\omega(r_2) = -A,$$

Mas então isto significa que  $r_0, r_1$  e  $r_2$  são três raízes de  $g(\omega, A, \cdot)$ , para qualquer  $\omega \in \mathbb{R}$  e  $-2e^{\omega/2-1} < A < 2e^{\omega/2-1}$ . Notemos que  $r_1 > 0$  se  $A < 0$  e  $r_1 < 0$  se  $A > 0$  (veja Figura 3.2). Também temos que  $x_0 > 0$  implica que  $r_2 > 0$ . Ademais, devido ao fato de, para  $\phi$  em uma vizinhança de  $r_2$ ,  $g(\omega, A, \phi) > 0$  se  $\phi < r_2$  e  $g(\omega, A, \phi) < 0$  se  $\phi > r_2$ , resulta que  $r_2$  é máximo local de  $G(\omega, A, \cdot)$ . Uma análise similar nos mostra que  $r_0$  também é máximo local de  $G(\omega, A, \cdot)$ .

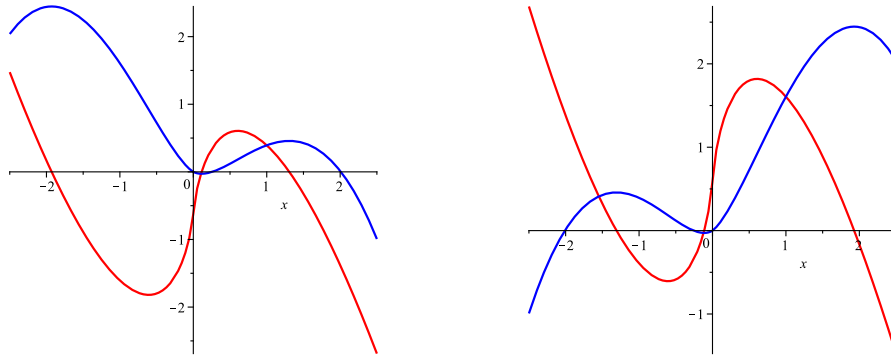


Figura 3.2: Lado esquerdo: Gráfico das funções  $g$  (vermelho) e  $G$  (azul) para  $\omega \in \mathbb{R}$  e  $|A| < 2e^{\omega/2-1}$ ,  $A < 0$ . Lado direito: Gráfico das funções  $g$  (vermelho) e  $G$  (azul) para  $\omega \in \mathbb{R}$  e  $|A| < 2e^{\omega/2-1}$ ,  $A > 0$ .

**Caso 2:**  $|A| = 2e^{\omega/2-1}$ . Aqui, existem  $r_1 < 0 < r_2$  únicos tais que  $g_\omega(r_1) = g_\omega(r_2) = -A$ . Consequentemente,  $g(\omega, A, \cdot)$  possui exatamente duas raízes se  $\omega \in \mathbb{R}$  e  $|A| = 2e^{\omega/2-1}$  (veja Figura 3.3).

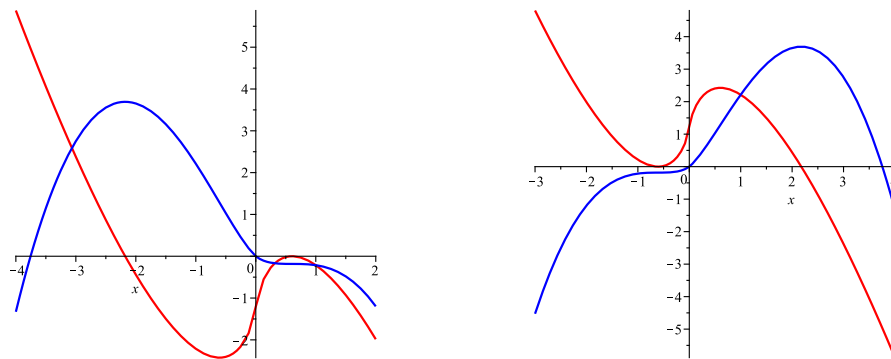


Figura 3.3: Lado esquerdo: Gráfico das funções  $g$  (vermelho) e  $G$  (azul) para  $\omega \in \mathbb{R}$  e  $A = 2e^{\omega/2-1}$ . Lado direito: Gráfico das funções  $g$  (vermelho) e  $G$  (azul) para  $\omega \in \mathbb{R}$  e  $A = -2e^{\omega/2-1}$ .

**Caso 3:**  $|A| > 2e^{\omega/2-1}$ . Neste último caso, existe um único número real  $r_2$  satisfazendo  $g_\omega(r_2) = -A$ , ou seja,  $g(\omega, A, \cdot)$  possui uma única raiz se  $\omega \in \mathbb{R}$  e  $|A| > 2e^{\omega/2-1}$ . Além do mais,  $r_2 < 0$  se  $A < 0$  e  $r_2 > 0$  se  $A > 0$  (veja Figura 3.4). Por fim, devido ao fato de, para

$\phi$  em uma vizinhança de  $r_2$ ,  $g(\omega, A, \phi) > 0$  se  $\phi < r_2$  e  $g(\omega, A, \phi) < 0$  se  $\phi > r_2$ , podemos concluir que  $r_2$  é máximo local de  $G(\omega, A, \cdot)$ .

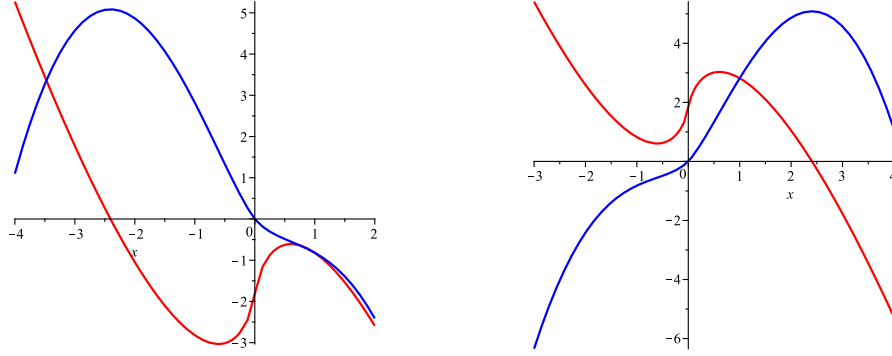


Figura 3.4: Lado esquerdo: Gráfico das funções  $g$  (vermelho) e  $G$  (azul) para  $\omega \in \mathbb{R}$  e  $|A| > 2e^{\omega/2-1}$ ,  $A < 0$ . Lado direito: Gráfico das funções  $g$  (vermelho) e  $G$  (azul) para  $\omega \in \mathbb{R}$  e  $|A| > 2e^{\omega/2-1}$ ,  $A > 0$ .

Em virtude da discussão dos casos analisados acima, temos que se  $(\omega, A)$  pertence a

$$\mathcal{P}_1 = \{(\omega, A) \in \mathbb{R}^2; \omega \in \mathbb{R}, |A| < 2e^{\omega/2-1}\} \quad (3.51)$$

ou

$$\mathcal{P}_3 = \{(\omega, A) \in \mathbb{R}^2; \omega \in \mathbb{R}, |A| > 2e^{\omega/2-1}\}, \quad (3.52)$$

então a função  $g(\omega, A, \cdot)$  sempre possui uma raiz real  $r_2$  na qual  $G(\omega, A, \cdot)$  se torna máximo local. Como consequência da Observação 1.2, podemos enunciar o seguinte resultado.

**Teorema 3.10.** *Suponhamos que  $(\omega, A)$  pertence a  $\mathcal{P}_1$  ou  $\mathcal{P}_3$ . Então, a equação (3.2) possui uma solução periódica par  $\phi_{(\omega, A)}$ . Além disso, temos o seguinte.*

- (i) *Se  $(\omega, A) \in \mathcal{P}_1$  com  $A < 0$ , então todas as soluções em torno de  $(r_2, 0)$  são estritamente positivas e todas as soluções em torno de  $(r_0, 0)$  tais que pertencem a uma vizinhança pequena de  $(r_0, 0)$  são estritamente negativas.*
- (ii) *Se  $(\omega, A) \in \mathcal{P}_1$  com  $A > 0$ , então todas as soluções em torno de  $(r_0, 0)$  são estritamente negativas e todas as soluções em torno de  $(r_2, 0)$  tais que pertencem a uma vizinhança pequena de  $(r_2, 0)$  são estritamente positivas.*
- (iii) *Se  $(\omega, A) \in \mathcal{P}_3$  com  $A < 0$ , então as soluções em torno de  $(r_2, 0)$  e pertencentes a uma vizinhança pequena de  $(r_2, 0)$  são estritamente negativas.*
- (iv) *Se  $(\omega, A) \in \mathcal{P}_3$  com  $A > 0$ , então as soluções em torno de  $(r_2, 0)$  e pertencentes a uma vizinhança pequena de  $(r_2, 0)$  são estritamente positivas.*

O plano de fase para  $(\omega, A)$  pertencente a  $\mathcal{P}_1$  ou  $\mathcal{P}_3$  pode ser visto nas Figuras 3.5 e 3.6 abaixo.



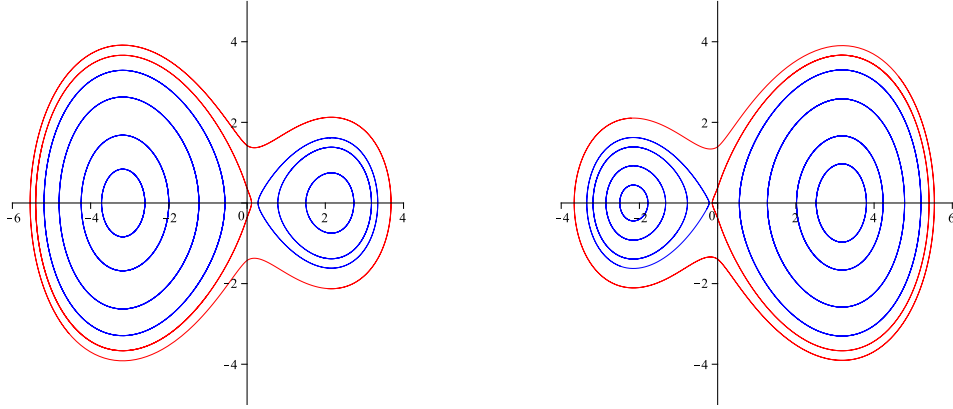


Figura 3.5: Lado esquerdo: Plano de fase para  $|A| < 2e^{\omega/2-1}$ ,  $A < 0$ . Lado direito: Plano de fase para  $|A| < 2e^{\omega/2-1}$ , e  $A > 0$ . Nos dois casos, as órbitas em azul são aquelas em que  $\phi_{(\omega,A)}$  é periódico e não muda de sinal.

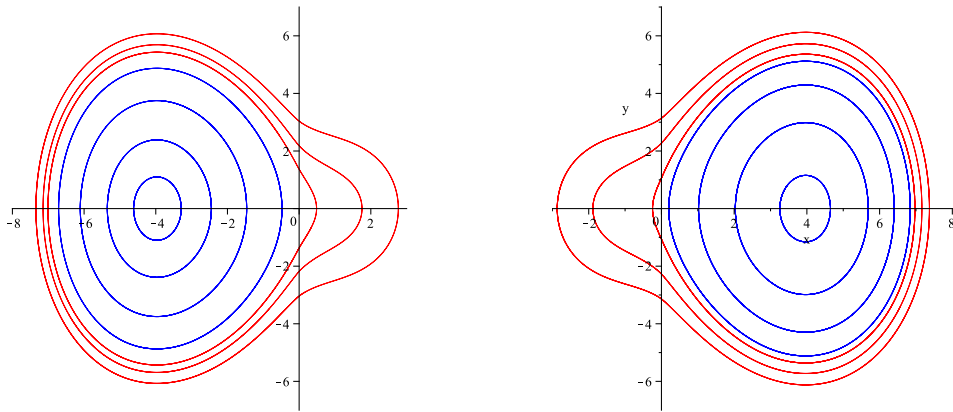


Figura 3.6: Lado esquerdo: Plano de fase para  $|A| > 2e^{\omega/2-1}$ ,  $A < 0$ . Lado direito: Plano de fase para  $|A| > 2e^{\omega/2-1}$ , e  $A > 0$ . Neste caso, as órbitas em azul são aquelas em que  $\phi_{(\omega,A)}$  é positivo.

**Observação 3.11.** *É visto facilmente que se  $|A| = 2e^{\omega/2-1}$ , então também temos a obtenção de soluções onda periódicas que não mudam de sinal. Entretanto, nesta situação,  $(\omega, A)$  não pertence a um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ .*

**Observação 3.12.** *Uma vez apresentado o Teorema 3.10, há a necessidade de fazermos algumas comparações. Notemos que no contexto desta subseção, ao contrário do caso onde  $A = 0$ , não temos o controle do tamanho do período de  $\phi_{(\omega,A)}$ . Há também a possibilidade das soluções, até mesmo em torno dos pontos críticos, mudarem de sinal. Lembremos que para o caso  $A = 0$ , as soluções periódicas de período  $L$  não mudavam de sinal qualquer que seja  $L > \sqrt{2}\pi$ .*

Vamos agora construir uma família suave de soluções periódicas necessária aos resultados de estabilidade.

**Teorema 3.13.** *Fixemos  $(\omega_0, A_0)$  de acordo com o Teorema 3.10 e seja  $L_0$  o período de  $\phi_{(\omega_0, A_0)}$ . Então, existem uma vizinhança  $\mathcal{O}$  de  $(\omega_0, A_0)$  e uma família*

$$(\omega, A) \in \mathcal{O} \mapsto \psi_{(\omega, A)} \in H_{per, e}^2([0, L_0])$$

*de soluções periódicas com período  $L_0$  para (3.2) na qual depende suavemente de  $(\omega, A) \in \mathcal{O}$ .*

*Demonstração.* Nesta equação não é possível utilizar o Lema 3.5. Desta forma, em vez de calcularmos a derivada do período conforme fizemos na Proposição 3.4, utilizaremos um outro método para enxergarmos o sinal de  $\theta$ . Em vista dos Teoremas 1.6 e 1.10, isto é o suficiente para concluirmos o desejado. Para calcularmos o sinal de  $\theta$  em (1.11), precisamos calcular o valor de  $\bar{y}'(L_0)$  resolvendo o sistema linear (1.9) com  $g(\omega_0, A_0, \phi) = \omega_0\phi - \log(\phi^2)\phi + A_0$ . Afim de fixarmos algumas ideias, consideremos  $\omega_0 = 1$  and  $A_0 = 1$ . Neste caso, temos que  $(\omega_0, A_0) \in \mathcal{P}_1$  e as raízes da função  $g(\omega_0, A_0, \cdot)$  são  $r_0 = -1$ ,  $r_1 = -0.28$  e  $r_2 = 2.09$ . Para conseguirmos obter soluções estritamente positivas com um máximo local em  $x = 0$ , a condição inicial de  $\phi_{(1,1)}$  deve satisfazer  $2.09 < \phi_{(1,1)}(0) < 3.51$ . Unindo todas estas informações e considerando  $\phi_{(1,1)}(0) = 3$ , somos capazes de enxergar que  $\phi = \phi_{(1,1)}$  satisfaz

$$\begin{cases} -\phi'' + \phi - \phi \log \phi^2 + 1 = 0, \\ \phi(0) = 3, \\ \phi'(0) = 0. \end{cases} \quad (3.53)$$

Utilizando (1.6) podemos estimar que  $L_0 \approx 4.18$ . Calculando numericamente o problema de valor inicial (3.53), podemos concluir que  $\theta \approx -0.08$ . Isto nos permite aplicar o Corolário 1.3 e concluirmos o resultado para este caso em particular. Na Tabela 1, apresentamos diferentes valores para  $\theta$ , utilizando ou argumentos estabelecidos no Teorema 3.10.

Valores de $\theta$ relacionados a $\omega_0$ e $A_0$				
$\omega_0$	$A_0$	$\phi_{(\omega_0, A_0)}(0)$	$L_0$	$\theta$
2	4	5	3.49	-0.14
-1	-1	-0.1	4.32	-0.02
1	-2	-2	3.65	-0.03
-1	-2	-1	3.37	-0.03

Tabela1: Valores de  $\theta$  e  $L_0$  para diferentes  $(\omega_0, A_0)$ .

Portanto, o este teorema está provado. □

As propriedades espectrais em relação ao operador linearizado

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(v) = -v'' + (\omega - 2 - \log(\psi_{(\omega, A)}^2))v. \quad (3.54)$$

podem ser deduzidas combinando os argumentos inclusos na demonstração do Teorema 3.13 com o contexto utilizado nas preliminares desta tese. Mais detalhadamente, temos a seguinte proposição.

**Proposição 3.14.** *Sejam  $(\omega, A) \in \mathcal{O}$  e  $\psi_{(\omega, A)}$  a solução periódica de período  $L_0$  determinada pelo Teorema 3.13. Então, o operador fechado, ilimitado e autoadjunto  $\mathcal{L}$  em (3.54) definido no  $L_{per}^2([0, L_0])$  com domínio  $H_{per}^2([0, L_0])$  possui um único autovalor negativo onde a autofunção associada é par. Zero é um autovalor simples com autofunção associada  $\psi'_{(\omega, A)}$ .  $E$ , além disso, o restante do espectro deste operador é limitado e longe do zero.*

A partir de agora, apresentaremos com detalhes os resultados de estabilidade orbital referentes as ondas construídas anteriormente. Antes de iniciarmos, devemos observar que não podemos aplicar diretamente os critérios estabelecidos em [45], pois nossas ondas não são ponto crítico do funcional  $E + \omega F$ . Todavia, nossos resultados a serem apresentados é fruto de uma ampla adaptação dos argumentos contidos em [21], [45], e [54]. Baseado em nosso objetivo, no que segue, consideraremos  $\psi = \psi_{(\omega_0, A_0)}$  como sendo uma solução qualquer dada no Teorema 3.13 com período minimal  $L_0$ . Definamos

$$\eta := \frac{\partial}{\partial \omega} \psi_{(\omega, A)} \Big|_{(\omega_0, A_0)}, \quad \beta := \frac{\partial}{\partial A} \psi_{(\omega, A)} \Big|_{(\omega_0, A_0)},$$

e consideremos

$$M_\omega(\psi) = \frac{\partial}{\partial \omega} \int_0^{L_0} \psi_{(\omega, A)}(x) dx \Big|_{(\omega_0, A_0)}, \quad M_A(\psi) = \frac{\partial}{\partial A} \int_0^{L_0} \psi_{(\omega, A)}(x) dx \Big|_{(\omega_0, A_0)},$$

$$F_\omega(\psi) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} \int_0^{L_0} \psi_{(\omega, A)}^2(x) dx \Big|_{(\omega_0, A_0)} \quad \text{e} \quad F_A(\psi) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial A} \int_0^{L_0} \psi_{(\omega, A)}^2(x) dx \Big|_{(\omega_0, A_0)}.$$

Antes de enunciarmos nosso teorema de estabilidade, precisamos de algumas definições e também de alguns resultados preliminares. Seja  $\rho$  a semi distância definida no espaço  $X = H_{per}^1([0, L_0])$  dada por

$$\rho(u, \psi) = \inf_{y \in \mathbb{R}} \|u - \psi(\cdot + y)\|_X. \quad (3.55)$$

Para  $\varepsilon > 0$  dado, definamos a  $\varepsilon$ -vizinhança da órbita  $O_\psi$  como sendo

$$U_\varepsilon := \{u \in X; \rho(u, \psi) < \varepsilon\}. \quad (3.56)$$

É necessário também considerarmos a variedade suave

$$\Sigma_0 = \{u \in X; F(u) = F(\psi), M(u) = M(\psi)\}, \quad (3.57)$$

e o espaço tangente

$$\Upsilon_0 = \{u \in X; \langle \psi, u \rangle = \langle 1, u \rangle = 0\}. \quad (3.58)$$

**Lema 3.15.** *Existem  $\alpha > 0$  e uma função  $\sigma : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tal que, para todo  $u \in U_\alpha$ , temos*

$$\langle u(\cdot + \sigma(u)), \psi' \rangle = 0.$$

*Demonstração.* Omitiremos esta demonstração pois ela ocorre de maneira idêntica a demonstração do Lema 2.5 inserido no Capítulo 2.  $\square$

O próximo resultado garante, sobre certas restrições, que o operador  $\mathcal{L}$  é estritamente positivo.

**Lema 3.16.** *Suponhamos que existe  $\Phi \in X$  tal que  $\langle \mathcal{L}\Phi, \varphi \rangle = 0$ , para todo  $\varphi \in \Upsilon_0$ , e*

$$I := \langle \mathcal{L}\Phi, \Phi \rangle < 0. \quad (3.59)$$

*Então, existe uma constante  $\tau > 0$  tal que*

$$\langle \mathcal{L}v, v \rangle \geq \tau \|v\|_X^2,$$

*para todo  $v \in \Upsilon_0$  tal que  $\langle v, \psi' \rangle = 0$ .*

*Demonstração.* Apresentaremos apenas as partes mais relevantes da demonstração, pois os argumentos utilizados aqui serão análogos aos da demonstração do Lema 2.6 feita no capítulo anterior.

Utilizando a Proposição 3.14 podemos escrever

$$L_{per}^2([0, L_0]) = [\chi] \oplus [\psi'] \oplus P, \quad (3.60)$$

onde  $\chi$  satisfaz  $\|\chi\| = 1$  e  $\mathcal{L}\chi = -\lambda_0^2\chi$ ,  $\lambda_0 \neq 0$ . Fazendo uso dos argumentos contidos em [58, pag. 278] temos que

$$\langle \mathcal{L}p, p \rangle \geq \tau_1 \|p\|^2, \quad \text{para todo } p \in X \cap P,$$

onde  $\tau_1$  é uma constante positiva.

Deste modo, utilizando (3.60), podemos escrever

$$\Phi = a_0\chi + b_0\psi' + p_0, \quad a_0, b_0 \in \mathbb{R},$$

onde  $p_0 \in X \cap P$ . Como  $\psi' \in \ker(\mathcal{L})$ ,  $\mathcal{L}\chi = -\lambda_0^2\chi$ , e  $I < 0$ , concluímos que

$$\langle \mathcal{L}p_0, p_0 \rangle = \langle \mathcal{L}(\Phi - a_0\chi - b_0\psi'), \Phi - a_0\chi - b_0\psi' \rangle = \langle \mathcal{L}\Phi, \Phi \rangle + a_0^2\lambda_0^2 < a_0^2\lambda_0^2. \quad (3.61)$$

Considerando  $v \in \Upsilon_0$  tal que  $\|v\| = 1$  e  $\langle v, \psi' \rangle = 0$ , é possível escrever  $v = a_1\chi + p_1$ , onde  $p_1 \in X \cap P$ . Logo,

$$0 = \langle \mathcal{L}\Phi, v \rangle = \langle -a_0\lambda_0^2\chi + \mathcal{L}p_0, a_1\chi + p_1 \rangle = -a_0a_1\lambda_0^2 + \langle \mathcal{L}p_0, p_1 \rangle.$$

Observemos que  $\langle \mathcal{L}p_1, \chi \rangle = \langle p_1, \mathcal{L}\chi \rangle = -\lambda_0^2\langle p_1, \chi \rangle = 0$ , então, usando a igualdade anterior, a desigualdade (3.61) e o fato de que a função  $(f, g) \mapsto \langle \mathcal{L}f, g \rangle$  definida para  $f, g \in X \cap P$  é uma forma sesquilinear não negativa em  $P$ , deduzimos que

$$\langle \mathcal{L}v, v \rangle = -a_1^2\lambda_0^2 + \langle \mathcal{L}p_1, p_1 \rangle > -a_1^2\lambda_0^2 + \frac{(a_0a_1\lambda_0^2)^2}{a_0^2\lambda_0^2} = 0. \quad (3.62)$$

Consequentemente, usando os argumentos de sequência contidos na demonstração do Lema 2.6 do Capítulo 2, podemos concluir que

$$\langle \mathcal{L}v, v \rangle \geq \tau \|v\|^2, \quad \tau > 0,$$

para todo  $v \in \Upsilon_0$  tal que  $\langle v, \psi' \rangle = 0$ . Vejamos agora que, na verdade, a desigualdade acima ocorre para a norma de  $X$ . Com efeito, seja  $q = \omega - 2 - \log(\psi_{(\omega, A)}^2)$ . Temos, para qualquer  $b > 0$ , que

$$\begin{aligned} \|v\|^2 + b\|v'\|^2 &\leq \left(\frac{1}{\tau} + b\right) \langle \mathcal{L}v, v \rangle - b \int_0^{L_0} q(x)v^2(x)dx \\ &\leq \left(\frac{1}{\tau} + b\right) \langle \mathcal{L}v, v \rangle + b\|q\|_{L_{per}^\infty} \|v\|^2. \end{aligned}$$

Logo, escolhendo  $b > 0$  conveniente tal que  $(1 - b\|q\|_{L_{per}^\infty}) > 0$ , podemos dizer que

$$\langle \mathcal{L}v, v \rangle \geq \tau\|v\|_X^2, \quad c > 0,$$

para todo  $v \in \Upsilon_0$  tal que  $\langle v, \psi' \rangle = 0$ . Portanto, isto prova o desejado e a demonstração está concluída.  $\square$

No que segue, precisamos considerar  $H = E + \omega_0 F + A_0 M$ , onde  $E$ ,  $F$  e  $M$  são as identidades conservadas definidas em (3.3), (3.4) e (3.5), respectivamente. O lema anterior é extremamente útil para estabelecermos o seguinte resultado.

**Lema 3.17.** *Sobre as hipóteses do Lema 3.16 existem  $\alpha > 0$  e  $D = D(\alpha) > 0$  tais que*

$$H(u) - H(\psi) \geq D\rho(u, \psi)^2,$$

para todo  $u \in U_\alpha \cap \Sigma_0$ .

*Demonstração.* A ideia para demonstrar este lema segue os mesmos princípios inseridos no Lema 2.7 do Capítulo 2.

Seja  $u \in X \cap \Sigma_0$ . Pelo Lema 3.15, segue que se  $u \in U_\alpha$ , então existem constantes  $a$  e  $b$  tais que

$$u(\cdot + \sigma(u)) = (1 + a)\psi + \left(b + a\frac{\langle \psi, 1 \rangle}{L_0}\right) 1 + y, \quad (3.63)$$

com  $y \in \Upsilon_0$ . De fato, basta ver que escrevendo  $X = \Upsilon_0 \oplus \Upsilon_0^\perp$ , segue que  $\{1, \psi - \langle \psi, 1 \rangle / L_0\}$  é uma base ortogonal para  $\Upsilon_0$  e, conseqüentemente, podemos escrever

$$u(\cdot + \sigma(u)) - \psi = a \left( \psi - \frac{\langle \psi, 1 \rangle}{L_0} \right) + b1 + y, \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \Upsilon_0,$$

o que prova a afirmação.

Observemos agora que, por outro lado, se  $u \in U_\alpha$ , então existe  $r_0$  tal que  $\|u - \psi(\cdot + r_0)\|_X < \alpha$ . Daí, escolhendo  $s_0 = \sigma(u) + r_0$ , resulta que

$$\|u(\cdot + \sigma(u)) - \psi(\cdot + s_0)\|_X = \|u - \psi(\cdot + r_0)\|_X < \alpha.$$

Logo, quando tivermos  $u \in U_\alpha$ , podemos assumir, a menos de uma translação em  $\psi$  que  $\|v\|_X < \alpha$  com  $v := u(\cdot + \sigma(u)) - \psi$ .

Consideremos a partir deste ponto que  $u \in U_\alpha \cap \Sigma_0$ . Sabemos que  $M$  é invariante sobre translações, deste modo resulta, por Taylor, que

$$M(u) = M(u(\cdot + \sigma(u))) = M(\psi) + \langle 1, v \rangle + O(\|v\|^2).$$

Mas

$$\langle 1, v \rangle = \langle 1, a \left( \psi - \frac{\langle \psi, 1 \rangle}{L_0} \right) + b1 + y \rangle = bL_0.$$

Logo, sendo  $M(u) = M(\psi)$  podemos concluir que

$$b = O(\|v\|) = O(\|v\|_X). \quad (3.64)$$

Também sabemos que  $F$  é invariante sobre translações, desta maneira, por Taylor segue que

$$F(u) = F(u(\cdot + \sigma(u))) = F(\psi) + \langle \psi, v \rangle + O(\|v\|^2).$$

Como

$$\langle \psi, v \rangle = \left\langle \psi, a \left( \psi - \frac{\langle \psi, 1 \rangle}{L_0} \right) + b1 + y \right\rangle = a \left( \|\psi\|^2 - \frac{\langle \psi, 1 \rangle^2}{L_0} \right) + b\langle \psi, 1 \rangle,$$

$F(u) = F(\psi)$  e  $b = O(\|v\|_X)$ , obtemos que

$$a = O(\|v\|_X). \quad (3.65)$$

Analisando agora  $H$ , temos que sendo  $\psi \neq 0$ ,  $H'(\psi) = 0$  e  $H$  suficientemente regular longe do zero, então podemos aplicar Taylor no ponto  $u(\cdot + \sigma(u)) = \psi + v$  e, conseqüentemente, obter que

$$\begin{aligned} H(u) &= H(u(\cdot + \sigma(u))) \\ &= H(\psi) + \langle H'(\psi), v \rangle + \frac{1}{2} \langle H''(\psi)v, v \rangle + o(\|v\|^2) \\ &= H(\psi) + \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}v, v \rangle + o(\|v\|^2). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Utilizando a definição de  $v$  e as igualdades (3.65) e (3.64), podemos reescrever (3.66) como

$$H(u) - H(\psi) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}y, y \rangle + o(\|v\|^2).$$

Além disto, pelo Lema 3.16, segue que existe  $D > 0$  tal que

$$H(u) - H(\psi) \geq D\|y\|_X^2 + o(\|v\|^2).$$

Finalmente, usando os mesmo argumentos contidos no Lema 2.7 do Capítulo 2, podemos dizer que para  $\|v\|_X$  suficientemente pequeno,

$$H(u) - H(\psi) \geq D\|v\|_X^2 + o(\|v\|_X^2).$$

Portanto, para  $\alpha$  suficientemente pequeno, temos a existência de  $D(\alpha)$  tal que

$$H(u) - H(\psi) \geq D\|v\|_X^2 + o(\|v\|_X^2) \geq D(\alpha)\|v\|_X^2 \geq D(\alpha)\rho(u, \psi)^2.$$

□

Finalmente, podemos apresentar o nosso resultado de estabilidade. No que segue nesta seção, estamos assumindo a boa colocação do problema (3.6) apresentada no Teorema 3.2.

**Teorema 3.18** (Estabilidade). *Seja  $\psi = \psi_{(\omega_0, A_0)}$  a onda periódica obtida no Teorema 3.13. Suponhamos que a matriz*

$$\mathcal{D} := \begin{bmatrix} F_A(\psi) & M_A(\psi) \\ F_\omega(\psi) & M_\omega(\psi) \end{bmatrix}$$

*seja invertível. Se existir  $\Phi \in X$  tal que  $\langle \mathcal{L}\Phi, \varphi \rangle = 0$ , para todo  $\varphi \in \Upsilon_0$ , e  $I = \langle \mathcal{L}\Phi, \Phi \rangle < 0$ , então  $\psi$  é orbitalmente estável em  $X$  com respeito ao fluxo de (3.1).*

*Demonstração.* Seja  $\alpha > 0$  a constante oriunda do Lema 3.17. Como  $H$  é contínuo em  $\psi$ , temos que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta \in (0, \alpha)$  tal que se  $\|u_0 - \psi\| < \delta$  então

$$H(u_0) - H(\psi) < D\varepsilon^2, \quad (3.67)$$

onde  $D > 0$  é a constante do lema 3.17. Agora precisamos dividir nossa demonstração em dois casos.

*Primeiro caso:*  $u_0 \in \Sigma_0$ . Como  $F$  e  $M$  são quantidades conservadas, se  $u_0 \in \Sigma_0$  resulta que  $u(t) \in \Sigma_0$ , para todo  $t \geq 0$ . Além disso, o fato da função  $\rho(u(t), \psi)$  ser contínua no tempo nos permite escolher  $T > 0$  tal que

$$\rho(u(t), \psi) < \alpha, \quad \text{para todo } t \in [0, T]. \quad (3.68)$$

Desta forma,  $u(t) \in U_\alpha$ , para todo  $t \in [0, T]$ . Combinando o Lema 3.17 com (3.67), concluimos que

$$\rho(u(t), \psi) < \varepsilon, \quad \text{para todo } t \in [0, T]. \quad (3.69)$$

Provaremos agora que  $\rho(u(t), \psi) < \alpha$ , para todo  $t \in [0, +\infty)$ , donde é possível concluir, de imediato, a estabilidade orbital restrita a perturbações na variedade  $\Sigma_0$ . Com efeito, seja  $T_1 > 0$  o supremo dos valores  $T > 0$  tais (3.68) ocorre. Afim de obtermos uma contradição, suponhamos que  $T_1 < +\infty$ . Escolhendo  $\varepsilon < \frac{\alpha}{2}$  resulta, de (3.69), que

$$\rho(u(t), \psi) < \frac{\alpha}{2}, \quad \text{para todo } t \in [0, T_1).$$

Como  $t \in (0, +\infty) \mapsto \rho(u(t), \psi)$  é contínua, existe  $T_0 > 0$  tal que  $\rho(u(t), \psi) < \frac{3}{4}\alpha < \alpha$ , para  $t \in [0, T_1 + T_0)$ , contradizendo a maximalidade de  $T_1$ . Portanto,  $T_1 = +\infty$  e o teorema está provado para  $u_0 \in \Sigma_0$ .

*Segundo caso:*  $u_0 \notin \Sigma_0$ . Primeiramente, afirmamos que existe  $(\omega_1, A_1) \in \mathcal{O}$ , tal que  $F(\psi_{(\omega_1, A_1)}) = F(u_0)$  e  $M(\psi_{(\omega_1, A_1)}) = M(u_0)$ . De fato, como  $M$  e  $F$  são suaves e  $\det(\mathcal{D}) \neq 0$ , pelo Teorema da Função Inversa, segue que existem  $r_1, r_2 > 0$  tais que a aplicação

$$\begin{aligned} \Gamma : B_{r_1}(\omega_0, A_0) &\longrightarrow B_{r_2}(M(\psi), F(\psi)) \\ (\omega, A) &\longmapsto (M(\psi_{(\omega, A)}), F(\psi_{(\omega, A)})) \end{aligned} ,$$

é um difeomorfismo onde  $B_r((x, y))$  denota a bola aberta em  $\mathbb{R}^2$  centrada em  $(x, y)$  com raio  $r > 0$ . A continuidade dos funcionais  $M$  e  $F$  nos permite obter que (se necessário, escolha  $\delta > 0$  menor)

$$|M(u_0) - M(\psi)| < \frac{r_2}{\sqrt{2}} \quad \text{and} \quad |F(u_0) - F(\psi)| < \frac{r_2}{\sqrt{2}},$$

ou seja,  $(M(u_0), F(u_0)) \in B_{r_2}(M(\psi), F(\psi))$ . Como  $\Gamma$  é um difeomorfismo, resulta que existe um único  $(\omega_1, A_1) \in B_{r_1}(\omega_0, A_0)$  tal que  $(M(u_0), F(u_0)) = (M(\psi_{(\omega_1, A_1)}), F(\psi_{(\omega_1, A_1)}))$ . Portanto, a afirmação está provada.

Dando continuidade a demonstração, temos, de acordo com o primeiro caso, que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $0 < \delta_1 < \varepsilon$  tal que se tivermos  $\|u_0 - \psi_{(\omega_1, A_1)}\|_X < \delta_1$ , então

$$\rho(u(t), \psi_{(\omega_1, A_1)}) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo } t \in [0, \infty). \quad (3.70)$$

Sendo  $(\omega, A) \mapsto \psi_{(\omega, A)}$  suave, também temos que existe  $\delta_2 > 0$  tal que se tivermos  $\|(\omega, A) - (\omega_1, A_1)\| < \delta_2$ , então

$$\|\psi_{(\omega, A)} - \psi_{(\omega_1, A_1)}\|_X < \frac{\delta_1}{2}. \quad (3.71)$$

Agora notemos que, utilizando o difeomorfismo local  $\Gamma$  e continuidade de  $F$  e  $M$ , podemos escolher  $0 < \delta < \frac{\delta_1}{2}$  suficientemente pequeno tal que se  $\|u_0 - \psi\|_X < \delta$ , então

$$\|(\omega_0, A_0) - (\omega_1, A_1)\|_{\mathbb{R}^2} < \delta_2.$$

Desta forma, se  $\|u_0 - \psi\|_X < \delta$  para este  $\delta$  escolhido, temos que, utilizando (3.71),

$$\|u_0 - \psi_{(\omega_1, A_1)}\|_X \leq \|u_0 - \psi\|_X + \|\psi - \psi_{(\omega_1, A_1)}\|_X < \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2} = \delta_1.$$

Logo, por (3.70), resulta que

$$\rho(u(t), \psi_{(\omega_1, A_1)}) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo } t \in [0, \infty).$$

Conseqüentemente, utilizando (3.71) e a desigualdade anterior, podemos concluir que

$$\rho(u(t), \psi) \leq \rho(u(t), \psi_{(\omega_1, A_1)}) + \rho(\psi, \psi_{(\omega_1, A_1)}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta_1}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Portanto, o teorema está provado. □

No próximo resultado daremos condições suficientes para concluirmos que  $I < 0$ .

**Proposição 3.19.** *Seja  $K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por*

$$K(x, y) = x^2 M_A(\psi) + xy(M_\omega(\psi) + F_A(\psi)) + y^2 F_\omega(\psi).$$

*Suponhamos que existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $K(a, b) > 0$ . Então, existe  $\Phi \in X$  tal que  $\langle \mathcal{L}\Phi, \varphi \rangle = 0$ , para todo  $\varphi \in \Upsilon_0$ , e*

$$I = \langle \mathcal{L}\Phi, \Phi \rangle < 0.$$



*Demonstração.* Basta definirmos  $\Phi := a\beta + b\eta$ . Desta forma, devido ao fato de  $\mathcal{L}\beta = -1$  e  $\mathcal{L}\eta = -\psi$ , resulta que  $\langle \mathcal{L}\Phi, \varphi \rangle = 0$ , para todo  $\varphi \in \Upsilon_0$ , e

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}\Phi, \Phi \rangle &= \langle -a - b\psi, a\beta + b\eta \rangle \\ &= -(a^2M_A(\psi) + abM_\omega(\psi) + abF_A(\psi) + b^2F_\omega(\psi)) \\ &= -K(a, b). \end{aligned}$$

Portanto, a demonstração está finalizada.  $\square$

**Corolário 3.20.** *Suponhamos que  $A_0$  seja suficientemente pequeno. Então,  $\psi = \psi_{(\omega_0, A_0)}$  é orbitalmente estável em  $X$  desde que  $\det(\mathcal{D}) \neq 0$ .*

*Demonstração.* Derivando a equação

$$-\psi'' + \omega\psi - \psi \log \psi^2 + A = 0 \quad (3.72)$$

com respeito a  $\omega$  e multiplicando tal equação obtida por  $\psi$  junto com sua integração sobre  $[0, L_0]$ , obtemos que

$$2F_\omega(\psi) = 2F(\psi) - A_0M_\omega(\psi). \quad (3.73)$$

Daí, como  $F(\psi) > 0$ , obtemos que se  $A_0$  é suficientemente pequeno, então  $F_\omega(\psi) > 0$ . Portanto, considerando  $(a, b) = (0, 1)$ , concluímos que  $K(a, b) > 0$ . A conclusão final desta demonstração decorre da Proposição 3.19 e Teorema 3.18.  $\square$

**Corolário 3.21.** *Suponhamos que  $\psi > 0$  e  $\det(\mathcal{D}) \neq 0$ . Se  $A_0 > 0$ , então existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $K(a, b) > 0$ . Consequentemente, existem  $\Phi \in X$  tal que  $I = \langle \mathcal{L}\Phi, \Phi \rangle < 0$  e  $\psi$  é orbitalmente estável em  $X$ .*

*Demonstração.* De acordo com a Proposição 3.19 e o Teorema 3.18 é suficiente mostrarmos a existência de  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $K(a, b) > 0$ . Se  $M_A(\psi) > 0$ , podemos considerar  $(a, b) = (1, 0)$ . Se  $F_\omega(\psi) > 0$ , podemos considerar  $(a, b) = (0, 1)$ . Suponhamos agora que  $M_A(\psi) \leq 0$  e  $F_\omega(\psi) \leq 0$ . Notemos que do fato de  $\det(\mathcal{D}) \neq 0$  temos que o caso  $(M_A(\psi), M_\omega(\psi)) = (0, 0)$  pode ser descartado. Derivando a equação (3.72) com respeito a  $A$ , multiplicando a equação obtida por  $\psi$  e integrando sobre  $[0, L_0]$ , obtemos que

$$2F_A(\psi) = M(\psi) - A_0M_A(\psi). \quad (3.74)$$

Deste modo, derivando a equação (3.73) com respeito a  $A$  e a equação (3.74) com respeito a  $\omega$  e comparando os resultados, concluímos que  $F_A(\psi) = M_\omega(\psi)$ . Assim, a função  $K$  na Proposição 3.19 pode ser vista como

$$K(x, y) = x^2M_A(\psi) + 2xyM_\omega(\psi) + y^2F_\omega(\psi).$$

Se  $M_A(\psi) = F_\omega(\psi) = 0$ , podemos considerar  $(a, b) = (-1, 1)$  ou  $(a, b) = (1, 1)$  de acordo com o sinal de  $M_\omega(\psi)$ .

Dividiremos agora o resto da demonstração em dois casos.

*Caso 1.*  $M_\omega(\psi) \leq 0$ . Notemos que

$$\begin{aligned}\Delta &:= M_\omega(\psi)^2 - M_A(\psi)F_\omega(\psi) \\ &= M_\omega(\psi)^2 - M_A(\psi)\left(F(\psi) - AM_\omega(\psi)\right) \\ &= M_\omega(\psi)^2 - M_A(\psi)F(\psi) - AM_A(\psi)M_\omega(\psi) > 0.\end{aligned}$$

Logo, ou  $K(x, 1) = 0$  ou  $K(1, y) = 0$  possui duas raízes reais. Em qualquer um dos casos, temos a existência de  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $K(a, b) > 0$ .

*Caso 2.*  $M_\omega(\psi) > 0$ . Observemos que

$$\begin{aligned}\det(D) &= M_\omega(\psi) \left( \frac{M(\psi)}{2} - \frac{A}{2}M_A(\psi) \right) - M_A(\psi) \left( F(\psi) - \frac{A}{2}M_\omega(\psi) \right) \\ &= \frac{1}{2}M(\psi)M_\omega(\psi) - M_A(\psi)F(\psi) > 0.\end{aligned}$$

Daí, se  $M_A(\psi) < 0$  temos que  $M_A(\psi) \det(D) < 0$ . Considerando  $(a, b) = (M_\omega(\psi), -M_A(\psi))$ , deduzimos que

$$\begin{aligned}K(a, b) &= M_\omega(\psi)^2 M_A(\psi) - M_\omega(\psi) M_A(\psi) (M_\omega(\psi) + F_A(\psi)) - M_A(\psi)^2 F_\omega(\psi) \\ &= -M_A(\psi) (M_\omega(\psi) F_A(\psi) - M_A(\psi) F_\omega(\psi)) \\ &= -M_A(\psi) \det(\mathcal{D}) > 0.\end{aligned}$$

Finalmente, suponhamos que  $M_A(\psi) = 0$ . Como  $F_\omega(\psi) = 0$  já foi estudado, podemos assumir que  $F_\omega(\psi) < 0$ . Considerando  $a = 1$  e  $b = -\frac{M_\omega(\psi)}{F_\omega(\psi)}$ , obtemos que

$$K(a, b) = -2 \frac{M_\omega(\psi)^2}{F_\omega(\psi)} + \frac{M_\omega(\psi)^2}{F_\omega(\psi)} = -\frac{M_\omega(\psi)^2}{F_\omega(\psi)} > 0.$$

Portanto, isto finaliza a demonstração deste corolário.  $\square$

**Observação 3.22.** *A Tabela a seguir apresenta alguns valores de  $M_A(\psi) \det(\mathcal{D})$ ,  $M_A(\psi)$ , e  $F_\omega(\psi)$ . Apesar de não sermos capazes de provar analiticamente, cálculos numéricos sugerem que  $\det(\mathcal{D}) \neq 0$  e  $F_\omega(\psi) > 0$  (o que implica  $K(0, 1) > 0$ ), para todo  $(\omega, A) \in \mathcal{P}_i$ ,  $i = 1, 3$  (recordemos que isto é verdade para  $A = 0$ ). Aplicando o Teorema 3.18 e a Proposição 3.19, podemos concluir, para os casos calculados, que  $\psi$  é orbitalmente estável em  $X$  com respeito ao fluxo de (3.1).*

Valores de $I$ relacionados ao $\omega_0$ e $A_0$						
$\omega_0$	$A_0$	$\phi(0)$	$L_0$	$M_A(\psi) \det(\mathcal{D})$	$M_A(\psi)$	$F_\omega(\psi)$
1	1	3	4.18	-0.47	-0.21	7.41
2	4	5	3.49	3.13	24.99	21.81
-1	-1	-0.1	4.32	0.50	0.44	1.42
1	-2	-2	3.65	2.80	8.99	7.82
-1	-2	-1	3.37	-1.65	-0.14	0.52
5	3	15	4.21	354.78	1.22	349.28
-3	-2	-0.5	2.95	0.18	0.43	0.22
-5	-0.1	-0.1	3.76	0.01	0.45	0.01
-10	-2	-0.2	2.03	0.0008	0.20	0.004

# Estabilidade Orbital de Soluções Ondas Periódicas para Equações Dispersivas Regularizadas

Nesta parte da tese, apresentamos condições suficientes para a estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas associadas ao seguinte modelo de equação dispersiva regularizada

$$u_t + u_x + uu_x + (\mathcal{M}u)_t = 0, \quad (4.1)$$

onde  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função  $L$ -periódica (isto é, com período  $L$ ) de valor real. Aqui,  $\mathcal{M}$  é um operador diferencial ou pseudo-diferencial no contexto periódico e é definido via multiplicador de Fourier por

$$\widehat{\mathcal{M}g}(\kappa) = \theta(\kappa)\widehat{g}(\kappa), \quad \kappa \in \mathbb{Z}, \quad (4.2)$$

onde  $\theta$  é assumido ser contínuo e satisfazendo

$$v_1|\kappa|^{m_2} \leq \theta(\kappa) \leq v_2|\kappa|^{m_2}, \quad m_2 > 0, \quad (4.3)$$

para todo  $\kappa \in \mathbb{Z}$  e para algum  $v_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ . Formalmente, a equação (4.1) admite as seguintes quantidades conservadas

$$P(u) = \frac{1}{2} \int_0^L u \mathcal{M}u - \frac{1}{3} u^3 dx, \quad (4.4)$$

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_0^L u \mathcal{M}u + u^2 dx, \quad (4.5)$$

e

$$M(u) = \int_0^L u dx. \quad (4.6)$$

À partir deste momento, assumiremos que a equação (4.1) possui soluções onda viajante periódica da forma  $u(x, t) = \phi(x - \omega t)$ , onde  $\omega \in \mathbb{R}$  e  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave. Substituindo este tipo de solução em (4.1), obtemos que

$$\omega \mathcal{M}\phi_{(\omega, A)} + (\omega - 1)\phi_{(\omega, A)} - \frac{1}{2}\phi_{(\omega, A)}^2 + A = 0, \quad (4.7)$$

onde  $A$  é uma constante de integração.

As quantidades conservadas dadas em (4.4), (4.5) e (4.6) nos permite considerar o funcional

$$G(u) = P(u) + (\omega - 1)F(u) + AM(u) \quad (4.8)$$

e o operador linearizado em torno de  $\phi_{(\omega,A)}$  dado por

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}_{(\omega,A)} = \omega\mathcal{M} + (\omega - 1) - \phi_{(\omega,A)} = G''(\phi_{(\omega,A)}). \quad (4.9)$$

**Observação 4.1.** *Em todo o contexto desta seção estamos assumindo a existência e unicidade de soluções globais para o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x + (\mathcal{M}u)_t = 0, & t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, L]. \end{cases} \quad (4.10)$$

Note que o espaço desejado para tal resultado é o espaço de energia  $X = H_{per}^{\frac{m_2}{2}}([0, L])$  uma vez que na próxima seção utilizaremos o funcional (4.8) para concluirmos os resultados desejados.

Nossos resultados sobre estabilidade a serem apresentados se focam em torno da seguinte hipótese a ser assumida:

(H) Seja  $(\omega_0, A_0) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$  fixo. Suponhamos que  $\phi := \phi_{(\omega_0, A_0)} \in C_{per}^\infty([0, L_0])$  é uma solução onda viajante periódica par para a equação (4.7) com período fixo  $L_0 > 0$ . Além disso, o operador autoadjunto  $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}_{(\omega_0, A_0)}$  possui somente um autovalor negativo sendo este simples e zero é um autovalor simples com autofunção  $\phi' := \frac{\partial}{\partial x}\phi$ .

Com a hipótese (H) inserida, a ideia é construir uma superfície de ondas periódicas com período fixo

$$(\omega, A) \in \mathcal{O} \rightarrow \phi_{(\omega,A)} \in H_{per,e}^n([0, L_0]), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \quad (4.11)$$

tais que essas soluções resolvem (4.7) para todo  $(\omega, A) \in \mathcal{O}$  onde  $\mathcal{O}$  é um subconjunto aberto de  $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ . Além disto, a hipótese (H) será muito útil para entendermos o comportamento do espectro não positivo do operador linearizado  $\mathcal{L}_{(\omega,A)}$  em (4.9). Estes argumentos citados nos permitirá provar a estabilidade orbital de ondas periódicas sem o prévio conhecimento do comportamento da matriz hessiana associada ao funcional de Lyapunov apresentado em (4.8) conforme é requerido em vários trabalhos tais como [7], [13], [21], [45], [54], e em muitos outros relacionados ao assunto. Nossos argumentos são baseados em [6] e [65], e eles aprimoram as ideias apresentadas em [45].

## 4.1 Estabilidade Orbital de Ondas Periódicas

Nesta seção, apresentamos a teoria de estabilidade baseando-se nos argumentos contidos em [21], [45] e [54]. Para chegarmos aos resultados principais precisamos, primeiramente, garantir que a hipótese (H) é suficiente para mostrarmos a existência de uma superfície de soluções periódicas para (4.7) na qual será extremamente útil para as futuras análises de estabilidade que serão apresentadas.

**Teorema 4.2.** *Suponhamos que a hipótese (H) ocorre. Então existe uma vizinhança aberta  $\mathcal{O} \subset (0, \infty) \times \mathbb{R}$  contendo  $(\omega_0, A_0)$  e uma superfície suave*

$$(\omega, A) \in \mathcal{O} \rightarrow \phi_{(\omega, A)} \in H_{per, e}^n([0, L_0]), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \quad (4.12)$$

de soluções  $L_0$ -periódicas pares que resolvem (4.7).

*Demonstração.* Definamos  $\Upsilon : (0, \infty) \times \mathbb{R} \times H_{per, e}^{m_2}([0, L_0]) \rightarrow L_{per, e}^2([0, L_0])$  onde

$$\Upsilon(\omega, A, \phi) = \omega \mathcal{M}\phi + (\omega - 1)\phi - \frac{1}{2}\phi^2 + A, \quad (4.13)$$

e  $H_{per, e}^n([0, L_0])$ ,  $n \geq 1$ , indica o espaço de Sobolev periódico  $H_{per}^n([0, L_0])$  constituído pelas funções  $L_0$ -periódicas pares. Pela hipótese (H), segue que  $\Upsilon(\omega_0, A_0, \phi) = 0$ . Além disto, notemos que  $\Upsilon$  é suave e sua derivada a Fréchet com respeito a  $\phi$  calculado no ponto  $(\omega_0, A_0, \phi)$  é dada pelo operador

$$\mathcal{G} = \omega_0 \mathcal{M} + (\omega_0 - 1) - \phi.$$

Sabemos, pela hipótese (H), que  $\phi'$  é a única autofunção de  $\mathcal{G}$  (onde estamos olhando para  $\mathcal{G}$  como um operador definido em  $L_{per}^2([0, L_0])$  com domínio  $H_{per, e}^{m_2}([0, L_0])$ ) cujo autovalor é  $\lambda = 0$ . Mas sendo  $\phi'$  ímpar, resulta que  $\phi'$  não pertence a  $H_{per, e}^{m_2}([0, L_0])$  e, conseqüentemente,  $\mathcal{G}$  é injetivo. Vejamos agora que  $\mathcal{G}$  também é sobrejetivo. Com efeito, como  $\mathcal{G}$  é um operador autoadjunto, segue que  $\sigma(\mathcal{G}) = \sigma_{disc}(\mathcal{G}) \cup \sigma_{ess}(\mathcal{G})$ . Daí, sendo  $H_{per, e}^{m_2}([0, L_0])$  imerso compactamente em  $L_{per, e}^2([0, L_0])$ , obtemos que  $\mathcal{G}$  possui resolvente compacto. Conseqüentemente,  $\sigma_{ess}(\mathcal{G}) = \emptyset$  e  $\sigma(\mathcal{G}) = \sigma_{disc}(\mathcal{G})$  é constituído por autovalores isolados com multiplicidade algébrica finita. Finalmente, como  $\mathcal{G}$  é injetivo, temos que 0 não é um autovalor de  $\mathcal{G}$  e, portanto, 0 não pertence a  $\sigma(\mathcal{G})$ . Logo,  $0 \in \rho(\mathcal{G})$ , onde  $\rho(\mathcal{G})$  denota o conjunto resolvente de  $\mathcal{G}$  e, conseqüentemente, por definição,  $\mathcal{G}$  é sobrejetivo.

Os argumentos acima implicam que  $\mathcal{G}^{-1}$  existe e é um operador linear limitado. Portanto, como  $\Upsilon$  e  $\Upsilon_\phi$  são funções suaves, pelo Teorema da Função Implícita concluímos o resultado desejado.  $\square$

Nosso próximo resultado nos mostra que a propriedade espectral contida em (H) é preservada via pequenas perturbações do par  $(\omega, A)$  em um subconjunto aberto contendo  $(\omega_0, A_0)$ .

**Proposição 4.3.** *Suponhamos que (H) ocorre e seja  $\phi_{(\omega, A)}$  a solução onda periódica obtida no Teorema 4.2. Então, para todo  $(\omega, A) \in \mathcal{O}$ , o operador  $\mathcal{L} = \omega \mathcal{M} + (\omega - 1) - \phi_{(\omega, A)}$  possui somente um autovalor negativo sendo este simples e zero é um autovalor simples cuja autofunção é  $\frac{\partial}{\partial x} \phi_{(\omega, A)}$*

*Demonstração.* Primeiramente, consideremos  $(\omega, A) \in \mathcal{O}$  com  $\mathcal{O}$  proveniente do Teorema 4.2 e definamos  $\tilde{\mathcal{L}} := \frac{1}{\omega} \mathcal{L}$ . A família de operadores autoadjunto  $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{M} + \frac{\omega-1}{\omega} - \frac{\phi}{\omega}$  é definida em  $L_{per}^2([0, L_0])$  com domínio  $D(\tilde{\mathcal{L}}) = H_{per}^{m_2}([0, L_0])$ . Considerando a métrica *gap*  $\hat{\delta}$  (veja página 197 no Capítulo IV de [58]), segue, pelos Teoremas 2.14 e 2.17 no Capítulo IV de [58], que

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(\tilde{\mathcal{L}}_{(\omega_0, A_0)}, \tilde{\mathcal{L}}) &\leq 2 \left( 1 + \frac{\|\phi_{(\omega, A)}\|_{L^\infty}^2}{\omega^2} \right) \hat{\delta} \left( \tilde{\mathcal{L}}_{(\omega_0, A_0)} + \frac{\phi_{(\omega, A)}}{\omega}, \tilde{\mathcal{L}} \right) \\ &\leq 2 \left( 1 + \frac{\|\phi_{(\omega, A)}\|_{L^\infty}^2}{\omega^2} \right) \left[ \left| \frac{\omega_0 - 1}{\omega_0} - \frac{\omega - 1}{\omega} \right| + \left\| \frac{\phi_{(\omega, A)}}{\omega} - \frac{\phi_{(\omega_0, A_0)}}{\omega_0} \right\|_{L^\infty} \right], \end{aligned}$$

ou seja,  $\widehat{\delta}(\widetilde{\mathcal{L}}_{(\omega_0, A_0)}, \widetilde{\mathcal{L}}) \rightarrow 0$  quando  $(\omega, A) \rightarrow (\omega_0, A_0)$ . Desta forma, pelo Teorema 3.16 contido no Capítulo IV de [58], resulta que os autovalores isolados de  $\widetilde{\mathcal{L}}_{(\omega_0, A_0)}$  são estáveis. Logo, concluímos que  $\widetilde{\mathcal{L}}$  possui a mesma propriedade espectral de  $\widetilde{\mathcal{L}}_{(\omega_0, A_0)}$  para todo  $(\omega, A) \in \mathcal{O}$ . Conseqüentemente, sendo  $\mathcal{L} = \omega \widetilde{\mathcal{L}}$ ,  $\omega > 0$ , temos que o resultado está provado.  $\square$

No que segue, suponhamos que (H) ocorre. Utilizando a Proposição 3.14 e o fato de  $L_0 > 0$  ser fixo, podemos considerar as seguintes denotações:

$$\eta := \left. \frac{\partial}{\partial \omega} \phi_{(\omega, A)} \right|_{(\omega_0, A_0)}, \quad \beta := \left. \frac{\partial}{\partial A} \phi_{(\omega, A)} \right|_{(\omega_0, A_0)}.$$

Seja também

$$M_\omega(\phi) = \left. \frac{\partial}{\partial \omega} \int_0^{L_0} \phi_{(\omega, A)}(x) dx \right|_{(\omega_0, A_0)}, \quad M_A(\phi) = \left. \frac{\partial}{\partial A} \int_0^{L_0} \phi_{(\omega, A)}(x) dx \right|_{(\omega_0, A_0)},$$

$$F_\omega(\phi) = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} \int_0^{L_0} \phi_{(\omega, A)} \mathcal{M} \phi_{(\omega, A)} + \phi_{(\omega, A)}^2(x) dx \right|_{(\omega_0, A_0)},$$

e

$$F_A(\phi) = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial A} \int_0^{L_0} \phi_{(\omega, A)} \mathcal{M} \phi_{(\omega, A)} + \phi_{(\omega, A)}^2(x) dx \right|_{(\omega_0, A_0)}.$$

Antes de enunciarmos nossos principais teoremas, precisamos de algumas considerações e definições preliminares. Neste capítulo, a definição de semi-distância é a mesma do Capítulo 3, porém, o espaço de energia a ser considerado é  $X = H_{per}^{\frac{m_2}{2}}([0, L_0])$ .

Definamos o funcional auxiliar

$$Q(u) := x_0 F(u) + y_0 M(u), \quad (4.14)$$

com  $x_0, y_0 \neq 0$ , e consideremos o espaço tangente

$$\Upsilon_0 = \{u \in X; \langle x_0(\mathcal{M}\phi + \phi) + y_0, u \rangle = 0\}. \quad (4.15)$$

Nos próximos resultados, assumiremos algumas condições necessárias para  $x_0$  e  $y_0$ .

**Proposição 4.4.** *Seja  $\Delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por*

$$\Delta(x, y) = x^2 F_\omega(\phi) + xy(M_\omega(\phi) + F_A(\phi)) + y^2 M_A(\phi).$$

*Suponhamos que existe  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\Delta(x_0, y_0) > 0$ . Então, existe  $\Phi \in X$  tal que  $\langle \mathcal{L}_0 \Phi, \varphi \rangle = 0$ , para todo  $\varphi \in \Upsilon_0$ , e*

$$I = \langle \mathcal{L}_0 \Phi, \Phi \rangle < 0.$$

*Demonstração.* Basta considerarmos  $\Phi := x_0 \eta + y_0 \beta$ . O resto da demonstração ocorre de maneira idêntica a demonstração da Proposição 3.19 do Capítulo 3.  $\square$

**Corolário 4.5.** *Suponhamos que (H) ocorre. Se  $\omega_0 - 1 - 2A_0 \neq 0$  e*

$$s(\phi) := (2\omega_0(\omega_0 - 1) + 2A_0 + 1) M(\phi) + \omega_0 \int_0^{L_0} \phi \mathcal{M}\phi dx + (2A_0(\omega_0 + 1) - \omega_0 + 1) L_0 > 0,$$

*então existe  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\Delta(x_0, y_0) > 0$ . Em particular, se  $M(\phi) \geq 0$ , podemos escolher  $\omega_0$  e  $A_0$  tais que  $\Delta(x_0, y_0) > 0$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, afim de simplificarmos as notações, definamos  $\psi := \phi_{(\omega, A)}$  como sendo a solução periódica obtida no Teorema 4.2. Derivando a equação (4.7) com respeito a  $\omega$  e  $A$ , temos, respectivamente, que

$$\mathcal{M}\psi + \omega \mathcal{M}\eta + \psi + (\omega - 1)\eta - \psi\eta = 0 \quad (4.16)$$

e

$$\omega \mathcal{M}\beta + (\omega - 1)\beta - \psi\beta + 1 = 0. \quad (4.17)$$

Consequentemente, se integrarmos as equações (4.16) e (4.17) sobre o intervalo  $[0, L_0]$ , obtemos que

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} \int_0^{L_0} \psi^2 dx = M(\psi) + (\omega - 1)M_\omega(\psi) \quad (4.18)$$

e

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial A} \int_0^{L_0} \psi^2 dx = L_0 + (\omega - 1)M_A(\psi). \quad (4.19)$$

Por outro lado, multiplicando (4.16) por  $\psi$  e (4.7) por  $\eta$ , somando as equações resultantes e usando (4.18), concluímos que

$$M(\psi) + \left( \omega - 1 - \frac{A}{2} \right) M_\omega(\psi) = F(\psi) + \omega F_\omega(\psi) - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \omega} \int_0^{L_0} \psi^3 dx. \quad (4.20)$$

Similarmente, multiplicando (4.17) por  $\psi$  e (4.7) por  $\beta$ , somando as equações resultantes e usando (4.19), segue que

$$L_0 + \left( \omega - 1 - \frac{A}{2} \right) M_A(\psi) = \frac{1}{2} M(\psi) + \omega F_A(\psi) - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial A} \int_0^{L_0} \psi^3 dx. \quad (4.21)$$

Agora, multiplicando (4.16) por  $\psi$ , integrando sobre  $[0, L_0]$  e usando (4.7), temos que

$$2F(\psi) - \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial \omega} \int_0^{L_0} \psi^3 dx - AM_\omega(\psi) = 0. \quad (4.22)$$

Analogamente, multiplicando (4.17) por  $\psi$ , integrando sobre  $[0, L_0]$  e usando (4.7), obtemos que

$$M(\psi) - \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial A} \int_0^{L_0} \psi^3 dx - AM_A(\psi) = 0. \quad (4.23)$$

Desta forma, derivando (4.22) com respeito a  $A$ , derivando (4.23) com respeito a  $\omega$ , e somando os resultados, obtemos a igualdade

$$F_A(\psi) = M_\omega(\psi). \quad (4.24)$$



Daí, comparando os resultados em (4.22), (4.23) e (4.24) com (4.20) e (4.21), podemos concluir que

$$M(\psi) + 2F(\psi) + (\omega - 1 - 2A) M_\omega(\psi) = \omega F_\omega(\psi) \quad (4.25)$$

e

$$L_0 + (\omega - 1 - 2A) M_A(\psi) + M(\psi) = \omega M_\omega(\psi). \quad (4.26)$$

Finalmente, coletando os resultados em (4.25) e (4.26), considerando  $\omega_0 - 1 - 2A_0 \neq 0$ , e calculando os resultados no ponto  $(\omega_0, A_0)$ , obtemos que

$$\begin{aligned} \Delta(x_0, y_0) &= \left( \frac{x_0^2(\omega_0 - 1 - 2A_0)}{\omega_0} + 2x_0y_0 + \frac{y_0^2\omega_0}{\omega_0 - 1 - 2A_0} \right) M_\omega(\phi) \\ &\quad + \frac{x_0^2}{\omega_0} (M(\phi) + 2F(\phi)) - \frac{y_0^2}{\omega_0 - 1 - 2A_0} (M(\phi) + L_0). \end{aligned}$$

Escolhendo  $y_0 \neq 0$ ,  $x_0 = \frac{-\omega_0 y_0}{\omega_0 - 1 - 2A_0}$  e usando o fato que

$$(\omega_0 - 1)M(\phi) + \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \phi \mathcal{M} \phi dx + A_0 L_0 = F(\phi), \quad (4.27)$$

nós concluímos que

$$\begin{aligned} \Delta(x_0, y_0) &= \frac{y_0^2}{(\omega_0 - 1 - 2A_0)^2} \left[ \underbrace{(2\omega_0(\omega_0 - 1) + 2A_0 + 1)}_{\Gamma_1} M(\phi) + \omega_0 \int_0^{L_0} \phi \mathcal{M} \phi dx \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{(2A_0(\omega_0 + 1) - \omega_0 + 1)}_{\Gamma_2} L_0 \right]. \end{aligned}$$

Isto prova a primeira parte da demonstração. Vamos agora verificar a segunda parte do resultado, isto é, quando tivermos, em particular, que  $M(\phi) \geq 0$ . Com efeito, observemos que é possível escolhermos  $\omega_0$  e  $A_0$  tais que  $\omega_0 - 1 - 2A_0 \neq 0$ ,  $\Gamma_1 \geq 0$  e  $\Gamma_2 \geq 0$  (escolha, por exemplo,  $A_0 = 1$  e  $\omega_0$  suficientemente grande) onde  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são definidos na equação acima. Logo, usando (4.3) e a hipótese  $M(\phi) \geq 0$ , deduzimos que  $s(\phi) > 0$  uma vez que  $\omega_0 \int_0^{L_0} \phi \mathcal{M} \phi dx > 0$ , o que conclui a demonstração.  $\square$

Vejam agora algumas considerações que serão de extrema importância para os próximos resultados. Notemos que o operador  $\mathcal{L}_0$  é o único operador autoadjunto tal que

$$[G''(\phi)v, z] = \langle \mathcal{L}_0 v, z \rangle, \quad v \in C_{per}^\infty([0, L_0]), \quad z \in X, \quad (4.28)$$

onde  $G''$  denota a segunda derivada a Fréchet de  $G$  e  $[\cdot, \cdot]$  a dualidade em  $X'$ . Em particular, temos que  $G''(\phi)v = \mathcal{I} \mathcal{L}_0 v$ , para todo  $v \in C_{per}^\infty([0, L_0])$ , onde  $\mathcal{I} : X \rightarrow X'$  denota a injeção natural de  $X$  em  $X'$  com respeito ao produto interno de  $L_{per}^2([0, L_0])$ . Mais precisamente,

$$[\mathcal{I}u, v] = \langle u, v \rangle, \quad u, v \in X. \quad (4.29)$$

O próximo resultado estabelece em que condições o operador  $\mathcal{L}_0$  é estritamente positivo. Nesta próxima proposição a ideia que será apresentada é a mesma utilizada no Lema 3.16 no Capítulo 3.

**Proposição 4.6.** *Suponhamos que (H) ocorre e que existe  $\Phi \in X$  tal que  $\langle \mathcal{L}_0\Phi, \varphi \rangle = 0$ , para todo  $\varphi \in \Upsilon_0$ , e*

$$I := \langle \mathcal{L}_0\Phi, \Phi \rangle < 0$$

*Então, existe uma constante  $\tau > 0$  tal que*

$$\langle \mathcal{L}_0v, v \rangle \geq \tau \|v\|_X^2,$$

*para todo  $v \in \Upsilon_0$  tal que  $\langle v, \phi' \rangle = 0$ .*

*Demonstração.* A demonstração desta proposição ocorre de maneira idêntica a demonstração do Lema 3.16 do Capítulo 3. Sendo assim, omitiremos esta prova.  $\square$

É importante ressaltar que, devido a Proposição 4.6 e a relação (4.28), segue por argumentos de densidade que

$$[G''(\phi)v, v] \geq \tau \|v\|_X^2 \quad (4.30)$$

para todo  $v \in \Upsilon_0$  tal que  $\langle v, \phi' \rangle = 0$ .

Consideremos  $\mathcal{R} : X \rightarrow X'$  como sendo o isomorfismo de Riesz com respeito ao produto interno em  $X$ , ou seja,

$$[\mathcal{R}u, v] = \langle u, v \rangle_X. \quad (4.31)$$

O próximo lema nos mostra que a positividade apresentada em (4.30) é mantida se considerarmos as condições de ortogonalidade em  $X$ .

**Lema 4.7.** *Sobre as hipóteses da Proposição 4.6, consideremos  $\mathcal{I}$  definido em (4.29) e*

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \{\phi', \mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}Q'(\phi)\}^\perp \\ &= \{z \in X; \langle z, \phi' \rangle_X = \langle z, \mathcal{R}^{-1}\mathcal{I}Q'(\phi) \rangle_X = 0\}. \end{aligned}$$

*Então, para o mesmo  $\tau > 0$  existente em (4.30), temos que*

$$[G''(\phi)z, z] \geq \tau \|z\|_X^2$$

*para todo  $z \in \mathcal{Z}$ .*

*Demonstração.* Definamos, para cada  $z \in \mathcal{Z}$ ,

$$v = z - \langle z, \psi \rangle \psi$$

com  $\psi = \frac{\phi'}{\|\phi'\|}$ . Notemos que  $v \in \Upsilon_0$ , pois

$$\begin{aligned} \langle v, \phi' \rangle &= \langle z, \phi' \rangle - \langle z, \phi' \rangle \frac{\langle \psi, \phi' \rangle}{\|\phi'\|} \\ &= \langle z, \phi' \rangle - \langle z, \phi' \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\langle Q'(\phi), v \rangle = \langle \mathcal{R}^{-1} \mathcal{I}Q'(\phi), v \rangle_X = -\frac{1}{\|\phi'\|} \langle z, \psi \rangle \langle Q'(\phi), \phi' \rangle = 0.$$

Desta forma, pelo Lema 4.6, existe  $\tau > 0$  tal que

$$[G''(\phi)v, v] \geq \tau \|v\|_X^2,$$

ou equivalentemente,

$$\langle \mathcal{R}^{-1}G''(\phi)v, v \rangle_X \geq \tau \|v\|_X^2. \quad (4.32)$$

Analisando agora as características de  $G''$ , temos que  $G''(\phi)\phi' = 0$ . Consequentemente, resulta pela definição de  $v$  que

$$G''(\phi)v = G''(\phi)z.$$

Definamos o operador  $S : X \rightarrow X$ , dado por

$$S := \mathcal{R}^{-1}G''(\phi). \quad (4.33)$$

Então, podemos escrever

$$\langle Sv, v \rangle_X = \langle Sz, z \rangle_X.$$

devido ao fato de  $S$  ser autoadjunto. Além disso, se  $z \in \mathcal{Z}$ , temos que

$$\|z\|_X^2 = \langle z, v + \langle z, \psi \rangle \psi \rangle_X = \langle z, v \rangle_X \leq \|z\|_X \|v\|_X,$$

isto é,  $\|z\|_X \leq \|v\|_X$ . Finalmente, combinando a desigualdade anterior com (4.32), obtemos que

$$[G''(\phi)z, z] = \langle Sz, z \rangle_X = \langle Sv, v \rangle_X \geq \tau \|v\|_X^2 \geq \tau \|z\|_X^2.$$

Portanto, o lema está provado.  $\square$

O resultado anterior é extremamente útil para estabelecermos o seguinte lema.

**Lema 4.8.** *Sobre as hipóteses do Lema 4.7, existe  $N > 0$  e  $\tau_1 > 0$  tal que*

$$\langle Sv, v \rangle_X + 2N \langle \mathcal{R}^{-1} \mathcal{I}Q'(\phi), v \rangle_X^2 \geq \tau_1 \|v\|_X^2,$$

para todo  $v \in \{\phi'\}^\perp := \{u \in X; \langle \phi', u \rangle_X = 0\}$ , onde  $S$  é definido em (4.33)

*Demonstração.* Como  $\langle \mathcal{R}^{-1} \mathcal{I}Q'(\phi), \phi' \rangle_X = [\mathcal{I}Q'(\phi), \phi'] = \langle Q'(\phi), \phi' \rangle = 0$ , então podemos escrever  $v \in \{\phi'\}^\perp$  como

$$v = \kappa w + z$$

com  $w = \frac{\mathcal{R}^{-1} \mathcal{I}Q'(\phi)}{\|\mathcal{R}^{-1} \mathcal{I}Q'(\phi)\|_X}$ ,  $\kappa = \langle v, w \rangle_X$  e  $z \in \mathcal{Z}$ . Pelo Lema 4.7, obtemos que

$$\langle Sv, v \rangle_X \geq \kappa^2 \langle Sw, w \rangle_X + 2\kappa \langle Sw, z \rangle_X + \tau \|z\|_X^2. \quad (4.34)$$

Usando as desigualdades de Cauchy-Schwartz e Young, deduzimos que

$$2\kappa \langle Sw, z \rangle_X \leq \frac{\tau}{2} \|z\|_X^2 + \frac{2\kappa^2}{\tau} \|Sw\|_X^2. \quad (4.35)$$

Notemos que, além disto, podemos escolher  $N > 0$  dependendo somente de  $\phi$  tal que

$$\langle \mathcal{S}w, w \rangle_X - \frac{2}{\tau} \|\mathcal{S}w\|_X^2 + 2N \|\mathcal{R}^{-1} \mathcal{I}Q'(\phi)\|_X^2 \geq \frac{\tau}{2}. \quad (4.36)$$

Portanto, usando (4.34), (4.35) e (4.36), concluímos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S}v, v \rangle_X + 2N \langle \mathcal{R}^{-1} \mathcal{I}Q'(\phi), v \rangle_X^2 &= \langle \mathcal{S}v, v \rangle_X + 2N \kappa^2 \|\mathcal{R}^{-1} \mathcal{I}Q'(\phi)\|_X^2 \\ &\geq \kappa^2 \langle \mathcal{S}w, w \rangle_X + \tau \|z\|_X^2 - \left( \frac{\tau}{2} \|z\|_X^2 + \frac{2\kappa^2}{\tau} \|\mathcal{S}w\|_X^2 \right) \\ &\quad + 2N \kappa^2 \|\mathcal{R}^{-1} \mathcal{I}Q'(\phi)\|_X^2 \\ &\geq \frac{\tau}{2} (\kappa^2 + \|z\|_X^2) \\ &= \frac{\tau}{2} \|v\|_X^2, \end{aligned}$$

donde podemos concluir esta demonstração.  $\square$

Seja  $N > 0$  a constante obtida no lema anterior. Para prosseguirmos com nossas ideias, é necessário definirmos o funcional  $V : X \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$V(u) = G(u) - G(\phi) + N(Q(u) - Q(\phi))^2, \quad (4.37)$$

onde  $G$  é definido em (4.8) e validado no ponto  $(\omega_0, A_0)$ . Verifica-se facilmente que  $V(\phi) = 0$  e  $V'(\phi) = 0$ , pois

$$[V'(u), v] = [G'(u), v] + 2N(Q(u) - Q(\phi)) [Q'(u), v],$$

para todo  $u, v \in X$ . O próximo lema nos traz uma importante propriedade de minimização do funcional  $V$ .

**Lema 4.9.** *Existem  $\alpha > 0$  e  $D > 0$  tais que*

$$V(u) \geq D\rho(u, \phi)^2$$

para todo  $u \in U_\alpha = \{u \in X; \rho(u, \phi) < \alpha\}$ .

*Demonstração.* Primeiramente, observemos que pela definição de  $V$  segue que

$$[V''(u)v, v] = [G''(u)v, v] + 2N(Q(u) - Q(\phi)) [Q''(u)v, v] + 2N [Q'(u), v]^2,$$

para todo  $u, v \in X$ . Em particular,

$$\begin{aligned} [V''(\phi)v, v] &= [G''(\phi)v, v] + 2N [Q'(\phi), v]^2 \\ &= \langle \mathcal{S}v, v \rangle_X + 2N \langle \mathcal{R}^{-1} \mathcal{I}Q'(\phi), v \rangle_X^2. \end{aligned}$$

Consequente, pelo Lema 4.8, resulta que

$$[V''(\phi)v, v] \geq \tau_1 \|v\|_X^2, \quad (4.38)$$

para todo  $v \in \{\phi'\}^\perp$ .

Por outro lado, utilizando Taylor para fazer uma expansão de  $V$  em torno de  $\phi$  nos revela que

$$V(u) = V(\phi) + [V'(\phi), u - \phi] + \frac{1}{2} [V''(\phi)(u - \phi), u - \phi] + h(u), \quad (4.39)$$

com  $\lim_{u \rightarrow \phi} \frac{h(u)}{\|u - \phi\|_X^2} = 0$ . Deste modo, podemos escolher  $\alpha > 0$  tal que

$$|h(u)| \leq \frac{\tau_1}{4} \|u - \phi\|_X^2, \quad \text{para todo } u \in B_\alpha(\phi), \quad (4.40)$$

onde  $B_\alpha(\phi) = \{u \in X; \|u - \phi\|_X < \alpha\}$ .

Como  $V(\phi) = 0$  e  $V'(\phi) = 0$ , temos de (4.38), (4.39) e (4.40) que

$$\begin{aligned} V(u) &= \frac{1}{2} [V''(\phi)(u - \phi), u - \phi] + h(u) \\ &\geq \frac{\tau_1}{2} \|u - \phi\|_X^2 - \frac{\tau_1}{4} \|u - \phi\|_X^2 \\ &\geq \frac{\tau_1}{4} \rho(u, \phi)^2, \end{aligned}$$

para todo  $u \in B_\alpha(\phi)$  tal que  $(u - \phi) \in \{\phi'\}^\perp$ .

Vamos agora provar que (4.41) ocorre para qualquer  $u \in U_\alpha$ . Com efeito, definamos  $f(r) = \|u - \phi(\cdot + r)\|_X^2$ . Sendo  $u \in U_\alpha$ , então existe um ponto de mínimo global  $r_1 \in [0, L_0]$  tal que  $u(\cdot - r_1) \in B_\alpha(\phi)$  com  $(u(\cdot - r_1) - \phi) \in \{\phi'\}^\perp$ . Como  $V$  é invariante por translação, resulta que (4.41) ocorre e, portanto a afirmação está provada. Desta forma, também podemos afirmar que a demonstração está finalizada.  $\square$

Finalmente, apresentamos agora nosso teorema de estabilidade.

**Teorema 4.10** (Estabilidade). *Seja  $V$  o funcional definido em (4.37) e suponhamos que a hipótese (H) ocorre. Se existir  $\Phi \in X$  tal que  $\langle \mathcal{L}_0 \Phi, \varphi \rangle = 0$ , para todo  $\varphi \in \Upsilon_0$ , e  $I = \langle \mathcal{L}_0 \Phi, \Phi \rangle < 0$ , então  $\phi$  é orbitalmente estável em  $X$  com respeito ao fluxo de (4.1).*

*Demonstração.* Seja  $\alpha > 0$  a constante existente no Lema 4.9. Como  $V$  é contínuo em  $\phi$ , temos que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta \in (0, \alpha)$  tal que se  $\|u_0 - \phi\|_X < \delta$ , então

$$V(u_0) = V(u_0) - V(\phi) < D\varepsilon^2, \quad (4.41)$$

onde  $D > 0$  é a constante do Lema 4.9.

A continuidade no tempo da função  $\rho(u(t), \phi)$ , nos permite escolher  $T > 0$  tal que

$$\rho(u(t), \phi) < \alpha, \quad \text{para todo } t \in [0, T]. \quad (4.42)$$

Logo,  $u(t) \in U_\alpha$ , para todo  $t \in [0, T]$ . Combinando o Lema 4.9 e o fato de que  $V(u(t)) = V(u_0)$  para todo  $t \geq 0$ , obtemos que

$$\rho(u(t), \phi) < \varepsilon, \quad \text{para todo } t \in [0, T]. \quad (4.43)$$

Vejam agora que, na verdade,  $\rho(u(t), \phi) < \alpha$ , para todo  $t \in [0, +\infty)$ , donde poderemos concluir esta demonstração e, conseqüentemente, a estabilidade orbital de  $\phi$ . Com efeito, seja  $T_1 > 0$  o supremo dos valores de  $T > 0$  tal que (4.42) ocorre. Afim de obtermos uma contradição, suponhamos que  $T_1 < +\infty$ . Escolhendo,  $\varepsilon < \frac{\alpha}{2}$  resulta, de (4.43),

$$\rho(u(t), \phi) < \frac{\alpha}{2}, \quad \text{para todo } t \in [0, T_1).$$

Como a função  $t \in (0, +\infty) \mapsto \rho(u(t), \phi)$  é contínua, segue que existe  $T_0 > 0$  tal que  $\rho(u(t), \phi) < \frac{3}{4}\alpha < \alpha$ , para  $t \in [0, T_1 + T_0)$ , contrariando a maximalidade de  $T_1$ . Portanto,  $T_1 = +\infty$  e o teorema está provado.  $\square$

Como consequência do teorema anterior, temos o seguinte corolário.

**Corolário 4.11.** *Suponhamos que a hipótese (H) ocorre. Se  $s(\phi) > 0$ , então a onda periódica  $\phi$  é orbitalmente estável em  $X$ .*

## 4.2 Aplicações

Nesta última seção, aplicaremos os argumentos desenvolvidos na seção anterior afim de obtermos a estabilidade orbital de ondas periódicas relativas a várias equações dispersivas regularizadas inseridas na literatura corrente.

### 4.2.1 Equação Benjamin-Bona-Mahony

Se considerarmos  $\mathcal{M} = -\partial_x^2$  em (4.1), nós obtemos a equação Benjamin-Bona-Mahony (BBM daqui por diante)

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0. \quad (4.44)$$

O resultado de existência e unicidade de soluções globais para o problema (4.44) pode ser encontrado em [3] e [17]. Neste caso, o problema (4.44) é bem posto no espaço  $H_{per}^s([0, L])$  com  $s \geq 1$ .

Na referência [15], os autores construíram soluções  $L_0$ -periódicas associadas a seguinte equação

$$-\omega_0 \phi''_{(\omega_0, A_0)} + (\omega_0 - 1)\phi_{(\omega_0, A_0)} - \frac{1}{2}\phi_{(\omega_0, A_0)}^2 + A_0 = 0, \quad (4.45)$$

Neste caso, foi considerado  $A_0 = 0$  e  $L_0 > 2\pi$ . Estas soluções foram obtidas de forma explícita e, mais especificamente, são dadas por

$$\phi(x) := \phi_{(\omega_0, A_0)}(x) = a + b \left( \operatorname{dn}^2(dx; k) - \frac{E}{K} \right) \quad (4.46)$$

onde

$$a = \frac{48\omega_0 KE - 16K^2\omega_0(2 - k^2) + (\omega_0 - 1)L_0^2}{L_0^2}, \quad b = \frac{48\omega_0 K^2}{L_0^2}, \quad d = \frac{2K}{L_0}$$

e

$$\omega_0 = \frac{L_0^2}{L_0^2 - 16K^2\sqrt{1 - k^2 + k^4}} \quad (4.47)$$

Aqui, a função  $K = K(k)$  denota a integral elíptica completa do primeiro tipo e  $E = E(k)$  denota a integral elíptica completa do segundo tipo. Ademais, ambas as funções dependem do módulo elíptico  $k \in (0, 1)$ . O gráfico de  $\omega_0(k)$  com período fixo  $L_0 = 4\pi$  pode ser visto na figura 4.1.

Observemos que

$$\lim_{k \rightarrow 0} L_0^2 - 16K^2\sqrt{1 - k^2 + k^4} = L_0^2 - 4\pi^2.$$

Como estamos considerando  $L_0 > 2\pi$  segue que o limite acima é positivo e, portanto, existe  $k_1(L_0)$  tal que  $L_0^2 - 16K^2\sqrt{1 - k^2 + k^4} > 0$  no intervalo  $(0, k_1(L_0))$ . Notemos também que  $L_0^2 - 16K^2\sqrt{1 - k^2 + k^4}$  é decrescente neste intervalo pois  $16K^2\sqrt{1 - k^2 + k^4}$  é crescente. Daí,  $\omega_0 \in (\omega_0^*, \infty)$ , para todo  $k \in (0, k_1(L_0))$ , onde  $\omega_0^* = \frac{L_0^2}{L_0^2 - 4\pi^2} > 0$ . Além disso, segue de (4.47) que  $\omega_0$  é positivo e estritamente crescente neste intervalo (veja, por exemplo, a figura 4.1).

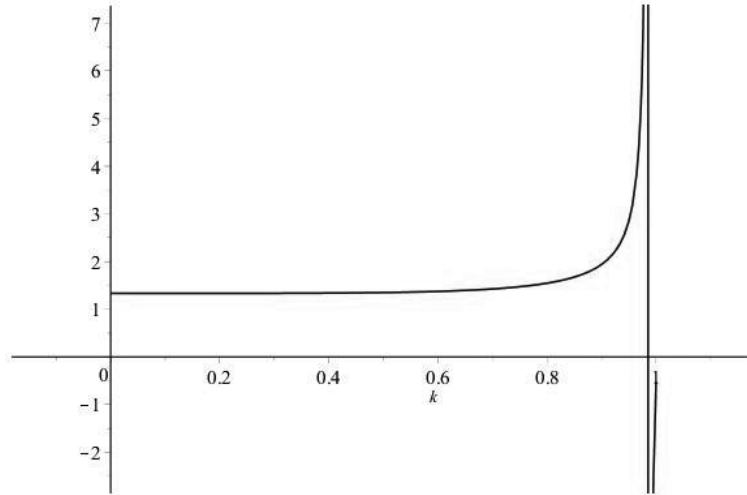


Figura 4.1: Gráfico de  $\omega_0$  dado em 4.47.

O operador associado a este caso é dado por

$$\mathcal{L}_0 = -\omega_0 \partial_x^2 + (\omega_0 - 1) - \phi.$$

Analisando o Teorema 7.1 apresentado na referência [15], podemos concluir que todas as propriedades espectrais de  $\mathcal{L}_0$  necessárias ao nosso problema foram estabelecidas, isto é, temos que  $\mathcal{L}_0$  possui exatamente um autovalor negativo sendo este simples e zero é um autovalor simples cuja autofunção é  $\frac{\partial}{\partial x}\phi$ . Deste modo, após todas estas informações serem apresentadas, podemos concluir que a hipótese  $(H)$  é verificada para este caso.

Vejam agora que  $s(\phi) > 0$ . Com efeito, primeiramente, lembremos que para este caso

temos que

$$\begin{aligned} s(\phi) &= (2\omega_0(\omega_0 - 1) + 1) M(\phi) + \omega_0 \int_0^{L_0} \phi \mathcal{M} \phi dx + (1 - \omega_0) L_0 \\ &= s_1(\phi) + \omega_0 \int_0^{L_0} \phi \mathcal{M} \phi dx. \end{aligned}$$

Notemos que  $M(\phi) = aL_0$ . Daí, segue deste fato que

$$\begin{aligned} s_1(\phi) &= (2\omega_0(\omega_0 - 1) + 1) M(\phi) + (1 - \omega_0) L_0 \\ &= (2\omega_0(\omega_0 - 1)a + a - (\omega_0 - 1)) L_0. \end{aligned}$$

Por outro lado, existe  $k_2(L_0)$  (veja Figura 4.2) tal que

$$a - (\omega_0 - 1) = \frac{48\omega_0 K E - 16K^2\omega_0(2 - k^2)}{L_0^2} = \frac{\omega_0}{L_0^2} (48K E - 16K^2(2 - k^2)) > 0,$$

para todo  $k \in (0, k_2(L_0))$ . Seja  $k_{L_0} = \min\{k_1(L_0), k_2(L_0)\}$ . Sendo  $a > 0$ ,  $\omega_0 > 1$  e  $k \mapsto \omega_0(k)$  crescente sobre  $(0, k_{L_0})$ , concluímos que

$$2\omega_0(\omega_0 - 1)a + a - (\omega_0 - 1) > 0$$

no intervalo  $(0, k_{L_0})$ . Consequentemente,

$$s(\phi) > s_1(\phi) > 0, \quad \text{com } \omega_0 \in (\omega_0^*, \infty).$$

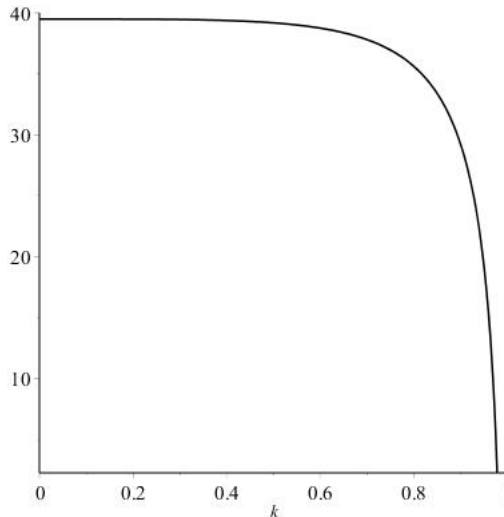


Figura 4.2: Gráfico de  $g(k) := 48KE - 16K^2(2 - k^2)$ .

Finalmente, pelo Corolário 4.11, obtemos que  $\phi$  em (4.46) é orbitalmente estável em  $H_{per}^1([0, L_0])$  com respeito ao fluxo de (4.44).



**Observação 4.12.** *O mesmo resultado de estabilidade orbital apresentado nesta aplicação foi concluído no trabalho [15]. No entanto, os autores deste trabalho apresentaram tal resultado utilizando argumentos clássicos contidos na referência [45] donde foi necessário calcular a condição  $F_\omega(\phi) > 0$ . Em nosso contexto, concluímos o resultado de estabilidade orbital de uma maneira mais simples e sem a necessidade de calcular este termo mencionado. Devido a este fato, acreditamos que a teoria apresentada neste capítulo possui grandes aplicações em problemas até então não solucionados.*

## 4.2.2 Equação de Quinta Ordem

Nesta subseção, apresentamos a estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas relacionadas ao seguinte modelo de quinta ordem

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxxxt} = 0. \quad (4.48)$$

Em outras palavras, estamos considerando  $\mathcal{M} = \partial_x^4$  na equação (4.1). Vale salientar que (4.48) é a equação regularizada da equação

$$u_t + uu_x - u_{xxxx} = 0, \quad (4.49)$$

na qual é extremamente utilizada em modelos de propagação não linear em linhas de transmissão.

### Existência e Unicidade

Provaremos, nesta subseção, que o problema de Cauchy periódico

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x + u_{xxxxt} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (4.50)$$

possui existência e unicidade de solução em  $X = H_{per}^2([0, L_0])$ . Inicialmente, observe que podemos escrever (4.50) na seguinte forma

$$(1 + \partial_x^4) u_t = -\partial_x \left( u + \frac{1}{2} u^2 \right). \quad (4.51)$$

Daí, aplicando a transformada de Fourier em ambos os lados de (4.51) na variável espacial  $x$ , obtemos

$$(1 + k^4) \widehat{u}_t(k) = -ik \left( u + \frac{1}{2} u^2 \right)^\wedge(k), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.52)$$

Logo, podemos afirmar que

$$\begin{aligned} \widehat{u}_t(k) &= \frac{-ik}{1 + k^4} \left( u + \frac{1}{2} u^2 \right)^\wedge(k) \\ &= \left( K * \left( u + \frac{1}{2} u^2 \right) \right)^\wedge(k) \end{aligned} \quad (4.53)$$

onde  $(K * u)^\wedge(k) = \frac{-ik}{1+k^4} \widehat{u}(k)$ . Consequentemente,

$$u_t = K * \left( u + \frac{1}{2} u^2 \right). \quad (4.54)$$

Integrando (4.54) de 0 a  $t$  e usando que  $u(x, 0) = u_0(x)$ , obtemos a forma de Duhamel

$$u(x, t) = u_0(x) + \int_0^t K * \left( u + \frac{1}{2} u^2 \right) (x, \tau) d\tau \quad (4.55)$$

associada ao problema de Cauchy (4.50).

**Teorema 4.13.** *Para cada  $u_0 \in H_{per}^2([0, L_0])$ , existe  $T > 0$  e uma única solução  $u$  de (4.55) tal que  $u \in C([0, T], H_{per}^2([0, L_0]))$ .*

*Demonstração.* Consideremos um tempo  $T > 0$  a ser escolhido mais adiante e definamos o espaço

$$Y := C([0, T], H_{per}^2([0, L_0])),$$

munido da norma  $\|u\|_Y = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{H_{per}^2}$ . Além disso, definamos o operador  $A$  tal que

$$\begin{aligned} A : Y &\rightarrow Y \\ u &\mapsto A(u) = u_0 + \int_0^t K * \left( u + \frac{1}{2} u^2 \right) d\tau. \end{aligned} \quad (4.56)$$

**Existência Local.** Com o intuito de utilizarmos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, vejamos que existem  $r_0 > 0$  e  $T > 0$  tais que  $A(u) \in B_{r_0}$  sempre que  $u \in B_{r_0}$ , onde  $B_{r_0} = \{u \in Y; \|u\|_Y \leq r_0\}$  e, além disto,  $A : B_{r_0} \rightarrow B_{r_0}$  é uma contração. Com efeito, inicialmente temos, devido a desigualdade  $(1 + k^2)^2 k^2 / (1 + k^4)^2 \leq 1$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , que se consideramos  $w \in H_{per}^2([0, L_0])$  qualquer, então

$$\begin{aligned} \|K * w\|_{H_{per}^2}^2 &= L_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + k^2)^2 |\widehat{K}(k)|^2 |\widehat{w}(k)|^2 \\ &= L_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + k^2)^2 \frac{k^2}{(1 + k^4)^2} |\widehat{w}(k)|^2 \\ &\leq L_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{w}(k)|^2 \\ &= \|w\|^2 \end{aligned} \quad (4.57)$$

Por outro lado, usando o fato de que  $H_{per}^s([0, L_0])$  é uma álgebra de Banach para  $s > \frac{1}{2}$ , resulta que

$$\left\| \frac{u^2}{2} \right\|_{H_{per}^2} \leq C_1 \|u\|_{H_{per}^2}^2 \quad (4.58)$$

com  $C_1 > 0$  constante. Desta forma, considerando  $u_0 \in H_{per}^2([0, L_0])$ , obtemos por (4.57) com  $w = u + \frac{1}{2}u^2$  e (4.58), que

$$\begin{aligned}
\|A(u(t))\|_{H_{per}^2} &\leq \|u_0\|_{H_{per}^2} + \int_0^t \left\| K * \left( u(t) + \frac{1}{2}u(t)^2 \right) \right\|_{H_{per}^2} d\tau \\
&\leq \|u_0\|_{H_{per}^2} + \int_0^t \left\| u(t) + \frac{1}{2}u(t)^2 \right\|_{H_{per}^2} d\tau \\
&\leq \|u_0\|_{H_{per}^2} + \int_0^t \|u(t)\|_{H_{per}^2} + C_1 \|u(t)\|_{H_{per}^2}^2 d\tau \\
&\leq \|u_0\|_{H_{per}^2} + T (\|u\|_Y + C_1 \|u\|_Y^2),
\end{aligned}$$

para todo  $t \in [0, T]$ , o que implica que

$$\|A(u)\|_Y \leq \|u_0\|_{H_{per}^2} + T (\|u\|_Y + C_1 \|u\|_Y^2). \quad (4.59)$$

A desigualdade acima (4.59) nos permite concluir que  $A$  está bem definido. vejamos agora que  $A$  é uma contração. De fato, usando (4.57) e o Teorema do Valor Médio, temos que existe  $\theta \in (0, 1)$  tal que

$$\begin{aligned}
\|K * (u^2 - v^2)\|_{H_{per}^2}^2 &\leq \|(u^2 - v^2)\|^2 \\
&\leq 4\|\theta v + (1 - \theta)u\|(u - v)\|^2 \\
&\leq 4(\theta\|v\|_{L_{per}^\infty} + (1 - \theta)\|u\|_{L^\infty})^2 \|(u - v)\|^2 \\
&\leq C_2 \left( \|v\|_{H_{per}^2} + \|u\|_{H_{per}^2} \right)^2 \|(u - v)\|_{H_{per}^2}^2,
\end{aligned} \quad (4.60)$$

com  $C_2 > 0$  constante, para todo  $u$  e  $v$  em  $H_{per}^2([0, L_0])$ . Logo, (4.57) e (4.60) nos fornece que

$$\begin{aligned}
\|A(u(t)) - A(v(t))\|_{H_{per}^2} &\leq \int_0^t \|K * (u(t) - v(t))\|_{H_{per}^2} + \|K * (u(t)^2 - v(t)^2)\|_{H_{per}^2} d\tau \\
&\leq \int_0^t \|u(t) - v(t)\|_{H_{per}^2} d\tau \\
&\quad + \int_0^t \sqrt{C_2} \left( \|v(t)\|_{H_{per}^2} + \|u(t)\|_{H_{per}^2} \right) \|u(t) - v(t)\|_{H_{per}^2} d\tau \\
&\leq \int_0^t \|u(t) - v(t)\|_{H_{per}^2} d\tau \\
&\quad + \int_0^t \sqrt{C_2} (\|v\|_Y + \|u\|_Y) \|u(t) - v(t)\|_{H_{per}^2} d\tau \\
&\leq T\|u - v\|_Y \left( 1 + \sqrt{C_2} (\|v\|_Y + \|u\|_Y) \right),
\end{aligned}$$

para todo  $t \in [0, T]$ . Portanto, segue que

$$\|A(u) - A(v)\|_Y \leq T\|u - v\|_Y \left( 1 + \sqrt{C_2} (\|v\|_Y + \|u\|_Y) \right). \quad (4.61)$$

Finalmente, se  $u, v \in B_{r_0}$ , então resulta de (4.59) e (4.61) que

$$\|A(u)\|_Y \leq \|u_0\|_{H_{per}^2} + T(r_0 + C_1 r_0^2)$$

e

$$\|A(u) - A(v)\|_Y \leq T\|u - v\|_Y(1 + 2\sqrt{C_2}r_0).$$

Escolhendo  $r_0 = 2\|u_0\|$  e  $T = \frac{1}{2} \left(1 + \tilde{C}r_0\right)^{-1}$  com  $\tilde{C} = \max\{C_1, 2\sqrt{C_2}\}$ , obtemos que

$$\|A(u)\|_Y \leq r_0 \quad \text{e} \quad \|A(u) - A(v)\|_Y \leq \frac{1}{2}\|u - v\|_Y.$$

Concluimos desta maneira que  $A : B_{r_0} \rightarrow B_{r_0}$  é uma contração e, portanto, existe uma única  $u \in B_{r_0} \subset Y$  tal que  $A(u) = u$ , o que prova o desejado até este momento.

**Unicidade.** Suponhamos que  $u$  e  $v$  satisfazem (4.55) com dados iniciais  $u_0$  e  $v_0$ , respectivamente. Utilizando (4.57) e (4.60), segue que

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_{H_{per}^2} &\leq \|u_0 - v_0\|_{H_{per}^2} \\ &+ \int_0^t \|(u(\tau) - v(\tau))\|_{H_{per}^2} \left(1 + \sqrt{C_2}(\|v\|_Y + \|u\|_Y)\right) d\tau \\ &= \|u_0 - v_0\|_{H_{per}^2} \\ &+ \left(1 + \sqrt{C_2}(\|v\|_Y + \|u\|_Y)\right) \int_0^t \|(u(\tau) - v(\tau))\|_{H_{per}^2} d\tau. \end{aligned}$$

Desta maneira, usando a desigualdade de Gronwall, concluimos que

$$\|u(t) - v(t)\|_{H_{per}^2} \leq \|u_0 - v_0\|_{H_{per}^2} \exp^{(1 + \sqrt{C_2}(\|v\|_Y + \|u\|_Y))t} \quad (4.62)$$

para todo  $t$  real no intervalo  $[0, T]$ . Portanto, se considerarmos  $u_0 = v_0$ , então  $u = v$  em  $Y$  e a unicidade está provada. □

Verificaremos agora no próximo lema que as energias da equação de quinta ordem

$$P(u) = \frac{1}{2} \int_0^L u_{xx}^2 - \frac{1}{3} u^3 dx, \quad (4.63)$$

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_0^L u_{xx}^2 + u^2 dx, \quad (4.64)$$

e

$$M(u) = \int_0^L u dx. \quad (4.65)$$

são conservadas.

**Lema 4.14.** *Os funcionais  $P$ ,  $F$ , e  $M$  apresentados em (4.63), (4.64) e (4.65), respectivamente, são conservados.*

*Demonstração.* Definamos  $\Lambda = (1 + \partial_x^4)^{\frac{1}{2}}$ , então podemos escrever

$$u_t = -\Lambda^{-2} \partial_x \left( u + \frac{1}{2} u^2 \right). \quad (4.66)$$

Por outro lado, como  $\Lambda^{-2} \in B(L_{per}^2([0, L_0]), H_{per}^4([0, L_0]))$ , então  $\Lambda^{-2}\partial_x(u + \frac{1}{2}u^2) \in H_{per}^2([0, L_0])$ . Assim,  $u_t \in H_{per}^2([0, L_0])$  e, portanto,  $F(u_t) < \infty$ . Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}F(u(t)) &= \int_0^{L_0} u_t(u + u_{xxxx})dx \\
&= - \int_0^{L_0} (u + u_{xxxx})\Lambda^{-2}\partial_x\left(u + \frac{1}{2}u^2\right)dx \\
&= - \int_0^{L_0} \Lambda^2 u \Lambda^{-2}\partial_x\left(u + \frac{1}{2}u^2\right)dx \\
&= - \int_0^{L_0} u\partial_x\left(u + \frac{1}{2}u^2\right)dx \\
&= - \int_0^{L_0} uu_x + u^2u_x dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{L_0} \partial_x\left(u^2 + \frac{2}{3}u^3\right)dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

Isto prova que  $F$  é conservado. Para provarmos que  $P$  é conservado, provaremos primeiro que

$$\tilde{P}(u) := \frac{1}{2} \int_0^{L_0} u^2 + \frac{1}{3}u^3 dx$$

é conservado. Com efeito, notemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\tilde{P}(u) &= \int_0^{L_0} \left(u + \frac{1}{2}u^2\right)u_t dx \\
&= - \int_0^{L_0} \left(u + \frac{1}{2}u^2\right)\Lambda^{-2}\partial_x\left(u + \frac{1}{2}u^2\right)dx \\
&= - \int_0^{L_0} \Lambda^{-1}\left(u + \frac{1}{2}u^2\right)\partial_x\Lambda^{-1}\left(u + \frac{1}{2}u^2\right)dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{L_0} \partial_x\left[\Lambda^{-1}\left(u + \frac{1}{2}u^2\right)\right]^2 dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Desta forma, como  $P = F - \tilde{P}$ , resulta que  $P$  é conservado. Para verificarmos que  $M$  é conservado, basta integrar (4.66). Portanto, a demonstração está concluída.  $\square$

Finalmente, provaremos no próximo resultado a boa-colocação global para o problema estudado nesta subseção.

**Teorema 4.15.** *Para cada  $u_0 \in H_{per}^2([0, L_0])$ , o problema de Cauchy (4.50) é globalmente bem colocado em  $H_{per}^2([0, L_0])$  com  $u \in C(\mathbb{R}, H_{per}^2([0, L_0]))$ .*

*Demonstração.* Considerando  $v_0 = u(T)$  e a equação integral

$$v(x, t) = v_0(x) + \int_0^t K * \left(v + \frac{1}{2}v^2\right)(x, \tau) d\tau, \quad (4.67)$$

temos pelo teorema de boa colocação local que existem  $\tilde{T}$  e uma única solução  $v$  para a equação (4.67) tal que  $v \in C([0, \tilde{T}], H_{per}^2([0, L_0]))$ . Definamos então

$$w(x, t) := \begin{cases} u(x, t), & \text{se } 0 \leq t \leq T \\ v(x, t - T) & \text{se } T \leq t \leq T + \tilde{T}. \end{cases}$$

Deste modo, constatamos para  $0 < s \leq \tilde{T}$  que

$$\begin{aligned} w(x, T + s) &= v(x, T + s - T) \\ &= v(x, s) \\ &= v_0(x) + \int_0^s K * \left( v + \frac{1}{2}v^2 \right) (x, \tau) d\tau \\ &= u(x, T) + \int_0^s K * \left( v + \frac{1}{2}v^2 \right) (x, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Desta forma, fazendo a mudança de variável  $\xi - T = \tau$ , obtemos que

$$\begin{aligned} w(x, T + s) &= u(x, T) + \int_T^{T+s} K * \left( v + \frac{1}{2}v^2 \right) (x, \xi - T) d\xi \\ &= u_0(x) + \int_0^T K * \left( u + \frac{1}{2}u^2 \right) (x, \tau) d\tau + \int_T^{T+s} K * \left( v + \frac{1}{2}v^2 \right) (x, \xi - T) d\xi \\ &= u_0(x) + \int_0^{T+s} K * \left( w + \frac{1}{2}w^2 \right) (x, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (4.68)$$

para todo  $0 < s \leq \tilde{T}$ , ou seja,  $w$  é a extensão única da solução  $u$  ao intervalo  $[0, T + \tilde{T}]$ .

Pelo Teorema 4.13, temos que

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} \left( 1 + 2\tilde{C} \|v_0\|_{H_{per}^2} \right)^{-1}.$$

Além disso, como  $\|v_0\|_{H_{per}^2} = \|u(T)\|_{H_{per}^2} = \|u_0\|_{H_{per}^2}$ , resulta que

$$\tilde{T} = T.$$

Portanto, podemos concluir que a solução  $u$  pode ser estendida à  $C([0, 2T], H_{per}^2([0, L_0]))$ . Repetindo este processo, constatamos que  $u$  pode ser estendida à  $C([0, \infty), H_{per}^2([0, L_0]))$ . Além disso, como  $K$  não depende de  $t$ , temos que (4.55) é reversível no tempo e assim  $u$  pode ser estendida para toda a reta, isto é,  $u \in C(\mathbb{R}, H_{per}^2([0, L_0]))$ . Logo, a demonstração está concluída. □

## Estabilidade Orbital

Considerando ondas periódicas especiais da forma  $u(x, t) = \phi(x - \omega_0 t)$ , obtemos de (4.48) (após integração) que  $\phi$  resolve a seguinte equação diferencial ordinária não linear

$$\omega_0 \phi_{(\omega_0, A_0)}'''' + (\omega_0 - 1) \phi_{(\omega_0, A_0)} - \frac{1}{2} \phi_{(\omega_0, A_0)}^2 + A_0 = 0. \quad (4.69)$$

A equação (4.69) acima admite soluções explícitas  $L_0$ -periódicas dadas por

$$\begin{aligned} \phi(x) = a &+ b \left( \operatorname{dn}^2 \left( \frac{2K(k)}{L} x, k \right) - \frac{E(k)}{K(k)} \right) \\ &+ d \left( \operatorname{dn}^4 \left( \frac{2K(k)}{L} x, k \right) - (2 - k^2) \frac{2E(k)}{3K(k)} + \frac{1-k^2}{3} \right), \end{aligned} \quad (4.70)$$

onde  $k := k_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

$$a = \frac{-1792\omega_0(k_0^4 - k_0^2 + 1)K(k_0)^4 + 3L_0^4(\omega_0 - 1)}{3L_0^4}, \quad b = \frac{17920\omega_0(k_0^2 - 2)K(k_0)^4}{L_0^4}$$

e

$$d = \frac{26880\omega_0 K(k_0)^4}{L_0^4}.$$

Tal solução é obtida substituindo o ansatz (4.70) na equação (4.69). Vale ressaltar que o ansatz (4.70) foi escolhido baseado nos argumentos contidos em [28]. Também é importante mencionar que, neste caso estudado,  $\omega_0$  e  $L_0 > 0$  são parâmetros livres em (4.70) (por conveniência, consideraremos  $\omega_0 > 1$ ). Além disso,  $A_0$  é uma função suave que depende de  $L_0 > 0$  e  $\omega_0 > 1$ .

Afim de obtermos as propriedades espectrais do operador linearizado relacionado ao problema desta subseção  $\mathcal{L}_0 = \omega_0 \partial_x^4 + (\omega_0 - 1) - \phi$ , precisamos usar alguns resultados introduzidos nas preliminares desta tese (para mais detalhes veja [13]). Consideremos a solução  $\phi$  em (4.70) com a seguinte expansão de Fourier

$$\phi(x) = a + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi K'}{K} \right) \cos \left( \frac{2\pi n}{L} x \right),$$

onde  $\gamma = \left( \frac{b\pi^2}{K^2} + \frac{d\pi^2}{k^2 K^2} \left( \frac{4-2k^2}{3} + \frac{n^2\pi^2}{6K} \right) \right)$ . Os coeficientes de Fourier, neste caso, são dados por

$$\hat{\phi}(n) = \begin{cases} a, & n = 0 \\ \frac{\gamma}{2} n \operatorname{csch} \left( \frac{n\pi K'}{K} \right), & n \neq 0. \end{cases} \quad (4.71)$$

Seja agora  $\mu \in \mathbb{R}$  fixado. Notemos que se considerarmos  $\varrho := \mu + \phi$ , onde  $\phi$  é solução de (4.69), resulta que  $\varrho$  é solução da equação

$$\omega_0 \varrho'''' + (\omega_0 - 1 + \mu) \varrho - \frac{1}{2} \varrho^2 + \widetilde{A}_0 = 0.$$

onde  $\widetilde{A}_0 = A_0 - \mu(\omega_0 - 1) - \frac{\mu^2}{2}$ . Além disto, segue que

$$\widetilde{\mathcal{L}}_0 := \omega_0 \partial_x^4 + (\omega_0 - 1 + \mu) - \varrho = \omega_0 \partial_x^4 + (\omega_0 - 1) - \phi = \mathcal{L}_0.$$

Desta forma, as propriedades espectrais de  $\mathcal{L}_0$  podem ser determinadas investigando o espectro de  $\widetilde{\mathcal{L}}_0$ . Definamos  $g(x) = \frac{\gamma}{2} x \operatorname{csch} \left( \frac{x\pi K'}{K} \right)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  e consideremos  $\mu$  suficientemente grande tal que  $\hat{\varrho}(0) = a + \mu > g(0)$ . Utilizando o programa matemático MAPLE conseguimos verificar que  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\log g(x)) < 0$  para todo  $x$  real tal que  $|x| \geq 1$  (note que para nosso caso,

isto é suficiente pois estamos interessados no problema discreto). Tal afirmação mencionada pode ser vista na Figura 4.3 abaixo.

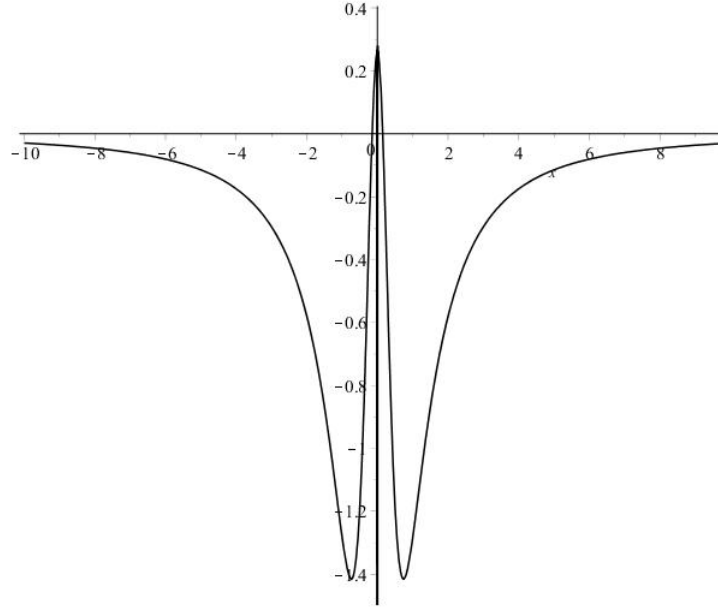


Figura 4.3: Gráfico de  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\log g(x))$ .

Deste modo, pelo Lema 1.13 temos que  $g$  pertence a classe  $PF(2)$  e, portanto, podemos redefinir a função  $g$  por uma função diferenciável  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $p(0) = a + \mu$  e  $p(x) = g(x)$  in  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ . Logo, podemos concluir que  $p(n) = \hat{\rho}(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  pertence a classe discreta de  $PF(2)$  e, conseqüentemente, pelo Teorema 1.15 podemos afirmar que  $\widetilde{\mathcal{L}}_0 = \mathcal{L}_0$  possui somente um autovalor negativo sendo este simples e zero é um autovalor simples com autofunção  $\frac{\partial}{\partial x}\phi$ . Neste momento, fica-se então provado que a hipótese  $(H)$  é válida para este caso.

Analisando agora  $s(\phi)$ , temos que com a ajuda do programa MAPLE é possível escrevermos

$$\begin{aligned} s(\phi) &= (2\omega_0(\omega_0 - 1) + 2A_0 + 1) aL_0 + \omega_0 \int_0^{L_0} (\phi'')^2 dx + (2A_0(\omega_0 + 1) - \omega_0 + 1) L_0 \\ &= \frac{-\omega_0^3 K(k_0)^4}{L_0^{12}} j_1(L_0) \end{aligned}$$

onde  $j_1(L_0)$  é um polinômio em termos de  $L_0$ .

Plotando o gráfico de  $j_1$  afim de analisarmos o comportamento de  $s(\phi)$ , podemos verificar, por exemplo, que se  $2 < L_0 < 24$  e  $\omega_0 > 1$ , então  $s(\phi) > 0$  (veja figura 4.4 abaixo). Portanto, utilizando o Teorema 4.10, concluimos que  $\phi$  dada em (4.70) é orbitalmente estável em  $H_{per}^2([0, L_0])$  com respeito ao fluxo de (4.48) desde que consideremos os intervalos de  $\omega_0$  e  $L_0$  citados anteriormente.



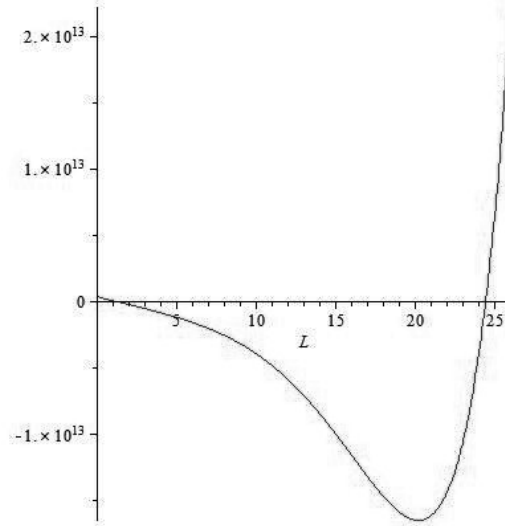


Figura 4.4: Gráfico de  $j_1$

### 4.2.3 Estabilidade Orbital de Minimizadores

Nesta última aplicação apresentamos, de uma maneira simples, a estabilidade orbital de ondas periódicas viajantes relacionadas a equação (4.1) na qual minimizam um funcional suave conveniente ao nosso caso e com um certo vínculo. Primeiramente, deduziremos a existência de ondas periódicas via método de minimização e imersões compactas. A seguir, seguiremos os argumentos em [51] afim de obtermos que zero é um autovalor simples e está associado com a autofunção  $\phi'$ . Para darmos continuidade a nossa aplicação, vamos supor as seguintes hipóteses:

(H1) Uma autofunção em  $X \cap C_{per}^0([0, L_0])$  correspondente ao  $j$ -ésimo autovalor de  $\mathcal{L}_0 = \omega_0 \mathcal{M} + (\omega_0 - 1) - \phi$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$  muda de sinal no máximo  $2(j - 1)$  vezes sobre o intervalo periódico  $[0, L_0)$ .

(H2) O espaço de energia  $X$  está compactamente imerso em  $L_{per}^3([0, L_0])$ .

(H3) Toda solução  $\phi \in X$  of (4.7) pertence a  $L_{per}^\infty([0, L_0])$ . Ademais,  $\phi$  é par e estritamente decrescente sobre o intervalo  $(0, L_0/2)$ .

(H4) Existe  $\Psi \in D(\mathcal{L}_0)$  tal que  $\mathcal{L}_0 \Psi = \phi$ .

**Observação 4.16.** Quando  $\mathcal{M} = \Lambda^\alpha$ ,  $\alpha \in (1/3, 2]$  e  $\Lambda = \sqrt{-\partial_x^2}$ , os autores em [51] estudaram a equação do tipo KdV fracionária dada por

$$u_t - \Lambda^\alpha u_x + (u^2)_x = 0$$

apresentando (H1) como resultado e não como hipótese (o mesmo foi estabelecido em [42] para o caso de ondas solitárias). Além disso, temos, neste caso específico, que  $X = H_{per}^{\alpha/2}([0, L_0])$  está compactamente imerso em  $L_{per}^3([0, L_0])$  (isto é, (H2) é satisfeito) e a solução  $\phi \in X$

da equação correspondente satisfaz a hipótese (H3) (o fato de que  $\phi$  é par e estritamente decrescente sobre o intervalo  $(0, L_0/2)$  é obtido via argumento de rearranjo). Também temos que, neste caso, é possível verificar a hipótese (H4) utilizando-se a existência de superfície de soluções. Nossa intenção nesta subseção é melhorar os argumentos em [51] no sentido de que é possível generalizar o operador  $\mathcal{M}$ . Além disso, mostraremos que, em nosso caso, é possível calcularmos  $s(\phi) > 0$  de tal modo que as Proposições 4.4 e 4.6 ocorrem sem a necessidade de hipóteses adicionais. Vale lembrar que em [51] é preciso calcular que

$$\begin{vmatrix} M_A(\phi) & F_A(\phi) \\ M_\omega(\phi) & F_\omega(\phi) \end{vmatrix} \neq 0$$

para que se tenha a validação da Proposição 4.6, e isto não é um cálculo simples de se fazer.

Seja agora  $\gamma > 0$  e consideremos o seguinte conjunto

$$Y_\gamma = \left\{ u \in X; \int_0^{L_0} u^3 = \gamma \right\}.$$

Nossa intenção é encontrar um minimizador periódico para o conjunto

$$\{B(u); u \in Y_\gamma\},$$

onde

$$B(u) = \frac{1}{2} \int_0^{L_0} u \mathcal{M}u + (\omega_0 - 1) (u^2 + u \mathcal{M}u) dx, \quad \omega_0 > 1. \quad (4.72)$$

Observemos que, utilizando (4.3), temos que  $B$  é um funcional estritamente positivo desde que  $u \neq 0$ . Desta forma, podemos considerar uma sequência minimizante  $\{u_n\} \subset Y_\gamma$  tal que

$$B(u_n) \rightarrow \inf_{u \in Y_\gamma} B(u), \quad \text{se } n \rightarrow \infty.$$

Além disso, podemos notar que

$$\frac{(\omega_0 - 1)}{2} \|u_n\|_X \leq B(u_n) \leq \omega_0 \|u_n\|_X, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

donde segue que  $\|u_n\|_X$  é limitado. Logo, existe  $\phi \in X$  e uma subsequência de mesmo nome tal que

$$u_n \rightharpoonup \phi \quad \text{em } X.$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Pela semicontinuidade inferior fraca de  $B$ , concluímos que

$$B(\phi) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} B(u_n).$$

Por outro lado, utilizando a hipótese (H2), temos que

$$u_n \rightarrow \phi \quad \text{em } L_{per}^3([0, L_0]).$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{L_0} u_n^3 - \phi^3 dx \right| &\leq \int_0^{L_0} |u_n^3 - \phi^3| dx \\ &\leq \int_0^{L_0} |u_n - \phi|^3 + 3|\phi u_n| |u_n - \phi| dx \\ &\leq \|u_n - \phi\|_{L_{per}^3}^3 + 3\|u_n - \phi\|_{L_{per}^3} \|\phi\|_{L_{per}^3} \|u_n\|_{L_{per}^3}. \end{aligned}$$

Consequentemente, podemos afirmar que  $\int_0^{L_0} \phi^3 dx = \gamma$ , donde segue que  $\phi$  é o minimizador periódico desejado. Assim, pelo Teorema do Multiplicador de Lagrange, resulta que existe  $C_1 := C_1(\gamma, \phi) \neq 0$  (veja Proposição 2.2 em [51] para o caso  $\mathcal{M} = \Lambda^\alpha$ ) tal que

$$\omega_0 \mathcal{M}\phi + (\omega_0 - 1)\phi = C_1 \phi^2.$$

Através de um simples argumento de escala podemos considerar  $C_1 = \frac{1}{2}$ . Logo,  $\phi$  satisfaz a equação

$$\omega_0 \mathcal{M}\phi + (\omega_0 - 1)\phi - \frac{1}{2}\phi^2 = 0, \quad \omega_0 > 1. \quad (4.73)$$

Usando (H3), é possível verificar que  $\|\phi^2\| \leq \|\phi\|_{L_{per}^\infty} \|\phi\| < \infty$ . Desta forma, pela equação acima, temos que  $\mathcal{M}\phi$  pertence a  $L_{per}^2([0, L_0])$  e, consequentemente, utilizando argumentos de bootstrap, podemos dizer que  $\phi$  pertence a  $H_{per}^m([0, L_0])$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Notemos também que, neste caso, temos  $A_0 = 0$  e, além disto,  $\phi$  pode ser considerada par e estritamente decrescente sobre o intervalo  $(0, L_0/2)$  (veja hipótese (H3)).

Pela hipótese (H4) existe  $\Psi \in D(\mathcal{L}_0)$  tal que  $\mathcal{L}_0 \Psi = \phi$ . Consequentemente, podemos deduzir, via cálculos simples, que  $\mathcal{L}_0(1 - \Psi) = (\omega_0 - 1)$  e  $\mathcal{L}_0 \phi = -\frac{1}{2}\phi^2$ . Logo, sendo  $\omega_0 > 1$ , obtemos que  $\{1, \phi, \phi^2\}$  está contido na imagem de  $\mathcal{L}_0$ . Finalmente, utilizando a hipótese (H1) junto com [51, Proposição 3.1], podemos concluir que  $\ker(\mathcal{L}_0) = [\phi']$ . Sabendo agora que o núcleo de  $\mathcal{L}_0$  é simples e  $\phi'$  é ímpar, podemos aplicar o Teorema 4.2 e, consequentemente, obter a existência de um conjunto aberto  $\mathcal{O} \subset (1, +\infty) \times (-\delta_0, \delta_0)$ ,  $\delta_0 > 0$  e uma superfície suave de soluções  $L_0$ -periódica  $\psi := \phi_{(\omega, A)}$ ,  $(\omega, A) \in \mathcal{O}$  na qual resolvem a equação (4.7).

Antes de prosseguirmos, precisamos fazer algumas considerações e também enunciar o Teorema do Índice, situado em [56, Teorema 5.3.2] e adaptado ao nosso contexto, afim de obtermos a condição  $n(\mathcal{L}) = 1$ , onde  $\mathcal{L} = \omega \mathcal{M} + (\omega - 1) - \psi$ . Consideremos o espaço  $Y \subset X \subset Y'$  tal que  $\mathcal{L} \in \mathcal{B}(Y, Y')$  e fixemos um subespaço de codimensão finita  $\mathcal{A} \subset Y$  tal que a projeção ortogonal,  $\Pi : X \rightarrow \text{Im}(\Pi) \subset X$ , satisfaz  $\Pi Y = \mathcal{A}$ . Definamos agora  $S := \mathcal{A}^\perp \subset X$  como sendo um subespaço de dimensão  $m$  gerado por  $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$  tal que  $S \subset \ker(\mathcal{L})^\perp$ . Por fim, definamos  $\mathcal{L}_\Pi := \Pi \mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \cap \mathcal{A} \subset \Pi X \rightarrow \Pi X$  e consideremos  $D$  como sendo uma matriz Hermitiana de tamanho  $m \times m$  dada por

$$D_{ij} = \langle s_i, \mathcal{L}^{-1} s_j \rangle. \quad (4.74)$$

Após estas considerações, podemos finalmente enunciar o Teorema do Índice:

**Teorema 4.17** (Teorema do Índice). *Seja  $D$  a matriz Hermitiana definida em (4.74), então temos a seguinte igualdade*

$$n(\mathcal{L}_\Pi) = n(\mathcal{L}) - n(D) - z(D),$$

onde  $z$  representa a dimensão do núcleo e  $n$  o número de autovalores negativos do operador. Além disso, temos que

$$z(\mathcal{L}_\Pi) = z(\mathcal{L}) + z(D).$$

Verificaremos agora que  $n(\mathcal{L}) = 1$ . Para verificar tal fato usaremos o Teorema 4.17 com  $D := \langle \mathcal{L}_0^{-1}R'(\phi), R'(\phi) \rangle$ , onde  $R(u) = \int_0^{L_0} u^3 dx$ . Notemos que sendo o núcleo de  $\mathcal{L}_0$  simples e gerado por  $\phi'$  temos que é possível conhecer explicitamente  $\mathcal{L}_0^{-1}R'(\phi)$  e, além disso, podemos escrever  $D$  da seguinte maneira

$$D = -18 \int_0^{L_0} \phi^3 dx = -36 \int_0^{L_0} (\omega \phi \mathcal{M} \phi + (\omega - 1)\phi^2) dx < 0.$$

Daí, sendo  $\phi$  um minimizador periódico, segue que  $n(\mathcal{L}_0|_{\{R'(\phi)\}^\perp}) = 0$  e, portanto, pelo Teorema do Índice resulta que  $n(\mathcal{L}_0) = n(D) = 1$ . Finalmente, aplicando a Proposição 3.14 obtemos que o núcleo do operador linearizado  $\mathcal{L} = \omega \mathcal{M} + (\omega - 1) - \psi$  é simples, gerado por  $\psi'$  e  $n(\mathcal{L}) = 1$ , para todo par  $(\omega, A) \in \mathcal{O} \subset (1, +\infty) \times (-\delta_0, \delta_0)$ .

Para atingirmos nosso resultado de estabilidade resta agora calcularmos  $s(\phi)$ , onde  $\phi = \phi_{(\omega_0, 0)}$ ,  $\omega_0 > 1$ . Primeiramente, observemos que

$$s(\phi) = (2\omega_0(\omega_0 - 1) + 1)M(\phi) + \omega_0 \int_0^{L_0} \phi \mathcal{M} \phi dx + (1 - \omega_0)L_0. \quad (4.75)$$

É possível explicitarmos uma expressão mais conveniente para  $M(\phi)$  e, conseqüentemente,  $s(\phi)$ . De fato, integrando (4.7) com  $(\omega, A) = (\omega_0, 0)$ , resulta que

$$M(\phi) = \frac{1}{2(\omega_0 - 1)} \int_0^{L_0} \phi^2 dx. \quad (4.76)$$

Por outro lado, multiplicando a equação (4.7) por  $\phi$  e integrando o resultado, temos que

$$\int_0^{L_0} \phi^2 dx = \frac{1}{2(\omega_0 - 1)} \left[ \int_0^{L_0} \phi^3 dx - \frac{\omega_0}{\omega_0 - 1} \int_0^{L_0} \phi \mathcal{M} \phi dx \right]. \quad (4.77)$$

Deste modo, utilizando (4.76), (4.77) e a igualdade  $\int_0^{L_0} \phi^3 dx = \gamma$ , conseguimos encontrar que

$$M(\phi) = \frac{\gamma}{4(\omega_0 - 1)^2} - \frac{\omega_0}{2(\omega_0 - 1)^2} \int_0^{L_0} \phi \mathcal{M} \phi dx. \quad (4.78)$$

Substituindo agora o valor  $M(\phi)$  em (4.78) na expressão (4.75) e utilizando o fato que  $\int_0^{L_0} \phi \mathcal{M} \phi dx > 0$ , deduzimos que

$$\begin{aligned} s(\phi) &= \frac{(2\omega_0(\omega_0 - 1) + 1)\gamma}{4(\omega_0 - 1)^2} + \frac{\omega_0}{2(\omega_0 - 1)^2} \int_0^{L_0} \phi \mathcal{M} \phi dx + (1 - \omega_0)L_0 \\ &> \frac{(2\omega_0(\omega_0 - 1) + 1)\gamma}{4(\omega_0 - 1)^2} + (1 - \omega_0)L_0. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Finalmente, como  $\gamma > 0$ ,  $\omega_0 > 1$  e  $L_0 > 0$  são arbitrários, podemos escolhê-los de tal forma que  $s(\phi) > 0$ . Portanto, o minimizador periódico  $\phi$  será orbitalmente estável em  $X$  nestes casos.

**Observação 4.18.** *Se considerarmos  $\mathcal{M} = \Lambda^\alpha$ ,  $\alpha \in (1/3, 2]$  e  $\Lambda = \sqrt{-\partial_x^2}$ , temos que todas as condições (H1) – (H4) são verificadas (veja [51]). Desta forma, é possível deduzirmos, de acordo com os argumentos estabelecidos nesta subseção, que  $(\omega, A) \in \tilde{\mathcal{O}} \mapsto \phi_{(\omega, A)} \in H_{per}^n([0, L_0])$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  é uma superfície suave de soluções periódicas para a equação (4.7) com período  $L_0 > 0$  fixado. Ademais, podemos concluir que o núcleo do operador linearizado  $\mathcal{L} = \omega\Lambda^\alpha + (\omega - 1) - \psi$  é simples e gerado por  $\psi'$  (veja [51, Proposição 3.1]). Impondo condições sobre  $\gamma$ ,  $\omega_0$  e  $L_0 > 0$ , conforme foi visto anteriormente, é possível concluirmos que  $s(\phi) > 0$ . Consequentemente,  $\phi$  é orbitalmente estável em  $H_{per}^{\alpha/2}([0, L_0])$  e, portanto, podemos dizer que a equação (4.1), no caso fracionário, sempre admite ondas periódicas estáveis.*

# Apêndice

## 5.1 Funções Elípticas de Jacobi

Aqui, serão estabelecidas algumas propriedades básicas das funções elípticas de Jacobi. Uma descrição mais detalhada pode ser encontrada nas referências [2], [22] e [27].

Sejam  $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  e  $k \in (0, 1)$ . A integral elíptica do primeiro tipo é definida por

$$\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}} \equiv F(\varphi, k),$$

onde  $y = \sin(\varphi)$ . A integral elíptica do segundo tipo é definida por

$$\int_0^y \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)} d\theta \equiv E(\varphi, k).$$

O número  $k$  é denominado o módulo da integral elíptica e o número  $k' := \sqrt{1-k^2}$  é denominado o módulo complementar a  $k$ . O parâmetro  $\varphi$ , por sua vez, é denominado o argumento da integral elíptica. Como  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , temos que  $0 \leq y \leq 1$ . Se  $y = 1$ , as integrais acima são ditas completas. No caso das integrais completas,

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}} \equiv F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \equiv K(k) \equiv K$$

e

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)} d\theta \equiv E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \equiv E(k) \equiv E.$$

Vemos que  $\lim_{k \rightarrow 0^+} K(k) = \lim_{k \rightarrow 0^+} E(k) = \frac{\pi}{2}$ ,  $\lim_{k \rightarrow 1^-} E(k) = 1$  e  $\lim_{k \rightarrow 1^-} K(k) = +\infty$ . Além disto, para cada  $k \in (0, 1)$ ,  $E(k) < K(k)$  e, são válidas as seguintes identidades

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E - k'^2 K}{kk'^2} \quad \text{e} \quad \frac{dE}{dk} = \frac{E - K}{k}.$$

Fundamentados nas integrais elípticas, acima apresentadas, definimos as funções elípticas de Jacobi. Para  $y_1 \in [0, 1]$  e  $k \in (0, 1)$ , consideremos

$$u(y_1; k) \equiv \int_0^{y_1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}} \equiv F(\varphi_1, k),$$

onde  $\varphi_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  satisfaz  $y_1 = \sin(\varphi_1)$ . Para  $k$  fixado,  $u$  é uma função estritamente crescente na variável  $y_1$ . A inversa da função  $u$ , para  $k$  fixado, define a função senoidal que é descrita por  $\text{sn}(u; k) \equiv \sin(\varphi_1) = y_1$  e  $\varphi_1 = \text{am}(u; k)$  é designada como a função amplitude de  $u$ . Quando não se faz necessário enfatizar o módulo  $k$ , denotamos simplesmente  $\text{sn}(u) = y_1$ . As outras duas funções elípticas básicas, as funções cnoidal  $\text{cn}$  e dnoidal  $\text{dn}$ , são definidas em termos de  $\text{sn}$  da seguinte maneira:

$$\text{cn}(u; k) \equiv \sqrt{1 - y_1^2} = \sqrt{1 - \text{sn}^2(u; k)} \quad \text{e} \quad \text{dn}(u; k) \equiv \sqrt{1 - k^2 y_1^2} = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(u; k)}.$$

Vemos que estas funções são normalizadas fazendo-se uso de  $\text{sn}(0; k) = 0$ ,  $\text{cn}(0; k) = 1$  e  $\text{dn}(0; k) = 1$ . As funções elípticas de Jacobi são estendidas periodicamente de forma que

$$\text{sn}(u + 4K; k) = \text{sn}(u; k), \quad \text{cn}(u + 4K; k) = \text{cn}(u; k) \quad \text{e} \quad \text{dn}(u + 2K; k) = \text{dn}(u; k).$$

As funções  $\text{cn}(\cdot; k)$  e  $\text{dn}(\cdot; k)$  são pares; a função  $\text{sn}(\cdot; k)$  é ímpar.

Para  $k \in (0, 1)$ , as funções elípticas de Jacobi também satisfazem as seguintes relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sn}^2(u; k) + \text{cn}^2(u; k) = 1, \quad k'^2 \text{sn}^2(u; k) + \text{cn}^2(u; k) = \text{dn}^2(u; k), \\ k^2 \text{sn}^2(u; k) + \text{dn}^2(u; k) = 1, \quad -1 \leq \text{sn}(u; k) \leq 1, \quad -1 \leq \text{cn}(u; k) \leq 1, \\ k'^2 \leq \text{dn}(u; k) \leq 1, \quad \text{sn}(u + 2K; k) = -\text{sn}(u; k) \quad \text{e} \quad \text{cn}(u + 2K; k) = -\text{cn}(u; k). \end{array} \right.$$

Finalmente,

$$\text{sn}(K) = 1, \quad \lim_{k \rightarrow 0^+} \text{sn}(u; k) = \sin(u) \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow 1^-} \text{sn}(u; k) = \tanh(u).$$

## Comentários e Estudos Futuros

Acreditamos que ainda existam vários problemas relacionados a estabilidade orbital a serem estudados. Além disso, as diversas adaptações e melhorias desenvolvidas nos argumentos utilizados, principalmente nos Capítulos 3 e 4, nos motiva a acreditar que vários problemas ainda em abertos possam ser solucionados utilizando-se estas ideias apresentadas.

Um dos problemas que pretendemos estudar é estabelecer um critério variacional para a obtenção de soluções periódicas assim como condições suficientes para a estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas associadas ao sistema de equações do tipo KdV

$$\begin{cases} u_t + f_1(u, v)_x - (\mathcal{M}u)_x = 0 \\ v_t + f_2(u, v)_x - (\mathcal{M}v)_x = 0 \end{cases},$$

onde  $\mathcal{M}$  é tal que  $\widehat{\mathcal{M}u}(\kappa) = \theta(\kappa)\widehat{u}(\kappa)$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $u = u(x, t)$  e  $v = v(x, t)$  são funções periódicas de valores reais e  $f_1$  e  $f_2$  são funções suaves com condições a serem definidas. As ondas periódicas viajantes a serem estudadas serão do tipo  $(u(x, t), v(x, t)) = (\varphi_1(x - \omega t), \varphi_2(x - \omega t))$  onde  $\omega > 0$  designa a velocidade da mesma. Afim de concluirmos o resultado de estabilidade, usaremos uma nova abordagem que tange em definir um novo funcional de Lyapunov para a órbita gerada pela onda periódica. Este funcional de Lyapunov está inteiramente relacionado com o funcional  $V$  definido no Capítulo 4. Nosso objetivo é mostrar que essa determinada classe de sistema de equações sempre possuirá ondas periódicas estáveis em determinadas situações.

Uma outra abordagem que desperta nosso interesse, é aplicar a teoria desenvolvida no Capítulo 4 em equações não lineares dispersivas sem utilizar o fato de que o funcional  $Q(u)$  definido em (4.14) seja necessariamente um funcional conservado. Recentemente, conseguimos obter resultados relevantes nesse sentido e acreditamos que podemos avançar ainda mais nesse caminho.

Por fim, pretendemos melhorar a condição de simplicidade do núcleo do operador linearizado por supor que este subespaço seja apenas finitamente gerado. A condição do núcleo ser simples é talvez a hipótese mais difícil de ser checada na teoria de estabilidade e acreditamos que temos resultados concretos nesta direção.



---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [1] ABDELOUHAB, L.; BONA, J. L.; FELLAND, M.; SAUT, J. C. **Nonlocal Models for Nonlinear Dispersive Waves**. *Physica D*, **40** (1989), pg. 360-392.
- [2] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables**. Dover Publications, New York, 1972.
- [3] ALBERT, J. P. **Dispersion of Low-Energy for the Generalized Benjamin-Bona-Mahoney Equation**. *J. Diff. Equat.*, **63** (1986), pg. 117-134.
- [4] ALBERT, J. P. **Positivity Properties and Stability of Solitary-Wave Solutions of Model Equations for Long Waves**. *Comm. PDE*, **17** (1992), pg. 1-22.
- [5] ALBERT, J. P.; BONA, J. L. **Total Positivity and the Stability of Internal Waves in Fluids of Finite Depth**. *IMA J. Applied Math.*, **46** (1991), pg. 1-19.
- [6] ALVES, G.; NATALI, F.; PASTOR, A. **Sufficient Conditions for Orbital Stability of Periodic Travelling Waves**. Preprint, (2017).
- [7] ANDRADE, T. P. **Equações Dispersivas: Estabilidade Orbital de Ondas Viajantes Periódicas**. Tese de Doutorado, Doutorado em Matemática UNICAMP - Campinas/SP, 2014.
- [8] ANDRADE, T. P.; PASTOR, A. **Orbital Stability of Periodic Traveling-Wave Solutions for the BBM Equation with Fractional Nonlinear Term**. *Phys. D*, **317** (2016), pg. 43-58
- [9] ANGULO, J. **Existence and Stability of Solitary Wave Solutions to Nonlinear Dispersive Evolution Equations**. IMPA Mathematical Publications, 24th Brazilian Mathematics Colloquium, Rio de Janeiro, 2003.
- [10] ANGULO, J. **Nonlinear Stability of Periodic Traveling Wave Solutions to the Schrödinger and the Modified Korteweg-de Vries Equations**. *J. Diff. Equat.*, **235** (2007), pg. 1-30.
- [11] ANGULO, J. **On the Instability of Solitary-Wave Solutions for Fifth-Order Water Wave Models**. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2003** (2003), pg. 1-18.

- [12] ANGULO, J.; BONA, J. L.; SCIALOM, M. **Stability of Cnoidal Waves**. Advances in Differential Equations, **11** (2006), pg. 1321-1374.
- [13] ANGULO, J.; NATALI, F. M. **Positivity Properties of the Fourier Transform and the Stability of Periodic Travelling-Wave Solutions**. SIAM Journal on Mathematical Analysis, **40** (2008), pg. 1123-1151.
- [14] ANGULO, J.; NATALI, F. M. **Stability and Instability of Periodic Travelling Wave Solutions for the Critical Korteweg-de Vries and Nonlinear Schrödinger Equations**. Physica D, **238** (2009), pg. 603-621.
- [15] ANGULO, J.; SCIALOM, J. M.; BANQUET, C. **The Regularized Benjamin-Ono and BBM Equations: Well-posedness and Nonlinear Stability** J. Diff. Equat., **250** (2011), pg. 4011-4036.
- [16] BANQUET BRANGO, C. A. **Existência e Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para Alguns Modelos Dispersivos**. Tese de Doutorado, Doutorado em Matemática UNICAMP - Campinas/SP, 2009.
- [17] BENJAMIN, T.; BONA, J.; MAHONY, J. **Models Equations for Long Waves in Nonlinear Dispersive Systems**. Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A, **272** (1972), pg. 47-78.
- [18] BENJAMIN, T. B. **The Stability of Solitary Waves**. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, **338** (1972), pg. 153-183.
- [19] BIALYNICKI-BIRULA, I. A.; SOWÍŃSKI, T. **Solutions of the Logarithmic Schrödinger Equation in a Rotating Harmonic Trap**. Nonlinear Waves: Classical and Quantum Aspects, F. Kh. Abdullaev and V. V. Konotop (eds.), Kluwer, Amsterdam, 2004, pg. 99-106.
- [20] BONA, J. L. **On the Stability Theory of Solitary Waves**. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, **344** (1975), pg. 363-374.
- [21] BONA, J. L.; SOUGANIDIS, P. E.; STRAUSS, W. A. **Stability and instability of solitary waves of Korteweg-de Vries type**. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, **411** (1987), pg. 395-412.
- [22] BOWMAN, F. **Introduction to Elliptic Functions with Applications**. Dover Publications, New York, 1961.
- [23] BREZIS, H. **Analyse Fonctionnelle - Théorie et Applications**. Dunod, Paris, 2005.
- [24] BREZIS, H.; CAZENAVE, T. **Nonlinear Evolution Equations**. Preprint, 1994.

- [25] BRONSKI, J.; JOHNSON, M. A.; KAPITULA, T. **An Instability Index Theory for Quadratic Pencils and Applications**. *Commun. Math. Phys.*, **327** (2014), pg. 521-550.
- [26] BRIDGES, T. J.; DERKS, G. **Linear Instability of Solitary Wave Solutions of the Kawahara Equation and Its Generalizations**. *SIAM J. Math. Anal.*, **33** (2002), pg. 1356-1378.
- [27] BYRD, P. F.; FRIEDMAN, M. D. **Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists**. 2nd ed., Springer, New York, 1971.
- [28] CARLES, R.; PELINOVSKY, D. **On the Orbital Stability of Solitary Waves in the Log-KDV Equation**. *Nonlinearity*, **27** (2014), pg. 3185-3202.
- [29] CAZENAVE, T. **Semilinear Schrödinger Equation**. American Mathematical Soc., 2003.
- [30] CAZENAVE, T. **Stable Solutions of the Logarithmic Schrödinger Equation**. *Non. Anal. Theory Meth. Appl.*, **7** (1983), pg. 1127-1140.
- [31] CAZENAVE, T.; HARAUX, A. **Équations d'Évolution avec non Linéarité Logarithmique**. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, **2** (1980), pg. 21-51.
- [32] CAZENAVE, T.; LIONS, P. L. **Orbital Stability of Standing Waves for Some Nonlinear Schrödinger Equation**. *Comm. Math. Phys.*, **85** (1982), pg. 549-561.
- [33] CHOW, S.N.; WANG, D. **On the monotonicity of the period function of some second order equations**. *Časopis pro pěstování matematiky*, **111** (1986), pg. 14-25.
- [34] CODDINGTON, E.; LEVINSON, N. **Theory of Ordinary Differential Equations**. MacGraw-Hill, New York, 1955.
- [35] CRISTÓFANI, F. **Estabilidade Orbital de Ondas Solitárias para a Equação de Schrödinger Não-Linear**. Dissertação de Mestrado, UEM, 2014 .
- [36] CRISTÓFANI, F.; NATALI, F.; PASTOR, A. **Periodic Traveling-Wave Solutions for Regularized Dispersive Equations: Sufficient Conditions for Orbital Stability with Applications**. Preprint, (2017).
- [37] DECONINCK, B.; KAPITULA, T. **On the Spectral and Orbital Stability of Spatially Periodic Stationary Solutions of Generalized Korteweg-de Vries Equations**. *Hamilt. Part. Diff. Eq. and Applic.*, **75** (2015), pg. 285-322.
- [38] DEIMLING, K. **Nonlinear Functional Analysis**. Springer-Verlag, 1980.

- [39] DOLBEAULT, J.; GENTIL, I.; JÜNGEL, A. **A Logarithmic fourth-order Parabolic Equation and Related Logarithmic Sobolev Inequalities.** Commun. Math. Sci., **4** (2006), pg. 275-290.
- [40] DUMAS, E.; PELINOVSKY, D. **Justification of the Log-KdV Equation in Granular Chains: The Case of Precompression.** SIAM J. Math. Anal., **46** (2014), pg. 4075-4103.
- [41] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations.** American Mathematical Society, 1998.
- [42] FRANK, R.L.; LENZMANN E. **Uniqueness of non-linear ground states for fractional Laplacians in  $\mathbb{R}$ ,** Acta Math. **210** (2013), pg. 261-318.
- [43] GOMES, A. M. **Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução.** 2nd ed., Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.
- [44] GRILLAKIS, M. **Analysis of the Linearization Around a Critical Point of an Infinite-Dimensional Hamiltonian System.** Commun. Pure Appl. Math. **43** (1990), pg. 299-333.
- [45] GRILLAKIS, M.; SHATAH, J.; STRAUSS, W. **Stability Theory of Solitary Waves in the Presence of Symmetry I.** J. Funct. Anal., **74** (1987), pg. 160-197.
- [46] GRILLAKIS, M.; SHATAH, J.; STRAUSS, W. **Stability Theory of Solitary Waves in the Presence of Symmetry II.** J. Funct. Anal., **94** (1990), pg. 308-348.
- [47] HALE, K. J. **Ordinary Differential Equations,** revised edition. Dover Publications, New York, 1980; Wiley Interscience, New York, 1966.
- [48] HARAGUS, M.; KAPITULA, T. **On the Spectra of Periodic Waves for Infinite-Dimensional Hamiltonian Systems..** Physica D, **237** (2008), pg. 2649-2671.
- [49] HARAGUS, M.; LOMBARDI, E.; SCHEEL, A. **Spectral Stability of Wave Trains in the Kawahara Equation..** J. math. Fluid Mech, **8** (2006), pg. 482-509.
- [50] HU, Y.; LI, X. **Discrete fourier restriction associated with KdV equations.** Anal. PDE, **6** (2013), pg. 859-892
- [51] HUR, V.M.; JOHNSON, M. A. **Stability of Periodic Traveling Waves for Non-linear Dispersive Equations.** SIAM Journal on Mathematical Analysis, **47** (2015), pg. 3528-3554.
- [52] IL'ICHEV, A. T.; SEMENOV, A. Y. **Stability of Solitary Waves in Dispersive Media Described by a Fifth-Order Evolution Equation.** J. Math. Fluid. Mech., **8** (2006), pg. 482-509.

- [53] IÓRIO Jr., R. J.; IÓRIO, V. M. **Fourier Analysis and Partial Differential Equations..** Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001.
- [54] JOHNSON, M. A. **Nonlinear Stability of Periodic Traveling Wave Solutions of the Generalized Korteweg-de Vries Equation.** SIAM Journal on Mathematical Analysis, **41** (2009), pg. 1921-1947.
- [55] KARLIN, S. **Total Positivity.** Standford University Press, 1968.
- [56] KAPITULA, T.; PROMISLOW, K. **Spectral and Dynamical Stability of Nonlinear Waves.** Springer, New York, 2013.
- [57] KATO, T. **Low Regularity Well-Posedness for the Periodic Kawahara Equation.** Diff. Int. Equat., **25** (2012), pg. 1011-1036.
- [58] KATO, T. **Perturbation Theory for Linear Operators.** Springer, 2nd. ed., Berlin, 1976.
- [59] KIPER, A. **Fourier Series Coefficients for Powers of the Jacobian Elliptic Functions.** Math. Comput., **43** (1984), pg. 247-259.
- [60] LEVANDOSKY, S. P. **A Stability Analysis of Fifth-Order Water Wave Models.** Physica D, **125** (1999), pg. 222-240.
- [61] LIONS, J. L. **Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires.** Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [62] MAGNUS, W.; WINKLER, S. **Hill's Equation.** Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, vol. 20, Wiley, New York, 1966.
- [63] NATALI, F. **Propriedades de Positividade e Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas.** Tese de Doutorado, Doutorado em Matemática UNICAMP - Campinas/SP, 2007.
- [64] NATALI, F.; CRISTÓFANI, F.; ANDRADE, T. P. **Orbital Stability of Periodic Traveling Wave Solutions for the Kawahara Equation.** Journal of Mathematical Physics, **58** (2017), pg. 051504.
- [65] NATALI, F.; CRISTÓFANI, F.; PASTOR, A. **Orbital Stability of Periodic Traveling-wave Solutions for the Log-KdV Equation.** J. Diff. Equat., **263** (2017), pg. 2630-2660.
- [66] NATALI, F.; NEVES, A. **Orbital Stability of Periodic Waves.** IMA Journal of Applied Mathematics, **79** (2013), pg.1161-1179.

- [67] NATALI, F.; PASTOR, A. **Stability and Instability of Periodic Standing Wave Solutions of some Klein-Gordon Equations.** J. Math. Anal. Appl., **347** (2008), pg. 428-441.
- [68] NATALI, F.; PASTOR, A. **The Fourth-Order Dispersive Nonlinear Schrödinger Equation.** SIAM J. Appl. Dyn. Sys., **14** (2015), pg. 1326-1347.
- [69] NEVES, A. **Floquet's Theorem and Stability of Periodic Solitary Waves.** J. Dyn. Diff. Equat., **21** (2009), pg. 555-565.
- [70] NEVES, A. **Isoinertial Family of Operators and Convergence of KdV Cnoidal Waves to Solitons.** J. Differ. Equat., **244** (2008), pg. 875-886.
- [71] OBERHETTINGER, F. **Fourier expansions: A collection of formulas.** Academic Press, NY and London, 1973.
- [72] OLIVEIRA, C. R. **Introdução à Análise Funcional.** Publicações Matemáticas do IMPA, Rio de Janeiro, 2001.
- [73] PARKES, E. J.; DUFFY, B. R.; ABBOT, P. C. **The Jacobi Elliptic-Function Method for finding Periodic-Wave Solutions to Nonlinear Evolutions Equations .** Phys. Lett. A., **295** (2002), pg. 280-286.
- [74] PAZY, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.** Springer-Verlag, New York, 1983.
- [75] RAVIART, P. A.; THOMAS, J. M. **Introduction à l'Analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles.** Masson, Paris, 1983.
- [76] STEIN, E. M.; WEISS, G. **Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.** Princeton University, New Jersey, 1970.
- [77] STRAUSS, W. A. **Nonlinear Wave Equations.** Regional Conference Series in Mathematics, Number 73, American Mathematical Society, 1993.
- [78] STANISLAVOVA, M.; STEFANOV, A. **Linear Stability Analysis for Traveling Waves of Second Order in Time PDE's.** Nonlinearity, **25** (2012), pg.2625-2654.
- [79] WEINSTEIN, M. I. **Modulation Stability of Ground States of Nonlinear Schrödinger Equations.** SIAM J. Math, **16** (1985), pg. 472-490.
- [80] WEINSTEIN, M. I. **Lyapunov Stability of Ground States of nonlinear dispersive evolution equations.** Comm. Pure Appl. Math, **39** (1986), pg. 51-67.
- [81] WEINSTEIN, M. I. **Existence and Dynamic Stability of Solitary Wave Solutions of Equations arising in Long Wave Propagation.** SIAM J. Math, **12** (1987), pg. 1133-1173.