

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

Eduardo Michel Vieira Gomes

Rotulamentos de Constelações de Sinais Uniformes e Cadeias de
Particionamentos Ungerboeck Hiperbólicas sobre o Bitoro

Maringá-PR

2017

Eduardo Michel Vieira Gomes

Rotulamentos de Constelações de Sinais Uniformes e Cadeias de
Particionamentos Ungerboeck Hiperbólicas sobre o Bitoro

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Matemática do Departamento de Matemática,
Centro de Ciências Exatas da Universidade Esta-
dual de Maringá, como requisito parcial para ob-
tenção do título de Doutor em Matemática.
Área de concentração: Matemática Aplicada.

Orientador: Dr. Eduardo Brandani da Silva

Maringá-PR

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

G631r Gomes, Eduardo Michel Vieira
Rotulamentos de constelações de sinais uniformes e cadeias de particionamentos Ungerboeck hiperbólicas sobre o bitoro / Eduardo Michel Vieira Gomes-- Maringá, 2017.
83 f. : il. figs., tabs.

Orientador: Prof^o. Dr^o. Eduardo Brandani da Silva.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Matemática Aplicada, 2017.

1. Códigos geometricamente uniformes. 2. Rotulamentos. 3. Geometria hiperbólica. 4. Grupos tiling. 5. Particionamento Ungerboeck. 6. Geometrically uniforme codes. 7. Labeling. 8. Hyperbolic geometry. 9. Tiling groups. 10. Ungerboeck partitions. I. Silva, Eduardo Brandani da, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Matemática Aplicada. IV. Título.



EDUARDO MICHEL VIEIRA GOMES

ATA DE DEFESA DE TESE – Nº. 023 (VINTE E TRÊS) – PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM MATEMÁTICA EM NÍVEL DE DOUTORADO.

**ROTULAMENTOS DE CONSTELAÇÕES DE SINAIS UNIFORMES E CADEIAS DE
PARTICIONAMENTOS UNGERBOECK HIPERBÓLICAS SOBRE O BITORO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Eduardo Brandani da Silva
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Prof. Dr. Marcelo Firer
Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr. Edson Donizete de Carvalho
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – Ilha Solteira

Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Marcelo Escudero Hernandez
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 03 de fevereiro de 2017.

Local de defesa: Auditório Adelbar Sampaio, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

“Cedo ou tarde você vai perceber como eu, que há uma diferença entre conhecer o caminho e percorrer o caminho.” Morpheus, do filme Matrix.

A minha amada esposa Elisângela, pelo seu amor e carinho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por todas as bênçãos concedidas e por me guiar com amor e fé.

A minha atenciosa e leal esposa Elisângela Düsman, pelo seu amor, carinho, paciência e companheirismo. Sem amor verdadeiro a vida não tem sentido.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Eduardo Brandani da Silva, por sua atenção, paciência, orientações e por sempre confiar em mim. Debater os problemas matemáticos com o professor Brandani é sempre um momento de muito entusiasmo e abertura para pensamentos inovadores, é impossível não se apaixonar pela Matemática nestas conversas.

Aos professores Dr. Reginaldo Palazzo Junior, Dr. Marcelo Firer, Dr. Edson Donizete de Carvalho e Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes, por aceitarem o convite de participar da banca examinadora deste trabalho e pelas cuidadosas contribuições para melhorá-lo.

Também aos professores Dr. Ryuichi Fukuoka e Dr. Luciano Panek, pelo apoio.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática, que contribuíram com ensinamentos, atenção e apoio para meu crescimento profissional.

À coordenação e secretaria do PMA, em especial a Lúcia, que sempre me ajudaram e me receberam com muito carinho.

Aos meus colegas de estudo, em especial aqueles que cursaram as disciplinas comigo, pelas inúmeras conversas produtivas (ou não).

E finalmente, aos colegas de trabalho da UTFPR de Francisco Beltrão, que possibilitaram meu afastamento integral para cursar o doutorado.

RESUMO

Neste trabalho são construídos rotulamentos para códigos geometricamente uniformes sobre o bitoro por meio de grupos tiling. Por meio desta abordagem foi possível obter explicitamente ao menos um grupo de rotulamento para cada uma das 11 tesselações existentes sobre o bitoro oriundas de grupos triangulares fuchsianos, além de extensões destes grupos de rótulos, de modo a gerar novos códigos. Mais ainda, são construídas cadeias de particionamento para códigos geometricamente uniformes por grupos de rótulos solúveis, que em alguns casos resultam em particionamentos Ungerboeck hiperbólicos para a superfície.

ABSTRACT

In this work, labels for geometrically uniform codes on the double torus are constructed from the using of Tiling groups. From this approach, it was possible to obtain at least one labeling group for each one of the 11 regular tessellations existing on the double torus using Fuchsian triangular groups. In addition, extensions of these labeling groups are obtained, in order to generate new codes. Moreover, partitioning chains for geometrically uniform codes are constructed by groups of soluble labels and, in some cases, it is obtained hyperbolic Ungerboeck partitions for the surface.

LISTA DE SÍMBOLOS

$(G, *)$: Grupo

$|G|$: Ordem do grupo $(G, *)$

$\langle S \rangle$: Grupo gerado por S

$H \leq G$: H é subgrupo de G

$H \triangleleft G$: H é subgrupo normal de G

G/H : Grupo quociente de G por H

G^* : Grupo tiling

$[G : H]$: Índice de H em G

$G \simeq H$: G e H são isomorfos

$Aut(\cdot)$: Grupo dos automorfismos

$Aut^+(\cdot)$: Grupo dos automorfismos conformes

\times : Produto direto

\rtimes : Produto semi-direto

$d(\cdot, \cdot)$: Distância entre dois pontos

(M, d) : Espaço métrico

$B_\epsilon(x)$: Bola aberta de centro x e raio ϵ

$Stab_\Gamma(x)$: Estabilizador de x em relação a Γ

$\Lambda(\cdot)$: Conjunto limite

$Re(\cdot)$: Parte real

$Im(\cdot)$: Parte imaginária

$|\cdot|$: Norma

\mathbb{H} : Semi-plano hiperbólico

\mathbb{D} : Disco hiperbólico ou disco de Poincaré

$\partial\mathbb{H}, \partial\mathbb{D}$: Fronteira de \mathbb{H} , fronteira de \mathbb{D}

$d_{\mathbb{H}}, d_{\mathbb{D}}$: Distância em \mathbb{H} , distância em \mathbb{D}

$\{p, q\}$: Polígono hiperbólico de p lados com ângulos internos $\frac{2\pi}{q}$

$Area(\cdot)$: Área

$ISO(M)$: Grupo das isometria de M

$ISO^+(M)$: Grupo das isometria de M que preservam orientação

$Möb(\cdot)$: Grupo das transformações de Möbius

$SL(2, \mathbb{R})$: Grupo especial linear

$PSL(2, \mathbb{R})$: Grupo especial linear projetivo

$Nuc(\cdot)$: Núcleo

$\|\cdot\|$ Norma de \mathbb{R}^4

$D(p)$: Região de Dirichlet no ponto p

$Sig(\Gamma)$: Assinatura de um grupo Γ

$(g; -)$: Assinatura do grupo Γ_g

(l, m, n) : Grupo triangular hiperbólico fuchsiano

$[\cdot, \cdot]$: Comutador

$Hom(S)$: Grupo dos homeomorfismos de S

$Hom^+(S)$: Grupo dos homeomorfismos conformes S

P_g : Região fundamental de Γ_g

P_G : Região fundamental do grupo G

$GL(n, q)$: Grupo geral linear de matrizes $n \times n$ sobre um corpo de ordem q

$SL(n, q)$: Grupo especial linear de matrizes $n \times n$ sobre um corpo de ordem q

$D_{p,q,r}$: Grupo metacíclico de ordem pq

LISTA DE TABELAS

2.1	Grupos de Rotulamento G (adaptada de [12])	49
3.1	Densidade do Código	70

LISTA DE FIGURAS

2.1	Diagrama de blocos de um sistema digital (modificado de [22])	30
3.1	Rotulamento por G para $(5, 5, 5)$	51
3.2	Rotulamento por G^* para $(5, 5, 5)$	52
3.3	Rotulamento por G para $(3, 6, 6)$	53
3.4	Rotulamento por G^* para $(3, 6, 6)$	53
3.5	Rotulamento por G para $(2, 8, 8)$	54
3.6	Rotulamento por G^* para $(2, 8, 8)$	55
3.7	Rotulamento por G para $(2, 5, 10)$	56
3.8	Rotulamento por G^* para $(2, 5, 10)$	56
3.9	Rotulamento por G para $(4, 4, 4)$	57
3.10	Rotulamento por G^* para $(4, 4, 4)$	57
3.11	Rotulamento por G para $(2, 6, 6)$	59
3.12	Rotulamento por G^* para $(2, 6, 6)$	59
3.13	Rotulamento por G para $(3, 4, 4)$	60
3.14	Rotulamento por G^* para $(3, 4, 4)$	61
3.15	Rotulamento por G para $(2, 4, 8)$	61
3.16	Rotulamento por G^* para $(2, 4, 8)$	62
3.17	Rotulamento por G para $(2, 4, 6)$	63
3.18	Rotulamento por G^* para $(2, 4, 6)$	64
3.19	Rotulamento por automorfismos conformes do bitoro em um polígono estrelado.	65

3.20	Rotulamento por um grupo de automorfismos do bitoro em um polígono estrelado.	65
3.21	Rotulamento por G para $(3, 3, 4)$	66
3.22	Rotulamento por G^* para $(3, 3, 4)$	67
3.23	Rotulamento por G para $(2, 3, 8)$	68
3.24	Rotulamento por G^* para $(2, 3, 8)$	69
4.1	Part. Hiperbólico Completo com $(2, 6, 6)$	73
4.2	Part. Ungerboeck Hiperbólico com $(2, 8, 8)$	74
4.3	Part. Ungerboeck Hiperbólico com $(4, 4, 4)$	75
4.4	Part. Ungerboeck Hiperbólico com $(2, 4, 8)$	76

SUMÁRIO

Epígrafe	iv
Dedicatória	v
Agradecimentos	vi
Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Símbolos	viii
Lista de Tabelas	x
Lista de Figuras	xi
Introdução	xvii
1 Grupos, Espaços Métricos e Geometria Hiperbólica	1
1.1 Grupos	1
1.2 Espaços Métricos	6
1.3 Modelos para Geometria Hiperbólica	10
1.4 Grupos de Isometrias Hiperbólicas	12
1.5 Regiões Fundamentais	17
1.6 Assinatura de um Grupo Fuchsiano	21

1.7	Conjunto Limite de um Grupo Fuchsiano	24
1.8	Grupos Triangulares	26
2	Códigos Geometricamente Uniformes, Rotulamentos e Grupos Tiling	28
2.1	Sistemas de Comunicação Digital	28
2.2	Códigos Geometricamente Uniformes	30
2.3	Rotulamentos Casados	34
2.4	CGU e Rotulamentos Casados sobre Superfícies e em Espaços Não-Euclidianos	36
2.5	Grupos Tiling	41
3	Rotulamentos de Códigos Geometricamente Uniformes sobre o Bitoro	50
3.1	Rotulamentos por G e G^* Associados com $(5, 5, 5)$	51
3.2	Rotulamentos por G e G^* Associados com $(3, 6, 6)$	52
3.3	Rotulamentos por G e G^* Associados com $(2, 8, 8)$	52
3.4	Rotulamentos por G e G^* Associados com $(2, 5, 10)$	54
3.5	Rotulamentos por G e G^* Associados com $(4, 4, 4)$	55
3.6	Rotulamentos por G e G^* Associados com $(2, 6, 6)$	58
3.7	Rotulamentos por G e G^* Associados com $(3, 4, 4)$	58
3.8	Rotulamentos por G e G^* Associados com $(2, 4, 8)$	60
3.9	Rotulamentos por G e G^* Associados com $(2, 4, 6)$	62
3.10	Rotulamentos por G e G^* Associados com $(3, 3, 4)$	66
3.11	Rotulamentos por G e G^* Associados com $(2, 3, 8)$	67
4	Cadeias de Particionamento Hiperbólicas	71
4.1	Cadeias de Particionamento sobre o Bitoro	71
4.2	Particionamentos Ungerboeck sobre o Bitoro	72
5	Considerações Finais e Perspectivas Futuras	77
5.1	Conclusões	77

5.2 Sugestões para Trabalhos Futuros	78
Referências	78

INTRODUÇÃO

O conceito de códigos geometricamente uniformes (*CGU*) introduzido por Forney em [20] generalizou os códigos reticulados e códigos de grupos de Slepian. Esta nova abordagem, por considerar como grupo gerador o grupo de todas as isometrias do espaço, fez com que essas duas categorias de códigos, que tinham pouco em comum e eram tratadas separadamente até aquele momento, fossem entendidas como parte de uma mesma classe de códigos.

Além de englobar essas duas categorias de códigos, o tratamento dado por Forney estende o processo de particionamento de um conjunto de sinais criado por Ungerboeck, uma técnica que traz ganhos significativos na codificação de sinais e foi o marco inicial da modulação codificada. Mais ainda, estes códigos apresentam boas propriedades de simetria, tais como: todas as regiões de Voronoi são congruentes, os sinais possuem a mesma probabilidade de erro, o perfil de distâncias é o mesmo para cada sinal, entre outras.

Outro conceito importante desenvolvido na mesma época foi o de rotulamento casado, criado por Loeliger. Tal conceito cria uma forma bastante adequada de associar um conjunto de sinais a uma estrutura algébrica apropriada. A motivação principal era a busca de uma certa linearidade para o código. Seu principal resultado foi mostrar que conjuntos de sinais casados a grupos são equivalentes a conjunto de sinais de Slepian [34]. Loeliger demonstrou que, sob certas condições, tais conceitos são equivalentes.

Devido as boas características apresentadas pelos *CGU*, várias pesquisas têm sido desenvolvidas no sentido de fornecer uma fundamentação teórica matemática necessária, e propor generalizações para que tais propriedades possam ser estendidas a uma classe ainda maior de conjuntos de sinais [29], [13], [1], [15], entre outros .

Além disto, trabalhar em ambientes fora do contexto euclidiano tem se mostrado uma

abordagem muito promissora, pois certas propriedades destes espaços podem ser eficazmente exploradas na construção dos códigos.

Por exemplo, conjectura-se que é possível arquitetar códigos corretores de erros mais eficientes, em termos de probabilidade de erro, se estes forem elaborados a partir de variedades bidimensionais com gênero $g \geq 2$, e sabe-se que a geometria inerente de tais superfícies é a geometria hiperbólica [2].

Com relação a construção de tais códigos em superfícies de gênero $g \geq 1$, muitos trabalhos vêm sendo desenvolvidos, contudo esses trabalhos invariavelmente tratam o problema de rotular os CGU enfatizando padrões das regiões fundamentais para superfícies de diferentes gêneros [49], [9], [4], [39], exceção desta abordagem fica por conta do trabalho [15].

O tratamento dado neste caso parte de rotulamentos para CGU sobre o toro, com diferentes formas para sua região fundamental, ou seja, fixa-se o gênero da superfície e considera-se diferentes rotulamentos para várias formas de representar o toro como região planar. O presente trabalho segue esta vertente, fazendo um tratatamento similar para uma superfície compacta de gênero 2.

Porém, em decorrência das inúmeras diferenças entre a geometria Euclidiana (a geometria inerente do toro) e Hiperbólica (a geometria adequada para a construção do bitoro) e suas consequências sobre os padrões geométricos dos reticulados, o trabalho [15] serviu mais como fonte de inspiração e motivação, do que como base para uma generalização, uma vez que as técnicas usadas naquele trabalho não puderam ser usadas neste.

O presente trabalho apresenta rotulamentos para códigos geometricamente uniformes sobre o bitoro por meio de grupos tiling. Por esta abordagem foi possível obter explicitamente ao menos um grupo de rotulamento para cada uma das 11 tesselações existentes sobre o bitoro, oriundas de grupos triangulares fuchsianos. Também são fornecidas extensões destes grupos de rótulos usando involuções de modo a gerar novos códigos.

Além disto, pelo fato dos grupos tiling serem todos solúveis para o bitoro, todas as cadeias de particionamento para códigos geometricamente uniformes são realizadas por grupos de rótulos solúveis, tornando o particionamento mais interessante pois, em cada nível da cadeia, os grupos de rotulamento são abelianos.

Outra característica presente é que, dependendo da cardinalidade do grupo de rótulos e da sua estrutura algébrica, foi possível exibir alguns particionamentos Ungerboeck binários para a constelação de sinais. Desta forma, apresentamos de maneira inédita particionamentos Ungerboeck tanto para a superfície quanto para o disco hiperbólico.

A abordagem proposta para a construção de CGU sobre o bitoro por meio dos grupos tiling e OP-tiling pode ser estendida para superfícies compactas orientáveis de gêneros ainda maiores, fato que ficará claro no decorrer no texto.

O trabalho está dividido da seguinte forma: no capítulo 1, são revisados alguns conceitos fundamentais sobre grupos e espaços métricos. Além disto, são explorados, com especial interesse, alguns modelos de geometria hiperbólica e muitos objetos associados a estes espaços, tais como: polígonos, isometrias, tesselações, grupos triangulares, entre outros.

No capítulo 2, inicialmente é apresentado, de maneira bastante resumida, um sistema de comunicação digital. Na sequência, discorre-se sobre os códigos geometricamente uniformes e rotulamentos casados, os principais objetos de interesse do trabalho. Finalmente, definimos os grupos tiling e OP-tiling, os quais são as ferramentas fundamentais para a construção dos rotulamentos e particionamentos hiperbólicos.

No capítulo 3, apresenta-se a primeira contribuição deste trabalho. São obtidos, de modo explícito, rotulamentos casados entre conjunto de sinais geometricamente uniformes sobre o bitoro e seus respectivos grupos de rótulos. Tais grupos são sempre isomorfos a subgrupos do grupo de automorfismos da superfície. Ressalta-se que, diferentemente dos trabalhos precedentes sobre sobre CGU hiperbólicos, são consideradas regiões fundamentais não regulares para a superfície.

No capítulo 4, tem-se como contribuição, a determinação de cadeias de particionamento Ungerboeck para a superfície e para o disco hiperbólico. Estas cadeias surgem como consequência direta dos rotulamentos obtidos no capítulo anterior.

Finalmente, no capítulo 5, o trabalho encerra-se com a apresentação das conclusões e de algumas sugestões para trabalhos futuros.

Grupos, Espaços Métricos e Geometria Hiperbólica

Com relação a grupos e espaços métricos, por serem assuntos bem conhecidos pela grande maioria dos interessados em teoria dos códigos, a abordagem será bastante sucinta, atendo-se apenas a conceitos e resultados de importância vital para o presente trabalho. Para estudos mais aprofundados sobre estes temas recomenda-se para grupos [7] e [23], enquanto que para espaços métricos recomenda-se [32] e [17].

Sobre geometria hiperbólica, as seções serão apresentadas de forma um pouco mais detalhada. O objetivo é evidenciar aspectos essenciais sobre a teoria, de modo que as ferramentas usadas no trabalho estejam satisfatoriamente bem compreendidas. Para um estudo aprofundado sobre os temas apresentados nestas seções recomenda-se [6], [50], [8] e [25].

1.1 Grupos

O principal objetivo deste trabalho é explicitar rotulamentos casados para certos códigos sobre o bitoro, a superfície compacta orientável de gênero 2. Estes rotulamentos casados serão correspondências biunívocas entre conjuntos finitos de pontos sobre a superfície em questão e determinados grupos. Estes grupos são bastante específicos e originam-se de uma íntima relação entre as estruturas geométricas associadas com eles e com a superfície ambiente.

Deste modo, a estrutura de grupo é a principal estrutura algébrica utilizada neste trabalho. A justificativa para a finitude dos conjuntos de pontos e, conseqüentemente dos grupos, ficará evidente no decorrer do texto.

Definição 1.1. *Sejam G um conjunto não vazio e $*$ uma operação definida sobre G . O par $(G, *)$ é chamado de grupo se as seguintes propriedades estão satisfeitas:*

- i) para todo $a, b \in G$ tem-se que $a * b \in G$ (G é fechado para operação $*$);*
- ii) dados $a, b, c \in G$ então $a * (b * c) = (a * b) * c$ (associatividade);*
- iii) existe um elemento $e \in G$ tal que $e * a = a * e = a$ para todo $a \in G$ (existência do elemento neutro);*
- iv) para cada elemento $a \in G$ existe um único elemento $a' \in G$ tal que $a * a' = a' * a = e$ (existência do inverso de um elemento).*

Eventualmente, nos casos em que a operação considerada estiver claramente subentendida, denotaremos o par $(G, *)$ apenas por G . Além disto, em certas ocasiões usaremos ainda a notação $+$ ou $.$ ao invés de $*$, nestes casos o elemento neutro do grupo e o inverso de um elemento $a \in G$ serão denotados por 0 e 1 ou $-a$ e a^{-1} , respectivamente.

O grupo $(G, *)$ é chamado de abeliano ou comutativo satisfizer a seguinte condição adicional: para todo $a, b \in G$ vale que $a * b = b * a$, caso contrário será chamado de não-abeliano. Se um grupo G tem um número finito de elementos então ele será dito finito e denotaremos sua quantidade de elementos por $|G|$, a qual é chamada de ordem ou cardinalidade de G . Caso contrário, dizemos apenas que G é um grupo infinito.

Diz-se que um subconjunto S de um grupo G é um conjunto de geradores de G se todo elemento de G pode ser escrito como uma composição de elementos de S e seus inversos. Neste caso escrevemos $G = \langle S \rangle$. Se S é finito então $G = \langle S \rangle$ é dito finitamente gerado e se G tem somente um único gerador, então G é chamado de grupo cíclico. Note que um grupo finitamente gerado ou cíclico pode ser finito ou não.

Definição 1.2. *Seja H um subconjunto de um grupo $(G, *)$. Dizemos que H é subgrupo de G se H , munido com a operação do grupo, é também um grupo. Denotaremos esta situação por $H \leq G$.*

Definição 1.3. *Sejam $(G, *)$ um grupo, H um subgrupo de G e a um elemento em G . Os subconjunto $aH = \{a * b : b \in H\}$ e $Ha = \{b * a : b \in H\}$ são chamados de classe lateral à esquerda de H em relação à a e classe lateral à direita de H em relação à a , respectivamente.*

Se o número destas classes laterais à direita ou à esquerda for finito, então existe a mesma quantidade de classes à direita e à esquerda e esta quantidade é chamado de índice de H em G a qual será denotada por $[G : H]$. Se $aH = Ha$ para todo a em G então dizemos que H é subgrupo normal de G e denotaremos este fato por $H \triangleleft G$. Mais ainda, o conjunto $G/H = \{aH : a \in G\}$ munido com a operação $(aH) * (bH) = (a * b)H$ é um grupo, o qual denominamos por grupo quociente de G por H .

Todo grupo G tem como subgrupos triviais ele próprio e $\{e\}$. E em um grupo abeliano todos os seus subgrupos são normais. Se os únicos subgrupos normais de um grupo G são $\{e\}$ e G , então G é dito simples.

Na última seção do próximo capítulo, são apresentados os grupos OP-tiling G e os grupos tiling G^* , ambos com importância fundamental para o trabalho. Os grupos OP-tiling serão obtidos por meio de quocientes entre determinados grupos e um subgrupo normal, bem específico, a todos eles. Além disto, a proposição a seguir é a justificativa para considerar os grupos OP-tiling G como subgrupos normais dos grupos Tiling G^* .

Proposição 1.4. [7] *Sejam G um grupo e $H \leq G$. Se $[G : H] = 2$ então H é subgrupo normal de G .*

O próximo teorema estabelece a relação entre a cardinalidade de um grupo G e a cardinalidade de seus subgrupos no caso em que G é um grupo finito.

Teorema 1.5. (Teorema de Lagrange) [23] *Sejam G um grupo finito e H um subgrupo de G . Então $|G| = |H|[G : H]$. Em particular, a ordem de H e o índice de H em G dividem a ordem de G .*

Definição 1.6. *Sejam $(G_1, *_1)$ e $(G_2, *_2)$ grupos quaisquer e $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ uma aplicação. Dizemos que φ é um homomorfismo de G_1 em G_2 se*

$$\varphi(a *_1 b) = \varphi(a) *_2 \varphi(b),$$

para todo $a, b \in G_1$.

Se existe um homomorfismo entre dois grupos quaisquer, então dizemos que tais grupos são homomorfos entre si. Se a aplicação φ é bijetiva então φ é chamado de isomorfismo de

G_1 em G_2 e, neste caso, dizemos que os grupos G_1 e G_2 são isomorfos entre si e denotamos tal fato por $G_1 \simeq G_2$. Dada uma aplicação $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$, chamamos de núcleo de φ o subconjunto $Nuc(\varphi) = \{a : \varphi(a) = e\}$, onde e representa o elemento neutro de G_2 .

Um isomorfismo de G em G é denominado de um automorfismo de G . O conjunto de todos os automorfismos de um grupo G munido da operação de composição forma um grupo o qual é denominado por o grupo de automorfismo de G e denotado por $Aut(G)$.

Definição 1.7. *Sejam K e Q grupos. Definimos uma extensão de K por Q como sendo um grupo G tal que*

- i) K é um subgrupo normal de G .*
- ii) G/K é isomorfo a Q .*

Dados dois grupos $(G_1, *_1)$ e $(G_2, *_2)$. O grupo $G_1 \times G_2 = \{(a_1 *_1 b_1, a_2 *_2 b_2) : a_i, b_i \in G_i, i = 1, 2\}$ é denominado produto direto de G_1 por G_2 .

Definição 1.8. *Sejam $(G_1, *_1)$ e $(G_2, *_2)$ grupos e $\phi : G_2 \rightarrow Aut(G_1)$ um homomorfismo. O produto semi-direto de G_1 e G_2 , com relação a ϕ , denotado por $G_1 \times_\phi G_2$, é o grupo formado pelos pares (g_1, g_2) tais que $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$ e cuja operação é definida por*

$$(a_1, a_2) \times_\phi (b_1, b_2) = (a_1 *_1 \phi(a_2)(b_1), a_2 *_2 b_2)$$

com $a_i, b_i \in G_i, i = 1, 2$.

O produto semi-direto $G_1 \times_\phi G_2$ é um grupo que, em geral, não é abeliano. Se ϕ é tal que $\phi(g) = e_{Aut(G_1)}$ para todo $g \in G$, então temos o produto direto usual. Em casos em que o homomorfismo ϕ for omitido, denotaremos o produto semi-direto de G_1 por G_2 apenas por $G_1 \times G_2$.

O teorema abaixo dá um modo de obter produtos semi-diretos a partir de subgrupos.

Teorema 1.9. *[7] Sejam H e K subgrupo de G . Suponha que $H \triangleleft G$, $HK = G$ e $H \cap K = \{e\}$. Então G é isomorfo ao produto semi-direto $H \times_\phi K$, onde $\phi : K \rightarrow Aut(H)$ é definido por:*

$$\phi(y)(x) = yxy^{-1}, x \in H, y \in K.$$

Definição 1.10. *Um grupo G é solúvel se existe uma série finita de subgrupos*

$$\{e\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_n = G$$

tais que

- 1) $G_i \triangleleft G_{i+1}$ para $i = 0, \dots, n - 1$,
- 2) G_{i+1}/G_i é abeliano para $i = 0, \dots, n - 1$.

Note que a condição $G_i \triangleleft G_{i+1}$ não implica que $G_i \triangleleft G$.

Os grupos podem ser vistos sob uma forma geral de representá-los. Esta forma bastante útil de visualizá-los é conhecida como apresentação de um grupo. Apesar de existirem questões muito difíceis envolvidas com a apresentação de um grupo, ela é uma maneira bastante prática de escrevê-los, principalmente quando se trata de grupos que estão associados a determinadas figuras geométricas ou superfícies.

Seja S um conjunto finito de k símbolos. Se a é um símbolo de S então introduziremos um outro símbolo a^{-1} e o conjunto formado por tais símbolos denotaremos por S^{-1} .

Agora considere todas as concatenações (justaposição) de símbolos tomados em $S \cup S^{-1}$ sujeito a condição que concatenações da forma aa^{-1} e $a^{-1}a$ são removidas. Estas concatenações de n símbolos são chamadas de palavras de comprimento n . Seja

$$W_n = \{w_n = a_1 \dots a_n : a_i \in S \cup S^{-1}, a_{i\pm 1} \neq a_i^{-1}\}.$$

Denotaremos por e a palavra vazia, isto é, a palavra formada por nenhum símbolo e, por consistência, seja $w_0 = e$.

Dadas duas palavras w_m e w_n , podemos formar uma nova palavra $w_m w_n$ de comprimento no máximo $m + n$ por concatenações, de fato, se $w_m = a_1 \dots a_m$ e $w_n = b_1 \dots b_n$ então

$$w_m w_n = a_1 \dots a_m b_1 \dots b_n.$$

Se $b_1 = a_m^{-1}$ então o termo $a_m b_1$ é eliminado do produto $w_m w_n$ e assim sucessivamente para os termos $a_{m-1} b_2$, $a_{m-2} b_3$ e etc.

Definição 1.11. *Seja S um conjunto finito de k elementos. Definimos*

$$F_k = \bigcup_{n \geq 0} W_n,$$

a coleção de todas as palavras finitas (sujeita a condição que os símbolos a e a^{-1} nunca precedem um ao outro) como sendo o grupo livre sobre k geradores.

Podemos verificar que, de fato, a operação de concatenação está bem definida e que é associativa, existe o elemento neutro de F_k , além de todo elemento admitir um único inverso.

Uma relação é uma palavra que é declarada ser a identidade. Sendo assim, sempre que ocorrer a concatenação de símbolos que formam uma relação, esta cadeia deve ser imediatamente eliminada da palavra. Por meio da introdução de uma relação em F_k é possível obter uma ampla variedade de grupos.

Definição 1.12. *Sejam $S = \{a_1, \dots, a_k\}$ um conjunto finito de símbolos e $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ um conjunto finito de palavras. Definimos o grupo*

$$\Gamma = \langle a_1, a_2, \dots, a_n : w_1 = w_2 = \dots w_m = e \rangle$$

como sendo o conjunto de todas as palavras de símbolos de $S \cup S^{-1}$, sujeito a condição de que concatenações da forma $a^{-1}a$ e aa^{-1} são eliminadas e que ocorrências de concatenações da forma w_1, \dots, w_n também são eliminadas. O grupo Γ é chamado de grupo com geradores $S = \{a_1, \dots, a_k\}$ e relações $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$.

Diz-se que o grupo Γ é finitamente apresentado se pode ser escrito com uma quantidade finita de geradores e relações. Uma expressão de Γ na forma $\langle a_1, a_2, \dots, a_n : w_1 = w_2 = \dots = w_m = e \rangle$ é chamada de uma apresentação de Γ .

1.2 Espaços Métricos

Fundamentalmente, um código é um conjunto discreto formado por elementos de um determinado espaço métrico. Em um espaço métrico é possível calcular distâncias entre seus elementos e, em decorrência deste cálculo, é que obtém-se os principais parâmetros de um

código. Em particular, os códigos geometricamente uniformes são determinados por meio do grupo de isometrias do espaço métrico ambiente do código. Sendo assim, se os grupos são a principal estrutura algébrica relacionada ao trabalho então, os espaços métricos e suas isometrias são os principais entes geométricos.

Definição 1.13. *Dado um conjunto não vazio M , seja $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação. Dizemos que d é uma métrica sobre M se as seguintes condições estão satisfeitas:*

- i) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;*
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$;*
- iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in M$.*

Nestas condições, cada imagem $d(x, y)$ recebe o nome de distância de x a y e o par (M, d) recebe o nome de espaço métrico. Quando não houver ambiguidade diremos apenas espaço métrico M .

Se (M, d) é um espaço métrico, então podemos considerar qualquer subconjunto não vazio $S \subset M$ como um espaço métrico também. Para isto, basta considerar a restrição de d à $S \times S$. Neste caso, a restrição de d é chamada de métrica induzida e S de um subespaço métrico de M .

Definição 1.14. *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) dois espaços métricos. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é denominada de imersão isométrica se*

$$d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y)$$

para todo $x, y \in M$.

Da igualdade acima fica evidente que f é injetiva. Se f for também sobrejetiva então f será chamada de isometria de M em N .

Dado um espaço métrico M , o conjunto de todas as isometrias de M em M formam um grupo sob a operação de composição. Tal grupo será denotado por $ISO(M)$.

Definição 1.15. *Sejam X um conjunto, (M, d) um espaço métrico e $f : X \rightarrow M$ uma aplicação injetiva. Definamos a aplicação*

$$d_f : X \times X \rightarrow \mathbb{R},$$

com

$$d_f(x, y) = d(f(x), f(y)),$$

para todo $x, y \in X$.

A função d_f é uma métrica no conjunto X denominada métrica induzida por f . Esta é a única métrica em X que torna a aplicação f uma imersão isométrica.

Definição 1.16. *Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ um seqüência de pontos de um espaço métrico (M, d) . Diz-se que a seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $x \in M$, e denotamos por $x_n \rightarrow x$ se para todo $\epsilon > 0$ existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_\epsilon$ ocorre que $d(x_n, x) < \epsilon$.*

Seja $x \in M$ e $\epsilon > 0$, o conjunto $B_\epsilon(x) = \{y \in M : d(x, y) < \epsilon\}$ é chamado de bola aberta de centro x e raio ϵ . Dizemos que um subconjunto $Y \subset M$ é aberto se para cada $y \in Y$ existe $\epsilon > 0$ tal que a bola aberta $B_\epsilon(y) = \{z \in M : d(z, y) < \epsilon\}$ está contida em Y . Obviamente as bolas abertas são conjuntos abertos. Um subconjunto Y de M é dito fechado se o seu complementar $M \setminus Y$ é aberto. Qualquer aberto contendo um ponto $x \in M$ é chamado de vizinhança de x .

Diz-se que um ponto x de um subconjunto X de um espaço métrico M é um ponto interior de X se existe uma bola aberta tal que $B_\epsilon(x)$ está contida em X . O conjunto de todos os pontos interiores de um conjunto X é denotado por $\text{int}(X)$.

Definição 1.17. *Sejam M, N dois espaços métricos. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é dita contínua se para cada aberto V de N tem-se que a imagem inversa $f^{-1}(V)$ é um aberto de M .*

Sejam M e N dois espaços métricos, diz-se que uma aplicação bijetiva contínua $f : M \rightarrow N$ é um homeomorfismo se a aplicação inversa f^{-1} é também contínua. Neste caso, diz-se que M e N são homeomorfos.

Uma cobertura de um subconjunto X de um espaço métrico M é uma família de subconjuntos $\mathcal{C} = (C_\beta)_{\beta \in L}$ de M tal que $X \subset \bigcup_{\beta \in L} C_\beta$. Assim, para cada elemento x em X

existe ao menos um índice $\beta \in L$ tal que $x \in C_\beta$. Se existe um subconjunto $L' \subset L$ tal que a família de subconjuntos $\mathcal{C}' = (C_\beta)_{\beta \in L'}$ ainda é uma cobertura para X então esta subfamília \mathcal{C}' é chamada de uma subcobertura de \mathcal{C} .

Uma cobertura em $\mathcal{C} = (C_\beta)_{\beta \in L}$ em que C_β é um aberto de M para todo $\beta \in L$ é chamada de cobertura aberta, e uma cobertura tal que L é finito, é chamada de cobertura finita.

Definição 1.18. *Um espaço métrico M é chamado de compacto se toda cobertura aberta possui uma subcobertura finita.*

Um ponto $x \in M$ é ponto isolado se existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) = \{x\}$ ou seja, não existem outros pontos de M arbitrariamente próximos de x . Um subconjunto de M é chamado discreto se todos os seus pontos são isolados.

Seja X um subconjunto de um espaço métrico M . Diz-se que um ponto y é ponto de acumulação para X se toda vizinhança de y contém pontos de $x \in X$ tal que $y \neq x$. O conjunto de todos os pontos de acumulação de um conjunto X será denotado por $\Lambda(X)$ e chamado de conjunto limite de X .

Sejam Γ um grupo de isometrias de um espaço métrico M e x um ponto de M . A órbita de x com relação a Γ é o conjunto

$$\Gamma(x) = \{\gamma(x) : \gamma \in \Gamma\} \subset M.$$

E o estabilizador de x com relação a Γ é o conjunto

$$Stab_\Gamma(x) = \{\gamma \in \Gamma : \gamma(x) = x\} \subset \Gamma.$$

É fácil provar que $Stab_\Gamma(x)$ é um subgrupo de Γ .

Definição 1.19. *Sejam M um espaço métrico e Γ um grupo de isometrias de M . Então diz-se que Γ age propriamente descontinuamente sobre M se para todo $x \in M$ e para todo subconjunto compacto não vazio $K \subset M$ o conjunto $\{\gamma \in \Gamma : \gamma(x) \in K\}$ é finito.*

Por meio da definição acima é possível caracterizar uma das principais ferramentas deste trabalho, os grupos fuchsianos. Tal caracterização será apresentada na seção 4 deste capítulo.

1.3 Modelos para Geometria Hiperbólica

A geometria hiperbólica pode ser construída de muitas formas diferentes porém, equivalentes. Essas construções são chamadas de modelos da geometria hiperbólica. Destacam-se entre estes modelos o modelo do semi-plano, o modelo do disco de Poincaré e o modelo de Klein. A longo do trabalho usaremos o modelo do semi-plano \mathbb{H} e o modelo do disco de Poincaré \mathbb{D} , também chamado de modelo do disco hiperbólico. O disco \mathbb{D} será o preferido pois algumas figuras são mais facilmente representadas neste modelo e além disto, nele as simetrias de certas regiões podem ser percebidas de forma bem mais simples do que em outros modelos.

Seja \mathbb{C} o plano complexo. Para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$ denotaremos por $Re(z) = x$ e $Im(z) = y$ a parte real e a parte imaginária de um número complexo, respectivamente. Denotaremos por $|z|$ a norma de z dada por $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Definição 1.20. *O semi-plano \mathbb{H} é o conjunto formado pelos números complexos z com parte imaginária positiva, ou seja,*

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}.$$

Definição 1.21. *Um círculo no infinito ou fronteira de \mathbb{H} é definido como sendo o conjunto*

$$\partial\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) = 0\} \cup \{\infty\}.$$

Ou seja, $\partial\mathbb{H}$ é o eixo real unido com um ponto infinito ∞ .

Considere semiplano \mathbb{H} munido da métrica riemanniana

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}.$$

Agora, seja $I = [0, 1]$ e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}$ um caminho diferenciável por partes, $\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{H}$ com $t \in I$. Assim, o comprimento hiperbólico $h(\gamma)$ é dado por

$$h(\gamma) = \int_I \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt = \int_I \frac{\left|\frac{dz}{dt}\right|}{y(t)} dt.$$

A distância hiperbólica $d(z, w)$ entre dois pontos z e $w \in \mathbb{H}$ é definida pela equação $d(z, w) = \inf_{\gamma} \{h(\gamma)\}$, onde ínfimo é tomado sobre todo γ ligando os pontos z e $w \in \mathbb{H}$. Disto, para todo $z, w \in \mathbb{H}$ segue que:

$$d_{\mathbb{H}}(z, w) = \ln\left(\frac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|}\right).$$

Definição 1.22. *O disco*

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

é chamado de *Disco de Poincaré*. O círculo $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ é chamado de *círculo no infinito ou fronteira de \mathbb{D}* .

Considere sobre \mathbb{D} a métrica riemanniana

$$ds = \frac{2\sqrt{dx^2+dy^2}}{1-(x^2+y^2)}.$$

Como antes, seja $I = [0, 1]$ e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{D}$ um caminho diferenciável por partes, $\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t) \in D$ com $t \in I$. Assim, o comprimento hiperbólico é dado por:

$$h(\gamma) = \int_I \frac{2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{1-(x(t)^2+y(t)^2)} dt.$$

A distância hiperbólica $d(z, w)$ entre dois pontos z, w de \mathbb{D} é dada pelo $\inf_{\gamma} \{h(\gamma)\}$, onde o ínfimo é tomado sobre todo γ ligando os pontos z e w em \mathbb{D} . Assim,

$$d_{\mathbb{D}}(z, w) = \ln\left(\frac{|1-z\bar{w}|+|z-w|}{|1-z\bar{w}|-|z-w|}\right).$$

As geodésicas no modelo \mathbb{H} são as retas verticais e o semi-círculos ortogonais ao eixo real. As geodésicas em \mathbb{D} são dadas por diâmetros do disco e por arcos de círculos que encontram $\partial\mathbb{D}$ ortogonalmente. Mais ainda, dados quaisquer dois pontos em \mathbb{H} ou em \mathbb{D} existe uma única geodésica que contém simultaneamente estes dois pontos. Além disto, as medidas de ângulos em \mathbb{D} ou \mathbb{H} são as mesmas que no caso euclidiano.

Sejam $z, w \in \mathbb{D} \cap \partial\mathbb{D}$. Denote por $[z, w]$ a parte da geodésica que conecta z e w . O segmento geodésico $[z, w]$ é chamado de arco ou segmento geodésico hiperbólico entre z e w . Sejam z_1, z_2, \dots, z_p em $\mathbb{D} \cap \partial\mathbb{D}$. Então o polígono hiperbólico P com vértices z_1, z_2, \dots, z_p é a região de \mathbb{D} limitada pelo seguimentos geodésicos $[z_1, z_2], \dots, [z_{n-1}, z_p], [z_p, z_1]$, os quais são chamados de arestas de P . Um polígono de p lados é também chamado de um p -gon.

Se o polígono P tem todos seus ângulos interiores variando entre zero e π , podendo ser igual a zero ou π , então o polígono será chamado de convexo. Um polígono será dito regular se todos seus ângulos internos são iguais entre si e todas suas arestas têm a mesma medida. Os polígonos regulares com p lados, tais que seus ângulos internos sejam todos iguais a $\frac{2\pi}{q}$, com p, q inteiros, serão denotados por $\{p, q\}$.

Eventualmente, alguns dos vértices podem estar sobre $\partial\mathbb{D}$. Vértices com tal propriedade são chamados de vértices ideais. Se todos os vértices de um polígono estão sobre a fronteira $\partial\mathbb{D}$, então o polígono é chamado de polígono ideal. Note que o ângulo interno de um polígono em um vértice ideal é igual a zero, uma vez que as geodésicas de \mathbb{D} encontram $\partial\mathbb{D}$ ortogonalmente.

Teorema 1.23. (Teorema de Gauss-Bonnet para Polígonos Hiperbólicos) [50] *Seja P um p -gon hiperbólico com ângulos internos $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ nos vértices z_1, \dots, z_p , respectivamente. Então a área de P , denotada por $Area(P)$, é dada por*

$$Area(P) = (p - 2)\pi - (\alpha_1 + \dots + \alpha_p).$$

Na geometria euclidiana os ângulos internos de um polígono qualquer não determinam sua área, diferentemente da geometria hiperbólica. Se considerarmos o resultado acima para o caso em que o polígono P é um triângulo, fica claro que a área de um triângulo hiperbólico não é maior que π , sendo exatamente π se o triângulo for ideal.

1.4 Grupos de Isometrias Hiperbólicas

O bitoro, assim como muitas outras superfícies, podem ser vistas como o espaço quociente do espaço métrico hiperbólico por um determinado grupo de isometrias agindo sobre este espaço. Neste sentido, além das isometrias determinarem, por definição, os códigos geometricamente uniformes e seus rótulos, elas desempenham papel fundamental na construção da superfície ambiente do código. Com base nestas informações, fica bem claro o interesse em estudar as características e propriedades dos grupos de isometrias hiperbólicas.

Denotaremos por $ISO(\mathbb{D})$ e $ISO^+(\mathbb{D})$ ($ISO(\mathbb{H})$ e $ISO^+(\mathbb{H})$) o grupo de isometrias em \mathbb{D}

e o grupo de isometrias em \mathbb{D} que preservam orientação (grupo de isometrias em \mathbb{H} e o grupo de isometrias em \mathbb{H} que preservam orientação), respectivamente.

Para compreender de forma intuitiva o significado do termo “preservar orientação” para uma isometria hiperbólica, considere a seguinte situação: tome um triângulo hiperbólico Δ tal que suas arestas estejam orientadas (um vértice é considerado início da aresta e o outro vértice o fim) em algum sentido, digamos, no sentido horário. Se γ é uma isometria hiperbólica então $\gamma(\Delta)$ é também um triângulo hiperbólico. Assim, se $\gamma(\Delta)$ é um triângulo que tem suas arestas também orientadas no sentido horário, então diz-se que γ preserva orientação, caso contrário, se $\gamma(\Delta)$ estiver com orientação em sentido anti-horário, então diz-se que a isometria γ não preserva orientação. Para uma definição rigorosa em um contexto de isometrias hiperbólicas, indica-se [8] e [25], enquanto que para um contexto mais geral, indica-se [19].

O grupo formado pelas transformações do tipo $\gamma : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ da forma

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

onde a, b, c e d são reais tais que $ad - bc > 0$ é chamado de grupo de transformações de Möbius de \mathbb{H} , e é denotado por $Möb(\mathbb{H})$.

O grupo de transformações de Möbius em \mathbb{D} é o grupo formado pelas aplicações do tipo $\gamma : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ com

$$\gamma(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}}$$

onde α e β estão em \mathbb{C} e $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Denota-se este grupo por $Möb(\mathbb{D})$.

Definição 1.24. *O conjunto de matrizes*

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, c, c, d \in \mathbb{R}, \det(A) = ad - bc = 1 \right\}$$

munido com a operação de multiplicação de matrizes é chamado de grupo linear especial de \mathbb{R}^2 .

Com base nas definições anteriores considere a seguinte aplicação:

$$\psi : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Möb}(\mathbb{H})$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

A aplicação ψ é um homomorfismo sobrejetivo de grupos. Além disto, núcleo de ψ é $\text{Nuc}(\psi) = \{\pm I\}$ e, portanto,

$$PSL(2, \mathbb{R}) = \frac{SL(2, \mathbb{R})}{\{\pm I\}} \simeq \text{Möb}(\mathbb{H}).$$

O grupo $PSL(2, \mathbb{R}) = \frac{SL(2, \mathbb{R})}{\{\pm I\}}$, onde I é a matriz identidade, é definido como sendo o grupo topológico especial linear projetivo.

Além disto, é possível estender γ de forma que o domínio seja ampliado para $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$. Para isto, considere $\gamma(\infty) = \infty$ se $c = 0$, $\gamma(-\frac{d}{c}) = \infty$, $\gamma(\infty) = \frac{a}{c}$ se $c \neq 0$ e $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ para os demais pontos de $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$.

Do fato das transformações de $\text{Möb}(\mathbb{H})$ serem isometrias que preservam orientação, tem-se que elas pertencem a $ISO^+(\mathbb{H})$. Destas considerações é possível provar o seguinte resultado:

Proposição 1.25. [25] $PSL(2, \mathbb{R}) \simeq \text{Möb}(\mathbb{H}) = ISO^+(\mathbb{H})$.

Considere também o grupo definido por $PSL^*(2, \mathbb{R}) = \frac{SL^*(2, \mathbb{R})}{\{\pm I\}}$ onde $SL^*(2, \mathbb{R})$ são as matrizes 2×2 reais com determinante igual a ± 1 . Assim, $PSL(2, \mathbb{R})$ pode ser visto como subgrupo com índice 2 de $PSL^*(2, \mathbb{R})$ e tem-se o seguinte resultado.

Proposição 1.26. [25] $ISO(\mathbb{H})$ é isomorfo a $PSL^*(2, \mathbb{R})$.

De modo geral, as isometrias em \mathbb{H} e \mathbb{D} são caracterizadas pelo teorema abaixo.

Teorema 1.27. [8] O grupo de isometrias de \mathbb{H} é exatamente o grupo de aplicações da forma

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \text{ e } z \mapsto \frac{a(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z})+d},$$

onde a, b, c e d são números reais e $ad - bc > 0$.

O grupo de isometrias de \mathbb{D} são as isometrias da forma

$$z \mapsto \frac{az+\bar{c}}{cz+\bar{a}} \text{ e } z \mapsto \frac{a\bar{z}+\bar{c}}{c\bar{z}+\bar{a}},$$

onde $|a|^2 - |c|^2 = 1$.

As transformações de Möbius também preservam ângulos, ou seja, são aplicações conformes.

Proposição 1.28. [50] *Seja γ uma transformação de Möbius de \mathbb{D} tal que $\gamma \neq I$. Assim, uma das três afirmações deve ocorrer:*

- i) γ tem dois pontos fixos em $\partial\mathbb{D}$ e nenhum em \mathbb{D} ;*
- ii) γ tem um ponto fixo em $\partial\mathbb{D}$ e nenhum em \mathbb{D} ;*
- iii) γ não fixa pontos em $\partial\mathbb{D}$ e fixa um ponto em \mathbb{D} .*

Se uma transformação de Möbius tem ao menos três pontos fixos então ela é a identidade (e obviamente fixa todos os pontos). Sendo assim, podemos classificar as transformações de Möbius em três tipos.

Definição 1.29. *Seja $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{D})$. Então γ será dita:*

- i) hiperbólica se tem dois pontos fixos em $\partial\mathbb{D}$ e nenhum em \mathbb{D} ;*
- ii) parabólica se tem um ponto fixo em $\partial\mathbb{D}$ e nenhum em \mathbb{D} ;*
- iii) elíptica se não fixa pontos em $\partial\mathbb{D}$ e fixa um ponto em \mathbb{D} .*

Uma transformação de Möbius $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ de \mathbb{H} é dita normalizada se $ad-bc = 1$. E uma transformação $\gamma(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\beta z+\bar{\alpha}}$ de \mathbb{D} é dita normalizada se $|\alpha|^2+|\beta|^2 = 1$. Sejam $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{Möb}(\mathbb{H})$, diz-se que γ_1 e γ_2 são conjugadas, se existe uma outra transformação $g \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ tal que $\gamma_1 = g^{-1}\gamma_2g$. De modo análogo, define-se conjugação em $\text{Möb}(\mathbb{D})$.

Definição 1.30. *Seja $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ na forma $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ onde $ad-bc = 1$. Defina-se $\tau(\gamma) = (a+d)^2$ como o traço de γ . Se $\gamma(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\beta z+\bar{\alpha}}$ de \mathbb{D} é normalizada então defina-se como seu traço o valor $\tau(\gamma) = (\alpha + \bar{\alpha})^2$.*

De acordo com o resultado a seguir, para classificar as transformações de Möbius de forma bastante prática podemos usar o traço da transformação.

Proposição 1.31. [50] *Seja $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{D})$ tal que $\gamma \neq I$. Então:*

- i) γ é parabólica se, e somente se, $\tau(\gamma) = 4$;
- ii) γ é elíptica se, e somente se, $\tau(\gamma) \in [0, 4)$;
- iii) γ é hiperbólica se, e somente se, $\tau(\gamma) \in (4, \infty)$.

Além disto, sabe-se que se γ_1 e γ_2 são transformações de Möbius conjugadas entre si, então $\tau(\gamma_1) = \tau(\gamma_2)$. Disto, pode-se provar os seguintes resultados:

Proposição 1.32. [50] *Seja $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{D}) \setminus \{I\}$. Então são equivalentes:*

- i) γ é parabólica;
- ii) $\tau(\gamma) = 4$;
- iii) γ é conjugada com uma translação;
- iv) γ é conjugada ou a uma translação $z \mapsto z+1$ ou conjugada a uma translação $z \mapsto z-1$.

São equivalentes ainda:

- v) γ é hiperbólica;
- vi) $\tau(\gamma) > 4$;
- vii) γ é conjugada ou a uma dilatação, isto é, γ é conjugada a uma transformação de Möbius do tipo $z \mapsto kz$, $k > 0$.

E além disto, também são equivalentes as afirmações:

- viii) γ é elíptica;
- ix) $\tau(\gamma) \in [0, 4)$;
- x) γ é conjugada a uma rotação $z \mapsto e^{i\theta}z$, $\theta \in (0, 2\pi)$.

$ISO(\mathbb{H})$ além de grupo, pode ser visto também como um espaço métrico. Para isto, basta considerar sobre $ISO(\mathbb{H})$ a métrica de \mathbb{R}^4 da seguinte maneira:

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \min\{\|(a_1, b_1, c_1, d_1) - (a_2, b_2, c_2, d_2)\|, \|(a_1, b_1, c_1, d_1) - (-a_2, -b_2, -c_2, -d_2)\|\}$$

onde $\gamma_1 = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$, $\gamma_2 = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2} \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ e $\|\cdot\|$ é a norma de \mathbb{R}^4 .

O espaço métrico $ISO(\mathbb{D})$ pode ser definido de maneira análoga. Obviamente, as métricas de $ISO(\mathbb{H})$ e $ISO(\mathbb{D})$ são herdadas pelos subgrupos de isometrias $\text{Möb}(\mathbb{H})$ e $\text{Möb}(\mathbb{D})$, respectivamente.

Definição 1.33. *Um grupo fuchsiano é um subgrupo discreto de $\text{Möb}(\mathbb{D})$ (ou $\text{Möb}(\mathbb{H})$).*

Proposição 1.34. [8] *Seja Γ um subgrupo de $M\ddot{o}b(\mathbb{D})$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) Γ é um subgrupo discreto de $M\ddot{o}b(\mathbb{D})$, isto é, é um grupo fuchsiano;*
- ii) a identidade de Γ é um elemento isolado;*
- iii) Para cada $z \in \mathbb{D}$, a órbita $\Gamma(z)$ é um subconjunto discreto de \mathbb{D} .*

Definições análogas e os mesmos resultados são válidos para o modelo hiperbólico do semi-plano \mathbb{H} . O próximo resultado é uma importante caracterização de grupos fuchsianos.

Teorema 1.35. [25] *Seja Γ um subgrupo de $M\ddot{o}b(\mathbb{D})$. Então Γ é um grupo fuchsiano se, e somente se, Γ age propriamente e descontinuamente sobre \mathbb{D} .*

Proposição 1.36. [25] *Dado $z \in \mathbb{D}$, se Γ é um grupo fuchsiano, então $\Gamma(z)$ não tem pontos de acumulação em \mathbb{D} .*

Ou seja, o resultado anterior garante que se $\Gamma(z)$ tem pontos de acumulação, eles necessariamente estarão na fronteira $\partial\mathbb{D}$. Na seção 1.7 serão estudadas as características do conjunto formado pelos pontos de acumulação de $\Gamma(z)$ e sua relação com o grupo Γ .

1.5 Regiões Fundamentais

Definição 1.37. *Seja Γ um grupo fuchsiano. Uma região fundamental F para Γ é um conjunto fechado com interior não vazio de \mathbb{D} tal que:*

- i) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) = \mathbb{D}$,*
- ii) $\gamma_1(int(F)) \cap \gamma_2(int(F)) = \emptyset$ se $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma, \gamma_1 \neq \gamma_2$.*

Neste caso, dizemos que as imagens de F tessalam \mathbb{D} sob a ação de Γ . A coleção $\{\gamma(F) : \gamma \in \Gamma\}$ é chamada de tesselação ou reticulado de \mathbb{D} .

Uma tesselação de \mathbb{D} é na verdade uma partição de \mathbb{D} . Se esta partição é feita por polígonos, então estes polígonos se interceptam somente em arestas e vértices. Ainda, se a partição é feita por polígonos regulares da forma $\{p, q\}$ tem-se que em cada vértice da tesselação existe o encontro de q p -gons. Denotaremos este último tipo de tesselação por $\{p, q\}$. A tesselação dual de $\{p, q\}$ é a tesselação $\{q, p\}$.

No plano euclidiano existem somente três tipos de tesselações regulares, elas são determinadas por quadrados, hexágonos regulares e triângulos equiláteros, denotadas respectivamente por $\{4, 4\}$, $\{6, 3\}$ e $\{3, 6\}$. Estes pares são determinados pela solução da equação $(p - 2)(q - 2) = 4$. No caso do disco hiperbólico, as tesselações $\{p, q\}$ são as soluções para a desigualdade $(p - 2)(q - 2) > 4$, que são infinitas. Assim, conclui-se que para \mathbb{D} existem infinitas tesselações do tipo $\{p, q\}$. Estes resultados decorrem diretamente do teorema de Gauss-Bonnet.

Um grupo fuchsiano pode ter regiões fundamentais de formatos diferentes porém o resultado abaixo diz que sua área é um invariante numérico.

Proposição 1.38. [25] *Sejam F_1 e F_2 duas regiões fundamentais para um grupo fuchsiano Γ com $Area(F_1) < \infty$. Então $Area(F_1) = Area(F_2)$.*

O próximo resultado estabelece uma relação entre as regiões fundamentais de grupos fuchsianos com as regiões fundamentais de seus subgrupos.

Proposição 1.39. [25] *Seja Γ um grupo fuchsiano e suponha que $\Gamma_1 \leq \Gamma$ com índice n . Seja*

$$\Gamma = \Gamma_1\gamma_1 \cup \Gamma_2\gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_n\gamma_n$$

a decomposição de Γ em classe laterais de Γ_1 . Seja F uma região fundamental de Γ . Então:

- i) $F_1 = \Gamma_1\gamma_1(F) \cup \Gamma_2\gamma_2(F) \dots \Gamma_n\gamma_n(F)$ é a região fundamental de Γ_1 .*
- ii) Se $Area(F)$ é finita então $Area(F_1) = nArea(F)$.*

Existem muitas formas para se determinar a região fundamental de um grupo fuchsiano. No presente trabalho, destacaremos o método que determina as chamadas regiões de Dirichlet ou polígono de Dirichlet.

Lema 1.40. [50] *Se Γ é um grupo fuchsiano então existe $p \in \mathbb{D}$ que não é fixo por nenhum elemento não trivial de Γ , isto é, $\gamma(p) \neq p$ para todo $\gamma \in \Gamma \setminus \{I\}$.*

O processo de construção de uma região de Dirichlet para um grupo fuchsiano segue os seguintes passos:

- i) Escolha $p \in \mathbb{D}$ tal que $\gamma(p) \neq p$ para todo $\gamma \in \Gamma \setminus \{I\}$.*
- ii) Para dado $\gamma \in \Gamma \setminus \{I\}$ construa o segmento de geodésica $[p, \gamma(p)]$.*

iii) Tome o bissetor perpendicular $L_p(\gamma)$ de $[p, \gamma(p)]$.

iv) Determine o semi-plano $H_p(\gamma)$ determinado por $L_p(\gamma)$ que contém p . O semi-plano $H_p(\gamma)$ é formado por todos os pontos de $z \in \mathbb{D}$ que estão mais próximos de p do que de $\gamma(p)$.

v) Finalmente construa $D(p)$ com

$$D(p) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma \setminus \{I\}} H_p(\gamma).$$

Teorema 1.41. [50] *Sejam Γ um grupo fuchsiano e $p \in D$ um ponto que não é fixo por nenhum elemento não trivial de Γ . Então a região de Dirichlet $D(p)$ é uma região fundamental para Γ . Mais ainda, se $\text{Area}(D(p)) < \infty$, então $D(p)$ é um polígono hiperbólico convexo e, em particular, tem finitos lados.*

Um grupo fuchsiano, que tem um polígono hiperbólico convexo com um número finito de lados como sua região de Dirichlet, é chamado de geometricamente finito. Nestes casos, faz sentido referir-se a $D(p)$ como um polígono porém, vale ressaltar que alguns destes lados ou vértices podem estar sobre $\partial\mathbb{D}$. Claramente um polígono com um número finito de lados também tem um número finito de vértices.

Além disto, $D(p)$ depende da escolha de p . Escolhas diferentes de p podem acarretar em diferentes características para $D(p)$ como, por exemplo, um número diferente de lados.

Seja Γ um grupo fuchsiano e seja $D(p)$ um polígono de Dirichlet contido em \mathbb{D} para Γ com uma orientação em seus lados. Suponha que $D(p)$ tem um número finito de lados. Seja s um lado de $D(p)$. Suponha ainda que existe $\gamma \in \Gamma \setminus \{I\}$ tal que $\gamma(s)$ também seja lado de $D(p)$ (note que, neste caso, γ^{-1} também está em $\Gamma \setminus \{I\}$ e γ^{-1} transforma $\gamma(s)$ em s). Nestas condições, diz-se que os lados s e $\gamma(s)$ lados são emparelhados (ou pareados) e que γ é uma transformação de emparelhamento (ou pareamento) de lados. É fácil notar que esta aplicação associa vértices com vértices e lados com lados da região fundamental.

Considere que este processo se aplique a todos os lados da região fundamental de Γ . Tome, juntamente com o processo anterior, uma aplicação $*$ que associa um par (v, s) a um par $(v, *s)$ onde s e $*s$ são os lados que tem v como vértice em comum. Munidos destas aplicações, é possível criar um conjunto de vértices associados e também um conjunto de lados associados entre si. A sequência de vértices associados é chamado de ciclo de vértices ou ciclo elíptico. As transformações de Γ associadas entre si é chamada de ciclo de transformações

ou ciclo elíptico de transformações. Note que, o resultado de um ciclo de transformações é a transformação resultante da composição das transformações presentes no ciclo.

Tendo o polígono um número finito de lados e vértices está claro que existem finitos ciclos elípticos e finitos cíclicos elípticos de transformações.

Proposição 1.42. [8] *Seja Γ um grupo fuchsiano e seja $\gamma \in \Gamma$ um elemento elíptico. Então existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $\gamma^m = I$.*

Cada vértice v de um polígono tem trivialmente associado a si um ângulo interno α_v .

Proposição 1.43. [8] *Seja Γ um grupo fuchsiano com um polígono de Dirichlet D com todos os vértices em \mathbb{D} . Suponha que $\varepsilon = v_0v_1\dots v_{n-1}$ com $v_n = v_0$ seja um ciclo elíptico com ângulos internos associados $\alpha_{v_0}, \dots, \alpha_{v_{n-1}}$. Então existe um número inteiro $m_\varepsilon \geq 1$ tal que*

$$m_\varepsilon \text{soma}(\varepsilon) = 2\pi,$$

onde $\text{soma}(\varepsilon) = \alpha_{v_0} + \dots + \alpha_{v_{n-1}}$.

Diz-se que um ciclo elíptico ε satisfaz a condição do ciclo elíptico se existe um inteiro $m \geq 1$, que depende de ε tal que $m \text{soma}(\varepsilon) = 2\pi$.

A seguir, finalizamos esta seção com o impressionante teorema de Poincaré.

Teorema 1.44. (Teorema de Poincaré) [8] *Seja D um polígono hiperbólico convexo com um número finito de lados. Suponha que todos os vértices estejam em \mathbb{D} e que D esteja equipado com uma coleção \mathcal{G} de transformações de Möbius que emparelham os lados. Suponha também que os ciclos elípticos $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ de D satisfazem a condição do ciclo elíptico, isto é, para cada ε_i existe $m_i \geq 1$ tal que $m_i \text{soma}(\varepsilon_i) = 2\pi$. Então:*

- i) O grupo $\Gamma = \langle \mathcal{G} \rangle$ é um grupo fuchsiano.*
- ii) O grupo Γ tem D como região fundamental.*
- iii) O grupo Γ pode ser apresentado em termos de geradores e relações na forma*

$$\Gamma = \langle \gamma_s \in \mathcal{G} : \gamma_1^{m_1} = \dots = \gamma_n^{m_n} = e \rangle.$$

onde γ_i é a transformação ciclo elíptico associada a ε_i .

O teorema de Poincaré estabelece de forma precisa a relação entre uma região fundamental de um grupo fuchsiano e os geradores deste grupo, além de exibir uma apresentação com geradores e relações pra ele. Percebe-se que as isometrias responsáveis pelos emparelhamentos dos lados de um polígono de Dirichlet são exatamente os geradores do grupo.

Definição 1.45. *Um n -gon com lados rotulados, onde cada rótulo aparece no máximo duas vezes, possivelmente com expoente “-1” é chamado de polígono não orientável se as palavras geradas pelo emparelhamento de lados são da forma ...a...a... para pelo menos um rótulo. É chamado polígono orientável caso contrário.*

Desta definição e da representação de superfícies por polígonos, obtemos a definição de superfícies orientáveis e não orientáveis.

Definição 1.46. *Uma superfície é dita orientável (não orientável) se o polígono associado é orientável (não orientável).*

1.6 Assinatura de um Grupo Fuchsiano

Seja Γ um grupo fuchsiano com um polígono de Dirichlet D com área finita em \mathbb{D} . Nestas condições, é possível construir um espaço $\mathbb{D} \setminus \Gamma$ que, grosseiramente falando, é resultado da “colagem” dos lados que são associados pelas transformações de emparelhamento de D . Este espaço é chamado de espaço quociente, espaço de identificação ou orbifold. Um caso bastante conhecido, que exemplifica esta situação, é o caso em que um quadrado no plano euclidiano pode ser identificado como um toro.

Este espaço de identificação será exatamente a superfície ambiente dos códigos estudados neste trabalho, o bitoro. A assinatura de um grupo fuchsiano é uma quantidade de informações geométricas da superfície $\mathbb{D} \setminus \Gamma$ minimamente suficientes para que certas características de Γ e, conseqüentemente de D , possam ser determinadas.

Seja ε um ciclo de D . Todos os vértices sobre este ciclo elíptico são associados entre si e a soma dos ângulos associados a estes vértices, $soma(\varepsilon)$, pode ser ou não igual a 2π . Se $\mathbb{D} \setminus \Gamma$ é exatamente 2π então chamamos este ciclo de acidental. Se $soma(\varepsilon) \neq 2\pi$ então o

ciclo elíptico resulta em ponto sobre $\mathbb{D} \setminus \Gamma$ com ângulo total menor que 2π . Este ponto é chamado de ponto marcado. Estes pontos são como “quinas” na superfície $\mathbb{D} \setminus \Gamma$.

No caso em que o ciclo de vértices é um ciclo parabólico, o ponto formado sobre a superfície é uma cúspide no infinito. Se $\mathbb{D} \setminus \Gamma$ não tem pontos marcados, então ela é uma superfície hiperbólica.

Um importante invariante topológico para uma superfície é a característica de Euler. Dada uma região compacta K , podemos tesselar essa região com um número finito de cópias de um certo polígono. Define-se como a característica de Euler de K , o número

$$\chi(K) = V - E + F,$$

onde V, E e F denotam o número de vértices, arestas e faces da tesselação, respectivamente.

Outro importante invariante topológico da superfície é o seu gênero, o qual denotaremos por g . Tal invariante pode ser determinado pela característica de Euler e, para superfícies orientáveis, a equação é dada por

$$\chi(K) = 2 - 2g,$$

onde g é um inteiro maior ou igual a zero.

Intuitivamente, o gênero de uma superfície pode ser entendido como o número de “buracos” que existem através da superfície.

Definição 1.47. *Um grupo fuchsiano Γ é chamado de cocompacto se o espaço quociente $\mathbb{D} \setminus \Gamma$ é compacto.*

Proposição 1.48. *[25] Um grupo fuchsiano Γ é cocompacto se, e somente se, Γ tem polígono de Dirichlet D com um número finito de lados, todos em \mathbb{D} .*

Os grupos fuchsianos também podem ser classificados em aritméticos ou não aritméticos. Chamamos de aritmético todo subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$ com coeficientes inteiros e também os subgrupos de índice finito destes subgrupos. Para uma definição via álgebra de quatérnios e resultados importantes ver [25].

A assinatura de um grupo cocompacto Γ é um conjunto de dados geométricos suficientes para construir Γ como um grupo abstrato.

Definição 1.49. *Sejam Γ um grupo fuchsiano cocompacto e g o gênero da superfície $\mathbb{D} \setminus \Gamma$. Suponha que existam k ciclos elípticos $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ e que ε_i tem ordem m_i . Considere que $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ são não acidentais e que $\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_k$ são acidentais. A assinatura de Γ é definida como*

$$\text{sig}(\Gamma) = (g; m_1, \dots, m_r).$$

Se todos os ciclos são acidentais então a assinatura é dada na forma $\text{sig}(\Gamma) = (g; -)$.

A proposição a seguir determina que é possível calcular a área de um polígono de Dirichlet de um grupo fuchsiano cocompacto Γ por meio de sua assinatura.

Proposição 1.50. *[8] Sejam Γ um grupo fuchsiano cocompacto de assinatura $\text{sig}(\Gamma) = (g; m_1, \dots, m_r)$ e D uma região fundamental para Γ . Então*

$$\text{Area}(D) = 2\pi \left((2g - 2) + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \right).$$

O próximo resultado estabelece as condições sobre os parâmetros para que uma dada assinatura tenha associada a si um grupo fuchsiano cocompacto.

Teorema 1.51. *[8] Seja $g \geq 0$ e $m_i \geq 2$ com $1 \leq i \leq r$ inteiros. Se $r = 0$, então assumimos que não existem m'_i s. Suponha que*

$$\left((2g - 2) + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \right) > 0.$$

Então existe um grupo fuchsiano cocompacto Γ com assinatura

$$\text{sig}(\Gamma) = (g; m_1, \dots, m_r).$$

Em particular, para cada $g \geq 2$ existe um grupo fuchsiano Γ_g com assinatura $(g; -)$. Ou seja, para cada $g \geq 2$ pode-se encontrar um grupo fuchsiano Γ_g tal que $\mathbb{D} \setminus \Gamma_g$ é um toro de gênero g .

O caso de interesse do trabalho é o caso em que Γ é um grupo fuchsiano cocompacto de assinatura $(2; -)$. Assim, a área de qualquer região fundamental de Γ é exatamente 4π .

Na próxima seção, explicitaremos um limitante inferior e um superior para a quantidade de lados de um polígono de Dirichlet de um grupo fuchsiano cocompacto de assinatura qualquer. Em especial, destacaremos o caso em que Γ tem assinatura $(2; -)$.

1.7 Conjunto Limite de um Grupo Fuchsiano

Sejam Γ um grupo fuchsiano agindo sobre o disco de Poincaré \mathbb{D} e $z \in \mathbb{D}$. Denotaremos por $\Lambda(\Gamma)(z)$ o conjunto formado pelos pontos de acumulação de $\Gamma(z)$ em $\mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$. Note que, pela proposição 1.36 da seção anterior $\Lambda(\Gamma)(z) \subset \partial\mathbb{D}$.

É possível mostrar que dados $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ então $\Lambda(\Gamma)(z_1) = \Lambda(\Gamma)(z_2)$. Logo, faz sentido em considerar o conjunto dos pontos de acumulação de um grupo fuchsiano independentemente do ponto z .

Definição 1.52. *Seja Γ um grupo fuchsiano agindo sobre o disco de Poincaré \mathbb{D} . Defina-se como o conjunto dos pontos de acumulação $\Lambda(\Gamma)$ de Γ como sendo o conjunto $\Lambda(\Gamma)(z)$ para qualquer $z \in \mathbb{D}$.*

Diz-se que dois grupos fuchsianos Γ_1 e Γ_2 são conjugados entre si se existe $g \in \text{Möb}(\mathbb{D})$ tal que

$$\Gamma_2 = g^{-1}\Gamma_1g = \{g^{-1}\gamma_1g^{-1} : \gamma_1 \in \Gamma_1\}.$$

Se dois grupos fuchsianos são conjugados entre si, então seus conjuntos de pontos de acumulação tem a mesma cardinalidade. Além disto, $\Lambda(\Gamma)$ é subconjunto fechado (e neste caso, compacto) de $\partial\mathbb{D}$. Mais ainda, $\gamma(\Lambda(\Gamma)) = \Lambda(\Gamma)$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Na verdade, $\Lambda(\Gamma)$ é o “menor” subconjunto Γ -invariante em $\partial\mathbb{D}$, no sentido que, se $C \subset \partial\mathbb{D}$ é Γ -invariante então $\Lambda(\Gamma) \subset C$.

Proposição 1.53. [25] *Sejam Γ um grupo fuchsiano e $\Lambda(\Gamma)$ seu conjunto de pontos de acumulação. Então $\Lambda(\Gamma)$ tem 0, 1, 2 ou infinitos elementos.*

Um grupo fuchsiano Γ é elementar se $\Lambda(\Gamma)$ tem uma quantidade finita de elementos. Caso contrário, diz-se que Γ é não elementar.

Teorema 1.54. [25] *Seja Γ um grupo fuchsiano não elementar. Então uma das duas igualdades deve ocorrer:*

i) $\Lambda(\Gamma) = \partial\mathbb{D}$ ou

ii) $\Lambda(\Gamma)$ é um subconjunto de $\partial\mathbb{D}$ perfeito e denso em parte alguma (ou seja, é um conjunto de Cantor).

Com base no resultado anterior os grupos fuchsianos são classificados da seguinte forma:

Definição 1.55. *Seja Γ um grupo fuchsiano. Diz-se que Γ é um grupo fuchsiano do primeiro tipo de $\Lambda(\Gamma) = \partial\mathbb{D}$. Caso contrário, Γ é dito do segundo tipo.*

Proposição 1.56. *[25] Seja Γ um grupo geometricamente finito e do primeiro tipo. Então Γ tem uma região fundamental de área hiperbólica finita.*

A recíproca deste resultado é válida mesmo sem a hipótese de que Γ é geometricamente finito.

Proposição 1.57. *[25] Seja Γ um grupo fuchsiano não elementar. Suponha que exista uma região fundamental com área hiperbólica finita para Γ . Então Γ é do primeiro tipo.*

O resultado abaixo fornece limitantes inferior e superior para o número de lados de um polígono fundamental para determinados grupos fuchsianos.

Teorema 1.58. *[8] Seja Γ um grupo fuchsiano finitamente gerado do primeiro tipo e seja D um polígono convexo que serve de região fundamental para Γ . Suponha que D tenha N lados (e nenhum lado seja pareado consigo mesmo).*

i) Se G tem assinatura $(g; m_1, \dots, m_n)$ com a possibilidade de $n = 0$, então

$$N \leq 12g + 4n - 6$$

O limite superior é atingido pela região de Dirichlet com centro p para quase todas as escolhas de p .

ii) Se Γ tem assinatura $(g; -)$, então $N \geq 4g$ e este valor é atingido para algum D .

iii) Se Γ tem assinatura $(g; m_1, \dots, m_n)$, $n > 0$, então

$$N \geq 4g + 2n - 2$$

e este valor é atingido para algum D .

Se Γ tem assinatura $(2; -)$ então $8 \leq N \leq 18$. Mas neste caso, necessariamente tem-se que $Area(D) = 4\pi$ e, portanto, os únicos polígonos regulares que servem de região fundamental para Γ são $\{8, 8\}$, $\{10, 5\}$, $\{12, 4\}$ e $\{18, 3\}$.

1.8 Grupos Triangulares

As considerações sobre grupos triângulos expressas nesta seção são feitas de forma restrita a casos de isometrias em espaços hiperbólicos, com especial atenção aos grupos que preservam orientação. Para estudos mais gerais sobre este tema recomenda-se [16], [19] e [35].

Sejam $\sigma_p, \sigma_q, \sigma_r$ as reflexões nos lados de um triângulo hiperbólico Δ_0 com ângulos $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}$ e $\frac{\pi}{r}$. As imagens de Δ_0 sob a ação de distintos elementos do grupo $(p, q, r)^*$, o grupo gerado por $\sigma_p, \sigma_q, \sigma_r$, tessela \mathbb{D} sem sobreposições ou lacunas. O grupo $(p, q, r)^*$ tem apresentação:

$$\langle \sigma_p, \sigma_q, \sigma_r : \sigma_p^2 = \sigma_q^2 = \sigma_r^2 = (\sigma_p \sigma_q)^r = (\sigma_p \sigma_r)^q = (\sigma_q \sigma_r)^p = 1 \rangle$$

A definição de grupo triângulo pode ser considerada bem mais geral do que esta apresentada anteriormente. A definição usada acima está feita desta forma para se adequar aos propósitos do trabalho.

De modo geral, um grupo triângulo é um grupo do tipo (α, β, γ) gerado pelas reflexões em torno dos lados de um triângulo com ângulos internos α, β e γ . Impondo certas condições sobre os ângulos, estes grupos podem assumir um contexto de geometria euclidiana, esférica ou hiperbólica.

O grupo triângulo $(p, q, r)^*$ possui um subgrupo de índice 2 formado apenas por isometrias que preservam orientação, o qual denotaremos por (p, q, r) . Tal grupo tem apresentação:

$$\langle a, b : a^r = b^p = (ab)^q = 1 \rangle$$

onde a, b são $\sigma_p \sigma_q, \sigma_q \sigma_r$, respectivamente.

Está claro que (p, q, r) é subgrupo normal de $(p, q, r)^*$.

Proposição 1.59. [8] *Um grupo G é um grupo triângulo (p, q, r) se, e somente se, é um grupo discreto do primeiro tipo com assinatura $(0; p, q, r)$.*

Os grupos triângulos são importantes ferramentas para o desenvolvimento deste trabalho. Em resumo, o problema será restrito a se de determinar tesselações triangulares sobre uma região fundamental D para um grupo de assinatura $(2; -)$. Tais tesselações triangulares estão

associadas aos seus respectivos grupos triângulos os quais, para nosso intuito, devem conter o grupo de assinatura $(2; -)$ como subgrupo normal uma vez que, os grupos de rotulamentos pretendidos são os grupos oriundos do quociente $(p, q, r)/\Gamma_2$ sendo Γ_2 justamente o grupo com assinatura $(2; -)$.

Note que D tessela o disco de Poincaré e que Δ , a região fundamental do grupo triângulo (p, q, r) , além de tesselar \mathbb{D} também tessela D . Como o grupo Γ_2 associa os lados de D gerando desta forma o bitoro, a sub-tesselação triangular de D também é transformada em uma tesselação porém, desta vez, sobre a superfície $\mathbb{D} \setminus \Gamma_2$.

Ao determinarmos os grupos quocientes $\frac{(p,q,r)}{\Gamma_2}$ estamos criando grupos que, de alguma forma, estão associados a tesselações triangulares sobre a superfície.

Neste ponto, surgem muitas perguntas importantes: para quais grupos triangulares o grupo Γ_2 pode ser visto como subgrupo normal? Para os casos que existe normalidade, como determinar os grupos quocientes? Uma vez determinados tais grupos quocientes, qual a relação deles como a tesselação triangular sobre o bitoro?

Todas estas perguntas serão devidamente respondidas na seção sobre grupos tiling do capítulo 2. Ficará evidente que, ao responder tais perguntas, naturalmente chegamos ao objetivo do trabalho que é rotular constelações geometricamente uniformes sobre o bitoro. Porém, para que isto realmente faça um sentido, faz-se necessária a leitura do capítulo a seguir no qual definiremos os Códigos Geometricamente Uniformes e rotulamentos casados, os principais objetos de interesse do trabalho.

Códigos Geometricamente Uniformes, Rotulamentos e Grupos Tiling

Este capítulo está dividido da seguinte forma: inicialmente são definidas algumas noções elementares sobre um sistema de comunicação digital. Em seguida, são apresentados os conceitos de códigos geometricamente uniformes e rotulamentos casados em um contexto geral e, em sequência, são apresentados os principais resultados que envolvem estes dois temas no contexto de geometria hiperbólica e superfícies compactas. Finalmente, o capítulo encerra-se com as definições e propriedades dos grupos tiling e OP-tiling. Tais grupos contém as respostas para as perguntas levantadas no final do capítulo 1, bem como sua interpretação geométrica é a solução para exibir os rotulamentos casados pretendidos.

2.1 Sistemas de Comunicação Digital

Nesta seção é apresentado de forma bastante resumida o modelo tradicional de um sistema de comunicação digital. Um estudo mais detalhado sobre este tema aparece em [22].

Fundamentalmente, comunicação envolve transmitir uma informação de um lugar até outro através de um processo. Primeiro é gerada uma mensagem que pode ser sonora ou uma imagem, por exemplo. A mensagem é descrita com uma certa medida de precisão por um conjunto de símbolos que podem ser, por exemplo, elétricos, visuais ou sonoros. Estes símbolos são adequadamente codificados para transmissão por um meio físico de interesse. A partir deste ponto, a transmissão dos símbolos codificados é feita para o destinatário e daí, são realizadas a decodificação e reprodução dos símbolos originais. Finalmente, a mensagem

original é recriada com possíveis perturbações ocasionada pelas imperfeições do sistema.

Além dos distúrbios ocasionados pelas imperfeições do sistema, o ruído e as interferências de outros sinais (provenientes de outras fontes de informação) também são adicionados ao canal, fazendo com que a mensagem recebida seja uma versão corrompida da mensagem original.

Os sistemas de comunicação podem ser divididos basicamente em dois tipos: analógico ou digital. Em um sistema analógico a informação é transmitida por meio de sinais elétricos, magnéticos ou eletromagnéticos, que variam em amplitude, frequência, fase e tempo. No sistema digital a informação é enviada por uma sequência de mensagens discretas por meio de sinais elétricos, magnéticos, eletromagnéticos ou luminosos, que variam em amplitude, frequência, fase e em intervalos fixos de tempo.

Em 1948 os fundamentos teóricos da comunicação digital foram criados por Claude Shannon em um artigo intitulado “A Mathematical Theory of Communication”. Shannon demonstrou, entre outros resultados, a possibilidade de se transmitir informação com probabilidade de erro tão baixa quanto se queira, sem sacrificar a taxa de transmissão. Este resultado é conhecido teorema da codificação de canal [22].

Uma descrição resumida de um sistema de comunicação digital pode ser representado pelo digrama mostrado na figura 2.1.

Uma fonte de informação pode ser caracterizada em termos do sinal que a informação carrega. Um sinal é definido como o valor que uma função (que tem o tempo como variável independente) assume em determinado instante do tempo. Uma fonte que emite mensagens que não dependem das mensagens anteriores é chamada de fonte sem memória.

O codificador de fonte remove informações redundantes da mensagem da fonte e é responsável pelo uso eficiente do canal. Ele associa as saídas da fonte a sequências de símbolos chamadas de palavras-código de fonte. O codificador de canal, por sua vez, transforma a palavra-código de fonte em uma outra sequência de símbolos chamada de palavra-código de canal. A função do codificador de canal é acrescentar redundâncias à palavra-código de fonte tornando-a, desta forma, uma palavra mais longa que a primeira.

Finalmente, o modulador representa cada símbolo da palavra-código de canal por um

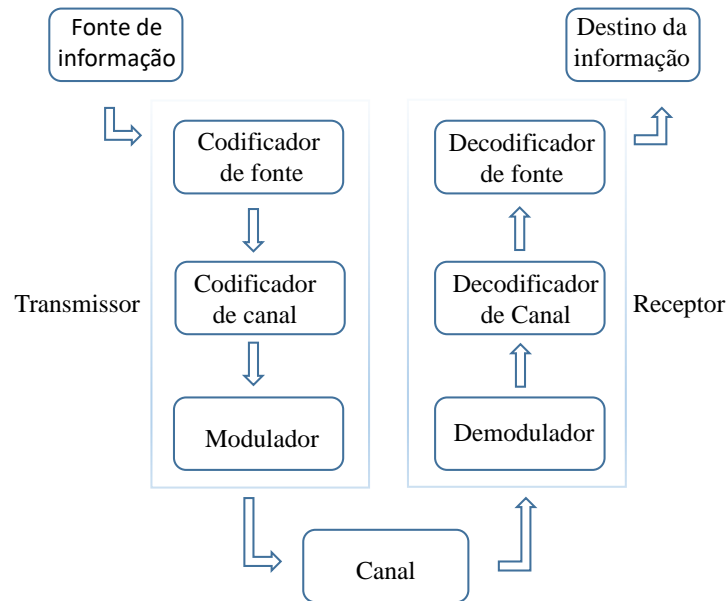


Figura 2.1: Diagrama de blocos de um sistema digital (modificado de [22])

correspondente símbolo analógico, apropriadamente selecionado de um conjunto finito de símbolos analógicos. A sequência de símbolos analógicos criadas pelo modulador é chamada de forma de onda, a qual é transmitida através do canal em um sinal contínuo com duração de um intervalo de tempo.

O decodificador de canal e o decodificador de fonte tem a função inversa dos seus respectivos codificadores.

2.2 Códigos Geometricamente Uniformes

O conceito de códigos geometricamente uniformes (*CGU*) introduzido por Forney [20] generalizou os códigos reticulados e códigos de grupos de Slepian. Esta nova abordagem, por considerar como grupo gerador o grupo de todas as isometrias do espaço, fez com que essas duas categorias de códigos que tinham pouco em comum e eram tratadas separadamente até aquele momento, fossem entendidas como parte de uma mesma classe de códigos.

Além de englobar essas duas categorias de códigos, o tratamento dado por Forney estende o processo de particionamento de conjunto de sinais criado por Ungerboeck, uma técnica que traz ganhos significativos na codificação de sinais e foi o marco inicial da modulação codificada. Mais ainda, estes códigos apresentam boas propriedades de simetria, tais como: todas as regiões de Voronoi são congruentes, os sinais possuem a mesma probabilidade de erro, o perfil de distâncias é o mesmo para cada sinal, entre outras.

Originalmente os códigos *CGU* foram propostos em contexto euclidiano porém, no presente trabalho, as considerações sobre tais códigos serão tomadas sobre um espaço métrico qualquer. Este tratamento já foi proposto em outros trabalhos, tais como [21] e [15], entre outros.

Um código é qualquer subconjunto não vazio C de um espaço métrico M . Se além disto, C for discreto, então ele será chamado de conjunto de sinais.

Definição 2.1. [20] *Um conjunto de sinais C é geometricamente uniforme se, dados quaisquer dois pontos x e y em C , existe uma isometria $u_{xy} : M \rightarrow M$ que transforma x em y enquanto $u_{xy}(C) = C$.*

Em outras palavras, C é geometricamente uniforme se a ação de seu grupo de simetrias $\Gamma(C)$ sobre C é transitiva, ou, se a órbita de qualquer ponto x_0 em C sobre a ação de $\Gamma(C)$ é C .

Um conjunto de sinais C geometricamente uniforme finito é chamado de constelação uniforme e se for infinito é chamado de reticulado uniforme.

Definição 2.2. [20] *Dado um conjunto de sinais C , um subgrupo $U(C)$ de $\Gamma(C)$ é um grupo gerador de C , se $C = \{u(x_0), u \in U(C)\}$ para um x_0 fixo. Além disto, $U(C)$ é minimal na geração de C se a aplicação $m : U(C) \rightarrow C$ definida por $m(u) = u(x_0)$ é injetiva (e portanto, bijetiva).*

A aplicação m induz em C a estrutura de grupo de $U(C)$, e por isto m pode ser considerada um isomorfismo entre grupos.

Observação 2.3. *Nem todo código geometricamente uniforme tem gerador minimal [43]. Além disto, se um grupo gerador minimal existe não necessariamente ele é único, ou seja,*

existem códigos geometricamente uniformes que admitem mais de um gerador minimal que não são isomorfos entre si [20].

Sejam C um conjunto de sinais geometricamente uniforme com um grupo gerador $U(C)$ e $U'(C) \triangleleft U(C)$. Se C é órbita de x_0 sob a ação de $U(C)$ então as órbitas de x_0 geradas pelas classes laterais de $U'(C)$ são subconjuntos disjuntos de C tal que a união destes subconjuntos formam C , ou seja, são uma partição de C .

Denote a órbita de x_0 sob ação de $U'(C)$ por C' e, a partição induzida por $U'(C)$ em C , denote por C/C' . Formalmente, tem-se que:

Definição 2.4. [20] *Uma partição geometricamente uniforme C/C' é uma partição de um conjunto de sinais geometricamente uniforme C com um grupo gerador $U(C)$ que é induzido por um subgrupo normal $U'(C)$ de $U(C)$. Os elementos da partição C/C' são subconjuntos de C que correspondem as classes laterais de $U'(C)$ em $U(C)$.*

Usa-se, frequentemente, a notação $U(C')$ para indicar $U'(C)$.

Teorema 2.5. [20] *Seja C/C' uma partição geometricamente uniforme. Então os subconjuntos de C na partição são geometricamente uniformes, mutuamente congruentes e tem $U'(C)$ como grupo gerador em comum.*

O teorema anterior pode ser estendido se $U(C)/U(C')/U(C'')/\dots$ é uma cadeia de partições de grupos, neste caso, existe cadeia correspondente $C/C'/C''/\dots$ de partições geometricamente uniformes, a qual em cada nível os subconjuntos são geometricamente uniformes, mutuamente congruentes e tem o mesmo grupo gerador em comum.

Um grupo de rótulos para uma partição geometricamente uniforme C/C' é um grupo que é isomorfo ao grupo quociente $U(C)/U(C')$, onde $U(C)$ e $U(C')$ são os grupos geradores de C e C' , respectivamente.

Definição 2.6. [20] *Seja G um grupo de rótulos para uma partição $U(C)/U(C')$. Um rotulamento isométrico é uma aplicação injetiva $m : G \rightarrow C/C'$ obtida pela composição do isomorfismo entre G e $U(C)/U(C')$ e a aplicação injetiva induzida por m à $U(C)/U(C')$ em C/C' .*

Proposição 2.7. [20] *Uma partição C/C' admite um rotulamento isométrico por um grupo G se:*

- 1) C é geometricamente uniforme,
- 2) seus subconjuntos são geometricamente uniformes e mutuamente congruentes e
- 3) existem grupos de isometrias $U(C)$ e $U(C')$ tais que $U(C)$ é grupo gerador de C , $U(C')$ é grupo gerador comum dos subconjuntos de C , normal em $U(C)$ e G é isomorfo a $U(C)/U(C')$.

Proposição 2.8. *Os grupos triângulos (l, m, n) induzem reticulados geometricamente uniformes em \mathbb{D} .*

Demonstração: *Seja (l, m, n) um grupo triângulo que tem uma região fundamental $T \in \mathbb{D}$. Considere como ponto inicial $x_0 \in \mathbb{D}$ o centro da região T . Agora denote por C o conjunto de sinais gerados pela ação do grupo (l, m, n) em x_0 , isto é, $C = \{\gamma(x_0) : \gamma \in (l, m, n)\}$. Com base nestas considerações, é certo que C é um conjunto de sinais geometricamente uniforme infinito. Esta afirmação decorre diretamente do fato de que (l, m, n) tessela \mathbb{D} .*

Note que, neste caso, C é um reticulado uniforme que tem (l, m, n) como gerador minimal.

Denote por Γ_2 um grupo de assinatura de $(2; -)$. Suponha que Γ_2 seja subgrupo normal de (l, m, n) com índice finito n . Neste caso, é possível associar n regiões congruentes a T , geradas pela tesselação de (l, m, n) em \mathbb{D} , de modo que a união destas n regiões sub-tesselem D , uma região fundamental para Γ_2 .

Como a ação do grupo Γ_2 sobre D é uma tesselação do disco \mathbb{D} , temos que estas regiões, que são imagens de D pela ação de Γ_2 , são mutuamente congruentes entre si. Além disto, os subconjuntos que tem como gerador comum o grupo Γ_2 são geometricamente uniformes.

Assim, a partição C/C' admite um rotulamento isométrico G , onde G é um grupo isomorfo a $(l, m, n)/\Gamma_2$.

2.3 Rotulamentos Casados

Outro conceito importante desenvolvido na mesma época que os *CGU* foi o de rotulamento casado, criado por Loeliger [34]. Tal conceito cria uma forma bastante adequada de associar um conjunto de sinais a uma estrutura algébrica apropriada. A motivação principal era a busca de uma certa linearidade para o código. Seu principal resultado foi mostrar que conjuntos de sinais casados a grupos são equivalentes a conjuntos de sinais de Slepian [34]. O autor demonstrou que, sob certas condições, tais conceitos são equivalentes.

A proposta original, apresentada por Loeliger, foi realizada para espaços métricos euclidianos porém, assim como na seção anterior, as considerações serão tomadas em relação a um espaço métrico qualquer. Tal abordagem já foi realizada em outros trabalhos tais como [13], [21], [1], entre outros.

Definição 2.9. [34] *Um conjunto de sinais C de (M, d) é casado a um grupo (G, \cdot) se existe uma aplicação sobrejetiva m de G em C tal que, para todo g e h em G ,*

$$d(m(g), m(h)) = d(m(g^{-1} \cdot h), m(e)),$$

onde e denota o elemento neutro de G . Uma aplicação m satisfazendo esta condição é chamada de aplicação casada. Se, além disto, m for injetiva então m^{-1} é chamada de rotulamento casado.

Lema 2.10. [34] *Sejam m uma aplicação tal que o conjunto de sinais C de (M, d) esteja casado a um grupo G e $x_e = m(e)$. Se $H = m^{-1}(x_e)$ então H é um subgrupo de G e, além disto, $m(g) = m(g') \Leftrightarrow gH = g'H$ para quaisquer g, g' em G . Ou seja, g e g' estão na mesma classe lateral à esquerda de H em relação à G .*

Proposição 2.11. [34] *Se C está casado a um grupo G e H é subgrupo normal de G , então C está casado a G/H .*

Definição 2.12. [34] *Sejam m uma aplicação que torna C um conjunto de sinais casado a um grupo G e H definido como no lema anterior. Então diz-se que a aplicação m é efetivamente casada se H não contém subgrupos normais não triviais de G . Neste caso, diz-se que C e G são efetivamente casados.*

Teorema 2.13. [34] *Sejam G e C casados por meio da aplicação m e H definido como no lema anterior. Então C está efetivamente casado ao grupo quociente G/N onde N é o maior subgrupo normal de G contido em H .*

Teorema 2.14. [34] *Se o conjunto de sinais C de M está casado com G e $f : C \rightarrow f(C)$ é uma isometria, então $f(C)$ também está casado com G .*

Proposição 2.15. [34] *Um conjunto de sinais C é casado a um grupo G via aplicação casada $m : G \rightarrow C$ se, e somente se, G é homomorfo a um subgrupo transitivo de $\Gamma(C)$, o grupo de simetrias de C .*

Corolário 2.16. *Existe um rotulamento casado entre o conjunto de sinais C e o grupo G se, e somente se, G é isomorfo a um subgrupo transitivo de $\Gamma(C)$.*

Com base neste último resultado, é possível notar que, se C é um conjunto de sinais geometricamente uniforme com gerador minimal $U(C)$ então C e o grupo $U(C)$ são casados. A recíproca também é verdadeira, ou seja, se m^{-1} é um rotulamento casado de C em G então o conjunto de sinais C é geometricamente uniforme com gerador minimal $U(C) \simeq G$.

No contexto de grupos triangulares (l, m, n) e grupos de assinatura $(2; -)$, temos a seguinte análise: se C é o conjunto de sinais da forma $C = \{\gamma(x_0) : \gamma \in \Gamma\}$ com x_0 fixo, então o grupo triangular (l, m, n) é um grupo gerador minimal para C e portanto, pelo corolário 2.16, (l, m, n) e C são casados. Se o grupo Γ_2 com assinatura $(2; -)$ é subgrupo normal de (l, m, n) então, pela proposição 2.11, C é também está casado com $(l, m, n)/\Gamma_2$.

Mais ainda, como Γ_2 tessela \mathbb{D} , sabe-se que o bitoro surge do colapso de \mathbb{D} na região D , a região fundamental de Γ_2 . Logo, o conjunto de sinais C de \mathbb{D} passa a ser representado por um conjunto finito que pode ser visto simultaneamente em D e no bitoro e, conseqüentemente, este conjunto finito sobre a superfície também está casado com o grupo $(l, m, n)/\Gamma_2$.

Em resumo, a partição criada em C por Γ_2 admite um rotulamento casado por $(l, m, n)/\Gamma_2$ e, os representantes desta partição de C , podem ser escolhidos adequadamente de modo que estejam contidos na região D .

Corolário 2.17. [34] *Se um conjunto de sinais C está efetivamente casado a um grupo G , então G é isomorfo a um subgrupo transitivo de $\Gamma(C)$.*

A recíproca deste resultado não é verdadeira [34]. Um contra-exemplo pode ser encontrado em [28].

2.4 CGU e Rotulamentos Casados sobre Superfícies e em Espaços Não-Euclidianos

Devido as boas características apresentadas pelos *CGU*, várias pesquisas têm sido desenvolvidas no sentido de fornecer uma fundamentação teórica matemática necessária e de propor generalizações para que tais propriedades possam ser estendidas a uma classe ainda maior de conjuntos de sinais, como pode ser visto em [3], [14],[29], [15], entre outros. Além disto, trabalhar em ambientes fora do contexto euclidiano tem se mostrado uma abordagem muito promissora, pois certas propriedades destes espaços podem ser eficazmente exploradas na construção de códigos.

Esta seção apresenta um breve histórico dos resultados obtidos nos estudos sobre *CGU* em espaços hiperbólicos.

Em [14], conjecturou-se que é possível arquitetar códigos corretores de erros mais eficientes, em termos de probabilidade de erro, se estes forem elaborados a partir de variedades bidimensionais com gênero $g \geq 2$, e sabe-se que a geometria inerente de tais superfícies é a geometria hiperbólica.

Quanto ao estudo de *CGU* com métrica, nem euclidiana e nem hiperbólica, tem-se alguns trabalhos, tais como, [21], [5] e [15]. Eles abordam *CGU* com a métrica de Hamming e Lee nos dois primeiros e métrica de grafo no último.

No ambiente hiperbólico, o estudo de códigos foi iniciado em [41] e [42]. Nestes trabalhos, constelações *PAM*, *PSK* e *QAM*-circulares em espaços hiperbólicos tiveram seus desempenhos comparados com suas versões equivalentes do caso euclidiano. Para que tal análise fosse possível, vários conceitos foram introduzidos com destaque para a criação de uma função de densidade de probabilidade gaussiana para o plano hiperbólico e a caracterização do ruído de um canal gaussiano hiperbólico por meio das isometrias hiperbólicas do plano.

Em [1] foi desenvolvido um limitante superior para a probabilidade de erro no espaço

hiperbólico. Também foi mostrado que a comparação entre constelações equivalentes em espaço euclidianos e hiperbólicos, quanto ao desempenho da probabilidade de erros, poderia ser feita por meios computacionais.

Com base em [41] foi estabelecida em [28] e [29] uma teoria de códigos geometricamente uniformes para espaços hiperbólicos. Nestes trabalhos ficou evidente que, pelo fato do grupos de translações hiperbólicas não serem comutativas, a utilização de subgrupos normais destes grupos de translações seria uma alternativa viável no estudo de *CGU* hiperbólicos. Além disto, foram obtidos alguns subgrupos normais de $(2, 8, 8)^*$ trabalhando-se com a tesselação $\{8, 8\}$. Análises desta tesselação associadas a subgrupos normais de $(2, 8, 8)^*$ também aparecem em [1] e [30].

Em [13], estudou-se códigos corretores de erros a partir de códigos geometricamente uniformes. Tais códigos foram relacionados com p -Grupos e com certos elementos de um corpo de Galois. Especificamente para *CGU* hiperbólicos, a estrutura algébrica associada para a geração de códigos corretores de erros foi extraída por identificar os sinais com determinados elementos de uma ordem dos quatérnios.

Novamente em [1], foram obtidas famílias de constelações, algumas delas sem uniformidade geométrica, sobre superfícies compactas e não-compactas. Com respeito as superfícies não compactas verificou-se que os códigos são infinitos e se comportam de forma semelhante aos reticulados obtidos por grupos cristalográficos no plano euclidiano. Com relação aos g -toros, analisou-se o grupo triangular $(4, 4, 2g)^*$, mostrando que ele gera um código geometricamente uniforme sobre a superfície, e que seu índice no grupo Γ_g de assinatura $(g; -)$ é $8g$. Contudo, o grupo de rótulos não foi determinado e, conseqüentemente, o rotulamento casado também não.

O grupo de rótulos isomorfo a $(4, 4, 2g)/\Gamma_g$ foi explicitado somente em [30]. Foi verificado que se tratava do grupo $D_{8g} \times \Gamma_2$, onde D_{8g} é o grupo diedral de ordem $8g$ (o grupo de rótulos foi exibido em [28] para o caso $g = 2$). Porém, novamente o rotulamento isométrico não foi explicitado. Os resultados destes quocientes são discutidos detalhadamente do ponto de vista puramente matemático em [19].

Com relação as abordagens para gerar rotulamentos associados com superfícies compactas

em espaços hiperbólicos, a maioria dos trabalhos concentram-se em determinar os grupos de translações que tessalam, \mathbb{D} ou \mathbb{H} , agindo sobre um polígono regular que seja região fundamental para uma determinada superfície.

Como o conjunto de sinais considerados são os centros destas regiões fundamentais, o conjunto de sinais está, essencialmente em \mathbb{D} ou \mathbb{H} e não sobre a superfície pois, nestas condições, tem-se sobre a superfície exatamente um único ponto do conjunto de sinais.

Assim, para exibir os rotulamentos de conjunto de sinais que de fato estejam inteiramente sobre uma determinada superfície é necessário, antes de mais nada, conhecer grupos que tenham como subgrupos normais o grupo associado a esta superfície. Daí, os grupos de rótulos são exibidos calculando-se os grupos quocientes.

Os grupos de rótulos com as características descritas no parágrafo acima, ou seja, oriundos de tais quocientes, são exibidos de forma esporádica e, em quase todas as ocasiões que isso ocorre, é feito para um determinado grupo que, invariavelmente, está em função do gênero da superfície, como nos casos [1], [30] e [28], ou em função de um parâmetro como no caso [49].

Uma abordagem para *CGU* hiperbólicos usando teoria de grafos pode ser encontrada em [33]. Por meio do mergulho de grafos associados a um canal sem memória em superfícies, determinou-se algumas estruturas algébricas relacionadas a estes canais. Este trabalho também foi baseado no uso de tesselações por polígonos regulares.

Ainda com teoria de grafos, em [39] são obtidos *CGU* derivados de grafos sobre quocientes de inteiros e de ordens dos quatérnios. Quanto aos casos hiperbólicos, estes são os oriundos de quocientes de ordens dos quatérnios. O trabalho é enfatizado nos padrões geométricos das tesselações e assume como o grupo de rotulamento as isometrias de emparelhamentos de lados. Esta é a única estrutura de grupo associada as tesselações.

Tem-se em [9], seguindo em uma vertente semelhante a [39], reticulados hiperbólicos usando a identificação de grupo fuchsianos com ordens maximais dos quatérnios. Foi proposto ainda, um algoritmo para construir grupos fuchsianos associados a g -toros tendo como uma região fundamental um polígono regular.

O trabalho [44] apresenta um modelagem hiperbólica para linhas de transmissão usando

o semi-plano direito como modelo hiperbólico. Além disto, são construídas constelações regulares no plano hiperbólico do tipo $\{12g - 6, 3\}$ onde $g \geq 2$ é o gênero de um g -toro. Mais ainda, são calculados o número de pontos para constelações estudadas. Cálculos de contagem similares para o número de sinais de uma constelação já apareciam em [41].

Em [49] o objetivo é criar reticulados (tesselações) a partir de grupos fuchsianos aritméticos derivados de álgebras de divisão de quatérnios sobre um corpo. Esta abordagem segue, em linhas gerais, o tratamento utilizados em [13]. O trabalho também apresenta explicitamente as isometrias de emparelhamento de arestas para vários tipos de regiões fundamentais e gêneros de superfícies para um parâmetro λ criado pelo o autor.

Gusmão em [14] mostrou, entre outros resultados, que a curvatura de um espaço de sinais tem influência sobre um sistema de comunicações e que, espaços com curvatura negativa constante são os que apresentam melhor desempenho quanto a probabilidade média de erro.

Na referência [4] são apresentados todos os resultados possíveis para emparelhamentos de lados de polígonos que tenham número de lados variando entre 3 e 8. Estes emparelhamentos podem resultar em esfera, faixa de Möbius, Garrafa de Klein, Plano Projetivo, Toro ou Bitoro. Para que um bitoro seja gerado é necessário que o polígono tenha no mínimo 8 lados e, neste caso, existem somente quatro emparelhamentos possíveis (a menos de equivalências por rotações) que resultam em tal superfície.

O resultado anterior e mais todos os possíveis emparelhamentos para que um polígono regular gere um bitoro aparecem de forma completa em [24] e [37]. Com base neles, é possível saber que, além dos 4 possíveis emparelhamentos para o bitoro oriundos de $\{8, 8\}$, existem 6, 6 e 8 emparelhamentos para os polígonos $\{10, 5\}$, $\{12, 4\}$ e $\{18, 3\}$, respectivamente.

Em [31] apresentou-se um modo de criar tesselações do plano hiperbólico a partir da relação entre frações contínuas e tesselações de Farey. O trabalho apresenta ainda dois novos códigos para compactação de fontes, um código de árvore e um código de bloco.

Os primeiros trabalhos a enfatizarem diferentes tipo de tesselação sobre uma superfície foram [2] e [3], neles estudou-se códigos quânticos topológicos. Tais códigos foram construídos sobre g -toros com $2 \leq g \leq 5$, obtendo-se versões dos códigos de Kitaev para o ambiente hiperbólico. O estudo também apresentou, todas as possíveis tesselações regulares que podem

ser obtidas sobre um g -toro para os casos g considerados no trabalho. No caso do bitoro, são 18 não triviais e 4 triviais.

Resumidamente, pode-se dizer que, a partir das considerações anteriores, todos os trabalhos trazem grande contribuição para a teoria de códigos em ambientes hiperbólicos ou superfícies compactas. Em se tratando especificamente de *CGU*, ocorre que quase todos os trabalhos estão fortemente focados em emparelhamentos dos lados de um polígono como o grupo de rótulos e ainda, aqueles que tratam de superfícies compactas, consideram como região fundamental um polígono regular. Quase sempre, os padrões dos grupos de rótulos são dados em função do gênero da superfície, ou de um determinado parâmetro.

Assim, percebe-se que os estudos de *CGU* sobre superfícies compactas concentram-se nos grupos fuchsianos de emparelhamentos de lados e em regiões fundamentais regulares. Há raríssimas abordagens sobre estes códigos tendo como espaço ambiente a superfície ao invés de \mathbb{D} ou \mathbb{H} . Além disto, nestes casos, pouco se sabe sobre o grupo de rótulos.

No que diz respeito as estruturas algébricas obtidas, especialmente nos trabalhos que se apoiam em álgebra de quatérnios, a relação destas estruturas parecem estar muito longe das estruturas geométricas associadas aos códigos, principalmente se comparados ao trabalho pioneiro do Forney. Em sua origem, os *CGU* tinham as suas estruturas métricas e algébricas (grupos, a saber) diretamente associadas.

Em [15] criou-se rotulamentos para *CGU* sobre o toro com diferentes formas para sua região fundamental, ou seja, o gênero da superfície foi fixado, e estudou-se diferentes rotulamentos para várias formas de representar o toro como região planar. Por se tratar de um toro, a geometria que serviu de base para o trabalho é a euclidiana. O trabalho obtém explicitamente os grupos de rotulamento para as constelações de sinais. Além disto, são construídos códigos perfeitos usando sobre a constelação de sinais a métrica do grafo.

O artigo supracitado foi a principal motivação para a realização do presente trabalho. Em essência, a abordagem adotada aqui foi tentar reproduzir os resultados obtidos em [15] para o caso imediatamente posterior, o bitoro. Porém, a estrutura de espaço vetorial de \mathbb{R}^2 foi fartamente explorada no caso do toro e, como os ambientes hiperbólicos não admitem tal estrutura, meios alternativos tiveram que ser buscados.

Como mencionado anteriormente, optou-se por usar certos grupos triangulares tendo como subgrupo normal um grupo de assinatura $(2; -)$. A determinação de quais grupos são estes, quais são os grupos quocientes e como interpretá-los para exibir o rotulamento casado são respondidas na seção a seguir.

2.5 Grupos Tiling

Esta seção apresenta os grupos tiling G^* e OP-tiling G . Para o estudo aprofundado da teoria que envolve estes grupos recomenda-se [11] e [12], trabalhos que fundamentam quase que por completo esta seção. No mais, muitos dos comentários e resultados citados podem ser encontrados em [19], [18], [36], [38], [27], [37] e [24], além dos dois primeiros trabalhos anteriormente mencionados.

A listagem dos grupos G encontrada em [11] é a classificação completa de grupos finitos agindo (preservando orientação) sobre superfícies de gênero 2 e 3. Estes grupos podem ser caracterizados, a menos de equivalências topológicas, por um conjunto de informações que são chamados dados de ramificação. Tais dados são escritos na forma $(\varrho : m_1, \dots, m_r)$ onde $r, \varrho, m_1, \dots, m_r$ são números inteiros tais que, r indica o número de pontos ramificados da cobertura ramificada $S \rightarrow S/G$ na superfície S , m_i indica as ordem de certos elementos de G os quais fixam pontos de S , com $\varrho \leq g$, $r \leq 2g + 2$ e g indicando o gênero da superfície.

Todos estes grupos devem satisfazer a equação de Riemann-Hurwitz

$$\frac{2g-2}{|G|} = (2\varrho - 2) + \sum_{1 \leq j \leq r} \left(1 - \frac{1}{m_j}\right),$$

o que impõe restrições ao grupo G .

Considerando que toda ação de um grupo sobre uma superfície surge por selecionar algum subgrupo normal livre de torção de um grupo fuchsiano e ainda, restringindo a discussão para o caso em que G é triangular ($r = 3$) sobre o bitoro ($g = 2$), podemos identificar estes grupos G como os quocientes de grupos triangulares fuchsianos aritméticos por um subgrupo normal livre de torção com assinatura $(2; -)$. A lista completa pode ser encontrada em [27].

Em [12] é oferecida uma forma, que não é a única, de se entender um grupo do tipo G

para um grupo G^* . Esta extensão é dada por uma involução (aplicação de ordem 2) θ tal que $\theta(a) = a^{-1}$ e $\theta(b) = b^{-1}$, onde a e b são os geradores de G . Os grupos G , como será visto mais adiante, serão gerados por, no máximo, dois elementos.

Os rotulamentos para códigos geometricamente uniformes sobre o bitoro serão determinados por meio de grupos Tiling. Por esta abordagem é possível fornecer explicitamente ao menos um grupo de rotulamento para cada uma das 11 tesselações existentes sobre o bitoro, oriundas de grupos triangulares fuchsianos aritméticos. Além disto, extensões destes grupos de rótulos pela involução θ são usadas como meio para gerar novos códigos sobre a superfície.

A abordagem proposta para a construção de CGU sobre o bitoro por meio dos grupos tiling e OP-tiling pode ser estendida para superfícies compactas de gêneros ainda maiores, fato que ficará claro no decorrer no texto.

Definição 2.18. [11] *Sejam S uma superfície orientável de gênero g , $Hom(S)^+$ seu grupo de homeomorfismos que preservam orientação e G um grupo finito. Diz-se que G age (orientável e efetivamente) sobre S se existe um monomorfismo $\varepsilon : G \rightarrow Hom^+(S)$. Se $\varepsilon' : G \rightarrow Hom^+(S)$ é outra ação, então diz-se que $\varepsilon, \varepsilon'$ são equivalentes (topologicamente) se existem $\omega \in Aut(G)$ e um $h \in Hom(S)^+$ tais que*

$$\varepsilon'(g) = h\varepsilon(\omega(g))h^{-1}, g \in G.$$

Seja S uma superfície compacta de gênero g e G um grupo finito agindo orientável e efetivamente sobre S . O espaço quociente S/G é uma superfície diferenciável e a projeção quociente $\pi : S \rightarrow \frac{S}{G}$ é chamada de recobrimento ramificado.

Broughton, por um método indutivo, foi capaz de explicitar todos os grupos G para as superfícies compactas de gênero 2 e 3 em [11], e completar a classificação para os gêneros $g \leq 13$ para casos triangulares em [12]. Na verdade, para os gêneros menores muitas informações e resultados importantes já estavam estabelecidos, porém Broughton colocou as questões sob um ponto de vista menos topológico e muito mais algébrico.

Além disto, em [12] a forma dada para se estender G para um grupo G^* é tal que, $|\frac{G^*}{G}| = 2$ e, portanto, $G \triangleleft G^*$. Os grupos G^* e G serão chamados de tiling e OP-tiling (preserva orientação), respectivamente, e têm papel crucial no rotulamento de conjunto sinais sobre as superfícies compactas de gênero $g \geq 2$.

Observação 2.19. *Para clarificar a relação entre tais grupos G , para os casos triangulares, e os CGU , considere a seguinte situação: tome sobre uma superfície um reticulado formado por triângulos não obtusos de modo que cada reflexão em torno do lado de um destes triângulos estende-se como uma isometria para toda a superfície, preservando o reticulado. Além disto, considere que os lados destes triângulos se estendem a uma geodésica fechada sobre a superfície, formada apenas pelos lados destes triângulos. O grupo tiling G^* é o grupo gerado por estas reflexões em torno dos lados dos triângulos.*

Esses grupos são formados por automorfismos de S que preservam o reticulado com as características descritas acima. Cada um destes grupos possui um subgrupo de índice 2 formado por automorfismos conformes que, obviamente, também preservam tais reticulados.

No contexto dos CGU , estes grupos podem ser usados como grupos de rótulos para escolhas adequadas de constelações de sinais. De fato, dada uma superfície compacta, considere como uma constelação de sinais os incentros de cada um dos triângulos de um determinado reticulado com as características acima descritas. O grupo tiling associado a este reticulado tem as propriedades desejadas, ou seja, é subgrupo do grupo de simetrias da superfície, possui a mesma cardinalidade da constelação de sinais e preserva o reticulado.

Deste modo, estes reticulados servem de base para a criação de CGU que tem como grupo gerador minimal os grupos tiling ou os grupos OP-tiling.

Näätänen determinou todos os grupos de assinatura $(2; -)$ que admitem um polígono regular como região fundamental em [24] e [37]. Todos os grupos são fuchsianos aritméticos. Além disto, apresenta uma lista completa dos grupos triangulares fuchsianos aritméticos que contém um subgrupo de assinatura $(2; -)$ [37].

Contudo, muitos casos em que o grupo de gênero 2 pode ser visto como subgrupo de um grupo triangular, a sua região fundamental será representada por um polígono não regular. Alguns destes casos são exemplificados pela própria Näätänen em [37]. Além disto, pode ocorrer que a região não seja nem mesmo convexa [16].

Outra observação importante é que nem toda região fundamental para o bitoro está associada ao um grupo fuchsiano aritmético [37]. Como consequência disto, o grupo triangular que tem tal grupo como seu subgrupo normal (se existir) também não será um grupo aritmético.

Algumas destas regiões são obtidas por deformações do polígono $\{8, 8\}$ e têm associada a si o grupo diedral de ordem 8 como grupo de simetrias [37].

Como já mencionado anteriormente, a maioria dos trabalhos sobre busca de códigos geometricamente uniformes em espaços hiperbólicos, quando trata de superfícies compactas, considera como região fundamental da superfície o polígono autodual $\{4g, 4g\}$, e se outros casos são abordados, são tomados sobre polígonos regulares. Esta abordagem limita a possibilidade de construção de CGU , uma vez que as regiões fundamentais para as superfícies compactas são muitas vezes representadas por polígonos não regulares. Neste sentido, o presente trabalho se apoia em um tratamento mais geral, pois considera como região fundamental polígonos regulares e não regulares.

Como poderá ser notado mais adiante, entre os 11 casos de grupos tiling (consequentemente, grupos OP-tiling) em apenas 7 a região fundamental do bitoro foi representada como polígono regular, nos demais casos, as regiões são representadas necessariamente como polígonos não regulares, sendo que em alguns destes casos os polígonos escolhidos podem ser também não convexos.

Teorema 2.20. [37] *Os grupos triangulares fuchsianos aritméticos que têm como subgrupo um grupo de assinatura $(2;-)$ são: $(2, 3, 7)$, $(2, 3, 8)$, $(2, 3, 9)$, $(2, 3, 10)$, $(2, 3, 12)$, $(2, 3, 18)$, $(2, 4, 5)$, $(2, 4, 6)$, $(2, 4, 8)$, $(2, 4, 12)$, $(2, 5, 5)$, $(2, 5, 10)$, $(2, 6, 6)$, $(2, 8, 8)$, $(3, 3, 4)$, $(3, 3, 5)$, $(3, 3, 6)$, $(3, 3, 9)$, $(3, 4, 4)$, $(3, 6, 6)$, $(4, 4, 4)$ e $(5, 5, 5)$.*

Destes, o subgrupo de gênero 2 é subgrupo normal para os casos: $(2, 3, 8)$, $(2, 4, 6)$, $(2, 4, 8)$, $(2, 5, 10)$, $(2, 6, 6)$, $(2, 8, 8)$, $(3, 3, 4)$, $(3, 4, 4)$, $(3, 6, 6)$, $(4, 4, 4)$ e $(5, 5, 5)$. Em todos os casos, o grupo de assinatura $(2; -)$ é um subgrupo livre de torção, [37] e [27].

Para conseguir tais resultados a autora se apoiou fortemente em [18], que classifica teselações regulares sobre superfícies e sua relação com grupos triangulares do tipo $(p, q, 2)$, os grupos triangulares de Schwarz. A demonstração que todos estes grupos são fuchsianos aritméticos é devida a Takeuchi em [46]. Os grupos OP-tiling são obtidos explicitamente como grupo de matrizes complexas por meio de ferramentas geométricas para os gêneros 2 por Kuribayashi [26].

Para o propósito deste trabalho, somente os casos em que ocorre a normalidade serão

considerados, pois os rotulamentos serão por grupos e estes devem vir do quociente de $\frac{(l,m,n)}{\Gamma_2}$, onde Γ_2 representa o grupo de assinatura $(2; -)$ e, portanto, não faz sentido considerar os demais casos.

A abordagem seguirá no sentido de Broughton, ao invés de Kuribayashi, pois assim é possível detalhar todos os grupo G para os casos de gênero $2 \leq g \leq 13$ permitindo, desta forma, estender o presente trabalho para gêneros maiores. Mais ainda, tal abordagem considera extensões G^* de G , possibilitando assim a geração de mais grupos de rotulamentos para um número maior constelações geometricamente uniformes.

Os grupos OP-tiling, formalmente definidos na sequência, serão exatamente os grupos quocientes, que são os objetos de interesse. Com base neles, teremos ainda as definições de grupos tiling que também serão usadas para rotulamentos.

Definição 2.21. [12] *Seja S uma superfície orientável compacta de gênero g . Um tiling T de S é uma cobertura completa sem sobreposição da superfície por polígonos, os quais são chamados ladrilhos. Os lados (ou arestas) dos ladrilhos são chamados de lados (ou arestas) do tiling e os vértices dos ladrilhos são chamados de vértices do tiling. Denotamos por ε e ν a coleção de arestas e vértices do tiling, respectivamente.*

Definição 2.22. [12] *Um tiling T de uma superfície é dito caleidoscópico se, para cada aresta $e \in \varepsilon$ do tiling, a reflexão local r_e em relação a aresta e é uma isometria da superfície que aplica ladrilhos em ladrilhos. Em particular, ele permuta dois ladrilhos que têm o lado e em comum.*

Definição 2.23. [12] *Um tiling caleidoscópico T é chamado de geodésico, se para cada aresta e o conjunto de pontos fixos de r_e , denotado por $S_{r_e} = \{x \in S : r_e(x) = x\}$, é formado por uma união de arestas de T .*

Observação 2.24. *Existem tilings caleidoscópicos que não são geodésicos como, por exemplo, o tiling dodecaedral da esfera por doze pentágonos [12].*

As reflexões em relação aos lados de um tiling geram um grupo de isometrias de tiling, o qual é chamado grupo tiling. Pode ser mostrado que todo ladrilho da superfície é imagem,

por algum elemento de um grupo tiling, de um único ladrilho, o qual é chamado de ladrilho principal.

Todo o trabalho está fundamentado sobre os grupos tiling que tem como ladrilho principal um triângulo não obtuso. Formalmente, considere o triângulo Δ_0 de vértices P, Q e R , o ladrilho principal, e denote por p, q e r os lados opostos aos vértices P, Q e R , respectivamente. Denote ainda por σ_p, σ_q e σ_r as reflexões em relação aos respectivos lados. Assim, por conta da condição geodésica, existe um mesmo número de ângulos iguais para os triângulos em torno de cada vértice. Disto, os ângulos P, Q e R tem medidas $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}$ e $\frac{\pi}{n}$ radianos, respectivamente, com l, m e n inteiros maiores ou iguais a 2, tais que $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$. Diz-se que Δ_0 é um (l, m, n) -triângulo [12].

Assim, $\sigma_p^2 = \sigma_q^2 = \sigma_r^2 = 1$. Tomando $a = \sigma_p\sigma_q, b = \sigma_q\sigma_r$ e $c = \sigma_r\sigma_p$, temos que a, b e c são rotações em sentido anti-horário em torno dos vértices de Δ_0 com ordens l, m e n , respectivamente. Denotando por $G^* = \langle \sigma_p, \sigma_q, \sigma_r \rangle$ e $G = \langle a, b, c \rangle = \langle a, b \rangle$ temos que G é o subgrupo de G^* gerado pelas isometrias que preservam a orientação. Logo, G é subgrupo normal de índice 2 e $G^* = \langle \theta \rangle \rtimes G$, um produto semi-direto.

Observação 2.25. *A involução θ é a reflexão em torno do lado q , que age sobre G da forma $\theta(a) = a^{-1}$ e $\theta(b) = b^{-1}$, como mostra o teorema 2.27.*

O desenvolvimento dos grupos tiling com ladrilhos triangulares é análogo ao desenvolvimento feito na última seção do capítulo anterior para grupos triangulares no disco. Essencialmente, a diferença entre tais grupos vem do fato de que os grupos tiling são grupos finitos que agem na superfície, enquanto que os grupos triangulares são grupos infinitos que agem no disco hiperbólico.

A projeção $\pi : \mathbb{D} \rightarrow S$, do disco hiperbólico da superfície S , relaciona as tesselações geradas pelos grupos supracitados. Em linhas gerais, ocorre que triângulos de uma tesselação em \mathbb{D} são levados pela projeção π em triângulos de uma tesselação em S . Note que, como π é conforme, ocorre que se $\Delta \in \mathbb{D}$ é um triângulo com ângulos internos $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}$ e $\frac{\pi}{n}$ então $\pi(\Delta) \in S$ também é um triângulos com ângulos $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}$ e $\frac{\pi}{n}$.

Definição 2.26. [12] *O grupo G^* definido acima é chamado grupo tiling total de S ou apenas grupo tiling de S . O subgrupo G é chamado de grupo tiling conforme ou grupo OP-tiling*

(*preserva orientação*).

É importante observar que podem existir isometrias de S que preservam o tiling e que não estão contidas em G^* . Neste caso, o grupo de todas as simetrias do tiling pode ser fatorado na forma $U \rtimes G^*$, onde U é o estabilizador do ladrilho principal [12].

Com relação aos grupos de rotulamentos casados, sabemos que são subgrupos transitivos de um grupo de simetrias e que, no caso de serem grupos geradores minimais, a sua cardinalidade é a mesma do conjunto de sinais. Disto segue que, determinar os grupos tiling, é o mesmo que encontrar um grupo gerador minimal para as tesselações associadas a estes grupos sobre superfícies compactas, ou seja, determinar o grupo de rótulos.

A principal contribuição do presente trabalho foi detectar a forte relação entre grupos tiling com CGU em superfícies compactas. Além disto, o trabalho também oferece representações geométricas das regiões fundamentais para cada um dos grupos estudados, adequadamente associadas a uma região fundamental conveniente para o bitoro. Mais ainda, com base na interpretação geométrica de G e G^* , os rotulamentos casados são dados explicitamente em todos os casos.

Como consequência dos fatos supramencionados, foi possível criar, de forma original, cadeias de particionamento genuinamente hiperbólicas e que, em alguns casos, admitem um particionamento Ungerboeck (hiperbólico).

A limitação do gênero para construção dos grupos é consequência da limitação dos bancos de dados dos programas GAP e Magma [12].

A tripla de elementos geradores de um grupo OP-tiling sempre pode ser tomada de forma a satisfazer as relações $o(a) = l, o(b) = m, o(c) = n$ e $abc = pqrrp = 1$. Ou seja, os elementos a, b e c podem ser escolhidos como geradores dos estabilizadores de uma tripla de pontos sobre S .

Teorema 2.27. [12] *Seja G um grupo OP-tiling sobre a superfície S com uma (l, m, n) -tripla geradora (a, b, c) . Se existir uma involução θ de G satisfazendo*

$$\theta(a) = qaq^{-1} = qpqq = qp = a^{-1} \text{ e } \theta(b) = qbq^{-1} = qqrq = rq = b^{-1},$$

então a superfície tem um tiling T por (l, m, n) -triângulos, tais que o grupo OP-tiling cons-

truído anteriormente é o grupo G desejado. Além disto, a tripla (a, b, c) é gerada de um ladrilho principal de modo que $G^* \simeq \langle \theta \rangle \rtimes G$.

O Caso do Bitoro: Na tabela 2.1, adaptada de [12], são apresentados os 11 casos de grupos OP-tiling G , exatamente aqueles oriundos do quociente de um grupo triangular fuchsiano aritmético que contém como subgrupo normal um grupo de gênero 2, livre de torção. Note que todos eles são caleidoscópicos, ou seja, podem ser estendidos por uma involução, o que garante a existência do grupo tiling G^* , tornando possível deste modo duplicar o número de reticulados sobre o bitoro, os quais serão também geometricamente uniformes, e com grupo de rótulos G^* .

Além disto, todos estes grupos tiling são solúveis, um fato bastante interessante pois permite a criação de partições uniformes dos códigos. Mais ainda, os rótulos das partições serão por grupos abelianos. Vale ressaltar que em gêneros maiores, nem sempre é possível estender G a G^* . Tal característica de bom comportamento dos tiling sobre o bitoro será explorada no último capítulo.

A notação usada para os grupos é feita como em [16], [11] e [26]. Assim, Z_n indica grupo cíclico de ordem n , $D_{p,q,r} = \{x, y : x^p = y^q = 1, y^x = y^r\}$ onde $y^x = x^{-1}yx$ indica grupo meta-cíclico de ordem pq e $[x, y]$ indica o comutador de x e y . Os símbolos $GL(n, q)$ e $SL(n, q)$ denotam grupo geral linear e grupo especial linear de matrizes $n \times n$ sobre o um corpo de ordem q , respectivamente.

Uma tabela representada por grupos de matrizes similar a esta pode ser encontrada em [26].

Tabela 2.1: Grupos de Rotulamento G (adaptada de [12])

$ G $	(l, m, n)	G
5	(5,5,5)	$Z_5 = \{x x^5 = 1\}$
6	(3,6,6)	$Z_6 = \{x x^6 = 1\}$
8	(2,8,8)	$Z_8 = \{x x^8 = 1\}$
8	(4,4,4)	$\langle x, y x^4 = y^4 = 1, x^2 = y^2, y^x = y^{-1} \rangle$
10	(2,5,10)	$Z_{10} = \{x x^{10} = 1\}$
12	(2,6,6)	$Z_6 \times Z_2 = \{x x^6 = 1\} \times \{y y^2 = 1\}$
12	(3,4,4)	$D_{43-1} = \langle x, y x^4 = y^3 = 1, y^x = y^{-1} \rangle$
16	(2,4,8)	$D_{283} = \langle x, y x^2 = y^8 = 1, y^x = y^3 \rangle$
24	(2,4,6)	$\langle \chi, \gamma, \zeta, \omega \chi^2 = \gamma^2 = \zeta^2 = [\gamma, \zeta] = [\gamma, \omega] = [\zeta, \omega] = [\gamma, \chi] = 1, \zeta^x = \zeta\gamma, \omega^x = \omega^{-1} \rangle$
24	(3,3,4)	$SL_2(3) = \langle x, y x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$
48	(2,3,8)	$GL_2(3) = \langle x, y x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$

Rotulamentos de Códigos Geometricamente Uniformes sobre o Bitoro

Esta seção apresenta uma análise sobre cada um dos rotulamentos realizados por meio dos grupos OP-tiling G juntamente com sua extensão G^* . Em cada um deles, será apresentada uma região fundamental para o grupo de gênero 2 (grupo de assinatura $(2; -)$), as regiões fundamentais para o grupos G e G^* além, dos respectivos rotulamentos casados.

Denotaremos por Γ_2 o grupo de gênero 2 e por P_2 , P_G e P_{G^*} denotaremos as regiões fundamentais de Γ_2 , G e G^* , respectivamente. Além disto, as constelações de sinais geometricamente uniformes sobre uma representação planificada do bitoro no disco \mathbb{D} , denotadas por C , serão os centros (incentros) das regiões fundamentais de P_G e P_{G^*} .

Em alguns casos, existem duas ou mais possibilidades para se representar as regiões fundamentais dos grupos na região fundamental do bitoro porém, isso não altera os grupos de rotulamento, o que muda é apenas a forma de vizualizá-los. Os rotulamentos das regiões partem sempre da escolha de um ponto para ser representado pelo elemento neutro do grupo de rótulos e, a partir disto, os demais pontos são determinados pelas características algébrico-geométricas destes grupos.

Vale destacar que em todos os casos ocorre que $\frac{(a,b,c)}{\Gamma_2} \simeq G$ e que G é subgrupo normal de G^* . Mais especificamente, $G^* = \langle \theta \rangle \times G$, onde θ é uma involução sobre o bitoro, tal que $\theta(a) = a^{-1}$ e $\theta(b) = b^{-1}$ com a e b representando os geradores do grupo G .

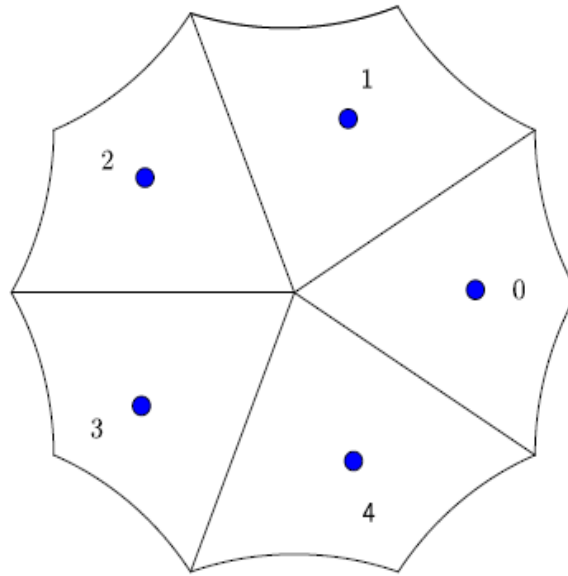


Figura 3.1: Rotulamento por G para $(5, 5, 5)$.

3.1 Rotulamentos por G e G^* Associados com $(5, 5, 5)$

O grupo $(5, 5, 5)$ admite um subgrupo normal Γ_2 com índice 5 e, portanto, tem-se que $\frac{(5,5,5)}{\Gamma_2} \simeq G = Z_5$. Disto, segue que P_G subdivide P_2 em 5 regiões congruentes, determinando assim uma malha sobre o bitoro de modo que, ao se considerar o conjunto de sinais C como sendo os centros destas 5 regiões congruentes, temos que Z_5 é um grupo de rótulos para C .

Aqui, a região fundamental P_2 é um polígono regular $\{10, 5\}$. A região fundamental P_G é o polígono com 4 lados iguais e ângulos internos alternados em $\frac{\pi}{5}$ e $\frac{2\pi}{5}$, enquanto que a região fundamental P_{G^*} é o triângulo $\{3, 10\}$.

As tesselações sobre o bitoro determinadas por P_G e P_{G^*} estão representadas nas figuras 3.1 e 3.2, respectivamente. Note que a constelação de sinais associadas a G é a menos densa de todas.

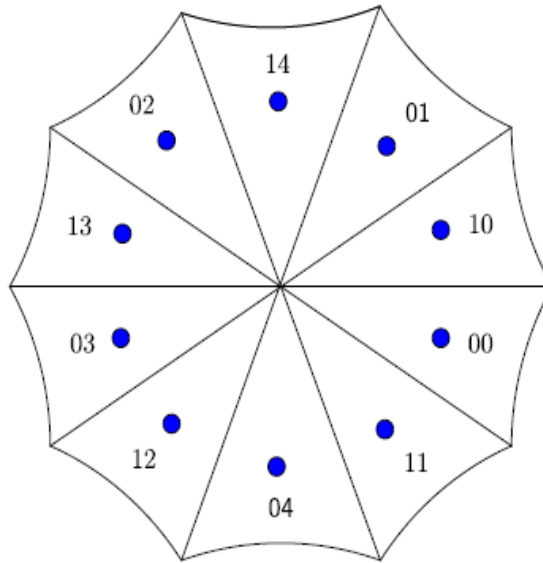


Figura 3.2: Rotulamento por G^* para $(5, 5, 5)$.

3.2 Rotulamentos por G e G^* Associados com $(3, 6, 6)$

O grupo Γ_2 é subgrupo normal de $(3, 6, 6)$ com índice 6. Pela tabela 2.1, tem-se que $\frac{(3,6,6)}{\Gamma_2} \simeq G = Z_6$, ou seja, a região fundamental do bitoro P_2 é subdividida em 6 regiões congruentes entre si, de modo que qualquer uma delas serve como região fundamental para G .

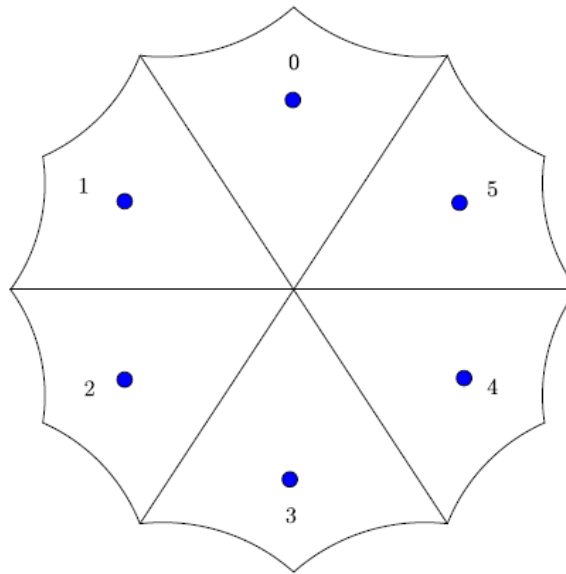
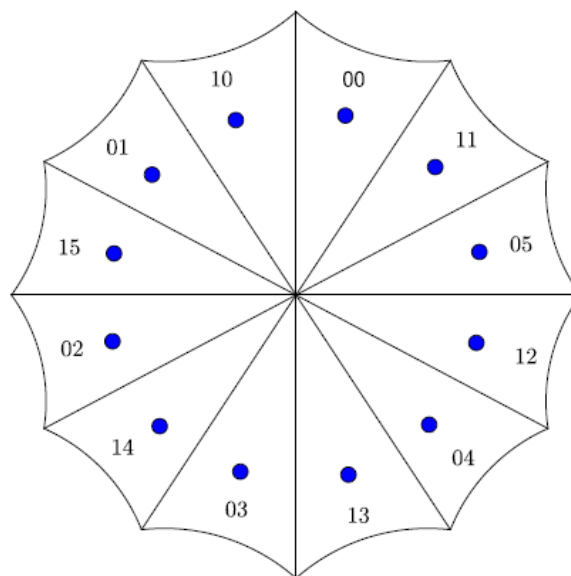
Neste caso, a região fundamental para Γ_2 é o 12-gon semi-regular com lados iguais e ângulos internos alternados $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{3}$. A região fundamental para G é polígono regular $\{4, 6\}$ e a região fundamental para G^* é o triângulo $(3, 6, 6)$.

As tesselações sobre o bitoro determinadas por P_G e P_{G^*} estão representadas nas figuras 3.3 e 3.4, respectivamente.

3.3 Rotulamentos por G e G^* Associados com $(2, 8, 8)$

Este é o único caso onde uma região fundamental regular para o bitoro que pode ser subtesselada por um triângulo retângulo isósceles [38].

O grupo Γ_2 é subgrupo normal de $(2, 8, 8)$ com índice 8. Pela tabela 2.1, tem-se que

Figura 3.3: Rotulamento por G para $(3, 6, 6)$.Figura 3.4: Rotulamento por G^* para $(3, 6, 6)$.

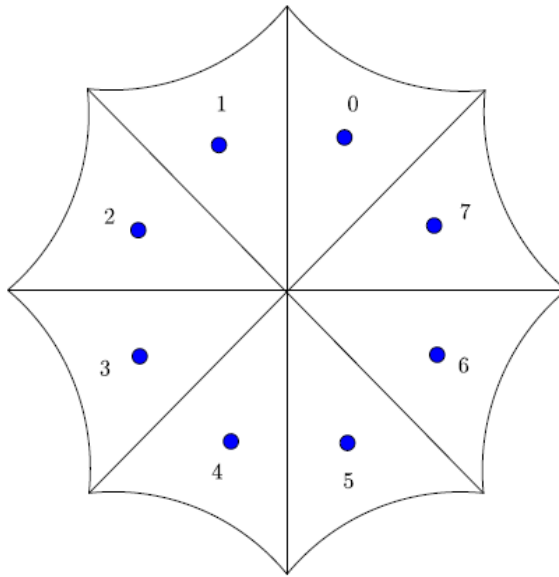


Figura 3.5: Rotulamento por G para $(2, 8, 8)$.

$\frac{(2,8,8)}{\Gamma_2} \simeq G = Z_8$, ou seja, a região fundamental do grupo do bitoro é subdividida em 8 regiões congruentes, que são região fundamental para G .

Neste caso, a região fundamental para Γ_2 é o polígono regular $\{8, 8\}$, o único que gera um reticulado auto-dual para o bitoro. A região fundamental para G é o triângulo $(4, 8, 8)$ e a região fundamental para G^* é o triângulo $(2, 8, 8)$.

As tesselações sobre o bitoro determinadas por P_G e P_{G^*} , juntamente com seus associados, encontram-se representados nas figuras 3.5 e 3.6, respectivamente.

3.4 Rotulamentos por G e G^* Associados com $(2, 5, 10)$

O grupo Γ_2 é subgrupo normal de $(2, 5, 10)$ com índice 10. Pela tabela 2.1, tem-se que $\frac{(2,5,10)}{\Gamma_2} \simeq G = Z_{10}$, ou seja, a região fundamental para o grupo associado ao bitoro é subdividida em 10 regiões congruentes entre si de modo que cada uma delas serve de região fundamental para Z_{10} .

Neste caso, assim como no primeiro caso, temos novamente o polígono regular $\{10, 5\}$ como região fundamental para Γ_2 . Os grupo G e G^* têm como região fundamental o triângulo

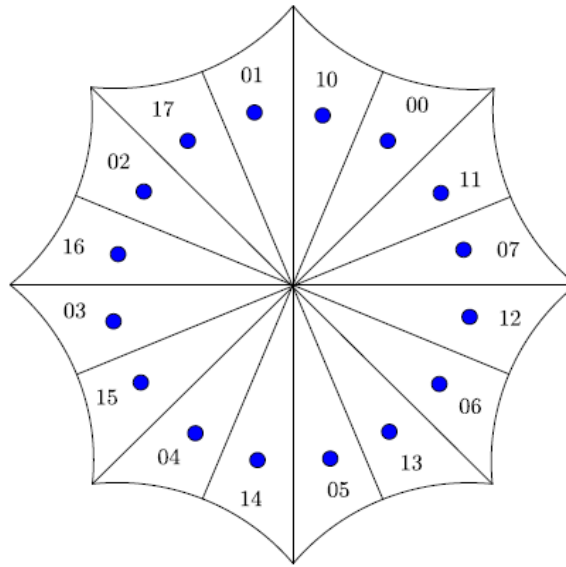


Figura 3.6: Rotulamento por G^* para $(2, 8, 8)$.

$(5, 5, 10)$ e o triângulo $(2, 5, 10)$, respectivamente. Note que este é o maior rotulamento por um grupo cíclico sobre o bitoro possível [12].

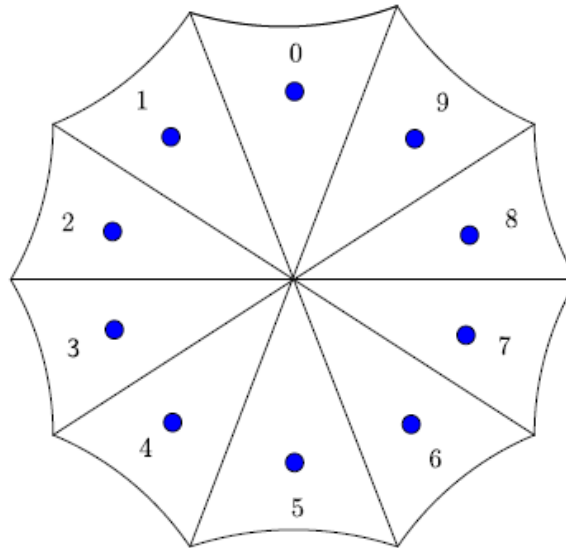
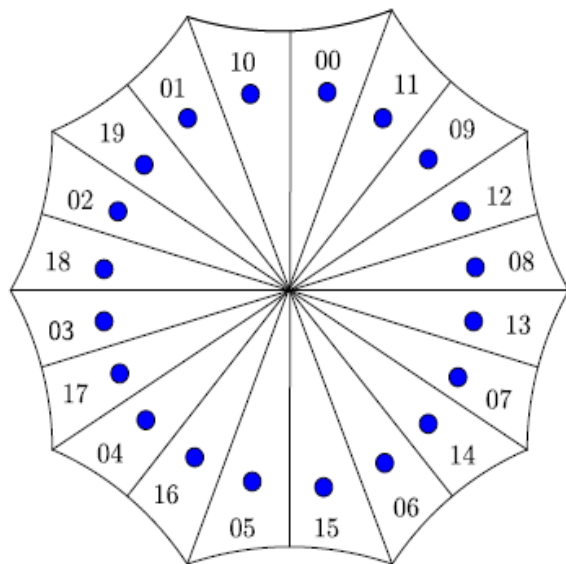
As tesselações sobre o bitoro determinadas por P_G e por P_{G^*} , com seus rotulamentos associados, estão representados nas figuras 3.7 e 3.8, respectivamente.

3.5 Rotulamentos por G e G^* Associados com $(4, 4, 4)$

O grupo fuchsiano Γ_2 é subgrupo normal de $(4, 4, 4)$ com índice 8. Pela tabela 2.1, tem-se que $\frac{(4,4,4)}{\Gamma_2} \simeq G = Q_2$, o grupo quaternio de ordem 8. Este é o grupo não abeliano finito de menor ordem tal que todos os seus subgrupos são normais.

Neste caso, assim como no caso $(2, 8, 8)$, tem-se novamente o polígono regular $\{8, 8\}$ como região fundamental para Γ_2 . O polígono P_{G^*} é o triângulo $\{3, 8\}$ enquanto que o grupo G tem como região fundamental o quadrilátero de lados iguais e ângulos internos alternados $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$.

Assim, as tesselações sobre o bitoro determinadas por P_G e por P_{G^*} e seus rótulos são como nas figuras 3.9 e 3.10, respectivamente.

Figura 3.7: Rotulamento por G para $(2, 5, 10)$.Figura 3.8: Rotulamento por G^* para $(2, 5, 10)$.

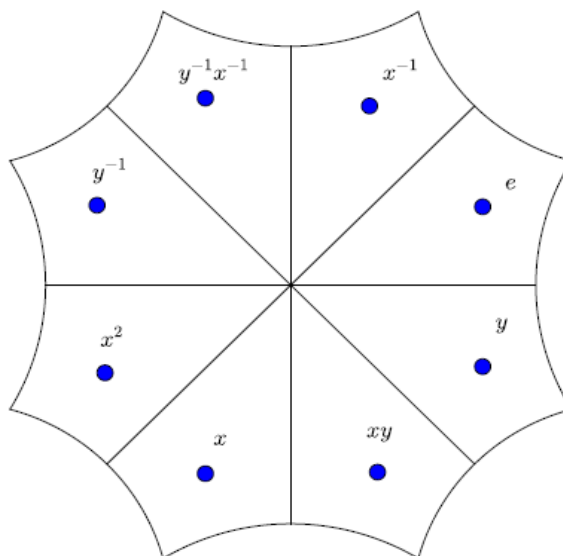


Figura 3.9: Rotulamento por G para $(4, 4, 4)$.

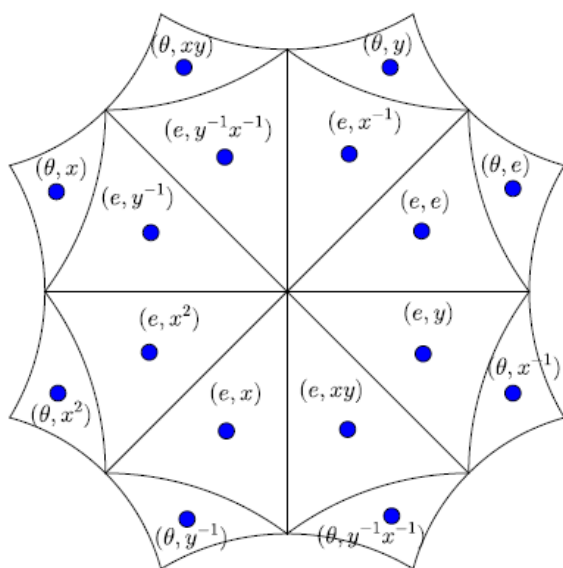


Figura 3.10: Rotulamento por G^* para $(4, 4, 4)$.

Vale ressaltar que um outro rotulamento para P_{G^*} sobre $\{8, 8\}$ foi apresentado em [40]. Naquele caso, o rotulamento ocorre por meio do grupo D_{16} , o grupo diedral de ordem 16. Note que este tipo de situação, de modo geral, já havia sido prevista na observação 2.3.

O método oferecido para criar rotulamentos sobre o bitoro, apresentado por este trabalho, não esgota todas as possibilidades de rotulamentos para uma dada constelação, fato que ficou evidente no parágrafo anterior.

A abordagem proposta apresenta uma forma sistemática de se encontrar ao menos um rotulamento para cada caso em que o grupo Γ_2 pode ser visto como subgrupo normal livre de torção de um grupo triangular fuchsiano aritmético. Por outra lado, os grupos de rótulos por grupos de automorfismos conformes do bitoro associados com malhas triangulares são completamente listados.

3.6 Rotulamentos por G e G^* Associados com $(2, 6, 6)$

Aqui, Γ_2 é subgrupo normal de $(2, 6, 6)$ com índice 12. Pela tabela 2.1, tem-se que $\frac{(2,6,6)}{\Gamma_2} \simeq G = Z_6 \times Z_2$.

Neste caso, P_2 é o 10-gon semi-regular de lados iguais, formado pela união de dois polígonos regulares $\{6, 6\}$. A região fundamental para G é o triângulo $(3, 6, 6)$, e a região fundamental para G^* é o triângulo $(2, 6, 6)$.

Assim, as tesselações sobre o bitoro determinadas por P_G e P_{G^*} com seus rotulamentos associados estão representados nas figuras 3.11 e 3.12, respectivamente:

3.7 Rotulamentos por G e G^* Associados com $(3, 4, 4)$

O grupo $(3, 4, 4)$ tem Γ_2 como subgrupo normal de índice 12. Pela tabela 2.1, tem-se que $\frac{(3,4,4)}{\Gamma_2} \simeq G = D_{4,3,-1}$.

Neste caso, a região fundamental para Γ_2 é um 12-gon com ângulos internos iguais a $\frac{\pi}{2}$ e lados com um padrão de medidas $l, l, 2l, l, l, 2l, l, l, 2l, l, l, 2l$, onde l é a medida do lado do triângulo $(3, 4, 4)$, que está compreendido entre os ângulos internos $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$. Este 12-gon

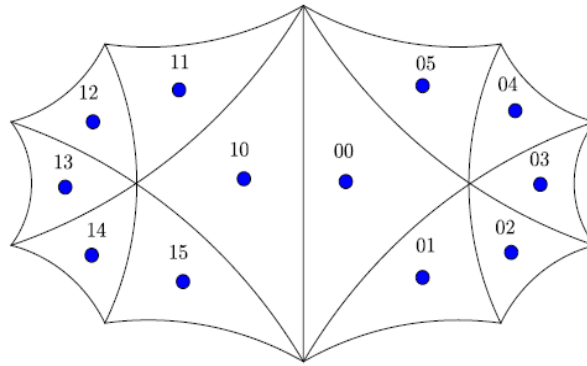


Figura 3.11: Rotulamento por G para $(2, 6, 6)$.

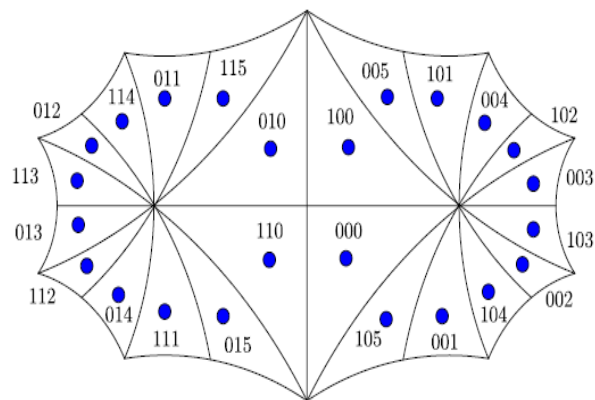


Figura 3.12: Rotulamento por G^* para $(2, 6, 6)$.

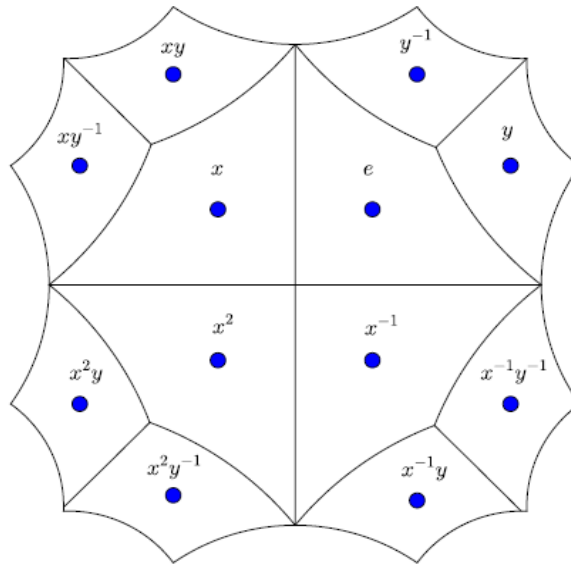


Figura 3.13: Rotulamento por G para $(3, 4, 4)$.

aparece como região fundamental para o bitoro também em [16] e [37].

A região fundamental para G é o polígono de 4 lados com ângulos internos iguais a $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{2\pi}{3}$ e a região fundamental para G^* é o triângulo $(3, 4, 4)$.

As tesselações sobre o bitoro determinadas por P_G e P_{G^*} , com seus respectivos rotulamentos, estão devidamente representadas nas figuras 3.13 e 3.14.

3.8 Rotulamentos por G e G^* Associados com $(2, 4, 8)$

Neste caso $\frac{(2,4,8)}{\Gamma_2} \simeq G = D_{2,8,3}$, que tem ordem 16. As regiões fundamentais P_2 , P_G e P_{G^*} são respectivamente o 8-gon $\{8, 8\}$, o triângulo $(4, 4, 4)$ e o triângulo $(2, 4, 8)$.

As tesselações rotuladas sobre o bitoro determinadas por P_G e P_{G^*} estão representadas nas figuras 3.15 e 3.16, respectivamente. Além disto, P_2 pode ser também facilmente representado pela união de dois 8-gons $\{8, 4\}$ adjacentes formando, portanto, um 14-gon não regular.

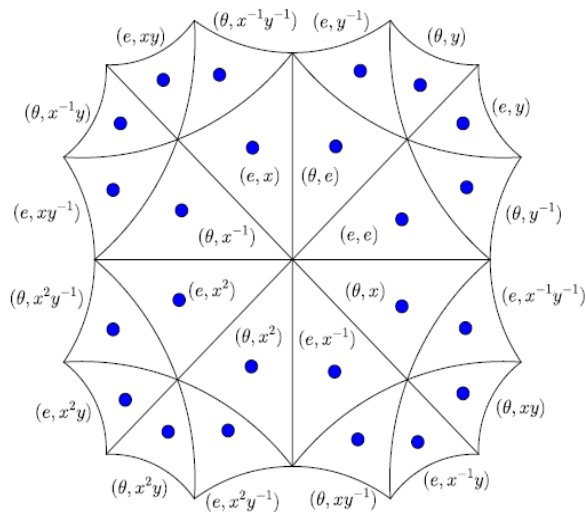


Figura 3.14: Rotulamento por G^* para $(3, 4, 4)$.

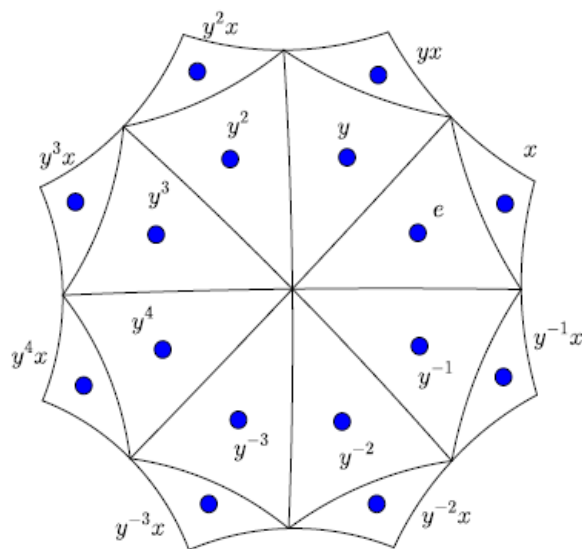
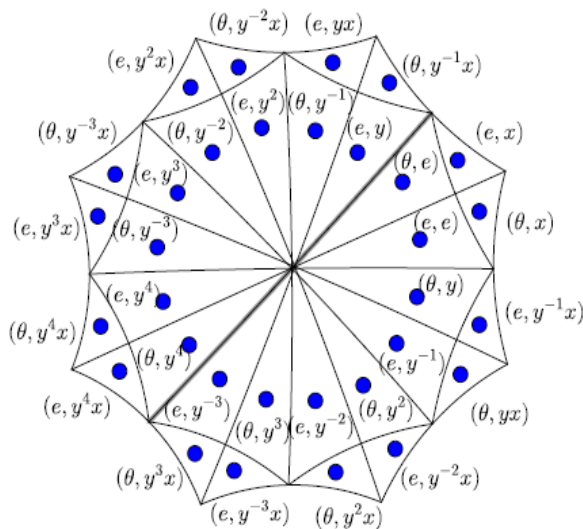


Figura 3.15: Rotulamento por G para $(2, 4, 8)$.

Figura 3.16: Rotulamento por G^* para $(2, 4, 8)$.

3.9 Rotulamentos por G e G^* Associados com $(2, 4, 6)$

Neste caso, $\frac{(2,4,6)}{\Gamma_2} \simeq G = \langle \chi, \gamma, \zeta, \omega : \chi^2 = \gamma^2 = \zeta^2 = [\gamma, \zeta] = [\gamma, \omega] = [\zeta, \omega] = [\gamma, \chi] = 1, \zeta^x = \zeta\gamma, \omega^x = \omega^{-1} \rangle = (4, 6|2, 2)$, de ordem 24. Para detalhes sobre a notação $(p, q|m, n)$ ver [16] página 109 .

Este grupo, e sua construção geométrica a partir de uma tesselação hiperbólica, são descritos em detalhes por Coxeter em [16]. O autor constrói uma região fundamental para o bitoro, e deduz uma apresentação para o grupo G por meio de dois geradores, a saber $G = \langle x, y | x^4 = y^6 = (xy)^2 = (x^{-1}y)^2 = 1 \rangle$. A mesma forma de representação também foi usada em [26].

Para rotular a constelação deste caso adotaremos a apresentação dada por Coxeter. Os polígonos P_2, P_G e P_{G^*} são o 12-gon região fundamental para o bitoro usado no caso $(3, 4, 4)$, o 4-gon com ângulos internos $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ e o triângulo $(2, 4, 6)$. As tesselações rotuladas sobre o bitoro determinadas por P_G e P_{G^*} são dadas nas figuras 3.17 e 3.18, respectivamente.

Este mesmo grupo G foi usado para rotular uma região fundamental não convexa para o bitoro em [16]. Tal região é chamada de região estrelada ou polígono de Petry. Nenhum tipo

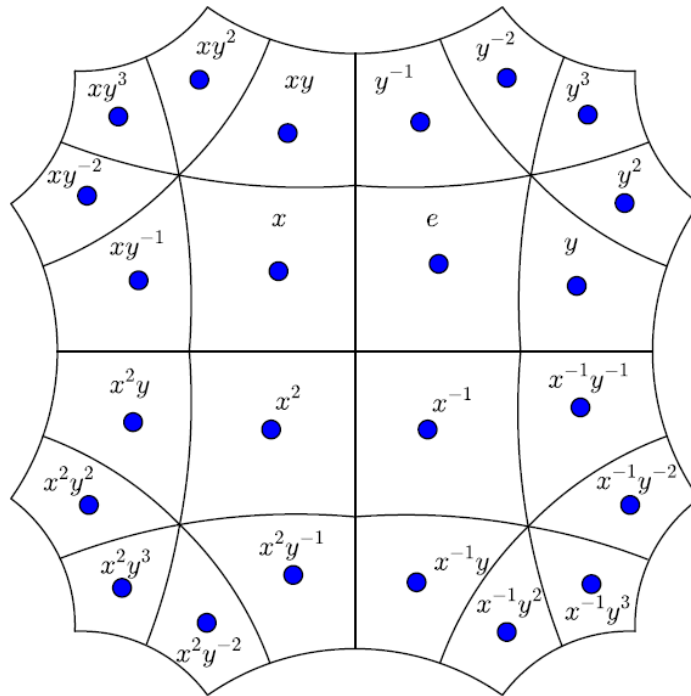


Figura 3.17: Rotulamento por G para $(2, 4, 6)$.

de polígono estrelado havia sido usado anteriormente nos trabalhos sobre CGU em espaços hiperbólicos.

A região fundamental P_2 é o 12-gon estrelado de ângulos internos alternados em $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$, e lados iguais medindo cada um duas vezes a medida do lado entre os ângulos $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{6}$ do triângulo $(2, 4, 6)$. As regiões P_G e P_{G^*} são, respectivamente, o triângulo $(2, 4, 6)$ e o quadrilátero com ângulos internos $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{3}$.

Os rotulamentos para as constelações de sinais associadas com P_G e P_{G^*} neste caso estão representadas nas figuras 3.19 e 3.20, respectivamente.

É muito importante notar que o polígono estrelado usado acima tem seu grupo associado Π_2 gerado por “glide-reflections” (composição de uma reflexão com uma translação) e, portanto, não pode ser subgrupo de $(2, 4, 6)$, uma vez que este último é fuchsiano. Ocorre que Π_2 pode ser visto como subgrupo normal de um grupo não fuchsiano Σ tal que $\frac{\Sigma}{\Pi_2}$ é isomorfo a G .

Este tipo de situação descrita no parágrafo anterior também ocorre no plano euclidiano.

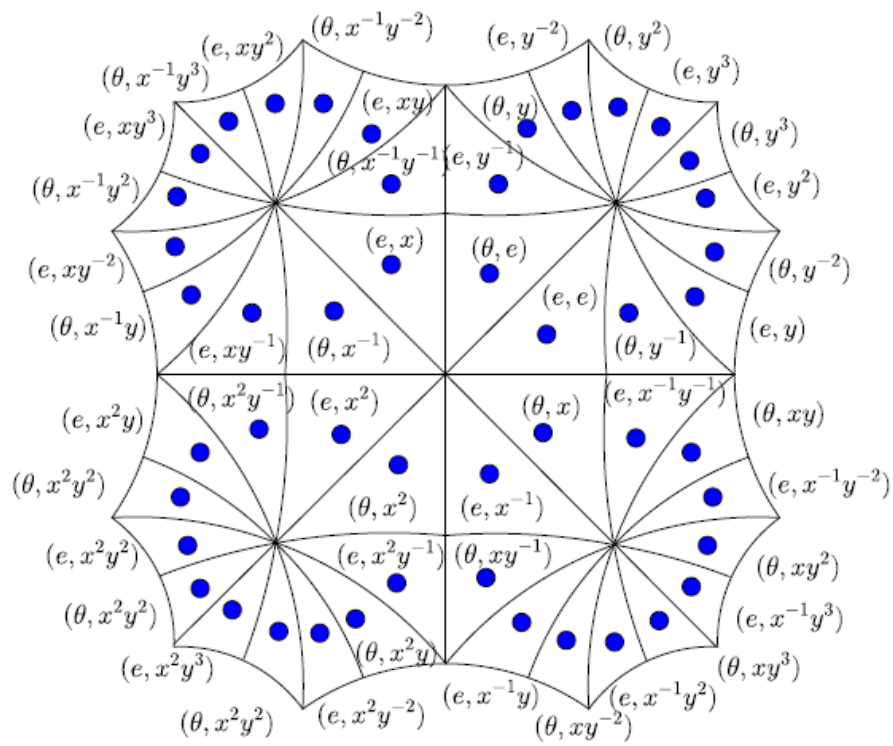


Figura 3.18: Rotulamento por G^* para $(2, 4, 6)$.

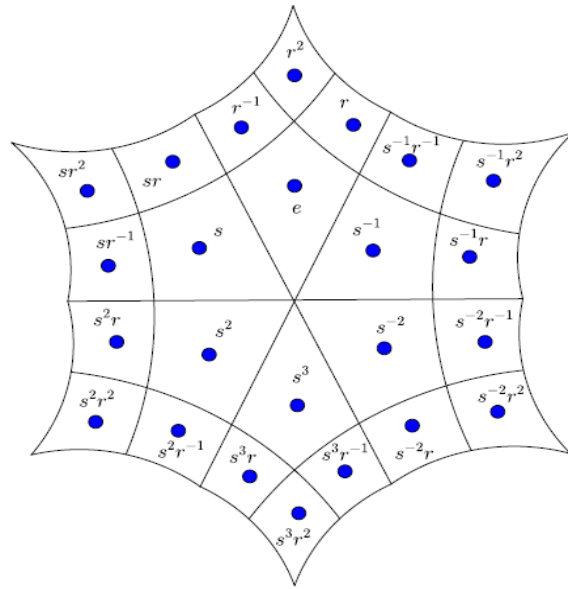


Figura 3.19: Rotulamento por automorfismos conformes do bitoro em um polígono estrelado.

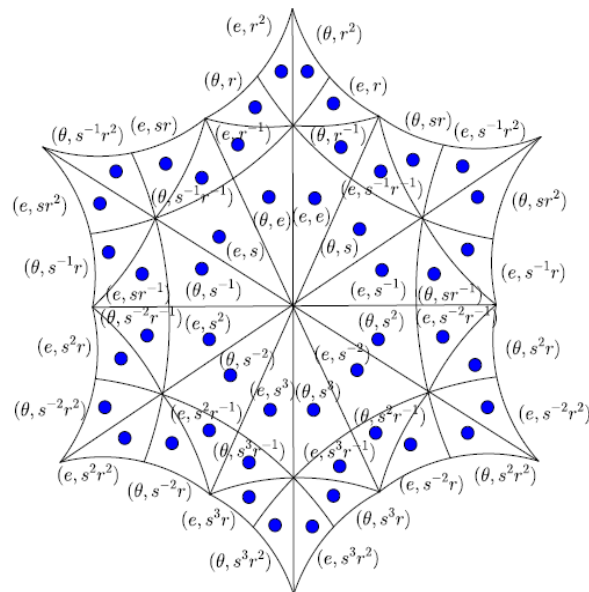


Figura 3.20: Rotulamento por um grupo de automorfismos do bitoro em um polígono estrelado.

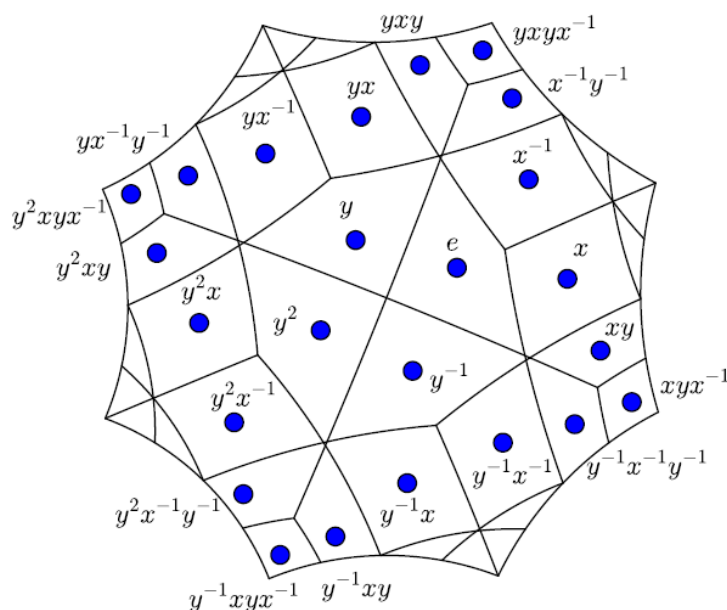


Figura 3.21: Rotulamento por G para $(3, 3, 4)$.

O quadrado é região fundamental para o toro e pode tesselar todo o plano \mathbb{R}^2 pela ação de um grupo gerado “glide-reflections” [16].

3.10 Rotulamentos por G e G^* Associados com $(3, 3, 4)$

Neste caso, $\frac{(3,3,4)}{\Gamma_2} \simeq G = SL_2(3)$. As regiões fundamentais para P_G e P_{G^*} são o 4-gon com ângulos internos iguais a $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$, formado pela união de dois triângulos $(3, 3, 4)$ adjacentes e o triângulo $(3, 3, 4)$, respectivamente. A região P_2 é um polígono regular $\{8, 8\}$.

Assim, as constelações rotuladas determinadas por P_G e P_{G^*} estão representadas nas figuras 3.21 e 3.22, respectivamente.

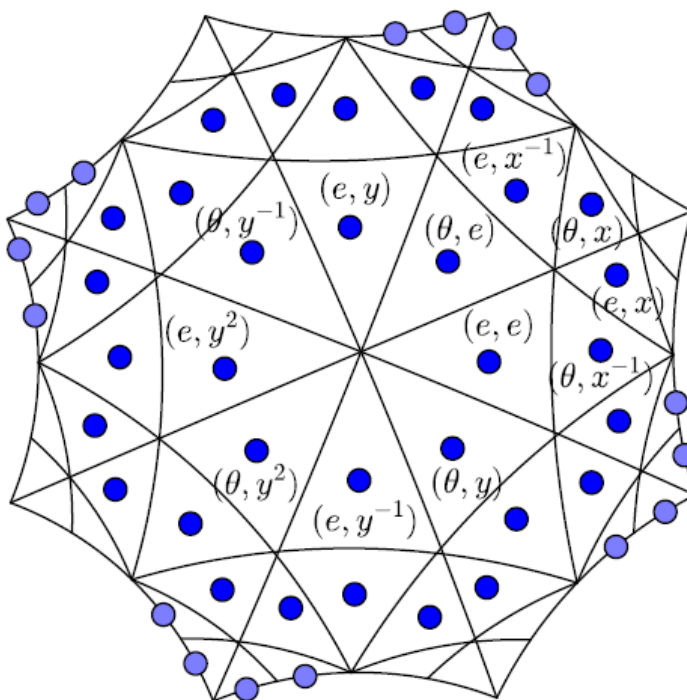


Figura 3.22: Rotulamento por G^* para $(3, 3, 4)$.

3.11 Rotulamentos por G e G^* Associados com $(2, 3, 8)$

Aqui $\frac{(2,3,8)}{\Gamma_2} \simeq G = GL_2(3)$. A região fundamental P_2 é o polígono regular $\{8, 8\}$. As regiões P_G e P_{G^*} são, respectivamente, os triângulos $(3, 3, 4)$ e $(2, 3, 8)$.

Assim, as constelações de sinais sobre o bitoro determinadas por P_G e P_{G^*} e seus rotulamentos estão representados nas figuras 3.23 e 3.24, respectivamente. Note que a primeira figura representa a constelação de sinais mais densa possível sobre o bitoro, que pode ser rotulada por automorfismos conformes.

Na figura 3.24 apenas alguns rótulos foram colocados, porém com base na figura 3.23 e na ação da involução θ , não é difícil determinar os demais rótulos. Esta é a constelação mais densa, construída sobre o bitoro, que pode ser rotulada por um grupo de automorfismos desta superfície.

A tabela 3.1 apresenta, para cada grupo G^* , as áreas dos triângulos da tesselação, as áreas dos círculos inscritos nestes triângulos e a razão entre as áreas, valor que é denominado

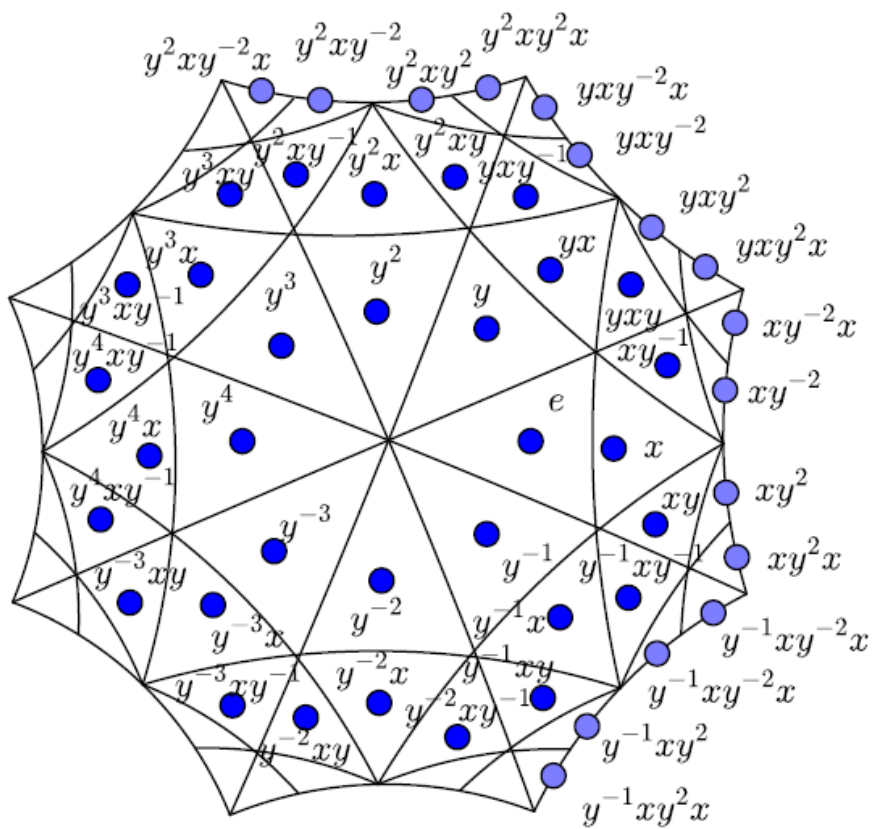


Figura 3.23: Rotulamento por G para $(2, 3, 8)$.

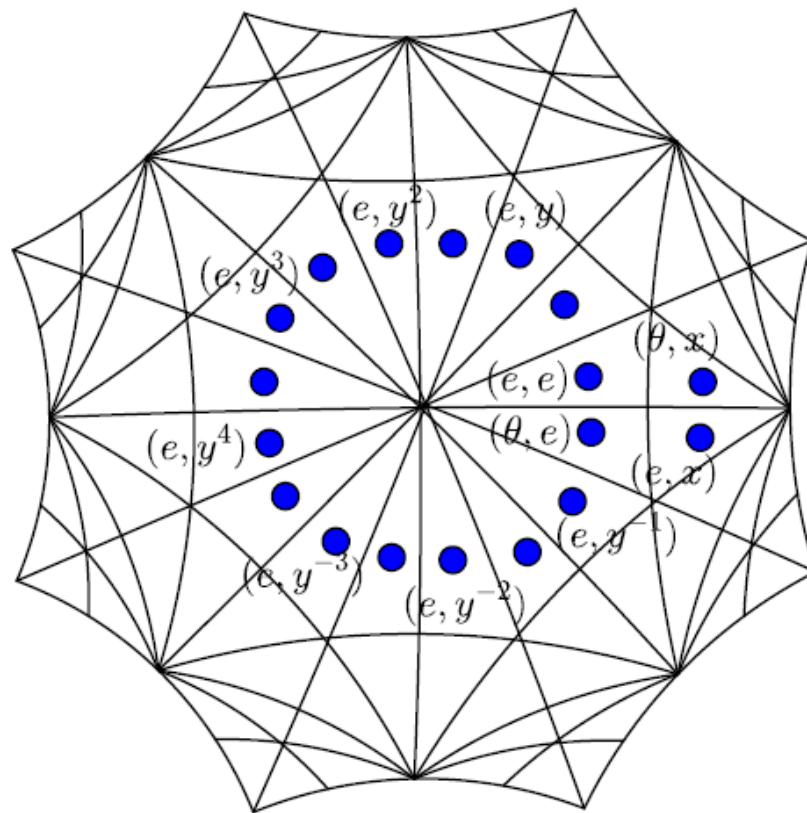


Figura 3.24: Rotulamento por G^* para $(2, 3, 8)$.

densidade do código.

Tabela 3.1: Densidade do Código

Constelação	Área do Triângulo	Área do Círculo	Densidade
G^* de $(5, 5, 5)$	$\frac{2\pi}{5}$	0,5496	2,2864
G^* de $(3, 6, 6)$	$\frac{\pi}{3}$	0,4596	2,2784
G^* de $(2, 8, 8)$	$\frac{\pi}{4}$	0,3033	2,5895
G^* de $(4, 4, 4)$	$\frac{\pi}{4}$	0,3867	2,2497
G^* de $(2, 5, 10)$	$\frac{\pi}{5}$	0,2509	2,5042
G^* de $(2, 6, 6)$	$\frac{\pi}{6}$	0,2271	2,3055
G^* de $(3, 4, 4)$	$\frac{\pi}{6}$	0,2720	1,9249
G^* de $(2, 4, 8)$	$\frac{\pi}{8}$	0,17	2,3099
G^* de $(2, 4, 6)$	$\frac{\pi}{12}$	0,1236	2,1181
G^* de $(3, 3, 4)$	$\frac{\pi}{12}$	0,1452	1,8030
G^* de $(2, 3, 8)$	$\frac{\pi}{24}$	0,0564	2,3209

Cadeias de Particionamento

Hiperbólicas

Este capítulo destina-se a analisar algumas cadeias de particionamento oriundas dos grupos de rótulos das constelações de sinais sobre o bitoro, com especial atenção para as cadeias binárias. Na primeira seção o conteúdo é apresentado de um modo geral, e um exemplo não binário é exibido, enquanto que na segunda seção, são destacados os casos binários. Para cada um dos exemplos abordados, é dada uma representação sobre a região fundamental da superfície.

4.1 Cadeias de Particionamento sobre o Bitoro

Ungerboeck introduziu a noção de aplicação por particionamento de conjunto em [47] e [48]. Neste conceito, um código para o espaço de sinais é definido por uma partição do conjunto de sinais em subconjuntos, um rotulamento destes subconjuntos e um padrão sobre os rótulos, que especifique a sequência de subconjuntos via uma sequência de rótulos.

Forney generalizou estas ideias mostrando que tal conceito equivale a determinar subgrupos normais para o grupo gerador minimal, que estejam associados a determinados subconjuntos dos conjuntos de sinais geometricamente uniformes. O rotulamento natural para as partições de sinais, neste caso, é dado por um grupo de rótulos que seja isomorfo ao grupo quociente $U(C)/U'(C)$.

Forney, mesmo com definições e teoremas gerais, concentrou sua abordagem nos casos em que o grupo de rótulos para o particionamento é isomorfo a Z_2^n . O próprio autor observa que

mais estudos sobre as propriedades algébricas dos grupos de rótulos se faziam necessários.

Um fato importante é que os grupos tiling são todos solúveis para o bitoro. Assim, todas as cadeias de particionamento para códigos geometricamente uniformes são realizadas por grupos de rótulos solúveis, tornando o particionamento mais interessante pois, em cada nível da cadeia, os grupos de rotulamento são abelianos e, eventualmente, cíclicos.

Outra característica presente é que, dependendo da cardinalidade do grupo de rótulos e da sua estrutura algébrica, é possível exibir alguns particionamentos Ungerboeck para a constelação de sinais. Ou seja, é possível, em algumas situações, construir cadeias de rotulamento isomorfas a Z_2^n , fato que ocorre para três casos: $(2, 8, 8)$, $(4, 4, 4)$ e $(2, 4, 8)$.

Exemplo 4.1. (Cadeia de particionamento não binária) *Considere a seguinte cadeia de particionamento $Z_2 \times (Z_2 \times Z_6)/Z_2 \times Z_6/Z_6/Z_2$ do caso $(2, 6, 6)$. Tal cadeia pode ser representada como na figura 4.1. Note que é possível usar também a cadeia $Z_2 \times (Z_2 \times Z_6)/Z_2 \times Z_6/Z_6/Z_3$.*

4.2 Particionamentos Ungerboeck sobre o Bitoro

Nesta seção apresentamos os casos em que as cadeias de particionamento são binárias. Como mencionado anteriormente, tais cadeias ocorrem para $(2, 8, 8)$, $(4, 4, 4)$ e $(2, 4, 8)$.

As partições C/C' que admitem um rotulamento isométrico por um grupo de rótulos binários de n -bits Z_2^n são de especial interesse. Estas cadeias, por admitirem tais rotulamentos, podem ser tratadas sob o ponto de vista de um particionamento de conjuntos Ungerboeck.

Definição 4.2. *Um rotulamento Ungerboeck de uma partição da forma 2^n é definido da seguinte forma: a partição C/C' é refinada em uma cadeia de n partições binárias $C = C_0/C_1/\dots/C_n = C'$. Os rótulos dos 2^n subconjuntos são escolhidos em Z_2^n de modo a refletir sua estrutura nestes subconjuntos, de forma que rótulos de todos os subconjuntos que pertencem ao mesmo subconjunto do j -ésimo nível possuem os últimos (menos significativos) j -bits iguais [20].*

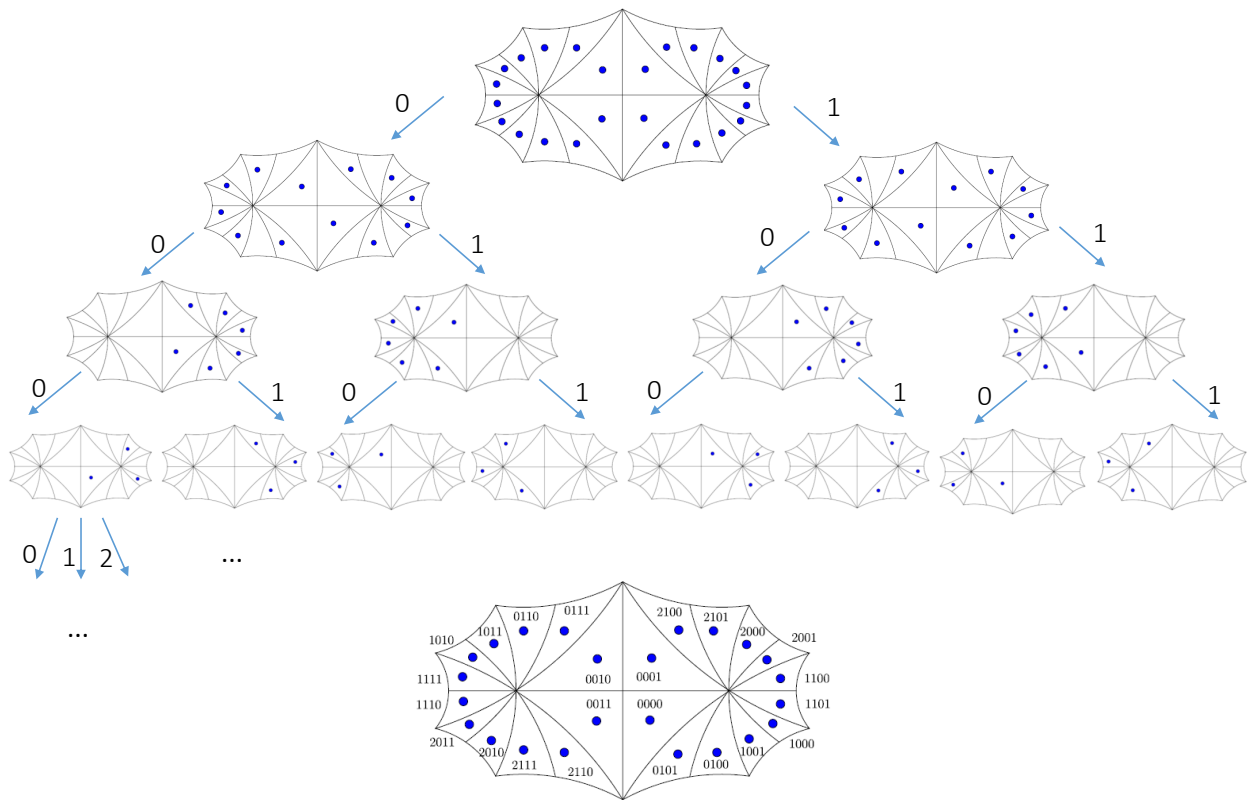


Figura 4.1: Part. Hiperbólico Completo com (2, 6, 6).

Teorema 4.3. [20] *Se C/C' é uma partição geometricamente uniforme que admite um rotulamento isométrico binário e $C = C_0/C_1/\dots/C_n = C'$ é a cadeia de particionamento binária correspondente, então C/C' admite um rotulamento isométrico binário consistente com esta cadeia.*

Os primeiros bits em um rotulamento Ungerboeck são chamados de bits mais significativos e os últimos são chamados de bits menos significativos. Os limitantes para as distâncias podem ser estabelecidos de acordo com os rótulos em seus j -ésimos bits menos significativos. Em geral, a cadeia é escolhida de forma que o valor mínimo da distância ao quadrado entre dois pontos distintos de um mesmo subconjunto seja o máximo possível.

O grupo $G^* = Z_2 \times Z_8$ correspondente ao caso (2, 8, 8) admite a seguinte cadeia de particionamento binária: $G^*/G/Z_4/Z_2$, que está representada na figura 4.2.

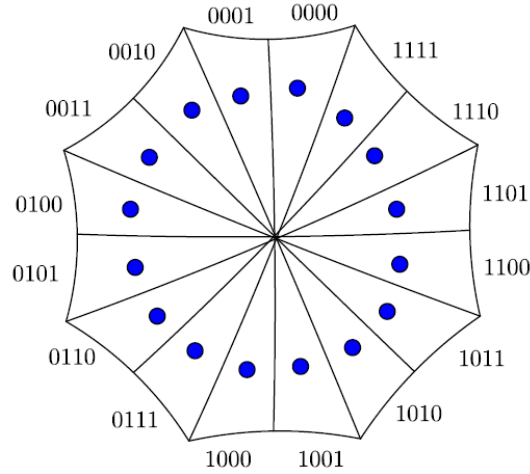


Figura 4.2: Part. Ungerboeck Hiperbólico com $(2, 8, 8)$.

O grupo G^* correspondente a $(4, 4, 4)$ admite a cadeia de particionamento $G^*/G/Z_4/Z_2$, como mostra a figura 4.3.

No caso $(2, 4, 8)$, temos $G^* = Z_2 \times D_{283}$ e $G = D_{283}$, o grupo semi-diedral de ordem 16 e, portanto, D_{283} possui três subgrupos de ordem 8 a saber, o cíclico Z_8 , o quaternion Q_2 e o diedral D_4 . Ou seja, no terceiro nível da cadeia podemos prosseguir de três formas distintas e, além disto, existem outras ramificações para os demais níveis, permitindo desta forma várias possibilidades para a construção de cadeias alternativas. Como ilustração, a cadeia $G^*/G/Z_8/Z_4/Z_2$ está representada na figura 4.4.

A cadeia exibida acima gera um particionamento binário da forma $(Z_2)^n$ com $n = 5$, o que resulta em 32 classes de conjugação para o reticulado correspondente. Note que este fato expõe uma enorme diferença na busca de partições binárias entre os conjuntos de sinais em espaços hiperbólicos e euclidianos. Forney observou em [20], que para reticulados no plano euclidiano podemos obter no máximo 16 classes de conjugação para um particionamento em cadeia. E, de modo geral, o espaço euclidiano n -dimensional admite no máximo 4^n - partições para a cadeia de rótulos. O exemplo acima deixa claro que tal regra não vale para particionamentos em espaços hiperbólicos.

Podemos observar que quanto maior é o gênero de uma superfície compacta, mais gru-

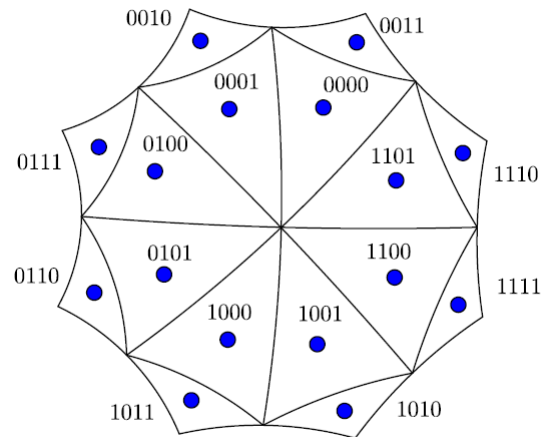


Figura 4.3: Part. Ungerboeck Hiperbólico com $(4, 4, 4)$.

pos tiling e OP -tiling ela possui. Além disto, grupos com cardinalidade cada vez maior são encontrados, e considerando que todas estas superfícies podem ser representadas no disco hiperbólico, tais grupos podem originar cadeias de particionamento cada vez maiores neste ambiente e, eventualmente, algumas destas cadeias podem ser binárias, como as do exemplo 2. Ou seja, para construir cadeias de particionamento binárias maiores associadas com superfícies compactas orientáveis para CGU no ambiente hiperbólico, é necessário considerar superfícies de gênero maior.

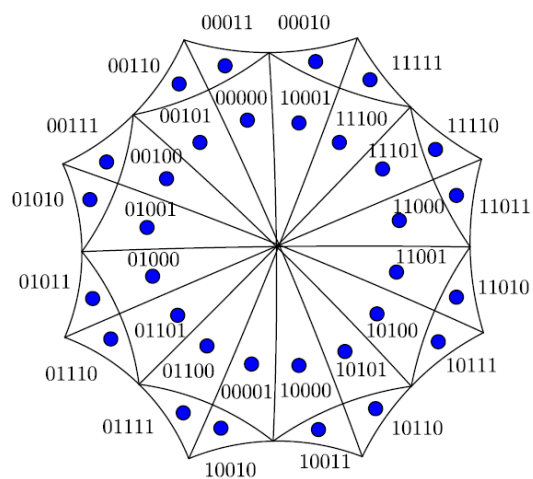


Figura 4.4: Part. Ungerboeck Hiperbólico com $(2, 4, 8)$.

Considerações Finais e Perspectivas Futuras

5.1 Conclusões

O trabalho apresentou rotulamentos para códigos geometricamente uniformes sobre o bitoro por meio dos grupos de automorfismos conformes da superfície e extensões destes por uma involução. Estes grupos também são chamados grupos OP-tiling e grupos tiling, respectivamente. Por esta abordagem foi possível fornecer explicitamente ao menos um grupo de rotulamento para cada uma das 11 tesselações existentes sobre o bitoro oriundas de grupos triangulares fuchsianos e suas respectivas extensões.

Do fato de que os grupos tiling são todos solúveis para o bitoro, todas as cadeias de particionamento para códigos geometricamente uniformes podem ser realizadas por grupos de rótulos abelianos e, em alguns casos, cíclicos.

Outra característica presente é que, dependendo da cardinalidade do grupo de rótulos e da sua estrutura algébrica, foi possível exibir alguns particionamentos Ungerboeck binários para a constelação de sinais. Esta construção foi feita de modo original tanto para a superfície quanto para o ambiente hiperbólico.

Obviamente, a abordagem proposta para a construção de *CGU's* sobre o bitoro por meio dos grupos tiling e OP-tiling pode ser estendida para superfícies compactas orientáveis de gêneros ainda maiores.

Além dos resultados acima expostos, o trabalho expõe um tratamento para abordar conjuntos de sinais finitos com certa regularidade em \mathbb{D} ou \mathbb{H} , que não são geometricamente

uniforme nestes ambientes porém, quando considerados sobre uma superfície, estes conjuntos são geometricamente uniformes.

5.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Tendo em vista resultados obtidos neste trabalho e os meios para obtê-los, apresentamos a seguir algumas sugestões para trabalhos futuros.

- Estudar constelações de sinais em superfícies compactas orientáveis e não orientáveis em gêneros ainda maiores. Além disto, avaliar a possibilidade de tratar tais constelações diretamente por grupos de reflexão (grupos de Coxeter) ao invés de usar os grupos fuchsianos.
- Dado um conjunto de sinais com bastante regularidade porém, sem uniformidade geométrica no ambiente hiperbólico, determinar as superfícies de menor gênero que podem ter estas constelações projetadas, para que elas possam ser consideradas geometricamente uniformes.
- Relacionar os grupos de rótulos das constelações de sinais com a Álgebra de Quatérnios associada a tais constelações.
- Abordar os rotulamentos no sentido de [10], ou seja, permitir que o grupo aja em mais de um ponto inicial para a geração do conjunto de sinais.

REFERÊNCIAS

- [1] AGUSTINI, E. Constelações de Sinais em Espaços Hiperbólicos. Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Brasil, 2002.
- [2] ALBUQUERQUE, C. D. Análise de Construção de Códigos Quânticos Topológicos sobre Variedades Bidimensionais. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, Brasil, 2009.
- [3] ALBUQUERQUE, C. D.; PALAZZO JR., R.; SILVA, E. B. Topological quantum codes on compact surfaces with genus $g \geq 2$. *Journal of Mathematical Physics*, v. 50, p. 023513, 2009.
- [4] ALVES, A. F. Análise dos Emparelhamentos de Arestas de Polígonos Hiperbólicos para a Construção de Constelações de Sinais Geometricamente Uniformes. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, Brasil, 2011.
- [5] ALVES, M. M. S. Rotulamentos de Códigos por Grupos de Simetrias. Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Brasil, 2002.
- [6] ANDERSON, J. *Hyperbolic Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1999.
- [7] ARMSTRONG, M. A. *Groups and Symmetry*. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [8] BEARDON, A. F. *The Geometry of Discrete Groups*. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [9] BENEDITO, C. W. O. Construção de Grupos Fuchsianos Aritméticos Provenientes de Álgebras dos Quatérnios e Ordens Maximais dos Quatérnios Associados a Reticulados Hiperbólicos. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, Brasil, 2014.

-
- [10] BIGLIERI, E.; ELIA, M. Multidimensional modulation and coding for band-limited digital channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 34, n. 4, p. 803-809, 1988.
- [11] BROUGHTON, S. A. Classifying finite group actions on surfaces of low genus. *Journal of Pure and Applied Algebra*, v. 69, p. 233-270, 1990.
- [12] BROUGHTON, S. A.; DIRKS, R. M.; SLOUGHTER M.; VINROOT, C. R. Triangular surface tiling groups for low genus, 2001. Disponível em: <http://works.bepress.com/allen-broughton/11/>
- [13] CARVALHO, E. D. Construção e Rotulamentos de Constelações de Sinais Geometricamente Uniformes em Espaços Euclidianos e Hiperbólicos. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, Brasil, 2001.
- [14] CAVALCANTE, R. G. Uma Análise da Influência da Curvatura do Espaço em Sistemas de Comunicações. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, Brasil, 2008.
- [15] COSTA, S. I. R.; MUNIZ, M.; AGUSTINI, E.; PALAZZO JR., R. Graphs, tessellations and perfect codes on flat tori. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 50, n.10, p. 2363-2377, 2004.
- [16] COXETER, H. M. S.; MOSER, W.O.J. *Generators and Relations for Discrete Groups*. Berlin: Springer, 1972.
- [17] DOMINGUES, H. H. *Espaços Métricos e Introdução à Topologia*. São Paulo: Atual, 1982.
- [18] EDMONDS, A. L.; EWING, J. H.; KULKARNI, R. S. Regular tessellations of surfaces and $(p, q, 2)$ -triangle groups. *Annals of Mathematics, Second Series*, v. 116, n. 1, p. 113-132, 1982.
- [19] FIRBY, P. A.; GARDNER, C. F. *Surface Topology*. 2nd Edition, Ellis Horwood, 1991.
- [20] FORNEY JR., G.D. Geometrically uniform codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 37, n. 5, p. 1241-1260, 1991.

-
- [21] GERÔNIMO, J. R. Extensão da Z_4 -linearidade via Grupo de Simetrias. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, Brasil, 1997.
- [22] HAYKIN, S. Digital Communicatios. New York: Wiley, 1998.
- [23] HERSTEIN, I. N. Abstract Algebra. New York: Wiley, 1995.
- [24] JORGENSEN, T.; NÄÄTÄNEN, M. Surfaces of genus 2: generic of fundamental polygons. The Quarterly Journal of Mathematics, v. 33, p. 451-461, 1982.
- [25] KATOK, S. Fuchsian Groups. Chicago: The University of Chicago Press, 1992.
- [26] KURIBAYASHI, I. On an algebraization of the Riemann Hurwitz relation. Kodai Math. Journal, v. 7, p. 222-237, 1984.
- [27] KUUSALO, T.; NÄÄTÄNEN M. Geometric uniformization in genus 2. Annales Academiae Scientiarum Fennicae, v. 20, p. 401-418, 1995.
- [28] LAZARI, H. Uma Contribuição à Teoria dos Códigos Geometricamente Uniformes Hiperbólicos. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, Brasil, 2000.
- [29] LAZARI, H.; PALAZZO JR., R. Geometrically uniform hyperbolic codes. Computational and Applied Mathematics, v. 24, n. 2, p. 173-192, 2005.
- [30] LEITE, E. J. F. Tópicos de Códigos Geometricamente Uniformes em Espaços Hiperbólicos. Dissertação de Mestrado, PPMAT-UFU, Brasil, 2012.
- [31] LESKOW, L. H. A. Tesselções Hiperbólicas Aplicadas a Codificação de Geodésicas e Códigos de Fonte. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, Brasil, 2011.
- [32] LIMA, E. L. Espaços Métricos. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.
- [33] LIMA, J. D. Identificação e Estrutura Algébrica das Superfícies com e sem Bordos, Provenientes de Mergulhos de Canais Discretos sem Memória. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, Brasil, 2002.
- [34] LOELIGER, H.A., Signal sets matched to groups. IEEE Transactions on Information Theory, v. 37, n. 6, p. 1675-1682, 1991.

-
- [35] MAGNUS, W. *Noneuclidean Tessellations and their Groups*. New York: Academic Press, 1974.
- [36] MUNKRES, J. R. *Topology*. 2nd Edition, USA: Prentice Hall Inc, 2000.
- [37] NÄÄTÄNEN, M.; KUUSALO, T. On arithmetic genus 2 subgroups of triangle groups. *Contemporary Mathematics*, v. 201, p. 21–28, 1997.
- [38] NÄÄTÄNEN, M. Regular n -gons and Fuchsian groups. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae*, v. 7, p. 291-300, 1982.
- [39] QUEIROZ, C. R. O. Q. Códigos Geometricamente Uniformes Derivados de Grafos sobre Anéis Quocientes de Inteiros e de Ordens dos Quatérnios. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, Brasil, 2011.
- [40] RODRIGUES, L. B. Reticulados Hiperbólicos em Espaços Quocientes Mergulhados Isometricamente em Espaços Euclidianos. Dissertação de Mestrado, PPMAT-UFU, Brasil, 2010.
- [41] SILVA, E. B. Constelações de Sinais e Análise de Desempenho no Plano Hiperbólico. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, Brasil, 2000.
- [42] SILVA, E. B.; FIRER, M.; COSTA, S. I. R.; PALAZZO JR.; R. Signal constellations in the hyperbolic plane. *Journal the Franklin Institute* v. 343, p. 69-82, 2006.
- [43] SLEPIAN, D. Group codes for the gaussian channel. *Bell Labs Technical Journal*, v. 37, p. 575-602, 1968.
- [44] SOUZA, M. J. Realizações de Constelações de Sinais Hiperbólicas Densas Associadas a Sistemas Lineares Através das Funções Automorfas. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, Brasil, 2005.
- [45] STILLWELL, J. *Geometry of Surfaces*. New-York: Springer-Verlag, 1992.
- [46] TAKEUCHI, K. Arithmetic triangle groups. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, v. 29, p. 91-106, 1977.

-
- [47] UNGERBOECK, G. Trellis-coded modulation with redundant signal sets part I: introduction. *IEEE Communications Magazine*, v. 2, p. 5–11, 1987.
- [48] UNGERBOECK, G. Trellis-coded modulation with redundant signal sets part II: state of the art. *IEEE Communications Magazine*, v. 2, p. 12– 21, 1987.
- [49] VIEIRA, V. L. Grupos Fuchsianos Aritméticos Identificados em Ordens dos Quatérnios para Construção de Constelações de Sinais. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, Brasil, 2007.
- [50] WALKDEN, C. Hyperbolic Geometry. Lectures Notes, School of Mathematics, University of Manchester, 2012. Disponível em: <http://www.maths.manchester.ac.uk/~cwalkden/hyperbolic-geometry/hyperbolic-geometry.html>