

Universidade Estadual de Maringá
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Tese de Doutorado:

Estabilidade de Ondas Periódicas para
Modelos Dispersivos Não-Lineares

Eleomar Cardoso Júnior

Orientador: Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali

Maringá - PR
Dezembro de 2014

Universidade Estadual de Maringá
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Estabilidade de Ondas Periódicas para
Modelos Dispersivos Não-Lineares

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática, com Área de Concentração em Análise.

Eleomar Cardoso Júnior

Maringá - PR
Dezembro de 2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá, PR, Brasil)

C268e Cardoso Júnior, Eleomar
Estabilidade de ondas periódicas para modelos
dispersivos não-lineares / Cardoso Júnior, Eleomar.
-- Maringá, 2014.
187 f. : il. figs.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin
Natali.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática,
2014.

1. Estabilidade orbital. 2. Estabilidade linear.
I. Natali, Fábio Matheus Amorin, orient. II.
Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências
Exatas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-
Graduação em Matemática. III. Título.

CDD 21.ed. 515.353

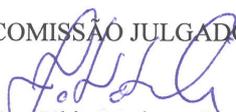
MN-001686

ELEOMAR CARDOSO JÚNIOR

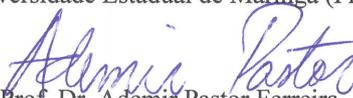
ESTABILIDADE DE ONDAS PERIÓDICAS PARA MODELOS DISPERSIVOS NÃO-LINEARES

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

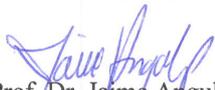
COMISSÃO JULGADORA:



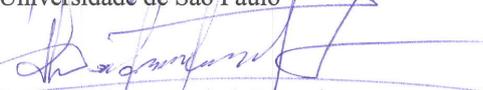
Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)



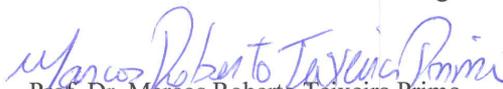
Prof. Dr. Ademir Pastor Ferreira
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Jaime Angulo Pava
Universidade de São Paulo



Prof. Dr. Gleb Germanovitch Doronin
DMA/Universidade Estadual de Maringá



Prof. Dr. Marcos Roberto Teixeira Primo
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 8 de dezembro de 2014.

Local de defesa: Auditório do Departamento de Matemática - DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico esta tese à memória de minha avó,
Rosalina de Souza Soares.

Agradecimentos

Só mesmo quem já concluiu um curso de doutorado pode compreender o quanto somos exigidos nos mais diversos aspectos. O desenvolvimento de uma tese é uma tarefa muito árdua, que requer muito empenho e qualquer incentivo, por menor que possa parecer, pode ser um estímulo para a conclusão de um resultado dentre tantos que nos propomos a estudar.

Eu começo esta seção agradecendo à minha família por toda a confiança a mim depositada. Quero agradecer, de forma especial, à minha mãe, Rosi Soares. Mais que minha progenitora, esta mulher é um exemplo de superação, a minha melhor amiga, a pessoa na qual eu mais confio. Nestes últimos anos, nos momentos de maior dificuldade acadêmica, foi quem eu mais procurei e, mesmo por telefone, suas palavras de conforto me trouxeram muita paz e o sentimento de perseverança para seguir em busca do sonho do título de doutor. Minha mãe é a prova de que, quando há uma sólida educação em casa, apesar das adversidades financeiras e sociais, as pessoas podem sonhar e alcançar objetivos, à priori, inimagináveis.

Outra pessoa a quem sou muito grato é o meu orientador de doutorado, o professor Fábio Matheus Amorin Natali. Deixo registrado que seu empenho e suas ideias foram determinantes para a conclusão desta tese. Admiro muito a sua capacidade de administrar, com eficiência, tantas atribuições, sem deixar de ser um exímio matemático. Espero que esta tese tenha sido apenas o início de uma parceria acadêmica e desejo verdadeiramente manter a amizade que cultivamos durante este ciclo de trabalho.

Agradeço aos professores da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e da Universidade Estadual de Maringá (UEM) que contribuíram significativamente para a minha formação matemática. Deixo um agradecimento especial ao meu orientador de mestrado, o professor Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa, que me deu sugestões valiosas para as minhas escolhas profissionais.

Também sou muito grato aos meus colegas de pós-graduação pelas inúmeras horas de estudo compartilhadas. Agradeço ao André Guerino Castoldi e ao Djeison Benetti pela forma harmoniosa como convivemos em nossa “república estudantil”. Não esquecerei das pizzas e nem dos deliciosos almoços de domingo... Agradeço aos amigos catarinenses que o estudo da matemática me proporcionou e que, de alguma forma, se fizeram presentes ao longo deste processo.

Registro minha gratidão aos professores Ademir Pastor Ferreira, Gleb Germanovitch

Doronin, Jaime Angulo Pava e Marcos Roberto Teixeira Primo por terem aceitado o convite para fazer parte da banca examinadora desta tese e pelas inúmeras sugestões que culminaram no aprimoramento deste texto.

Finalmente, agradeço à agência CAPES pelo suporte financeiro entre março de 2011 e agosto de 2014.

Resumo

Esta tese aborda o estudo qualitativo da estabilidade orbital e linear para três modelos não-lineares associados a equações de evolução. Inicialmente, usando a teoria de Grillakis, Shatah e Strauss, [37], é determinado que as soluções ondas estacionárias periódicas dnoidais da equação de Klein-Gordon com potência polinomial quártica são orbitalmente instáveis em um espaço de Sobolev periódico de funções pares. Num segundo momento, usando a teoria variacional clássica adaptada de Benjamin [14], Bona [17] e Weinstein [66] (ver também Angulo [8]), são determinadas ondas estacionárias periódicas orbitalmente estáveis pelo fluxo em $H_{per}^1([0, L])$ para a equação de Schrödinger Logarítmica. Este estudo aprimora os resultados propostos por Natali e Neves, [55], que haviam obtido a estabilidade orbital para as mesmas ondas estacionárias sobre uma restrição aos espaços de Sobolev periódicos de funções pares. Em ambos os modelos de equações de evolução citados, faz-se a análise espectral de determinados operadores de Hill, por meio de um aprimoramento da teoria de Floquet detalhado por Natali e Neves (ver [55]) e por Natali e Pastor (ver [56]).

Finalmente, é estudada a estabilidade linear de soluções do tipo onda viajante periódica para a Equação Intermediária de Ondas Longas. Nesta última abordagem, considera-se ondas viajantes de média zero dadas explicitamente e usa-se como embasamento a teoria do índice Hamiltoniano de Krein explorada por Deconinck e Kapitula em [31].

Palavras-chave: Estabilidade Orbital, Estabilidade Linear, Equação de Klein-Gordon com potência polinomial quártica, Equação de Schrödinger logarítmica, Equação ILW (Intermediate Long Wave Equation), Resultados de Boa Colocação Local e Global, Operador de Hill e Índice Hamiltoniano de Krein.

Abstract

This thesis is concerned with the qualitative study of the orbital and linear stability associated with three non-linear models of evolution equations. Initially, by using the abstract theory due to Grillakis, Shatah and Strauss, [37], we determine the orbital instability of periodic dnoidal waves at the Sobolev space constituted by even periodic functions. Next, by using the classical variational theory as in Benjamin [14], Bona [17] and Weinstein [66] (see also Angulo [8]), we show the orbital stability of periodic waves in $H_{per}^1([0, L])$ related to the Logarithmic-Schrödinger equation. This study improves previous results proposed by Natali and Neves, [55]. These authors have obtained the orbital stability of periodic waves by restricting the approach to the even periodic Sobolev space. In both models, we present the spectral analysis of the associated Hill's operators, by using an adaptation of Floquet's theory due to Natali and Neves (see [55]) and Natali and Pastor (see [56]).

Finally, we study the linear stability of periodic traveling waves to ILW Equation (Intermediate Long Wave Equation). We consider explicit periodic waves with the mean zero property in order to use the Hamiltonian-Krein index's theory given by Deconinck and Kapitula in [31].

Key-words: Orbital Stability, Linear Stability, Klein-Gordon equation with quintic nonlinearity, Logarithmic Schrödinger equation, ILW equation (Intermediate Long Wave equation), Local and global well-posedness, Hill's operator and Hamiltonian-Krein index.

Lista de Figuras

3.1	Gráfico da função φ_ω tal que $\psi_\omega = \varphi_\omega^2$ é dada por (3.73). Neste caso, $\omega = 1$ ($c = 0$) e o período $L = 3, 2$. O valor do módulo k é de aproximadamente 0,4982.	71
3.2	Gráfico da função φ_ω tal que $\psi_\omega = \varphi_\omega^2$ é dada por (3.73). Neste caso, $\omega = 1$ ($c = 0$) e o período $L = 5, 0$. O valor do módulo k é de aproximadamente 0,9468.	71
3.3	Gráfico da função f , $f(k) = 4K^2\sqrt{k^4 - k^2 + 1}$, $\forall k \in (0, 1)$.	78
3.4	Gráfico da função φ'_c , para $L = 4$ e $c \approx 0,5996827$, onde φ_c é dada por (3.102).	81
3.5	Gráfico da função $v(k)$, associada a (3.115), onde $k \in (0, 1)$.	87
4.1	Plano de fase da equação (4.113). A curva em torno de $(e^{0,5}, 0)$ é a solução par φ de (4.113) sujeita à condição inicial $(\varphi(0), \varphi'(0)) = (2, 0)$.	124
4.2	Comportamento gráfico da função par φ que soluciona (4.113) sujeita a $(\varphi(0), \varphi'(0)) = (2, 0)$.	124
4.3	Plano de fase da equação (4.115). A curva em torno de $(e^{-0,25}, 0)$ é a solução par φ de (4.115) sujeita à condição inicial $(\varphi(0), \varphi'(0)) = (1, 0)$.	125
4.4	Comportamento gráfico da função par φ que soluciona (4.115) sujeita a $(\varphi(0), \varphi'(0)) = (1, 0)$.	125
5.1	Gráfico da função φ_c em (5.35). Neste caso, $L = \pi$, $\delta = 1$ e $k = 0, 5$. O valor de c é de aproximadamente $-1,00282166$.	158
5.2	Gráfico da função φ_c em (5.35). Neste caso, $L = \pi$, $\delta = 1$ e $k = 0, 8$. O valor de c é de aproximadamente $0,058332455$.	158
5.3	Gráfico da função $c(k)$, em (5.36), no caso em que $L = \pi$ e $\delta = 1$.	160
5.4	Gráfico da função $c'(k)$, em (5.37), no caso em que $L = \pi$ e $\delta = 1$.	160
5.5	Suponhamos que $L = \pi$ e $\delta = 1$. A linha contínua caracteriza o comportamento de a dado em (5.60) conforme a variação de k sobre o intervalo $(0, k_1)$. A linha tracejada caracteriza o comportamento de $-\varphi_c(0, 5 \cdot L)$ conforme a variação de k sobre o intervalo $(0, k_1)$.	170
5.6	Seja a situação em que $L = \pi$ e $\delta = 1$. O gráfico acima apresenta o comportamento de $a - \frac{2\pi}{L} \cdot v(L, \delta, k)$ conforme a variação de k sobre o intervalo $(0, k_1)$. A função a está definida em (5.60). A função v , por sua vez, está definida em (5.30).	171
5.7	Gráfico da função $c(k)$, em (5.36), no caso em que $L = \pi$ e $\delta = 0, 5$.	177
5.8	A linha contínua caracteriza o comportamento de a dado em (5.60) conforme a variação de k sobre o intervalo $(0, \kappa_1)$. A linha tracejada caracteriza o comportamento de $-\varphi_c(0, 5 \cdot \pi)$ conforme a variação de k sobre $(0, \kappa_1)$.	178

5.9 O gráfico acima apresenta o comportamento de $a - 2 \cdot v(\pi, \frac{1}{2}, k)$, conforme a variação de k sobre o intervalo $(0, \kappa_1)$. A função a está definida em (5.60). A função v , por sua vez, está definida em (5.30). 178

Sumário

1	Introdução	1
2	Preliminares	17
2.1	Espaços de Sobolev Periódicos	17
2.2	O Teorema de Carathéodory	19
2.3	Funções Elípticas de Jacobi	20
2.3.1	Funções Theta de Jacobi	22
2.3.2	Função Lambda de Heuman $\Lambda_0(\varphi, k)$	22
2.3.3	Função Zeta de Jacobi	23
2.4	Teoria de Floquet e Espectro do Operador de Hill	24
2.4.1	Conceitos Elementares	24
2.4.2	Famílias Isonerciais de Operadores Autoadjuntos	27
2.4.3	Nova Versão da Teoria de Floquet	28
3	Instabilidade Orbital de Soluções do tipo Onda Estacionária Periódica para a Equação de Klein-Gordon com Potência Polinomial Quintica	33
3.1	Resultados de Boa Colocação	34
3.1.1	Problema de Cauchy Abstrato - Equação Não-Linear	35
3.1.2	Boa Colocação Local em $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$	36
3.1.3	Boa Colocação Local em $H_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L])$	46
3.1.4	Dedução de Quantidades Conservadas	47
3.1.5	Boa Colocação Global em $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$	51
3.1.6	Identificação de Blow-up	53
3.1.7	Boa Colocação nos Espaços de Sobolev Periódicos Restritos às Funções Pares	55
3.2	Condições Suficientes para Instabilidade Orbital	56
3.3	Instabilidade Orbital de Ondas Dnoidais	66
3.3.1	Existência de Ondas Estacionárias Dnoidais	67
3.3.2	Análise Espectral I	80
3.3.3	Análise Espectral II	84
3.3.4	Convexidade da função d	88

4	Estabilidade Orbital de Soluções do tipo Onda Estacionária Periódica para a Equação de Schrödinger Logarítmica	93
4.1	Existência, Unicidade e Dependência Contínua de Soluções Fracas	93
4.2	Estabilidade Orbital de Soluções do tipo Onda Estacionária Periódica . . .	119
4.2.1	Existência de Ondas Estacionárias Periódicas	122
4.2.2	Análise Espectral	126
4.2.3	Convexidade da função d	129
4.2.4	Estabilidade Orbital	130
5	Estabilidade Linear de Soluções do tipo Onda Viajante Periódica para a Equação ILW	145
5.1	Condições Suficientes para Estabilidade ou Instabilidade Linear de Ondas Viajantes Periódicas	145
5.2	Estabilidade Linear de Ondas Viajantes Periódicas para a equação ILW . .	151
5.2.1	Existência de Ondas Viajantes Periódicas	154
5.2.2	1º Caso: $L = \pi$ e $\delta = 1$	159
5.2.3	2º caso: $L = \pi$ e $\delta = 0,5$	177
5.2.4	3º caso: $L = \pi$ e $\delta = 4$	178
6	Comentários e Estudos Futuros	181
	Referências Bibliográficas	183

Capítulo 1

Introdução

Em matemática, fenômenos não-lineares são fascinantes, especialmente aqueles quando o objeto em consideração é a obtenção de soluções do tipo onda estacionária ou do tipo onda viajante para equações dispersivas e para equações de evolução. O estudo da existência e estabilidade/instabilidade destas classes de soluções é muito importante para o entendimento de diferentes situações observadas em vários campos científicos tais como fluídos, plasmas e óptica não-linear. As soluções ondas estacionárias e viajantes, as quais estamos interessados neste trabalho, são as do tipo periódico.

No contexto periódico, o estudo da estabilidade orbital de soluções do tipo onda estacionária periódica e de soluções do tipo onda viajante periódica tem sido bastante explorado nos últimos anos. De fato, Benjamin [14] apresentou os primeiros resultados referentes à estabilidade orbital de ondas solitárias e de ondas viajantes periódicas que solucionam a equação de Korteweg-de Vries (a equação KdV)

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (1.1)$$

Angulo, Bona e Scialom, [9], melhoraram os resultados propostos em [14] e estabeleceram a existência de funções cnoidais que determinam ondas viajantes periódicas orbitalmente estáveis para a equação (1.1).

Angulo [8], fazendo uso dos métodos dados por Benjamin, Bona, Grillakis, Shatah, Strauss e Weinstein, ver [14, 17, 36, 37, 66], estabeleceu a existência de funções dnoisdais que determinam soluções ondas estacionárias periódicas orbitalmente estáveis em $H_{per}^1([0, L])$ para a equação de Schrödinger com não-linearidade polinomial cúbica

$$iu_t + u_{xx} + |u|^2u = 0.$$

Ele também deduziu resultados de instabilidade orbital em $H_{per}^1([0, 2L])$ para esta mesma equação e a existência de ondas viajantes periódicas orbitalmente estáveis para a equação KdV modificada

$$u_t + 3u^2u_x + u_{xxx} = 0. \quad (1.2)$$

A abordagem proposta em [8] requereu, dentre outros aspectos, a análise espectral do operador linearizado centrado no perfil da onda associada à equação, análise esta que foi estabelecida em vista do conhecimento explícito de alguns dos seus autovalores de menor valor real.

Angulo e Natali, [11], baseando-se nos resultados de estabilidade mencionados acima, determinaram a estabilidade orbital para soluções ondas viajantes periódicas da equação de Benjamin-Ono

$$u_t + 2uu_x + [\mathcal{H}(u)]_{xx} = 0, \quad (1.3)$$

onde \mathcal{H} é a transformada de Hilbert

$$\mathcal{H}(u) = \frac{1}{L} p. v. \int_0^L \cotg \left[\frac{\pi(x-y)}{L} \right] u(y) dy.$$

Além disto, em [11], os autores determinaram a estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas positivas que solucionam a equação KdV (1.1) e a equação KdV modificada (1.2). Eles exploraram propriedades da positividade da transformada de Fourier da onda e o Teorema do Somatório de Poisson para a compreensão do comportamento espectral do operador linearizado associado a cada uma das equações. Além disto, seguindo o mesmo direcionamento, Angulo e Natali, [12], determinaram a estabilidade orbital para ondas viajantes periódicas do tipo dnoidal que solucionam a equação KdV com potência polinomial crítica

$$u_t + 5u^4 u_x + u_{xxx} = 0.$$

Mais que isto, em [12], foram determinadas situações de estabilidade e de instabilidade orbital para ondas estacionárias periódicas dnoidais que solucionam a equação de Schrödinger não-linear polinomial crítica

$$iu_t + u_{xx} + |u|^4 u = 0.$$

Johnson, em [43], apresentou uma outra abordagem que possibilita o estudo da estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas que solucionam modelos associados a variações da equação do tipo

$$u_t + u_{xxx} + [f(u)]_x = 0, \quad (1.4)$$

onde f é uma função suave sujeita a certas condições de convexidade. A variedade em que tais soluções são consideradas é descrita por quatro parâmetros e a estabilidade orbital é tratada em vista de um conjunto de condições sobre a Hessiana proveniente de ações clássicas associadas à variedade em questão. Johnson [43] estruturou o estudo da estabilidade orbital sem a necessidade de fixação do período do perfil. Contudo, uma dificuldade encontrada na leitura de [43] está na falta de clareza na utilização de determinadas desigualdades triangulares e na consequente obtenção das ondas viajantes por parte do autor. Consideremos $c > 0$ e suponhamos que exista uma função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, suave, tal que

$$u(x, t) = \varphi(x - ct), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

seja uma solução onda viajante da equação (1.4). Determina-se a existência de uma função suave Ψ tal que $\Psi' = f$ e $\Psi(0) = 0$ e, existem constantes reais τ_1 e τ_2 , tais que

$$\frac{(\varphi')^2}{2} - \frac{c\varphi^2}{2} + \Psi(\varphi) - \tau_1\varphi = \tau_2. \quad (1.5)$$

Uma outra situação a ser pontuada é que τ_2 ser diferente de 0 é uma condição suficiente para o estudo da estabilidade orbital em vista de [43]. Em um trabalho recente, Andrade [6] obteve situações de estabilidade orbital para modelos associados à proposta (1.4) no caso em que a constante τ_2 em (1.5) é nula.

Um modelo que tem chamado a atenção de alguns pesquisadores é o que se associa a equação de Klein-Gordon não-linear

$$u_{tt} - u_{xx} + g(|u|^2)u = 0, \quad (1.6)$$

onde $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função a valores complexos e g é uma função suave.

Trabalhos sobre estabilidade referentes à equação (1.6) são recentes no contexto de funções periódicas. De fato, Hakkaev [40] determinou a estabilidade linear de ondas estacionárias periódicas que solucionam modelos associados à equação de Klein-Gordon (1.6), no caso em que g é um determinado polinômio. Este trabalho foi fundamentado nas pesquisas de Stanislavova e Stefanov, [65], que, por sua vez, estão baseadas na teoria dos operadores “quadratic pencils”. Jones, Marangell, Miller e Plaza, [44], também fizeram o estudo da estabilidade linear de ondas estacionárias periódicas para a equação de Klein-Gordon não-linear, usando como referência o ponto de vista da análise espectral do problema linearizado e da teoria de modulação da onda.

Seguindo a mesma linha das referências [11] e [12], Natali e Pastor, em [57], determinaram a existência de famílias de soluções do tipo onda estacionária periódica para a equação de Klein-Gordon não-linear (1.6), nos casos em que $g(s) = s$ e $g(s) = 1 - s$. Nesta abordagem, também foram usados resultados da teoria abstrata estabelecida por Grillakis, Shatah e Strauss em [37] e [38] e, os autores provaram os primeiros resultados de instabilidade orbital para ondas estacionárias cnoidais que solucionam uma equação diferencial de evolução definida em domínios periódicos. A análise espectral, neste contexto, foi abordada levando em consideração resultados propostos pela Teoria de Floquet.

Consideremos a equação de Klein-Gordon não-linear com potência polinomial quártica

$$u_{tt} - u_{xx} + u - |u|^4u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+. \quad (1.7)$$

Notemos que a equação (1.7) é uma versão particular da equação (1.6), no caso em que $g(s) = 1 - s^2$. É conhecido que (1.7) é a equação que descreve a quântica relativística para partículas de spin nulo. Os resultados dados por [11], [12] e [57] motivaram o estudo que permite estabelecer a instabilidade orbital, em um espaço de Sobolev periódico de funções pares, das soluções ondas estacionárias periódicas oriundas de funções dnoidais que satisfazem a equação de Klein-Gordon (1.7). Mais detalhes sobre este estudo serão explorados adiante neste texto.

Um outro estudo a se considerar nesta tese é o estabelecimento da estabilidade orbital de soluções do tipo onda estacionária periódica para a equação de Schrödinger não-linear logarítmica

$$iu_t + u_{xx} + \log(|u|^p)u = 0, \quad (1.8)$$

onde $p \geq 1$ é um número inteiro e $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função a valores complexos. A equação descrita em (1.8), conforme Białynicki-Birula e Sowiński, [15] e suas referências, modela estudos relacionados à mecânica quântica, à física nuclear, à óptica e à geofísica.

Alguns estudos foram publicados acerca da estabilidade orbital de ondas estacionárias que solucionam a equação (1.8), no caso específico em que $p = 2$. Cazenave [27] e Cazenave e Lions [29] usaram técnicas variacionais para determinar a estabilidade orbital de ondas solitárias associadas à equação

$$iu_t + \Delta u + \log(|u|^2)u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \quad (1.9)$$

onde N é um número inteiro suficientemente grande. Em [16], os autores usaram a teoria abstrata de Grillakis, Shatah e Strauss, [37], para determinar a estabilidade orbital de ondas solitárias que solucionam a equação (1.9) em um espaço a funções radiais.

No contexto de espaços de Sobolev periódicos, usando novamente os preceitos deduzidos por [37], Natali e Neves [55] obtiveram ondas estacionárias periódicas $e^{ict}\varphi$ que são soluções de (1.8) orbitalmente estáveis no contexto do espaço de Sobolev de funções pares $H_{per,e}^1([0, L])$, no caso em que $p = 2$.

A referência [55] (ver também [58] e [59]) trouxe inovações no sentido que apresentou uma releitura da Teoria de Floquet que permite o conhecimento de características espectrais do operador linearizado associado à equação por meio de uma abordagem numérica. Esta mesma abordagem pode ser usada para determinar a existência de famílias de operadores que preservam tal propriedade. Uma contribuição, neste sentido, é que o estudo da estabilidade orbital faz-se sem a necessidade do conhecimento da solução explícita. A referência [55], portanto, se difere de trabalhos publicados anteriormente acerca da estabilidade orbital em espaços de funções periódicas, pois, as ondas estacionárias que solucionam a equação (1.8) e que foram classificadas como orbitalmente estáveis não estão necessariamente associadas a classes de funções circulares ou a classes de funções elípticas de Jacobi. Um exemplo disto que está comentado, é que em [55] foi obtida a estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas que solucionam a equação 3-KdV

$$u_t + 4u^3u_x + u_{xxx} = 0.$$

Por outro lado, em [55] foram apresentados alguns descuidos em sua abordagem no que tange a estabilidade da equação (1.9). Natali e Neves comentaram que a equação (1.8) está bem colocada globalmente em vista da teoria proposta por Cazenave em [27], mas, não se apresentou algum esboço de demonstração. No caso das teorias de estabilidade orbital existentes deve-se, no mínimo, mostrar a existência de soluções e a dedução de quantidades conservadas. A não-linearidade logarítmica, presente em (1.8), acarreta em

uma grande dificuldade no sentido que a função $x \in \mathbb{R} \mapsto x \log(|x|)$ não é diferenciável na origem. Esta perda de suavidade interfere, por exemplo, em questões relacionadas à solubilidade local, o que não nos permite fazer a aplicação de argumentos de contração para deduzir a existência e unicidade de soluções generalizadas e tampouco a dedução da dependência contínua de soluções com relação à escolha das condições iniciais no referido problema de Cauchy. Entretanto, nos trabalhos [24], [28] e [29], os autores solucionaram equações similares a (1.8). Eles resolveram problemas regularizados ou aproximados e, em vista de estimativas uniformes para as soluções aproximadas obtidas, foram deduzidas convergências fracas que determinaram que tais problemas têm uma única solução no sentido fraco e a dependência contínua do problema de Cauchy foi observada em apropriados espaços de Banach. Nesta tese, usaremos o Método de Galerkin e algumas desigualdades logarítmicas como estratégia para demonstrar a boa colocação da equação (1.8) referente ao espaço de Hilbert $H_{per}^1([0, L])$.

No recente preprint [56], foram aperfeiçoados os resultados apresentados por [55], de maneira que se obteve uma espécie de uniformidade periódica das propriedades espectrais do operador linearizado anteriormente observadas para uma classe “mais restrita” de funções. Usando esta alteração e a já referida teoria proposta por Grillakis, Shatah e Strauss, [37], Natali e Pastor (ver [56]) determinaram ondas viajantes periódicas que solucionam a equação KdV Logarítmica

$$u_t + u_{xxx} + 2[\log(|u|)u]_x = 0,$$

as quais são orbitalmente estáveis pelo fluxo em $H_{per}^1([0, L])$.

Ao longo deste texto, usaremos como inspiração os trabalhos [12], [55] e [56], de modo a mostrar que as ondas estacionárias periódicas obtidas em [55] são soluções orbitalmente estáveis para a equação (1.8) no espaço $H_{per}^1([0, L])$, onde $L > 0$ é o período do perfil da relacionada onda.

Além do estudo da estabilidade orbital de ondas estacionárias periódicas, acima comentado, esta tese também se ocupará em apresentar a análise da estabilidade linear de ondas viajantes periódicas que solucionam a equação ILW (Intermediate Long Wave Equation), em português, a Equação Intermediária de Ondas Longas. Sejam $L > 0$ e $\delta > 0$ fixados. Consideremos o operador \mathcal{T}_δ definido por

$$\mathcal{T}_\delta(g)(x) := i \sum_{\kappa \in \mathbb{Z} - \{0\}} \coth\left(\frac{2\kappa\pi\delta}{L}\right) \hat{g}(\kappa) e^{\frac{2i\kappa\pi x}{L}}, \quad (1.10)$$

onde $x \in \mathbb{R}$, g é uma função L -periódica suave e, $\hat{g}(\kappa) = \frac{1}{L} \int_0^L g(x) e^{-\frac{2i\kappa\pi x}{L}} dx$, $\forall \kappa \in \mathbb{Z}$, é a Transformada de Fourier Periódica associada a g . A equação ILW é descrita por

$$u_t + 2uu_x + \frac{1}{\delta}u_x + (\mathcal{T}_\delta \partial_x u)_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+. \quad (1.11)$$

A equação integro-diferencial não-linear (1.11) descreve a propagação de ondas gravitacionais internas longas em um fluido estratificado de profundidade finita. Segundo

Parker, [61] e suas referências, esta equação também modela o movimento de ondas longas no contexto atmosférico e oceânico, o comportamento de ondas não-lineares em fluxos de cisalhamento e o “fenômeno de águas mortas” introduzido por Ekman [33].

Conforme [61], vemos que se o parâmetro $\delta \rightarrow 0^+$ em (1.11), tal equação pode ser formalmente interpretada como a variação da equação KdV

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Se $\delta \rightarrow \infty$, (1.11) reduz-se formalmente à equação de Benjamin-Ono (1.3).

A derivação física da equação (1.11) no conjunto de funções periódicas requer que a função u satisfaça

$$\int_0^L u(\xi) d\xi = 0,$$

o que pode ser sempre imposto em (1.11) em virtude de observarmos que qualquer termo não-nulo pode ser removido após a aplicação de uma transformação Galileana da forma $v(x, t) := u(x + 2\gamma t, t) - \gamma$. Esta afirmação é determinada pelo mesmo raciocínio em que Angulo, Bona e Scialom, [9], impuseram que as funções que originariam as soluções cnoidais da equação KdV (1.1) são de média zero.

Por outro lado, a equação (1.11) é um caso particular da equação de evolução

$$u_t + (p + 1)u^p u_x - (\mathcal{M}u)_x = 0, \quad (1.12)$$

onde \mathcal{M} é um operador diferencial ou pseudo-diferencial no contexto de funções periódicas. O operador \mathcal{M} é definido como um operador multiplicador de Fourier por

$$\widehat{\mathcal{M}g}(\kappa) = \zeta(\kappa)\widehat{g}(\kappa), \quad \forall \kappa \in \mathbb{Z}, \quad (1.13)$$

onde o símbolo ζ de \mathcal{M} é assumido ser uma função mensurável, localmente limitada sobre \mathbb{R} , que satisfaz a condição

$$A_1|\kappa|^{m_1} \leq \zeta(\kappa) \leq A_2(1 + |\kappa|)^{m_2}, \quad \forall \kappa \in \mathbb{Z},$$

ressaltando que $0 \leq m_1 \leq m_2$, $A_1 > 0$ e $A_2 > 0$.

Abdelouhab, Bona, Felland e Saut, [1], provaram que o problema de Cauchy associado à equação (1.11) está bem colocado globalmente em espaços de Sobolev a funções periódicas de certa regularidade. Esta informação estabelece que a equação (1.11) admite quantidades conservadas sobre o espaço $L_{per}^2([0, L])$. A quantidade conservada

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (\mathcal{M}u)u dx - \frac{1}{p+2} \int_0^L u^{p+2} dx,$$

por exemplo, é válida na situação em que $p = 1$, $\mathcal{M} = -\frac{1}{\delta} - \mathcal{T}_\delta \partial_x$ e nos possibilita interpretar (1.11) como uma equação Hamiltoniana abstrata.

Ablowitz, Fokas, Satsuma e Segur, [2], formalizaram a dedução de uma classe de soluções ondas viajantes periódicas para a equação (1.11). Estes autores usaram como

referência séries de funções e algumas identidades que associam funções elípticas previamente conhecidas. Usando uma outra estratégia, Miloh [53] obteve funções definidas por meio de séries que determinam ondas viajantes periódicas ou ondas viajantes solitárias para a equação (1.11). Parker, [61], supondo formalmente a existência de uma função regular f para qual

$$u(x, t) = i \frac{\partial}{\partial x} \left[\ln \left(\frac{f(x + i\delta, t)}{f(x - i\delta, t)} \right) \right], \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

é uma solução de (1.11), determinou uma classe mais ampla de soluções para a equação (1.11) que compreende, como um caso particular, as soluções estabelecidas por [2] e [53].

Na literatura, encontramos algumas contribuições referentes ao estudo da estabilidade linear de ondas solitárias que solucionam equações que satisfazem a proposta de (1.12). Kapitula e Stefanov, [46], determinaram resultados de estabilidade linear para a equação KdV

$$u_t + (p + 1)u^p u_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.14)$$

fazendo uso do índice Hamiltoniano de Krein na intenção de obter propriedades espectrais referentes ao estudo de um problema associado ao operador linearizado determinado em vista da equação (1.14). Adaptações do método em questão também foram usadas na obtenção de resultados de estabilidade linear para ondas solitárias que solucionam a equação de Benjamin-Bona-Mahony (a equação BBM)

$$u_t + u_x - u_{txx} + (u^{p+1})_x = 0.$$

Lopes, [51], apresentou condições suficientes para a instabilidade linear de ondas solitárias que solucionam a equação (1.14), no caso em que $p = 1$. Neste estudo, foram usados argumentos provenientes da teoria dos semigrupos de operadores. Em [48], Lin propôs uma outra interessante abordagem referente à estabilidade linear de ondas solitárias que solucionam o modelo (1.14).

Com relação ao caso periódico, o operador $J = \partial_x$, por exemplo, não é invertível sobre o espaço de Hilbert $L^2_{per}([0, L])$. Para que pudéssemos aplicar a teoria proposta por [51] seria preciso que o operador $J = \partial_x$ fosse invertível. A teoria abstrata de Grillakis, Shatah e Strauss, [37], também não se aplica neste estudo de estabilidade linear devido à não verificação da invertibilidade de um operador associado a $J = \partial_x$.

Entretanto, Deconinck e Kapitula, [31], restringindo a abordagem sobre os espaços de funções de média zero,

$$H_0 := \left\{ f \in L^2_{per}([0, L]); \int_0^L f(\xi) d\xi = 0 \right\},$$

estabeleceram a estabilidade linear de ondas viajantes periódicas que solucionam (1.14), no caso $p = 1$. O método usado pelos autores foi claramente inspirado na proposta de Haragus e Kapitula, [41]. Em [31], os autores usaram os preceitos do índice Hamiltoniano de Krein e requereram o conhecimento explícito dos cinco primeiros autovalores do

operador linearizado associado à equação (1.14), a fim de determinar a estabilidade ou a instabilidade linear de ondas viajantes periódicas senoidais, cnoidais e dnoidais que solucionam a referida equação KdV. Mais informações sobre o índice Hamiltoniano de Krein são apresentadas detalhadamente por Kapitula e Promislow, [45].

Ressaltamos que Bronski, Johnson e Kapitula, [21], usando a teoria dos operadores “quadratic pencils”, também obtiveram resultados de estabilidade linear para soluções periódicas da equação KdV (1.14). Angulo e Natali, [10], apresentaram uma teoria usada no estudo da estabilidade linear de ondas viajantes periódicas que solucionam a equação (1.12). Os autores deduziram a estabilidade linear de ondas cnoidais para a equação BBM modificada

$$u_t + u_x - u_{txx} + 3u^2u_x = 0$$

e de ondas dnoidais para a equação KdV modificada (1.2).

Suponhamos que

$$u(x, t) = \varphi(x - ct), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

onde $c > 0$, seja uma solução da equação onda viajante periódica da equação (1.12). Desta maneira, por procedimentos de integração, existe uma constante real A tal que

$$-\mathcal{M}\varphi - c\varphi + \varphi^{p+1} = A.$$

A distinção da abordagem proposta por [10] e [31] está no fato de que a primeira referência exige que $A = 0$ algo que, de acordo com a segunda proposta, não precisa ser requisitado. A identidade exigida por Angulo e Natali, [10], não é satisfeita no caso das ondas viajantes periódicas de média zero que solucionam a equação ILW (1.11), o que inviabiliza a utilização deste método na determinação da referida estabilidade linear. Nesta tese, usaremos noções tratadas em [12], [31] e [61], de modo a apresentarmos os primeiros resultados sobre a existência de ondas viajantes periódicas de (1.11) que são soluções linearmente estáveis no espaço de Hilbert H_0 .

A presente tese está organizada em capítulos que abordam separadamente a análise da estabilidade/instabilidade orbital ou linear para cada uma das equações acima propostas. Abaixo, mostraremos, em linhas gerais, o que abordaremos em cada um dos capítulos.

No Capítulo 2, apresentaremos alguns conceitos preliminares que serão indispensáveis para o estudo da estabilidade a ser discutido. Veremos noções e propriedades referentes aos espaços de Sobolev Periódicos, ao Teorema de Carathéodory e às funções elípticas de Jacobi. Além disto, mostraremos brevemente as noções pertinentes à Teoria de Floquet e ao estudo do espectro de um operador de Hill. Finalmente, apresentaremos um esboço da Teoria de Floquet, devido a Natali e Neves, [55], que permite determinar propriedades espectrais de determinados operadores autoadjuntos por meio de uma abordagem numérica, mais precisamente, sem a necessidade de utilização da solução explícita para o modelo em questão.

No Capítulo 3 desta tese, trataremos aspectos relativos à equação de Klein-Gordon não-linear com potência polinomial quártica (1.7),

$$u_{tt} - u_{xx} + u - |u|^4u = 0.$$

Inicialmente, notando que o potencial associado à equação (1.7) é localmente Lipschitz, mostraremos que o problema de Cauchy associado a esta equação é bem colocado localmente nos espaços de Sobolev $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$ e $H_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L])$. Usando a regularidade inerente às soluções do problema de Cauchy abordado, mostraremos que, em um espaço de Sobolev $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$, a equação (1.7) admite pelo menos duas quantidades conservadas:

$$\mathcal{E}(U(\cdot, t)) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[|u_x(\cdot, t)|^2 + |u_t(\cdot, t)|^2 + |u(\cdot, t)|^2 - \frac{1}{3} |u(\cdot, t)|^6 \right] dx$$

e

$$\mathcal{F}(U(\cdot, t)) := \mathcal{F}(u, u_t) = \text{Im} \int_0^L \bar{u} u_t dx = \int_0^L (\text{Re } u \text{ Im } u_t - \text{Im } u \text{ Re } u_t) dx,$$

onde $U = (u, u_t) = (\text{Re } u, \text{Im } u_t, \text{Im } u, \text{Re } u_t)$ e $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ denota o módulo do número complexo $z = x + iy$, com $x = \text{Re}(z)$ e $y = \text{Im}(z)$. Estas leis de conservação permitirão adaptar a teoria proposta por [64] e garantiremos que a equação (1.7) está bem colocada globalmente, para dados iniciais pequenos, no espaço de Sobolev $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$. Os resultados listados serão adaptados e obteremos uma análise similar para o caso de tratarmos o problema de boa colocação em espaços de Sobolev Periódicos de funções pares.

Nesta conjectura, observaremos que a equação de Klein-Gordon (1.7) pode ser interpretada como uma equação Hamiltoniana abstrata, $U_t = J\mathcal{E}'(U)$, onde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é um operador linear, antissimétrico e bijetor. Assim, a teoria dada em Grillakis, Shatah e Strauss, [37], será aplicada para estudarmos a estabilidade/instabilidade orbital de soluções do tipo onda estacionária periódica para a equação (1.7).

Em nosso estudo, faremos a suposição de que existem $c \in \mathbb{R}$ e uma função suave $\varphi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de forma que a função $u_c(x, t) = e^{ict} \varphi_c(x)$ seja uma solução do tipo onda estacionária periódica da equação (1.7). Substituindo este tipo de solução em (1.7), resulta que

$$-\varphi_c'' + (1 - c^2)\varphi_c - \varphi_c^5 = 0. \tag{1.15}$$

Façamos $\omega := 1 - c^2$ e definamos $\varphi_\omega = \varphi_c$. Multiplicando a identidade em (1.15) por φ_ω' e usando propriedades de integração, teremos a existência de uma constante B_{φ_ω} não-nula, de tal forma que

$$[\varphi_\omega']^2 = \frac{1}{3}(-\varphi_\omega^6 + 3\omega\varphi_\omega^2 + 6B_{\varphi_\omega}). \tag{1.16}$$

Soluções periódicas para a equação (1.15) serão estabelecidas a partir da imposição de condições ao comportamento das raízes de um determinado polinômio. Com efeito, fazendo a mudança de variáveis $\varphi_\omega = \sqrt{\psi_\omega}$, de (1.16), obteremos

$$[\psi'_\omega]^2 = \frac{4}{3}(-\psi_\omega^4 + 3\omega\psi_\omega^2 + 6B_{\varphi_\omega}\psi_\omega),$$

o que nos leva a determinar que

$$[\psi'_\omega(\xi)]^2 = \frac{4}{3}Q(\psi_\omega(\xi)), \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

com $Q(t) = -t^4 + 3\omega t^2 + 6B_{\varphi_\omega}t$. Se η_1, η_2 e η_3 forem três raízes do polinômio $Q(t)$, com $\eta_1 < 0 < \eta_2 < \eta_3$, podemos reescrever $Q(t) = t(t - \eta_1)(t - \eta_2)(\eta_3 - t)$ e, por meio de identidades propostas por Byrd e Friedman, [22], deduziremos que

$$\psi_\omega(\xi) = \frac{\eta_3 \operatorname{dn}^2\left(\frac{2}{\sqrt{3g}}\xi; k\right)}{1 + \beta^2 \operatorname{sn}^2\left(\frac{2}{\sqrt{3g}}\xi; k\right)},$$

onde $\eta_2 \leq \psi_\omega(\xi) \leq \eta_3, \forall \xi \in \mathbb{R}$,

$$\beta^2 = -\frac{\eta_3 k^2}{\eta_1} > 0, \quad g = \frac{2}{\sqrt{\eta_3(\eta_2 - \eta_1)}} \quad \text{e} \quad k^2 = -\frac{\eta_1(\eta_3 - \eta_2)}{\eta_3(\eta_2 - \eta_1)}.$$

Uma aplicação do clássico Teorema da Função Implícita nos levará a determinar que, para cada $L > \pi$, existe um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, de tal maneira que a aplicação $c \in I \mapsto \varphi_c \in H_{per,e}^s([0, L])$, onde $s \gg 1$, é suave e, a função φ_c é uma solução regular da equação (1.15), para cada $c \in I$. O estudo da instabilidade orbital das ondas estacionárias periódicas que solucionam a equação (1.7) considerará a dedução explícita desta última classe de funções.

Em seguida, consideremos o funcional $\mathcal{G}_c := \mathcal{E} - c\mathcal{F}$, definido a partir da curva acima esboçada $c \in I \mapsto \varphi_c \in H_{per,e}^s([0, L])$. O elemento $(\varphi_c, i c \varphi_c) = (\varphi_c, c \varphi_c, 0, 0)$ é um ponto crítico de \mathcal{G}_c . Esta informação motivará a dedução do operador linearizado

$$\mathcal{L}_{\varphi_c} := \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{Re, \varphi_c} & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{Im, \varphi_c} \end{pmatrix},$$

de forma que

$$\mathcal{L}_{Re, \varphi_c} := \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + 1 - 5\varphi_c^4 & -c \\ -c & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{L}_{Im, \varphi_c} := \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + 1 - \varphi_c^4 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}.$$

De modo a compreender o comportamento dos elementos não-positivos do espectro dos operadores $\mathcal{L}_{Re, \varphi_c}$ e $\mathcal{L}_{Im, \varphi_c}$, estudaremos, respectivamente, características do espectro dos operadores

$$\mathcal{L}_{1, \varphi_c} := -\partial_x^2 + (1 - c^2) - 5\varphi_c^5$$

e

$$\mathcal{L}_{2,\varphi_c} := -\partial_x^2 + (1 - c^2) - \varphi_c^5.$$

Em [55], os autores apresentaram uma adaptação da Teoria de Floquet em [58], o que permite conhecer características espectrais dos operadores $\mathcal{L}_{1,\varphi_c}$ e $\mathcal{L}_{2,\varphi_c}$ por meio de uma abordagem numérica. Estas informações combinadas determinarão o comportamento do espectro não-positivo do operador \mathcal{L}_{φ_c} . Tal abordagem será vista como válida para qualquer que seja o parâmetro $c \in I$.

Restrito ao espaço de Hilbert $[L_{per,e}^2([0, L])]^4$ e, sendo $[H_{per,e}^2([0, L]) \times L_{per,e}^2([0, L])]^2$ o seu domínio, veremos que o operador autoadjunto \mathcal{L}_{φ_c} admite um único autovalor negativo, o qual é simples. Além disto, 0 é um autovalor simples do operador \mathcal{L}_{φ_c} associado à autofunção $(0, 0, \varphi_c, -c\varphi_c)$.

Finalmente, consideremos a função

$$d(c) = \mathcal{E}(\varphi_c, c\varphi_c, 0, 0) - c\mathcal{F}(\varphi_c, c\varphi_c, 0, 0), \quad \forall c \in I.$$

Analisaremos explicitamente que $d''(c) < 0, \forall c \in I$. A teoria descrita em [37] estabelecerá que a função $u_c(x, t) = e^{ict}\varphi_c(x)$ determina, para qualquer que seja $c \in I$, uma onda estacionária periódica orbitalmente instável para a equação (1.7), no espaço de Hilbert $Y := H_{per,e}^1([0, L]) \times L_{per,e}^2([0, L])$. Isto é, existe $\epsilon > 0$ tal que, para cada $\delta > 0$, existe um par $(u_0, v_0) \in Y$, de tal forma que $\|(u_0, v_0) - (\varphi_c, ic\varphi_c)\|_Y < \delta$ e a função $\vec{u} = (u, u_t)$, solução generalizada de (1.7) em Y com $\vec{u}(\cdot, 0) = (u_0, v_0)$, satisfaz

$$\inf_{\theta \in \mathbb{R}} \|\vec{u}(\cdot, t) - e^{i\theta}(\varphi_c, ic\varphi_c)\|_Y \geq \epsilon,$$

para algum “tempo” $t \geq 0$.

Seja $p \geq 1$, um número inteiro. No Capítulo 4 desta tese, mostraremos o estudo da estabilidade orbital de ondas estacionárias periódicas que solucionam a equação de Schrödinger Logarítmica (1.8),

$$iu_t + u_{xx} + \log(|u|^p)u = 0.$$

Inicialmente, como já posto, mostraremos que a equação (1.8) está bem colocada globalmente no espaço $H_{per}^1([0, L])$. Para tal, usaremos o método de Galerkin, seguindo preceitos de Cazenave e Lions, [26] e [49] respectivamente, que permitirão estabelecer a existência de soluções regulares a problemas aproximados ao problema de Cauchy associado à equação (1.8). Em vista de desigualdades logarítmicas, serão observadas limitações uniformes que implicarão na validade de algumas convergências fracas que levarão à determinação da existência e da unicidade de solução fraca, em $H_{per}^1([0, L])$, para o problema de valor inicial associado a (1.8). Além disto, o método comentado também estabelecerá a validade das quantidades conservadas

$$\mathcal{E}(u(\cdot, t)) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[|u_x(\cdot, t)|^2 + \left(\frac{p}{2} - \log(|u(\cdot, t)|^p) \right) |u(\cdot, t)|^2 \right] dx$$

e

$$\mathcal{F}(u(\cdot, t)) := \frac{1}{2} \int_0^L |u(\cdot, t)|^2 dx.$$

Tais quantidades, por sua vez, serão suficientes para a determinação da referida boa colocação global da equação (1.8).

Seguindo a mesma proposta estruturada para a equação (1.7), suponhamos que $c \in \mathbb{R}$ e que exista uma função $\varphi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de tal forma que $u_c(x, t) = e^{ict}\varphi_c(x)$, $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, seja uma solução da equação (1.8). Substituindo u_c em (1.8), resulta em

$$-\varphi_c'' + (1 - c^2)\varphi_c - \log(|\varphi_c|^p)\varphi_c = 0. \quad (1.17)$$

Soluções periódicas para (1.17) podem ser determinadas em vista do estudo do plano de fase estabelecido por esta equação. Se p for um inteiro par, a equação (1.17) apresenta três pontos de equilíbrio: dois pontos de centro e um ponto de sela. Se p for um inteiro ímpar, a equação (1.17) apresenta dois pontos de equilíbrio: um ponto de centro e um ponto de sela. Em ambas as situações, $(0, 0)$ é um ponto de sela e $(e^{\frac{c}{p}}, 0)$ é um ponto de centro. Em torno do par $(e^{\frac{c}{p}}, 0)$, determinamos soluções periódicas e estritamente positivas para a equação (1.17), todas de período minimal $L > \frac{2\pi}{\sqrt{p}}$ arbitrário. Além disto, a função

$$\varrho_c(x) = e^{\frac{1}{2} + \frac{c}{p}} e^{-\frac{px^2}{4}}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

caracteriza uma onda solitária para a equação (1.17). O estudo da estabilidade orbital será desenvolvido para as funções φ_c estritamente positivas, pares e periódicas de tal forma que, no plano de fase, (φ_c, φ_c') encontra-se no interior da região delimitada pela curva (ϱ_c, ϱ_c') .

Assim como no estudo da equação (1.7), a função φ_c , acima descrita, determina um ponto crítico para o funcional $\mathcal{G}_c := \mathcal{E} + c\mathcal{F}$ e, por consequência disto, estabeleceremos o operador linearizado

$$\mathcal{L}_{\varphi_c} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{Re, \varphi_c} & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{Im, \varphi_c} \end{pmatrix},$$

onde

$$\mathcal{L}_{Re, \varphi_c} := -\partial_x^2 + c - \log(|\varphi_c|^p) - p \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_{Im, \varphi_c} := -\partial_x^2 + c - \log(|\varphi_c|^p).$$

Em decorrência da teoria proposta em [55] e [56], determinaremos que o operador $\mathcal{L}_{Re, \varphi_c}$, sobre $L_{per}^2([0, L(c)])$, com o domínio $H_{per}^2([0, L(c)])$, admite um único autovalor estritamente negativo, o qual é simples e, 0 é um autovalor simples de $\mathcal{L}_{Re, \varphi_c}$ associado à autofunção φ_c' . Por sua vez, verificaremos que o operador $\mathcal{L}_{Im, \varphi_c}$ não admite autovalores negativos e 0 é um autovalor simples de $\mathcal{L}_{Im, \varphi_c}$ associado à autofunção φ_c .

Em verdade, para cada $c_0 > 0$ fixado, trataremos a existência de uma curva suave $c \in V \subset (0, +\infty) \mapsto \phi_c \in H_{per, e}^1([0, L(c_0)])$, de tal modo que $\phi_{c_0} = \varphi_{c_0}$ e que ϕ_c seja uma solução periódica, par e estritamente positiva para a equação (1.17), $\forall c \in V$. Devido à manutenção dos índices de inércia, verificaremos que as propriedades espectrais dos

operadores \mathcal{L}_{Re,ϕ_c} e \mathcal{L}_{Im,ϕ_c} são as mesmas que anteriormente estruturamos para o caso dos operadores $\mathcal{L}_{Re,\varphi_{c_0}}$ e $\mathcal{L}_{Im,\varphi_{c_0}}$, respectivamente.

Finalmente, definamos a função

$$d(c) = \mathcal{E}(\phi_c) + c\mathcal{F}(\phi_c), \quad \forall c \in V.$$

Veremos que $d''(c) = \frac{1}{p}\|\phi_c\|_{L_{per}^2}^2 > 0$, $\forall c \in V$. Esta informação será suficiente para que determinemos a existência de uma função “polinomial” h_1 , onde

$$h_1(x) = \eta_1 x^2 (1 - \eta_2 x - \eta_3 x^2 - \mathcal{O}(x^3)),$$

com $\eta_1, \eta_2, \eta_3 > 0$. A função h_1 apresenta as propriedades de que $h_1(0) = 0$ e $h_1(x) > 0$ para x suficientemente pequeno. Além disto, se $\varepsilon > 0$ for considerado um parâmetro suficientemente pequeno e se tomarmos u_0 suficientemente próxima a ϕ_c , com a preservação da identidade $\mathcal{F}(u_0) = \mathcal{F}(\phi_c)$, veremos que

$$h_1(\|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H_{per}^1 \times H_{per}^1}) \leq \mathcal{G}_c(u_0) - \mathcal{G}_c(\phi_c) < h_1(\varepsilon),$$

com $\vec{w}(\cdot, t) = (\text{Re} [\tilde{u}(\cdot + y, t)e^{i\theta} - \phi_c], \text{Im} [\tilde{u}(\cdot + y, t)e^{i\theta} - \phi_c])$, onde \tilde{u} é a solução do problema de Cauchy associado à equação (1.8), que satisfaz $\tilde{u}(\cdot, 0) = u_0$ e, as constantes $y = y(t)$ e $\theta = \theta(t)$ são aquelas que minimizam o valor da função

$$\Omega_t(y, \theta) = \|\tilde{u}_x(\cdot + y, t)e^{i\theta} - \phi'_c\|_{L_{per}^2}^2 + c\|\tilde{u}(\cdot + y, t)e^{i\theta} - \phi_c\|_{L_{per}^2}^2.$$

A aplicação do método apresentado detalhadamente por Angulo (ver [8] e suas referências) provará que as ondas estacionárias periódicas associadas às funções ϕ_c são soluções orbitalmente estáveis para a equação de Schrödinger não-linear logarítmica (1.8), no espaço de Hilbert $H_{per}^1([0, L])$. Por sua vez, as ideias descritas em [55] e [56] mostrarão que se $c > 0$, então, todas as funções periódicas φ_c estabelecidas pelo estudo do plano de fase da equação (1.17) e, cujas as órbitas encontram-se no interior da região delimitada pela curva (ϱ_c, ϱ'_c) , também caracterizam ondas estacionárias periódicas orbitalmente estáveis para a equação (1.8).

No Capítulo 5 desta tese, trataremos o estudo da estabilidade linear de soluções do tipo onda viajante periódica para a equação ILW (1.11). Consideremos que $L > 0$ e que $\delta > 0$ estejam fixados. Sejam o operador \mathcal{T}_δ , definido em (1.10), e o operador auxiliar $\mathcal{M}_\delta := -\frac{1}{\delta} - \mathcal{T}_\delta \partial_x$. A equação ILW (1.11), conforme comentado, pode ser interpretada como uma equação de evolução

$$u_t + 2uu_x - (\mathcal{M}_\delta u)_x = 0.$$

Nesta abordagem, o operador \mathcal{M}_δ é pseudo-diferencial e se g for uma função suave, é válida a propriedade

$$\widehat{(\mathcal{M}_\delta g)}(\kappa) = \left[\frac{2\kappa\pi}{L} \coth\left(\frac{2\kappa\pi\delta}{L}\right) - \frac{1}{\delta} \right] \widehat{g}(\kappa), \quad \forall \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Seja $c > 0$ um número real. Faremos a suposição de que existe uma função $\varphi_c \in H_0$, de tal modo que $u_c(x, t) = \varphi_c(x - ct)$, $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, seja uma solução onda viajante L -periódica para a referida equação ILW. Ao substituirmos u_c em (1.11), obteremos que φ_c deve satisfazer a equação

$$-\mathcal{M}_\delta \varphi_c - c\varphi_c + \varphi_c^2 = \frac{1}{L} \int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi. \quad (1.18)$$

Consideremos que φ_c seja uma solução da equação (1.18). Definamos o operador linearizado

$$\mathcal{L}_c := \mathcal{M}_\delta + c - 2\varphi_c.$$

Diremos que a onda viajante periódica u_c é linearmente estável em H_0 se não for possível determinar a existência de um par $(\lambda, \psi) \in \mathbb{C} \times H_0$, com $\text{Re}(\lambda) > 0$ e $\psi \neq 0$, de tal maneira que

$$\partial_x \mathcal{L}_c|_{H_0} \psi = \lambda \psi.$$

Seguindo as ideias tratadas por Parker [61], mostraremos que para $L = \pi$ e para determinados valores de $\delta > 0$ fixados, existe $(k_0, k_1) \subset (0, 1)$ um intervalo aberto conveniente. O parâmetro

$$\begin{aligned} c = c(k) &= \frac{1}{\delta} - \frac{8\pi\delta K(k)}{L^2 K(k')} - \frac{4K(k)}{L} \cdot Z\left(\frac{4\delta K(k)}{L}; k'\right) \\ &\quad - \frac{4K(k)}{L} \cdot \frac{\text{cn}\left(\frac{4\delta K(k)}{L}; k'\right) \cdot \text{dn}\left(\frac{4\delta K(k)}{L}; k'\right)}{\text{sn}\left(\frac{4\delta K(k)}{L}; k'\right)} \end{aligned}$$

é positivo e estritamente crescente para $k \in (k_0, k_1)$. Além disto, mostraremos que

$$\begin{aligned} \varphi_c(\xi) &= -\frac{4K(k)}{L} \cdot Z\left(\frac{2K(k)\delta}{L}; k'\right) - \frac{4\delta\pi}{L^2} \cdot \frac{K(k)}{K(k')} \\ &\quad + \frac{4K(k)}{L} \cdot \frac{\text{dn}\left(\frac{2K(k)\xi}{L}; k\right)^2 \cdot \text{cn}\left(\frac{2K(k)\delta}{L}; k'\right) \cdot \text{sn}\left(\frac{2K(k)\delta}{L}; k'\right) \cdot \text{dn}\left(\frac{2K(k)\delta}{L}; k'\right)}{1 - \text{dn}\left(\frac{2K(k)\xi}{L}; k\right)^2 \cdot \text{sn}\left(\frac{2K(k)\delta}{L}; k'\right)^2}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

onde $k' = \sqrt{1 - k^2}$, determina uma função em H_0 tal que

$$u_c(x, t) = \varphi_c(x - ct), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

é uma solução, no sentido pontual, onda viajante L -periódica na variável espacial para a equação ILW (1.11). A função dada em (1.19) se comporta similarmente a uma solução da equação (1.11) determinada por Miloh [53].

Consideremos os parâmetros auxiliares

$$S := \frac{1}{L} \int_0^L \varphi_c(\xi)^2 dx \quad \text{e} \quad a := \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4S}}{2}.$$

Determinaremos que $\varsigma := c + 2a > 0$ e que a função par e estritamente positiva $\phi_\varsigma := a + \varphi_c$ tem como sua Transformada de Fourier $\widehat{\phi}_\varsigma$, uma função pertencente à classe PF(2) discreto no sentido estrito. Fazendo uso de conceitos e resultados de positividade tratados por Angulo e Natali, [11] e [12], estabeleceremos que o operador autoadjunto \mathcal{L}_c admite um único autovalor negativo, o qual é simples e, 0 é um autovalor simples de \mathcal{L}_c associado à autofunção φ'_c em $L^2_{per}([0, L])$. Além disto, propriedades relativas às funções elípticas e ao Teorema de Plancharel serão suficientes para garantir que

$$\frac{\partial}{\partial c} \left[\int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi \right] > 0, \quad \forall k \in (k_0, k_1).$$

Estas informações combinadas, em vista da teoria proposta por [31], garantirão que $K_{Ham} = 0$, onde K_{Ham} é o índice Hamiltoniano de Krein associado ao operador \mathcal{L}_c . Usando os preceitos de Deconinck e Kapitula [31], concluíremos que, para cada k no intervalo (k_0, k_1) , a função u_c determina uma onda viajante periódica linearmente estável para a equação (1.11) no espaço H_0 .

Finalmente, no Capítulo 6, faremos reflexões pertinentes a outros possíveis trabalhos e resultados que conjecturamos ser estudados e obtidos, utilizando a teoria proposta nesta tese.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Espaços de Sobolev Periódicos

Nesta seção, introduziremos brevemente o conceito de Transformada de Fourier para Funções Periódicas. Com base nesta noção, definiremos alguns espaços de funções, os Espaços de Sobolev Periódicos. As informações aqui apresentadas são detalhadas em Iório e Iório, [42].

Sejam o intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e p tal que $1 \leq p \leq \infty$. Denotemos por $L^p(I)$ o espaço de todas as funções mensuráveis à Lebesgue $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tais que

$$\|f\|_{L^p(I)} = \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \text{ se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|f\|_{L^p(I)} = \sup_{x \in I} |f(x)| < \infty, \text{ se } p = \infty.$$

O espaço normado $(L^p(I), \|\cdot\|_{L^p(I)})$ é um espaço de Banach. Além disto, $L^2(I)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$(f, g)_{L^2(I)} := (f, g) = \int_I f(x) \overline{g(x)} dx, \forall f, g \in L^2(I).$$

Seja $L > 0$ um número real fixado. Denotemos por $\mathcal{P} = C_{per}^\infty = C_{per}^\infty([0, L])$ o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que são infinitamente diferenciáveis e periódicas de período L . Designemos \mathcal{P}' , o Espaço das Distribuições Periódicas, como sendo o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos definidos de \mathcal{P} em \mathbb{C} . O valor de $\psi \in \mathcal{P}'$ em $\varphi \in \mathcal{P}$ é denotado por $\psi(\varphi) = \langle \psi, \varphi \rangle$.

Consideremos $\kappa \in \mathbb{Z}$ e a função $\Theta_\kappa(x) = e^{\frac{2\pi i \kappa x}{L}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. A Transformada de Fourier de $\psi \in \mathcal{P}'$ é a função $\widehat{\psi} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ dada pela lei de formação

$$\widehat{\psi}(\kappa) = \frac{1}{L} \langle \psi, \Theta_{-\kappa} \rangle, \forall \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Fixemos p real, de modo que $p \geq 1$. A função $\psi \in L^p([0, L])$ define uma distribuição periódica. Neste caso, $\psi \in \mathcal{P}'$ com

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \int_0^L \psi(x)\varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}.$$

Desta maneira, a Transformada de Fourier da função $\psi \in L^p([0, L])$ é dada por

$$\widehat{\psi}(\kappa) = \frac{1}{L} \int_0^L \psi(x)e^{-\frac{2\pi i \kappa x}{L}} dx, \quad \forall \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Seja $s \in \mathbb{R}$. O Espaço de Sobolev $H_{per}^s([0, L])$ é definido como o conjunto de todas as distribuições periódicas $f \in \mathcal{P}'$ com

$$\|f\|_{H_{per}^s([0, L])}^2 = L \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} (1 + |\kappa|^2)^s |\widehat{f}(\kappa)|^2 < \infty.$$

O conjunto $H_{per}^s([0, L])$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$(f, g)_{H_{per}^s([0, L])} := (f, g)_s = L \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} (1 + |\kappa|^2)^s \widehat{f}(\kappa) \overline{\widehat{g}(\kappa)}, \quad \forall f, g \in H_{per}^s([0, L]).$$

Definamos $L_{per}^2([0, L]) := H_{per}^0([0, L])$. Por sua vez, o conjunto $L_{per}^2([0, L])$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$(f, g)_{L_{per}^2([0, L])} := (f, g)_0 = \int_0^L f(x)\overline{g(x)} dx, \quad \forall f, g \in L_{per}^2([0, L]).$$

Além disto, tem-se a norma $\|\cdot\|_{L_{per}^2([0, L])} := \sqrt{(\cdot, \cdot)_0}$.

Adicionalmente, para todo $s \in \mathbb{R}$, $(H_{per}^s([0, L]))'$, o dual topológico de $H_{per}^s([0, L])$, é isometricamente isomorfo ao espaço $H_{per}^{-s}([0, L])$. Se $f \in H_{per}^{-s}([0, L])$ e $g \in H_{per}^s([0, L])$, o par dualidade é representado por

$$\langle f, g \rangle_{H_{per}^{-s}([0, L]), H_{per}^s([0, L])} := \langle f, g \rangle_s = L \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\kappa) \overline{\widehat{g}(\kappa)}.$$

Vemos que $H_{per}^s([0, L]) \hookrightarrow H_{per}^r([0, L])$ sempre que $s \geq r$, onde $s, r \in \mathbb{R}$. Em particular, para cada $s \geq 0$, $H_{per}^s([0, L]) \hookrightarrow L_{per}^2([0, L])$. Complementamos que

$$H_{per}^1([0, L]) \hookrightarrow L_{per}^{m_1}([0, L]) \hookrightarrow L_{per}^{m_2}([0, L]), \quad \forall m_1, m_2 \in [1, +\infty], \quad m_1 \geq m_2.$$

Neste último caso, para $m \in [1, +\infty]$, convencionamos que

$$L_{per}^m([0, L]) := \{f; f \text{ é uma função } L\text{-periódica e } f|_{[0, L]} \in L^m([0, L])\}$$

e

$$\|f\|_{L_{per}^m([0, L])} = \|f\|_{L^m([0, L])}, \quad \forall f \in L_{per}^m([0, L]).$$

Seja $s = n \in \mathbb{Z}^+$. O Espaço de Sobolev $H_{per}^n([0, L])$ pode ser interpretado como o conjunto das distribuições periódicas $f \in \mathcal{P}'$ tais que

$$f^{(j)} \in L_{per}^2([0, L]), \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, n\},$$

onde $f^{(j)}$ denota a j -ésima derivada de f tomada no sentido de \mathcal{P}' . A norma

$$\|f\|_{H_{per}^n([0,L])} = \left(\sum_{j=0}^n \|f^{(j)}\|_{L_{per}^2([0,L])}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f \in H_{per}^n([0,L]),$$

é equivalente à norma de $H_{per}^n([0,L])$ apresentada acima para índice geral.

Na abordagem a ser feita em seções e capítulos posteriores, trabalharemos com restrições dos Espaços de Sobolev Periódicos $H_{per}^s([0,L])$.

Sejam $L > 0$ e $n \in \mathbb{Z}^+$. Definamos $H_{per,e}^n([0,L])$ como o conjunto de todas as funções $f : [0,L] \rightarrow \mathbb{K}$ tais que $f \in H_{per}^n([0,L])$ e a extensão L -periódica de f sobre \mathbb{R} é uma função par. Finalmente, denotemos $L_{per,e}^2([0,L]) := H_{per,e}^0([0,L])$ e, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, podemos provar que $H_{per,e}^n([0,L])$ é um espaço de Hilbert.

Um outro conjunto a ser considerado é o espaço das funções de média zero

$$H_0 := \left\{ f \in L_{per}^2([0,L]); \int_0^L f(\xi) d\xi = 0 \right\}.$$

H_0 é também um espaço de Hilbert.

O próximo resultado, devido a [26], descreve o comportamento de seqüências limitadas de funções em espaços vetoriais associados a espaços de Sobolev.

Proposição 2.1. *Sejam $L > 0$ e $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ uma seqüência limitada no espaço de Sobolev $L^\infty(a,b; H_{per}^1([0,L]))$. Suponhamos que $\{f'_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ seja uma seqüência limitada em $L^\infty(a,b; H_{per}^{-1}([0,L]))$. Então,*

(i) *Existe $f \in L^\infty(a,b; H_{per}^1([0,L]))$, com $f' \in L^\infty(a,b; H_{per}^{-1}([0,L]))$, de tal modo que há uma subsequência $\{f_{m_\kappa}\}_{\kappa \in \mathbb{N}} \subset \{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ que, para cada $t \in [a,b]$, $f_{m_\kappa}(t) \rightharpoonup f(t)$ fraco em $H_{per}^1([0,L])$.*

(ii) *Se $\|f_{m_\kappa}(t)\|_{L_{per}^2} \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} \|f(t)\|_{L_{per}^2}$ uniformemente para t sobre o intervalo $[a,b]$, então, $f_{m_\kappa} \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} f$ em $C^0([a,b]; L_{per}^2([0,L]))$.*

(iii) *Se $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C^0([a,b]; H_{per}^1([0,L]))$ e se $\|f_{m_\kappa}(t)\|_{H_{per}^1} \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} \|f(t)\|_{H_{per}^1}$ uniformemente para t sobre o intervalo $[a,b]$, então, $f \in C^0([a,b]; H_{per}^1([0,L]))$ e $f_{m_\kappa} \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} f$ em $C^0([a,b]; H_{per}^1([0,L]))$.*

Demonstração. Ver [26], Proposição 1.1.2 e Proposição 1.3.14. ■

2.2 O Teorema de Carathéodory

Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ um conjunto aberto. Consideremos $t_0 \in \mathbb{R}$, de forma que $(t_0, x_0) \in \bar{\Omega}$. Sejam a função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ e o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)). \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Dizemos que a função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ satisfaz as condições de Carathéodory sobre Ω se forem válidas as seguintes premissas:

- (i) $f(t, x)$ é uma função mensurável em t , para cada x fixado;
- (ii) $f(t, x)$ é uma função contínua em x , para quase todo t fixado;
- (iii) Para cada conjunto compacto $K \subset \Omega$, existe uma função $m_K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrável, tal que

$$\|f(t, x)\|_{\mathbb{C}^n} \leq m_K(t), \quad \forall (t, x) \in K.$$

Segundo [30], podemos enunciar os seguintes resultados.

Teorema 2.2 (Teorema de Carathéodory). *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ uma função que satisfaz as condições de Carathéodory sobre Ω . Então, existem $\beta > 0$ e $x(t)$ uma função absolutamente contínua que soluciona (2.1), para cada t admissível sujeito a $|t - t_0| \leq \beta$.*

■

Teorema 2.3. *Sejam $b > 0$ e $T > 0$. Consideremos $\Omega = (-T, T) \times B$, com*

$$B := \{x \in \mathbb{C}^n; \|x\| < b\}.$$

Consideremos $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$, uma função que atende às condições de Carathéodory sobre Ω . Suponhamos que $t_0 = 0$, $\|x_0\| < b$ e que $x(t)$ seja uma solução de (2.1). Suponhamos que em qualquer intervalo $I \subset [-T, T]$ para o qual $x(t)$ está definida se tenha a desigualdade $\|x(t)\| \leq M$, $\forall t \in I$, com M independente de I e $M < b$. Então, $x(t)$ admite um prolongamento sobre o intervalo $[-T, T]$.

■

2.3 Funções Elípticas de Jacobi

Nesta seção, serão estabelecidas algumas propriedades básicas das funções elípticas de Jacobi. Uma descrição mais detalhada pode ser encontrada nas referências [3], [18] e [22].

Sejam $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $k \in (0, 1)$. A integral elíptica do primeiro tipo é definida por

$$\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}} \equiv F(\varphi, k),$$

onde $y = \sin(\varphi)$. A integral elíptica do segundo tipo é definida por

$$\int_0^y \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)} d\theta \equiv E(\varphi, k).$$

O número k é denominado o módulo da integral elíptica e o número $k' := \sqrt{1 - k^2}$ é denominado o módulo complementar a k . O parâmetro φ , por sua vez, é denominado o argumento da integral elíptica. Como $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, temos que $0 \leq y \leq 1$. Se $y = 1$, as integrais acima são ditas completas. No caso das integrais completas,

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}} \equiv F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \equiv K(k) \equiv K$$

e

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)} d\theta \equiv E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \equiv E(k) \equiv E.$$

Vemos que $\lim_{k \rightarrow 0^+} K(k) = \lim_{k \rightarrow 0^+} E(k) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{k \rightarrow 1^-} E(k) = 1$ e $\lim_{k \rightarrow 1^-} K(k) = +\infty$. Além disto, para cada $k \in (0, 1)$, $E(k) < K(k)$ e, são válidas as seguintes identidades

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E - k'^2 K}{kk'^2} \quad \text{e} \quad \frac{dE}{dk} = \frac{E - K}{k}.$$

Fundamentados nas integrais elípticas, acima apresentadas, definimos as funções elípticas de Jacobi. Para $y_1 \in [0, 1]$ e $k \in (0, 1)$, consideremos

$$u(y_1; k) \equiv \int_0^{y_1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}} \equiv F(\varphi_1, k),$$

onde $\varphi_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ satisfaz $y_1 = \sin(\varphi_1)$. Para k fixado, u é uma função estritamente crescente na variável y_1 . A inversa da função u , para k fixado, define a função senoidal que é descrita por $\text{sn}(u; k) \equiv \sin(\varphi_1) = y_1$ e $\varphi_1 = \text{am}(u; k)$ é designada como a função amplitude de u . Quando não se faz necessário enfatizar o módulo k , denotamos simplesmente $\text{sn}(u) = y_1$. As outras duas funções elípticas básicas, as funções cnoidal cn e dnoidal dn , são definidas em termos de sn da seguinte maneira:

$$\text{cn}(u; k) \equiv \sqrt{1 - y_1^2} = \sqrt{1 - \text{sn}^2(u; k)} \quad \text{e} \quad \text{dn}(u; k) \equiv \sqrt{1 - k^2 y_1^2} = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(u; k)}.$$

Vemos que estas funções são normalizadas fazendo-se uso de $\text{sn}(0; k) = 0$, $\text{cn}(0; k) = 1$ e $\text{dn}(0; k) = 1$. As funções elípticas de Jacobi são estendidas periodicamente de forma que

$$\text{sn}(u + 4K; k) = \text{sn}(u; k), \quad \text{cn}(u + 4K; k) = \text{cn}(u; k) \quad \text{e} \quad \text{dn}(u + 2K; k) = \text{dn}(u; k).$$

As funções $\text{cn}(\cdot; k)$ e $\text{dn}(\cdot; k)$ são pares; a função $\text{sn}(\cdot; k)$ é ímpar.

Para $k \in (0, 1)$, as funções elípticas de Jacobi também satisfazem as seguintes relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sn}^2(u; k) + \text{cn}^2(u; k) = 1, \quad k'^2 \text{sn}^2(u; k) + \text{cn}^2(u; k) = \text{dn}^2(u; k), \\ k^2 \text{sn}^2(u; k) + \text{dn}^2(u; k) = 1, \quad -1 \leq \text{sn}(u; k) \leq 1, \quad -1 \leq \text{cn}(u; k) \leq 1, \\ k'^2 \leq \text{dn}(u; k) \leq 1, \quad \text{sn}(u + 2K; k) = -\text{sn}(u; k) \quad \text{e} \quad \text{cn}(u + 2K; k) = -\text{cn}(u; k). \end{array} \right.$$

Finalmente,

$$\operatorname{sn}(K) = 1, \quad \lim_{k \rightarrow 0^+} \operatorname{sn}(u; k) = \sin(u) \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow 1^-} \operatorname{sn}(u; k) = \tanh(u).$$

2.3.1 Funções Theta de Jacobi

Seja $k \in (0, 1)$. Denotemos $\tau = i \frac{K(k')}{K(k)}$. Definamos a função “nome” q como sendo

$$q = q(k) = e^{-\frac{\pi K(k')}{K(k)}} = e^{i\pi\tau}.$$

Consideremos $|q| < 1$. Para cada $z \in \mathbb{C}$, as quatro funções

$$\theta_1(z, q) = 2q^{\frac{1}{4}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} \sin((2n+1)z) \right],$$

$$\theta_2(z, q) = 2q^{\frac{1}{4}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} \cos((2n+1)z) \right],$$

$$\theta_3(z, q) = 1 + 2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2nz) \right]$$

e

$$\theta_4(z, q) = 1 + 2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos(2nz) \right]$$

estão bem definidas. As funções θ_1 , θ_2 , θ_3 e θ_4 são denominadas as Funções Theta de Jacobi. Se a variável z for real, as funções θ_1 e θ_2 são periódicas de período 2π . Já as funções θ_3 e θ_4 são periódicas de período π . Lembremos que, no eixo imaginário, as funções Theta de Jacobi também apresentam comportamento periódico.

2.3.2 Função Lambda de Heuman $\Lambda_0(\varphi, k)$

A função Lambda de Heuman, $\Lambda_0(\varphi, k)$, é definida em termos das integrais elípticas de primeiro e segundo tipo pela fórmula

$$\Lambda_0(\varphi, k) = \frac{2}{\pi} [K(k)E(\varphi, k') - K(k)F(\varphi, k') + E(k)F(\varphi, k')],$$

para cada $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $k \in (0, 1)$.

Esta função aparece no cálculo de integrais elípticas de terceiro tipo em casos circulares. Foi inicialmente tabulada por Carl Heuman.

A função Lambda de Heuman pode ser relacionada com a função θ_2 por

$$\Lambda_0(\varphi, k) = \frac{\partial}{\partial \omega} [\ln[\theta_2(i\omega, q(k))]],$$

onde $\omega = \frac{\pi F(\varphi, k')}{2K(k)} \in \mathbb{R}$.

A derivada com respeito ao módulo k da função Λ_0 é dada por

$$\frac{\partial}{\partial k} [\Lambda_0(\varphi, k)] = \frac{2[E(k) - K(k)] \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{\pi k \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\varphi)}}.$$

Esta última relação nos leva a concluir que, independentemente de $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, a função Lambda de Heuman é estritamente decrescente com relação ao módulo k .

2.3.3 Função Zeta de Jacobi

A função Zeta de Jacobi é definida por

$$Z(u, k) = \int_0^u \left[\operatorname{dn}(v, k)^2 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] dv.$$

Esta função satisfaz

$$Z(2K(k), k) = 0 \quad \text{e} \quad Z(u + 2K(k), k) = Z(u).$$

A função $Z(u, k)$ pode ser relacionada com a função Lambda de Heuman através da identidade

$$\Lambda_0(\varphi, k) = \frac{F(\varphi, k')}{K'(k)} + \frac{2}{\pi} K(k) Z(\varphi, k'),$$

onde $\varphi = \operatorname{am}(u)$. Além disto, a função Zeta se relaciona às funções Theta de Jacobi pelas

seguintes identidades

$$\begin{aligned}
Z(u, k) &= \frac{\pi}{2K(k)} \cdot \frac{\theta'_1\left(\frac{\pi u}{2K(k)}, q(k)\right)}{\theta_1\left(\frac{\pi u}{2K(k)}, q(k)\right)} - \frac{\text{cn}(u, k) \cdot \text{dn}(u, k)}{\text{sn}(u, k)} \\
&= \frac{\pi}{2K(k)} \cdot \frac{\theta'_2\left(\frac{\pi u}{2K(k)}, q(k)\right)}{\theta_2\left(\frac{\pi u}{2K(k)}, q(k)\right)} + \frac{\text{dn}(u, k) \cdot \text{sn}(u, k)}{\text{cn}(u, k)} \\
&= \frac{\pi}{2K(k)} \cdot \frac{\theta'_3\left(\frac{\pi u}{2K(k)}, q(k)\right)}{\theta_3\left(\frac{\pi u}{2K(k)}, q(k)\right)} - k^2 \cdot \frac{\text{sn}(u, k) \cdot \text{cn}(u, k)}{\text{dn}(u, k)} \\
&= \frac{\pi}{2K(k)} \cdot \frac{\theta'_4\left(\frac{\pi u}{2K(k)}, q(k)\right)}{\theta_4\left(\frac{\pi u}{2K(k)}, q(k)\right)}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Nas relações acima, a derivada é tomada com respeito à primeira variável, ou seja,

$$\theta'_j(u, q) = \frac{\partial}{\partial u}[\theta_j(u, q)], \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Byrd e Friedman, [22], apresentam uma versão da função Zeta de Jacobi definida para variáveis complexas. Sejam u e v dois parâmetros reais. Estruturamos que

$$\begin{aligned}
Z(u + iv, k) &= \left[Z(u, k) + \frac{k^2 \cdot \text{sn}(u, k) \cdot \text{cn}(u, k) \cdot \text{dn}(u, k) \cdot \text{sn}(v, k')^2}{1 - \text{sn}(v, k')^2 \cdot \text{dn}(u, k)^2} \right] \\
&\quad - i \left[Z(v, k') + \frac{v\pi}{2K(k)K(k')} - \frac{\text{dn}(u, k)^2 \cdot \text{cn}(v, k') \cdot \text{sn}(v, k') \cdot \text{dn}(v, k')}{1 - \text{sn}(v, k')^2 \cdot \text{dn}(u, k)^2} \right].
\end{aligned}$$

2.4 Teoria de Floquet e Espectro do Operador de Hill

2.4.1 Conceitos Elementares

Os resultados presentes nesta subseção são tratados por Neves, ver [58] e [59]. Neves, por sua vez, está baseado nas noções apresentadas por Magnus e Winkler, ver [52].

Sejam $L > 0$ e \mathbb{K} designando o corpo \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Consideremos $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ uma função de classe C^2 periódica de período minimal L e consideremos a equação diferencial

$$-y'' + Q(x)y = 0. \tag{2.3}$$

Conforme [39], a equação (2.3) possui duas soluções $y_1 = y_1(x)$ e $y_2 = y_2(x)$, continuamente diferenciáveis, que são univocamente determinadas pelas condições iniciais

$$y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0, y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1. \quad (2.4)$$

Definamos a equação característica associada a (2.3)

$$\rho^2 - [y_1(L) + y_2'(L)]\rho + 1 = 0. \quad (2.5)$$

Suponhamos que ρ_1 e ρ_2 sejam as raízes da equação característica (2.5). Em verdade, existe um número complexo α , de modo que $e^{i\alpha L} = \rho_1$ e $e^{-i\alpha L} = \rho_2$. Com base nestas informações, segundo [52], enunciamos o teorema a seguir.

Teorema 2.4 (Teorema de Floquet).

1. Se $\rho_1 \neq \rho_2$, então, a equação (2.3) tem duas soluções linearmente independentes f_1 e f_2 , de forma que $f_1(x) = e^{i\alpha x} P_1(x)$ e $f_2(x) = e^{-i\alpha x} P_2(x)$, onde P_1 e P_2 são duas funções periódicas com período L .
2. Se $\rho_1 = \rho_2$, há duas possibilidades: $\rho_1 = \rho_2 = 1$ e $\rho_1 = \rho_2 = -1$. Se $\rho_1 = \rho_2 = 1$, a equação (2.3) tem uma solução não-trivial periódica de período L . Se $\rho_1 = \rho_2 = -1$, a equação (2.3) tem uma solução não-trivial periódica de período $2L$. Suponhamos que $p(x)$ denote uma solução periódica de (2.3) e que $y(x)$ seja uma outra solução de (2.3), linearmente independente a $p(x)$. Então, existe uma constante θ de maneira que

$$y(x + L) = \rho_1 y(x) + \theta p(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Além disto, $\theta = 0$, se e somente se,

$$y_1(L) + y_2'(L) = \pm 2, y_2(L) = 0 \text{ e } y_1'(L) = 0.$$

■

Adicionalmente, existe um importante aprimoramento do Teorema 2.4: a equação (2.3) admite uma solução não-trivial periódica de período L , se e somente se, $\rho_1 = \rho_2 = 1$. Se exigirmos condições adicionais ao potencial $Q(x)$, segundo [52], é possível prever o comportamento das funções y_1 e y_2 univocamente obtidas como solução de (2.3)-(2.4).

Teorema 2.5. *Seja o problema (2.3) que é univocamente solucionado pelas funções y_1 e y_2 que estão sujeitas às condições iniciais (2.4). Se o potencial $Q(x)$ for par, ou seja, se $Q(x) = Q(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então, a função y_1 é par e a função y_2 é ímpar. Além disto, se a equação (2.3) admitir uma solução periódica não-trivial de período L , existe uma função periódica $p(x)$ não-trivial de período L satisfazendo (2.3) que é par ou é ímpar.*

■

Em seguida, baseado na equação (2.3), consideremos o operador de Hill

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : D(\mathcal{L}) = H_{per}^2([0, L]) \subset L_{per}^2([0, L]) &\rightarrow L_{per}^2([0, L]) \\ y &\mapsto \mathcal{L}y = -y'' + Q(x)y. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Afirmamos que o operador \mathcal{L} é autoadjunto. De fato, inicialmente, interpretamos que $\mathcal{L} = S + A$, onde $S := -\partial_x^2 + 1$ e $A := Q - 1$. Além disto, $D(S) = D(\mathcal{L}) = H_{per}^2([0, L])$ e $D(A) = L_{per}^2([0, L])$. Fazendo uso do Teorema de Lax-Milgram, [35], temos que o operador $S : D(S) \rightarrow L_{per}^2([0, L])$ é sobrejetor. Como S é um operador simétrico, segundo [25], segue que S é um operador autoadjunto.

Por outro lado, o operador A é simétrico e, devido ao comportamento da função Q , A é um operador limitado. A teoria detalhada em [7] determina que o operador \mathcal{L} é autoadjunto e, conseqüentemente, temos que o espectro do operador \mathcal{L} está contido na reta.

Afirmamos que $\sigma_{ess}(\mathcal{L}) = \emptyset$. De fato, é conhecido que $\sigma_{ess}(S) = \emptyset$. Definamos o operador auxiliar $T := \mathcal{L} - S : H_{per}^2([0, L]) \rightarrow L_{per}^2([0, L])$. Temos a validade da identidade $T(u) = Qu - u$, $\forall u \in H_{per}^2([0, L])$. Usando a limitação de Q e a imersão compacta $H_{per}^2([0, L]) \xhookrightarrow{c} L_{per}^2([0, L])$, verificamos que T é um operador compacto. Estas informações, segundo a abordagem descrita por [7], são suficientes para concluir que $\sigma_{ess}(\mathcal{L}) = \emptyset$.

Mais que isto, para o operador \mathcal{L} é válido o Teorema da Oscilação que garante que o seu espectro é dado por uma seqüência ilimitada de números reais $\{\lambda_\kappa\}_{\kappa=0}^\infty$, de forma que

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots < \lambda_{2\kappa-1} \leq \lambda_{2\kappa} < \dots, \quad (2.8)$$

onde, para cada $\kappa \in \mathbb{N}$, λ_κ é raiz da equação discriminante

$$\Delta(\lambda) := y_1(L, \lambda) + y_2'(L, \lambda) = 2$$

e $y_1(x, \lambda)$ e $y_2(x, \lambda)$ são as duas soluções linearmente independentes univocamente determinadas pela equação diferencial

$$-y''(x) + (Q(x) - \lambda)y(x) = 0$$

sujeitas às condições iniciais

$$y_1(0, \lambda) = 1, \quad y_1'(0, \lambda) = 0, \quad y_2(0, \lambda) = 0, \quad y_2'(0, \lambda) = 1.$$

É válido frisar que, para $\kappa \in \mathbb{N}$, o autoespaço associado ao autovalor λ_κ do operador \mathcal{L} tem dimensão 1. Ademais, se ψ_{κ_1} for uma autofunção de \mathcal{L} associada ao autovalor λ_{κ_1} e se ψ_{κ_2} for uma autofunção de \mathcal{L} associada ao autovalor λ_{κ_2} , $\kappa_1 \neq \kappa_2$, então, ψ_{κ_1} e ψ_{κ_2} são linearmente independentes. Ou seja, $\langle \psi_{\kappa_1}, \psi_{\kappa_2} \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} = 0$. Além disto, por [52], é sabido que se $p(x)$ for uma autofunção associada ao autovalor $\lambda_{2\kappa-1}$ ou ao autovalor $\lambda_{2\kappa}$, onde $\kappa \in \mathbb{N}$, então, $p(x)$ possui exatamente 2κ raízes no intervalo $[0, L]$.

Os resultados a seguir também provêm de [52] e dão uma importante contribuição para o conhecimento do autovalor λ_0 do operador \mathcal{L} e das autofunções que estão a si associadas.

Teorema 2.6. *Se $p(x) > 0$ for uma solução periódica de período L da equação (2.3), então, $p(x)$ é uma autofunção do operador \mathcal{L} associada ao autovalor $\lambda_0 = 0$.*

■

Teorema 2.7. *Seja o operador \mathcal{L} , definido em (2.7), onde o potencial $Q(x)$ é uma função par. Se $p(x)$ for uma autofunção associada ao autovalor λ_0 , então, a extensão L -periódica de $p(x)$ sobre \mathbb{R} , a menos de translação, é uma função par que não se anula.*

■

2.4.2 Famílias Isonerciais de Operadores Autoadjuntos

Seja $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) = H_{per}^2([0, L]) \subset L_{per}^2([0, L]) \rightarrow L_{per}^2([0, L])$, com $L > 0$ fixado, um operador autoadjunto. Definamos o índice de inércia do operador \mathcal{L} como sendo o par (n, z) , onde n é a dimensão do autoespaço negativo de \mathcal{L} (ou seja, a dimensão do espaço gerado pelas autofunções associadas aos autovalores estritamente negativos de \mathcal{L}) e z é a dimensão do autoespaço nulo de \mathcal{L} (isto é, a dimensão do autoespaço associado ao autovalor 0 de \mathcal{L}). O índice de inércia de \mathcal{L} é denotado por $\text{In}(\mathcal{L})$.

Se \mathcal{L} for o operador autoadjunto definido em (2.7), vale o Teorema da Oscilação e, portanto, o índice $\text{In}(\mathcal{L})$ está bem definido. Isto, pois, para cada $\gamma > 0$ existe uma quantidade finita de autovalores que são menores do que γ .

Seja $s \in \mathcal{V}$, onde $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto. Definamos a família de operadores de Hill

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s : D(\mathcal{L}_s) = H_{per}^2([0, L]) &\rightarrow L_{per}^2([0, L]) \\ y &\mapsto \mathcal{L}_s[y] = -y'' + Q_1(s, x)y, \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde $Q_1 : \mathcal{V} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ é uma função duas vezes continuamente diferenciável e, na variável x , Q_1 é periódica de período L . Notemos que, para cada $s \in \mathcal{V}$, \mathcal{L}_s é um operador autoadjunto como (2.7). Dizemos que a família de operadores $\{\mathcal{L}_s\}_{s \in \mathcal{V}}$ é isonercial se o índice de inércia de \mathcal{L}_s , $\text{In}(\mathcal{L}_s)$, não depender de $s \in \mathcal{V}$. Segundo Natali e Neves, [55], é válido o resultado a seguir:

Teorema 2.8. *Seja $s \in \mathcal{V}$, onde $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto. Consideremos o operador \mathcal{L}_s definido em (2.9). Se $\lambda = 0$ for um autovalor simples de \mathcal{L}_s , para cada $s \in \mathcal{V}$, então, a família de operadores $\{\mathcal{L}_s\}_{s \in \mathcal{V}}$ é isonercial.*

■

2.4.3 Nova Versão da Teoria de Floquet

Natali e Neves, [55], apresentaram uma adaptação da Teoria de Floquet que permite o estudo de características espectrais do operador de Hill (2.7) em vista da dedução do sinal de uma determinada constante. Este estudo foi recentemente aprimorado por Natali e Pastor, [56], o que permite compreender que, sob certas exigências, independentemente do período relativo ao espaço de Sobolev periódico considerado, é possível construirmos famílias de operadores como (2.7) com os mesmos índices de inércia e, portanto, com as mesmas características espectrais.

Consideremos a equação de Euler-Lagrange

$$-\varphi'' + g(\mu, \varphi) = 0. \quad (2.10)$$

Assumamos que $\mu \in \mathcal{V}$, onde $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto. Considerando que a função g seja infinitamente diferenciável em todas as variáveis, a equação (2.10) é conservativa e suas soluções periódicas estão contidas em curvas de nível de energia do tipo

$$\mathcal{H}(\varphi, \xi) = -\frac{\xi^2}{2} + G(\mu, \varphi), \quad (2.11)$$

onde $\varphi' = \xi$, $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = g$ e $G(\mu, 0) = 0$.

Adicionalmente, suponhamos que a função g atenda às seguintes condições:

- (a1) Para cada $\mu \in \mathcal{V}$, a função $g(\mu, \cdot)$ admite duas raízes consecutivas $r_1 = r_1(\mu)$ e $r_2 = r_2(\mu)$ que correspondem aos pontos de equilíbrio $(\varphi, \varphi') = (r_1, 0)$ e $(\varphi, \varphi') = (r_2, 0)$. Assumamos que $(\varphi, \varphi') = (r_1, 0)$ seja um ponto de sela e que $(\varphi, \varphi') = (r_2, 0)$ seja um ponto de centro.
- (a2) A curva de nível $\mathcal{H}(\varphi, \xi) = \mathcal{H}(r_1, 0)$ contém uma curva simples fechada C^∞ , denotada por Γ , de modo que o par $(r_2, 0)$ encontra-se no interior da região delimitada por Γ .
- (a3) Para $\mu \in \mathcal{V}$ e para (φ, ξ) no interior da região delimitada pela curva Γ , a função $g(\mu, \varphi)$ é de classe C^2 e $g'(\mu, r_2) < 0$, onde g' denota a derivada à Fréchet da função g com respeito ao parâmetro φ .

Atendidas as condições (a1), (a2) e (a3), o par $(r_2, 0)$ é um ponto de máximo local de \mathcal{H} . Além disto, todas as órbitas de soluções φ da equação (2.10) que, no plano de fase, estão no interior da região delimitada pela curva Γ são periódicas, estão em torno do par $(r_2, 0)$ e pertencem a uma curva de nível $\mathcal{H}(\varphi, \xi) = B$, de tal modo que $\mathcal{H}(r_1, 0) < B < \mathcal{H}(r_2, 0)$.

Fixemos $\mu \in \mathcal{V}$. Pela teoria das EDO's, existe uma função periódica $\varphi = \varphi_\mu$ que satisfaz a equação (2.10) e a condição inicial $(\varphi(0), \varphi'(0)) = (\alpha_1, \alpha_2)$, onde $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (r_2, 0)$, é considerado no interior da região delimitada pela curva Γ . É esperado que o período L da função φ satisfaça

$$L > \beta_\mu := \frac{2\pi}{\sqrt{-g'(\mu, r_2)}}.$$

Em vista da simetria do problema associado à equação (2.10), se tivermos $\alpha_1 > r_2 > r_1$ e $\alpha_2 = 0$, em particular, φ é uma função suave par que satisfaz $\max_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x) = \varphi(0)$.

Prova-se, em [56], o seguinte resultado:

Teorema 2.9. *Seja $\mu_0 \in \mathcal{V}$ fixado. Consideremos que φ_{μ_0} seja uma função periódica de período $L = L_{\mu_0} > \beta_{\mu_0}$, a solução da equação de Euler-Lagrange (2.10) no caso em que $\mu = \mu_0$, sujeita à condição inicial $(\varphi_{\mu_0}(0), \varphi'_{\mu_0}(0)) = (\alpha_1, 0)$, onde $(\alpha_1, 0) \neq (r_2(\mu_0), 0)$ e o par $(\alpha_1, 0)$ está contido no interior da região delimitada pela curva Γ , com $\alpha_1 > r_2 > r_1$. Para cada $\mu \in \mathcal{V}$, existem $L_\mu \in (\beta_{\mu_0}, +\infty)$ e φ_μ , uma função periódica par de período L_μ , de tal forma que φ_μ satisfaz a equação de Euler-Lagrange (2.10). Mais que isto, as funções φ_μ e L_μ são continuamente diferenciáveis com respeito à variação do parâmetro μ e a aplicação $\mu \in \mathcal{V} \mapsto L_\mu \in (\beta_{\mu_0}, +\infty)$ é sobrejetora.*

■

Uma das vantagens da demonstração do Teorema 2.9 é a determinação de procedimentos que permitem deduzir numericamente o período minimal de uma solução periódica para a equação de Euler-Lagrange (2.10). Mantenhamos $\mu \in \mathcal{V}$ fixado. Consideremos $\varphi = \varphi_\mu$ uma solução da equação (2.10) deduzida pela proposta desta seção. Ou seja, suponhamos que $(\varphi(0), \varphi'(0)) = (\alpha_1, 0)$, onde $r_1 < r_2 < \alpha_1$ e o par $(\alpha_1, 0)$ encontra-se no interior da região delimitada pela curva Γ . Assumamos que L_μ seja o período minimal da função φ . Seja B de forma que $\mathcal{H}(\varphi, \varphi') = B$. Consideremos a função G vista em (2.11) e denotemos $G(\zeta) = G(\mu, \zeta)$. Finalmente, consideremos que b_1 e b_2 sejam as duas raízes admissíveis para a equação $\mathcal{H}(\zeta, 0) = B$. O período minimal L_μ é dado por

$$L_\mu = 2 \int_{b_1}^{b_2} \frac{d\zeta}{\sqrt{2G(\zeta) - 2B}}. \quad (2.12)$$

A demonstração do Teorema 2.9 também estabelece que o período minimal de φ pode, alternativamente, ser obtido como

$$L_\mu = -\frac{2}{\sqrt{-g'(\mu, r_2)}} \int_0^{2\pi} \frac{r(t)}{D(t)} dt,$$

onde

$$D(t) = \frac{2 \cdot g(\mu, \psi(t)) \cdot \cos(t)}{\sqrt{-g'(\mu, r_2)}} - 2 \cdot \chi(t) \cdot \sin(t), \quad \chi(t) = r(t) \cdot \sin(t),$$

$$\psi(t) = r_2 + \frac{r(t) \cdot \cos(t)}{\sqrt{-g'(\mu, r_2)}}$$

e a função $r(t)$ soluciona o problema de valor inicial

$$\begin{cases} D(t)r'(t) = 2 \cdot r(t) \cdot \left[\frac{g(\mu, \psi(t)) \cdot \sin(t)}{\sqrt{-g'(\mu, r_2)}} + \chi(t) \cdot \cos(t) \right] \\ r(0) = (\alpha_1 - r_2) \cdot \sqrt{-g'(\mu, r_2)}. \end{cases}$$

Seja $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in \mathcal{V}}$ uma família de funções estabelecida em vista do Teorema 2.9. Notemos que φ_μ é uma função suave e periódica de período L_μ , que soluciona a equação (2.10), para cada $\mu \in \mathcal{V}$. Seja $\mu \in \mathcal{V}$ fixado, porém, arbitrário. Definamos o operador de Hill

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu = \mathcal{L}_{\mu, \varphi_\mu} : H_{per}^2([0, L_\mu]) &\rightarrow L_{per}^2([0, L_\mu]) \\ y &\mapsto \mathcal{L}_\mu[y] = -y'' + g'(\mu, \varphi_\mu)y. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Este operador é autoadjunto e seu espectro coincide com o conjunto de seus autovalores. Nestas condições, como comentado a partir de (2.7), também é válido o Teorema da Oscilação que garante que o espectro de $\mathcal{L}_\mu = \mathcal{L}_{\mu, \varphi_\mu}$ é constituído por uma sequência ilimitada de números reais $\{\lambda_\kappa(\mu)\}_{\kappa=0}^\infty$, de forma que

$$\lambda_0(\mu) < \lambda_1(\mu) \leq \lambda_2(\mu) < \dots < \lambda_{2\kappa-1}(\mu) \leq \lambda_{2\kappa}(\mu) < \dots, \quad (2.14)$$

onde a igualdade indica que o autovalor $\lambda_{2\kappa-1}(\mu) = \lambda_{2\kappa}(\mu)$ é duplo.

Conforme [56], temos também o seguinte resultado:

Teorema 2.10. *Seja $L_{\mu_1} \in (\beta_{\mu_0}, +\infty)$ fixado. Consideremos que $\mu_1 \in \mathcal{V}$ e que φ_{μ_1} seja uma solução suave, par e periódica da equação*

$$-\varphi_{\mu_1}'' + g(\mu_1, \varphi_{\mu_1}) = 0. \quad (2.15)$$

Seja $\mathcal{L}_{\mu_1} := -\partial_x^2 + g'(\mu_1, \varphi_{\mu_1})$ o operador linearizado em torno da função φ_{μ_1} , definido sobre o espaço de Hilbert $L_{per}^2([0, L_{\mu_1}])$. Se $\ker(\mathcal{L}_{\mu_1}) = \text{span}\{\varphi_{\mu_1}'\}$, então, existe $\mathcal{I} \subset \mathcal{V}$, um intervalo aberto que contém μ_1 e existe uma família de funções $\{\phi_\mu\}_{\mu \in \mathcal{I}}$, tal que ϕ_μ é solução da equação (2.10), $\forall \mu \in \mathcal{I}$. Além disto, ϕ_μ é uma função par, periódica de período L_{μ_1} , $\phi_{\mu_1} = \varphi_{\mu_1}$ e a aplicação $\mu \in \mathcal{I} \mapsto \phi_\mu \in H_{per,e}^2([0, L_{\mu_1}])$ é suave.

Demonstração. Consideremos a função H ,

$$\begin{aligned} H : \mathcal{V} \times H_{per,e}^2([0, L_{\mu_1}]) &\rightarrow L_{per,e}^2([0, L_{\mu_1}]) \\ (\mu, \varphi) &\mapsto H(\mu, \varphi) = -\varphi'' + g(\mu, \varphi). \end{aligned}$$

Por hipótese, $\varphi_{\mu_1} \in H_{per,e}^2([0, L_{\mu_1}])$ atende à expressão (2.15). Ou seja,

$$H(\mu_1, \varphi_{\mu_1}) = -\varphi_{\mu_1}'' + g(\mu_1, \varphi_{\mu_1}) = 0.$$

Além disto, 0 é um autovalor simples do operador $\mathcal{L}_{\mu_1} = -\partial_x^2 + g'(\mu_1, \varphi_{\mu_1})$. Isto se deve ao fato do núcleo de \mathcal{L}_{μ_1} ter dimensão 1 por ser gerado pela função φ_{μ_1}' . Como φ_{μ_1} é uma função não-trivial par, segue que a função φ_{μ_1}' é ímpar e não-trivial e, portanto, $\varphi_{\mu_1}' \notin H_{per,e}^2([0, L_{\mu_1}])$. Desta maneira,

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi}(\mu_1, \varphi_{\mu_1}) = \mathcal{L}_{\mu_1} : H_{per,e}^2([0, L_{\mu_1}]) \rightarrow L_{per,e}^2([0, L_{\mu_1}])$$

é um operador invertível que possui inversa limitada. A aplicação do Teorema da Função Implícita (ver Teorema 15.1 e Corolário 15.1 em Deimling, [32]) é suficiente para concluir a prova deste resultado.

■

Teorema 2.11. *Seja $\mu \in \mathcal{I} \mapsto \phi_\mu \in H_{per,e}^2([0, L_{\mu_1}])$ a família de funções L_{μ_1} -periódicas determinada pelo Teorema 2.10. Então, a família de operadores*

$$\mathcal{L}_{\mu, \phi_\mu} := -\partial_x^2 + g'(\mu, \phi_\mu), \quad \mu \in \mathcal{I},$$

é isonercial.

Demonstração. Ver Neves, [58], Teorema 3.1.

■

Conforme o Teorema 2.11, para conhecermos características do espectro dos operadores da família $\{\mathcal{L}_{\mu, \phi_\mu}\}_{\mu \in \mathcal{I}}$, é suficiente que estudemos o espectro do operador $\mathcal{L}_{\mu_2, \phi_{\mu_2}}$, onde $\mu_2 \in \mathcal{I}$ está fixado.

Definamos $p(x) := \phi'_{\mu_2}(x)$. Seja a função \bar{y} , a única solução do problema auxiliar

$$\begin{cases} -\bar{y}'' + g'(\mu_2, \phi_{\mu_2})\bar{y} = 0 \\ \bar{y}(0) = -\frac{1}{\phi''_{\mu_2}(0)} \\ \bar{y}'(0) = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Resultados descritos em [55], em [56] e em suas referências, apontam que a função $\bar{y}(x)$ é linearmente independente a $p(x)$ e existe uma constante θ de tal modo que

$$\bar{y}(x + L_{\mu_1}) = \bar{y}(x) + \theta p(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.17)$$

Desta forma,

$$\bar{y}'(L_{\mu_1}) = \bar{y}'(0) + \theta p'(0) \Rightarrow \theta = \frac{\bar{y}'(L_{\mu_1})}{\phi''_{\mu_2}(0)}. \quad (2.18)$$

Segundo [55] e [56], também é válido o seguinte resultado:

Teorema 2.12. *Seja θ a constante dada em (2.18). O número 0 é um autovalor simples de $\mathcal{L}_{\mu_2, \phi_{\mu_2}}$, se e somente se, $\theta \neq 0$. Supondo $\theta \neq 0$, tem-se que $\lambda_1(\mu_2) = 0$ se $\theta < 0$ e, $\lambda_2(\mu_2) = 0$ se $\theta > 0$.*

■

Combinando os Teoremas 2.10, 2.11 e 2.12, é possível enunciar o resultado adicional:

Corolário 2.13. *Seja φ_{μ_1} , determinada pelo Teorema 2.9, a solução L_{μ_1} -periódica da equação (2.15), associada ao parâmetro $\mu_1 \in \mathcal{V}$. Se $\theta \neq 0$, onde θ é a constante dada em (2.18) em termos de φ_{μ_1} , então, $\ker(\mathcal{L}_{\mu_1}) = \text{span}\{\varphi'_{\mu_1}\}$ e o Teorema 2.10 é válido para este parâmetro μ_1 .*

■

Definição 2.14. *Seja $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in \mathcal{V}}$, a família de funções suaves L_μ -periódicas, determinada pelo Teorema 2.9. Seja $\mu_1 \in \mathcal{V}$, um valor fixado. A família de operadores $\{\mathcal{L}_\mu\}_{\mu \in \mathcal{V}}$, estabelecida em (2.13), é dita ser isonercial com respeito ao período $L_\mu > 0$ se*

$$In(\mathcal{L}_\mu) = In(\mathcal{L}_{\mu_1}), \quad \forall \mu \in \mathcal{V}.$$

Segundo Natali e Pastor, [56], enunciamos o seguinte resultado:

Teorema 2.15. *Seja $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in \mathcal{V}}$ a família de funções estabelecida no Teorema 2.9. Então, a família de operadores $\{\mathcal{L}_\mu\}_{\mu \in \mathcal{V}}$, determinada em (2.13), é isonercial com respeito ao período L_μ .*

■

Capítulo 3

Instabilidade Orbital de Soluções do tipo Onda Estacionária Periódica para a Equação de Klein-Gordon com Potência Polinomial Quíntica

Neste capítulo, investigaremos a existência e analisaremos a instabilidade orbital de soluções do tipo onda estacionária periódica para a equação de Klein-Gordon não-linear com potência polinomial quíntica

$$u_{tt} - u_{xx} + u - |u|^4 u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+. \quad (3.1)$$

Inicialmente, veremos as noções usuais de onda estacionária periódica e o conceito de estabilidade orbital.

Definição 3.1. *A função $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ é dita uma solução do tipo onda estacionária periódica de período $L > 0$ da equação (3.1) se existirem $c \in \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma função suave e periódica de período L , tais que*

$$u(x, t) := e^{ict} \varphi(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad (3.2)$$

soluciona (3.1) no sentido clássico.

Definição 3.2. *Dizemos que a solução onda estacionária periódica (3.2) da equação de Klein-Gordon (3.1) é orbitalmente estável se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se*

$$(u_0, v_0) \in X = H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L]) \text{ satisfizer } \|(u_0, v_0) - (\varphi, ic\varphi)\|_X < \delta,$$

então, a solução $\vec{u} = (u, u_t)$ de (3.1) com $\vec{u}(\cdot, 0) = (u_0, v_0)$ admite boa colocação global em $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$ e satisfaz

$$\sup_{t \geq 0} \inf_{\theta \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}} \|\vec{u}(\cdot, t) - e^{i\theta}(\varphi(\cdot + y), ic\varphi(\cdot + y))\|_X < \varepsilon.$$

Caso contrário, a solução (3.2) é dita orbitalmente instável.

Para fazer o estudo da instabilidade orbital da equação (3.1), nos embasaremos na teoria clássica de Grillakis, Shatah e Strauss, vista na referência [37]. Esta teoria se fundamenta em interpretar (3.1) como um sistema Hamiltoniano abstrato associado a quantidades conservadas invariantes a ações de determinados grupos. Tais ações estão associadas ao estabelecimento de simetrias. No caso considerado na Definição 3.2, as simetrias envolvidas são as de translação e de rotação. Como desejamos aplicar a teoria em [37], o estudo a ser apresentado se restringirá ao caso em que a onda estacionária introduzida na Definição 3.1 provém de uma função suave φ que é par. Nosso enfoque levará em consideração o espaço de Hilbert $H_{per,e}^1([0, L]) \times L_{per,e}^2([0, L])$, com $L > 0$, em vez do espaço X . Nesta situação, entretanto, é preciso que a noção de estabilidade orbital seja revista. Isto, pois, a função $\varphi \in H_{per,e}^1([0, L])$, por exemplo, ao ser transladada pode deixar de ser um elemento do espaço $H_{per,e}^1([0, L])$. Admitiremos, portanto, uma nova noção de estabilidade orbital que é compatível ao espaço em que as considerações são válidas.

Definição 3.3. Dizemos que a solução onda estacionária periódica (3.2) da equação de Klein-Gordon (3.1), onde φ é uma função par, é orbitalmente estável se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se

$$(u_0, v_0) \in H_{per,e}^1([0, L]) \times L_{per,e}^2([0, L]) \text{ satisfizer } \|(u_0, v_0) - (\varphi, ic\varphi)\|_X < \delta,$$

então, a solução $\vec{u} = (u, u_t)$ de (3.1) com $\vec{u}(\cdot, 0) = (u_0, v_0)$ admite boa colocação global em $H_{per,e}^1([0, L]) \times L_{per,e}^2([0, L])$ e satisfaz

$$\sup_{t \geq 0} \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \|\vec{u}(\cdot, t) - e^{i\theta}(\varphi, ic\varphi)\|_X < \varepsilon,$$

lembrando que $X = H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$.

Caso contrário, a solução (3.2) é dita orbitalmente instável.

Antes de fazermos o estudo propriamente dito da estabilidade orbital de ondas estacionárias periódicas para a equação de Klein-Gordon (3.1), apresentaremos o estudo relativo à boa colocação desta equação.

3.1 Resultados de Boa Colocação

Nesta seção, estudaremos a boa colocação da equação de Klein-Gordon com não-linearidade da forma potência polinomial quártica (3.1), ou seja, trataremos a boa colocação da equação

$$u_{tt} - u_{xx} + u - |u|^4 u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

A abordagem será feita com base nas soluções generalizadas no contexto dos espaços de Sobolev $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$ e $H_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L])$. Em um segundo momento, deduziremos quantidades conservadas a serem usadas no tratar da instabilidade orbital. Finalmente, deduziremos que, sobre o espaço de Sobolev $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$, a equação apresenta boa colocação global para “dados pequenos” e identificaremos uma situação em que há blow-up.

3.1.1 Problema de Cauchy Abstrato - Equação Não-Linear

Seja X um espaço de Banach reflexivo. Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear não-limitado. Consideremos o problema de Cauchy Abstrato sobre X

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[U(t)] = AU(t) + Q(U(t)), & t > 0. \\ U(0) = U_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Suponhamos que $Q : X \rightarrow X$ seja uma função contínua e que $U_0 \in X$.

Definição 3.4. *Seja S um semigrupo de classe C_0 sobre o espaço de Banach reflexivo X e seja A o gerador infinitesimal do semigrupo S . A função $U \in C^0([0, T]; X)$ é uma solução generalizada do problema (3.3), sobre o intervalo $[0, T]$, se*

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)Q(U(s)) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Definição 3.5. *Seja S um semigrupo de classe C_0 sobre o espaço de Banach reflexivo X e seja A o gerador infinitesimal do semigrupo S . Seja U uma função de tal forma que*

$$U \in C^1([0, T]; X) \cap C^0([0, T]; D(A)),$$

onde $D(A)$ é um espaço de Banach munido da norma do gráfico. Esta função U é dita uma solução regular do problema (3.3), no intervalo $[0, T]$, se $U(0) = U_0$ e

$$U'(t) = AU(t) + Q(U(t)),$$

para quase todo $t \in [0, T]$.

Em geral, uma solução regular de (3.3) é uma solução generalizada de (3.3). A recíproca, entretanto, não é válida. Usando resultados provenientes da Teoria dos Semigrupos, [20], [35] e [62], se $U_0 \in D(A)$, então, a solução generalizada de (3.3) é também uma solução regular do problema (3.3). Ao longo do desenvolvimento, trabalharemos com o problema de Cauchy Abstrato que provém da equação de Klein-Gordon com potência polinomial quártica (3.1).

3.1.2 Boa Colocação Local em $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$

Consideremos o problema de Cauchy que envolve a equação de Klein-Gordon com potência polinomial quártica (3.1),

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u - |u|^4 u = 0. \\ u(x, 0) = u_0(x). \\ u_t(x, 0) = v_0(x). \end{cases} \quad (3.4)$$

Assumamos, à princípio, que $u_0 \in H_{per}^1([0, L])$ e $v_0 \in L_{per}^2([0, L])$, onde $L > 0$ está fixado. Para que possamos deduzir a boa colocação local do problema (3.4), no espaço de Hilbert $X := H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$, é preciso que façamos a abordagem de (3.4) na perspectiva de um problema de Cauchy Abstrato conforme (3.3). Formalmente, entendemos que a equação dada em (3.4) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_t \\ u_{xx} - u + |u|^4 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{xx} - u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ |u|^4 u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_x^2 - 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ |u|^4 u \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Definamos $A : D(A) \subset H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L]) \rightarrow H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$ como o operador

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_x^2 - 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Neste caso, em particular, $D(A) = H_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L])$. Fazendo uso do Teorema de Lumer-Phillips, provaremos o seguinte resultado.

Proposição 3.6. *O operador A , definido em (3.6), é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 sobre o espaço de Hilbert $X := H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$.*

Demonstração. Primeiramente, notemos que

$$\overline{H_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L])}^{H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])} = H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L]).$$

Logo, o domínio de A é denso no espaço X .

Afirmamos que o operador A é dissipativo. De fato, seja $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$. Ou seja, $u \in H_{per}^2([0, L])$ e $v \in H_{per}^1([0, L])$. Logo,

$$\begin{aligned} \left\langle A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle_{X, X} &= \left\langle \begin{pmatrix} v \\ u_{xx} - u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle_{X, X} \\ &= \int_0^L \bar{u}v \, dx - \int_0^L u\bar{v} \, dx + \int_0^L \bar{u}_x v_x \, dx - \int_0^L u_x \bar{v}_x \, dx \in i\mathbb{R}, \end{aligned}$$

pois, $x\bar{y} - \bar{x}y \in i\mathbb{R}$, $\forall x, y \in \mathbb{C}$. Esta última identidade é suficiente para termos

$$\operatorname{Re} \left[\left\langle A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle_{X,X} \right] = 0,$$

o que conclui que o operador A é dissipativo.

Em seguida, afirmamos que a aplicação $(I - A)$ é sobrejetora. Ou seja, para o par $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in X$, existe $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$, de tal modo que

$$(I - A) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Com a finalidade de provar esta última afirmação, consideremos as seguintes equivalências

$$\begin{aligned} (I - A) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\partial_x^2 + 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u - v = f \\ -u_{xx} + u + v = g. \end{cases} \end{aligned}$$

A afirmação estará provada se mostrarmos que $v = u - f \in H_{per}^1([0, L])$, onde a função $u \in H_{per}^2([0, L])$ satisfaz a identidade $-u_{xx} + 2u = f + g$. Seja $h := f + g \in L_{per}^2([0, L])$. Afirmamos a existência da função $u \in H_{per}^2([0, L])$ de tal modo que $-u_{xx} + 2u = h$. De fato, consideremos a forma auxiliar

$$\begin{aligned} a : H_{per}^1([0, L]) \times H_{per}^1([0, L]) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (u_1, u_2) &\mapsto \int_0^L \nabla u_1 \overline{\nabla u_2} \, dx + 2 \int_0^L u_1 \overline{u_2} \, dx. \end{aligned}$$

Obviamente, a é uma forma bilinear. Além disto, a é contínua, pois, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} |a(u_1, u_2)| &\leq \int_0^L |\nabla u_1| \cdot |\nabla u_2| \, dx + 2 \int_0^L |u_1| \cdot |u_2| \, dx \\ &\leq 3 \|u_1\|_{H_{per}^1} \|u_2\|_{H_{per}^1}, \quad \forall (u_1, u_2) \in H_{per}^1([0, L]) \times H_{per}^1([0, L]). \end{aligned}$$

Por fim, a é uma forma coerciva, pois,

$$a(u_1, u_1) = \int_0^L |\nabla u_1|^2 \, dx + 2 \int_0^L |u_1|^2 \, dx \geq \|u_1\|_{H_{per}^1}^2, \quad \forall u_1 \in H_{per}^1([0, L]).$$

Pelo Lema de Lax-Milgram, devido a termos $h \in L_{per}^2([0, L]) \hookrightarrow H_{per}^{-1}([0, L])$, existe uma única função $u \in H_{per}^1([0, L])$ tal que

$$a(u, v_1) = \langle h, v_1 \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1}, \quad \forall v_1 \in H_{per}^1([0, L]).$$

Isto implica que, $\forall v_1 \in H_{per}^1([0, L])$,

$$-\langle u_{xx}, v_1 \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} + 2\langle u, v_1 \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} = \langle h, v_1 \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1}.$$

A relação acima é suficiente para assegurar que $-u_{xx} + 2u = h$ em $H_{per}^{-1}([0, L])$. Como a função $u \in H_{per}^1([0, L]) \hookrightarrow L_{per}^2([0, L])$ e $h \in L_{per}^2([0, L])$, segue que $u_{xx} \in L_{per}^2([0, L])$. Portanto, $u \in H_{per}^2([0, L])$, o que conclui a afirmação auxiliar. Além disto, notando que $f \in H_{per}^1([0, L])$, concluimos que $v = u - f \in H_{per}^1([0, L])$, o que é suficiente para garantirmos a sobrejetividade da aplicação $(I - A)$.

Pelo Teorema de Lumer-Phillips, o operador A , definido em (3.6), é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 sobre o espaço $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$. ■

O estudo do problema (3.4), conforme as observações acima, passa a ser entendido via o estudo do problema de Cauchy Abstrato

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ |u|^4 u \end{pmatrix}. \\ \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Nosso próximo objetivo é mostrar a boa colocação local do problema (3.7) no espaço de Hilbert $X = H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$. Usando argumentos de ponto fixo, provaremos esta boa colocação a seguir.

Teorema 3.7. *O problema (3.7) é bem colocado localmente em $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$. Ou seja, para todo*

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in X = H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L]),$$

existe $T = T(\|u_0\|_{H_{per}^1}, \|v_0\|_{L_{per}^2}) > 0$ e existe uma única função

$$U \in C^0([0, T]; H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L]))$$

solução generalizada do problema de Cauchy (3.7) sobre o intervalo $[0, T]$. Além disto, para todo $T', 0 < T' < T$, existe uma vizinhança $V \subset X$ de $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ de tal modo que o fluxo dado-solução

$$\mathbb{F} : \begin{matrix} V & \rightarrow & C^0([0, T']; H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])) \\ \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} & \mapsto & \tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

é Lipschitz.

Demonstração. Seja A o operador definido em (3.6) e seja S o semigrupo de contrações de classe C_0 , estabelecido pela Proposição 3.6, que tem o operador A como seu gerador infinitesimal. Fixemos

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in X = H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L]).$$

À princípio, mostraremos que existe $T > 0$ e que existe uma única função

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C^0([0, T]; H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L]))$$

tal que

$$\begin{pmatrix} u(\cdot, t) \\ v(\cdot, t) \end{pmatrix} = S(t) \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \int_0^t S(t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ |u(\cdot, s)|^4 u(\cdot, s) \end{pmatrix} ds,$$

para $t \in [0, T]$.

Definamos a função

$$Q : H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L]) \rightarrow H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L]) \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ |u_1|^4 u_1 \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que a função Q está bem definida. Com efeito, $0 \in H_{per}^1([0, L])$. Em seguida, consideremos $u_1 \in H_{per}^1([0, L])$. Devido à cadeia de imersões

$$H_{per}^1([0, L]) \hookrightarrow L_{per}^\infty([0, L]) \hookrightarrow L_{per}^2([0, L]),$$

existe uma constante $\tilde{k}_1 > 0$ de tal modo que

$$\| |u_1|^4 u_1 \|_{L_{per}^2} \leq \|u_1\|_{L_{per}^\infty}^4 \|u_1\|_{L_{per}^2} \leq \tilde{k}_1 \|u_1\|_{H_{per}^1}^5 < +\infty.$$

Logo, $|u_1|^4 u_1 \in L_{per}^2([0, L])$.

Afirmamos também que a função Q é localmente Lipschitz. Com efeito, seja $R > 0$ fixado e suponhamos que

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \in X = H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$$

com

$$\left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \right\|_X \leq R \quad \text{e} \quad \left\| \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\|_X \leq R.$$

Em um primeiro momento, notemos que

$$\begin{aligned} \left\| Q \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} - Q \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\|_X &= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ |u_1|^4 u_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ |u_2|^4 u_2 \end{pmatrix} \right\|_X \\ &\leq \| [|u_1|^4] [u_1 - u_2] \|_{L_{per}^2} + \| [|u_1|^4 - |u_2|^4] u_2 \|_{L_{per}^2} \leq \|u_1\|_{L_{per}^\infty}^4 \|u_1 - u_2\|_{L_{per}^2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$+ \|u_2\|_{L_{per}^\infty} \cdot [\|u_1\|_{L_{per}^\infty} + \|u_2\|_{L_{per}^\infty}] \cdot [\|u_1\|_{L_{per}^\infty}^2 + \|u_2\|_{L_{per}^\infty}^2] \cdot \| [|u_1| - |u_2|] \|_{L_{per}^2}.$$

Devido à imersão contínua $H_{per}^1([0, L]) \hookrightarrow L_{per}^\infty([0, L])$, existe uma constante $k_2 > 0$ de tal modo que

$$\|\cdot\|_{L_{per}^\infty} \leq k_2 \|\cdot\|_{H_{per}^1}. \quad (3.9)$$

Pelo fato de termos $\|u_1\|_{H_{per}^1} \leq R$ e $\|u_2\|_{H_{per}^1} \leq R$, usando a desigualdade (3.9), vemos que

$$\|u_1\|_{L_{per}^\infty} \leq k_2 \|u_1\|_{H_{per}^1} \leq k_2 R \quad \text{e} \quad \|u_2\|_{L_{per}^\infty} \leq k_2 \|u_2\|_{H_{per}^1} \leq k_2 R. \quad (3.10)$$

Substituindo as relações (3.10) em (3.8),

$$\begin{aligned} \left\| Q \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} - Q \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\|_X &\leq k_2^4 R^4 \|u_1 - u_2\|_{L_{per}^2} + 4k_2^4 R^4 \||u_1| - |u_2|\|_{L_{per}^2} \\ &\leq 5k_2^4 R^4 \|u_1 - u_2\|_{H_{per}^1} \leq 5k_2^4 R^4 \left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\|_X, \end{aligned} \quad (3.11)$$

o que é suficiente para provar que Q é uma função localmente Lipschitz. Ao longo do desenvolvimento, usaremos esta propriedade com a finalidade de garantir a boa colocação local do problema (3.7) em X .

Seja $T > 0$, um valor real a ser estabelecido. Definamos o conjunto

$$\Pi := \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \in C^0([0, T]; X); \left\| \begin{pmatrix} u_1(\cdot, t) \\ v_1(\cdot, t) \end{pmatrix} \right\|_X \leq 1 + \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X, \forall t \in [0, T] \right\}.$$

O conjunto Π é um espaço métrico completo, pois, Π é fechado em $C^0([0, T]; X)$. Definamos também a aplicação $\Phi : \Pi \rightarrow \Pi$, dada por

$$\Phi \begin{pmatrix} u_1(\cdot, t) \\ v_1(\cdot, t) \end{pmatrix} = S(t) \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \int_0^t S(t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ |u_1(\cdot, s)|^4 u_1(\cdot, s) \end{pmatrix} ds, \quad \forall \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \in \Pi,$$

para cada $t \in [0, T]$. Estabeleçamos que $R := 1 + \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X > 0$ e fixemos $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \in \Pi$.

Usando o mesmo procedimento detalhado para obter (3.8), para cada $s \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \left\| Q \begin{pmatrix} u_1(\cdot, s) \\ v_1(\cdot, s) \end{pmatrix} - Q \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X &= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ |u_1(\cdot, s)|^4 u_1(\cdot, s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ |u_0|^4 u_0 \end{pmatrix} \right\|_X \\ &\leq \left[\|u_1(\cdot, s)\|_{L_{per}^\infty}^4 + \|u_0\|_{L_{per}^\infty} [\|u_1(\cdot, s)\|_{L_{per}^\infty} + \|u_0\|_{L_{per}^\infty}] \cdot [\|u_1(\cdot, s)\|_{L_{per}^\infty}^2 + \|u_0\|_{L_{per}^\infty}^2] \right] \\ &\quad \times \left\| \begin{pmatrix} u_1(\cdot, s) \\ v_1(\cdot, s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Considerando $k_2 > 0$ a constante descrita em (3.9), para cada $s \in [0, T]$,

$$\|u_1(\cdot, s)\|_{H_{per}^1} \leq \left\| \begin{pmatrix} u_1(\cdot, s) \\ v_1(\cdot, s) \end{pmatrix} \right\|_X \leq 1 + \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X = R,$$

$$\|u_1(\cdot, s)\|_{L_{per}^\infty} \leq k_2 \|u_1(\cdot, s)\|_{H_{per}^1} \leq k_2 R \quad (3.13)$$

e

$$\|u_0\|_{L_{per}^\infty} \leq k_2 \|u_0\|_{H_{per}^1} \leq k_2 \left[1 + \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X \right] = k_2 R. \quad (3.14)$$

Apliquemos (3.13) e (3.14) em (3.12). Vemos que, para cada $s \in [0, T]$,

$$\left\| Q \begin{pmatrix} u_1(\cdot, s) \\ v_1(\cdot, s) \end{pmatrix} - Q \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X \leq \tilde{L} \left\| \begin{pmatrix} u_1(\cdot, s) \\ v_1(\cdot, s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X, \quad (3.15)$$

onde

$$\tilde{L} = 5k_2^4 R^4 = 5k_2^4 \left[1 + \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X \right]^4. \quad (3.16)$$

Com a finalidade de mostrar a existência de uma única solução generalizada para o problema de Cauchy Abstrato (3.7), usaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach sobre o espaço métrico completo Π . Para isto, entretanto, teremos que verificar que a função Φ está bem definida e é uma contração. De início, estabeleceremos $T > 0$ de tal forma que a função Φ esteja bem definida. Seja $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \in \Pi$. Usando o fato de que S é um semigrupo de contrações de classe C_0 em associação com a relação (3.15), temos que, para cada $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \left\| \Phi \begin{pmatrix} u_1(\cdot, t) \\ v_1(\cdot, t) \end{pmatrix} \right\|_X &= \left\| S(t) \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \int_0^t S(t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ |u_1(\cdot, s)|^4 u_1(\cdot, s) \end{pmatrix} ds \right\|_X \\ &\leq \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X + \tilde{L} \int_0^t \left\| \begin{pmatrix} u_1(\cdot, s) \\ v_1(\cdot, s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X ds + T \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ |u_0|^4 u_0 \end{pmatrix} \right\|_X \\ &\leq \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X + T \left[\tilde{L} \left(1 + 2 \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X \right) + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ |u_0|^4 u_0 \end{pmatrix} \right\|_X \right]. \end{aligned}$$

Consideremos

$$T^* := \frac{1}{\tilde{L} \left(1 + 2 \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X \right) + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ |u_0|^4 u_0 \end{pmatrix} \right\|_X}.$$

Redefinamos T de forma que $0 \leq T \leq T^*$. Desta maneira, para cada $t \in [0, T]$,

$$\left\| \Phi \begin{pmatrix} u_1(\cdot, t) \\ v_1(\cdot, t) \end{pmatrix} \right\|_X \leq 1 + \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X.$$

Isto conclui a boa definição da função $\Phi : \Pi \rightarrow \Pi$.

Na sequência, se for preciso, reestabeleceremos $T > 0$ de modo que a aplicação Φ caracterize uma contração. Sejam

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \Pi.$$

Para cada $t \in [0, T]$, procedendo a partir de uma relação similar a (3.15),

$$\begin{aligned} & \left\| \Phi \begin{pmatrix} u_1(\cdot, t) \\ v_1(\cdot, t) \end{pmatrix} - \Phi \begin{pmatrix} u_2(\cdot, t) \\ v_2(\cdot, t) \end{pmatrix} \right\|_X \\ & \leq \int_0^t \left\| \left[\begin{pmatrix} 0 \\ |u_1(\cdot, s)|^4 u_1(\cdot, s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ |u_2(\cdot, s)|^4 u_2(\cdot, s) \end{pmatrix} \right] \right\|_X ds \\ & \leq \tilde{L}T \max_{t \in [0, T]} \left\{ \left\| \begin{pmatrix} u_1(\cdot, t) \\ v_1(\cdot, t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_2(\cdot, t) \\ v_2(\cdot, t) \end{pmatrix} \right\|_X \right\}, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\left\| \Phi \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} - \Phi \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\|_{C^0([0, T]; X)} \leq \tilde{L}T \left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\|_{C^0([0, T]; X)}.$$

Façamos $0 < T_0 < \min \left\{ T^*, \frac{1}{\tilde{L}} \right\}$. Para $T \in (0, T_0)$, temos que a aplicação $\Phi : \Pi \rightarrow \Pi$ é uma contração.

O Teorema do Ponto Fixo de Banach garante que, para este valor de T , existe uma única função $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \Pi$ tal que

$$\begin{pmatrix} u(\cdot, t) \\ v(\cdot, t) \end{pmatrix} = S(t) \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \int_0^t S(t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ |u(\cdot, s)|^4 u(\cdot, s) \end{pmatrix} ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Usando a Desigualdade de Gronwall em conjunto com uma adaptação da relação (3.8), é possível verificar que a função $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \Pi$ acima é a única solução generalizada do problema (3.7) sobre o intervalo $[0, T]$.

Para encerrar a prova, refinaremos novamente o intervalo $[0, T]$, se necessário, para garantir as propriedades de dependência contínua requeridas pelo problema (3.7). Observemos que

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ |u_0|^4 u_0 \end{pmatrix} \right\|_X \leq k_3^5 \|u_0\|_{H_{per}^1}^5 \leq k_3^5 \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X^5, \quad (3.17)$$

pois, $\| \cdot \|_{L_{per}^{10}([0, L])} \leq k_3 \| \cdot \|_{H_{per}^1([0, L])}$, com $k_3 > 0$, uma vez que $H_{per}^1([0, L]) \hookrightarrow L_{per}^{10}([0, L])$.

Usando as relações (3.16) e (3.17), segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T^*} &= \tilde{L} \left(1 + 2 \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X \right) + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ |u_0|^4 u_0 \end{pmatrix} \right\|_X \\
&\leq 5k_2^4 \left(1 + \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X \right)^4 \cdot \left(1 + 2 \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X \right) + k_3^5 \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X^5 \\
&\leq [5k_2^4 + k_3^5] \cdot \left(1 + 2 \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X \right)^5
\end{aligned}$$

e

$$\tilde{L} = 5k_2^4 \left(1 + \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X \right)^4 \leq [5k_2^4 + k_3^5] \cdot \left(1 + 2 \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X \right)^5.$$

Estabeleçamos $k_4 := \frac{1}{5k_2^4 + k_3^5}$. Vamos redefinir T , de forma que

$$0 < T < T_1 := \frac{k_4}{\left(1 + 2 \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X \right)^5} \leq \min \left\{ T^*, \frac{1}{\tilde{L}} \right\}. \quad (3.18)$$

Evidentemente, a abordagem anteriormente detalhada para a existência e unicidade de solução generalizada para o problema de Cauchy (3.7) permanece válida para o valor de T estabelecido em (3.18).

Seja T' fixado tal que $0 \leq T' < T$. Em seguida, mostraremos que existe uma vizinhança $V \subset X$ do par $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in X$ de tal modo que o fluxo dado-solução

$$\mathbb{F} : \quad \begin{array}{ccc} V & \rightarrow & C^0([0, T']; H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])) \\ \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \end{array}$$

é Lipschitz.

Com efeito, por um argumento de continuidade, em (3.18), existe $\delta > 0$ de tal modo que

$$T' < T < \frac{k_4}{\left(1 + 2 \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X + 2\delta \right)^5} < \frac{k_4}{\left(1 + 2 \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X \right)^5}.$$

Definamos a vizinhança

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} \in X; \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} \right\|_X < \delta \right\}.$$

Se $\begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} \in V$, obviamente,

$$\left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X - \delta < \left\| \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} \right\|_X < \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X + \delta. \quad (3.19)$$

A relação (3.19) implica que

$$T' < \frac{k_4}{\left(1 + 2 \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X + 2\delta\right)^5} < \frac{k_4}{\left(1 + 2 \left\| \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} \right\|_X\right)^5}.$$

O procedimento detalhado nesta seção para a existência e unicidade de solução generalizada para o problema (3.7) nos garante a existência de uma única função $\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \in \Pi_1$, onde

$$\Pi_1 := \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C^0([0, T']; X); \left\| \begin{pmatrix} u(\cdot, t) \\ v(\cdot, t) \end{pmatrix} \right\|_X \leq 1 + \left\| \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} \right\|_X, \forall t \in [0, T'] \right\}$$

e

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}(\cdot, t) \\ \tilde{v}(\cdot, t) \end{pmatrix} = S(t) \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} + \int_0^t S(t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ |\tilde{u}(\cdot, s)|^4 \tilde{u}(\cdot, s) \end{pmatrix} ds, \forall t \in [0, T'].$$

Procedendo de maneira análoga, para $\begin{pmatrix} \tilde{\tilde{u}}_0 \\ \tilde{\tilde{v}}_0 \end{pmatrix} \in V$ fixado, existe uma única função

$\begin{pmatrix} \tilde{\tilde{u}} \\ \tilde{\tilde{v}} \end{pmatrix} \in \Pi_2$, onde

$$\Pi_2 := \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C^0([0, T']; X); \left\| \begin{pmatrix} u(\cdot, t) \\ v(\cdot, t) \end{pmatrix} \right\|_X \leq 1 + \left\| \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{u}}_0 \\ \tilde{\tilde{v}}_0 \end{pmatrix} \right\|_X, \forall t \in [0, T'] \right\}$$

e

$$\begin{pmatrix} \tilde{\tilde{u}}(\cdot, t) \\ \tilde{\tilde{v}}(\cdot, t) \end{pmatrix} = S(t) \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{u}}_0 \\ \tilde{\tilde{v}}_0 \end{pmatrix} + \int_0^t S(t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ |\tilde{\tilde{u}}(\cdot, s)|^4 \tilde{\tilde{u}}(\cdot, s) \end{pmatrix} ds, \forall t \in [0, T'].$$

Seja $t \in [0, T']$. Usando o fato de que S é um semigrupo de contrações de classe C_0 , temos que

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{pmatrix} \tilde{u}(\cdot, t) \\ \tilde{v}(\cdot, t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{u}}(\cdot, t) \\ \tilde{\tilde{v}}(\cdot, t) \end{pmatrix} \right\|_X = \left\| S(t) \left[\begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{u}}_0 \\ \tilde{\tilde{v}}_0 \end{pmatrix} \right] \right. \\ & \left. + \int_0^t S(t-s) \left[\begin{pmatrix} 0 \\ |\tilde{u}(\cdot, s)|^4 \tilde{u}(\cdot, s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ |\tilde{\tilde{u}}(\cdot, s)|^4 \tilde{\tilde{u}}(\cdot, s) \end{pmatrix} \right] ds \right\|_X \\ & \leq \left\| \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{u}}_0 \\ \tilde{\tilde{v}}_0 \end{pmatrix} \right\|_X + \int_0^t \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ |\tilde{u}(\cdot, s)|^4 \tilde{u}(\cdot, s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ |\tilde{\tilde{u}}(\cdot, s)|^4 \tilde{\tilde{u}}(\cdot, s) \end{pmatrix} \right\|_X ds. \end{aligned}$$

Façamos adaptações das relações (3.12)-(3.16) e (3.19). Temos, na relação imediatamente acima, que

$$\begin{aligned}
& \left\| \begin{pmatrix} \tilde{u}(\cdot, t) \\ \tilde{v}(\cdot, t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{u}}(\cdot, t) \\ \tilde{\tilde{v}}(\cdot, t) \end{pmatrix} \right\|_X \leq \left\| \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{u}}_0 \\ \tilde{\tilde{v}}_0 \end{pmatrix} \right\|_X \\
& + \max_{s \in [0, T']} \left[\|\tilde{u}(\cdot, s)\|_{L_{per}^\infty}^4 + \|\tilde{\tilde{u}}(\cdot, s)\|_{L_{per}^\infty} \cdot \left[\|\tilde{u}(\cdot, s)\|_{L_{per}^\infty} + \|\tilde{\tilde{u}}(\cdot, s)\|_{L_{per}^\infty} \right] \right. \\
& \times \left. \left[\|\tilde{u}(\cdot, s)\|_{L_{per}^\infty}^2 + \|\tilde{\tilde{u}}(\cdot, s)\|_{L_{per}^\infty}^2 \right] \right] \cdot \left[\int_0^t \left\| \begin{pmatrix} \tilde{u}(\cdot, s) \\ \tilde{v}(\cdot, s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{u}}(\cdot, s) \\ \tilde{\tilde{v}}(\cdot, s) \end{pmatrix} \right\|_X ds \right] \quad (3.20) \\
& \leq \left\| \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{u}}_0 \\ \tilde{\tilde{v}}_0 \end{pmatrix} \right\|_X \\
& + 5k_2^4 \left[1 + \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X + \delta \right]^4 T' \left\| \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{u}} \\ \tilde{\tilde{v}} \end{pmatrix} \right\|_{C^0([0, T']; X)}.
\end{aligned}$$

De acordo com a relação (3.18), temos que

$$5k_2^4 \left(1 + \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X \right)^4 < \frac{1}{T} < \frac{1}{T'}.$$

Logo, podemos redefinir $\delta > 0$, se necessário, de modo que

$$k_5 := 5k_2^4 \left[1 + \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right\|_X + \delta \right]^4 T' < 1. \quad (3.21)$$

Relacionando as informações (3.20) e (3.21), vemos que

$$\left\| \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{u}} \\ \tilde{\tilde{v}} \end{pmatrix} \right\|_{C^0([0, T']; X)} \leq \frac{1}{1 - k_5} \left\| \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{u}}_0 \\ \tilde{\tilde{v}}_0 \end{pmatrix} \right\|_X,$$

o que é suficiente para garantir que o fluxo dado-solução

$$\begin{aligned}
\mathbb{F} : \quad V & \rightarrow C^0([0, T']; H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])) \\
\begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

é Lipschitz. Portanto, o problema (3.7) está bem colocado localmente no espaço de Hilbert $X = H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$.

■

3.1.3 Boa Colocação Local em $H_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L])$

De acordo com o Teorema 3.7, o problema de Cauchy (3.7) é bem colocado localmente no espaço de Hilbert $X := H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$. Este resultado pode ser aprimorado de maneira a garantir a boa colocação local para as soluções regulares do problema (3.7) no espaço de Hilbert $H_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L])$. Ao longo desta seção, serão formalizados os resultados que contemplam a boa colocação local do problema (3.7) neste espaço de maior regularidade.

Seja A o operador definido em (3.6). Tem-se que $D(A) = H_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L])$. Esta identidade se deve ao fato de que a norma gerada pelo gráfico do operador A é equivalente à norma usual do espaço $H_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L])$. Para efeito de análise, na verificação a seguir, consideraremos $H_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L])$ munido com a norma do gráfico gerado por A .

Proposição 3.8. *Seja S o semigrupo de contrações de classe C_0 gerado pelo operador A sobre o espaço X . Então, o operador S é um semigrupo de contrações de classe C_0 sobre o espaço $D(A)$.*

Demonstração. Usando os preceitos tratados por [35], observamos que, para cada $t \geq 0$,

$$S(t)[D(A)] \subset D(A), \quad S(t)Ax = AS(t)x, \quad \forall x \in D(A),$$

e que S é um semigrupo de classe C_0 sobre o espaço de Banach $D(A)$.

Seja $x \in D(A)$. Para cada $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|S(t)x\|_{D(A)} &= \|S(t)x\|_X + \|AS(t)x\|_X = \|S(t)x\|_X + \|S(t)Ax\|_X \\ &\leq \|x\|_X + \|Ax\|_X = \|x\|_{D(A)}, \end{aligned}$$

o que conclui S é um semigrupo de contrações de classe C_0 sobre o espaço $D(A)$. ■

Uma argumentação similar àquela detalhada pelo Teorema 3.7 permite enunciar o seguinte resultado:

Teorema 3.9. *O problema (3.7) é bem colocado localmente em $H_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L])$. Ou seja, para todo*

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D(A) = H_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L]),$$

existe $T = T(\|u_0\|_{H_{per}^2}, \|v_0\|_{H_{per}^1}) > 0$ e existe uma única função

$$U \in C^1([0, T]; H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])) \cap C^0([0, T]; H_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L]))$$

solução regular do problema de Cauchy (3.7) sobre o intervalo $[0, T]$. Além disto, para todo $T', 0 < T' < T$, existe uma vizinhança $V \subset H_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L])$ de $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ de tal modo que o fluxo dado-solução

$$\mathbb{F} : \begin{array}{ccc} V & \rightarrow & C^0([0, T']; H_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L])) \\ \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} & \mapsto & \tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \end{array}$$

é Lipschitz.

Demonstração. Notemos, inicialmente, que a função

$$G : \begin{array}{ccc} H_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L]) & \rightarrow & H_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L]) \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ |u_1|^4 u_1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

é localmente Lipschitz. Usando este fato em conjunto com a Proposição 3.8, a mesma argumentação detalhada na demonstração do Teorema 3.7 prova a boa colocação local para as soluções generalizadas do problema de Cauchy (3.7) no contexto do espaço $H_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L])$.

Seja

$$U \in C^0([0, T]; H_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L])),$$

a solução generalizada do problema (3.7) associado à condição inicial

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in H_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L]).$$

Fazendo uso de resultados relativos à Teoria dos Semigrupos, resultados detalhados nas referências [20], [35] e [62], tem-se que, em verdade,

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in C^1([0, T]; H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])) \cap C^0([0, T]; H_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L]))$$

determina uma solução regular para o problema de Cauchy (3.7). Isto é suficiente para concluir a prova do Teorema em questão. ■

3.1.4 Dedução de Quantidades Conservadas

Conforme o Teorema 3.9, o problema (3.7) está bem colocado localmente no contexto do espaço $H_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L])$. Tal abordagem retrata que se $u_0 \in H_{per}^2([0, L])$ e se $v_0 \in H_{per}^1([0, L])$, então, existe um número real $T > 0$ de tal modo que o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u - |u|^4 u = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ u_t(x, 0) = v_0(x) \end{cases} \quad (3.22)$$

é solucionado regularmente para $t \in [0, T]$. Em outras palavras, existe uma função

$$u \in C^2([0, T]; L^2_{per}([0, L])) \cap C^1([0, T]; H^1_{per}([0, L])) \cap C^0([0, T]; H^2_{per}([0, L])),$$

sujeita às condições iniciais $u(\cdot, 0) = u_0$ e $u_t(\cdot, 0) = v_0$ e tal que

$$u_{tt} - u_{xx} + u - |u|^4 u = 0 \quad (3.23)$$

é válida para quase todo $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$. Em verdade, a identidade (3.23) também é válida em $C^0([0, T]; L^2_{per}([0, L]))$.

Deduziremos, em seguida, duas quantidades conservadas relativas ao problema (3.22). Com esta finalidade, consideremos o conjugado complexo da expressão dada em (3.23). Obtemos que

$$\overline{u_{tt}} - \overline{u_{xx}} + \overline{u} - |u|^4 \overline{u} = 0, \quad (3.24)$$

para quase todo $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$. Multipliquemos a expressão (3.23) por $\overline{u_t}$ e a expressão (3.24) por u_t . Segue que, para quase todo $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$,

$$u_{tt}\overline{u_t} - u_{xx}\overline{u_t} + u\overline{u_t} - |u|^4 u\overline{u_t} = 0 \quad (3.25)$$

e

$$\overline{u_{tt}}u_t - \overline{u_{xx}}u_t + \overline{u}u_t - |u|^4 \overline{u}u_t = 0. \quad (3.26)$$

Somemos as expressões dadas em (3.25) e (3.26) e integremos o resultado desta adição na variável espacial sobre o intervalo $[0, L]$. Segue que, para quase todo $t \in [0, T]$,

$$\int_0^L u_{tt}\overline{u_t} + \overline{u_{tt}}u_t - u_{xx}\overline{u_t} - \overline{u_{xx}}u_t + u\overline{u_t} + \overline{u}u_t - |u|^4(u\overline{u_t} + \overline{u}u_t) dx = 0. \quad (3.27)$$

Pela caracterização apresentada, lembremos que $u \in C^2([0, T]; L^2_{per}([0, L]))$. Além disto, a função $u_x \in C^1([0, T]; L^2_{per}([0, L]))$. Estas informações, em vista da relação (3.27), nos levam a concluir que, para quase todo $t \in [0, T]$,

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^L |u_t|^2 + |u_x|^2 + |u|^2 - \frac{|u|^6}{3} dx \right) = 0. \quad (3.28)$$

Pela verificação (3.28),

$$\mathcal{E}(U) := \mathcal{E}(u, u_t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[|u_x|^2 + |u_t|^2 + |u|^2 - \frac{1}{3}|u|^6 \right] dx, \quad (3.29)$$

onde $U = (u, u_t) = (\text{Re } u, \text{Im } u_t, \text{Im } u, \text{Re } u_t)$, é uma quantidade conservada relativa à equação (3.23). Em outros termos, existe uma constante real k_6 tal que, para cada $t \in [0, T]$,

$$\mathcal{E}(U(\cdot, t)) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[|u_x(\cdot, t)|^2 + |u_t(\cdot, t)|^2 + |u(\cdot, t)|^2 - \frac{1}{3}|u(\cdot, t)|^6 \right] dx = k_6.$$

Na sequência, omitindo a dependência de t , afirmamos que

$$\mathcal{F}(U) := \mathcal{F}(u, u_t) = \operatorname{Im} \int_0^L \bar{u} u_t \, dx = \int_0^L (\operatorname{Re} u \operatorname{Im} u_t - \operatorname{Im} u \operatorname{Re} u_t) \, dx \quad (3.30)$$

também é uma quantidade conservada de (3.23).

Com efeito, sejam $a = \operatorname{Re} u$ e $b = \operatorname{Im} u$. A expressão (3.23) nos leva a entender que

$$a_{tt} + b_{tt}i - a_{xx} - b_{xx}i + a + bi - |u|^4 a - |u|^4 bi = 0. \quad (3.31)$$

Além disto, obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^L (\operatorname{Re} u \operatorname{Im} u_t - \operatorname{Im} u \operatorname{Re} u_t) \, dx \right] = \int_0^L ab_{tt} - ba_{tt} \, dx \in \mathbb{R}. \quad (3.32)$$

Mas, por outro lado, usando a identidade (3.31),

$$\begin{aligned} \int_0^L ab_{tt} - ba_{tt} \, dx &= \int_0^L [aa_{tt}i - aa_{xx}i + ab_{xx} + a^2i - ab - a^2i|u|^4 + ab|u|^4] \, dx \\ &+ \int_0^L [bb_{tt}i - a_{xx}b - bb_{xx}i + ab + b^2i - ab|u|^4 - b^2i|u|^4] \, dx \quad (3.33) \\ &= i \int_0^L [aa_{tt} + bb_{tt} + |u_x|^2 + |u|^2 - |u|^6] \, dx \in i\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Combinando as informações (3.32) e (3.33),

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^L (\operatorname{Re} u \operatorname{Im} u_t - \operatorname{Im} u \operatorname{Re} u_t) \, dx \right] = 0,$$

o que conclui que \mathcal{F} é uma quantidade conservada da equação (3.23).

Consideremos, novamente, o problema (3.22). Suponhamos que os dados iniciais sejam $u_0 \in H_{per}^1([0, L])$ e $v_0 \in L_{per}^2([0, L])$. Pelo Teorema 3.7, existe $T > 0$ e existe uma única função

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C^0([0, T]; H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])),$$

que é uma solução generalizada do problema adaptado (3.7). Denotemos $v = u_t$.

Frisemos que

$$\overline{H_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L])}^{H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])} = H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L]).$$

Desta maneira, podemos considerar a sequência $\{u_{0,\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset H_{per}^2([0, L])$ de tal modo que

$$u_{0,\nu} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} u_0 \text{ em } H_{per}^1([0, L]) \hookrightarrow L_{per}^6([0, L]) \quad (3.34)$$

e a sequência $\{v_{0,\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset H_{per}^1([0, L])$ tal que

$$v_{0,\nu} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} v_0 \text{ em } L_{per}^2([0, L]). \quad (3.35)$$

Redefinamos, se necessário, $T > 0$. Pelo Teorema 3.9, para cada $\nu \in \mathbb{N}$, existe uma função

$$u_\nu \in C^2([0, T]; L_{per}^2([0, L])) \cap C^1([0, T]; H_{per}^1([0, L])) \cap C^0([0, T]; H_{per}^2([0, L]))$$

que soluciona regularmente o problema

$$\begin{cases} \partial_{tt}(u_\nu) - \partial_{xx}(u_\nu) + u_\nu - |u_\nu|^4 u_\nu = 0 \\ u_\nu(x, 0) = u_{0,\nu}(x) \\ \partial_t u_\nu(x, 0) = v_{0,\nu}(x). \end{cases}$$

Seja $t \in [0, T]$. Devido às convergências (3.34) e (3.35) e às leis de conservação (3.29) e (3.30), temos a validade das identidades

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^L \left[|\partial_x u_\nu(\cdot, t)|^2 + |\partial_t u_\nu(\cdot, t)|^2 + |u_\nu(\cdot, t)|^2 - \frac{1}{3} |u_\nu(\cdot, t)|^6 \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[|\partial_x u_{0,\nu}|^2 + |v_{0,\nu}|^2 + |u_{0,\nu}|^2 - \frac{1}{3} |u_{0,\nu}|^6 \right] dx, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

e,

$$\begin{aligned} & \int_0^L [\operatorname{Re} u_\nu(\cdot, t) \operatorname{Im} \partial_t u_\nu(\cdot, t) - \operatorname{Im} u_\nu(\cdot, t) \operatorname{Re} \partial_t u_\nu(\cdot, t)] dx \\ &= \int_0^L (\operatorname{Re} u_{0,\nu} \operatorname{Im} v_{0,\nu} - \operatorname{Im} u_{0,\nu} \operatorname{Re} v_{0,\nu}) dx, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

A dependência contínua do problema (3.22) no espaço $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$ garante que

$$\begin{pmatrix} u_\nu \\ \partial_t u_\nu \end{pmatrix} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \text{ em } C^0([0, T]; H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])), \quad (3.38)$$

pois,

$$\begin{pmatrix} u_{0,\nu} \\ v_{0,\nu} \end{pmatrix} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \text{ em } H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L]). \quad (3.39)$$

As convergências em (3.38) e (3.39), quando aplicadas em (3.36) e (3.37), nos levam a concluir que, sobre o intervalo $[0, T]$,

$$\mathcal{E}(U) := \mathcal{E}(u, u_t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[|u_x|^2 + |u_t|^2 + |u|^2 - \frac{1}{3} |u|^6 \right] dx, \quad (3.40)$$

e

$$\mathcal{F}(U) := \mathcal{F}(u, u_t) = \operatorname{Im} \int_0^L \bar{u} u_t dx = \int_0^L (\operatorname{Re} u \operatorname{Im} u_t - \operatorname{Im} u \operatorname{Re} u_t) dx$$

são quantidades conservadas da equação (3.23) no espaço $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$.

3.1.5 Boa Colocação Global em $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$

Nesta subseção, mostraremos que, para “dados pequenos”, o problema (3.7) admite boa colocação global em $X = H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$.

Teorema 3.10. *Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Consideremos o conjunto*

$$\Xi := \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \in X := H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L]); \left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \right\|_X < \delta \right\}.$$

O problema (3.7) está bem colocado globalmente para condições iniciais em Ξ . Isto é, se $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in \Xi$, então, a solução $U \in C^0([0, T]; X)$ do problema de Cauchy (3.7), estabelecida no Teorema 3.7, está bem definida para $T = +\infty$. Além disto, os preceitos de dependência contínua são verificados numa vizinhança de $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, para cada $T > 0$.

Demonstração. Seja $\delta > 0$, uma constante suficientemente pequena. Consideremos que $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in \Xi$ e que $U(t) = \begin{pmatrix} u(\cdot, t) \\ u_t(\cdot, t) \end{pmatrix} \in X$ seja a solução generalizada do problema de Cauchy (3.7) em X . Lembremos que, pelo Teorema 3.7, a função $U \in C^0([0, T]; X)$, para algum $T > 0$. Além disto, pelo estudo das quantidades conservadas, temos a validade de (3.40). Com isto, para cada $t \in [0, T]$, deduzimos que

$$\|u(\cdot, t)\|_{H_{per}^1}^2 + \|u_t(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 - \frac{1}{3}\|u(\cdot, t)\|_{L_{per}^6}^6 = \|u_0\|_{H_{per}^1}^2 + \|v_0\|_{L_{per}^2}^2 - \frac{1}{3}\|u_0\|_{L_{per}^6}^6. \quad (3.41)$$

Definamos, para cada $t \in [0, T]$, a função auxiliar

$$\Psi(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \left\{ \left\| \begin{pmatrix} u(\cdot, \tau) \\ u_t(\cdot, \tau) \end{pmatrix} \right\|_X \right\}.$$

Notemos que Ψ é uma função contínua sobre o intervalo $[0, T]$. Em vista de (3.41), temos que, para cada $\tau \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, \tau)\|_{H_{per}^1}^2 + \|u_t(\cdot, \tau)\|_{L_{per}^2}^2 &\leq \|u_0\|_{H_{per}^1}^2 + \|v_0\|_{L_{per}^2}^2 + \frac{1}{3}\|u(\cdot, \tau)\|_{L_{per}^6}^6 \\ &\leq \Psi(0)^2 + k_7^2 \|u(\cdot, \tau)\|_{H_{per}^1}^6, \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde $k_7 > 0$ é uma constante dada devido à imersão $H_{per}^1([0, L]) \hookrightarrow L_{per}^6([0, L])$.

Seja $t \in [0, T]$ fixado. A desigualdade apresentada em (3.42) é suficiente para garantir que

$$\Psi(t)^2 \leq \Psi(0)^2 + k_7^2 \Psi(t)^6$$

e, portanto,

$$\Psi(t) \leq \Psi(0) + k_7 \Psi(t)^3. \quad (3.43)$$

Na sequência, mostraremos que $U(t)$ não apresenta comportamento de blow-up em $t = T$. Com efeito, consideremos a função auxiliar $f(x) := x - k_7 x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Note-mos que $f'(x) = 1 - 3k_7 x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Logo, temos $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $f(x) > 0$, se $x > 0$ for suficientemente pequeno. Além disto, $f(x) < 0$, se x for relativamente grande. Na verdade, existe um único $A_0 > 0$ tal que $f(A_0) = 0$. Em seguida, suponhamos uma outra função auxiliar, $g(x) := f(x) - \Psi(0) = x - \Psi(0) - k_7 x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se $\Psi(0)$ for suficientemente pequeno, temos que $g(x) < 0$, para cada $x \in [0, A_1]$, onde $A_1 := A_1(\|u_0\|_{H_{per}^1}, \|v_0\|_{L_{per}^2}) > 0$ é uma constante. Além disto, $g(x) > 0$ para cada $x \in (A_1, A_2)$, onde $A_2 := A_2(\|u_0\|_{H_{per}^1}, \|v_0\|_{L_{per}^2}) > A_1$. Finalmente, $g(x) < 0$, se $x \in (A_2, +\infty)$. Complementamos que $g'(x) > 0$, se $x \in (0, A_1)$. E, $g'(x) < 0$, se $x \in (A_2, +\infty)$.

Vemos que $g(\Psi(0)) = -k_7 \Psi(0)^3 < 0$. Além disto, $g'(\Psi(0)) = 1 - k_7 \Psi(0)^3 > 0$ (pois, estamos assumindo que $\Psi(0)$ fora tomado suficientemente pequeno). Isto é suficiente para entendermos que $\Psi(0) \in [0, A_1]$. Seja $s \in [0, T]$. Afirmamos que $\Psi(s) \in [0, A_1]$. De fato, em vista de (3.43), $g(\Psi(s)) \leq 0$. Assim, há duas possibilidades: $\Psi(s) \in [0, A_1]$ ou $\Psi(s) \in [A_2, +\infty)$. Suponhamos que $\Psi(s) \in [A_2, +\infty)$. Devido à continuidade da função Ψ sobre $[0, T]$, existe $t_0 \in (0, s)$ tal que $\Psi(t_0) \in (A_1, A_2)$. Isto implica que $g(\Psi(t_0)) > 0$, o que contradiz a relação (3.43). Logo, $\Psi(s) \in [0, A_1]$. Isto conclui que $U(t)$ não apresenta blow-up no intervalo $[0, T]$.

Como $\Psi(T) < +\infty$, podemos aplicar novamente o Teorema 3.7 com a condição inicial $(u(\cdot, T), u_t(\cdot, T))$. Desta maneira, estendemos $U(t)$ a um intervalo $[0, T + \Delta T]$. Seja \tilde{T} o supremo dos valores de T , para os quais a solução U esteja estendida no intervalo $[0, \tilde{T})$. Provaremos que $\tilde{T} = +\infty$. Com esta finalidade, mostraremos que se $\tilde{T} < +\infty$, então,

$$\lim_{t \rightarrow \tilde{T}^-} \left\| \begin{pmatrix} u(\cdot, t) \\ u_t(\cdot, t) \end{pmatrix} \right\|_X = +\infty.$$

Com efeito, seja $\tilde{T} < +\infty$. Suponhamos, por absurdo, a existência de uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, tal que $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{T}^-$ e

$$\left\| \begin{pmatrix} u(\cdot, t_n) \\ u_t(\cdot, t_n) \end{pmatrix} \right\|_X < k_8, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e para algum } k_8 > 0 \text{ fixado.}$$

Utilizando $(u(\cdot, t_n), u_t(\cdot, t_n))$ como condição inicial, obtemos pelo Teorema 3.7, a existência de um tempo $T_0 > 0$, T_0 dependendo somente de k_8 , para o qual há a existência e unicidade de solução generalizada para o problema de Cauchy associado à equação de Klein-Gordon (3.1) sobre o intervalo $[t_n, t_n + T_0]$. Escolhendo t_n suficientemente próximo a \tilde{T} , conseguimos estender $U(t) = (u(\cdot, t), u_t(\cdot, t))$ a um intervalo $[0, t_n + T_0]$ que contém o tempo \tilde{T} . Isto contradiz a ideia de $[0, \tilde{T})$ ser um intervalo maximal. Portanto, $\tilde{T} = +\infty$, o que conclui a prova de que o problema (3.7) está bem colocado globalmente para condições iniciais em Ξ . ■

3.1.6 Identificação de Blow-up

Nesta subseção, mostraremos que, sob certas condições, o problema de Cauchy (3.4) pode admitir situações de blow-up. Em verdade, nos basearemos em um resultado devido a Levine, [47]. Este resultado mostra que uma função positiva suave, sob certas condições, necessariamente admite um rápido crescimento em tempo finito.

Lema 3.11. *Suponhamos que uma função real $\Lambda(t)$, duas vezes diferenciável e positiva, satisfaça para $t \geq 0$ a desigualdade*

$$\Lambda''\Lambda - (1 + \alpha)(\Lambda')^2 \geq 0,$$

onde $\alpha > 0$. Se $\Lambda(0) > 0$ e $\Lambda'(0) > 0$, então, $\Lambda(t) \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow t_1 \leq \frac{\Lambda(0)}{\alpha\Lambda'(0)}$.

Demonstração. Ver Levine [47]. ■

Proposição 3.12. *Sejam $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in H_{per}^2([0, L]) \times H_{per}^1([0, L])$ e $U(t) = \begin{pmatrix} u(\cdot, t) \\ u_t(\cdot, t) \end{pmatrix}$, a solução regular do problema de Cauchy (3.4) para t sobre o intervalo maximal $[0, T)$. Se $\mathcal{E}(u_0, v_0) < 0$ e se*

$$\int_0^L \operatorname{Re} [u_0(x)] \cdot \operatorname{Re} [v_0(x)] dx + \int_0^L \operatorname{Im} [u_0(x)] \cdot \operatorname{Im} [v_0(x)] dx > 0,$$

então, $T < +\infty$. Em outras palavras, sob as condições exigidas neste enunciado, o problema de Cauchy (3.4) pode admitir uma situação de blow-up no tempo $T > 0$.

Demonstração. Em vista do Teorema 3.9, existe $T > 0$ e o problema de Cauchy (3.4) admite uma função

$$u \in C^2([0, T]; L_{per}^2([0, L])) \cap C^1([0, T]; H_{per}^1([0, L])) \cap C^0([0, T]; H_{per}^2([0, L])),$$

que o soluciona regularmente. Estamos assumindo que $T > 0$ é o tempo maximal para o qual a função u está bem definida. Definamos a função real

$$\Lambda(t) = \int_0^L |u(x, t)|^2 dx.$$

Claramente,

$$\Lambda(0) = \int_0^L |u_0(x)|^2 dx > 0$$

é finito. Além disto, determinamos que

$$\begin{aligned} \Lambda'(t) &= \int_0^L \overline{u(x, t)} \cdot u_t(x, t) dx + \int_0^L u(x, t) \cdot \overline{u_t(x, t)} dx \\ &= 2 \left[\int_0^L \operatorname{Re} [u(x, t)] \cdot \operatorname{Re} [u_t(x, t)] dx + \int_0^L \operatorname{Im} [u(x, t)] \cdot \operatorname{Im} [u_t(x, t)] dx \right]. \end{aligned}$$

Por hipótese,

$$\Lambda'(0) = \int_0^L \operatorname{Re} [u_0(x)] \cdot \operatorname{Re} [v_0(x)] dx + \int_0^L \operatorname{Im} [u_0(x)] \cdot \operatorname{Im} [v_0(x)] dx > 0.$$

Afirmamos que $\Lambda''\Lambda - (1 + \alpha)(\Lambda')^2 \geq 0$, para $\alpha = 1$. Com efeito, para $t \in [0, T)$,

$$\Lambda(t) = \langle u(\cdot, t), u(\cdot, t) \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} \implies \Lambda'(t) = \langle u(\cdot, t), u_t(\cdot, t) \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} + \langle u_t(\cdot, t), u(\cdot, t) \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}}$$

e,

$$\Lambda''(t) = \langle u(\cdot, t), u_{tt}(\cdot, t) \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} + \langle u_{tt}(\cdot, t), u(\cdot, t) \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} + 2\langle u_t(\cdot, t), u_t(\cdot, t) \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}}.$$

Usando a identidade (3.1) na expressão imediatamente acima, entendemos que

$$\begin{aligned} \Lambda''(t) &= 2\langle u_t(\cdot, t), u_t(\cdot, t) \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} + \langle u(\cdot, t), u_{xx}(\cdot, t) - u(\cdot, t) + |u(\cdot, t)|^4 u(\cdot, t) \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} \\ &+ \langle u_{xx}(\cdot, t) - u(\cdot, t) + |u(\cdot, t)|^4 u(\cdot, t), u(\cdot, t) \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} \Lambda''(t) &= 2\langle u_t(\cdot, t), u_t(\cdot, t) \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} - 2\langle u(\cdot, t), u(\cdot, t) \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} \\ &- 2\langle u_x(\cdot, t), u_x(\cdot, t) \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} + 2 \int_0^L |u(x, t)|^6 dx. \end{aligned}$$

Devido à Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |\Lambda'(t)| &= \left| \int_0^L \overline{u(x, t)} \cdot u_t(x, t) dx + \int_0^L u(x, t) \cdot \overline{u_t(x, t)} dx \right| \\ &\leq 2 \int_0^L |u(x, t)| \cdot |u_t(x, t)| dx \leq 2 \cdot \|u(\cdot, t)\|_{L^2_{per}} \cdot \|u_t(\cdot, t)\|_{L^2_{per}}. \end{aligned}$$

Assim, determinamos que

$$\begin{aligned} &\Lambda''(t)\Lambda(t) - (1 + \alpha)(\Lambda'(t))^2 \\ &\geq 2 \cdot \|u_t(\cdot, t)\|_{L^2_{per}}^2 \cdot \|u(\cdot, t)\|_{L^2_{per}}^2 - 2 \cdot \|u(\cdot, t)\|_{L^2_{per}}^2 \cdot \|u(\cdot, t)\|_{L^2_{per}}^2 \\ &- 2 \cdot \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2_{per}}^2 \cdot \|u(\cdot, t)\|_{L^2_{per}}^2 + 2 \cdot \|u(\cdot, t)\|_{L^6_{per}}^6 \cdot \|u(\cdot, t)\|_{L^2_{per}}^2 \\ &- 4 \cdot (1 + \alpha) \cdot \|u_t(\cdot, t)\|_{L^2_{per}}^2 \cdot \|u(\cdot, t)\|_{L^2_{per}}^2. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Lembrando que $\alpha = 1$, de (3.44), estabelecemos que

$$\begin{aligned} &\Lambda''(t) \cdot \Lambda(t) - 2 \cdot [\Lambda'(t)]^2 \\ &\geq -12 \cdot \mathcal{E}(u(\cdot, t), u_t(\cdot, t)) \cdot \|u(\cdot, t)\|_{L^2_{per}}^2 + 4 \cdot \|u(\cdot, t)\|_{H^1_{per}}^2 \cdot \|u(\cdot, t)\|_{L^2_{per}}^2 > 0, \end{aligned}$$

pois, \mathcal{E} é uma quantidade conservada e, por hipótese, $\mathcal{E}(u_0, v_0) < 0$. Em decorrência do Lema 3.11, temos que existe t_1 tal que $0 < t_1 \leq \frac{\Lambda(0)}{\Lambda'(0)}$ e $\|u(\cdot, t)\|_{L^2_{per}} \xrightarrow{t \rightarrow t_1^-} +\infty$. Notando que $T = t_1$, a prova desta Proposição está concluída. ■

3.1.7 Boa Colocação nos Espaços de Sobolev Periódicos Restritos às Funções Pares

Os resultados de boa colocação local do problema (3.22), tratados nos Teoremas 3.7 e 3.9, podem ser adaptados de maneira a considerar espaços de Sobolev que englobam funções cujas extensões L -periódicas são sabidamente pares.

Consideremos o operador linear

$$A : D(A) \subset H^1_{per,e}([0, L]) \times L^2_{per,e}([0, L]) \rightarrow H^1_{per,e}([0, L]) \times L^2_{per,e}([0, L])$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_x^2 - 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

onde $D(A) = H^2_{per,e}([0, L]) \times H^1_{per,e}([0, L])$. Consideremos S , o semigrupo de contrações de classe C_0 que admite A como seu gerador infinitesimal sobre o espaço de Hilbert $H^1_{per,e}([0, L]) \times L^2_{per,e}([0, L])$. O problema (3.4) é interpretado via o problema abstrato

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ |u|^4 u \end{pmatrix}. \\ \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (3.45)$$

Enunciamos os seguintes resultados de boa colocação:

Teorema 3.13. *O problema (3.45) é bem colocado localmente em $H^1_{per,e}([0, L]) \times L^2_{per,e}([0, L])$.*

Ou seja, para todo

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in X = H^1_{per,e}([0, L]) \times L^2_{per,e}([0, L]),$$

existe $T = T(\|u_0\|_{H^1_{per}}, \|v_0\|_{L^2_{per}}) > 0$ e existe uma única função

$$U \in C^0([0, T]; H^1_{per,e}([0, L]) \times L^2_{per,e}([0, L]))$$

solução generalizada do problema de Cauchy (3.45). Além disto, para todo T' , $0 < T' < T$,

existe uma vizinhança $V \subset X$ de $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ de tal modo que o fluxo dado-solução

$$\mathbb{F} : \begin{matrix} V & \rightarrow & C^0([0, T']; H^1_{per,e}([0, L]) \times L^2_{per,e}([0, L])) \\ \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} & \mapsto & \tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

é Lipschitz. ■

Teorema 3.14. *O problema (3.45) é bem colocado localmente em $H_{per,e}^2([0, L]) \times H_{per,e}^1([0, L])$. Ou seja, para todo*

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D(A) = H_{per,e}^2([0, L]) \times H_{per,e}^1([0, L]),$$

existe $T = T(\|u_0\|_{H_{per,e}^2}, \|v_0\|_{H_{per,e}^1}) > 0$ e existe uma única função

$$U \in C^1([0, T]; H_{per,e}^1([0, L]) \times L_{per,e}^2([0, L])) \cap C^0([0, T]; H_{per,e}^2([0, L]) \times H_{per,e}^1([0, L]))$$

solução regular do problema de Cauchy (3.45). Além disto, para todo $T', 0 < T' < T$, existe uma vizinhança $V \subset D(A)$ de $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ de tal modo que o fluxo dado-solução

$$\mathbb{F} : \begin{array}{ccc} V & \rightarrow & C^0([0, T']; H_{per,e}^2([0, L]) \times H_{per,e}^1([0, L])) \\ \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} & \mapsto & \tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \end{array}$$

é Lipschitz. ■

Observação 3.15. *As quantidades conservadas \mathcal{E} e \mathcal{F} , dadas respectivamente por (3.29) e (3.30), também são válidas no contexto do espaço $H_{per,e}^1([0, L]) \times L_{per,e}^2([0, L])$. Da mesma forma, podemos deduzir a boa colocação global do problema de Cauchy (3.45) para “dados iniciais pequenos” em $H_{per,e}^1([0, L]) \times L_{per,e}^2([0, L])$.*

3.2 Condições Suficientes para Instabilidade Orbital

Mostraremos, nesta seção, requisitos e condições suficientes para que as soluções do tipo onda estacionária periódica (3.2) para a equação de Klein-Gordon não-linear (3.1),

$$u_{tt} - u_{xx} + u - |u|^4 u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

sejam, segundo a Definição 3.3, orbitalmente instáveis. Esta abordagem, que é estruturada para funções pares, se baseia na teoria proposta por Grillakis, Shatah e Strauss, ver [37].

Seja $c \in \mathbb{R}$ arbitrário, porém, fixado. Consideremos a existência de uma função suave $\varphi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$u_c(x, t) = e^{ict} \varphi_c(x), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad (3.46)$$

seja uma solução do tipo onda estacionária periódica de período $L > 0$ da equação (3.1).

Substituindo (3.46) em (3.1), observamos que, para $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$,

$$i^2 c^2 e^{ict} \varphi_c(x) - e^{ict} \varphi_c''(x) + e^{ict} \varphi_c(x) - e^{ict} |\varphi_c(x)|^4 \varphi_c(x) = 0.$$

Ou seja,

$$-\varphi_c'' + (1 - c^2)\varphi_c - \varphi_c^5 = 0. \quad (3.47)$$

As soluções do problema (3.7) preservam duas conhecidas quantidades conservadas, \mathcal{E} e \mathcal{F} , dadas respectivamente em (3.29) e (3.30).

Seja o funcional $\mathcal{G} := \mathcal{E} - c\mathcal{F}$. Afirmamos que o vetor $(\varphi_c, c\varphi_c, 0, 0)$ é um ponto crítico de \mathcal{G} . Com a finalidade de provar esta afirmação, determinaremos a derivada à Fréchet de \mathcal{G} . Primeiramente, contudo, estudaremos as primeiras derivadas à Gatêaux de \mathcal{E} e \mathcal{F} .

Consideremos

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : X = H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \mathcal{E}(u, v) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[|u_x|^2 + |v|^2 + |u|^2 - \frac{1}{3}|u|^6 \right] dx. \end{aligned}$$

Sabemos que \mathcal{E} é diferenciável à Gatêaux em $(\mu, \nu) \in X$ se existe

$$f \in B(X, \mathbb{K}) = X' = H_{per}^{-1}([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$$

tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\mathcal{E}((\mu, \nu) + h(\zeta_1, \zeta_2)) - \mathcal{E}(\mu, \nu) - \langle f, h(\zeta_1, \zeta_2) \rangle_{X', X}] = 0, \quad \forall (\zeta_1, \zeta_2) \in X.$$

Neste caso, a derivada à Gatêaux de \mathcal{E} em $(\mu, \nu) \in X$ é denotada por $\mathcal{E}'(\mu, \nu) = f$.

Seja $f \in X'$. Vemos que, para $h \in \mathbb{R}$ e $(\mu, \nu), (\zeta_1, \zeta_2) \in X$,

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}((\mu, \nu) + h(\zeta_1, \zeta_2)) - \mathcal{E}(\mu, \nu) - \langle f, h(\zeta_1, \zeta_2) \rangle_{X', X} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[2h(\operatorname{Re} \mu_x)(\operatorname{Re} (\zeta_1)_x) + h^2(\operatorname{Re} (\zeta_1)_x)^2 + 2h(\operatorname{Im} \mu_x)(\operatorname{Im} (\zeta_1)_x) \right. \\ &\quad \left. + h^2(\operatorname{Im} (\zeta_1)_x)^2 + 2h(\operatorname{Re} \nu)(\operatorname{Re} \zeta_2) + h^2(\operatorname{Re} \zeta_2)^2 + 2h(\operatorname{Im} \nu)(\operatorname{Im} \zeta_2) \right. \\ &\quad \left. + h^2(\operatorname{Im} \zeta_2)^2 + 2h(\operatorname{Re} \mu)(\operatorname{Re} \zeta_1) + h^2(\operatorname{Re} \zeta_1)^2 + 2h(\operatorname{Im} \mu)(\operatorname{Im} \zeta_1) + h^2(\operatorname{Im} \zeta_1)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} (3 \cdot 2h((\operatorname{Re} \mu)^2 + (\operatorname{Im} \mu)^2) \cdot ((\operatorname{Re} \mu)(\operatorname{Re} \zeta_1) \right. \\ &\quad \left. + (\operatorname{Im} \mu)(\operatorname{Im} \zeta_1)) + h^2 \tilde{P}(h) \right] dx - \langle f, h(\zeta_1, \zeta_2) \rangle_{X', X}, \end{aligned}$$

onde \tilde{P} é um polinômio em h com os coeficientes dados pela soma de múltiplos de produtos que envolvem $\operatorname{Re} \mu$, $\operatorname{Im} \mu$, $\operatorname{Re} \zeta_1$ e $\operatorname{Im} \zeta_1$.

Fazendo uso do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\mathcal{E}((\mu, \nu) + h(\zeta_1, \zeta_2)) - \mathcal{E}(\mu, \nu) - \langle f, h(\zeta_1, \zeta_2) \rangle_{X', X}] \\
&= \int_0^L [(\operatorname{Re} \mu_x)(\operatorname{Re} (\zeta_1)_x) + (\operatorname{Im} \mu_x)(\operatorname{Im} (\zeta_1)_x) + (\operatorname{Re} \nu)(\operatorname{Re} \zeta_2) + (\operatorname{Im} \nu)(\operatorname{Im} \zeta_2) \\
&+ (\operatorname{Re} \mu)(\operatorname{Re} \zeta_1) + (\operatorname{Im} \mu)(\operatorname{Im} \zeta_1) - |\mu|^4(\operatorname{Re} \mu)(\operatorname{Re} \zeta_1) - |\mu|^4(\operatorname{Im} \mu)(\operatorname{Im} \zeta_1)] dx \\
&- \langle f, (\zeta_1, \zeta_2) \rangle_{X', X} \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} -\operatorname{Re} (\mu_{xx}) + \operatorname{Re} (\mu) - \operatorname{Re} (|\mu|^4 \mu) \\ \operatorname{Im} (\nu) \\ -\operatorname{Im} (\mu_{xx}) + \operatorname{Im} (\mu) - \operatorname{Im} (|\mu|^4 \mu) \\ \operatorname{Re} (\nu) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \zeta_1 \\ \operatorname{Im} \zeta_2 \\ \operatorname{Im} \zeta_1 \\ \operatorname{Re} \zeta_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{X', X} - \left\langle f, \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \zeta_1 \\ \operatorname{Im} \zeta_2 \\ \operatorname{Im} \zeta_1 \\ \operatorname{Re} \zeta_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{X', X}
\end{aligned}$$

o que implica, pela arbitrariedade de (ζ_1, ζ_2) , que

$$f = \begin{pmatrix} -\operatorname{Re} (\mu_{xx}) + \operatorname{Re} (\mu) - \operatorname{Re} (|\mu|^4 \mu) \\ \operatorname{Im} (\nu) \\ -\operatorname{Im} (\mu_{xx}) + \operatorname{Im} (\mu) - \operatorname{Im} (|\mu|^4 \mu) \\ \operatorname{Re} (\nu) \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

é a derivada à Gatêaux de \mathcal{E} em $(\mu, \nu) = (\operatorname{Re} \mu, \operatorname{Im} \nu, \operatorname{Im} \mu, \operatorname{Re} \nu)$.

Consideremos, na sequência, a função

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} : X = H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L]) &\rightarrow \mathbb{R} \\
(u, v) &\mapsto \mathcal{F}(u, v) = \int_0^L (\operatorname{Re} u \operatorname{Im} v - \operatorname{Im} u \operatorname{Re} v) dx.
\end{aligned}$$

Estabeleçamos que $g \in X'$. Por argumentos similares aos usados anteriormente em \mathcal{E} , obtemos para $h \in \mathbb{R}$ e $(\mu, \nu), (\zeta_1, \zeta_2) \in X$,

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}((\mu, \nu) + h(\zeta_1, \zeta_2)) - \mathcal{F}(\mu, \nu) - \langle g, h(\zeta_1, \zeta_2) \rangle_{X', X} \\
&= \int_0^L [h \operatorname{Re} \mu \operatorname{Im} \zeta_2 + h \operatorname{Im} \nu \operatorname{Re} \zeta_1 + h^2 \operatorname{Re} \zeta_1 \operatorname{Im} \zeta_2 - h \operatorname{Im} \mu \operatorname{Re} \zeta_2 \\
&- h \operatorname{Re} \nu \operatorname{Im} \zeta_1 - h^2 \operatorname{Im} \zeta_1 \operatorname{Re} \zeta_2] dx - \langle g, h(\zeta_1, \zeta_2) \rangle_{X', X}.
\end{aligned}$$

Usemos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue na relação imediatamente

acima. Temos que

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\mathcal{F}((\mu, \nu) + h(\zeta_1, \zeta_2)) - \mathcal{F}(\mu, \nu) - \langle g, h(\zeta_1, \zeta_2) \rangle_{X', X}] \\
&= \int_0^L [\operatorname{Re} \mu \operatorname{Im} \zeta_2 + \operatorname{Im} \nu \operatorname{Re} \zeta_1 - \operatorname{Im} \mu \operatorname{Re} \zeta_2 - \operatorname{Re} \nu \operatorname{Im} \zeta_1] dx - \langle g, (\zeta_1, \zeta_2) \rangle_{X', X} \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} \operatorname{Im} \nu \\ \operatorname{Re} \mu \\ -\operatorname{Re} \nu \\ -\operatorname{Im} \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \zeta_1 \\ \operatorname{Im} \zeta_2 \\ \operatorname{Im} \zeta_1 \\ \operatorname{Re} \zeta_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{X', X} - \left\langle g, \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \zeta_1 \\ \operatorname{Im} \zeta_2 \\ \operatorname{Im} \zeta_1 \\ \operatorname{Re} \zeta_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{X', X}
\end{aligned}$$

e, pela arbitrariedade de (ζ_1, ζ_2) ,

$$g = \begin{pmatrix} \operatorname{Im} \nu \\ \operatorname{Re} \mu \\ -\operatorname{Re} \nu \\ -\operatorname{Im} \mu \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

é a derivada à Gatêaux de \mathcal{F} em $(\mu, \nu) = (\operatorname{Re} \mu, \operatorname{Im} \nu, \operatorname{Im} \mu, \operatorname{Re} \nu)$.

Definido $\mathcal{G} := \mathcal{E} - c\mathcal{F} := X \rightarrow \mathbb{R}$, pelas relações (3.48) e (3.49), segue que \mathcal{G} é diferenciável à Gatêaux em $(\mu, \nu) \in X$ e

$$\mathcal{G}'(\mu, \nu) = \mathcal{G}' \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \mu \\ \operatorname{Im} \nu \\ \operatorname{Im} \mu \\ \operatorname{Re} \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}(\mu_{xx}) + \operatorname{Re}(\mu) - \operatorname{Re}(|\mu|^4 \mu) - c \operatorname{Im}(\nu) \\ \operatorname{Im}(\nu) - c \operatorname{Re}(\mu) \\ -\operatorname{Im}(\mu_{xx}) + \operatorname{Im}(\mu) - \operatorname{Im}(|\mu|^4 \mu) + c \operatorname{Re}(\nu) \\ \operatorname{Re}(\nu) + c \operatorname{Im}(\mu) \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Como \mathcal{G} é diferenciável à Gatêaux e o funcional \mathcal{G}' é contínuo, segue que \mathcal{G} é diferenciável à Fréchet, com derivada à Fréchet em $(\mu, \nu) \in X$ dada também pela expressão (3.50).

Além disto,

$$\mathcal{G}'(\varphi_c, ic\varphi_c) = \mathcal{G}' \begin{pmatrix} \varphi_c \\ c\varphi_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi_c'' + (1 - c^2)\varphi_c - \varphi_c^5 \\ c\varphi_c - c\varphi_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0},$$

o que implica que $(\varphi_c, c\varphi_c, 0, 0)$ é, de fato, ponto crítico do funcional \mathcal{G} . Frisemos que se φ_c for uma função par, então, o vetor $(\varphi_c, c\varphi_c, 0, 0)$ também define uma função par.

Ressaltamos que, para $U = (u, u_t) = (\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u_t, \operatorname{Im} u, \operatorname{Re} u_t)$, uma solução do problema de Cauchy (3.7),

$$\frac{d}{dt} U(t) = J\mathcal{E}'(U(t)),$$

onde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é um operador linear, antissimétrico e bijetor. Portanto, o problema de Cauchy associado à equação de Klein-Gordon (3.1) é interpretado como um sistema Hamiltoniano abstrato.

Com a finalidade de deduzirmos determinados operadores que serão úteis para a abordagem da estabilidade orbital, estudaremos o Jacobiano do funcional \mathcal{G} aplicado ao ponto crítico $(\varphi_c, c\varphi_c, 0, 0)$. Na sequência, analisaremos a diferenciabilidade à Fréchet do operador $\mathcal{G}' : X \rightarrow X'$, o que será feito após analisarmos separadamente a diferenciabilidade à Gatêaux dos operadores \mathcal{E}' e \mathcal{F}' .

Sabemos que

$$\mathcal{E}' : X \rightarrow X'$$

$$(u, v) \mapsto \mathcal{E}'(u, v) = \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}(u_{xx}) + \operatorname{Re}(u) - \operatorname{Re}(|u|^4 u) \\ \operatorname{Im}(v) \\ -\operatorname{Im}(u_{xx}) + \operatorname{Im}(u) - \operatorname{Im}(|u|^4 u) \\ \operatorname{Re}(v) \end{pmatrix}.$$

Dizemos que a função $\tilde{f} \in B(X, X') = Y$ é a derivada à Gatêaux de \mathcal{E}' em $(u, v) \in X$ se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\mathcal{E}'((u, v) + h(\zeta_1, \zeta_2)) - \mathcal{E}'(u, v)] - \tilde{f}(\zeta_1, \zeta_2) = 0, \quad \forall (\zeta_1, \zeta_2) \in X.$$

Neste caso, denotamos $\mathcal{E}''(u, v) = \tilde{f}$ e temos $\mathcal{E}''(u, v)(\zeta_1, \zeta_2) = \tilde{f}(\zeta_1, \zeta_2)$, $\forall (\zeta_1, \zeta_2) \in X$.

Seja $\tilde{f} \in Y$. Vemos que, para $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ e (u, v) , $(\zeta_1, \zeta_2) \in X$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} [\mathcal{E}'((u, v) + h(\zeta_1, \zeta_2)) - \mathcal{E}'(u, v)] - \tilde{f}(\zeta_1, \zeta_2) \\ &= \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -h\operatorname{Re}((\zeta_1)_{xx}) + h\operatorname{Re}(\zeta_1) - h|u|^4\operatorname{Re}(\zeta_1) - 4h|u|^2\operatorname{Re}(u)(\operatorname{Re}(u)\operatorname{Re}(\zeta_1)) \\ h \operatorname{Im}(\zeta_2) \\ -h\operatorname{Im}((\zeta_1)_{xx}) + h\operatorname{Im}(\zeta_1) - h|u|^4\operatorname{Im}(\zeta_1) - 4h|u|^2\operatorname{Im}(u)(\operatorname{Re}(u)\operatorname{Re}(\zeta_1)) \\ h \operatorname{Re}(\zeta_2) \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \operatorname{Im}(u)\operatorname{Im}(\zeta_1) + h^2\tilde{P}_1(h) \\ 0 \\ \operatorname{Im}(u)\operatorname{Im}(\zeta_1) + h^2\tilde{P}_2(h) \\ 0 \end{pmatrix} - \tilde{f}(\zeta_1, \zeta_2), \end{aligned}$$

onde \tilde{P}_1 e \tilde{P}_2 são polinômios em h com os coeficientes dados por múltiplos de produtos que envolvem $\operatorname{Re} u$, $\operatorname{Im} u$, $\operatorname{Re} \zeta_1$ e $\operatorname{Im} \zeta_1$. Desta relação, segue que

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\mathcal{E}'((u, v) + h(\zeta_1, \zeta_2)) - \mathcal{E}'(u, v)] - \tilde{f}(\zeta_1, \zeta_2) = -\tilde{f}(\zeta_1, \zeta_2) \\ &+ \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}((\zeta_1)_{xx}) + \operatorname{Re}(\zeta_1) - |u|^4\operatorname{Re}(\zeta_1) - 4|u|^2\operatorname{Re}(u)(\operatorname{Re}(u)\operatorname{Re}(\zeta_1) + \operatorname{Im}(u)\operatorname{Im}(\zeta_1)) \\ \operatorname{Im}(\zeta_2) \\ -\operatorname{Im}((\zeta_1)_{xx}) + \operatorname{Im}(\zeta_1) - |u|^4\operatorname{Im}(\zeta_1) - 4|u|^2\operatorname{Im}(u)(\operatorname{Re}(u)\operatorname{Re}(\zeta_1) + \operatorname{Im}(u)\operatorname{Im}(\zeta_1)) \\ \operatorname{Re}(\zeta_2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\mathcal{E}'((u, v) + h(\zeta_1, \zeta_2)) - \mathcal{E}'(u, v)] - \tilde{f}(\zeta_1, \zeta_2) = -\tilde{f} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \zeta_1 \\ \operatorname{Im} \zeta_2 \\ \operatorname{Im} \zeta_1 \\ \operatorname{Re} \zeta_2 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + 1 - |u|^4 - 4|u|^2(\operatorname{Re}(u))^2 & 0 & -4|u|^2\operatorname{Re}(u)\operatorname{Im}(u) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4|u|^2\operatorname{Re}(u)\operatorname{Im}(u) & 0 & -\partial_x^2 + 1 - |u|^4 - 4|u|^2(\operatorname{Im}(u))^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \zeta_1 \\ \operatorname{Im} \zeta_2 \\ \operatorname{Im} \zeta_1 \\ \operatorname{Re} \zeta_2 \end{pmatrix}.$$

Pela arbitrariedade de (ζ_1, ζ_2) em X , segue que \tilde{f} a derivada à Gateaux de \mathcal{E}' em $(u, v) = (\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} v, \operatorname{Im} u, \operatorname{Re} v)$ é determinada pelo operador

$$\begin{pmatrix} -\partial_x^2 + 1 - |u|^4 - 4|u|^2(\operatorname{Re}(u))^2 & 0 & -4|u|^2\operatorname{Re}(u)\operatorname{Im}(u) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4|u|^2\operatorname{Re}(u)\operatorname{Im}(u) & 0 & -\partial_x^2 + 1 - |u|^4 - 4|u|^2(\operatorname{Im}(u))^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Em seguida, consideremos a função

$$\mathcal{F}' : X \rightarrow X' \\ (u, v) \mapsto \mathcal{F}'(u, v) = \begin{pmatrix} \operatorname{Im} v \\ \operatorname{Re} u \\ -\operatorname{Re} v \\ -\operatorname{Im} u \end{pmatrix}.$$

Seja a função $\tilde{g} \in B(X, X') = Y$. Por argumentos similares aos usados anteriormente, obtemos para $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ e $(u, v), (\zeta_1, \zeta_2) \in X$, que

$$\frac{1}{h} [\mathcal{F}'((u, v) + h(\zeta_1, \zeta_2)) - \mathcal{F}'(u, v)] - \tilde{g}(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} h \operatorname{Im} \zeta_2 \\ h \operatorname{Re} \zeta_1 \\ -h \operatorname{Re} \zeta_2 \\ -h \operatorname{Im} \zeta_1 \end{pmatrix} - \tilde{g}(\zeta_1, \zeta_2).$$

Isto implica que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\mathcal{F}'((u, v) + h(\zeta_1, \zeta_2)) - \mathcal{F}'(u, v)] - \tilde{g}(\zeta_1, \zeta_2) \\ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \zeta_1 \\ \operatorname{Im} \zeta_2 \\ \operatorname{Im} \zeta_1 \\ \operatorname{Re} \zeta_2 \end{pmatrix} - \tilde{g} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \zeta_1 \\ \operatorname{Im} \zeta_2 \\ \operatorname{Im} \zeta_1 \\ \operatorname{Re} \zeta_2 \end{pmatrix}$$

e, da arbitrariedade de (ζ_1, ζ_2) ,

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

é a derivada à Gatêaux de \mathcal{F}' em $(u, v) = (\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} v, \operatorname{Im} u, \operatorname{Re} v)$.

De acordo com as informações apresentadas em (3.51) e (3.52), o operador \mathcal{G}' é diferenciável à Gatêaux em $(u, v) \in X$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{G}''(u, v) &= (\mathcal{E}'' - c\mathcal{F}'')(u, v) \\ &= \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + 1 - |u|^4 - 4|u|^2(\operatorname{Re}(u))^2 & -c & -4|u|^2\operatorname{Re}(u)\operatorname{Im}(u) & 0 \\ -c & 1 & 0 & 0 \\ -4|u|^2\operatorname{Re}(u)\operatorname{Im}(u) & 0 & -\partial_x^2 + 1 - |u|^4 - 4|u|^2(\operatorname{Im}(u))^2 & c \\ 0 & 0 & c & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Devido à continuidade de \mathcal{G}'' , segue que \mathcal{G}' é diferenciável à Fréchet com a derivada neste sentido em $(u, v) \in X$ também dada pela expressão (3.53).

Já se ressaltou que o vetor $(\varphi_c, ic\varphi_c) = (\varphi_c, c\varphi_c, 0, 0)$ é um ponto crítico do funcional \mathcal{G} . Apliquemos $(\varphi_c, ic\varphi_c)$ em \mathcal{G}'' . Resulta que

$$\mathcal{G}''(\varphi_c, ic\varphi_c) = \mathcal{G}'' \begin{pmatrix} \varphi_c \\ c\varphi_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + 1 - 5\varphi_c^4 & -c & 0 & 0 \\ -c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_x^2 + 1 - \varphi_c^4 & c \\ 0 & 0 & c & 1 \end{pmatrix}.$$

Definamos o operador $\mathcal{L}_{\varphi_c} : X \rightarrow X'$, dado por

$$\mathcal{L}_{\varphi_c}(\zeta_1, \zeta_2) = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + 1 - 5\varphi_c^4 & -c & 0 & 0 \\ -c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_x^2 + 1 - \varphi_c^4 & c \\ 0 & 0 & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \zeta_1 \\ \operatorname{Im} \zeta_2 \\ \operatorname{Im} \zeta_1 \\ \operatorname{Re} \zeta_2 \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

$\forall (\zeta_1, \zeta_2) \in X$.

Notemos que, por (3.47),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\varphi_c}(\varphi'_c, ic\varphi'_c) &= \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + 1 - 5\varphi_c^4 & -c & 0 & 0 \\ -c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_x^2 + 1 - \varphi_c^4 & c \\ 0 & 0 & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi'_c \\ c\varphi'_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\partial_x^2(\varphi'_c) + \varphi'_c - 5\varphi_c^4\varphi'_c - c^2\varphi'_c \\ -c\varphi'_c + c\varphi'_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\varphi_c}(i\varphi_c, -c\varphi_c) &= \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + 1 - 5\varphi_c^4 & -c & 0 & 0 \\ -c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_x^2 + 1 - \varphi_c^4 & c \\ 0 & 0 & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_c \\ -c\varphi_c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\partial_x^2 \varphi_c + \varphi_c - \varphi_c^5 - c^2 \varphi_c \\ c\varphi_c - c\varphi_c \end{pmatrix} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Ou seja, os vetores $(\varphi'_c, c\varphi'_c, 0, 0)$ e $(0, 0, \varphi_c, -c\varphi_c)$ pertencem ao núcleo do operador $\mathcal{L}_{\varphi_c} : [H_{per}^2([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])]^2 \rightarrow [L_{per}^2([0, L])]^4$. Isto indica que 0 é autovalor de \mathcal{L}_{φ_c} e está associado às autofunções $(\varphi'_c, c\varphi'_c, 0, 0)$ e $(0, 0, \varphi_c, -c\varphi_c)$. Vemos também que o operador \mathcal{L}_{φ_c} , dentre outras propriedades, é autoadjunto e, portanto, seu espectro está contido na reta. Pelo formato “diagonal” do operador \mathcal{L}_{φ_c} , a análise do seu espectro pode ser feita levando em consideração separadamente a análise do espectro dos operadores autoadjuntos, definidos de $H_{per}^2([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$ em $L_{per}^2([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$,

$$\mathcal{L}_{Re, \varphi_c} = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + 1 - 5\varphi_c^4 & -c \\ -c & 1 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

e

$$\mathcal{L}_{Im, \varphi_c} = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + 1 - \varphi_c^4 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

Em verdade, o conjunto de autovalores do operador autoadjunto \mathcal{L}_{φ_c} é a união do conjunto de autovalores do operador $\mathcal{L}_{Re, \varphi_c}$ com o conjunto de autovalores de $\mathcal{L}_{Im, \varphi_c}$.

A teoria de Grillakis, Shatah e Strauss a ser usada para estabelecer a instabilidade orbital das ondas estacionárias periódicas pares que solucionam a equação de Klein-Gordon (3.1) leva em consideração a análise do espectro do operador definido em (3.54). Segue abaixo alguns resultados que se fazem úteis no estudo do espectro dos operadores $\mathcal{L}_{Re, \varphi_c}$ e $\mathcal{L}_{Im, \varphi_c}$.

Proposição 3.16. *Seja o operador autoadjunto*

$$\mathcal{L}_{1, \varphi_c} := -\partial_x^2 + (1 - c^2) - 5\varphi_c^4,$$

definido sobre $L_{per}^2([0, L])$ com domínio $H_{per}^2([0, L])$. Consideremos o operador dado em (3.55), $\mathcal{L}_{Re, \varphi_c}$, definido sobre $L_{per}^2([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$ com domínio $H_{per}^2([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$. O número real $\lambda \leq 0$ é um autovalor do operador $\mathcal{L}_{Re, \varphi_c}$, se e somente se,

$$\gamma := \lambda \left(1 - \frac{c^2}{\lambda - 1} \right) \leq 0$$

for um autovalor do operador $\mathcal{L}_{1, \varphi_c}$. Mais que isto, existe uma relação biunívoca entre as autofunções do operador $\mathcal{L}_{Re, \varphi_c}$ associadas ao autovalor $\lambda \leq 0$ e as autofunções do operador $\mathcal{L}_{1, \varphi_c}$ associadas ao autovalor $\gamma \leq 0$.

Demonstração. Inicialmente, suponhamos que $\lambda \leq 0$ seja um autovalor do operador $\mathcal{L}_{Re, \varphi_c}$. Ou seja, existe $(g, h) \in H_{per}^2([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$, $(g, h) \neq (0, 0)$, tal que

$$\mathcal{L}_{Re, \varphi_c} \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$$

e, equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} -\partial_x^2 + 1 - 5\varphi_c^4 & -c \\ -c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda g \\ \lambda h \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

A identidade em (3.57) é válida, se e somente se,

$$-g'' + g - 5\varphi_c^4 g - ch = \lambda g \quad (3.58)$$

e

$$-cg + h = \lambda h \Leftrightarrow \lambda h - h = -cg \Leftrightarrow h = -\frac{c}{\lambda - 1}g. \quad (3.59)$$

Se $\gamma := \lambda \left(1 - \frac{c^2}{\lambda - 1}\right)$ e $\lambda \leq 0$, evidentemente, $\gamma \leq 0$. Como as funções g e h estão sujeitas às condições (3.58) e (3.59), segue que $g \neq 0$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1, \varphi_c}(g) &= -g'' + (1 - c^2)g - 5\varphi_c^4 g = -g'' + g - 5\varphi_c^4 g - ch - c^2 g - \frac{c^2}{\lambda - 1}g \\ &= \lambda g - c^2 g - \frac{c^2}{\lambda - 1}g = \lambda \left(1 - \frac{c^2}{\lambda - 1}\right)g = \gamma g. \end{aligned} \quad (3.60)$$

A relação (3.60) garante que $\gamma \leq 0$ é um autovalor do operador $\mathcal{L}_{1, \varphi_c}$ associado à auto-função $g \in H_{per}^2([0, L])$.

Reciprocamente, suponhamos que $\gamma < 0$ seja um autovalor do operador $\mathcal{L}_{1, \varphi_c}$. Assim, existe uma função $g \in H_{per}^2([0, L])$, $g \neq 0$, para qual $\mathcal{L}_{1, \varphi_c}(g) = \gamma g$. Definamos a função y , de forma que $y(x) = x^2 - (1 + c^2 + \gamma)x + \gamma$, $\forall x \in \mathbb{R}$. A função polinomial do segundo grau y apresenta exatamente uma raiz estritamente negativa, a qual será denotada por λ . Temos a identidade

$$\lambda^2 - (1 + c^2 + \gamma)\lambda + \gamma = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\gamma = \lambda \left(1 - \frac{c^2}{\lambda - 1}\right). \quad (3.61)$$

Definamos a função h , $h := -\frac{c}{\lambda - 1}g \in H_{per}^2([0, L]) \hookrightarrow L_{per}^2([0, L])$. Notemos que

$$\begin{aligned} -g'' + g - 5\varphi_c^4 g - ch &= -g'' + (1 - c^2)g - 5\varphi_c^4 g + c^2 g - ch \\ &= \gamma g + c^2 g + \frac{c^2}{\lambda - 1}g = \lambda g - \frac{\lambda c^2}{\lambda - 1}g + \frac{\lambda c^2}{\lambda - 1}g = \lambda g. \end{aligned}$$

Isto implica na condição (3.57) e, equivalentemente, $\mathcal{L}_{Re,\varphi_c} \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Portanto, $\lambda < 0$ é um autovalor do operador $\mathcal{L}_{Re,\varphi_c}$.

Se $\gamma = 0$, notemos que o único valor para $\lambda \leq 0$ que atende à identidade (3.61) é $\lambda = 0$. Para concluir o resultado, basta aplicar o mesmo procedimento do caso anterior para $\lambda = 0$.

Constatamos, portanto, que existe uma relação biunívoca entre os autovalores estritamente negativos do operador $\mathcal{L}_{1,\varphi_c}$ com os autovalores estritamente negativos do operador $\mathcal{L}_{Re,\varphi_c}$. O mesmo entendimento se aplica às autofunções associadas a estes autovalores. ■

De maneira similar à Proposição 3.16, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.17. *Seja o operador autoadjunto*

$$\mathcal{L}_{2,\varphi_c} := -\partial_x^2 + (1 - c^2) - \varphi_c^4,$$

definido sobre $L_{per}^2([0, L])$ com domínio $H_{per}^2([0, L])$. Consideremos o operador dado em (3.56), $\mathcal{L}_{Im,\varphi_c}$, definido sobre $L_{per}^2([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$ com domínio $H_{per}^2([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$. O número real $\lambda \leq 0$ é um autovalor do operador $\mathcal{L}_{Im,\varphi_c}$, se e somente se,

$$\gamma := \lambda \left(1 - \frac{c^2}{\lambda - 1} \right) \leq 0$$

for um autovalor do operador $\mathcal{L}_{2,\varphi_c}$. Mais que isto, existe uma relação biunívoca entre as autofunções do operador $\mathcal{L}_{Im,\varphi_c}$ associadas ao autovalor $\lambda \leq 0$ e as autofunções do operador $\mathcal{L}_{2,\varphi_c}$ associadas ao autovalor $\gamma \leq 0$. ■

Observação 3.18. *Usando o raciocínio aplicado na demonstração da Proposição 3.16, obtemos que a dimensão do autoespaço associado ao autovalor 0 do operador $\mathcal{L}_{1,\varphi_c}$ é igual à dimensão do autoespaço associado ao autovalor 0 do operador $\mathcal{L}_{Re,\varphi_c}$. Analogamente, a dimensão do autoespaço associado ao autovalor 0 do operador $\mathcal{L}_{2,\varphi_c}$ é igual à dimensão do autoespaço associado ao autovalor 0 do operador $\mathcal{L}_{Im,\varphi_c}$.*

Suponhamos que exista um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, para o qual φ_c é uma solução suave periódica, de período $L > 0$ fixado, para cada $c \in I$, da equação

$$-\varphi_c'' + (1 - c^2)\varphi_c - \varphi_c^5 = 0.$$

Consideremos a função

$$\begin{aligned} d : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ c &\mapsto \mathcal{E}(\varphi_c, ic\varphi_c) - c\mathcal{F}(\varphi_c, ic\varphi_c) = \mathcal{E}(\varphi_c, c\varphi_c, 0, 0) - c\mathcal{F}(\varphi_c, c\varphi_c, 0, 0). \end{aligned}$$

Já vimos que

$$\mathcal{G}'(\varphi_c, c\varphi_c, 0, 0) = \mathcal{E}'(\varphi_c, c\varphi_c, 0, 0) - c\mathcal{F}'(\varphi_c, c\varphi_c, 0, 0) = 0.$$

Isto indica que, para $c \in I$,

$$d'(c) = -\mathcal{F}(\varphi_c, c\varphi_c, 0, 0) = -\int_0^L c\varphi_c^2(x) dx.$$

Portanto, para cada $c \in I$,

$$d''(c) = -\frac{d}{dc} \left(c \int_0^L \varphi_c^2(x) dx \right).$$

Segundo a teoria determinada por Grillakis, Shatah e Strauss (ver [37]), relacionamos a seguir condições suficientes para que soluções ondas estacionárias periódicas da equação (3.1) sejam orbitalmente instáveis, conforme a Definição 3.3. Seja $L > 0$ fixado e suponhamos que sejam atendidas as premissas abaixo listadas:

- (b1) Existe uma curva suave não-trivial de soluções periódicas pares φ_c de período L para a equação (3.47), de forma que

$$c \in I \subset \mathbb{R} \mapsto \varphi_c \in H_{per,e}^n([0, L]), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

onde I é um intervalo aberto;

- (b2) O operador $\mathcal{L}_{\varphi_c} : [H_{per,e}^2([0, L]) \times L_{per,e}^2([0, L])]^2 \rightarrow [L_{per,e}^2([0, L])]^4$, dado em (3.54), tem 0 como autovalor simples, onde 0 está associado à autofunção $(0, 0, \varphi_c, -c\varphi_c)$;

- (b3) O operador $\mathcal{L}_{\varphi_c} : [H_{per,e}^2([0, L]) \times L_{per,e}^2([0, L])]^2 \rightarrow [L_{per,e}^2([0, L])]^4$ tem exatamente 1 autovalor estritamente negativo, o qual é simples;

- (b4) $-\frac{d}{dc} \left(c \int_0^L \varphi_c^2(x) dx \right) < 0, \quad \forall c \in I.$

Atendidas as condições (b1)-(b4), obtemos uma família de ondas estacionárias periódicas orbitalmente instáveis conforme a Definição 3.3. Estas ondas são dadas por funções da forma (3.46), sendo que a função φ_c atende à condição (b1).

3.3 Instabilidade Orbital de Ondas Dnoidais

Seja $c \in \mathbb{R}$ arbitrário, porém, fixado. Inicialmente, nesta seção, serão impostas condições sobre c , de modo a obtermos φ_c , uma função suave estritamente positiva, periódica de período $L > 0$ fixado, de tal forma que

$$u_c(x, t) = e^{ict} \varphi_c(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad (3.62)$$

seja uma solução do tipo onda estacionária periódica à equação de Klein-Gordon (3.1). Verificaremos que a função φ_c obtida, além de ser suave, é par. Na verdade, esta função apresenta o comportamento determinado por uma função elíptica do tipo dnoidal. Em seguida, será descrita a construção de uma curva de funções pares φ_c , todas de mesmo período, que são suaves conforme a variação do parâmetro c e ainda satisfazem a propriedade de que (3.62) é solução de (3.1). Finalmente, será feita a análise espectral de determinados operadores, o que permite estudarmos a instabilidade orbital destas soluções ondas estacionárias periódicas em conformidade com a Definição 3.3.

3.3.1 Existência de Ondas Estacionárias Dnoidais

Formalmente, para c um parâmetro real fixado, suponhamos a existência de uma função φ_c suave, periódica de período $L > 0$ e estritamente positiva de tal modo que (3.62) atenda à equação de Klein-Gordon (3.1). Como já visto em (3.47),

$$-\varphi_c'' + (1 - c^2)\varphi_c - \varphi_c^5 = 0.$$

Definamos $\omega := 1 - c^2$ e consideremos $\varphi_\omega := \varphi_c$. Daí,

$$-\varphi_\omega'' + \omega\varphi_\omega - \varphi_\omega^5 = 0. \quad (3.63)$$

Multiplicando a expressão (3.63) por φ_ω' , segue que

$$-\varphi_\omega''\varphi_\omega' + \omega\varphi_\omega\varphi_\omega' - \varphi_\omega^5\varphi_\omega' = 0,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{(\varphi_\omega')^2}{2} + \omega\frac{\varphi_\omega^2}{2} - \frac{\varphi_\omega^6}{6} \right) = 0.$$

Daí, existe uma constante B_{φ_ω} tal que

$$-\frac{(\varphi_\omega')^2}{2} + \omega\frac{\varphi_\omega^2}{2} - \frac{\varphi_\omega^6}{6} = -B_{\varphi_\omega}. \quad (3.64)$$

Como φ_ω é uma função estritamente positiva, podemos supor que

$$\varphi_\omega := \psi_\omega^{\frac{1}{2}} > 0. \quad (3.65)$$

Substituindo (3.65) na igualdade (3.64),

$$-\frac{\psi_\omega^{-1}(\psi_\omega')^2}{8} + \omega\frac{\psi_\omega}{2} - \frac{\psi_\omega^3}{6} = -B_{\varphi_\omega},$$

ou equivalentemente,

$$(\psi_\omega')^2 = \frac{4}{3}(-\psi_\omega^4 + 3\omega\psi_\omega^2 + 6B_{\varphi_\omega}\psi_\omega). \quad (3.66)$$

Logo,

$$(\psi'_\omega)^2 = \frac{4}{3}P_{\varphi_\omega}(\psi_\omega),$$

onde $P_{\varphi_\omega}(t) = -t^4 + 3\omega t^2 + 6B_{\varphi_\omega}t$.

Finalizado o trabalho formal, iremos impor condições ao polinômio $P_{\varphi_\omega}(t)$, de forma a obtermos ψ_ω , uma função periódica de período minimal $L > 0$, estritamente positiva, não-constante que satisfaz a equação (3.66). Suponhamos que o polinômio $P_{\varphi_\omega}(t)$ apresente quatro raízes reais: $0, \eta_1, \eta_2$ e η_3 , de forma que $\eta_1 < 0 < \eta_2 < \eta_3$. Isto indica que

$$\begin{aligned} P_{\varphi_\omega}(t) &= -t(t - \eta_1)(t - \eta_2)(t - \eta_3) \\ &= -t^4 + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)t^3 - (\eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_3 + \eta_3\eta_1)t^2 + \eta_1\eta_2\eta_3t \end{aligned} \quad (3.67)$$

e são válidas as seguintes relações:

$$\begin{cases} \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0 \\ \eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_3 + \eta_3\eta_1 = -3\omega \\ \eta_1\eta_2\eta_3 = 6B_{\varphi_\omega}. \end{cases} \quad (3.68)$$

Como buscamos soluções estritamente positivas, exigimos que $\eta_2 \leq \psi_\omega \leq \eta_3$. Esperamos que

$$\max_{x \in [0, L]} \psi_\omega(x) = \psi_\omega(0) = \eta_3 \quad \text{e} \quad \min_{x \in [0, L]} \psi_\omega(x) = \psi_\omega(\sigma) = \eta_2,$$

onde $\sigma \in (0, L)$. Pela regra de Leibnitz, a equação diferencial (3.66) nos garante que

$$\int_{\psi_c(\xi)}^{\eta_3} \frac{dt}{\sqrt{t(\eta_3 - t)(t - \eta_2)(t - \eta_1)}} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\xi + M_\omega), \quad (3.69)$$

sendo que $\xi \in \mathbb{R}$ e M_ω é uma constante de integração. Segundo a fórmula 257.00, apresentada por Byrd e Friedman, [22],

$$\int_{\psi_\omega(\xi)}^{\eta_3} \frac{dt}{\sqrt{t(\eta_3 - t)(t - \eta_2)(t - \eta_1)}} = g \int_0^{u_1} du = g(\text{sn}^{-1}(\sin(\phi_0(\xi)); k)), \quad (3.70)$$

onde

$$g = \frac{2}{\sqrt{\eta_3(\eta_2 - \eta_1)}}, \quad k^2 = -\frac{\eta_1(\eta_3 - \eta_2)}{\eta_3(\eta_2 - \eta_1)} \quad (3.71)$$

e

$$\phi_0(\xi) = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{(\eta_2 - \eta_1)(\eta_3 - \psi_\omega(\xi))}{(\eta_3 - \eta_2)(\psi_\omega(\xi) - \eta_1)}} \right). \quad (3.72)$$

Sabendo que a equação (3.63) é invariante por translações, verificamos de (3.69)-(3.72) que, para cada $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\frac{(\eta_2 - \eta_1)(\eta_3 - \psi_\omega(\xi))}{(\eta_3 - \eta_2)(\psi_\omega(\xi) - \eta_1)} = \text{sn}^2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}g} \xi; k \right),$$

do que segue

$$(\eta_2 - \eta_1)\eta_3 - (\eta_2 - \eta_1)\psi_\omega(\xi) = (\eta_3 - \eta_2)(\psi_\omega(\xi) - \eta_1)\operatorname{sn}^2\left(\frac{2}{\sqrt{3g}}\xi; k\right).$$

Desta última igualdade,

$$\begin{aligned}\psi_\omega(\xi) &= \frac{(\eta_2 - \eta_1)\eta_3 + \eta_1(\eta_3 - \eta_2)\operatorname{sn}^2\left(\frac{2}{\sqrt{3g}}\xi; k\right)}{(\eta_2 - \eta_1) + (\eta_3 - \eta_2)\operatorname{sn}^2\left(\frac{2}{\sqrt{3g}}\xi; k\right)} \\ &= \frac{1 + \frac{\eta_1(\eta_3 - \eta_2)}{\eta_3(\eta_2 - \eta_1)}\operatorname{sn}^2\left(\frac{2}{\sqrt{3g}}\xi; k\right)}{\frac{1}{\eta_3} - \frac{1}{\eta_1}\left(-\frac{\eta_1(\eta_3 - \eta_2)}{\eta_3(\eta_2 - \eta_1)}\right)\operatorname{sn}^2\left(\frac{2}{\sqrt{3g}}\xi; k\right)},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\psi_\omega(\xi) = \eta_3 \left(\frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\frac{2}{\sqrt{3g}}\xi; k\right)}{1 - \frac{\eta_3 k^2}{\eta_1} \operatorname{sn}^2\left(\frac{2}{\sqrt{3g}}\xi; k\right)} \right) = \frac{\eta_3 \operatorname{dn}^2\left(\frac{2}{\sqrt{3g}}\xi; k\right)}{1 + \beta^2 \operatorname{sn}^2\left(\frac{2}{\sqrt{3g}}\xi; k\right)}, \quad (3.73)$$

onde $\beta^2 = -\frac{\eta_3 k^2}{\eta_1} > 0$. Notemos que a função ψ_ω , em (3.73), é par. Pela construção, a função φ_ω , definida via (3.65), também é par.

Como estamos considerando que a função ψ_ω tem período minimal $L > 0$, vemos que

$$\frac{2}{\sqrt{3g}} = \frac{2K}{L} \Rightarrow L = \sqrt{3g}K = \frac{2\sqrt{3}K}{\sqrt{\eta_3(\eta_2 - \eta_1)}}. \quad (3.74)$$

Pelas relações dadas em (3.68),

$$\eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_3 + \eta_3\eta_1 = -3\omega \Rightarrow (-\eta_2 - \eta_3)\eta_2 + \eta_2\eta_3 + \eta_3(-\eta_2 - \eta_3) = -3\omega.$$

Logo,

$$\eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_2\eta_3 = 3\omega. \quad (3.75)$$

Em virtude das desigualdades $0 < \eta_2 < \eta_3$ e da relação (3.75), $\omega > 0$. Além disto, valem os seguintes fatos:

$$0 < 3\eta_2^2 < \eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_2\eta_3 = 3\omega \Rightarrow 0 < \eta_2^2 < \omega \Rightarrow 0 < \eta_2 < \sqrt{\omega}$$

e

$$3\omega = \eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_2\eta_3 < 3\eta_3^2 < 3(\eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_2\eta_3) = 9\omega \Rightarrow \omega < \eta_3^2 < 3\omega \Rightarrow \sqrt{\omega} < \eta_3 < \sqrt{3\omega}.$$

Logo,

$$\eta_1 < 0 < \eta_2 < \sqrt{\omega} < \eta_3 < \sqrt{3\omega}. \quad (3.76)$$

As relações (3.68) e (3.75) nos permitem esboçar formalmente η_1 e η_2 em termos de η_3 e ω , sendo

$$\eta_1 = \frac{-\eta_3 - \sqrt{-3\eta_3^2 + 12\omega}}{2} \quad \text{e} \quad \eta_2 = \frac{-\eta_3 + \sqrt{-3\eta_3^2 + 12\omega}}{2}. \quad (3.77)$$

Usando as identidades dadas por (3.71), (3.74) e (3.77),

$$k^2 = \frac{\eta_1(\eta_3 - \eta_2)}{\eta_3(\eta_2 - \eta_1)} = \frac{\left(\frac{\eta_3 + \sqrt{-3\eta_3^2 + 12\omega}}{2}\right) \cdot \left(\frac{3\eta_3 - \sqrt{-3\eta_3^2 + 12\omega}}{2}\right)}{\eta_3 \sqrt{-3\eta_3^2 + 12\omega}} \quad (3.78)$$

$$= \frac{3\eta_3^2 + \sqrt{-3\eta_3^4 + 12\omega\eta_3^2} - 6\omega}{2\sqrt{-3\eta_3^4 + 12\omega\eta_3^2}},$$

$$g = \frac{2}{\sqrt{\eta_3(\eta_2 - \eta_1)}} = \frac{2}{\sqrt{\eta_3 \sqrt{12\omega - 3\eta_3^2}}} = \frac{2}{(12\omega\eta_3^2 - 3\eta_3^4)^{\frac{1}{4}}} \quad (3.79)$$

e

$$L = \frac{2\sqrt{3}K(k)}{(12\omega\eta_3^2 - 3\eta_3^4)^{\frac{1}{4}}}. \quad (3.80)$$

Para $\omega > 0$, percebemos que a expressão dada em (3.73) é uma solução estritamente positiva, par, periódica e não-constante à equação (3.66). Esta solução pode ser construída, portanto, em termos de ω e η_3 . Usando as relações (3.78), (3.79) e (3.80), podemos definir uma função que associa η_3 ao período minimal da função ψ_ω . Fixemos ω nas condições acima. Seja $T_{\psi_\omega} : (\sqrt{\omega}, \sqrt{3\omega}) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$T_{\psi_\omega}(\eta_3) = \frac{2\sqrt{3}K(k(\eta_3))}{(12\omega\eta_3^2 - 3\eta_3^4)^{\frac{1}{4}}}, \quad \eta_3 \in (\sqrt{\omega}, \sqrt{3\omega}), \quad (3.81)$$

onde

$$k(\eta_3) = \sqrt{\frac{3\eta_3^2 - 6\omega + \sqrt{12\omega\eta_3^2 - 3\eta_3^4}}{2\sqrt{12\omega\eta_3^2 - 3\eta_3^4}}}. \quad (3.82)$$

Se $\eta_3 \rightarrow (\sqrt{\omega})^+$, então,

$$k(\eta_3) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad T_{\psi_\omega}(\eta_3) \rightarrow \frac{\sqrt{3}\pi}{(9\omega^2)^{\frac{1}{4}}} = \frac{\pi}{\sqrt{\omega}}.$$

Se $\eta_3 \rightarrow (\sqrt{3\omega})^-$, então,

$$k(\eta_3) \rightarrow 1 \quad \text{e} \quad T_{\psi_\omega}(\eta_3) \rightarrow \infty.$$

Posteriormente, será mostrado que a função T_{ψ_ω} é estritamente crescente no seu intervalo de definição. Portanto, o período minimal da função ψ_ω deve ser maior que $\frac{\pi}{\sqrt{\omega}}$. Através do programa *Maple 16* é possível, a partir do período minimal desejado, apresentar esboços das soluções estritamente positivas e periódicas para a equação (3.66). O mesmo vale para as soluções da equação (3.63) - ver Figuras 3.1-3.2.

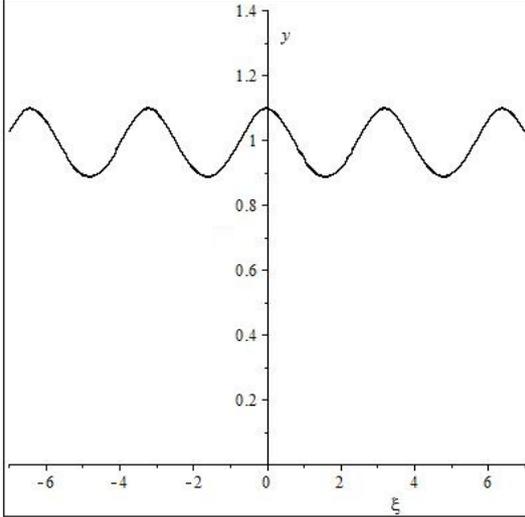


Figura 3.1: Gráfico da função φ_ω tal que $\psi_\omega = \varphi_\omega^2$ é dada por (3.73). Neste caso, $\omega = 1$ ($c = 0$) e o período $L = 3,2$. O valor do módulo k é de aproximadamente 0,4982.

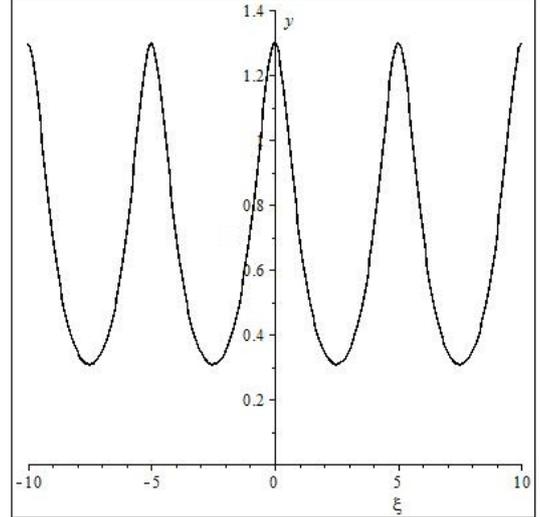


Figura 3.2: Gráfico da função φ_ω tal que $\psi_\omega = \varphi_\omega^2$ é dada por (3.73). Neste caso, $\omega = 1$ ($c = 0$) e o período $L = 5,0$. O valor do módulo k é de aproximadamente 0,9468.

Também é válido frisar que se $\eta_3 \rightarrow (\sqrt{\omega})^+$, então, $\psi_\omega(\xi) \rightarrow \sqrt{\omega}$ e $\varphi_\omega(\xi) \rightarrow \sqrt[4]{\omega}$. Para c no intervalo $(-1, 1)$, a função $\varphi_c(\xi) = \sqrt[4]{1 - c^2}$ é uma solução constante, não-trivial à equação (3.47). Além disto,

$$\begin{aligned} \lim_{\eta_3 \rightarrow (\sqrt{3\omega})^-} \psi_\omega(\xi) &= \lim_{k \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{3\omega} (\operatorname{dn}^2(\sqrt{\omega}\xi; k))}{1 + \operatorname{sn}^2(\sqrt{\omega}\xi; k)} = \frac{\sqrt{3\omega}(1 - \tanh^2(\sqrt{\omega}\xi))}{1 + \tanh^2(\sqrt{\omega}\xi)} \\ &= \sqrt{3\omega} (\operatorname{sech}(2\sqrt{\omega}\xi)), \end{aligned}$$

ou seja, quando $\eta_3 \rightarrow (\sqrt{3\omega})^-$,

$$\varphi_\omega(\xi) = (\psi_\omega(\xi))^{\frac{1}{2}} \rightarrow (3\omega)^{\frac{1}{4}} \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}(2\sqrt{\omega}\xi).$$

Para $c \in (-1, 1)$, a função $\varphi_c(\xi) = (3 - 3c^2)^{\frac{1}{4}} \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}(2\sqrt{1 - c^2}\xi)$ é uma solução onda solitária associada à equação (3.47).

No que procede, pensemos em $\omega > 0$, à priori, não associado ao valor de c . Nosso próximo objetivo é construir para um período fixado $L > \frac{\pi}{\sqrt{\omega}}$, uma curva regular de soluções para a equação (3.63).

Teorema 3.19. *Seja $L > 0$ fixado. Consideremos $\omega_0 > \frac{\pi^2}{L^2}$ e $\eta_{3,0} = \eta_3(\omega_0) \in (\sqrt{\omega_0}, \sqrt{3\omega_0})$ tal que $T_{\psi_{\omega_0}}(\eta_{3,0}) = L$. Então,*

1. *Existe um intervalo $I(\omega_0)$ em torno de ω_0 , um intervalo $J(\eta_{3,0})$ em torno de $\eta_{3,0}$ e uma única função $\Gamma : I(\omega_0) \rightarrow J(\eta_{3,0})$ tal que $\Gamma(\omega_0) = \eta_{3,0}$ e*

$$\frac{2\sqrt{3}K(k)}{(12\omega\eta_3^2 - 3\eta_3^4)^{\frac{1}{4}}} = L,$$

onde $\omega \in I(\omega_0)$, $\eta_3 = \eta_3(\omega) = \Gamma(\omega)$ e $k = k(\omega) \in (0, 1)$ é dada por

$$k = \sqrt{\frac{3\eta_3^2 - 6\omega + \sqrt{12\omega\eta_3^2 - 3\eta_3^4}}{2\sqrt{12\omega\eta_3^2 - 3\eta_3^4}}}.$$

2. *A função periódica $\varphi_\omega(\cdot, \eta_3) = \sqrt{\psi_\omega(\cdot)}$, determinada por η_3 , tem período minimal L e satisfaz a equação (3.63). Além disto, a aplicação*

$$\omega \in I(\omega_0) \mapsto \varphi_\omega \in H_{per,e}^n([0, L])$$

é suave, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. *$I(\omega_0)$ pode ser escolhido como $I = \left(\frac{\pi^2}{L^2}, \infty\right)$.*

Demonstração. Definamos o conjunto aberto

$$\Omega = \left\{ (\eta, \omega) \in \mathbb{R}; \omega > \frac{\pi^2}{L^2}, \eta \in (\sqrt{\omega}, \sqrt{3\omega}) \right\}$$

e seja a função $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(\eta, \omega) = \frac{2\sqrt{3}K(k(\eta, \omega))}{(12\omega\eta^2 - 3\eta^4)^{\frac{1}{4}}}$$

com

$$k(\eta, \omega) = \sqrt{\frac{3\eta^2 - 6\omega + \sqrt{12\omega\eta^2 - 3\eta^4}}{2\sqrt{12\omega\eta^2 - 3\eta^4}}}, \forall (\eta, \omega) \in \Omega.$$

Seja $(\eta, \omega) \in \Omega$. Para simplificações, consideremos $b := 12\omega\eta^2 - 3\eta^4 > 0$. Então,

$$\begin{aligned} F_\eta(\eta, \omega) &= \frac{2\sqrt{3} \frac{dK}{dk} \frac{\partial k}{\partial \eta} b^{\frac{1}{4}} - \frac{2\sqrt{3}(24\omega\eta - 12\eta^3)K}{4b^{\frac{3}{4}}}}{\sqrt{b}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[4]{b^5}} \left(\frac{dK}{dk} \frac{\partial k}{\partial \eta} b - 3K\eta(2\omega - \eta^2) \right). \end{aligned} \tag{3.83}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \eta} k(\eta, \omega) &= \frac{1}{2k} \cdot \frac{2}{4(12\omega\eta^2 - 3\eta^4)} \cdot \left(6\eta + \frac{1}{2}(12\omega\eta^2 - 3\eta^4)^{-\frac{1}{2}} (24\omega\eta - 12\eta^3) \right) \\
&\times (12\omega\eta^2 - 3\eta^4)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{4(12\omega\eta^2 - 3\eta^4)} \cdot (12\omega\eta^2 - 3\eta^4)^{-\frac{1}{2}} \\
&\times (24\omega\eta - 12\eta^3) \cdot \left(3\eta^2 - 6\omega + (12\omega\eta^2 - 3\eta^4)^{\frac{1}{2}} \right) \\
&= \frac{12\eta(12\omega\eta^2 - 3\eta^4) + 144\omega^2\eta + 36\eta^5 - 144\omega\eta^3}{8kb^{\frac{3}{2}}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} k(\eta, \omega) = \frac{18\omega^2\eta}{k\sqrt{b^3}} > 0. \quad (3.84)$$

Como $\eta \in (\sqrt{\omega}, \sqrt{3\omega})$, consideraremos duas possíveis situações. Se $\eta \in [\sqrt{2\omega}, \sqrt{3\omega})$, vemos que $2\omega - \eta^2 \leq 0$. Daí, por (3.83) e (3.84), claramente, $F_\eta(\omega, \eta) > 0$. Caso ocorra $\eta \in (\sqrt{\omega}, \sqrt{2\omega})$, segue que

$$b(2\omega - \eta^2)^2 < 9\omega^4$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[4]{b^5}}{6\sqrt{3}\eta} F_\eta(\eta, \omega) &= \frac{\sqrt[4]{b^5}}{6\sqrt{3}\eta} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[4]{b^5}} \left(\frac{dK}{dk} \frac{\partial k}{\partial \eta} b - 3K\eta(2\omega - \eta^2) \right) \\
&= \frac{1}{3\eta} \cdot \frac{18\omega^2\eta}{k\sqrt{b^3}} \cdot b \frac{dK}{dk} - (2\omega - \eta^2)K \\
&> \frac{1}{\sqrt{b}} \left(\frac{6\omega^2}{k} \frac{dK}{dk} - 3\omega^2 K \right) = \frac{3\omega^2}{\sqrt{b}} \left(\frac{2E - 2k'^2 K}{k^2 k'^2} - K \right)
\end{aligned}$$

e, desta forma,

$$\frac{\sqrt[4]{b^5}}{6\sqrt{3}\eta} F_\eta(\eta, \omega) > \frac{3\omega^2 (2E - (2 + k^2)k'^2 K)}{\sqrt{b}k^2 k'^2}. \quad (3.85)$$

Notando que

$$2E - (2 + k^2)k'^2 K > 0,$$

conclui-se pela desigualdade (3.85) que $F_\eta(\eta, \omega) > 0$.

Pelo Teorema da Função Implícita, segue a existência de uma única função regular Γ , definida em uma vizinhança $I(\omega_0)$ de ω_0 , de tal modo que $F(\Gamma(\omega), \omega) = L$, para todo $\omega \in I(\omega_0)$. A arbitrariedade de ω_0 no intervalo $\left(\frac{\pi^2}{L^2}, \infty\right)$ e a unicidade de Γ permitem estender $I(\omega_0)$ ao intervalo $\left(\frac{\pi^2}{L^2}, \infty\right)$, o que completa a demonstração do Teorema. ■

Corolário 3.20. A função $\Gamma : I(\omega_0) \rightarrow J(\eta_{3,0})$ determinada no Teorema 3.19 é estritamente crescente.

Demonstração. O Teorema 3.19 nos dá que $F(\Gamma(\omega), \omega) = L$ para todo $\omega \in I(\omega_0)$. Pelo Teorema da Função Implícita, temos

$$\frac{d}{d\omega}\Gamma(\omega) = -\frac{F_\omega}{F_\eta}. \quad (3.86)$$

Além disto,

$$F_\omega(\eta, \omega) = \frac{2\sqrt{3}\frac{dK}{dk}\frac{dk}{d\omega}b^{\frac{1}{4}} - \frac{24\sqrt{3}\eta^2 K}{4b^{\frac{3}{4}}}}{\sqrt{b}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[4]{b^5}} \left(\frac{dK}{dk} \frac{\partial k}{\partial \omega} b - 3\eta^2 K \right) < 0, \quad (3.87)$$

pois,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega} k(\omega, \eta) &= \frac{1}{2k} \cdot \frac{2}{4(12\omega\eta^2 - 3\eta^4)} \cdot \left(-6 + \frac{1}{2}(12\omega\eta^2 - 3\eta^4)^{-\frac{1}{2}}(12\eta^2) \right) \cdot (12\omega\eta^2 - 3\eta^4)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - \frac{1}{2k} \cdot \frac{12\eta^2}{4(12\omega\eta^2 - 3\eta^4)} \cdot \left(3\eta^2 - 6\omega + (12\omega\eta^2 - 3\eta^4)^{\frac{1}{2}} \right) \cdot (12\omega\eta^2 - 3\eta^4)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{-12b^{\frac{1}{2}} + (72\omega\eta^2 - 36\eta^4)b^{-\frac{1}{2}}}{8kb} = -\frac{9\omega\eta^2}{k\sqrt{b^3}} < 0. \end{aligned}$$

Lembrando que $F_\eta(\eta, \omega) > 0$, de (3.86) e (3.87),

$$\frac{d}{d\omega}\Gamma(\omega) > 0,$$

provando que Γ é estritamente crescente no intervalo $I(\omega_0)$. ■

Teorema 3.21. Sejam $L > 0$, $\omega > \frac{\pi^2}{L^2}$, $\eta_3 = \eta_3(\omega) = \Gamma(\omega)$ e a função módulo

$$k(\omega) = \sqrt{\frac{3\eta_3^2 - 6\omega + \sqrt{12\omega\eta_3^2 - 3\eta_3^4}}{2\sqrt{12\omega\eta_3^2 - 3\eta_3^4}}}. \quad (3.88)$$

Então, $\frac{d}{d\omega}k(\omega) > 0$.

Demonstração. No Corolário 3.20, vemos que a aplicação $\omega \in \left(\frac{\pi^2}{L^2}, \infty\right) \mapsto \eta_3(\omega)$ é diferenciável. Pelas relações dadas em (3.77), podemos perceber que η_1 e η_2 , em função de ω , também são diferenciáveis. Segue que

$$\eta_3 = \eta_3(\omega) = \frac{-\eta_2 + \sqrt{12\omega - 3\eta_2^2}}{2},$$

$$\begin{aligned}
k^2(\omega) &= \frac{3\eta_3^2 - 6\omega + \sqrt{12\omega\eta_3^2 - 3\eta_3^4}}{2\sqrt{12\omega\eta_3^2 - 3\eta_3^4}} = \frac{1}{2} + \frac{3\eta_3^2 - 6\omega}{2\eta_3\sqrt{12\omega - 3\eta_3^2}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{6\omega - 3\eta_2^2 - 3\eta_2\sqrt{12\omega - 3\eta_2^2}}{\left(-\eta_2 + \sqrt{12\omega - 3\eta_2^2}\right)\sqrt{12\omega + 6\eta_2^2 + 6\eta_2\sqrt{12\omega - 3\eta_2^2}}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{6\omega - 3\eta_2^2 - 3\sqrt{12\omega\eta_2^2 - 3\eta_2^4}}{2\left(6\omega - 3\eta_2^2 + \sqrt{12\omega\eta_2^2 - 3\eta_2^4}\right)} = \frac{12\omega - 6\eta_2^2 - \sqrt{48\omega\eta_2^2 - 12\eta_2^4}}{12\omega - 6\eta_2^2 + \sqrt{48\omega\eta_2^2 - 12\eta_2^4}}
\end{aligned}$$

e, fazendo $\tilde{p} := 12\omega - 6\eta_2^2$ e $r := 48\omega\eta_2^2 - 12\eta_2^4$,

$$\begin{aligned}
2k(\omega)\frac{d}{d\omega}k(\omega) &= \frac{12 - 12\eta_2\eta_2' - \frac{48\eta_2^2 + 96\omega\eta_2\eta_2' - 48\eta_2^3\eta_2'}{2\sqrt{r}}}{\tilde{p} + \sqrt{r}} \\
&- \frac{\left(12 - 12\eta_2\eta_2' + \frac{48\eta_2^2 + 96\omega\eta_2\eta_2' - 48\eta_2^3\eta_2'}{2\sqrt{r}}\right) \cdot (\tilde{p} - \sqrt{r})}{(\tilde{p} + \sqrt{r})^2} \\
&= \frac{24 \cdot \left((1 - \eta_2\eta_2')r - (2\eta_2^2 + 4\omega\eta_2\eta_2' - 2\eta_2^3\eta_2')\tilde{p}\right)}{\sqrt{r}(\tilde{p} + \sqrt{r})^2} \\
&= \frac{24(24\omega\eta_2^2 - 48\omega^2\eta_2\eta_2')}{\sqrt{r}(\tilde{p} + \sqrt{r})^2}.
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Pelo Corolário 3.20, $\eta_3' > 0$. Isto implica que, pela segunda equação em (3.77), $\eta_2' < 0$. Logo, de (3.89), $\frac{d}{d\omega}k(\omega) > 0$. ■

Como visto, à priori, $\omega := 1 - c^2$ e $\omega > 0$. Desta forma, temos que $c \in (-1, 1)$ e, portanto, $\omega \in (0, 1]$. Além disto, como esperamos que $L > \frac{\pi}{\sqrt{\omega}}$, o período minimal L é maior do que π .

Usando (3.65) e (3.73), temos para $c \in (-1, 1)$, a função

$$\varphi_c(\xi) = \frac{\sqrt{\eta_3} \operatorname{dn}\left(\frac{2}{\sqrt{3g}}\xi; k\right)}{\sqrt{1 + \beta^2 \operatorname{sn}^2\left(\frac{2}{\sqrt{3g}}\xi; k\right)}}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{3.90}$$

é uma solução estritamente positiva, periódica, par e não-constante à equação (3.47).

Seja $L > \pi$. Notemos que a função

$$\gamma_1 : \left(0, \frac{\sqrt{L^2 - \pi^2}}{L}\right) \rightarrow \left(\frac{\pi^2}{L^2}, 1\right), \quad \gamma_1(x) = 1 - x^2, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\sqrt{L^2 - \pi^2}}{L}\right),$$

é bijetora, decrescente e de classe $C^\infty \left(0, \frac{\sqrt{L^2 - \pi^2}}{L} \right)$. Por sua vez, a função

$$\gamma_2 : \left(-\frac{\sqrt{L^2 - \pi^2}}{L}, 0 \right) \rightarrow \left(\frac{\pi^2}{L^2}, 1 \right), \quad \gamma_2(x) = 1 - x^2, \quad \forall x \in \left(-\frac{\sqrt{L^2 - \pi^2}}{L}, 0 \right),$$

também é bijetora, crescente e de classe $C^\infty \left(-\frac{\sqrt{L^2 - \pi^2}}{L}, 0 \right)$. Baseado nas funções e nos argumentos acima estabelecidos, podemos apresentar uma versão mais específica do Teorema 3.19, através da qual, garantimos a existência de uma curva suave de soluções periódicas pares de mesmo período $L > 0$ à equação (3.47). Esta curva constitui a primeira etapa para a análise da instabilidade orbital que nos propomos a fazer.

Teorema 3.22. *Seja $L > \pi$. Sejam*

$$c_0 \in \left(0, \frac{\sqrt{L^2 - \pi^2}}{L} \right) \quad e \quad \eta_{3,0} = \eta_3(c_0) \in \left(\sqrt{1 - c_0^2}, \sqrt{3 - 3c_0^2} \right)$$

tal que

$$L = \frac{2\sqrt{3}K(k(\eta_{3,0}))}{(12(1 - c_0^2)\eta_{3,0}^2 - 3\eta_{3,0}^4)^{\frac{1}{4}}} \quad e \quad k(\eta_{3,0}) = \sqrt{\frac{3\eta_{3,0}^2 - 6(1 - c_0^2) + \sqrt{12(1 - c_0^2)\eta_{3,0}^2 - 3\eta_{3,0}^4}}{2\sqrt{12(1 - c_0^2)\eta_{3,0}^2 - 3\eta_{3,0}^4}}}.$$

Então,

1. Existe um intervalo $I(c_0)$ em torno de c_0 , um intervalo $J(\eta_{3,0})$ em torno de $\eta_{3,0}$ e uma única função $\Gamma : I(c_0) \rightarrow J(\eta_{3,0})$ tal que $\Gamma(c_0) = \eta_{3,0}$ e

$$L = \frac{2\sqrt{3}K(k)}{(12(1 - c^2)\eta_3^2 - 3\eta_3^4)^{\frac{1}{4}}},$$

onde $c \in I(c_0)$, $\eta_3 = \eta_3(c) = \Gamma(c)$ e $k = k(c) \in (0, 1)$ é dada por

$$k = \sqrt{\frac{3\eta_3^2 - 6(1 - c^2) + \sqrt{12(1 - c^2)\eta_3^2 - 3\eta_3^4}}{2\sqrt{12(1 - c^2)\eta_3^2 - 3\eta_3^4}}}. \quad (3.91)$$

2. A função periódica $\varphi_c(\cdot, \eta_3)$, determinada por η_3 em (3.90), tem período minimal L e satisfaz a equação (3.47). Além disto, a aplicação

$$c \in I(c_0) \mapsto \varphi_c \in H_{per,e}^n([0, L])$$

é suave, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. $I(c_0)$ pode ser escolhido como $I = \left(0, \frac{\sqrt{L^2 - \pi^2}}{L} \right)$.

4. A função Γ é estritamente decrescente e, para k em (3.91), $\frac{d}{dc}k(c) < 0$.

■

Observação 3.23. *Optamos, por conveniência, abordar o assunto levando em consideração a restrição do parâmetro c ao intervalo $\left(0, \frac{\sqrt{L^2 - \pi^2}}{L}\right)$. Um resultado análogo ao Teorema 3.22 poderia ser determinado se considerássemos $c_0 \in \left(-\frac{\sqrt{L^2 - \pi^2}}{L}, 0\right]$. Neste caso, teríamos $\frac{d}{dc}k(c) > 0$, $\forall c \in \left(-\frac{\sqrt{L^2 - \pi^2}}{L}, 0\right)$ e $\left.\frac{dk}{dc}\right|_{c=0} = 0$. Os demais resultados a serem apresentados nas próximas subseções também podem ser adaptados para este caso aqui pontuado.*

Na sequência, mostraremos que os elementos apresentados na construção da função φ_c podem ser dados exclusivamente em termos das variáveis k e L .

Com efeito, pelo fato de termos definido $\omega = 1 - c^2$, segue que

$$b = 12\eta_3^2 - 12c^2\eta_3^2 - 3\eta_3^4$$

Além disto,

$$k^2 = \frac{3\eta_3^2 - 6 + 6c^2 + \sqrt{b}}{2\sqrt{b}} \quad \text{e} \quad L^2 = \frac{12K^2}{\sqrt{b}}.$$

Então, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 12\eta_3^2 - 12c^2\eta_3^2 - 3\eta_3^4 = \frac{144K^4}{L^4} \\ 3\eta_3^2 - 6 + 6c^2 = \frac{12K^2}{L^2}(2k^2 - 1). \end{cases} \quad (3.92)$$

Logo, por (3.92), resulta

$$\begin{aligned} 12\eta_3^2 - 12c^2\eta_3^2 - 3\eta_3^4 &= \frac{144K^4}{L^4} \\ \Rightarrow 12\eta_3^2 - 2\left(6 - 3\eta_3^2 + \frac{12K^2}{L^2}(2k^2 - 1)\right)\eta_3^2 - 3\eta_3^4 &= \frac{144K^4}{L^4} \\ \Rightarrow 3\eta_3^4 - \frac{24K^2}{L^2}(2k^2 - 1)\eta_3^2 - \frac{144K^4}{L^4} &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, η_3 está sujeito à identidade

$$\eta_3^4 - \frac{8K^2}{L^2}(2k^2 - 1)\eta_3^2 - \frac{48K^4}{L^4} = 0. \quad (3.93)$$

Como $\eta_3 > 0$, vemos que a equação biquadrada (3.93) tem como solução

$$\eta_3 = \frac{\sqrt{2}K}{L} \sqrt{4\sqrt{k^4 - k^2 + 1} + 2(2k^2 - 1)}. \quad (3.94)$$

Usando a segunda equação de (3.92) e a identidade (3.94), temos

$$\begin{aligned}
6c^2 &= 6 - 3\eta_3^2 + \frac{12K^2}{L^2}(2k^2 - 1) \\
&= 6 - \frac{6K^2}{L^2} \left(4\sqrt{k^4 - k^2 + 1} + 2(2k^2 - 1) \right) + \frac{12K^2}{L^2}(2k^2 - 1) \\
&= 6 - 24\frac{K^2}{L^2}\sqrt{k^4 - k^2 + 1},
\end{aligned}$$

o que implica que

$$c = \sqrt{1 - \frac{4K^2}{L^2}\sqrt{k^4 - k^2 + 1}} = \frac{\sqrt{L^2 - 4K^2\sqrt{k^4 - k^2 + 1}}}{L}. \quad (3.95)$$

A definição de c em termos de k e L dada na expressão (3.95) só faz sentido se

$$L^2 - 4K^2\sqrt{k^4 - k^2 + 1} > 0. \quad (3.96)$$

Desta forma, para $L > \pi$ é preciso analisar com cuidado os valores de $k \in (0, 1)$ para os quais a caracterização de c em (3.95) é aceita. A Figura 3.3 nos dá uma ideia do comportamento gráfico da função $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(k) = 4K^2\sqrt{k^4 - k^2 + 1}$, $\forall k \in (0, 1)$.

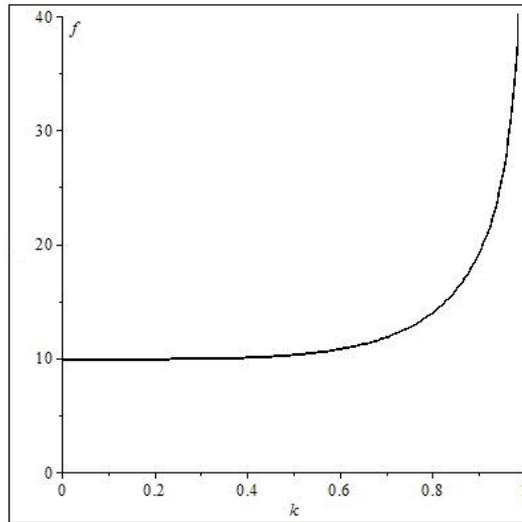


Figura 3.3: Gráfico da função f , $f(k) = 4K^2\sqrt{k^4 - k^2 + 1}$, $\forall k \in (0, 1)$.

A função f acima definida é crescente. Daí, para $L > \pi$ fixado, existe $\alpha_1 \in (0, 1)$ tal que $f(\alpha_1) = L$, $f(k) < L$ se $0 < k < \alpha_1$ e, $f(k) > L$ se $1 > k > \alpha_1$. Com auxílio do programa *Maple 16* podemos, para $L > \pi$ fixado, determinar o intervalo maximal $\tilde{I} \subset (0, 1)$ tal que a relação (3.96) é assegurada, para cada $k \in \tilde{I}$. Na seguinte tabela estão relacionados os intervalos I (dado no Teorema 3.22) e \tilde{I} associados a determinados períodos L .

$I = (0, a_0)$ e $\tilde{I} = (0, a_1)$					
L	a_0	a_1	L	a_0	a_1
3,15	0,07301283	0,31862855	6	0,85196498	0,9803219418
3,2009	0,19160733	0,499903865	7	0,89363276	0,9927289494
4	0,61899089	0,8515822214	8	0,91966702	0,9973197521
5	0,77795618	0,9468049515	10	0,94937029	0,9996368661
5,3	0,80538406	0,9605437270	20	0,98758594	0,9999999835
5,4	0,81334876	0,9642778663	100	0,99950640	0,9999999999

Assim como η_3 , também determinamos η_1 e η_2 em termos de k e L . Segue que

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= -\frac{\eta_3}{2} - \frac{\sqrt{12 - 12c^2 - 3\eta_3^2}}{2} \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}K}{L} \sqrt{4\sqrt{k^4 - k^2 + 1} + 2(2k^2 - 1)} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{48 \frac{K^2}{L^2} \sqrt{k^4 - k^2 + 1} - 3 \cdot \frac{2K^2}{L^2} \left(4\sqrt{k^4 - k^2 + 1} + 2(2k^2 - 1) \right)} \right) \quad (3.97) \\
&= -\frac{\sqrt{2}K}{2L} \left(\sqrt{4\sqrt{k^4 - k^2 + 1} + 2(2k^2 - 1)} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{3} \sqrt{4\sqrt{k^4 - k^2 + 1} - 2(2k^2 - 1)} \right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\eta_2 &= \frac{\sqrt{2}K}{2L} \left(\sqrt{3} \sqrt{4\sqrt{k^4 - k^2 + 1} - 2(2k^2 - 1)} \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{4\sqrt{k^4 - k^2 + 1} + 2(2k^2 - 1)} \right). \quad (3.98)
\end{aligned}$$

Vemos que os elementos η_1 e η_2 estão bem definidos para cada $k \in (0, 1)$. Além disto,

$$g = \frac{L}{\sqrt{3}K} \quad (3.99)$$

e

$$\begin{aligned}
\beta^2 &= -\frac{\eta_3 k^2}{\eta_1} \\
&= \frac{2k^2 \sqrt{4\sqrt{k^4 - k^2 + 1} + 2(2k^2 - 1)}}{\sqrt{4\sqrt{k^4 - k^2 + 1} + 2(2k^2 - 1)} + \sqrt{3} \sqrt{4\sqrt{k^4 - k^2 + 1} - 2(2k^2 - 1)}}. \quad (3.100)
\end{aligned}$$

Fazendo uso das relações (3.94), (3.95) e (3.97)-(3.100), temos que a função φ_c , dada em (3.90), pode ser construída suavemente em termos de k e L .

3.3.2 Análise Espectral I

Em vista da função φ_c , determinada em (3.90), será possível estudar aspectos do espectro do operador \mathcal{L}_{φ_c} , definido em (3.54). Ao longo do desenvolvimento, mostraremos que para $L > \pi$, o operador \mathcal{L}_{φ_c} apresenta exatamente um autovalor estritamente negativo, o qual é simples e associado a uma autofunção par. Além disto, veremos que o operador

$$\mathcal{L}_{\varphi_c} : [H_{per}^2([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])]^2 \rightarrow [L_{per}^2([0, L])]^4$$

tem 0 como um autovalor duplo. Em verdade, concluiremos que o operador \mathcal{L}_{φ_c} restrito ao espaço $[H_{per,e}^2([0, L]) \times L_{per,e}^2([0, L])]^2$ admite 0 como um autovalor simples associado à autofunção $(0, 0, \varphi_c, -c\varphi_c)$.

Seja $L > \pi$ fixado. Sejam I o intervalo e φ_c uma função suave, par e periódica de período L , dados pelo Teorema 3.22, onde φ_c está associada ao parâmetro $c \in I$. Como posto acima, a função φ_c é dada em (3.90). Consideremos o operador

$$\mathcal{L}_{Re,\varphi_c} = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + 1 - 5\varphi_c^4 & -c \\ -c & 1 \end{pmatrix}.$$

Segundo a Proposição 3.16 e a Observação 3.18, a análise do espectro não-positivo do operador $\mathcal{L}_{Re,\varphi_c}$ pode ser feita via o estudo do espectro não-positivo do operador

$$\mathcal{L}_{1,\varphi_c} : H_{per}^2([0, L]) \subset L_{per}^2([0, L]) \rightarrow L_{per}^2([0, L]),$$

definido por

$$\mathcal{L}_{1,\varphi_c}(y) = -y'' + (1 - c^2 - 5\varphi_c^4)y, \quad \forall y \in H_{per}^2([0, L]).$$

O operador $\mathcal{L}_{1,\varphi_c}$ é linear, autoadjunto e ilimitado, com domínio denso em $L_{per}^2([0, L])$. Notemos que 0 é um autovalor de $\mathcal{L}_{1,\varphi_c}$ associado à autofunção φ'_c , pois, usando a igualdade (3.47),

$$\mathcal{L}_{1,\varphi_c}(\varphi'_c) = -\partial_x^2 \varphi'_c + (1 - c^2)\varphi'_c - 5\varphi_c^4 \varphi'_c = \partial_x(-\varphi_c'' + (1 - c^2)\varphi_c - \varphi_c^5) = 0. \quad (3.101)$$

Em verdade, $\mathcal{L}_{1,\varphi_c}$ é um operador de Hill e o espectro deste operador coincide com o conjunto de seus autovalores. Além disto, devido ao Teorema da Oscilação, o conjunto dos autovalores $\{\lambda_\mu(c)\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ do operador $\mathcal{L}_{1,\varphi_c}$ é infinito, tem apenas elementos reais e apresenta o seguinte comportamento

$$\lambda_0(c) < \lambda_1(c) \leq \lambda_2(c) < \lambda_3(c) \leq \lambda_4(c) < \dots < \lambda_{2n-1}(c) \leq \lambda_{2n}(c) < \dots$$

com $\lambda_\mu(c) \rightarrow \infty$ quando $\mu \rightarrow \infty$.

Como a relação apresentada em (3.101) é válida para cada $c \in I$, pelo Teorema 2.8, a família de operadores $\{\mathcal{L}_{1,\varphi_c}\}_{c \in I}$ é isonercial se mostrarmos que 0 é um autovalor simples de $\mathcal{L}_{1,\varphi_c}$, para algum $c \in I$. Neste caso, a dimensão do espaço gerado pelas autofunções

associadas aos autovalores estritamente negativos de $\mathcal{L}_{1,\varphi_c}$ independe de c . O mesmo pode ser dito com respeito à dimensão do autoespaço gerado a partir do autovalor 0. Em seguida, faremos a verificação de que a referida família de operadores é isonercial e buscaremos a “posição” que o autovalor 0 ocupa na ordenação crescente dos autovalores de $\mathcal{L}_{1,\varphi_c}$.

De modo a ilustrar, consideremos o caso em que o período L é igual a 4. Conforme apresentamos anteriormente, o intervalo de definição de c é $I = (0, a_0)$, com $a_0 \approx 0,61899089$. O módulo k , por sua vez, é definido no intervalo $\tilde{I} = (0, a_1)$, onde $a_1 \approx 0,8515822214$. Se $k = 0,5$, na relação determinada em (3.95), $c \approx 0,5996827$. Este valor de c é usado como referência. Através de (3.90) e com auxílio do programa *Maple 16*, temos que a função φ_c associada a $L = 4$ e $c \approx 0,5996827$ ($k = 0,5$) é aproximada por

$$\varphi_c(\xi) = \frac{0,9808 \operatorname{dn}(0,8429\xi; 0,5)}{\sqrt{1 + 0,1514 \operatorname{sn}^2(0,8429\xi; 0,5)}}. \quad (3.102)$$

Assumamos $p(x) := \varphi'_c(x)$, conforme (3.101), uma solução periódica de período $L = 4$ da equação

$$-y'' + (1 - c^2 - 5\varphi_c^4)y = 0, \quad (3.103)$$

no caso em que $c \approx 0,5996827$. A função $p(x)$ admite exatamente duas raízes no intervalo $[0, 4)$ e $p(0) = \varphi'_c(0) = 0$. Conforme a teoria em [55], descrita na Subseção 2.4.3 desta tese, existe a função $y(x)$, solução da equação (3.103), que é linearmente independente a $p(x)$ e está sujeita às condições $y(0) = -\frac{1}{p'(0)} = -\frac{1}{\varphi''_c(0)}$ e $y'(0) = 0$. Além disto, existe uma constante θ de maneira que

$$y(x + 4) = y(x) + \theta p(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

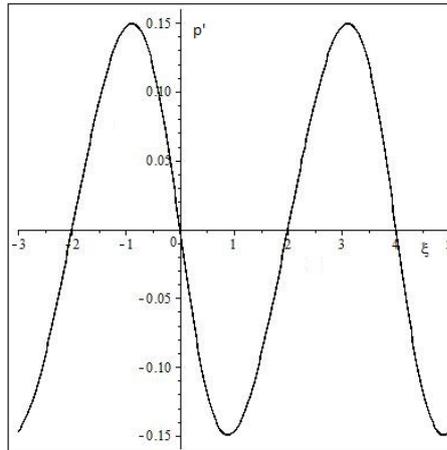


Figura 3.4: Gráfico da função φ'_c , para $L = 4$ e $c \approx 0,5996827$, onde φ_c é dada por (3.102).

Em (3.102), notemos que $\varphi_c(0) \approx 0,9808$ e $\varphi''_c(0) \approx -0,2797$. Com auxílio do programa *Maple 16*, podemos determinar numericamente, para $c \approx 0,5996827$, a função $y(x)$

acima considerada, já que esta é a função que satisfaz o problema de valor inicial

$$\begin{cases} -y'' + (1 - c^2 - 5\varphi_c^4)y = 0. \\ y(0) = -\frac{1}{\varphi_c''(0)} \approx 3,5753. \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Nestas condições, notemos que $y(4) \approx 3,5753$ e $y'(4) \approx 1,9283$. Além disto,

$$y(x+4) = y(x) + \theta p(x) \Rightarrow y'(x+4) = y'(x) + \theta p'(x)$$

e, finalmente,

$$y'(4) = y'(0) + \theta p'(0) = \theta \varphi_c''(0) \Rightarrow \theta = \frac{y'(4)}{\varphi_c''(0)} \approx -6,8942 < 0.$$

Pelo fato de termos obtido $\theta < 0$, segue do Teorema 2.12 que o autovalor 0 do operador $\mathcal{L}_{1,\varphi_c}$ é simples. Além disto, como $\varphi_c'(x)$ tem duas raízes no intervalo $[0, 4)$, concluímos que 0 é o autovalor de número 1 na ordenação crescente dos autovalores de $\mathcal{L}_{1,\varphi_c}$. Portanto, $\mathcal{L}_{1,\varphi_c} : H_{per}^2([0, 4]) \rightarrow L_{per}^2([0, 4])$ admite exatamente um autovalor estritamente negativo, o qual é simples. Este fato é válido para todo $c \in I$, pois, como já comentado, a família $\{\mathcal{L}_{1,\varphi_c}\}_{c \in I}$ é isonercial. Lembremos também que, pelo Teorema 2.7, a autofunção associada ao autovalor de ordenação 0 pode ser tomada par. Isto nos leva a concluir que, para cada $c \in I$, o operador $\mathcal{L}_{1,\varphi_c} : H_{per,e}^2([0, 4]) \rightarrow L_{per,e}^2([0, 4])$ admite um único autovalor estritamente negativo, o qual é simples.

Para efeito de ilustração, determinaremos alguns valores de θ para variados valores de L e k fixados. Em todas as situações, evidentemente, $\theta < 0$.

Valores de θ relacionados ao período L .							
L	k	c	$\varphi_c(0)$	$\varphi_c''(0)$	$y(0)=y(L)$	$y'(L)$	θ
3,15	0,2	0,06748458	1,0139	-0,0624	16,0289266	0,1651	-2,6463
3,2009	0,2	0,18963431	1,0059	-0,0599	16,6843128	0,1691	-2,8215
4	0,2	0,61860169	0,8998	-0,0343	29,1258115	0,2362	-6,8807
5	0,5	0,76821636	0,8773	-0,1601	6,24575978	2,6948	-16,831
5,3	0,5	0,79701984	0,8521	-0,1384	7,22520110	2,9410	-21,249
5,4	0,5	0,80537268	0,8442	-0,1321	7,57085041	3,0246	-22,899
6	0,5	0,84580516	0,8009	-0,1015	9,85231734	3,5424	-34,902
7	0,5	0,88932340	0,7414	-0,0690	14,4845620	4,4640	-64,660
8	0,5	0,91646322	0,6936	-0,0494	20,2248465	5,4540	-110,31
10	0,5	0,94738540	0,6203	-0,0283	35,3313528	7,6222	-269,30
20	0,5	0,98710930	0,4386	-0,0050	199,864313	21,559	-4308,9
100	0,5	0,99948756	0,1962	-0,00009	11172,7547	241,04	-269303

Em verdade, segundo [55] e [56], a prova do Teorema 2.15 garante que, para qualquer que seja $L > \pi$ e $c \in I = I(L)$, o operador $\mathcal{L}_{1,\varphi_c}$ apresenta as mesmas propriedades

espectrais descritas para o caso em que $L = 4$. Frisemos que este resultado é válido pelo fato de conhecermos explicitamente o comportamento da função φ_c em (3.90) (outros detalhes sobre o comportamento da função φ_c serão explorados e estabelecidos na subseção subsequente).

Continuemos a entender que $L > \pi$ é arbitrário, porém, fixado. Da Proposição 3.16, o operador

$$\mathcal{L}_{Re,\varphi_c} : H_{per}^2([0, L]) \times L_{per}^2([0, L]) \rightarrow L_{per}^2([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$$

apresenta um único autovalor estritamente negativo, o qual é simples, para todo $c \in I$. Em verdade, para cada $c \in I$, o operador

$$\mathcal{L}_{Re,\varphi_c} : H_{per,e}^2([0, L]) \times L_{per,e}^2([0, L]) \rightarrow L_{per,e}^2([0, L]) \times L_{per,e}^2([0, L])$$

também admite um único autovalor estritamente negativo, o qual é simples. Esta última informação é outra consequência da demonstração da Proposição 3.16. Isto, pois, se a função $\zeta_c(x)$ for a autofunção par de $\mathcal{L}_{1,\varphi_c}$ associada ao autovalor $\lambda_0(c) < 0$, então, o vetor

$$\begin{pmatrix} \zeta_c(x) \\ -c\zeta_c(x)/(\lambda_0(c) - 1) \end{pmatrix} \quad (3.104)$$

caracteriza a autofunção par que está associada ao autovalor estritamente negativo do operador $\mathcal{L}_{Re,\varphi_c}$.

Pela Observação 3.18, 0 é um autovalor simples do operador $\mathcal{L}_{Re,\varphi_c}$, para todo $c \in I$. Entretanto, é preciso que façamos uma ressalva. Notemos que $\ker(\mathcal{L}_{1,\varphi_c}) = \text{span}\{\varphi'_c\}$. Como φ_c é uma função par não-trivial, segue que φ'_c não é uma função par. Daí, o operador

$$\mathcal{L}_{1,\varphi_c} : H_{per,e}^2([0, L]) \rightarrow L_{per,e}^2([0, L])$$

não admite 0 como autovalor. Pelo fato da autofunção de $\mathcal{L}_{Re,\varphi_c}$ associada ao seu autovalor 0 ser $\begin{pmatrix} \varphi'_c \\ c\varphi'_c \end{pmatrix}$, temos que a mesma não é uma função par. Disto, segue que o operador

$$\mathcal{L}_{Re,\varphi_c} : H_{per,e}^2([0, L]) \times L_{per,e}^2([0, L]) \rightarrow L_{per,e}^2([0, L]) \times L_{per,e}^2([0, L])$$

não admite 0 como autovalor.

Seja $c \in I$. Agora, estudaremos o espectro do operador

$$\mathcal{L}_{Im,\varphi_c} = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + 1 - \varphi_c^4 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}.$$

Similarmente ao que se fez no caso anterior, os autovalores não-positivos do operador $\mathcal{L}_{Im,\varphi_c}$ são estudados a partir do espectro não-positivo do operador

$$\mathcal{L}_{2,\varphi_c} := -\partial_x^2 + (1 - c^2) - \varphi_c^4.$$

O operador $\mathcal{L}_{2,\varphi_c}$, sobre $L_{per}^2([0, L])$, com domínio $H_{per}^2([0, L])$, é linear, autoadjunto e ilimitado. Além disto, 0 é um autovalor de $\mathcal{L}_{2,\varphi_c}$ associado à autofunção φ_c . Isto, pois,

$$\mathcal{L}_{2,\varphi_c}(\varphi_c) = -\partial_x^2\varphi_c + (1 - c^2)\varphi_c - \varphi_c^4 = 0 = 0\varphi_c. \quad (3.105)$$

A relação (3.105) é independente de L e de $c \in I$.

Como $\varphi_c > 0$, para cada $c \in I$, o Teorema 2.6 garante que os operadores da família $\{\mathcal{L}_{2,\varphi_c}\}_{c \in I}$ não têm autovalores estritamente negativos e sempre têm 0 como um autovalor simples de $\mathcal{L}_{2,\varphi_c}$. Para cada $c \in I$, pela Proposição 3.17 e pela Observação 3.18, o operador $\mathcal{L}_{Im,\varphi_c}$ não tem autovalores estritamente negativos e 0 é um autovalor simples de $\mathcal{L}_{Im,\varphi_c}$. Estas observações adicionadas ao fato de que $\begin{pmatrix} \varphi_c \\ -c\varphi_c \end{pmatrix}$ é a autofunção do operador $\mathcal{L}_{Im,\varphi_c}$ associada ao autovalor 0 garantem que, para cada $c \in I$, os operadores

$$\mathcal{L}_{2,\varphi_c} : H_{per,e}^2([0, L]) \rightarrow L_{per,e}^2([0, L])$$

e

$$\mathcal{L}_{Im,\varphi_c} : H_{per,e}^2([0, L]) \times L_{per,e}^2([0, L]) \rightarrow L_{per,e}^2([0, L]) \times L_{per,e}^2([0, L])$$

não admitem autovalores estritamente negativos e têm 0 como um autovalor simples.

Portanto, para cada $L > \pi$ e $c \in I$, o operador

$$\mathcal{L}_{\varphi_c} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{Re,\varphi_c} & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{Im,\varphi_c} \end{pmatrix},$$

admite exatamente um autovalor estritamente negativo, o qual é simples. O número 0 é um autovalor duplo de $\mathcal{L}_{\varphi_c} : [H_{per}^2([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])]^2 \rightarrow [L_{per}^2([0, L])]^4$. Por sua vez, o operador

$$\mathcal{L}_{\varphi_c} : [H_{per,e}^2([0, L]) \times L_{per,e}^2([0, L])]^2 \rightarrow [L_{per,e}^2([0, L])]^4$$

admite exatamente um autovalor estritamente negativo, o qual é simples, e admite 0 como um autovalor que também é simples e está associado à autofunção $(0, 0, \varphi_c, -c\varphi_c)$. Desta maneira, contemplamos as exigências (b2) e (b3) referentes ao estudo da instabilidade orbital das ondas estacionárias periódicas vinculadas a φ_c que solucionam a equação de Klein-Gordon (3.1).

3.3.3 Análise Espectral II

Seja $L > \pi$. Consideremos que $\omega := 1 - c^2$ e que $\varphi_\omega = \varphi_c$ seja a função determinada em (3.90). Nesta subseção, mostraremos um estudo que aborda alternativamente a dedução de características espectrais do operador $\mathcal{L}_{1,\varphi_c}$.

A função φ_ω satisfaz a identidade (3.63), ou seja,

$$-\varphi_\omega'' + \omega\varphi_\omega - \varphi_\omega^5 = 0.$$

Definamos $\eta_\omega := \frac{d}{d\omega}(\varphi_\omega)$. Derivando a expressão (3.63) com respeito a ω , resulta que

$$-\eta_\omega'' + \omega\eta_\omega + \varphi_\omega - 5\varphi_\omega^4\eta_\omega = 0. \quad (3.106)$$

Seja y , a função que soluciona o problema de valor inicial

$$\begin{cases} -y'' + (\omega - 5\varphi_\omega^4)y = 0. \\ y(0) = -\frac{1}{\varphi_\omega''(0)}. \\ y'(0) = 0. \end{cases} \quad (3.107)$$

Pela Teoria de Floquet (ver Neves, [58] e [59]), $\{\varphi_\omega', y\}$ constitui um conjunto fundamental de soluções para a equação $-\bar{y}'' + (\omega - 5\varphi_\omega^4)\bar{y} = 0$. Além disto,

$$y(x+L) = y(x) + \theta\varphi_\omega'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

onde

$$\theta = \frac{y'(L)}{\varphi_\omega''(0)} \quad (3.108)$$

é uma constante. Ressaltamos que $y(0) = y(L)$ e é sabido que $W(\varphi_\omega', y)(0) = 1$, onde W é o Wronskiano de φ_ω' e y . Em verdade, pela Fórmula de Abel Liouville, determinamos que

$$W(\varphi_\omega', y)(x) = W(\varphi_\omega', y)(0) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Isto implica que

$$\varphi_\omega'(x)y'(x) - \varphi_\omega''(x)y(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.109)$$

Multipliquemos a expressão (3.106) por y e integremos o resultado deste produto sobre o intervalo $[0, L]$. Vemos que

$$\int_0^L [-\eta_\omega'' + \omega\eta_\omega + \varphi_\omega - 5\varphi_\omega^4\eta_\omega]y \, dx = 0,$$

o que implica que

$$\eta_\omega(L)y'(L) - \eta_\omega(0)y'(0) + \int_0^L [-\eta_\omega y'' + \omega\eta_\omega y + \varphi_\omega y - 5\varphi_\omega^4\eta_\omega y] \, dx = 0. \quad (3.110)$$

Usando as informações dadas em (3.107) na identidade (3.110), determinamos que

$$\eta_\omega(0)y'(L) + \int_0^L [\varphi_\omega y] \, dx = \eta_\omega(L)y'(L) + \int_0^L [\varphi_\omega y] \, dx = 0. \quad (3.111)$$

Por outro lado, multipliquemos a identidade (3.63) por y e integremos o resultado deste produto sobre o intervalo $[0, L]$. Resulta que

$$\int_0^L [-\varphi_\omega'' + \omega\varphi_\omega - \varphi_\omega^5]y \, dx = 0,$$

o que é equivalente a

$$\varphi_\omega(L)y'(L) - \varphi_\omega(0)y'(0) + \int_0^L [-\varphi_\omega y'' + \omega\varphi_\omega y - \varphi_\omega^5 y] dx = 0.$$

Usando as informações dadas em (3.107) na identidade imediatamente acima, temos que

$$\varphi_\omega(0)y'(L) + 4 \int_0^L [\varphi_\omega^5 y] dx = \varphi_\omega(L)y'(L) + \int_0^L [4\varphi_\omega^5 y] dx = 0. \quad (3.112)$$

Em seguida, consideremos a identidade proposta em (3.109) e a integremos sobre o intervalo $[0, L]$. Determinamos que

$$\int_0^L [\varphi'_\omega y' - \varphi''_\omega y] dx = L.$$

Fazendo uso de integração por partes, deduzimos que

$$L = -2 \int_0^L [\varphi''_\omega y] dx = -2\omega \int_0^L [\varphi_\omega y] dx + 2 \int_0^L [\varphi_\omega^5 y] dx \quad (3.113)$$

Combinando as informações (3.111), (3.112) e (3.113), estabelecemos que

$$\left[2\omega\eta_\omega(0) - \frac{1}{2}\varphi_\omega(0) \right] y'(L) = L. \quad (3.114)$$

A identidade (3.114) garante que $y'(L) \neq 0$. Como $\varphi''_\omega(0) < 0$, em vista de (3.108), concluímos que $\theta \neq 0$. Do Teorema 2.12, 0 é um autovalor simples do operador $\mathcal{L}_{1,\varphi_c}$. Usando a fórmula explícita de φ_ω em (3.114), podemos deduzir o sinal de $y'(L)$ (e, conseqüentemente o sinal de θ).

Com efeito, seja φ_ω a função deduzida em (3.90). Temos que $\varphi_\omega(0) = \sqrt{\eta_3}$, onde η_3 é definida em termos de k e L na relação (3.94). Por outro lado, derivando a função φ_ω^2 com relação a variável k , podemos estabelecer que

$$2 \cdot \varphi_\omega(0) \cdot \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial k}(0) = \frac{\partial \eta_3}{\partial k},$$

o que implica que

$$\eta_\omega(0) = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial k}(0) = \frac{1}{\left[2 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial k} \cdot \varphi_\omega(0) \right]} \cdot \frac{\partial \eta_3}{\partial k} = \frac{1}{\left[2 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial k} \cdot \sqrt{\eta_3} \right]} \cdot \frac{\partial \eta_3}{\partial k}.$$

Logo,

$$2\omega\eta_\omega(0) - \frac{1}{2}\varphi_\omega(0) = \frac{\omega}{\sqrt{\eta_3}} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \eta_3}{\partial k} - \frac{\sqrt{\eta_3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{\eta_3}} \left[\omega \cdot \frac{\partial \eta_3}{\partial k} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)^{-1} - \frac{\eta_3}{2} \right].$$

Pelas considerações acima apresentadas, o sinal da expressão $2\omega\eta_\omega(0) - \frac{1}{2}\varphi_\omega(0)$ é o mesmo sinal de $\omega \cdot \frac{\partial \eta_3}{\partial k} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)^{-1} - \frac{\eta_3}{2}$. Contudo, simplificamos esta última expressão

como

$$\omega \cdot \frac{\partial \eta_3}{\partial k} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)^{-1} - \frac{\eta_3}{2} = \frac{3}{L} \cdot \frac{k^2 \cdot (k^2 - 1) \cdot K^2}{\sqrt{2 \cdot \sqrt{k^4 - k^2 + 1} + 2k^2 - 1}} \quad (3.115)$$

$$\times \frac{1}{[2 \cdot E \cdot (-k^4 + k^2 - 1) + K \cdot (k^4 - 3k^2 + 2)]}.$$

Definamos a função auxiliar

$$v(k) := \frac{3 \cdot k^2 \cdot (k^2 - 1) \cdot K^2}{[2 \cdot E \cdot (-k^4 + k^2 - 1) + K \cdot (k^4 - 3k^2 + 2)] \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{k^4 - k^2 + 1} + 2k^2 - 1}}.$$

Notemos que, conforme a Figura 3.5, $v(k) > 0$, para cada $k \in (0, 1)$.

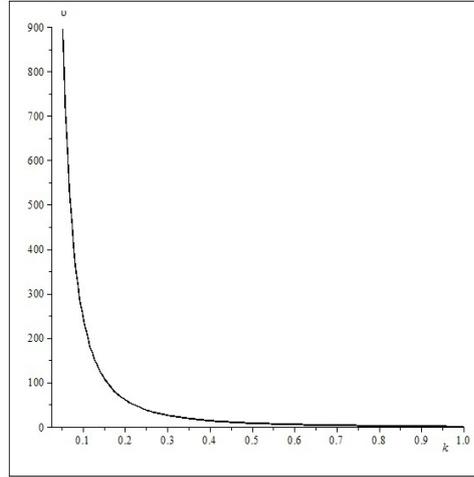


Figura 3.5: Gráfico da função $v(k)$, associada a (3.115), onde $k \in (0, 1)$.

Em vista da identidade (3.115), determinamos que, independentemente do período $L > \pi$, $2\omega\eta_\omega(0) - \frac{1}{2}\varphi_\omega(0) > 0$. Esta informação permite garantir, devido a (3.114), que $y'(L) > 0$. Como $\varphi_\omega''(0) < 0$, segue que $\theta < 0$. Do Teorema 2.12, o operador $\mathcal{L}_{1,\varphi_c}$ admite um único autovalor negativo, o qual é simples. Notemos que esta abordagem alternativa determina informações acerca do espectro do operador $\mathcal{L}_{1,\varphi_c}$ sem a necessidade de utilizar as aproximações numéricas e o conceito de família isonercial exigidas na abordagem da subseção anterior.

Observação 3.24. Em [54], o autor estudou a estabilidade orbital de ondas viajantes periódicas para a equação 4-KdV. No referido trabalho, ele analisou os autovalores estritamente negativos do operador associado fazendo uso da expansão em série de Fourier da função φ_c^2 aqui tratada. Neste caso, a função suave, estritamente positiva, par e periódica φ_ω que satisfaz (3.90) e

$$-\varphi_\omega'' + \omega\varphi_\omega - \varphi_\omega^5 = 0, \quad (3.116)$$

possui a expansão em série de Fourier

$$\varphi_\omega^2(\xi) = C(\eta_3, \alpha, k) \left[\Lambda_0(\nu, k) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sinh\left(\frac{\pi F(\nu, k')n}{K}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi K'}{K}\right)} \cos\left(\frac{2\pi n\xi}{L}\right) \right],$$

onde $C(\eta_3, \alpha, k)$ é uma constante, $\alpha \in \mathbb{C}$ é tal que $\alpha^2 = -\beta^2$, $\nu = \sin^{-1}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + k^2}}\right)$,

$k' = \sqrt{1 - k^2}$, $K' = \frac{dK}{dk}$ e $\Lambda_0(\nu, k)$ é a Função Lambda de Heuman dada por

$$\Lambda_0(\nu, k) = \frac{2}{\pi} [K(k)E(\nu, k') - K(k')F(\nu, k) + E(k)F(\nu, k')].$$

Seja $\gamma = (\gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ uma sequência de números reais. Dizemos que $\gamma \in PF(2)$ discreto no sentido estrito se $\gamma_n > 0, \forall n \in \mathbb{Z}$ e se $\gamma_{n_1 - m_1} \gamma_{n_2 - m_2} - \gamma_{n_1 - m_2} \gamma_{n_2 - m_1} > 0$, para $n_1 < n_2$ e $m_1 < m_2$. Segundo [54], com a função φ_ω atendendo a $\widehat{\varphi_\omega} > 0$ e $(\widehat{\varphi_\omega^4}) \in PF(2)$ discreto no sentido estrito, então, o operador $\mathcal{L} := -\partial_x^2 + \omega - 5\varphi_\omega^4$, com $D(\mathcal{L}) = H_{per}^2([0, L])$, admite exatamente um autovalor estritamente negativo, o qual é simples, e 0 também é um autovalor simples de \mathcal{L} . Esta verificação seria, portanto, uma outra proposta alternativa à abordagem detalhada nesta Seção.

3.3.4 Convexidade da função d

Nosso próximo passo é analisar, para $c \in I$, I dado no Teorema 3.22, o sinal de

$$d''(c) = -\frac{d}{dc} \left(c \int_0^L \varphi_c^2(x) dx \right),$$

onde $L > \pi$ está fixado. O sinal de d'' , como exposto na condição (b4), é de fundamental importância para garantir, conforme a Definição 3.3, a instabilidade orbital das ondas estacionárias periódicas em estudo.

Voltemos a considerar $\omega := 1 - c^2$ e $\varphi_\omega = \varphi_c$. Como visto em (3.63) e (3.64),

$$-\varphi_\omega'' + \omega\varphi_\omega - \varphi_\omega^5 = 0$$

e

$$(\varphi_\omega')^2 = \frac{1}{3} (-\varphi_\omega^6 + 3\omega\varphi_\omega^2 + 6B_{\varphi_\omega}). \quad (3.117)$$

Integrando a expressão (3.117) sobre o intervalo $[0, L]$ e fazendo uso de integração por partes,

$$-\int_0^L \varphi_\omega \varphi_\omega'' dx = \frac{1}{3} \int_0^L (-\varphi_\omega^6 + 3\omega\varphi_\omega^2 + \eta_1\eta_2\eta_3) dx,$$

do que segue, por (3.63),

$$-\omega \int_0^L \varphi_\omega^2 dx + \int_0^L \varphi_\omega^6 dx = -\frac{1}{3} \int_0^L \varphi_\omega^6 dx + \omega \int_0^L \varphi_\omega^2 dx + \frac{1}{3} \int_0^L \eta_1 \eta_2 \eta_3 dx,$$

ou equivalentemente,

$$\frac{4}{3} \int_0^L \varphi_\omega^6 dx = 2\omega \int_0^L \varphi_\omega^2 dx + \frac{1}{3} \int_0^L \eta_1 \eta_2 \eta_3 dx. \quad (3.118)$$

Derivando a expressão (3.118) com relação ao parâmetro ω ,

$$8 \int_0^L \varphi_\omega^5 \frac{d}{d\omega}(\varphi_\omega) dx = 2 \int_0^L \varphi_\omega^2 dx + 2\omega \int_0^L \frac{d}{d\omega}(\varphi_\omega^2) dx + \frac{1}{3} \int_0^L \frac{d}{d\omega}(\eta_1 \eta_2 \eta_3) dx \quad (3.119)$$

Façamos $\eta_\omega := \frac{d}{d\omega}(\varphi_\omega)$. Derivando a identidade $-\varphi_\omega'' + \omega\varphi_\omega - \varphi_\omega^5 = 0$ com relação ao parâmetro ω , temos a validade da identidade (3.106),

$$-\eta_\omega'' + \omega\eta_\omega + \varphi_\omega - 5\varphi_\omega^4 \eta_\omega = 0. \quad (3.120)$$

Multiplicando a expressão (3.120) por φ_ω e integrando o produto no intervalo $[0, L]$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^L (-\eta_\omega'' \varphi_\omega + \omega\eta_\omega \varphi_\omega + \varphi_\omega^2 - 5\varphi_\omega^5 \eta_\omega) dx = \int_0^L (-\eta_\omega \varphi_\omega'' + \omega\eta_\omega \varphi_\omega + \varphi_\omega^2 - 5\varphi_\omega^5 \eta_\omega) dx \\ &= \int_0^L [-(\omega\varphi_\omega - \varphi_\omega^5)\eta_\omega + \omega\eta_\omega \varphi_\omega + \varphi_\omega^2 - 5\varphi_\omega^5 \eta_\omega] dx = \int_0^L \varphi_\omega^2 dx - 4 \int_0^L \varphi_\omega^5 \eta_\omega dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$4 \int_0^L \varphi_\omega^5 \frac{d}{d\omega}(\varphi_\omega) dx = \int_0^L \varphi_\omega^2 dx. \quad (3.121)$$

Logo, combinando (3.119) e (3.121),

$$\begin{aligned} 2 \int_0^L \varphi_\omega^2 dx &= 8 \int_0^L \varphi_\omega^5 \frac{d}{d\omega}(\varphi_\omega) dx \\ &= 2 \int_0^L \varphi_\omega^2 dx + 2\omega \int_0^L \frac{d}{d\omega}(\varphi_\omega^2) dx + \frac{1}{3} \int_0^L \frac{d}{d\omega}(\eta_1 \eta_2 \eta_3) dx \end{aligned}$$

e

$$2\omega \int_0^L \frac{d}{d\omega}(\varphi_\omega^2) dx = -\frac{1}{3} \int_0^L \frac{d}{d\omega}(\eta_1 \eta_2 \eta_3) dx,$$

donde

$$\frac{d}{d\omega} \left(\int_0^L \varphi_\omega^2 dx \right) = -\frac{1}{6\omega} \frac{d}{d\omega} \left(\int_0^L \eta_1 \eta_2 \eta_3 dx \right).$$

Portanto, para $c \in I$,

$$\begin{aligned}
d''(c) &= -\frac{d}{dc} \left(c \int_0^L \varphi_c^2 dx \right) = -\int_0^L \varphi_c^2 dx - c \frac{d}{dc} \left(\int_0^L \varphi_c^2 dx \right) \\
&= -\int_0^L \varphi_c^2 dx - c \left(\frac{d}{dc}(\omega(c)) \right) \frac{d}{d\omega} \left(\int_0^L \varphi_\omega^2 dx \right) \\
&= -\int_0^L \varphi_c^2 dx + 2c^2 \left(-\frac{1}{6(1-c^2)} \int_0^L \frac{d}{d\omega}(\eta_1\eta_2\eta_3) dx \right) \quad (3.122) \\
&= -\int_0^L \varphi_c^2 dx + \frac{c^2}{3c^2-3} \frac{d}{d\omega} \left(\int_0^L \eta_1\eta_2\eta_3 dx \right) \\
&= -\|\varphi_c\|_{L^2_{per}}^2 + \frac{c^2 L}{3c^2-3} \cdot \frac{d}{d\omega}(k(\omega)) \cdot \frac{\partial}{\partial k}(\eta_1\eta_2\eta_3).
\end{aligned}$$

Para $L > \pi$, L fixado, temos que

$$\begin{aligned}
\eta_1\eta_2\eta_3 &= \left[-\frac{\sqrt{2}K}{2L} \left(\sqrt{3}\sqrt{4\sqrt{k^4-k^2+1}-2(2k^2-1)} + \sqrt{4\sqrt{k^4-k^2+1}+2(2k^2-1)} \right) \right] \\
&\times \left[\frac{\sqrt{2}K}{2L} \left(\sqrt{3}\sqrt{4\sqrt{k^4-k^2+1}-2(2k^2-1)} - \sqrt{4\sqrt{k^4-k^2+1}+2(2k^2-1)} \right) \right] \\
&\times \left[\frac{\sqrt{2}K}{L} \sqrt{4\sqrt{k^4-k^2+1}+2(2k^2-1)} \right],
\end{aligned}$$

o que indica que

$$\begin{aligned}
\eta_1\eta_2\eta_3 &= -\frac{\sqrt{2}K^3}{2L^3} \left(8\sqrt{k^4-k^2+1} - 16k^2 + 8 \right) \sqrt{4\sqrt{k^4-k^2+1}+2(2k^2-1)} \\
&= -\frac{4\sqrt{2}K^3}{L^3} \left(\sqrt{k^4-k^2+1} - 2k^2 + 1 \right) \sqrt{4\sqrt{k^4-k^2+1}+2(2k^2-1)}.
\end{aligned}$$

Usando a identidade dada imediatamente acima, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial k}(\eta_1\eta_2\eta_3) &= -\frac{4\sqrt{2}}{L^3} \left[3K^2 \frac{dK}{dk} \left(\sqrt{k^4-k^2+1} - 2k^2 + 1 \right) \sqrt{4\sqrt{k^4-k^2+1}+2(2k^2-1)} \right. \\
&+ K^3 \left(\frac{2k^3-k}{\sqrt{k^4-k^2+1}} - 4k \right) \sqrt{4\sqrt{k^4-k^2+1}+2(2k^2-1)} \\
&+ \left. K^3 \left(\sqrt{k^4-k^2+1} - 2k^2 + 1 \right) \left(\frac{\frac{4k^3-2k}{\sqrt{k^4-k^2+1}} + 4k}{\sqrt{4\sqrt{k^4-k^2+1}+2(2k^2-1)}} \right) \right] \\
&= -\frac{24K^2 \sqrt{2\sqrt{k^4-k^2+1}+2k^2-1}}{L^3 k(1-k^2)} \\
&\times \left[\left(\sqrt{k^4-k^2+1} - 2k^2 + 1 \right) E - (1-k^2) \left(\sqrt{k^4-k^2+1} - k^2 + 1 \right) K \right],
\end{aligned}$$

o que garante que

$$\frac{\partial}{\partial k} (\eta_1 \eta_2 \eta_3) > 0, \quad (3.123)$$

pois,

$$\left(\sqrt{k^4 - k^2 + 1} - 2k^2 + 1 \right) E - (1 - k^2) \left(\sqrt{k^4 - k^2 + 1} - k^2 + 1 \right) K < 0, \quad \forall k \in (0, 1).$$

Notemos que, em vista de (3.123) e do Teorema 3.21,

$$\frac{c^2 L}{3c^2 - 3} \cdot \frac{d}{d\omega} (k(\omega)) \cdot \frac{\partial}{\partial k} (\eta_1 \eta_2 \eta_3) < 0.$$

Finalmente, fazendo uso da igualdade (3.122), temos que

$$d''(c) < 0, \quad \forall c \in I.$$

Com base no que foi apresentado nesta seção, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 3.25. *Seja $L > \pi$. Para todo $c \in I = (0, a_0)$, onde $a_0 = \frac{\sqrt{L^2 - \pi^2}}{L}$, existe uma função φ_c , solução suave, estritamente positiva, par e periódica de período L da equação (3.47),*

$$-\varphi_c'' + (1 - c^2)\varphi_c - \varphi_c^5 = 0,$$

que é determinada pelo Teorema 3.22. Além disto, a função u_c ,

$$u_c(x, t) = e^{ict} \varphi_c(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

é uma solução onda estacionária orbitalmente instável para a equação de Klein-Gordon (3.1), conforme a Definição 3.3, $\forall c \in I$. ■

Observação 3.26. *Seja $H_e^1(\mathbb{R}) \times L_e^2(\mathbb{R}) \subset X$, onde $X := H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$,*

$$H_e^n(\mathbb{R}) = \{f \in H^n(\mathbb{R}); f \text{ é função par}\} \quad \text{e} \quad L_e^2(\mathbb{R}) = \{g \in L^2(\mathbb{R}); g \text{ é função par}\}.$$

Neste contexto, a verificação de que soluções do tipo onda solitária são orbitalmente instáveis, segundo as premissas dadas pela Definição 3.3, provém de uma combinação da teoria clássica de Sturm-Liouville com a teoria clássica de Grillakis, Shatah e Strauss.

Sejam $c \in (-1, 1)$ e

$$\varphi_c(\xi) = \pm(3 - 3c^2)^{\frac{1}{4}} \operatorname{sech}^{\frac{1}{2}}(2\sqrt{1 - c^2}\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (3.124)$$

uma função suave par, solução do tipo onda solitária à equação (3.47). Notemos que a função φ_c não tem alternância de sinal, isto é, temos que $\varphi_c(\xi) > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}$ ou temos que $\varphi_c(\xi) < 0, \forall \xi \in \mathbb{R}$. Além disto, a função φ_c' admite exatamente uma raiz - o número

0. Pela Teoria de Sturm-Liouville, como φ'_c é uma autofunção associada ao autovalor 0 do operador $\mathcal{L}_{1,\varphi_c} : H^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, segue que 0 é um autovalor simples deste operador e $\mathcal{L}_{1,\varphi_c} : H^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ admite exatamente um autovalor estritamente negativo, o qual também é simples. Como a autofunção associada ao autovalor de ordenação 0 é par, segue que o operador $\mathcal{L}_{1,\varphi_c} : H_e^2(\mathbb{R}) \rightarrow L_e^2(\mathbb{R})$ admite um único autovalor estritamente negativo, o qual é simples. O número 0 não é um autovalor deste último operador, pois, $\ker(\mathcal{L}_{1,\varphi_c}) = \text{span}\{\varphi'_c\}$ e φ'_c não é uma função par. Em vista disto, o operador

$$\mathcal{L}_{Re,\varphi_c} : H_e^2(\mathbb{R}) \times L_e^2(\mathbb{R}) \rightarrow L_e^2(\mathbb{R}) \times L_e^2(\mathbb{R})$$

admite exatamente um autovalor estritamente negativo, o qual é simples, e 0 não é um autovalor para este operador. Por sua vez, devido à não alternância de sinal, como φ_c é uma autofunção associada ao autovalor 0 do operador $\mathcal{L}_{2,\varphi_c} : H^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, segue que o operador $\mathcal{L}_{2,\varphi_c} : H^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ não admite autovalores estritamente negativos e 0 é, portanto, um autovalor simples. As mesmas considerações valem para o operador

$$\mathcal{L}_{Im,\varphi_c} : H_e^2(\mathbb{R}) \times L_e^2(\mathbb{R}) \rightarrow L_e^2(\mathbb{R}) \times L_e^2(\mathbb{R}).$$

Concluimos, portanto, que o operador $\mathcal{L}_{\varphi_c} : [H_e^2(\mathbb{R}) \times L_e^2(\mathbb{R})]^2 \rightarrow [L_e^2(\mathbb{R})]^4$ admite exatamente um autovalor estritamente negativo, o qual é simples, e 0 é também um autovalor simples associado a este operador. Além disto, no caso das ondas solitárias, temos que a constante B_{φ_c} é identicamente nula e usando uma argumentação similar a feita no caso das ondas periódicas, ver (3.122), segue que

$$d''(c) = -\|\varphi_c\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < 0, \quad \forall c \in (-1, 1),$$

o que implica, pela Teoria de Grillakis, Shatah e Strauss, que as funções determinadas em (3.124) estão associadas a soluções da equação de Klein-Gordon (3.1) que são ondas estacionárias orbitalmente instáveis no contexto da Definição 3.3.

Capítulo 4

Estabilidade Orbital de Soluções do tipo Onda Estacionária Periódica para a Equação de Schrödinger Logarítmica

Seja a equação de Schrödinger Logarítmica

$$iu_t + u_{xx} + \log(|u|^p)u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

onde $p \in \mathbb{N}$ está fixado. O objetivo deste capítulo é fazer o estudo da estabilidade orbital de soluções do tipo onda estacionária periódica para a equação (4.1). Em um primeiro momento, para cada $T > 0$, deduziremos a existência e unicidade de solução fraca para o problema de Cauchy relativo à equação (4.1). Mais que isto, mostraremos que o problema citado apresenta duas quantidades conservadas e uma dependência contínua das soluções fracas com respeito à variação da condição inicial. Em seguida, deduziremos a existência de soluções do tipo onda estacionária periódica para a equação (4.1) e, finalmente, serão exibidas condições que garantem, via procedimento clássico, a estabilidade orbital destas ondas no contexto do espaço $H_{per}^1([0, L])$.

4.1 Existência, Unicidade e Dependência Contínua de Soluções Fracas

Seja $p \in \mathbb{N}$ fixado. Sejam $L > 0$ e $T > 0$ também fixados. Suponhamos que a função $u_0 \in H_{per}^1([0, L])$. Ao longo desta seção, iremos averiguar a existência, unicidade e dependência contínua de soluções fracas para o problema de Cauchy associado à equação

de Schrödinger Logarítmica (4.1),

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} + \log(|u|^p)u = 0. \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Definição 4.1. Dizemos que a função $u : \mathbb{R} \times [-T, T] \rightarrow \mathbb{C}$ é uma solução fraca do problema (4.2) se $u \in L^\infty(-T, T; H_{per}^1([0, L]))$, $u_t \in L^\infty(-T, T; H_{per}^{-1}([0, L]))$ e se a identidade

$$i \langle u_t(\cdot, t), \phi \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} - \int_0^L \nabla u(\cdot, t) \overline{\nabla \phi} \, dx + \int_0^L u(\cdot, t) \log(|u(\cdot, t)|^p) \overline{\phi} \, dx = 0$$

for satisfeita para cada $\phi \in H_{per}^1([0, L])$ e para quase todo t no intervalo $[-T, T]$. Além disto, u deve satisfazer a condição inicial $u(\cdot, 0) = u_0$.

Em seguida, provaremos o resultado que concentra os principais objetivos desta seção.

Teorema 4.2. Existe uma função $u \in C^0([-T, T]; H_{per}^1([0, L]))$ que é a única solução fraca para o problema de Cauchy (4.2).

Além disto, existem duas constantes reais c_1 e c_2 para as quais

$$\mathcal{E}(u(\cdot, t)) := \frac{1}{2} \left[\int_0^L |u_x(\cdot, t)|^2 + \left(\frac{p}{2} - \log(|u(\cdot, t)|^p) \right) |u(\cdot, t)|^2 \, dx \right] \equiv c_1 \quad (4.3)$$

e

$$\mathcal{F}(u(\cdot, t)) := \frac{1}{2} \int_0^L |u(\cdot, t)|^2 \, dx \equiv c_2, \quad (4.4)$$

para quase todo $t \in [-T, T]$.

Finalmente, suponhamos que $\{\chi_\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}} \subset H_{per}^1([0, L])$ e que u_μ seja a solução fraca para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t}(u_\mu) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_\mu) + \log(|u_\mu|^p)u_\mu = 0. \\ u_\mu(x, 0) = \chi_\mu(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Se $\chi_\mu \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} u_0$ em $H_{per}^1([0, L])$, então,

$$u_\mu \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} u \quad \text{em } C^0([-T, T]; H_{per}^1([0, L])).$$

Demonstração. Com a finalidade de provarmos a validade do Teorema 4.2, usaremos como referência os preceitos que fundamentam o conhecido Método de Galerkin. Seguiremos ideias propostas por Cazenave e Lions, [26] e [49], respectivamente. Para facilitar a abordagem, esta demonstração será apresentada em sete etapas.

Etapa 1: Problema Aproximado

A ideia inicial é fazer a construção de uma sequência de soluções fracas para problemas aproximados a (4.2), de modo a usá-la como referência para provar a existência de uma solução fraca para o problema de Cauchy (4.2).

Seja $\gamma \in \mathbb{C}$ fixado. À princípio, consideremos o conjunto de autofunções $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ que soluciona o problema espectral

$$\begin{cases} -\partial_x^2[\omega_j] + \omega_j = \lambda_j \omega_j & \text{em } (0, L). \\ \omega_j(0) = \omega_j(L) = \gamma. \end{cases}$$

Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, redefinamos $\{\omega_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$, se necessário, de modo a garantir que

- $\{\omega_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ é um conjunto ortonormal completo em $L_{per}^2([0, L])$;
- $\{\omega_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ é um conjunto ortogonal completo em $H_{per}^1([0, L])$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, definamos $V_m := [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m]$, o subespaço gerado pelos m primeiros elementos da base $\{\omega_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$. Tratemos o problema de determinar, para cada $m \in \mathbb{N}$ e $t \in [-T, T]$, a função $u_m(t) \in V_m$,

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) \omega_j, \quad (4.6)$$

que satisfaz o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} i \langle u'_m(t), \omega_j \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} - \langle \nabla u_m(t), \nabla \omega_j \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \\ + \langle u_m(t) \log(|u_m(t)|^p), \omega_j \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} = 0, \quad j \in \{1, 2, \dots, m\}. \\ u_m(0) = u_{0m} = \sum_{j=1}^m \alpha_{jm} \omega_j \xrightarrow{m \rightarrow \infty} u_0 \text{ em } H_{per}^1([0, L]). \end{cases} \quad (4.7)$$

Fazendo uso do Teorema de Carathéodory, provaremos a seguinte afirmação:

Afirmação 1. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Existe uma função absolutamente contínua $u_m(t)$, definida conforme (4.6), que soluciona o problema (4.7). Consequentemente, sobre o intervalo $[-T, T]$, a função $u'_m(t)$ existe no sentido de Dini.*

De modo a provar a Afirmação 1, consideremos um problema equivalente a (4.7). Substituamos a igualdade (4.6) em (4.7). Temos o problema de determinar as funções g_{jm} , $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, que satisfazem

$$\begin{cases} i \sum_{\kappa=1}^m g'_{\kappa m}(t) \langle \omega_\kappa, \omega_j \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} - \sum_{\kappa=1}^m g_{\kappa m}(t) \langle \nabla \omega_\kappa, \nabla \omega_j \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \\ + \langle u_m(t) \log(|u_m(t)|^p), \omega_j \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} = 0, \\ g_{jm}(0) = \alpha_{jm}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (4.8)$$

Desenvolvendo a identidade apresentada em (4.8), esperamos que, para cada $t \in [-T, T]$,

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \langle \omega_1, \omega_1 \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} & \cdots & \langle \omega_m, \omega_1 \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \omega_1, \omega_m \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} & \cdots & \langle \omega_m, \omega_m \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g'_{1m}(t) \\ \vdots \\ g'_{mm}(t) \end{pmatrix} \\
+ \quad & i \begin{pmatrix} \langle \nabla \omega_1, \nabla \omega_1 \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} & \cdots & \langle \nabla \omega_m, \nabla \omega_1 \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \nabla \omega_1, \nabla \omega_m \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} & \cdots & \langle \nabla \omega_m, \nabla \omega_m \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{pmatrix} \\
= \quad & i \begin{pmatrix} \int_0^L u_m(t) \log(|u_m(t)|^p) \overline{\omega_1} \, dx \\ \vdots \\ \int_0^L u_m(t) \log(|u_m(t)|^p) \overline{\omega_m} \, dx \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Lembremos que o conjunto $\{\omega_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ é ortonormal no espaço $L_{per}^2([0, L])$. Disto, segue que

$$\begin{pmatrix} \langle \omega_1, \omega_1 \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} & \langle \omega_2, \omega_1 \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} & \cdots & \langle \omega_m, \omega_1 \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \\ \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} & \langle \omega_2, \omega_2 \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} & \cdots & \langle \omega_m, \omega_2 \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \omega_1, \omega_m \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} & \langle \omega_2, \omega_m \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} & \cdots & \langle \omega_m, \omega_m \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \text{Id}_m.$$

Também definamos a matriz

$$V := i \begin{pmatrix} \langle \nabla \omega_1, \nabla \omega_1 \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} & \cdots & \langle \nabla \omega_m, \nabla \omega_1 \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \nabla \omega_1, \nabla \omega_m \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} & \cdots & \langle \nabla \omega_m, \nabla \omega_m \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

e, para cada $t \in [-T, T]$, o vetor

$$Y(t) := \begin{pmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

Em seguida, definamos a função Q , $Q(\lambda) := \lambda \log(|\lambda|^p)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. Usando que

$$W := (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$$

é um vetor m -dimensional e, relacionando as informações (4.9), (4.10) e (4.11), obtemos que $u_m(t) = W \cdot Y(t)$ e segue a identidade

$$Y'(t) + VY(t) = \begin{pmatrix} i \int_0^L Q(W \cdot Y(t)) \overline{\omega_1} \, dx \\ \vdots \\ i \int_0^L Q(W \cdot Y(t)) \overline{\omega_m} \, dx \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Introduzamos a função $R : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$, cuja a lei de formação é dada por

$$R(y) := \begin{pmatrix} i \int_0^L Q(W \cdot y) \overline{\omega_1} dx \\ \vdots \\ i \int_0^L Q(W \cdot y) \overline{\omega_m} dx \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

onde $y = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{C}^m$. Associando as informações (4.12) e (4.13), vemos que o problema (4.8) pode ser tratado como

$$\begin{cases} Y'(t) + VY(t) = R(Y(t)), \\ Y(0) = y_0, \end{cases} \quad (4.14)$$

com

$$Y(0) = y_0 := \begin{pmatrix} \alpha_{1m} \\ \vdots \\ \alpha_{mm} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m. \quad (4.15)$$

Com a finalidade de aplicar o Teorema de Carathéodory para provar a Afirmação 1, estabeleçamos a função auxiliar $h : [-T, T] \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$, definida por

$$h(t, y) = R(y), \quad (4.16)$$

onde $t \in [-T, T]$ e $y = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{C}^m$. Para aplicar tal resultado, entretanto, será preciso que façamos a verificação de três condições elementares:

- (i) Para cada $y \in \mathbb{C}^m$ fixado, a função $h(t, y)$ é mensurável na variável t .
- (ii) Para quase todo $t \in [-T, T]$ fixado, $h(t, y)$ é uma função contínua na variável y .
- (iii) Para cada compacto $U \subset [-T, T] \times \mathbb{C}^m$, existe uma função $m_U(t)$ que é integrável e tal que

$$\|h(t, y)\|_{\mathbb{C}^m} \leq m_U(t), \quad \forall (t, y) \in U.$$

Em um primeiro momento, notemos que a função h , definida em (4.16), independe da variável t . Logo, para cada $y \in \mathbb{C}^m$ fixado, a função $h(t, y)$ é mensurável na variável t . Isto prova o item (i) acima listado.

Em seguida, consideremos $\{y_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^m$ uma sequência tal que $y_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} y$ em \mathbb{C}^m . Obviamente,

$$W \cdot y_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} W \cdot y \text{ em } H_{per}^1([0, L]) \hookrightarrow L_{per}^\infty([0, L]).$$

Isto é suficiente para garantir que, em vista da continuidade da função Q , para cada $j \in \{1, 2, \dots, m\}$,

$$(W(x) \cdot y_\nu) \log(|W(x) \cdot y_\nu|^p \overline{\omega_j(x)}) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} (W(x) \cdot y) \log(|W(x) \cdot y|^p \overline{\omega_j(x)}) \text{ em } \mathbb{C},$$

para quase todo $x \in [0, L]$.

Suponhamos que $y_\nu = (y_\nu^1, y_\nu^2, \dots, y_\nu^m)$. Notemos que, pelo fato de a sequência $\{y_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ ser convergente em \mathbb{C}^m , existe uma constante $\tilde{k}_1 > 0$, de tal modo que, para quase todo $x \in [0, L]$,

$$|W(x) \cdot y_\nu| = \left| \sum_{j=1}^m y_\nu^j \omega_j(x) \right| \leq \sum_{j=1}^m |y_\nu^j| \sup_{k \in \{1, \dots, m\}} [\|\omega_k\|_{L_{per}^\infty}] \leq \tilde{k}_1, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Logo, usando a continuidade da função Q , obtemos a existência de uma constante $k_2 > 0$, de tal maneira que se $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, então,

$$|(W(x) \cdot y_\nu) \log(|W(x) \cdot y_\nu|^p \overline{\omega_j(x)})| \leq |Q(W(x) \cdot y_\nu)| \left[\sup_{k \in \{1, \dots, m\}} [\|\omega_k\|_{L_{per}^\infty}] \right] \leq k_2, \quad \forall \nu \in \mathbb{N},$$

para quase todo $x \in [0, L]$. Além disto, para cada $j \in \{1, 2, \dots, m\}$,

$$\int_0^L |(W(x) \cdot y_\nu) \log(|W(x) \cdot y_\nu|^p \overline{\omega_j(x)})| dx \leq k_2 L, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}. \quad (4.17)$$

A desigualdade vista em (4.17) permite a aplicação do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que garante que, para cada $j \in \{1, 2, \dots, m\}$,

$$i \int_0^L Q(W \cdot y_\nu) \overline{\omega_j} dx \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} i \int_0^L Q(W \cdot y) \overline{\omega_j} dx \quad \text{em } \mathbb{C}$$

e, portanto,

$$R(y_\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} R(y) \quad \text{em } \mathbb{C}^m. \quad (4.18)$$

Por sua vez, a convergência apresentada em (4.18) é suficiente para garantir que, para cada $t \in [-T, T]$ fixado,

$$h(t, y_\nu) \longrightarrow h(t, y) \quad \text{em } \mathbb{C}^m \quad \text{sempre que } y_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} y \quad \text{em } \mathbb{C}^m.$$

Isto conclui a verificação do item (ii).

Finalmente, assumamos que $U \subset [-T, T] \times \mathbb{C}^m$ seja um conjunto compacto. Conforme a verificação (4.18), em vista da continuidade da função R , existe uma constante $k_3 > 0$ tal que

$$\|h(t, y)\|_{\mathbb{C}^m} = \|R(y)\|_{\mathbb{C}^m} \leq k_3, \quad \forall (t, y) \in U. \quad (4.19)$$

Como toda função constante é integrável, a relação vista em (4.19) conclui a validade do item (iii) acima estabelecido.

Atendidas as condições de Carathéodory (i), (ii) e (iii), temos a existência de uma função $Y(t)$ que soluciona o problema de valor inicial (4.14). Tal solução é obtida para t variando sobre um intervalo $[-T_m, T_m]$, com $0 < T_m \leq T$. Além disto, $Y(t)$ é uma função absolutamente contínua e, portanto, derivável quase sempre sobre o intervalo $[-T_m, T_m]$. Tal regularidade também será herdada pelas funções do tipo $g_{jm}(t)$ e, obviamente, pelas funções do tipo $u_m(t)$. Esta consideração prova parcialmente a Afirmação 1. Para finalizar esta alegação, será preciso que obtenhamos a extensão das soluções $u_m(t)$ sobre o intervalo $[-T, T]$. Isto será possível após estipularmos uma estimativa conveniente para $\|u_m(t)\|_{L_{per}^2}^2$; estimativa esta que independe do índice m .

Etapa 2: Estimativas à Priori

O Teorema de Carathéodory garante que a função $u_m(t)$ é absolutamente contínua e que a função $u'_m(t)$ existe no sentido de Dini sobre o intervalo $[-T_m, T_m] \subset [-T, T]$. Fixemos $t \in [-T_m, T_m]$. A função $u_m(t)$ soluciona o problema (4.7). Ou seja, para cada $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, $u_m(t)$ satisfaz

$$i\langle u'_m(t), \omega_j \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} - \langle \nabla u_m(t), \nabla \omega_j \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} + \langle u_m(t) \log(|u_m(t)|^p), \omega_j \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} = 0. \quad (4.20)$$

Multipliquemos (4.20) por $\overline{g_{jm}(t)}$ e somemos sobre j . Resulta que

$$\begin{aligned} & i\langle u'_m(t), u_m(t) \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} - \langle \nabla u_m(t), \nabla u_m(t) \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} \\ & + \langle u_m(t) \log(|u_m(t)|^p), u_m(t) \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} = 0. \end{aligned}$$

Equivalentemente, temos que

$$i \int_0^L u'_m(t) \overline{u_m(t)} dx - \int_0^L |\nabla u_m(t)|^2 dx + \int_0^L \log(|u_m(t)|^p) |u_m(t)|^2 dx = 0. \quad (4.21)$$

Em seguida, consideremos o conjugado complexo da identidade apresentada em (4.20). Vemos que

$$-i \int_0^L \overline{u'_m(t)} \omega_j dx - \int_0^L \overline{\nabla u_m(t)} \nabla \omega_j dx + \int_0^L \overline{u_m(t)} \log(|u_m(t)|^p) \omega_j dx = 0. \quad (4.22)$$

Multiplicando a expressão (4.22) por $g_{jm}(t)$ e somando sobre j , obtemos que

$$-i \int_0^L \overline{u'_m(t)} u_m(t) dx - \int_0^L |\nabla u_m(t)|^2 dx + \int_0^L \log(|u_m(t)|^p) |u_m(t)|^2 dx = 0. \quad (4.23)$$

Façamos a diferença entre (4.21) e (4.23). Deste processo, resulta que

$$\frac{d}{dt} \left[i \int_0^L |u_m(t)|^2 dx \right] = i \int_0^L \left[u_m(t) \overline{u'_m(t)} + \overline{u_m(t)} u'_m(t) \right] dx = 0. \quad (4.24)$$

Como uma consequência natural de (4.24) e pelo fato de $\{\omega_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ ser um conjunto ortonormal completo no espaço $L^2_{per}([0, L])$, temos que

$$\|u_m(t)\|_{L^2_{per}}^2 = \|u_m(0)\|_{L^2_{per}}^2 = \|u_{0m}\|_{L^2_{per}}^2 \leq \|u_0\|_{L^2_{per}}^2 \leq \|u_0\|_{H^1_{per}}^2. \quad (4.25)$$

Lembremos da função $Y(t)$ definida em (4.11). Pela relação (4.25) temos que, para cada $m \in \mathbb{N}$ e para $t \in [-T_m, T_m]$,

$$\|Y(t)\|_{\mathbb{C}^m}^2 = \sum_{j=1}^m |g_{jm}(t)|^2 = \|u_m(t)\|_{L^2_{per}}^2 \leq \|u_0\|_{H^1_{per}}^2.$$

O Teorema 2.3 permite obter, para cada $m \in \mathbb{N}$, uma extensão da função $u_m(t)$ sobre o intervalo $[-T, T]$. Desta maneira, a prova da Afirmação 1 está finalmente concluída. Além

disto, a desigualdade apresentada em (4.25) é válida para cada t sobre o intervalo $[-T, T]$, uma vez que a mesma foi estruturada independentemente do índice m relacionado.

As próximas estimativas a serem estabelecidas estarão intimamente relacionadas à dedução da função u proposta no enunciado do Teorema 4.2.

Inicialmente, mostraremos que $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada no espaço de Sobolev $L^\infty(-T, T; H_{per}^1([0, L]))$. Seja $t \in [-T, T]$. Multipliquemos a expressão dada em (4.20) por $\overline{g'_{jm}(t)}$ e somemos sobre j . Resulta que

$$\begin{aligned} & i \langle u'_m(t), u'_m(t) \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} - \langle \nabla u_m(t), \nabla u'_m(t) \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \\ & + \langle u_m(t) \log(|u_m(t)|^p), u'_m(t) \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} = 0, \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$i \int_0^L |u'_m(t)|^2 dx - \int_0^L \nabla u_m(t) \overline{\nabla u'_m(t)} dx + \int_0^L \log(|u_m(t)|^p) u_m(t) \overline{u'_m(t)} dx = 0. \quad (4.26)$$

Multipliquemos a expressão (4.22) por $g'_{jm}(t)$ e, novamente, somemos sobre j . Logo,

$$-i \int_0^L |u'_m(t)|^2 dx - \int_0^L \overline{\nabla u_m(t)} \nabla u'_m(t) dx + \int_0^L \log(|u_m(t)|^p) \overline{u_m(t)} u'_m(t) dx = 0. \quad (4.27)$$

Somemos as expressões dadas em (4.26) e (4.27). Este procedimento garante que

$$-\frac{d}{dt} \left[\int_0^L |\nabla u_m(t)|^2 dx \right] + \frac{p}{2} \int_0^L \log(|u_m(t)|^2) \left[\overline{u_m(t)} u'_m(t) + \overline{u'_m(t)} u_m(t) \right] dx = 0. \quad (4.28)$$

Em um primeiro momento, notemos que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\int_0^L |u_m(t)|^2 \log(|u_m(t)|^2) dx \right] = \frac{d}{dt} \left[\int_0^L u_m(t) \overline{u_m(t)} \log(u_m(t) \overline{u_m(t)}) dx \right] \\ & = \int_0^L u'_m(t) \overline{u_m(t)} \log(u_m(t) \overline{u_m(t)}) dx + \int_0^L u_m(t) \overline{u'_m(t)} \log(u_m(t) \overline{u_m(t)}) dx \\ & + \int_0^L [u'_m(t) \overline{u_m(t)} + u_m(t) \overline{u'_m(t)}] dx \\ & = \int_0^L \log(|u_m(t)|^2) \left[\overline{u_m(t)} u'_m(t) + \overline{u'_m(t)} u_m(t) \right] dx + \frac{d}{dt} \left[\int_0^L |u_m(t)|^2 dx \right]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Relacionando as informações (4.28) e (4.29), temos que

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{dt} \left[\int_0^L |\nabla u_m(t)|^2 dx \right] - \frac{p}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^L |u_m(t)|^2 dx \right] \\ & + \frac{p}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left[\int_0^L \log(|u_m(t)|^2) |u_m(t)|^2 dx \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

A identidade apresentada em (4.30) é suficiente para que tenhamos

$$\begin{aligned} & \|\nabla u_m(t)\|_{L_{per}^2}^2 + \frac{p}{2}\|u_m(t)\|_{L_{per}^2}^2 - \frac{p}{2}\int_0^L |u_m(t)|^2 \log(|u_m(t)|^2) dx \\ &= \|\nabla u_{0m}\|_{L_{per}^2}^2 + \frac{p}{2}\|u_{0m}\|_{L_{per}^2}^2 - \frac{p}{2}\int_0^L |u_{0m}|^2 \log(|u_{0m}|^2) dx, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} & \|u_m(t)\|_{H_{per}^1}^2 + \left(\frac{p}{2} - 1\right)\|u_m(t)\|_{L_{per}^2}^2 - \frac{p}{2}\int_0^L |u_m(t)|^2 \log(|u_m(t)|^2) dx \\ &= \|u_{0m}\|_{H_{per}^1}^2 + \left(\frac{p}{2} - 1\right)\|u_{0m}\|_{L_{per}^2}^2 - \frac{p}{2}\int_0^L |u_{0m}|^2 \log(|u_{0m}|^2) dx. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Associemos as informações (4.25) e (4.31). Vemos que

$$\begin{aligned} \|u_m(t)\|_{H_{per}^1}^2 &= \|u_{0m}\|_{H_{per}^1}^2 - \frac{p}{2}\int_0^L |u_{0m}|^2 \log(|u_{0m}|^2) dx \\ &+ \frac{p}{2}\int_0^L |u_m(t)|^2 \log(|u_m(t)|^2) dx. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Devido ao fato de o conjunto $\{\omega_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ ser ortogonal no espaço $H_{per}^1([0, L])$, segue que

$$\|u_{0m}\|_{H_{per}^1}^2 \leq \|u_0\|_{H_{per}^1}^2. \tag{4.33}$$

Adicionalmente, $u_{0m} \in H_{per}^1([0, L]) \hookrightarrow L_{per}^\infty([0, L])$. O fato de a função $\lambda \mapsto |\lambda|^2 \log(|\lambda|^2)$ ser contínua e a limitação proposta em (4.33) garantem a existência de uma constante $k_4 > 0$, k_4 independente do índice m , de tal forma que

$$|u_{0m}(x)|^2 \log(|u_{0m}(x)|^2) \leq k_4, \quad \forall x \in [0, L]. \tag{4.34}$$

Devido à desigualdade (4.34), determinamos que

$$\left| \frac{p}{2}\int_0^L |u_{0m}|^2 \log(|u_{0m}|^2) dx \right| \leq \frac{pk_4L}{2}. \tag{4.35}$$

De modo a deduzir uma limitação conveniente para a terceira das parcelas apresentadas no lado direito da identidade proposta em (4.32), consideremos um resultado auxiliar.

Afirmção 2. *Seja a função $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada pela lei de formação*

$$\tau(0) = 0 \quad e \quad \tau(x) = x^2 \log(|x|) - x^4, \quad se \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Então, $\tau(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

A validade desta informação será garantida em etapas. Inicialmente, notemos que a função τ é par e que $\tau(0) = 0$. Seja $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Temos que $\tau(x) = x^2[\log(|x|) - x^2]$.

Se $x \in (0, 1)$, então, $\log(|x|) < 0$. Isto é suficiente para que tenhamos $\log(|x|) - x^2 < 0$ e, conseqüentemente, $\tau(x) = x^2[\log(|x|) - x^2] < 0$.

Seja $x > 1$. Definamos a função σ , onde $\sigma(x) = \log(|x|) - x^2 = \log(x) - x^2$. Vemos que $\sigma(1) = \log(1) - 1^2 = -1$ e que

$$\sigma'(x) = \frac{1}{x} - 2x = \frac{1 - 2x^2}{x} < 0.$$

Em virtude desta desigualdade, $\sigma(x) < \sigma(1) = -1 < 0$. E, conseqüentemente,

$$\tau(x) = x^2[\log(|x|) - x^2] = x^2\sigma(x) < 0.$$

Portanto, como τ é uma função par, segue que $\tau(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Em vista da Afirmação 2,

$$\int_0^L |u_m(t)|^2 \log(|u_m(t)|) dx \leq \int_0^L |u_m(t)|^4 dx. \quad (4.36)$$

A Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg determina a existência de uma constante $k_5 > 0$, k_5 independente de m , de tal modo que

$$\|u_m(t)\|_{L_{per}^4}^4 \leq k_5 \left[\|\nabla u_m(t)\|_{L_{per}^2} \|u_m(t)\|_{L_{per}^2}^3 + \|u_m(t)\|_{L_{per}^2}^4 \right]. \quad (4.37)$$

Seja $\widetilde{M} > 0$ uma constante arbitrária. Aplicando a Desigualdade de Young em (4.37), temos que

$$\begin{aligned} \|u_m(t)\|_{L_{per}^4}^4 &\leq k_5 \left[\widetilde{M}^2 \|\nabla u_m(t)\|_{L_{per}^2}^2 + \frac{1}{\widetilde{M}^2} \|u_m(t)\|_{L_{per}^2}^6 + \|u_m(t)\|_{L_{per}^2}^4 \right] \\ &\leq k_5 \left[\widetilde{M}^2 \|u_m(t)\|_{H_{per}^1}^2 + \frac{1}{\widetilde{M}^2} \|u_m(t)\|_{L_{per}^2}^6 + \|u_m(t)\|_{L_{per}^2}^4 \right]. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Redefinamos $\widetilde{M} := \frac{1}{\sqrt{2pk_5}}$. Fazendo uso das desigualdades propostas em (4.25), (4.36) e (4.38), temos que

$$\begin{aligned} \frac{p}{2} \int_0^L |u_m(t)|^2 \log(|u_m(t)|^2) dx &\leq p \|u_m(t)\|_{L_{per}^4}^4 \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_m(t)\|_{H_{per}^1}^2 + 2p^2 k_5^2 \|u_m(t)\|_{L_{per}^2}^6 + pk_5 \|u_m(t)\|_{L_{per}^2}^4 \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_m(t)\|_{H_{per}^1}^2 + \left[2p^2 k_5^2 \|u_0\|_{H_{per}^1}^6 + pk_5 \|u_0\|_{H_{per}^1}^4 \right]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Estabelecamos a constante

$$k_6 := 2 \left[2p^2 k_5^2 \|u_0\|_{H_{per}^1}^6 + pk_5 \|u_0\|_{H_{per}^1}^4 + \|u_0\|_{H_{per}^1}^2 \right] + pk_4 L.$$

Obviamente, $k_6 > 0$ independe do índice m . Relacionando as informações (4.32), (4.33), (4.35) e (4.39), determinamos que

$$\|u_m(t)\|_{H_{per}^1}^2 \leq k_6, \text{ para } t \in [-T, T].$$

Desta última relação, entendemos que

$$\|u_m\|_{L^\infty(-T, T; H_{per}^1)} \leq \sqrt{k_6}. \quad (4.40)$$

Por construção, temos que $u'_m(t) \in L_{per}^2([0, L]) \hookrightarrow H_{per}^{-1}([0, L])$, para cada $t \in [-T, T]$. O próximo passo é fazer um estudo apropriado para a limitação da sequência de funções $\{u'_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ no espaço de Sobolev $L^\infty(-T, T; H_{per}^{-1}([0, L]))$.

Seja $t \in [-T, T]$ fixado e consideremos a função $v \in H_{per}^1([0, L])$, sujeita a $\|v\|_{H_{per}^1} \leq 1$. Suponhamos que $v := v_1 + v_2$, de forma que $v_1 \in \text{span}\{\omega_\nu\}_{\nu=1}^m$ e que

$$0 = \langle v_2, \omega_\nu \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2}, \quad \forall \nu \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (4.41)$$

Em vista do problema de valor inicial apresentado em (4.7), temos a identidade

$$\langle u'_m(t), v_1 \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} + i \langle \nabla u_m(t), \nabla v_1 \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} = i \langle u_m(t) \log(|u_m(t)|^p), v_1 \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2}. \quad (4.42)$$

Por sua vez, a relação (4.41) mostra que

$$\langle u'_m(t), v_2 \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} = \sum_{j=1}^m g'_{jm}(t) \langle \omega_k, v_2 \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} = 0. \quad (4.43)$$

Combinemos as informações (4.42) e (4.43). Vemos que

$$\begin{aligned} \langle u'_m(t), v \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} &= \langle u'_m(t), v \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \\ &= -i \langle \nabla u_m(t), \nabla v_1 \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} + i \langle u_m(t) \log(|u_m(t)|^p), v_1 \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \end{aligned}$$

e, naturalmente,

$$\begin{aligned} |\langle u'_m(t), v \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1}| &\leq |\langle \nabla u_m(t), \nabla v_1 \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2}| \\ &\quad + |\langle u_m(t) \log(|u_m(t)|^p), v_1 \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2}|. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Devido à Desigualdade de Cauchy-Schwartz, à ortogonalidade do conjunto $\{\omega_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ em $H_{per}^1([0, L])$ e à verificação (4.40),

$$\begin{aligned} |\langle \nabla u_m(t), \nabla v_1 \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2}| &\leq \|\nabla u_m(t)\|_{L_{per}^2} \|\nabla v_1\|_{L_{per}^2} \leq \|u_m(t)\|_{H_{per}^1} \|v_1\|_{H_{per}^1} \\ &\leq \|u_m(t)\|_{H_{per}^1} \|v\|_{H_{per}^1} \leq \sqrt{k_6}, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Em virtude da imersão de Sobolev $H_{per}^1([0, L]) \hookrightarrow L_{per}^\infty([0, L])$ e da majoração proposta em (4.40), existe uma constante $k_7 > 0$, tal que

$$|u_m(x, t)| \leq k_7, \text{ para quase todo } (x, t) \in [0, L] \times [-T, T].$$

Esta desigualdade, em face da continuidade da função $\lambda \mapsto |\lambda|^2 |\log(|\lambda|^p)|^2$, estabelece a existência de uma constante $k_8 > 0$, de tal maneira que

$$|u_m(x, t)|^2 |\log(|u_m(x, t)|^p)|^2 \leq k_8, \quad (4.46)$$

para quase todo $(x, t) \in [0, L] \times [-T, T]$. Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwartz e a relação (4.46), vemos que, para $t \in [-T, T]$,

$$\begin{aligned} |\langle u_m(t) \log(|u_m(t)|^p), v_1 \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}}| &\leq \|u_m(t) \log(|u_m(t)|^p)\|_{L^2_{per}} \|v_1\|_{L^2_{per}} \\ &\leq \left[\int_0^L |u_m(t)|^2 |\log(|u_m(t)|^p)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \|v_1\|_{H^1_{per}} \leq \sqrt{k_8 L} \|v\|_{H^1_{per}} \leq \sqrt{k_8 L}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Finalmente, definamos a constante $k_9 := \sqrt{k_6} + \sqrt{k_8 L}$. Notemos que tal constante é independente do índice m . Combinando as relações (4.44), (4.45) e (4.47), temos que

$$|\langle u'_m(t), v \rangle_{H^{-1}_{per}, H^1_{per}}| \leq k_9,$$

para cada $t \in [-T, T]$. A arbitrariedade da função $v \in H^1_{per}([0, L])$ é suficiente para concluir que

$$\|u'_m\|_{L^\infty(-T, T; H^{-1}_{per})} \leq k_9. \quad (4.48)$$

Etapa 3: Passagem ao Limite

Em seguida, usaremos as estimativas à priori obtidas como estratégia para que consigamos garantir a existência de solução fraca para o problema (4.2).

As estimativas (4.40) e (4.48) são suficientes para determinar a existência de uma subsequência de $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, denotada pela mesma simbologia da sequência original, para qual existe uma função u tal que

$$\begin{cases} u_m \rightharpoonup u & \text{fracamente em } L^2(-T, T; H^1_{per}([0, L])), \\ u'_m \rightharpoonup u' & \text{fracamente em } L^2(-T, T; H^{-1}_{per}([0, L])), \\ u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u & \text{fraco } - \star \text{ em } L^\infty(-T, T; H^1_{per}([0, L])) \text{ e} \\ u'_m \overset{*}{\rightharpoonup} u' & \text{fraco } - \star \text{ em } L^\infty(-T, T; H^{-1}_{per}([0, L])). \end{cases} \quad (4.49)$$

Subsequentemente, faremos uso do Teorema de Aubin-Lions, ver [49]. Consideremos os espaços de Hilbert $B_0 = H^1_{per}([0, L])$, $\tilde{B} = L^2_{per}([0, L])$, $B_1 = H^{-1}_{per}([0, L])$ e denotemos $p_0 = p_1 = 2$. Devido à imersão $H^1_{per}([0, L]) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2_{per}([0, L]) \hookrightarrow H^{-1}_{per}([0, L])$, temos que

$$\mathcal{W} = \left\{ v; v \in L^2(-T, T; H^1_{per}([0, L])), v' = \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(-T, T; H^{-1}_{per}([0, L])) \right\}$$

é um espaço de Banach imerso compactamente em $L^2(-T, T; L^2_{per}([0, L]))$. Pelas verificações (4.40) e (4.48), $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada na norma de \mathcal{W} . Desta

maneira, existe uma subsequência de $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, também denotada da mesma maneira que a original, tal que

$$u_m \rightarrow u \text{ fortemente em } L^2(-T, T; L^2_{per}([0, L])). \quad (4.50)$$

Esta última informação é suficiente para garantir que

$$u_m(x, t) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} u(x, t), \text{ para quase todo } (x, t) \in [0, L] \times [-T, T].$$

Por sua vez, a continuidade da função $Q(\lambda) = \lambda \log(|\lambda|^p)$ garante que

$$|u_m(x, t) \log(|u_m(x, t)|^p) - u(x, t) \log(|u(x, t)|^p)| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \quad (4.51)$$

para quase todo $(x, t) \in [0, L] \times [-T, T]$.

Da relação (4.40) e da imersão de Sobolev $H^1_{per}([0, L]) \hookrightarrow L^\infty_{per}([0, L])$, existe uma constante $k_{10} > 0$ tal que

$$\|u_m\|_{L^\infty(-T, T; L^\infty_{per})} < k_{10}, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (4.52)$$

Tal informação, em conjunto com a continuidade da função Q e o fato de que a função $u \in L^\infty([0, L] \times [-T, T])$, garante a existência de uma constante $k_{11} > 0$ tal que, para quase todo $(x, t) \in [0, L] \times [-T, T]$,

$$|u_m(x, t) \log(|u_m(x, t)|^p) - u(x, t) \log(|u(x, t)|^p)|^2 \leq k_{11}, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (4.53)$$

Usando as premissas (4.51) e (4.53), em vista da aplicação do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{-T}^T \int_0^L |u_m(x, t) \log(|u_m(x, t)|^p) - u(x, t) \log(|u(x, t)|^p)|^2 dx dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

e, conseqüentemente,

$$u_m \log(|u_m|^p) \rightarrow u \log(|u|^p) \text{ fortemente em } L^2(-T, T; L^2_{per}([0, L])). \quad (4.54)$$

Consideremos $\theta \in \mathcal{D}(-T, T)$. À princípio, da quarta convergência proposta em (4.49), lembremos que

$$u'_m \xrightarrow{*} u' \text{ fraco-} \star \text{ em } L^\infty(-T, T; H^{-1}_{per}([0, L])).$$

Desta forma, para cada $\chi \in L^1(-T, T; H^1_{per}([0, L]))$, temos que

$$\int_{-T}^T \left[\langle u'_m(t), \chi(t) \rangle_{H^{-1}_{per}, H^1_{per}} \right] dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left[\langle u'(t), \chi(t) \rangle_{H^{-1}_{per}, H^1_{per}} \right] dt.$$

Seja $\tilde{\chi}(t) = \overline{\theta(t)} \omega_j$, onde $j \in \mathbb{N}$. Evidentemente, $\tilde{\chi} \in L^1(-T, T; H^1_{per}([0, L]))$, pois,

$$\int_{-T}^T \|\tilde{\chi}(t)\|_{H^1_{per}} dt = \int_{-T}^T |\theta(t)| \cdot \|\omega_j\|_{H^1_{per}} dt \leq 2T \|\theta\|_{L^\infty(-T, T)} \cdot \|\omega_j\|_{H^1_{per}} < +\infty.$$

Com base nas informações acima apresentadas, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-T}^T \left[\langle u'_m(t), \overline{\theta(t)} \omega_j \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \right] dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left[\langle u'(t), \overline{\theta(t)} \omega_j \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \right] dt$$

e,

$$\int_{-T}^T \left[\langle u'_m(t), \omega_j \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \right] \theta(t) dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left[\langle u'(t), \omega_j \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \right] \theta(t) dt. \quad (4.55)$$

Agora, usemos a terceira informação proposta em (4.49). Temos que

$$u_m \xrightarrow{*} u \text{ fraco-} \star \text{ em } L^\infty(-T, T; H_{per}^1([0, L])),$$

o que implica que

$$\int_{-T}^T \left[\langle u_m(t), \chi_1(t) \rangle_{H_{per}^1, H_{per}^{-1}} \right] dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left[\langle u(t), \chi_1(t) \rangle_{H_{per}^1, H_{per}^{-1}} \right] dt$$

sempre que $\chi_1 \in L^1(-T, T; H_{per}^{-1}([0, L]))$. Definamos a função $\widetilde{\chi}_1(t) := -\overline{\theta(t)} \Delta \omega_j$, onde $j \in \mathbb{N}$. Notando que $\Delta \omega_j \in H_{per}^{-1}([0, L])$, vemos que $\widetilde{\chi}_1 \in L^1(-T, T; H_{per}^{-1}([0, L]))$ e vale a convergência

$$- \int_{-T}^T \left[\langle u_m(t), \overline{\theta(t)} \Delta \omega_j \rangle_{H_{per}^1, H_{per}^{-1}} \right] dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} - \int_{-T}^T \left[\langle u(t), \overline{\theta(t)} \Delta \omega_j \rangle_{H_{per}^1, H_{per}^{-1}} \right] dt.$$

Por sua vez,

$$- \int_{-T}^T \left[\langle u_m(t), \Delta \omega_j \rangle_{H_{per}^1, H_{per}^{-1}} \right] \theta(t) dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} - \int_{-T}^T \left[\langle u(t), \Delta \omega_j \rangle_{H_{per}^1, H_{per}^{-1}} \right] \theta(t) dt$$

e, consequentemente,

$$\int_{-T}^T \left[\langle \nabla u_m(t), \nabla \omega_j \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \right] \theta(t) dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left[\langle \nabla u(t), \nabla \omega_j \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \right] \theta(t) dt. \quad (4.56)$$

Finalmente, usando a convergência forte proposta em (4.54), temos que

$$\int_{-T}^T \left[\langle u_m(t) \log(|u_m(t)|^p), \overline{\theta(t)} \omega_j \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \right] dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left[\langle u(t) \log(|u(t)|^p), \overline{\theta(t)} \omega_j \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \right] dt$$

e

$$\begin{aligned} & \int_{-T}^T \left[\langle u_m(t) \log(|u_m(t)|^p), \omega_j \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \right] \theta(t) dt \\ & \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left[\langle u(t) \log(|u(t)|^p), \omega_j \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \right] \theta(t) dt. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Por outro lado, fixemos $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, onde $m \in \mathbb{N}$. Sabemos que $u_m(t)$ e ω_j , para cada $t \in [-T, T]$, satisfazem a relação (4.20). Ou seja,

$$i \langle u'_m(t), \omega_j \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} - \langle \nabla u_m(t), \nabla \omega_j \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} + \langle u_m(t) \log(|u_m(t)|^p), \omega_j \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} = 0.$$

Multipliquemos a relação (4.20) pela função $\theta = \theta(t)$ e integremos o resultado deste produto sobre o intervalo $[-T, T]$. Segue que

$$\begin{aligned} & i \int_{-T}^T \left[\langle u'_m(t), \omega_j \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \right] \theta(t) dt - \int_{-T}^T \left[\langle \nabla u_m(t), \nabla \omega_j \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \right] \theta(t) dt \\ & + \int_{-T}^T \left[\langle u_m(t) \log(|u_m(t)|^p), \omega_j \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \right] \theta(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Façamos $m \rightarrow \infty$ na identidade (4.58). Usando as verificações (4.55), (4.56) e (4.57), temos que, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & i \int_{-T}^T \left[\langle u'(t), \omega_j \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \right] \theta(t) dt - \int_{-T}^T \left[\langle \nabla u(t), \nabla \omega_j \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \right] \theta(t) dt \\ & + \int_{-T}^T \left[\langle u(t) \log(|u(t)|^p), \omega_j \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \right] \theta(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Seja $\phi \in H_{per}^1([0, L])$. Em vista da totalidade do conjunto $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ em $H_{per}^1([0, L])$ e em $L_{per}^2([0, L])$, a relação (4.59) permite estabelecer que

$$\begin{aligned} & i \int_{-T}^T \left[\langle u'(t), \phi \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \right] \theta(t) dt - \int_{-T}^T \left[\langle \nabla u(t), \nabla \phi \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \right] \theta(t) dt \\ & + \int_{-T}^T \left[\langle u(t) \log(|u(t)|^p), \phi \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \right] \theta(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Em seguida, notemos que

$$\langle u'(\cdot), \phi \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \in L^1([-T, T]). \quad (4.61)$$

Isto é justificado, pois,

$$\int_{-T}^T |\langle u'(t), \phi \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1}| dt \leq \int_{-T}^T \|u'(t)\|_{H_{per}^{-1}} \|\phi\|_{H_{per}^1} dt \leq 2T \|\phi\|_{H_{per}^1} \|u'\|_{L^\infty(-T, T; H_{per}^{-1})} < \infty.$$

Analogamente a (4.61), observamos que

$$\langle \nabla u(\cdot), \nabla \phi \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \in L^1([-T, T]). \quad (4.62)$$

Além disto, $u \log(|u|^p) \in L^2(-T, T; L_{per}^2([0, L])) \hookrightarrow L^1(-T, T; L_{per}^2([0, L]))$. Daí,

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T |\langle u(t) \log(|u(t)|^p), \phi \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2}| dt & \leq \int_{-T}^T \|u(t) \log(|u(t)|^p)\|_{L_{per}^2} \|\phi\|_{L_{per}^2} dt \\ & \leq \|\phi\|_{L_{per}^2} \|u \log(|u|^p)\|_{L^1(-T, T; L_{per}^2)} < +\infty, \end{aligned}$$

o que indica que

$$\langle u(\cdot) \log(|u(\cdot)|^p), \phi \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \in L^1([-T, T]). \quad (4.63)$$

As informações (4.61), (4.62) e (4.63) são suficientes para determinar em (4.60) que

$$\begin{aligned} & i \left\langle \langle u'(\cdot), \phi \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1}, \theta \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} - \left\langle \langle \nabla u(\cdot), \nabla \phi \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2}, \theta \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\ & + \left\langle \langle u(\cdot) \log(|u(\cdot)|^p), \phi \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2}, \theta \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Aplicando o Lema de Du-Bois Reymond, em função da identidade (4.64), temos que

$$i \langle u'(\cdot, t), \phi \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} - \int_0^L \nabla u(\cdot, t) \overline{\nabla \phi} \, dx + \int_0^L u(\cdot, t) \log(|u(\cdot, t)|^p) \overline{\phi} \, dx = 0,$$

para quase todo t no intervalo $[-T, T]$.

Observação 4.3. *Notemos que*

$$u \in L^\infty(-T, T; H_{per}^1([0, L])) \leftrightarrow L^1(-T, T; H_{per}^1([0, L]))$$

e que

$$u_t = u' \in L^\infty(-T, T; H_{per}^{-1}([0, L])) \leftrightarrow L^1(-T, T; H_{per}^{-1}([0, L])).$$

Estas informações são suficientes para garantir que

$$u \in C^0([-T, T]; H_{per}^{-1}([0, L])) \quad (4.65)$$

e, conseqüentemente, que

$$u \in C_s(-T, T; H_{per}^1([0, L])). \quad (4.66)$$

Na seqüência, mostraremos que a função $u \in C^0([-T, T]; L_{per}^2([0, L]))$. Conforme a verificação (4.25), temos que

$$\|u_m(t)\|_{L_{per}^2}^2 = \|u_m(0)\|_{L_{per}^2}^2 = \|u_{0m}\|_{L_{per}^2}^2.$$

Da construção proposta,

$$\|u_{0m}\|_{L_{per}^2}^2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \|u_0\|_{L_{per}^2}^2. \quad (4.67)$$

Por outro lado, em vista da verificação (4.50),

$$\int_{-T}^T \|u_m(t) - u(t)\|_{L_{per}^2}^2 \, dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

onde $u \in L^\infty(-T, T; H_{per}^1([0, L]))$. Esta informação é suficiente para que tenhamos que, para quase todo $t \in [-T, T]$,

$$\|u_m(t)\|_{L_{per}^2}^2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \|u(t)\|_{L_{per}^2}^2. \quad (4.68)$$

Façamos $m \rightarrow \infty$ e relacionemos as informações (4.25), (4.67) e (4.68). Para quase todo $t \in [-T, T]$, vemos que

$$\|u(t)\|_{L_{per}^2}^2 = \|u_0\|_{L_{per}^2}^2. \quad (4.69)$$

Daí, a função $t \mapsto \|u(t)\|_{L^2_{per}}^2$ é tida como contínua sobre o intervalo $[-T, T]$.

Por outro lado, em vista de (4.66), a função $u \in C_s(-T, T; H^1_{per}([0, L]))$ e, consequentemente, $u \in C_s(-T, T; L^2_{per}([0, L]))$. Este fato, combinado com a continuidade da função $t \mapsto \|u(t)\|_{L^2_{per}}^2$, estabelece que $u \in C^0([-T, T]; L^2_{per}([0, L]))$, pois, se $t \rightarrow t_0 \in [-T, T]$, então,

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(t_0)\|_{L^2_{per}}^2 &= \|u(t)\|_{L^2_{per}}^2 - \langle u(t), u(t_0) \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} - \langle u(t_0), u(t) \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} + \|u(t_0)\|_{L^2_{per}}^2 \\ &\xrightarrow{t \rightarrow t_0} \|u(t_0)\|_{L^2_{per}}^2 - 2\langle u(t_0), u(t_0) \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} + \|u(t_0)\|_{L^2_{per}}^2 = 0. \end{aligned}$$

Etapa 4: Condição Inicial

Estamos próximos de provar que a função u é uma solução fraca para o problema de Cauchy (4.2). Falta-nos mostrar que $u(\cdot, 0) = u_0 \in H^1_{per}([0, L])$.

Consideremos que $\delta \in (0, T]$ e definamos a função auxiliar

$$\theta_\delta(t) := \begin{cases} 1 - \frac{t}{\delta}, & \text{se } 0 \leq t \leq \delta. \\ 0, & \text{se } \delta \leq t \leq T. \end{cases}$$

Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Lembremos que a função $u_m(t)$ atende à relação (4.20). Multipliquemos (4.20) por θ_δ e integremos o resultado deste produto sobre o intervalo $[0, T]$. Visto que $\theta_\delta(t) = 0$, $\forall t \in [\delta, T]$, temos que

$$\begin{aligned} &i \int_0^\delta \left[\langle u'_m(t), \omega_j \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} \right] \theta_\delta(t) dt - \int_0^\delta \left[\langle \nabla u_m(t), \nabla \omega_j \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} \right] \theta_\delta(t) dt \\ &+ \int_0^\delta \left[\langle u_m(t) \log(|u_m(t)|^p), \omega_j \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} \right] \theta_\delta(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Desta última igualdade, pelo fato que $\theta_\delta(0) = 1$ e $\theta_\delta(\delta) = 0$, via integração por partes, temos que

$$\begin{aligned} &i \left[\langle u_m(0), \omega_j \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} \right] \theta_\delta(0) + i \int_0^\delta \left[\langle u_m(t), \omega_j \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} \right] \theta'_\delta(t) dt \\ &+ \int_0^\delta \left[\langle \nabla u_m(t), \nabla \omega_j \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} \right] \theta_\delta(t) dt = \int_0^\delta \left[\langle u_m(t) \log(|u_m(t)|^p), \omega_j \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} \right] \theta_\delta(t) dt. \end{aligned} \tag{4.70}$$

Conforme a construção apresentada, entendemos que $u_m(0) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} u_0$ em $H^1_{per}([0, L])$. Isto indica que

$$\left[\langle u_m(0), \omega_j \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} \right] \theta_\delta(0) = \langle u_m(0), \omega_j \rangle_{H^1_{per}, H^{-1}_{per}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \langle u_0, \omega_j \rangle_{H^1_{per}, H^{-1}_{per}}. \tag{4.71}$$

A função $\theta_\delta \in H^1([0, T])$, por sua vez, está sujeita a

$$\theta'_\delta(t) = \begin{cases} -\frac{1}{\delta}, & \text{se } 0 < t < \delta. \\ 0, & \text{se } \delta < t < T. \end{cases} \quad (4.72)$$

Definamos a função auxiliar

$$\Theta_\delta(t) := \begin{cases} 0, & \text{se } t \in [-T, 0] \cup [\delta, T]. \\ \theta'_\delta(t) = -\frac{1}{\delta}, & \text{se } t \in (0, \delta). \end{cases}$$

Seguindo o padrão já detalhado no decorrer da Etapa 3, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, deduzimos que $\Theta_\delta(\cdot)\omega_j \in L^1(-T, T; H^1_{per}([0, L]))$. Em vista da terceira convergência proposta em (4.49), temos que

$$u_m \xrightarrow{\star} u \text{ fraco } - \star \text{ em } L^\infty(-T, T; H^1_{per}([0, L])).$$

Disto, segue que

$$\int_{-T}^T \left[\langle u_m(t), \Theta_\delta(t)\omega_j \rangle_{H^1_{per}, H^1_{per}} \right] dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left[\langle u(t), \Theta_\delta(t)\omega_j \rangle_{H^1_{per}, H^1_{per}} \right] dt,$$

donde

$$\int_0^\delta \left[\langle u_m(t), \omega_j \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} \right] \theta'_\delta(t) dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_0^\delta \left[\langle u(t), \omega_j \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} \right] \theta'_\delta(t) dt. \quad (4.73)$$

Em seguida, definamos uma outra função auxiliar. Seja

$$\widetilde{\Theta}_\delta(t) := \begin{cases} 0, & \text{se } t \in [-T, 0). \\ \theta_\delta(t), & \text{se } t \in [0, T]. \end{cases}$$

Temos que $\widetilde{\Theta}_\delta(\cdot)\omega_j \in L^2(-T, T; L^2_{per}([0, L]))$ e que $\widetilde{\Theta}_\delta(\cdot)\Delta\omega_j \in L^1(-T, T; H^{-1}_{per}([0, L]))$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Novamente usando a terceira das convergências propostas em (4.49), temos que

$$\int_{-T}^T \left[\langle u_m(t), \widetilde{\Theta}_\delta(t)\Delta\omega_j \rangle_{H^1_{per}, H^1_{per}} \right] dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left[\langle u(t), \widetilde{\Theta}_\delta(t)\Delta\omega_j \rangle_{H^1_{per}, H^1_{per}} \right] dt$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \left[\langle \nabla u_m(t), \nabla \omega_j \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} \right] \theta_\delta(t) dt &= - \int_{-T}^T \left[\langle u_m(t), \widetilde{\Theta}_\delta(t)\Delta\omega_j \rangle_{H^1_{per}, H^1_{per}} \right] dt \\ &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} - \int_{-T}^T \left[\langle u(t), \widetilde{\Theta}_\delta(t)\Delta\omega_j \rangle_{H^1_{per}, H^1_{per}} \right] dt = \int_0^\delta \left[\langle \nabla u(t), \nabla \omega_j \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} \right] \theta_\delta(t) dt. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Finalmente, devido à convergência forte proposta em (4.54), estabelecemos que

$$\begin{aligned} & \int_0^\delta \left[\langle u_m(t) \log(|u_m(t)|^p), \omega_j \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \right] \theta_\delta(t) dt \\ & \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_0^\delta \left[\langle u(t) \log(|u(t)|^p), \omega_j \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \right] \theta_\delta(t) dt. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Consideremos a identidade (4.70) e façamos $m \rightarrow \infty$. Usando a definição da função θ_δ e as relações (4.71)-(4.75), temos que, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & i \left[\langle u_0, \omega_j \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \right] - \frac{i}{\delta} \int_0^\delta \left[\langle u(t), \omega_j \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \right] dt \\ & + \int_0^\delta \left[\langle \nabla u(t), \nabla \omega_j \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \right] \left(1 - \frac{t}{\delta} \right) dt \\ & = \int_0^\delta \left[\langle u(t) \log(|u(t)|^p), \omega_j \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \right] \left(1 - \frac{t}{\delta} \right) dt. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Em seguida, façamos $\delta \rightarrow 0^+$. Da identidade (4.76) e do Teorema da Média, concluímos que

$$i \left[\langle u_0, \omega_j \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \right] - i \left[\langle u(\cdot, 0), \omega_j \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \right] = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (4.77)$$

A totalidade do conjunto $\{\omega_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ em $H_{per}^1([0, L])$ determina, em vista de (4.77), que

$$\langle u_0, \tilde{v} \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} = \langle u(\cdot, 0), \tilde{v} \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1}, \quad \forall \tilde{v} \in H_{per}^1([0, L]).$$

Portanto,

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in H_{per}^1([0, L]).$$

Etapa 5: Unicidade de Solução

Os resultados detalhados na Etapa 3 e na Etapa 4 provam que existe função u que é uma solução fraca para o problema (4.2). Nesta etapa, mostraremos que tal função é a única solução fraca para este problema.

Suponhamos que o problema (4.2) apresente duas soluções fracas: u e v . Desta maneira, $u \in L^\infty(-T, T; H_{per}^1([0, L]))$ e $u_t \in L^\infty(-T, T; H_{per}^{-1}([0, L]))$. Além disto, para quase todo $t \in [-T, T]$,

$$i \langle u_t(\cdot, t), \phi \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} - \int_0^L \nabla u(\cdot, t) \overline{\nabla \phi} dx + \int_0^L u(\cdot, t) \log(|u(\cdot, t)|^p) \overline{\phi} dx = 0,$$

$\forall \phi \in H_{per}^1([0, L])$. Também é válida a condição inicial $u(\cdot, 0) = u_0$.

De forma análoga, $v \in L^\infty(-T, T; H_{per}^1([0, L]))$ e $v_t \in L^\infty(-T, T; H_{per}^{-1}([0, L]))$. Para quase todo $t \in [-T, T]$,

$$i \langle v_t(\cdot, t), \phi \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} - \int_0^L \nabla v(\cdot, t) \overline{\nabla \phi} dx + \int_0^L v(\cdot, t) \log(|v(\cdot, t)|^p) \overline{\phi} dx = 0,$$

$\forall \phi \in H_{per}^1([0, L])$. Finalmente, $v(\cdot, 0) = u_0$.

Definamos a função $w := u - v$. Pelas informações acima fundamentadas, temos que $w \in L^\infty(-T, T; H_{per}^1([0, L]))$ e $w_t \in L^\infty(-T, T; H_{per}^{-1}([0, L]))$. Para quase todo $t \in [-T, T]$,

$$\begin{aligned} & i \langle w_t(\cdot, t), \phi \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} - \int_0^L \nabla w(\cdot, t) \overline{\nabla \phi} \, dx \\ & + \int_0^L [u(\cdot, t) \log(|u(\cdot, t)|^p) - v(\cdot, t) \log(|v(\cdot, t)|^p)] \overline{\phi} \, dx = 0, \quad \forall \phi \in H_{per}^1([0, L]). \end{aligned} \quad (4.78)$$

Complementamos que $w \in C^0([-T, T]; L_{per}^2([0, L]))$ e que

$$w(\cdot, 0) = u(\cdot, 0) - v(\cdot, 0) = u_0 - u_0 = 0. \quad (4.79)$$

Seja $s \in [-T, T]$. Notemos que a função $w(\cdot, s) \in H_{per}^1([0, L])$. Em vista da identidade (4.78), temos que

$$\begin{aligned} & i \langle w'(\cdot, s), w(\cdot, s) \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} - \int_0^L |\nabla w(\cdot, s)|^2 \, dx \\ & + \int_0^L [u(\cdot, s) \log(|u(\cdot, s)|^p) - v(\cdot, s) \log(|v(\cdot, s)|^p)] \overline{w(\cdot, s)} \, dx = 0. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Integremos a identidade (4.80) sobre o intervalo $[0, t]$, com $0 < t \leq T$. Posteriormente, consideremos a parte imaginária desta expressão. Resulta que

$$\begin{aligned} & i \int_0^t \operatorname{Re} \left[\langle w'(\cdot, s), w(\cdot, s) \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \right] \, ds \\ & = - \int_0^t \int_0^L \operatorname{Im} \left\{ [u(x, s) \log(|u(x, s)|^p) - v(x, s) \log(|v(x, s)|^p)] \overline{w(x, s)} \right\} \, dx \, ds. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Por outro lado,

$$\int_0^t \operatorname{Re} \left[\langle w'(\cdot, s), w(\cdot, s) \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \right] \, ds = \frac{1}{2} \int_0^t \left[\frac{d}{ds} \|w(\cdot, s)\|_{L_{per}^2}^2 \right] \, ds. \quad (4.82)$$

Relacionemos as premissas (4.79), (4.81) e (4.82). Segue que

$$\begin{aligned} & \|w(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 = \|w(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 - \|w(\cdot, 0)\|_{L_{per}^2}^2 = \int_0^t \left[\frac{d}{ds} \|w(\cdot, s)\|_{L_{per}^2}^2 \right] \, ds \\ & = ip \int_0^t \int_0^L \operatorname{Im} \left\{ [u(x, s) \log(|u(x, s)|^2) - v(x, s) \log(|v(x, s)|^2)] \overline{w(x, s)} \right\} \, dx \, ds \\ & \leq p \int_0^t \int_0^L \left| \operatorname{Im} \left\{ [u(x, s) \log(|u(x, s)|^2) - v(x, s) \log(|v(x, s)|^2)] \overline{w(x, s)} \right\} \right| \, dx \, ds. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Segundo Cazenave ([26], Cap. 9, Lema 9.3.5), a relação

$$\left| \operatorname{Im} \{ [\alpha_1 \log(|\alpha_1|^2) - \alpha_2 \log(|\alpha_2|^2)] \cdot [\overline{\alpha_1} - \overline{\alpha_2}] \} \right| \leq 4|\alpha_1 - \alpha_2|^2$$

é válida. Usemos esta informação na desigualdade proposta em (4.83). Vemos que

$$\|w(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 \leq 4p \int_0^t \int_0^L |w(x, s)|^2 dx ds \leq 4p \int_0^t \|w(\cdot, s)\|_{L_{per}^2}^2 ds. \quad (4.84)$$

A conhecida Desigualdade de Gronwall ([34], pg. 625) estabelece que, devido a (4.84),

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 = 0, \text{ para quase todo } t \in [0, T].$$

Este mesmo raciocínio pode ser empregado para concluirmos a unicidade de solução fraca para o problema de Cauchy (4.2) para t escolhido sobre o intervalo $[-T, 0]$.

À frente, mostraremos que a função $u \in C^0([-T, T]; H_{per}^1([0, L]))$. Isto será visto como uma consequência do estudo das quantidades conservadas associadas ao problema de Cauchy (4.2).

Etapa 6: Quantidades Conservadas

Inicialmente, mostraremos a validade da quantidade conservada (4.3).

Seja $t \in [-T, T]$. Devido à informação apresentada em (4.31), temos que

$$\begin{aligned} & \|u_m(t)\|_{H_{per}^1}^2 + \left(\frac{p}{2} - 1\right) \|u_m(t)\|_{L_{per}^2}^2 - \frac{p}{2} \int_0^L |u_m(t)|^2 \log(|u_m(t)|^2) dx \\ &= \|u_{0m}\|_{H_{per}^1}^2 + \left(\frac{p}{2} - 1\right) \|u_{0m}\|_{L_{per}^2}^2 - \frac{p}{2} \int_0^L |u_{0m}|^2 \log(|u_{0m}|^2) dx. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\mathcal{E}(u_m(t)) = \mathcal{E}(u_{0m}). \quad (4.85)$$

Consideremos uma função real auxiliar $\theta \in C^0([-T, T])$, de modo que $\theta \geq 0$. Multipliquemos a função θ em ambos os lados da expressão dada em (4.85) e integremos o resultado deste produto sobre o intervalo $[-T, T]$. Temos a igualdade

$$\int_{-T}^T \mathcal{E}(u_m(t))\theta(t) dt = \int_{-T}^T \mathcal{E}(u_{0m})\theta(t) dt. \quad (4.86)$$

Por construção, $u_{0m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} u_0$ em $H_{per}^1([0, L]) \hookrightarrow L_{per}^\infty([0, L]) \hookrightarrow L_{per}^2([0, L])$. Esta convergência é suficiente para garantir que

$$\|u_{0m}\|_{H_{per}^1}^2 + \left(\frac{p}{2} - 1\right) \|u_{0m}\|_{L_{per}^2}^2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \|u_0\|_{H_{per}^1}^2 + \left(\frac{p}{2} - 1\right) \|u_0\|_{L_{per}^2}^2. \quad (4.87)$$

Também temos que

$$|u_{0m}(x)| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} |u_0(x)|, \text{ para quase todo } x \in [0, L].$$

A continuidade da função $\lambda \mapsto |\lambda|^2 \log(|\lambda|^2)$ é suficiente para garantir que

$$|u_{0m}(x)|^2 \log(|u_{0m}(x)|^2) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} |u_0(x)|^2 \log(|u_0(x)|^2), \text{ para quase todo } x \in [0, L].$$

Devido à limitação da sequência $\{\|u_{0m}\|_{L_{per}^\infty}\}_{m \in \mathbb{N}}$, determinamos que

$$\int_0^L |u_{0m}(x)|^2 \log(|u_{0m}(x)|^2) dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_0^L |u_0(x)|^2 \log(|u_0(x)|^2) dx, \quad (4.88)$$

em razão de uma aplicação do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Das convergências (4.87) e (4.88), concluímos que $\mathcal{E}(u_{0m}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathcal{E}(u_0)$ e, conseqüentemente, que

$$\int_{-T}^T \mathcal{E}(u_{0m})\theta(t) dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \mathcal{E}(u_0)\theta(t) dt. \quad (4.89)$$

Usando a convergência (4.50), temos que

$$u_m(x, t) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} u(x, t), \text{ para quase todo } (x, t) \in [0, L] \times [-T, T],$$

o que implica que

$$\| |u_m(x, t)|^2 - |u(x, t)|^2 \| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \text{ para quase todo } (x, t) \in [0, L] \times [-T, T]. \quad (4.90)$$

Pelo fato de termos $u \in L^\infty(-T, T; H_{per}^1([0, L])) \hookrightarrow L^\infty(-T, T; L_{per}^\infty([0, L]))$ e da limitação proposta em (4.52), existe uma constante $k_{12} > 0$ de tal maneira que, para quase todo $(x, t) \in [0, L] \times [-T, T]$,

$$\| |u_m(x, t)|^2 - |u(x, t)|^2 \| \leq k_{12}, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (4.91)$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, em vista de (4.90) e (4.91), temos que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-T}^T \theta(t) \int_0^L |u_m(x, t)|^2 dx dt - \int_{-T}^T \theta(t) \int_0^L |u_m(x, t)|^2 dx dt \right| \\ & \leq \int_{-T}^T |\theta(t)| \cdot \left| \int_0^L |u_m(x, t)|^2 - |u_m(x, t)|^2 dx \right| dt \\ & \leq \|\theta\|_{L^\infty((-T, T))} \int_{-T}^T \int_0^L \| |u_m(x, t)|^2 - |u(x, t)|^2 \| dx dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left(\frac{p}{2} - 1\right) \int_{-T}^T \theta(t) \int_0^L |u_m(x, t)|^2 dx dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \left(\frac{p}{2} - 1\right) \int_{-T}^T \theta(t) \int_0^L |u(x, t)|^2 dx dt. \quad (4.92)$$

Por raciocínios similares aos usados na obtenção de (4.53) e de (4.92), deduzimos que

$$\begin{aligned} & \int_{-T}^T \theta(t) \int_0^L |u_m(x, t)|^2 \log(|u_m(x, t)|^p) dx dt \\ & \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \theta(t) \int_0^L |u(x, t)|^2 \log(|u(x, t)|^p) dx dt. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Em seguida, lembremos da primeira das convergências listadas em (4.49), isto é,

$$u_m \rightharpoonup u \text{ fracamente em } L^2(-T, T; H_{per}^1([0, L])).$$

Esta convergência indica que

$$\int_{-T}^T \langle u_m(t), \zeta(t) \rangle_{H_{per}^1, H_{per}^{-1}} dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \langle u(t), \zeta(t) \rangle_{H_{per}^1, H_{per}^{-1}} dt, \quad \forall \zeta \in L^2(-T, T; H_{per}^{-1}([0, L])).$$

Notemos que se $\zeta \in L^2(-T, T; H_{per}^{-1}([0, L]))$, então, $\sqrt{\theta}\zeta \in L^2(-T, T; H_{per}^{-1}([0, L]))$. Por este motivo, $\forall \zeta \in L^2(-T, T; H_{per}^{-1}([0, L]))$,

$$\int_{-T}^T \langle u_m(t), \sqrt{\theta(t)}\zeta(t) \rangle_{H_{per}^1, H_{per}^{-1}} dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \langle u(t), \sqrt{\theta(t)}\zeta(t) \rangle_{H_{per}^1, H_{per}^{-1}} dt$$

e isto implica que

$$\int_{-T}^T \langle \sqrt{\theta(t)}u_m(t), \zeta(t) \rangle_{H_{per}^1, H_{per}^{-1}} dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \langle \sqrt{\theta(t)}u(t), \zeta(t) \rangle_{H_{per}^1, H_{per}^{-1}} dt.$$

Logo,

$$\sqrt{\theta}u_m \rightharpoonup \sqrt{\theta}u \text{ fracamente em } L^2(-T, T; H_{per}^1([0, L])).$$

Em vista da aplicação do Lema de Fatou, temos que

$$\|\sqrt{\theta}u\|_{L^2(-T, T; H_{per}^1)} \leq \liminf_{m \in \mathbb{N}} \|\sqrt{\theta}u_m\|_{L^2(-T, T; H_{per}^1)},$$

o que, por sua vez, indica que

$$\int_{-T}^T \theta(t) \|u(t)\|_{H_{per}^1}^2 dt \leq \liminf_{m \in \mathbb{N}} \int_{-T}^T \theta(t) \|u_m(t)\|_{H_{per}^1}^2 dt. \quad (4.94)$$

Combinemos as premissas (4.92), (4.93) e (4.94). Temos que

$$\int_{-T}^T \mathcal{E}(u(\cdot, t))\theta(t) dt \leq \liminf_{m \in \mathbb{N}} \int_{-T}^T \mathcal{E}(u_m(t))\theta(t) dt. \quad (4.95)$$

Pelas informações (4.86), (4.89) e (4.95), vemos que

$$\int_{-T}^T \mathcal{E}(u(\cdot, t))\theta(t) dt \leq \int_{-T}^T \mathcal{E}(u_0)\theta(t) dt.$$

A arbitrariedade da função θ nos leva a deduzir que, para quase todo $t \in [-T, T]$,

$$\mathcal{E}(u(\cdot, t)) \leq \mathcal{E}(u_0). \quad (4.96)$$

O próximo passo mostrará que há uma igualdade na relação apresentada em (4.96). Sejam σ e τ dois elementos pertencentes ao intervalo $[-T, T]$. Definamos a condição inicial $\psi := u(\cdot, \sigma) \in H_{per}^1([0, L])$ e a função v é, para $\tilde{T} > T$ adequado, a solução fraca do problema de Cauchy

$$\begin{cases} iv_t + v_{xx} + \log(|v|^p)v = 0. \\ v(x, 0) = \psi(x) = u(x, \sigma), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.97)$$

Em virtude da unicidade de solução fraca para o problema (4.2), segue que

$$u(x, t) = v(x, t - \sigma), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [-T, T].$$

Devido à validade da relação (4.96) para a função v , temos que

$$\mathcal{E}(u(\cdot, \tau)) = \mathcal{E}(v(\cdot, \tau - \sigma)) \leq \mathcal{E}(\psi) = \mathcal{E}(u(\cdot, \sigma)). \quad (4.98)$$

Na sequência, definamos a função $\xi := u(\cdot, \tau) \in H_{per}^1([0, L])$ e w é, para $\tilde{T} > T$ conveniente, a solução fraca do problema de Cauchy

$$\begin{cases} iw_t + w_{xx} + \log(|w|^p)w = 0. \\ w(x, 0) = \xi(x) = u(x, \tau), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pelos mesmos argumentos usados no caso anterior,

$$u(x, t) = w(x, t - \tau), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [-T, T]$$

e vale a relação

$$\mathcal{E}(u(\cdot, \sigma)) = \mathcal{E}(w(\cdot, \sigma - \tau)) \leq \mathcal{E}(\xi) = \mathcal{E}(u(\cdot, \tau)). \quad (4.99)$$

Relacionemos as informações (4.98) e (4.99). Determinamos que $\mathcal{E}(u(\cdot, \tau)) = \mathcal{E}(u(\cdot, \sigma))$ e, no caso particular em que $\tau = t \in [-T, T]$ e $\sigma = 0$, concluímos que

$$\mathcal{E}(u(\cdot, t)) = \mathcal{E}(u(\cdot, 0)) = \mathcal{E}(u_0),$$

o que estabelece a validade da quantidade conservada (4.3).

Observação 4.4. *Seja $t_0 \in [-T, T]$. Devido à verificação (4.66), a função*

$$u \in C_s(-T, T; H_{per}^1([0, L])).$$

Fazendo uso do Lema de Fatou,

$$\|u(\cdot, t_0)\|_{H_{per}^1}^2 \leq \liminf_{s \rightarrow t_0} \|u(\cdot, s)\|_{H_{per}^1}^2. \quad (4.100)$$

Mais que isto, verificamos que $u \in C^0([-T, T]; L_{per}^2([0, L]))$. Tal propriedade estabelece que

$$\lim_{s \rightarrow t_0} \left| \|u(\cdot, s)\|_{L_{per}^2} - \|u(\cdot, t_0)\|_{L_{per}^2} \right| = \lim_{s \rightarrow t_0} \|u(\cdot, s) - u(\cdot, t_0)\|_{L_{per}^2} = 0 \quad (4.101)$$

e, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{s \rightarrow t_0} \int_0^L \log(|u(x, s)|^p) |u(x, s)|^2 dx = \int_0^L \log(|u(x, t_0)|^p) |u(x, t_0)|^2 dx. \quad (4.102)$$

Relacionemos as informações (4.100), (4.101) e (4.102) ao fato de que

$$\mathcal{E}(u(\cdot, t)) \equiv c_1, \quad \text{para quase todo } t \in [0, T].$$

Finalmente, fazendo uso do Lema 2.4.4, Cap. II, ref. [28], determinamos que a aplicação $t \mapsto \|u(\cdot, t)\|_{H_{per}^1}^2$ é uma função contínua sobre o intervalo $[-T, T]$. Este último fato, relacionado com a informação (4.66), estabelece que

$$u \in C^0([-T, T]; H_{per}^1([0, L])). \quad (4.103)$$

Em vista da informação (4.69), temos que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 = \|u_0\|_{L_{per}^2}^2, \text{ para quase todo } t \in [-T, T].$$

Desta maneira,

$$\mathcal{F}(u(\cdot, t)) = \mathcal{F}(u_0), \text{ para quase todo } t \in [-T, T].$$

Portanto, a quantidade conservada (4.4) também é válida.

Etapa 7: Dependência Contínua

Nesta etapa, mostraremos que há a boa colocação global para o problema de Cauchy associado à Equação de Schrödinger Logarítmica (4.1).

Inicialmente, definamos a constante

$$k_{13} := 1 + 2 \cdot \sup\{\|u(\cdot, t)\|_{H_{per}^1}; t \in [-T, T]\} > 0.$$

Tal constante está bem definida, pois, $u \in L^\infty(-T, T; H_{per}^1([0, L]))$.

Notemos que $\|u_0\|_{H_{per}^1} = \|u(\cdot, 0)\|_{H_{per}^1} < k_{13}$. Seja $\{\chi_\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}} \subset H_{per}^1([0, L])$, de tal modo que $\chi_\mu \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} u_0$ em $H_{per}^1([0, L])$. Logo, para μ suficientemente grande, temos que $\|\chi_\mu\|_{H_{per}^1} < k_{13}$.

Para dar prosseguimento à prova, recorreremos a algumas informações abordadas pelo método de Galerkin, nas Etapas 2 e 3. Seja u_μ a solução fraca do problema (4.5), associada à condição inicial χ_μ . Por construção, temos a existência de uma sequência $\{u_{\mu_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$, de tal modo que

$$u_{\mu_m} \xrightarrow{*} u_\mu \text{ fraco-} \star \text{ em } L^\infty(-T, T; H_{per}^1([0, L])) \text{ e}$$

$$u'_{\mu_m} \xrightarrow{*} u'_\mu \text{ fraco-} \star \text{ em } L^\infty(-T, T; H_{per}^{-1}([0, L])).$$

Mais que isto, existem constantes $k_{14} = k_{14}(\chi_\mu)$ e $k_{15} = k_{15}(\chi_\mu)$, de tal modo que

$$\|u_{\mu_m}\|_{L^\infty(-T, T; H_{per}^1)} \leq k_{14} \quad \text{e} \quad \|u'_{\mu_m}\|_{L^\infty(-T, T; H_{per}^{-1})} \leq k_{15}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Em vista da limitação da sequência $\{\chi_\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ em $H_{per}^1([0, L])$, as constantes k_{14} e k_{15} podem ser escolhidas de modo a serem independentes do índice μ (para mais detalhes, rever as estimativas propostas na Etapa 2). Desta maneira, para μ suficientemente grande,

$$\|u_\mu\|_{L^\infty(-T, T; H_{per}^1)} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u_{\mu_m}\|_{L^\infty(-T, T; H_{per}^1)} \leq k_{14}$$

e

$$\|u'_\mu\|_{L^\infty(-T, T; H_{per}^{-1})} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u'_{\mu_m}\|_{L^\infty(-T, T; H_{per}^{-1})} \leq k_{15}.$$

Logo, $\{u_\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^\infty(-T, T; H_{per}^1([0, L]))$. A sequência $\{u'_\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(-T, T; H_{per}^{-1}([0, L]))$.

A limitação destas sequências determina a existência de uma subsequência de $\{u_\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}}$, denotada conforme a mesma simbologia da sequência original, e existe uma função v de tal modo que

$$\begin{cases} u_\mu \rightharpoonup v \text{ fracamente em } L^2(-T, T; H_{per}^1([0, L])), \\ u'_\mu \rightharpoonup v' \text{ fracamente em } L^2(-T, T; H_{per}^{-1}([0, L])), \\ u_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} v \text{ fraco-}^* \text{ em } L^\infty(-T, T; H_{per}^1([0, L])) \text{ e} \\ u'_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} v' \text{ fraco-}^* \text{ em } L^\infty(-T, T; H_{per}^{-1}([0, L])). \end{cases}$$

Repetindo o mesmo procedimento detalhado na Etapa 3, temos que

$$\begin{cases} u_\mu \rightarrow v \text{ fortemente em } L^2(-T, T; L_{per}^2([0, L])) \text{ e} \\ u_\mu \log(|u_\mu|^p) \rightarrow v \log(|v|^p) \text{ fortemente em } L^2(-T, T; L_{per}^2([0, L])). \end{cases}$$

Além disto, $\forall \phi \in H_{per}^1([0, L])$,

$$i \langle v'(\cdot, t), \phi \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} - \int_0^L \nabla v(\cdot, t) \overline{\nabla \phi} \, dx + \int_0^L v(\cdot, t) \log(|v(\cdot, t)|^p) \overline{\phi} \, dx = 0,$$

para quase todo t no intervalo $[-T, T]$.

Um procedimento similar ao apresentado na Etapa 4 também garante que

$$v(\cdot, 0) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} u_\mu(\cdot, 0) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \chi_\mu = u_0 \in H_{per}^1([0, L]).$$

Logo, a unicidade de solução fraca para o problema de Cauchy (4.2) estabelece que $v \equiv u$.

Por outro lado, é válida a quantidade conservada (4.4). Assim, para $t \in [-T, T]$,

$$\|u_\mu(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 = \|\chi_\mu\|_{L_{per}^2}^2 \quad \text{e} \quad \|u(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 = \|u_0\|_{L_{per}^2}^2.$$

Isto implica que

$$\sup_{t \in [-T, T]} \left| \|u_\mu(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 - \|u(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 \right| = \left| \|\chi_\mu\|_{L_{per}^2}^2 - \|u_0\|_{L_{per}^2}^2 \right| \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0. \quad (4.104)$$

Fazendo uso do item (ii) da Proposição 2.1, a convergência dada em (4.104) nos leva a obter que

$$u_\mu \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} u \text{ em } C^0([-T, T]; L_{per}^2([0, L])).$$

Em seguida, afirmamos que

$$\left| \int_0^L |u_\mu(\cdot, t)|^2 \log(|u_\mu(\cdot, t)|) \, dx - \int_0^L |u(\cdot, t)|^2 \log(|u(\cdot, t)|) \, dx \right| \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0, \quad (4.105)$$

uniformemente para t sobre o intervalo $[-T, T]$.

Com efeito, definamos a função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2 \log(x)$, $\forall x > 0$. Vemos que $f'(x) = x + 2x \log(x)$, $\forall x > 0$. Em vista do Teorema do Valor Médio e do fato de a sequência $\{u_\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ ser limitada em $L^\infty(-T, T; H_{per}^1([0, L]))$ e, conseqüentemente, ser

limitada em $L^\infty(-T, T; L^\infty_{per}([0, L]))$, temos a existência de uma constante real $k_{16} > 0$, de tal forma que

$$\begin{aligned}
& \sup_{t \in [-T, T]} \left| \int_0^L |u_\mu(\cdot, t)|^2 \log(|u_\mu(\cdot, t)|) dx - \int_0^L |u(\cdot, t)|^2 \log(|u(\cdot, t)|) dx \right| \\
& \leq \sup_{t \in [-T, T]} \int_0^L \left| |u_\mu(\cdot, t)|^2 \log(|u_\mu(\cdot, t)|) - |u(\cdot, t)|^2 \log(|u(\cdot, t)|) \right| dx \\
& \leq k_{16} \left[\sup_{t \in [-T, T]} \int_0^L \left| |u_\mu(\cdot, t)| - |u(\cdot, t)| \right| dx \right] \leq k_{16} \sqrt{L} \sup_{t \in [-T, T]} \left[\int_0^L |u_\mu(\cdot, t) - u(\cdot, t)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \leq k_{16} \sqrt{L} \|u_\mu - u\|_{C^0([-T, T]; L^2_{per})} \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Ou seja, a afirmação proposta em (4.105) é válida.

Finalmente, afirmamos que

$$\sup_{t \in [-T, T]} \left| \|u_\mu(\cdot, t)\|_{H^1_{per}}^2 - \|u(\cdot, t)\|_{H^1_{per}}^2 \right| \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0. \quad (4.106)$$

Com o objetivo de provarmos este resultado, lembremos a validade da quantidade conservada (4.3). Segue que, para cada $t \in [-T, T]$,

$$\begin{aligned}
& \left| \|u_\mu(\cdot, t)\|_{H^1_{per}}^2 - \|u(\cdot, t)\|_{H^1_{per}}^2 \right| \leq 2|\mathcal{E}(\chi_\mu) - \mathcal{E}(u_0)| + \left| \frac{p}{2} - 1 \right| \cdot \left| \|u_\mu(\cdot, t)\|_{L^2_{per}}^2 - \|u(\cdot, t)\|_{L^2_{per}}^2 \right| \\
& + p \left| \int_0^L |u_\mu(\cdot, t)|^2 \log(|u_\mu(\cdot, t)|) dx - \int_0^L |u(\cdot, t)|^2 \log(|u(\cdot, t)|) dx \right|.
\end{aligned}$$

Façamos $\mu \rightarrow \infty$ na desigualdade imediatamente acima. Notando que $\mathcal{E}(\chi_\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} \mathcal{E}(u_0)$ e usando as convergências dadas em (4.104) e (4.105), temos a validade da convergência proposta em (4.106).

Como $u_\mu \in C^0([-T, T]; H^1_{per}([0, L]))$ e $\|u_\mu(\cdot, t)\|_{H^1_{per}} \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{H^1_{per}}$ uniformemente para t sobre o intervalo $[-T, T]$, vemos que, pelo item (iii) da Proposição 2.1,

$$u_\mu \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} u \text{ em } C^0([-T, T]; H^1_{per}([0, L])),$$

o que conclui a demonstração do Teorema 4.2. ■

4.2 Estabilidade Orbital de Soluções do tipo Onda Estacionária Periódica

O objetivo desta seção é fazer o estudo da estabilidade orbital de soluções do tipo onda estacionária periódica para a Equação de Schrödinger Logarítmica (4.1),

$$iu_t + u_{xx} + \log(|u|^p)u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

onde $p \in \mathbb{N}$ está fixado.

Seja $L > 0$ fixado. Em conformidade com a Definição 3.1, dizemos que a função $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma solução do tipo onda estacionária periódica de período $L > 0$ da equação (4.1) se existirem $c \in \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma função suave e periódica de período L , tais que

$$u(x, t) := e^{ict} \varphi(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (4.107)$$

soluciona (4.1) no sentido clássico.

A noção de estabilidade orbital a ser considerada também se estrutura similarmente à noção de estabilidade orbital para as ondas estacionárias periódicas que solucionam a equação de Klein-Gordon polinomial de potência quártica (3.1). A distinção encontra-se no fato de, na situação atual, tratarmos soluções fracas em vez de soluções generalizadas.

Definição 4.5. Dizemos que a solução onda estacionária periódica (4.107) da equação de Schrödinger Logarítmica (4.1) é orbitalmente estável se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se

$$u_0 \in H_{per}^1([0, L]) \text{ satisfizer } \|u_0 - \varphi\|_{H_{per}^1} < \delta,$$

então, para cada $T > 0$, a solução fraca \tilde{u} de (4.107) com $\tilde{u}(\cdot, 0) = u_0$ admite dependência contínua com relação à condição inicial sobre o espaço normado $C^0([-T, T]; H_{per}^1([0, L]))$ e a função \tilde{u} satisfaz a relação

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \inf_{\theta \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}} \|\tilde{u}(\cdot, t) - e^{i\theta} \varphi(\cdot + y)\|_{H_{per}^1} < \varepsilon.$$

Caso contrário, a onda estacionária (4.107) é dita orbitalmente instável.

Na sequência, apresentaremos algumas noções que serão úteis no desenvolvimento do estudo da existência de soluções do tipo onda estacionária periódica à equação (4.1) e, sobretudo, para a análise da estabilidade orbital das mesmas.

Inicialmente, consideremos $c \in \mathbb{R}$ e suponhamos a existência de uma função suave $\varphi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periódica de período $L > 0$, tal que

$$u_c(x, t) = e^{ict} \varphi_c(x), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (4.108)$$

seja uma solução clássica para a equação (4.1).

Substituamos a função (4.108) na equação (4.1). Para cada $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, vemos que

$$i^2 c e^{ict} \varphi_c(x) + e^{ict} \varphi_c''(x) + e^{ict} \log(|\varphi_c(x)|^p) \varphi_c(x) = 0,$$

o que implica que

$$-\varphi_c'' + c\varphi_c - \log(|\varphi_c|^p) \varphi_c = 0. \quad (4.109)$$

Entendemos que a função φ_c determina uma onda estacionária à equação (4.1) se for válida a identidade (4.109).

A equação (4.1), em conformidade com o Teorema 4.2, admite pelo menos duas quantidades conservadas, \mathcal{E} e \mathcal{F} , dadas respectivamente por (4.3) e (4.4). Usando esta mesma notação, definamos os funcionais auxiliares

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : H_{per}^1([0, L]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \tilde{u} &\mapsto \mathcal{E}(\tilde{u}) := \frac{1}{2} \int_0^L \left[|\tilde{u}_x|^2 + |\tilde{u}|^2 \left(\frac{p}{2} - \log(|\tilde{u}|^p) \right) \right] dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : H_{per}^1([0, L]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \tilde{u} &\mapsto \mathcal{F}(\tilde{u}) := \frac{1}{2} \int_0^L |\tilde{u}|^2 dx, \end{aligned}$$

lembrando que $\tilde{u} = (\operatorname{Re} \tilde{u}, \operatorname{Im} \tilde{u})$ e que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ denota o módulo do número complexo $z = x + iy = (x, y)$.

Assumamos, para efeito de análise, que $\tilde{u} \in H_{per}^1([0, L])$ seja uma função que não se anula sobre o intervalo $[0, L]$. Definindo o funcional $\mathcal{G} = \mathcal{G}_c := \mathcal{E} + c\mathcal{F}$, vemos que

$$\mathcal{G}'(\tilde{u}) = (\mathcal{E}' + c\mathcal{F}')((\operatorname{Re} \tilde{u}, \operatorname{Im} \tilde{u})) = \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}(\tilde{u}_{xx}) - \operatorname{Re}(\tilde{u}) \log(|\tilde{u}|^p) + c \operatorname{Re}(\tilde{u}) \\ -\operatorname{Im}(\tilde{u}_{xx}) - \operatorname{Im}(\tilde{u}) \log(|\tilde{u}|^p) + c \operatorname{Im}(\tilde{u}) \end{pmatrix}$$

e que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}''(\tilde{u}) &= (\mathcal{E}'' + c\mathcal{F}'')((\operatorname{Re} \tilde{u}, \operatorname{Im} \tilde{u})) \\ &= \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + c - \log(|\tilde{u}|^p) - \frac{p(\operatorname{Re}(\tilde{u}))^2}{|\tilde{u}|^2} & -\frac{p \operatorname{Re}(\tilde{u}) \operatorname{Im}(\tilde{u})}{|\tilde{u}|^2} \\ -\frac{p \operatorname{Re}(\tilde{u}) \operatorname{Im}(\tilde{u})}{|\tilde{u}|^2} & -\partial_x^2 + c - \log(|\tilde{u}|^p) - \frac{p(\operatorname{Im}(\tilde{u}))^2}{|\tilde{u}|^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Suponhamos que a função suave φ_c que satisfaz a equação (4.109) não tenha variação de sinal. Temos que o vetor $(\operatorname{Re} \varphi_c, \operatorname{Im} \varphi_c) = (\varphi_c, 0)$ é ponto crítico de $\mathcal{G} := \mathcal{E} + c\mathcal{F}$, pois,

$$\mathcal{G}'((\varphi_c, 0)) = \begin{pmatrix} -\varphi_c'' - \log(|\varphi_c|^p)\varphi_c + c\varphi_c \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Além disto, notemos que

$$\mathcal{G}''((\varphi_c, 0)) = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + c - \log(|\varphi_c|^p) - p & 0 \\ 0 & -\partial_x^2 + c - \log(|\varphi_c|^p) \end{pmatrix}.$$

Esta última identidade motiva a definição do operador \mathcal{L}_{φ_c} por $\mathcal{L}_{\varphi_c} := \mathcal{G}''(\varphi_c, 0)$. Ou seja,

$$\mathcal{L}_{\varphi_c}(\zeta) = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + c - \log(|\varphi_c|^p) - p & 0 \\ 0 & -\partial_x^2 + c - \log(|\varphi_c|^p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \zeta \\ \operatorname{Im} \zeta \end{pmatrix},$$

$\forall \zeta = (\operatorname{Re} \zeta, \operatorname{Im} \zeta) \in H_{per}^1([0, L])|_{\mathbb{R}} \times H_{per}^1([0, L])|_{\mathbb{R}}$.

O espectro do operador \mathcal{L}_{φ_c} tem grande relevância para o estudo da estabilidade orbital da onda estacionária (4.108) que soluciona a equação (4.1). Fazendo uso da relação (4.109), verificamos que os vetores $(\varphi'_c, 0)$ e $(0, \varphi_c)$ pertencem ao núcleo do operador \mathcal{L}_{φ_c} . Portanto, o número 0 é um autovalor de \mathcal{L}_{φ_c} associado às autofunções $(\varphi'_c, 0)$ e $(0, \varphi_c)$.

Consideremos os operadores auxiliares

$$\mathcal{L}_{Re, \varphi_c} = -\partial_x^2 + c - \log(|\varphi_c|^p) - p \quad (4.110)$$

e

$$\mathcal{L}_{Im, \varphi_c} = -\partial_x^2 + c - \log(|\varphi_c|^p). \quad (4.111)$$

Pelo formato “diagonal” do operador \mathcal{L}_{φ_c} , o seu conjunto de autovalores coincide com a união do conjunto de autovalores do operador $\mathcal{L}_{Re, \varphi_c}$ com o conjunto de autovalores do operador $\mathcal{L}_{Im, \varphi_c}$.

Nas subseções que serão apresentadas a seguir, verificaremos a existência de ondas estacionárias periódicas que solucionam (4.1) e mostraremos a análise espectral dos operadores $\mathcal{L}_{Re, \varphi_c}$ e $\mathcal{L}_{Im, \varphi_c}$. Por fim, usando a abordagem clássica, mostraremos que há ondas estacionárias periódicas que são soluções orbitalmente estáveis para a equação de Schrödinger Logarítmica (4.1).

4.2.1 Existência de Ondas Estacionárias Periódicas

Seja $p \in \mathbb{N}$ fixado. Consideremos que $c \in \mathbb{R}$. Nesta subseção, nos propomos a estudar a existência de soluções periódicas para a equação de Euler-Lagrange

$$-\varphi'' + h(c, \varphi) = 0, \quad (4.112)$$

onde h satisfaz $h(c, \varphi) := c\varphi - \log(|\varphi|^p)\varphi$.

Exijamos que a função φ seja estritamente positiva. Notando que a função h é suficientemente suave sobre qualquer conjunto aberto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R} \times (0, +\infty)$, temos que a equação (4.112) é conservativa e suas soluções periódicas estão contidas em curvas de nível de energia do tipo

$$\mathcal{H}(\varphi, \xi) = -\frac{\xi^2}{2} + \left(\frac{c}{2} + \frac{p}{4}\right) \varphi^2 - \frac{1}{2} \log(\varphi^p) \varphi^2,$$

onde $\varphi' = \xi$. A função H ,

$$H(c, \varphi) = \left(\frac{c}{2} + \frac{p}{4}\right) \varphi^2 - \frac{1}{2} \log(\varphi^p) \varphi^2,$$

atende, por sua vez, $\frac{\partial H}{\partial \varphi} = h$ e $\lim_{\varphi \rightarrow 0^+} H(c, \varphi) = 0$.

Fixemos $c \in \mathbb{R}$. Se p for um número par, a função $h(c, \cdot)$ admite três possíveis raízes: $-e^{\frac{c}{p}}$, 0 e $e^{\frac{c}{p}}$. Se p for um número ímpar, a função $h(c, \cdot)$ admite duas possíveis raízes: 0

e $e^{\frac{c}{p}}$. Em verdade, estamos considerando 0 como raiz de h , uma vez que, pela regra de L'Hôpital, $h(c, \varphi) \rightarrow 0$ se $\varphi \rightarrow 0^+$. Trabalhemos com as raízes consecutivas $r_1(c) = 0$ e $r_2(c) = e^{\frac{c}{p}}$. Notemos que, sobre $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$, a derivada de $h(c, \cdot)$ com respeito ao parâmetro φ , denotada por $h'(c, \varphi)$, é dada por $h'(c, \varphi) = c - p - \log(\varphi^p)$. Desta maneira, $h'\left(c, e^{\frac{c}{p}}\right) = -p < 0$ e $\lim_{\varphi \rightarrow 0^+} h'(c, \varphi) = \infty$.

A teoria clássica das EDO's garante que, para cada $c \in \mathbb{R}$, o par $(\varphi, \varphi') = \left(e^{\frac{c}{p}}, 0\right)$ caracteriza um ponto de centro para as soluções periódicas da equação (4.112). Além disto, o par $(\varphi, \varphi') = (0, 0)$ determina um ponto de sela para esta mesma conjuntura. A função

$$\varrho_c(x) = e^{\frac{1}{2} + \frac{c}{p}} e^{-\frac{px^2}{4}}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

por sua vez, é uma solução do tipo onda solitária à equação (4.112). O par (ϱ_c, ϱ'_c) caracteriza, no plano de fase, uma curva fechada C^∞ e o par $(r_2(c), 0) = \left(e^{\frac{c}{p}}, 0\right)$ encontra-se no interior da região delimitada pela curva (ϱ_c, ϱ'_c) .

Usando argumentos de continuidade, estabelecemos que $\mathcal{H}(0, 0) = 0$. Notemos também que a onda solitária ϱ_c satisfaz a identidade

$$\mathcal{H}(\varrho_c, \varrho'_c) = -\frac{(\varrho'_c)^2}{2} + \left(\frac{c}{2} + \frac{p}{4}\right) \varrho_c^2 - \frac{1}{2} \log(\varrho_c^p) \varrho_c^2 = 0 = \mathcal{H}(0, 0).$$

As informações acima relatadas remetem às condições (a1), (a2) e (a3), estudadas na Seção 2.4.3 desta tese. Assim, $\left(e^{\frac{c}{p}}, 0\right)$ é um ponto de máximo local de \mathcal{H} . Além disto, todas as soluções da equação (4.112) que, no plano de fase, estão no interior da curva C^∞ determinada por (ϱ_c, ϱ'_c) , orbitam em torno do par $\left(e^{\frac{c}{p}}, 0\right)$, são estritamente positivas e estão sujeitas à curva de nível $\mathcal{H}(\varphi, \xi) = B$, para algum B tal que

$$0 = \mathcal{H}(0, 0) < B < \mathcal{H}\left(e^{\frac{c}{p}}, 0\right) = \frac{p}{4} e^{\frac{2c}{p}}.$$

Uma exigência adicional nos permite obter a existência de funções estritamente positivas que solucionam a equação (4.112), sendo que tais funções são pares. Em verdade, usamos o fato que a teoria das EDO's garante que para cada par (α_1, α_2) no interior da região delimitada pela curva (ϱ_c, ϱ'_c) , onde $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (r_2(c), 0)$, existe φ solução periódica suave da equação (4.112), sujeita às condições iniciais $\varphi(0) = \alpha_1$ e $\varphi'(0) = \alpha_2$ e, a curva determinada por (φ, φ') situa-se no interior da região delimitada por (ϱ_c, ϱ'_c) . Pela simetria da equação (4.112), se exigirmos que

$$e^{\frac{c}{p}} = r_2(c) < \alpha_1 < \varrho_c(0) = e^{\frac{1}{2} + \frac{c}{p}} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = 0,$$

temos que φ é uma função estritamente positiva, par e satisfaz $\max_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x) = \varphi(0)$. Complementamos que é esperado que L , o período minimal desta função φ , atenda a

$$L > \beta := \frac{2\pi}{\sqrt{-h'(c, e^{\frac{c}{p}})}} = \frac{2\pi}{\sqrt{p}}.$$

De maneira similar ao que foi tratado na Seção 2.4.3, enunciamos o seguinte resultado:

Teorema 4.6. *Seja $c_0 \in \mathbb{R}$ fixado e seja $\varphi = \varphi_{c_0}$, uma função estritamente positiva e periódica de período $L = L_{c_0} > \beta$, a solução da equação (4.112) no caso em que $c = c_0$, sujeita à condição inicial $(\varphi_{c_0}(0), \varphi'_{c_0}(0)) = (\alpha_1, 0)$, onde $(\alpha_1, 0) \neq \left(e^{\frac{c_0}{p}}, 0\right)$ e o par $(\alpha_1, 0)$ encontra-se no interior da região delimitada pela curva $(\varrho_{c_0}, \varrho'_{c_0})$. Então, para cada $c \in \mathbb{R}$, existem $L_c \in (\beta, +\infty)$ e uma função φ_c , par, estritamente positiva e periódica de período L_c , que satisfaz a equação (4.109),*

$$-\varphi_c'' + c\varphi_c - \log(|\varphi_c|^p)\varphi_c = 0.$$

Mais que isto, as funções φ_c e L_c são continuamente diferenciáveis com relação à variação do parâmetro c e a aplicação $c \in \mathbb{R} \mapsto L_c \in (\beta, +\infty)$ é sobrejetora.

■

Em seguida, fazendo uso do programa *Maple 16*, verificaremos o comportamento esperado para algumas soluções pares e periódicas da equação (4.109). Inicialmente, foquemos no caso em que $p = 2$ e $c = 1$. Para obtermos uma solução estritamente positiva, periódica e par de (4.109), é suficiente que $(\varphi_c(0), \varphi'_c(0)) = (\alpha_1, 0)$ satisfaça $1,6487 < \alpha_1 < 2,7183$. Considerando $\alpha_1 = 2$, obtemos adicionalmente que $\max_{x \in \mathbb{R}} \varphi_c(x) = \varphi_c(0)$.

As Figuras 4.1 e 4.2 apresentam, respectivamente, o plano de fase e o comportamento gráfico da solução da equação

$$-\varphi'' + \varphi - \log(\varphi^2)\varphi = 0, \tag{4.113}$$

sujeita às condições iniciais $\varphi(0) = 2$ e $\varphi'(0) = 0$.

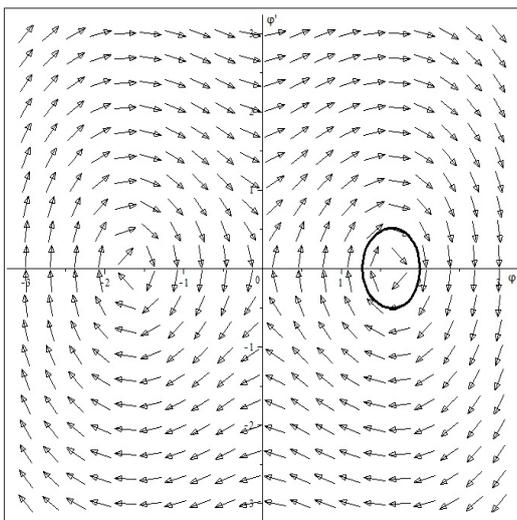


Figura 4.1: Plano de fase da equação (4.113). A curva em torno de $(e^{0,5}, 0)$ é a solução par φ de (4.113) sujeita à condição inicial $(\varphi(0), \varphi'(0)) = (2, 0)$.

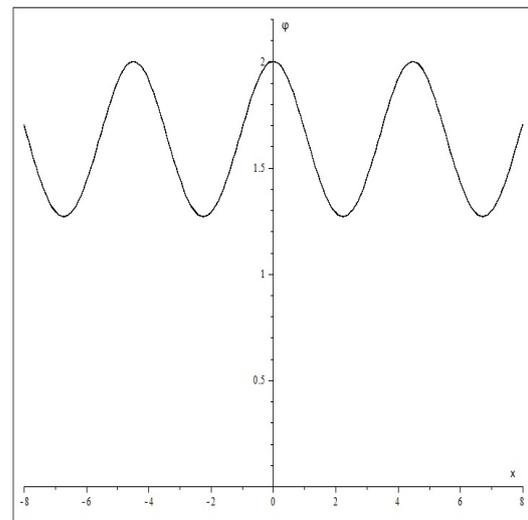


Figura 4.2: Comportamento gráfico da função par φ que soluciona (4.113) sujeita a $(\varphi(0), \varphi'(0)) = (2, 0)$.

Podemos deduzir o período minimal da função φ que soluciona a equação (4.113) e está representada graficamente na Figura 4.2. Notando que $\varphi(0) = 2$ e $\varphi'(0) = 0$, temos

$$\mathcal{H}(\varphi, \varphi') = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4}\right) \varphi(0)^2 - \frac{1}{2} \log(\varphi(0)^2) \varphi(0)^2 \approx 1,227.$$

Seja $B = 1,227$. Consideremos a equação $\mathcal{H}(\zeta, 0) = B$. Ou seja,

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4}\right) \zeta^2 - \frac{1}{2} \log(\zeta^2) \zeta^2 = 1,227. \quad (4.114)$$

A equação (4.114) apresenta duas raízes: $b_1 \approx 1,270$ e $b_2 = 2$. Além disto, assumamos a função H ,

$$H(\zeta) = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4}\right) \zeta^2 - \frac{1}{2} \log(\zeta^2) \zeta^2.$$

O período minimal da função φ que satisfaz (4.113) é dado por

$$L = 2 \int_{1,270}^2 \frac{d\zeta}{\sqrt{2H(\zeta) - 2 \cdot 1,227}} \approx 4,4807.$$

Façamos uma análise similar no caso em que $p = 4$ e $c = -1$. Para obtermos uma solução estritamente positiva, periódica e par de (4.109), é suficiente que a condição inicial $(\varphi_c(0), \varphi'_c(0)) = (\alpha_1, 0)$ satisfaça $0,7788 < \alpha_1 < 1,2840$. Consideremos $\alpha_1 = 1$.

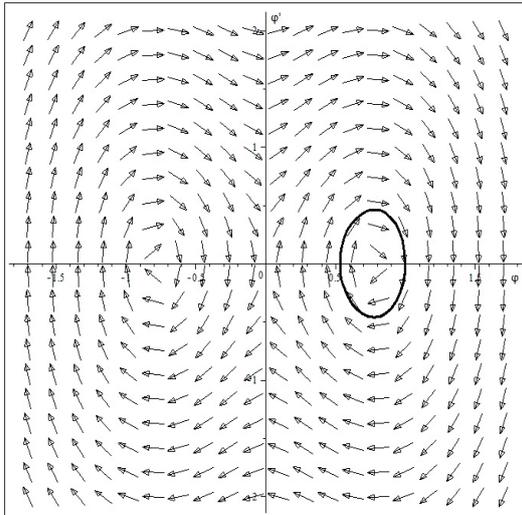


Figura 4.3: Plano de fase da equação (4.115). A curva em torno de $(e^{-0,25}, 0)$ é a solução par φ de (4.115) sujeita à condição inicial $(\varphi(0), \varphi'(0)) = (1, 0)$.

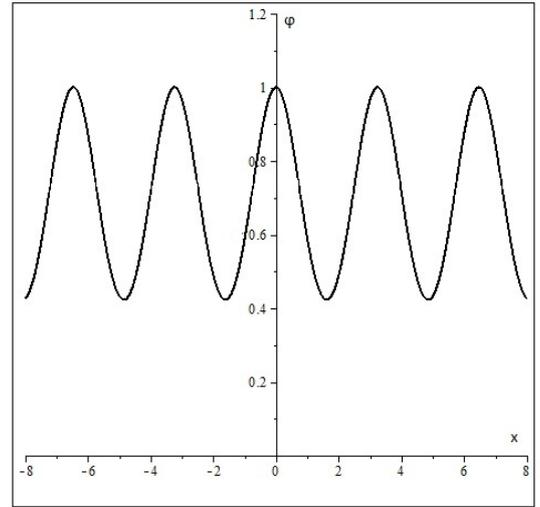


Figura 4.4: Comportamento gráfico da função par φ que soluciona (4.115) sujeita a $(\varphi(0), \varphi'(0)) = (1, 0)$.

As Figuras 4.3 e 4.4 apresentam, respectivamente, o plano de fase e o comportamento gráfico da solução da equação

$$-\varphi'' - \varphi - \log(\varphi^4) \varphi = 0 \quad (4.115)$$

sujeita às condições $\varphi(0) = 1$ e $\varphi'(0) = 0$. O período da função φ que satisfaz (4.115) e tem seu gráfico representado pela Figura 4.4 é $L \approx 3,1924$.

4.2.2 Análise Espectral

Nesta subseção, focaremos nossos esforços no caso em que o expoente $p \in \mathcal{A} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 20\}$ está fixado. Sejam $c_0 = 1, 0$ e $\varphi = \varphi_{c_0}$ uma função estritamente positiva, periódica e par, sujeita aos preceitos do Teorema 4.6. Em verdade, assumamos que $(\varphi(0), \varphi'(0)) = (\alpha_1, 0)$, onde o número $\alpha_1 \in \left(e^{\frac{1}{p}}, e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p}}\right)$. A função φ tem período minimal $L_0 = L_{c_0} > \frac{2\pi}{\sqrt{p}}$. No caso em que $p = 1$, consideremos que $\alpha_1 = 3, 0$. No caso em que $p \in \{2, 3, 4\}$, consideremos que $\alpha_1 = 2, 0$. Nas demais situações, trabalhem com $\alpha_1 = 1, 5$.

Proposição 4.7. *Suponhamos que $\{\varphi_c\}_{c \in \mathbb{R}}$ seja a família de funções L_c -periódicas estabelecida pelo Teorema 4.6. Então, para cada $c \in \mathbb{R}$, o operador $\mathcal{L}_{Re, \varphi_c}$, definido em (4.110), admite um único autovalor estritamente negativo, o qual é simples. Além disto, 0 é um autovalor simples de $\mathcal{L}_{Re, \varphi_c}$ associado à autofunção φ'_c .*

Demonstração. Seja $c \in \mathbb{R}$. Notemos que o operador

$$\mathcal{L}_{Re, \varphi_c} = -\partial_x^2 + c - \log(|\varphi_c|^p) - p = -\partial_x^2 + h'(c, \varphi_c)$$

atende à teoria detalhada na Seção 2.4.3. Desta maneira, em vista do Teorema 2.15, a família de operadores $\{\mathcal{L}_{Re, \varphi_c}\}_{c \in \mathbb{R}}$ é isonercial com respeito ao período L_c .

Vemos que, para cada $c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Re, \varphi_c} [\varphi'_c] &= -\partial_x^2 \varphi'_c + c \varphi'_c - \log(|\varphi_c|^p) \varphi'_c - p \varphi'_c \\ &= \partial_x [-\varphi''_c + c \varphi_c - \log(|\varphi_c|^p) \varphi_c] = \partial_x [0] = 0. \end{aligned}$$

Logo, 0 é um autovalor do operador $\mathcal{L}_{Re, \varphi_c}$ associado à autofunção φ'_c . Para conhecermos as propriedades espectrais dos operadores da família $\{\mathcal{L}_{Re, \varphi_c}\}_{c \in \mathbb{R}}$, estudaremos o espectro do operador $\mathcal{L}_{Re, \varphi_{c_0}}$.

Seja $\varphi = \varphi_{c_0}$ a função acima estabelecida. Lembremos que esta função é L_0 -periódica e que

$$-\varphi''_{c_0} + c_0 \varphi_{c_0} - \log(|\varphi_{c_0}|^p) \varphi_{c_0} = 0.$$

Consideremos também a função \bar{y} que satisfaz identicamente o problema

$$\begin{cases} -\bar{y}'' + [1 - p - \log(|\varphi|^p)] \bar{y} = 0 \\ \bar{y}(0) = -\frac{1}{\varphi''(0)} \\ \bar{y}'(0) = 0 \end{cases}$$

e definamos a constante

$$\theta = \frac{\bar{y}'(L_0)}{\varphi''(0)}.$$

Com auxílio do programa *Maple 16*, deduzimos a constante θ associada a φ para os variados valores de $p \in \mathcal{A}$ acima relacionados.

Valores de θ relacionados ao expoente $p \in \mathcal{A}$.								
p	$\varphi(0)$	$\varphi'(0)$	$\varphi''(0)$	$\bar{y}(0)$	L_0	$\bar{y}(L_0)$	$\bar{y}'(L_0)$	θ
1	3,0	0	-0,2958	3,3802	6,2944	3,3802	0,0878	-0,2902
2	2,0	0	-0,7726	1,2943	4,4807	1,2943	0,2340	-0,3029
3	2,0	0	-2,1589	0,4632	3,7961	0,4632	0,7899	-0,3659
4	2,0	0	-3,5452	0,2821	3,4848	0,2821	2,0958	-0,5912
5	1,5	0	-1,5410	0,6489	2,8377	0,6489	0,2188	-0,1420
6	1,5	0	-2,1492	0,4653	2,6019	0,4653	0,2623	-0,1220
8	1,5	0	-3,3656	0,2971	2,2702	0,2971	0,3184	-0,0946
10	1,5	0	-4,5820	0,2182	2,0424	0,2182	0,3508	-0,0766
20	1,5	0	-10,664	0,0938	1,4676	0,0938	0,3907	-0,0366

Por construção, a função φ' admite exatamente duas raízes no intervalo $[0, L_0)$. Usando a tabela acima, temos que $\theta < 0$, para cada $p \in \mathcal{A}$. Pelo Teorema 2.12, o operador $\mathcal{L}_{Re,\varphi} : H_{per}^2([0, L_0]) \rightarrow L_{per}^2([0, L_0])$ tem 0 como um autovalor simples e este operador apresenta um único autovalor estritamente negativo, o qual também é simples.

Como a família $\{\mathcal{L}_{Re,\varphi_c}\}_{c \in \mathbb{R}}$ é isonercial com respeito ao período L_c , segue que todos os operadores da família $\{\mathcal{L}_{Re,\varphi_c}\}_{c \in \mathbb{R}}$, independentemente do valor de $c \in \mathbb{R}$ e do período da respectiva função associada φ_c , têm 0 como um autovalor simples e admitem um único autovalor estritamente negativo, o qual é simples. ■

Observação 4.8. *Sejam $p \in \mathcal{A}$ e $c_1 > 0$ um número real. Consideremos uma função real φ_{c_1} suave, estritamente positiva, par e periódica de período $L_1 = L_{c_1}$, determinada pelo Teorema 4.6, que satisfaz*

$$-\varphi_{c_1}'' + c_1 \varphi_{c_1} - \log(|\varphi_{c_1}|^p) \varphi_{c_1} = 0.$$

Em vista de uma combinação do Teorema 2.12 com a Proposição 4.7, determinamos que $\theta \neq 0$ (constante obtida a partir do estudo de φ_{c_1}). Esta informação nos permite aplicar o Corolário 2.13 com respeito à função φ_{c_1} . Desta forma, existe uma vizinhança $V \subset (0, +\infty)$ de c_1 e existe uma família de funções $\{\phi_c\}_{c \in V}$ tal que ϕ_c é uma solução da equação (4.109), ou seja,

$$-\phi_c'' + c\phi_c - \log(|\phi_c|^p)\phi_c = 0, \quad \forall c \in V. \quad (4.116)$$

Além disto, ϕ_c é uma função par, estritamente positiva e periódica de período L_1 , a igualdade $\varphi_{c_1} = \phi_{c_1}$ é válida e a aplicação

$$c \in V \mapsto \phi_c \in H_{per,e}^2([0, L_1])$$

é suave. Finalmente, pela manutenção dos índices de inércia, os operadores da família $\{\mathcal{L}_{Re,\phi_c}\}_{c \in V}$ apresentam as mesmas propriedades espectrais requeridas pelo operador $\mathcal{L}_{Re,\varphi_{c_1}}$. Em outros termos, $In(\mathcal{L}_{Re,\varphi_{c_1}}) = In(\mathcal{L}_{Re,\phi_c})$, para todo $c \in V$.

Seja $c_2 > 0$ um outro número real e φ_{c_2} , a função L_{c_2} -periódica determinada pelo Teorema 4.6, uma solução da equação (4.109). Podemos repetir o mesmo procedimento acima detalhado e determinar a existência de uma vizinhança $\tilde{V} \subset (0, +\infty)$, que contém c_2 , e a existência de uma família $\{\xi_c\}_{c \in \tilde{V}}$, constituída por funções pares, positivas e L_{c_2} -periódicas que solucionam a equação (4.109). Complementamos que, para todo $c \in \tilde{V}$, $\text{In}(\mathcal{L}_{\text{Re}, \varphi_{c_1}}) = \text{In}(\mathcal{L}_{\text{Re}, \varphi_{c_2}}) = \text{In}(\mathcal{L}_{\text{Re}, \xi_c})$, onde $\mathcal{L}_{\text{Re}, \xi_c} := -\partial_x^2 + c - \log(|\xi_c|^p) - p$.

Observação 4.9. Nos resultados a serem enunciados, consideraremos que ϕ_c é uma função determinada em vista da Observação 4.8. Interpretamos que $\{\phi_c\}_{c \in V}$ é uma família de funções positivas, pares e L_1 -periódicas, onde $L_1 > \frac{2\pi}{\sqrt{p}}$ está fixado, que solucionam a equação (4.109). Aqui, $V \subset (0, +\infty)$.

Proposição 4.10. Suponhamos que $\{\phi_c\}_{c \in V}$ seja a família de funções L_1 -periódicas estabelecida na Observação 4.8. Então, para cada $c \in V$, o operador

$$\mathcal{L}_{\text{Im}, \phi_c} := -\partial_x^2 + c - \log(|\phi_c|^p),$$

definido conforme (4.111), não admite autovalores estritamente negativos. Além disto, 0 é um autovalor simples de $\mathcal{L}_{\text{Im}, \phi_c}$ associado à autofunção ϕ_c .

Demonstração. Seja $c \in V$. Notemos que o operador $\mathcal{L}_{\text{Im}, \phi_c} : H_{\text{per}}^2([0, L_1]) \rightarrow L_{\text{per}}^2([0, L_1])$ admite 0 como autovalor associado à autofunção ϕ_c . Isto ocorre devido a (4.116), pois,

$$\mathcal{L}_{\text{Im}, \phi_c}[\phi_c] = -\phi_c'' + c\phi_c - \log(|\phi_c|^p)\phi_c = 0.$$

Como ϕ_c é uma função periódica de período L_1 e $\phi_c > 0$ segue, pelo Teorema 2.6, que o operador $\mathcal{L}_{\text{Im}, \phi_c}$ não está associado a autovalores estritamente negativos e 0 é um autovalor simples para este operador. ■

Observação 4.11. Sejam $p \in \mathcal{A}$ e $c \in V$ em consonância com a Observação 4.8. Pelas considerações apresentadas, o operador

$$\mathcal{L}_{\phi_c} : [H_{\text{per}}^2([0, L_1])]^2 \rightarrow [L_{\text{per}}^2([0, L_1])]^2,$$

onde

$$\mathcal{L}_{\phi_c} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\text{Re}, \phi_c} & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{\text{Im}, \phi_c} \end{pmatrix},$$

admite exatamente um autovalor negativo, o qual é simples, e 0 é um autovalor de multiplicidade dois, associado às autofunções $(\phi_c', 0)$ e $(0, \phi_c)$.

4.2.3 Convexidade da função d

Seja $\{\phi_c\}_{c \in V}$ a família de funções estabelecida na Observação 4.8. Lembremos que ϕ_c é uma função par, suave, estritamente positiva e L_1 -periódica, para cada $c \in V \subset (0, +\infty)$. Além disto,

$$-\phi_c'' + c\phi_c - \log(|\phi_c|^p)\phi_c = 0, \quad \forall c \in V.$$

Por sua vez, a aplicação $c \in V \mapsto \phi_c \in H_{per,e}^2([0, L_1])$ é suave. De modo a facilitar a abordagem, denotemos $L := L_1$.

Definamos a função

$$\begin{aligned} d: V &\rightarrow \mathbb{R} \\ c &\mapsto \mathcal{E}(\phi_c) + c\mathcal{F}(\phi_c) = \mathcal{E}((\phi_c, 0)) + c\mathcal{F}((\phi_c, 0)). \end{aligned} \quad (4.117)$$

Lembrando que

$$\mathcal{G}'((\phi_c, 0)) = \mathcal{E}'((\phi_c, 0)) + c\mathcal{F}'((\phi_c, 0)) = 0,$$

temos que, para cada $c \in V$,

$$d'(c) = \mathcal{F}((\phi_c, 0)) = \frac{1}{2} \int_0^L \phi_c^2(x) \, dx.$$

Portanto, para cada $c \in V$,

$$d''(c) = \frac{1}{2} \frac{d}{dc} \left(\int_0^L \phi_c^2(x) \, dx \right).$$

O estudo da estabilidade orbital das ondas estacionárias periódicas que solucionam a equação (4.1) requer, em geral, que $d''(c) > 0$, $\forall c \in V$.

Proposição 4.12. $d''(c) > 0$, $\forall c \in V$.

Demonstração. Seja $c \in V$. Objetivamos determinar o sinal da expressão

$$d''(c) = \frac{1}{2} \frac{d}{dc} \left(\int_0^L \phi_c^2 \, dx \right).$$

Como $\phi_c > 0$, em vista da identidade (4.116), temos que

$$\phi_c'' - c\phi_c + \log(\phi_c^p)\phi_c = 0.$$

Definamos a função $\eta_c := \frac{d}{dc}(\phi_c)$. Derivemos a expressão dada em (4.116) com respeito ao parâmetro c . Segue que

$$\eta_c'' - \phi_c - c\eta_c + \log(\phi_c^p)\eta_c + p\eta_c = 0. \quad (4.118)$$

Multipliquemos a expressão (4.118) por ϕ_c e a integremos sobre o intervalo $[0, L]$. Daí,

$$\int_0^L [\eta_c'' \phi_c - \phi_c^2 - c\eta_c \phi_c + \log(\phi_c^p) \eta_c \phi_c + p\phi_c \eta_c] dx = 0$$

que, via integração por partes, resulta

$$\int_0^L [\phi_c'' \eta_c - \phi_c^2 - c\eta_c \phi_c + \log(\phi_c^p) \eta_c \phi_c + p\phi_c \eta_c] dx = 0. \quad (4.119)$$

Combinemos as expressões (4.116) e (4.119). Segue que

$$\int_0^L [-\phi_c^2 + p\phi_c \eta_c] dx = 0.$$

Logo,

$$-\int_0^L \phi_c^2 dx + p \frac{d}{dc} \left(\int_0^L \frac{\phi_c^2}{2} dx \right) = -\int_0^L \phi_c^2 dx + p \int_0^L \phi_c \eta_c dx = 0. \quad (4.120)$$

Da expressão (4.120), segue que

$$\frac{d}{dc} \left(\int_0^L \phi_c^2 dx \right) = \frac{2}{p} \int_0^L \phi_c^2 dx.$$

Portanto, para cada $c \in V$,

$$d''(c) = \frac{1}{p} \|\phi_c\|_{L_{per}^2}^2 > 0. \quad (4.121)$$

■

4.2.4 Estabilidade Orbital

Sejam $p \in \mathcal{A}$ fixado, $c \in V$ e $\{\phi_c\}_{c \in V}$ a família de funções L_1 -periódicas estabelecida na Observação 4.8. Nesta subseção, mostraremos que a função

$$u(x, t) = u_c(x, t) = e^{ict} \phi_c(x), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

é uma solução do tipo onda estacionária periódica orbitalmente estável para a equação de Schrödinger Logarítmica (4.1). Continuemos a denotar $L := L_1$. A abordagem proposta é baseada nas referências [8], [14] e [17].

Inicialmente, mostraremos propriedades mais apuradas acerca dos operadores \mathcal{L}_{Re, ϕ_c} e \mathcal{L}_{Im, ϕ_c} , definidos em conformidade com (4.110) e (4.111), respectivamente.

Em vista da Proposição 4.10, o operador \mathcal{L}_{Im, ϕ_c} definido sobre $L_{per}^2([0, L])$, com domínio $H_{per}^2([0, L])$, não admite autovalores estritamente negativos e admite 0 como um autovalor simples que está associado à função ϕ_c . Uma consequência imediata desta observação é que

$$\langle \mathcal{L}_{Im, \phi_c}[\psi], \psi \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \geq 0, \quad \forall \psi \in H_{per}^1([0, L]). \quad (4.122)$$

Proposição 4.13. *Sejam $c \in V$ e*

$$\beta := \inf \left\{ \langle \mathcal{L}_{Im, \phi_c}[\psi], \psi \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} ; \psi \in H_{per}^1([0, L]), \|\psi\|_{L_{per}^2} = 1, \int_0^L \psi \phi_c \log(\phi_c^p) dx = 0 \right\}.$$

Então, $\beta > 0$.

Demonstração. De início, em vista de (4.122), temos que $\beta \geq 0$. Suponhamos que $\beta = 0$. Daí, existe uma sequência $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset H_{per}^1([0, L])$ tal que

$$\langle \mathcal{L}_{Im, \phi_c}[\psi_j], \psi_j \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad (4.123)$$

com

$$\|\psi_j\|_{L_{per}^2} = 1 \text{ e } \langle \psi_j, \phi_c \log(\phi_c^p) \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} = 0, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Afirmamos que a sequência $\{\|\psi_j\|_{H_{per}^1}\}_{j \in \mathbb{N}}$ é limitada. Com efeito, pela convergência vista em (4.123), dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$-\varepsilon < \int_0^L [(\psi_j')^2 + c(\psi_j)^2 - \log(\phi_c^p)(\psi_j)^2] dx < \varepsilon, \forall j > N_0.$$

Esta informação é suficiente para garantir que

$$0 \leq \int_0^L [(\psi_j')^2 + (\psi_j)^2] dx \leq \varepsilon + k_{17} \int_0^L [(\psi_j)^2] dx = \varepsilon + k_{17},$$

$\forall j > N_0$, onde $k_{17} > 0$ é uma constante. Desta maneira, a afirmação de que a sequência $\{\|\psi_j\|_{H_{per}^1}\}_{j \in \mathbb{N}}$ é limitada está provada.

Logo, existe uma subsequência de $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, a ser denotada como a sequência original, e existe uma função $\psi \in H_{per}^1([0, L])$ tal que

$$\psi_j \rightharpoonup \psi \text{ fracamente em } H_{per}^1([0, L]).$$

Fazendo uso de argumentos de compacidade,

$$\|\psi\|_{L_{per}^2} = 1 \text{ e } \langle \psi, \phi_c \log(\phi_c^p) \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} = 0. \quad (4.124)$$

Além disto, pelo Lema de Fatou,

$$0 \leq \langle \mathcal{L}_{Im, \phi_c}[\psi], \psi \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \leq \liminf_{j \in \mathbb{N}} \langle \mathcal{L}_{Im, \phi_c}[\psi_j], \psi_j \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} = 0,$$

o que garante que $\beta = 0$ é atingido na função ψ . Deste modo, podemos aplicar a teoria do multiplicador de Lagrange que garante a existência de constantes a e b , de forma que

$$\mathcal{L}_{Im, \phi_c}[\psi] = a\psi + b\phi_c \log(\phi_c^p). \quad (4.125)$$

Fazendo o produto interno em $L_{per}^2([0, L])$ de (4.125) com a função ψ , segue que $a = 0$.

Por outro lado, notando que $\ker(\mathcal{L}_{Im,\phi_c}) = \text{span}\{\phi_c\}$, vemos que

$$0 = \langle \psi, \mathcal{L}_{Im,\phi_c}[\phi_c] \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} = \langle \mathcal{L}_{Im,\phi_c}[\psi], \phi_c \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} = b \langle \phi_c \log(\phi_c^p), \phi_c \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}}.$$

Como a função ϕ_c soluciona a identidade (4.116), segue que

$$\langle \phi_c \log(\phi_c^p), \phi_c \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} = \int_0^L \phi_c (-\phi_c'' + c\phi_c) dx = \int_0^L [(\phi_c')^2 + c\phi_c^2] dx > 0, \quad (4.126)$$

o que implica em $b = 0$. Usando a identidade (4.125), com $a = b = 0$, existe uma constante $k_{18} \neq 0$ tal que $\psi = k_{18} \cdot \phi_c$. Como consequência de (4.126),

$$\langle \psi, \phi_c \log(\phi_c^p) \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} \neq 0,$$

o que caracteriza uma contradição com (4.124). Logo, $\beta > 0$. ■

Em seguida, faremos uma análise similar com respeito ao operador \mathcal{L}_{Re,ϕ_c} . Segundo a Proposição 4.7 e a Observação 4.8, o operador \mathcal{L}_{Re,ϕ_c} definido sobre $L^2_{per}([0, L])$, com domínio $H^2_{per}([0, L])$, admite um único autovalor estritamente negativo e este é simples. Além disto, $\ker(\mathcal{L}_{Re,\phi_c}) = \text{span}\{\phi_c'\}$. O resultado à frente será estabelecido em vista do Lema E.1 proposto por Weinstein, ver [66].

Proposição 4.14. *Seja $c \in V$.*

1. *Se*

$$\gamma := \inf \left\{ \langle \mathcal{L}_{Re,\phi_c}[\psi], \psi \rangle_{H^{-1}_{per}, H^1_{per}} ; \psi \in H^1_{per}([0, L]), \|\psi\|_{L^2_{per}} = 1, \int_0^L \psi \phi_c dx = 0 \right\},$$

então, $\gamma = 0$.

2. *Se*

$$\zeta := \inf \left\{ \langle \mathcal{L}_{Re,\phi_c}[\psi], \psi \rangle_{H^{-1}_{per}, H^1_{per}} ; \psi \in H^1_{per}([0, L]), \|\psi\|_{L^2_{per}} = 1, \int_0^L \psi \phi_c dx = 0, \int_0^L \psi [\log(\phi_c^p) \phi_c' + p \phi_c'] dx = 0 \right\},$$

então, $\zeta > 0$.

Demonstração. 1. Pelo comportamento da função ϕ_c , que é limitada, segue que γ é finito. Notemos que

$$\langle \phi_c, \phi_c' \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} = \int_0^L \phi_c \phi_c' dx = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_{Re,\phi_c}[\phi_c'] = 0.$$

Estas informações são suficientes para garantir que $\gamma \leq 0$.

Como na prova da Proposição 4.13, existe uma sequência $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset H_{per}^1([0, L])$ tal que

$$\langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[\psi_j], \psi_j \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \gamma, \quad (4.127)$$

com

$$\|\psi_j\|_{L_{per}^2} = 1 \text{ e } \langle \psi_j, \phi_c \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Notemos que a sequência $\{\|\psi_j\|_{H_{per}^1}\}_{j \in \mathbb{N}}$ é limitada. De fato, por (4.127), dado $\varepsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall j > N_1$,

$$\gamma - \varepsilon < \int_0^L [(\psi_j')^2 + (c - p)(\psi_j)^2 - \log(\phi_c^p)(\psi_j)^2] dx < \gamma + \varepsilon.$$

Isto é suficiente para garantir que

$$0 \leq \int_0^L [(\psi_j')^2 + (\psi_j)^2] dx \leq \varepsilon + k_{19} \int_0^L [(\psi_j)^2] dx = \varepsilon + k_{19}, \quad \forall j > N_1,$$

onde $k_{19} > 0$ é uma constante.

Em vista da abordagem acima detalhada, existe uma subsequência de $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, a ser denotada da mesma maneira que a sequência original, e existe uma função $\psi \in H_{per}^1([0, L])$ tal que

$$\psi_j \rightharpoonup \psi \text{ fracamente em } H_{per}^1([0, L]).$$

Usando argumentos de compacidade,

$$\|\psi\|_{L_{per}^2} = 1 \text{ e } \langle \psi, \phi_c \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} = 0. \quad (4.128)$$

Também vemos que, pelo Lema de Fatou,

$$\gamma \leq \langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[\psi], \psi \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \leq \liminf_{j \in \mathbb{N}} \langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[\psi_j], \psi_j \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} = \gamma,$$

o que garante que γ é atingido na função ψ . Pela teoria do multiplicador de Lagrange, existem constantes a_* e b , de modo que

$$\mathcal{L}_{Re, \phi_c}[\psi] = a_*\psi + b\phi_c. \quad (4.129)$$

Em seguida, afirmamos que existe uma função suave M , tal que $\mathcal{L}_{Re, \phi_c}[M] = \phi_c$. Isto é, M satisfaz a igualdade

$$-M'' + (c - p)M - \log(\phi_c^p)M = \phi_c.$$

Com efeito, lembremos que a função ϕ_c está sujeita a

$$-\phi_c'' + c\phi_c - \log(\phi_c^p)\phi_c = 0, \quad \forall c \in V \subset (0, +\infty). \quad (4.130)$$

Derivemos a expressão (4.130) com respeito ao parâmetro c . Resulta que

$$-\left[\frac{d}{dc}(\phi_c)\right]'' + c\left[\frac{d}{dc}(\phi_c)\right] + \phi_c - \log(\phi_c^p)\frac{d}{dc}(\phi_c) - p\left[\frac{d}{dc}(\phi_c)\right] = 0.$$

Desta maneira, pelo fato de termos $\phi_c \perp \phi'_c$ no contexto do espaço $L^2_{per}([0, L])$,

$$\mathcal{L}_{Re, \phi_c}\left[\frac{d}{dc}(\phi_c)\right] = -\phi_c \quad \text{e} \quad M := \mathcal{L}_{Re, \phi_c}^{-1}[\phi_c] = -\frac{d}{dc}(\phi_c).$$

De acordo com a Proposição 4.12, $d''(c) > 0$. Esta informação é suficiente para que tenhamos

$$\langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}^{-1}[\phi_c], \phi_c \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} = -\int_0^L \phi_c \left[\frac{d}{dc}(\phi_c)\right] dx = -d''(c) < 0. \quad (4.131)$$

Adicionalmente, lembremos que o operador \mathcal{L}_{Re, ϕ_c} apresenta exatamente um autovalor estritamente negativo e este é simples. Este autovalor é o número inteiro $-p$ e está associado à autofunção ϕ_c , pois, devido a (4.130),

$$\mathcal{L}_{Re, \phi_c}[\phi_c] = -\phi_c'' + c\phi_c - \log(\phi_c^p)\phi_c - p\phi_c = -p\phi_c.$$

No início desta demonstração, mencionamos que $\gamma \leq 0$. Entretanto, como $-p$ é o único autovalor estritamente negativo do operador \mathcal{L}_{Re, ϕ_c} , é previamente sabido que $\gamma \geq -p$. Assim, $\gamma \in [-p, 0]$. Afirmamos que $\gamma \notin [-p, 0)$.

Com a finalidade de provarmos esta última afirmação, retomemos à identidade (4.129). Fazendo o produto interno em $L^2_{per}([0, L])$ da identidade dada em (4.129) com a função ψ , segue da relação (4.128) que

$$a_* = \langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[\psi], \psi \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}}.$$

Ou seja, $\gamma = a_*$.

Suponhamos que $a_* = -p$. Pelo produto interno em $L^2_{per}([0, L])$ da relação (4.129) com a função $-p\phi_c$, temos que

$$\begin{aligned} -p \langle \psi, \phi_c \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} &= \langle \psi, \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[\phi_c] \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} = \langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[\psi], \phi_c \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} \\ &= a_* \langle \psi, \phi_c \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} + b \langle \phi_c, \phi_c \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}}. \end{aligned}$$

Isto implica que $b \langle \phi_c, \phi_c \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} = 0$ e, como

$$\langle \phi_c, \phi_c \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} = \int_0^L [\phi_c(x)]^2 dx \neq 0,$$

segue que $b = 0$. Desta maneira, em vista de (4.129),

$$\mathcal{L}_{Re, \phi_c}[\psi] = -p\psi \quad \text{e} \quad \psi = k_{20} \cdot \phi_c,$$

onde $k_{20} \neq 0$ é uma constante. Isto contradiz (4.128), pois,

$$\langle \psi, \phi_c \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} = k_{20} \langle \phi_c, \phi_c \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} \neq 0.$$

Logo, $a_* \neq -p$.

Suponhamos, em seguida, que $\gamma = a_* \in (-p, 0)$. Pela identidade (4.129) e pelo fato de \mathcal{L}_{Re, ϕ_c} admitir um único autovalor estritamente negativo, segue a identidade

$$\psi = b(\mathcal{L}_{Re, \phi_c} - a_* I)^{-1}[\phi_c]. \quad (4.132)$$

As relações (4.128) e (4.132) garantem que $b \neq 0$.

Seja $a \in (-p, 0)$. Definamos a função g , onde

$$g(a) = \langle (\mathcal{L}_{Re, \phi_c} - aI)^{-1}[\phi_c], \phi_c \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}}.$$

Por conta de (4.128) e (4.132), também vemos que

$$g(a_*) = \langle (\mathcal{L}_{Re, \phi_c} - a_* I)^{-1}[\phi_c], \phi_c \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} = 0.$$

O operador \mathcal{L}_{Re, ϕ_c} é autoadjunto, portanto, \mathcal{L}_{Re, ϕ_c} é um operador fechado. Desta forma, a identidade

$$\frac{d}{da} (\mathcal{L}_{Re, \phi_c} - aI)^{-1} = (\mathcal{L}_{Re, \phi_c} - aI)^{-2}, \quad \forall a \in (-p, 0),$$

é válida uniformemente. Além disto, $\forall a \in (-p, 0)$,

$$\begin{aligned} g'(a) &= \langle (\mathcal{L}_{Re, \phi_c} - aI)^{-2}[\phi_c], \phi_c \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} \\ &= \langle (\mathcal{L}_{Re, \phi_c} - aI)^{-1}[\phi_c], (\mathcal{L}_{Re, \phi_c} - aI)^{-1}[\phi_c] \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} = \|(\mathcal{L}_{Re, \phi_c} - aI)^{-1}[\phi_c]\|_{L^2_{per}}^2 > 0. \end{aligned}$$

Sabendo, por (4.131), que

$$g(0) = \langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}^{-1}[\phi_c], \phi_c \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} < 0,$$

temos que $g(a) \neq 0, \forall a \in (-p, 0)$. Isto é suficiente para garantir que $a_* \notin (-p, 0)$, o que conclui a primeira parte da proposição. Portanto, $\gamma = a_* = 0$.

2. Em virtude da primeira parte da proposição, temos que $\zeta \geq 0$. Suponhamos que $\zeta = 0$. Pelo mesmo procedimento feito na parte anterior, podemos determinar uma função $\psi \in H^1_{per}([0, L])$, tal que

$$\langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[\psi], \psi \rangle_{H^{-1}_{per}, H^1_{per}} = 0, \quad (4.133)$$

com

$$\|\psi\|_{L^2_{per}} = 1, \quad \langle \psi, \phi_c \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} = 0 \quad \text{e} \quad \langle \psi, \log(\phi_c^p) \phi_c' + p \phi_c' \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} = 0. \quad (4.134)$$

Pela teoria do multiplicador de Lagrange, existem constantes b_1 , b_2 e b_3 de tal modo que

$$\mathcal{L}_{Re, \phi_c}[\psi] = b_1 \cdot \psi + b_2 \cdot \phi_c + b_3 \cdot [\log(\phi_c^p)\phi_c' + p\phi_c']. \quad (4.135)$$

Do produto interno em $L_{per}^2([0, L])$ entre a expressão (4.135) e a função ψ , segue que, devido a (4.133) e (4.134), $b_1 = 0$. Em seguida, vemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \psi, \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[\phi_c'] \rangle_{H_{per}^1, H_{per}^{-1}} = \langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[\psi], \phi_c' \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \\ &= b_2 \langle \phi_c, \phi_c' \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} + b_3 \langle \log(\phi_c^p)\phi_c' + p\phi_c', \phi_c' \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \\ &= b_3 \langle \log(\phi_c^p)\phi_c' + p\phi_c', \phi_c' \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2}. \end{aligned}$$

Por conta desta informação, temos que $b_3 = 0$, uma vez que

$$\begin{aligned} \langle \log(\phi_c^p)\phi_c' + p\phi_c', \phi_c' \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} &= \int_0^L \phi_c' (\log(\phi_c^p)\phi_c' + p\phi_c') \, dx \\ &= \langle \phi_c', c\phi_c' - \phi_c''' \rangle_{H_{per}^1, H_{per}^{-1}} = \int_0^L [c(\phi_c')^2 + (\phi_c'')^2] \, dx > 0. \end{aligned} \quad (4.136)$$

Logo,

$$\mathcal{L}_{Re, \phi_c}[\psi] = b_2 \cdot \phi_c. \quad (4.137)$$

Conforme determinado na prova do item anterior,

$$\mathcal{L}_{Re, \phi_c} \left[\frac{d}{dc}(\phi_c) \right] = -\phi_c.$$

Isto implica que

$$\mathcal{L}_{Re, \phi_c} \left[\psi + b_2 \cdot \frac{d}{dc}(\phi_c) \right] = 0$$

e existe uma constante b_4 de tal modo que

$$\psi + b_2 \cdot \frac{d}{dc}(\phi_c) = b_4 \cdot \phi_c'. \quad (4.138)$$

Façamos o produto interno de (4.138) com a função ϕ_c . Usando as relações (4.131) e (4.134), segue que $b_2 = 0$. Pela relação (4.137), $\psi \in \ker(\mathcal{L}_{Re, \phi_c})$ e temos que $b_4 \neq 0$ na identidade $\psi = b_4 \cdot \phi_c'$. Devido à relação (4.136),

$$\langle \psi, \log(\phi_c^p)\phi_c' + p\phi_c' \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \neq 0.$$

Este último resultado é uma contradição com a terceira condição apresentada em (4.134). Portanto, $\zeta > 0$.

■

Usando como referência o método clássico que é descrito no estudo da estabilidade orbital de soluções do tipo onda estacionária periódica para uma equação de Schrödinger não-linear polinomial, apresentado por Angulo, [8], provaremos o seguinte resultado.

Teorema 4.15. *Seja $c \in V$ fixado. A função*

$$u_c(x, t) = e^{ict} \phi_c(x), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

é uma solução do tipo onda estacionária periódica orbitalmente estável para a equação de Schrödinger Logarítmica (4.1), em conformidade com a Definição 4.5.

Demonstração. Seja $u_0 \in H_{per}^1([0, L])$ uma função arbitrária, porém, fixada. À princípio, consideremos a função $\tilde{u}(\cdot, t) \in H_{per}^1([0, L])$, onde $t \in \mathbb{R}$. A função \tilde{u} é, para cada $T > 0$, uma solução fraca do problema de Cauchy

$$\begin{cases} i\tilde{u}_t + \tilde{u}_{xx} + \log(|\tilde{u}|^p)\tilde{u} = 0. \\ \tilde{u}(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.139)$$

Definamos a órbita estabelecida pela função ϕ_c sendo o conjunto

$$\mathcal{O}_{\phi_c} := \{e^{i\theta}\phi_c(\cdot + y); (y, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi)\}.$$

Sejam $y \in [0, L]$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, denotemos a função Ω_t por

$$\Omega_t(y, \theta) := \|\tilde{u}_x(\cdot + y, t)e^{i\theta} - \phi'_c\|_{L_{per}^2}^2 + c\|\tilde{u}(\cdot + y, t)e^{i\theta} - \phi_c\|_{L_{per}^2}^2.$$

Para cada t fixado, a raiz quadrada de $\Omega_t(y, \theta)$ representa uma expressão equivalente à norma do elemento $\tilde{u}(\cdot + y, t)e^{i\theta} - \phi_c$ no espaço $H_{per}^1([0, L])$.

Notemos que, para cada $t \in \mathbb{R}$, a função Ω_t é contínua sobre o domínio compacto $[0, L] \times [0, 2\pi]$. Esta informação implica na existência de um par $(y, \theta) = (y(t), \theta(t))$ de tal maneira que

$$\Omega_t(y(t), \theta(t)) = \inf_{(y, \theta) \in [0, L] \times [0, 2\pi)} \Omega_t(y, \theta) = [\rho_c(\tilde{u}(\cdot, t), \mathcal{O}_{\phi_c})]^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.140)$$

A expressão $\rho_c(\tilde{u}(\cdot, t), \mathcal{O}_{\phi_c})$ é interpretada, no tempo t , como a “distância” entre a função \tilde{u} e a órbita \mathcal{O}_{ϕ_c} determinada pela onda ϕ_c . Uma informação adicional é que devido à regularidade da função \tilde{u} , a aplicação

$$t \mapsto \inf_{(y, \theta) \in [0, L] \times [0, 2\pi)} \Omega_t(y, \theta)$$

é contínua (ver Bona, [17], Cap. 4, Lema 2).

Em seguida, consideremos que w é uma perturbação da função ϕ_c . Façamos

$$\tilde{u}(x + y, t)e^{i\theta} := \phi_c(x) + w(x, t) \quad \text{com } w := A + iB, \quad (4.141)$$

onde $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ e $y = y(t)$ e $\theta = \theta(t)$ são os parâmetros determinados em vista de (4.140). Além disto, as funções A e B são a valores reais.

Pela propriedade do mínimo atribuída ao par (y, θ) e pela relação (4.141), segue que as funções A e B satisfazem as seguintes condições de compatibilidade

$$\int_0^L [A(\cdot, t)] \cdot [\log(\phi_c^p)\phi_c' + p\phi_c'] dx = 0 \quad (4.142)$$

e

$$\int_0^L [B(\cdot, t)] \cdot [\log(\phi_c^p)\phi_c] dx = 0, \quad (4.143)$$

$\forall t \in \mathbb{R}$.

Lembremos que $\mathcal{G} = \mathcal{G}_c := \mathcal{E} + c\mathcal{F}$ é uma quantidade conservada, onde \mathcal{E} e \mathcal{F} estão definidas respectivamente em (4.3) e (4.4). \mathcal{G} é invariante por translações e rotações. Desta maneira, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{G} &= \mathcal{G}(u_0) - \mathcal{G}(\phi_c) = \mathcal{G}(\tilde{u}(\cdot, t)) - \mathcal{G}(\phi_c) \\ &= \mathcal{G}(e^{i\theta}\tilde{u}(\cdot + y, t)) - \mathcal{G}(\phi_c) = \mathcal{G}(w(\cdot, t) + \phi_c) - \mathcal{G}(\phi_c). \end{aligned}$$

Usando o fato de que $\mathcal{G}'(\phi_c) = \mathcal{G}'((\phi_c, 0)) = \vec{0}$, entendemos que, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\Delta\mathcal{G} = \sum_{n=2}^4 \left[\frac{\mathcal{G}^{(n)}((\phi_c, 0))}{n!} \right] \cdot [\vec{w}(\cdot, t)]^n + \mathcal{O}(w(\cdot, t)),$$

onde $\vec{w}(\cdot, t) = (A(\cdot, t), B(\cdot, t))$. Logo, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{G} &= \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[A(\cdot, t)], A(\cdot, t) \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} + \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}_{Im, \phi_c}[B(\cdot, t)], B(\cdot, t) \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \\ &\quad - \frac{p}{6} \int_0^L \left[\frac{3A(\cdot, t)B(\cdot, t)^2 + A(\cdot, t)^3}{\phi_c} \right] dx \\ &\quad + \frac{p}{24} \int_0^L \left[\frac{A(\cdot, t)^4 + 6A(\cdot, t)^2B(\cdot, t)^2 - 3B(\cdot, t)^4}{\phi_c^2} \right] dx + \mathcal{O}(w(\cdot, t)), \end{aligned} \quad (4.144)$$

onde conjecturamos que

$$|\mathcal{O}(w(\cdot, t))| \leq \mathcal{O}(\|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H_{per}^1 \times H_{per}^1}^5). \quad (4.145)$$

Notemos que, para cada $r \geq 2$, a seguinte cadeia de imersões de Sobolev

$$H_{per}^1([0, L]) \hookrightarrow L_{per}^r([0, L]) \hookrightarrow L_{per}^2([0, L])$$

é válida. Pelo comportamento da função ϕ_c que é limitada e $\phi_c > \rho > 0$, onde ρ é uma

constante, segue a existência de uma constante $\beta_3 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{p}{6} \int_0^L \left[\frac{3A(\cdot, t)B(\cdot, t)^2 + A(\cdot, t)^3}{\phi_c} \right] dx \right| \\
& \leq \frac{p}{6} \max_{[0, L]} \left\{ \frac{3}{\phi_c} \right\} \left[\int_0^L |A(\cdot, t)|^3 + |A(\cdot, t)||B(\cdot, t)|^2 dx \right] \\
& \leq \frac{p}{6} \max_{[0, L]} \left\{ \frac{3}{\phi_c} \right\} \left[\|A(\cdot, t)\|_{L_{per}^3}^3 + \|A(\cdot, t)\|_{L_{per}^\infty} \|B(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 \right] \\
& \leq \frac{\beta_3}{2} \left[\|A(\cdot, t)\|_{H_{per}^1}^3 + \|A(\cdot, t)\|_{H_{per}^1} \|B(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 \right] \leq \beta_3 \|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H_{per}^1 \times H_{per}^1}^3.
\end{aligned} \tag{4.146}$$

Analogamente a (4.146), existe uma constante $\beta_4 > 0$, de tal forma que

$$\left| \frac{p}{24} \int_0^L \left[\frac{A(\cdot, t)^4 + 6A(\cdot, t)^2 B(\cdot, t)^2 - 3B(\cdot, t)^4}{\phi_c^2} \right] dx \right| \leq \beta_4 \|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H_{per}^1 \times H_{per}^1}^4. \tag{4.147}$$

Relacionemos as informações (4.144)-(4.147). Segue que, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{G}(t) &= \Delta \mathcal{G} \geq \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[A(\cdot, t)], A(\cdot, t) \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} + \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}_{Im, \phi_c}[B(\cdot, t)], B(\cdot, t) \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \\
&\quad - \beta_3 \|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H_{per}^1 \times H_{per}^1}^3 - \beta_4 \|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H_{per}^1 \times H_{per}^1}^4 - \mathcal{O}(\|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H_{per}^1 \times H_{per}^1}^5),
\end{aligned} \tag{4.148}$$

lembrando que as constantes β_3 , e β_4 são estritamente positivas e são definidas a partir do comportamento da função ϕ_c .

Na sequência, faremos o estudo da estabilidade orbital sobre a variedade constituída pelas funções $u_0 \in H_{per}^1([0, L])$ tais que

$$\mathcal{F}(\phi_c) = \mathcal{F}(u_0) = \mathcal{F}(\tilde{u}(\cdot, t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.149}$$

Sem perda de generalidade, assumamos que $\|\phi_c\|_{L_{per}^2} = 1$. Para $t \in \mathbb{R}$, definamos as funções auxiliares $P_{\parallel}(\cdot, t)$ e $P_{\perp}(\cdot, t)$ como

$$P_{\parallel}(\cdot, t) = \left[\langle A(\cdot, t), \phi_c \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \right] \phi_c \quad \text{e} \quad P_{\perp}(\cdot, t) = A(\cdot, t) - P_{\parallel}(\cdot, t).$$

Temos que $P_{\perp}(\cdot, t) \perp \phi_c$ em $L_{per}^2([0, L])$. Além disto, $P_{\perp}(\cdot, t) \perp [\log(\phi_c^p)\phi_c' + p\phi_c']$. De modo a verificar esta última ortogonalidade, usemos a condição de compatibilidade (4.142) e o fato de que

$$\int_0^L \phi_c [\log(\phi_c^p)\phi_c' + p\phi_c'] dx = -\frac{p}{2} \int_0^L \phi_c \phi_c' dx = 0.$$

Nas condições da Proposição 4.14, temos a existência de $\zeta > 0$ de forma que

$$\langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[P_{\perp}(\cdot, t)], P_{\perp}(\cdot, t) \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \geq \zeta \|P_{\perp}(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2. \tag{4.150}$$

Em vista da particularização estabelecida em (4.149), $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|\phi_c\|_{L_{per}^2}^2 &= \|\tilde{u}(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 = \|e^{i\theta}\tilde{u}(\cdot + y, t)\|_{L_{per}^2}^2 = \|\phi_c + A(\cdot, t) + iB(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 \\ &= \|\phi_c\|_{L_{per}^2}^2 + \|A(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 + \|B(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 + 2\langle A(\cdot, t), \phi_c \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2}. \end{aligned}$$

Esta identidade implica que

$$\langle A(\cdot, t), \phi_c \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} = -\frac{1}{2} \left[\|A(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 + \|B(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 \right]$$

e, por sua vez,

$$\|P_{\parallel}(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 = \left[\langle A(\cdot, t), \phi_c \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \right]^2 = \frac{1}{4} \left[\|A(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 + \|B(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 \right]^2. \quad (4.151)$$

Também ponderamos que, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \langle A(\cdot, t), A(\cdot, t) \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} &= \langle P_{\parallel}(\cdot, t) + P_{\perp}(\cdot, t), P_{\parallel}(\cdot, t) + P_{\perp}(\cdot, t) \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \\ &= \|P_{\perp}(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 + \|P_{\parallel}(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 + 2\langle P_{\perp}(\cdot, t), P_{\parallel}(\cdot, t) \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2}. \end{aligned}$$

Como $\langle P_{\perp}(\cdot, t), P_{\parallel}(\cdot, t) \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} = 0$, segue de (4.151) que

$$\begin{aligned} \|P_{\perp}(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 &= \|A(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 - \|P_{\parallel}(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 = \|A(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 - \frac{1}{4} \|\vec{w}(\cdot, t)\|_{L_{per}^2 \times L_{per}^2}^4 \\ &\geq \|A(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 - \frac{1}{4} \|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H_{per}^1 \times H_{per}^1}^4. \end{aligned} \quad (4.152)$$

Pelas relações (4.150) e (4.152), segue que

$$\langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[P_{\perp}(\cdot, t)], P_{\perp}(\cdot, t) \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \geq \zeta \|A(\cdot, t)\|_{L_{per}^2}^2 - \zeta \|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H_{per}^1 \times H_{per}^1}^4. \quad (4.153)$$

Além disto, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[A(\cdot, t)], A(\cdot, t) \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} &= \langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[P_{\perp}(\cdot, t)], P_{\perp}(\cdot, t) \rangle_{H_{per}^{-1}, H_{per}^1} \\ &+ 2\langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[P_{\parallel}(\cdot, t)], P_{\perp}(\cdot, t) \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} + \langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[P_{\parallel}(\cdot, t)], P_{\parallel}(\cdot, t) \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2}. \end{aligned} \quad (4.154)$$

Notemos também que

$$\begin{aligned} \left| 2\langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[P_{\parallel}(\cdot, t)], P_{\perp}(\cdot, t) \rangle_{L_{per}^2, L_{per}^2} \right| &\leq 2\|P_{\perp}(\cdot, t)\|_{L_{per}^2} \|\mathcal{L}_{Re, \phi_c}[P_{\parallel}(\cdot, t)]\|_{L_{per}^2} \\ &\leq 2\|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H_{per}^1 \times H_{per}^1} \|\mathcal{L}_{Re, \phi_c}[P_{\parallel}(\cdot, t)]\|_{L_{per}^2} \\ &\leq \|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H_{per}^1 \times H_{per}^1}^3 \|\mathcal{L}_{Re, \phi_c}[\phi_c]\|_{L_{per}^2} \quad (4.155) \\ &\leq \beta_5 \|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H_{per}^1 \times H_{per}^1}^3, \end{aligned}$$

onde $\beta_5 > 0$ é uma constante. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\left| \langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[P_{\parallel}(\cdot, t)], P_{\parallel}(\cdot, t) \rangle_{L^2_{per}, L^2_{per}} \right| &\leq \|P_{\parallel}(\cdot, t)\|_{L^2_{per}} \|\mathcal{L}_{Re, \phi_c}[P_{\parallel}(\cdot, t)]\|_{L^2_{per}} \\
&\leq \|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H^1_{per} \times H^1_{per}}^2 \|\mathcal{L}_{Re, \phi_c}[P_{\parallel}(\cdot, t)]\|_{L^2_{per}} \\
&\leq \|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H^1_{per} \times H^1_{per}}^4 \|\mathcal{L}_{Re, \phi_c}[\phi_c]\|_{L^2_{per}} \quad (4.156) \\
&\leq \beta_6 \|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H^1_{per} \times H^1_{per}}^4,
\end{aligned}$$

onde $\beta_6 > 0$ é uma constante. Usemos as relações (4.153), (4.155) e (4.156) na expressão (4.154). Segue que

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[A(\cdot, t)], A(\cdot, t) \rangle_{H^{-1}_{per}, H^1_{per}} &\geq \zeta \|A(\cdot, t)\|_{L^2_{per}}^2 \\
&\quad - \beta_5 \|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H^1_{per} \times H^1_{per}}^3 - (\zeta + \beta_6) \|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H^1_{per} \times H^1_{per}}^4. \quad (4.157)
\end{aligned}$$

Consideremos que $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, onde $\gamma_1 \geq 0$ e $\gamma_2 \geq 0$ e escrevamos

$$\langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[A(\cdot, t)], A(\cdot, t) \rangle_{H^{-1}_{per}, H^1_{per}} = (\gamma_1 + \gamma_2) \langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[A(\cdot, t)], A(\cdot, t) \rangle_{H^{-1}_{per}, H^1_{per}}.$$

Pela definição do operador \mathcal{L}_{Re, ϕ_c} , existe uma constante $\gamma_3 > 0$, γ_3 independente de γ_1 e γ_2 , tal que

$$\gamma_1 \langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[A(\cdot, t)], A(\cdot, t) \rangle_{H^{-1}_{per}, H^1_{per}} \geq \gamma_1 \int_0^L [A_x(\cdot, t)]^2 dx - \gamma_1 \gamma_3 \|A(\cdot, t)\|_{L^2_{per}}^2.$$

Combinando as relações imediatamente acima com (4.157), temos que

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[A(\cdot, t)], A(\cdot, t) \rangle_{H^{-1}_{per}, H^1_{per}} &\geq \gamma_1 \int_0^L [A_x(\cdot, t)]^2 dx + (\zeta \gamma_2 - \gamma_1 \gamma_3) \|A(\cdot, t)\|_{L^2_{per}}^2 \\
&\quad - \gamma_2 \beta_5 \|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H^1_{per} \times H^1_{per}}^3 - \gamma_2 (\zeta + \beta_6) \|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H^1_{per} \times H^1_{per}}^4.
\end{aligned}$$

Por este motivo, as constantes γ_1 e γ_2 podem ser escolhidas de forma que

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}_{Re, \phi_c}[A(\cdot, t)], A(\cdot, t) \rangle_{H^{-1}_{per}, H^1_{per}} &\geq \gamma_4 \|A(\cdot, t)\|_{H^1_{per}}^2 \\
&\quad - \beta_7 \|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H^1_{per} \times H^1_{per}}^3 - \beta_8 \|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H^1_{per} \times H^1_{per}}^4, \quad (4.158)
\end{aligned}$$

onde as constantes γ_4 , β_7 e β_8 são estritamente positivas.

Por outro lado, a condição de compatibilidade (4.143) permite concluir que, pela Proposição 4.13, existe a constante $\beta > 0$ de maneira que

$$\langle \mathcal{L}_{Im, \phi_c}[B(\cdot, t)], B(\cdot, t) \rangle_{H^{-1}_{per}, H^1_{per}} \geq \beta \|B(\cdot, t)\|_{L^2_{per}}^2.$$

Fazendo uso de um procedimento similar ao que foi feito no caso do operador \mathcal{L}_{Re, ϕ_c} , obtemos uma constante $\gamma_5 > 0$ que atende à desigualdade

$$\langle \mathcal{L}_{Im, \phi_c}[B(\cdot, t)], B(\cdot, t) \rangle_{H^{-1}_{per}, H^1_{per}} \geq \gamma_5 \|B(\cdot, t)\|_{H^1_{per}}^2. \quad (4.159)$$

Substituamos as relações (4.158) e (4.159) em (4.148). Desta maneira, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{G}(t) &\geq \gamma_6 \|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H_{per}^1 \times H_{per}^1}^2 - \gamma_7 \|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H_{per}^1 \times H_{per}^1}^3 \\ &\quad - \gamma_8 \|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H_{per}^1 \times H_{per}^1}^4 - \mathcal{O}(\|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H_{per}^1 \times H_{per}^1}^5), \end{aligned} \quad (4.160)$$

onde as constantes γ_6 , γ_7 e γ_8 são estritamente positivas. Portanto, pela relação (4.160), segue que, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\Delta \mathcal{G}(t) \geq h_1(\|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H_{per}^1 \times H_{per}^1}),$$

sendo que a função $h_1(x) := \eta_1 x^2(1 - \eta_2 x - \eta_3 x^2 - \mathcal{O}(x^3))$, com $\eta_1, \eta_2, \eta_3 > 0$, apresenta as propriedades de que $h_1(0) = 0$ e $h_1(x) > 0$ para pequenos valores de x .

Definamos a variedade

$$S = S_c := \{u_0 \in H_{per}^1([0, L]); \mathcal{F}(u_0) = \mathcal{F}(\phi_c)\}.$$

Suponhamos que $u_0 \in S$. Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que, se $u_0 \rightarrow \phi_c$ em $H_{per}^1([0, L])$, então, $\mathcal{E}(u_0) \rightarrow \mathcal{E}(\phi_c)$ em \mathbb{R} .

Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Conforme as informações apresentadas imediatamente acima, existe $\delta = \delta(\varepsilon, c) > 0$ de tal maneira que se $u_0 \in S$ e

$$\|u_0 - \phi_c\|_{H_{per}^1} < \delta,$$

então, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$h_1(\|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H_{per}^1 \times H_{per}^1}) \leq \Delta \mathcal{G}(t) = \Delta \mathcal{G} < h_1(\varepsilon).$$

Por consequência da invertibilidade da função h_1 , $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\|\vec{w}(\cdot, t)\|_{H_{per}^1 \times H_{per}^1} < \varepsilon.$$

Isto é, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\|\tilde{u}(\cdot + y(t), t)e^{i\theta(t)} - \phi_c\|_{H_{per}^1} < \varepsilon,$$

o que conclui a estabilidade orbital no caso particularizado.

Em seguida, faremos a prova para o caso geral. Seja $c \in V$ fixado. Podemos revisitar toda a abordagem feita no estudo da estabilidade orbital do caso particular. Notemos a existência de uma constante $\delta_1 = \delta_1(c) > 0$ e também a existência de uma função real z_0 , de tal modo que $z_0(0) = 0$ e z_0 é estritamente crescente sobre o intervalo $[0, D]$, onde $D > 0$ é suficientemente pequeno. Além disto, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$s \in V \text{ e } \mathcal{G}_s(u_0) - \mathcal{G}_s(\phi_s) \geq z_0(\|\vec{w}_s(\cdot, t)\|_{H_{per}^1 \times H_{per}^1}), \quad (4.161)$$

sempre que $|s - c| < \delta_1$ e $\mathcal{F}(u_0) = \mathcal{F}(\phi_s)$.

Seja $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Devido à continuidade e à regularidade do funcional \mathcal{E} numa vizinhança de ϕ_c , temos a existência de $\delta_2 = \delta_2(c, \epsilon) > 0$, $\delta_2 < \frac{\epsilon}{2}$, de tal modo que se $u_0, v_0 \in B_{\delta_2}(\phi_c) \subset H_{per}^1([0, L])$, então,

$$|\mathcal{E}(u_0) - \mathcal{E}(v_0)| < z_0 \left(\frac{\epsilon}{2} \right). \quad (4.162)$$

Pela suavidade da aplicação $s \in V \mapsto \phi_s \in H_{per,e}^2([0, L])$, também temos a existência de $\delta_3 > 0$, tal que se $|s - c| < \delta_3 < \delta_1$, então,

$$\|\phi_s - \phi_c\|_{H_{per}^1} < \delta_2 < \frac{\epsilon}{2}. \quad (4.163)$$

Afirmamos que existe $\delta_4 > 0$ tal que se

$$\|u_0 - \phi_c\|_{H_{per}^1} < \delta_4 < \frac{\delta_2}{2},$$

então, existe $s^* = s^*(u_0) > 0$ tal que $|s^* - c| < \delta_3$ e $\mathcal{F}(u_0) = \mathcal{F}(\phi_{s^*})$.

Com efeito, definamos a função $h_2 : V \rightarrow \mathbb{R}$, de tal modo que

$$h_2(s) = \mathcal{F}(\phi_s) = \frac{1}{2} \left[\int_0^L [\phi_s(x)]^2 dx \right], \quad \forall s \in V.$$

Em vista da Proposição 4.12, temos que $h_2'(s) = d''(s) > 0$, $\forall s \in V$. Isto garante que a função h_2 é crescente sobre V . Consideremos o parâmetro $\delta_5 := \frac{\delta_3}{2} > 0$. O comportamento da função h_2 garante que $h_2(c + \delta_5) > h_2(c) > h_2(c - \delta_5)$. Além disto, existe uma tal $\delta_6 > 0$ tal que

$$h_2(c - \delta_5) - h_2(c) < -\delta_6 < 0 < \delta_6 < h_2(c + \delta_5) - h_2(c). \quad (4.164)$$

Da continuidade do funcional \mathcal{F} , existe $\delta_4 > 0$ tal que se

$$\|u_0 - \phi_c\|_{H_{per}^1} < \delta_4 < \frac{\delta_2}{2}, \quad (4.165)$$

então,

$$-\frac{\delta_6}{2} < \mathcal{F}(\phi_c) - \mathcal{F}(u_0) < \frac{\delta_6}{2}. \quad (4.166)$$

Seja o elemento $u_0 \in H_{per}^1([0, L])$ satisfazendo a condição (4.165). Combinando as relações (4.164) e (4.166), segue que

$$h_2(c - \delta_5) - \mathcal{F}(u_0) = h_2(c - \delta_5) - h_2(c) + h_2(c) - \mathcal{F}(u_0) < -\delta_6 + \frac{\delta_6}{2} = -\frac{\delta_6}{2}$$

e

$$h_2(c + \delta_5) - \mathcal{F}(u_0) = h_2(c + \delta_5) - h_2(c) + h_2(c) - \mathcal{F}(u_0) > \delta_6 - \frac{\delta_6}{2} = \frac{\delta_6}{2}.$$

Como h_2 é contínua e estritamente crescente sobre o intervalo $(c - \delta_5, c + \delta_5)$, existe um único $s^* \in (c - \delta_5, c + \delta_5) \subset V$ tal que

$$\mathcal{F}(u_0) = h_2(s^*) = \mathcal{F}(\phi_{s^*}). \quad (4.167)$$

Seja u_0 satisfazendo a relação (4.165). Como $|s^* - c| < \delta_5 < \delta_3$, vemos que ϕ_{s^*} satisfaz a relação (4.163) com $s = s^*$. Logo, pela relação (4.162),

$$|\mathcal{E}(u_0) - \mathcal{E}(\phi_{s^*})| < z_0 \left(\frac{\epsilon}{2} \right). \quad (4.168)$$

Devido às informações (4.167) e (4.168), temos que

$$|\mathcal{G}_{s^*}(u_0) - \mathcal{G}_{s^*}(\phi_{s^*})| < z_0 \left(\frac{\epsilon}{2} \right). \quad (4.169)$$

Na sequência, combinemos as premissas (4.161), (4.167) e (4.169). Daí, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$z_0(\|\vec{w}_{s^*}(\cdot, t)\|_{H_{per}^1 \times H_{per}^1}) \leq \mathcal{G}_{s^*}(u_0) - \mathcal{G}_{s^*}(\phi_{s^*}) < z_0 \left(\frac{\epsilon}{2} \right).$$

Em virtude da invertibilidade da função z_0 , para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\|\vec{w}_{s^*}(\cdot, t)\|_{H_{per}^1 \times H_{per}^1} < \frac{\epsilon}{2}. \quad (4.170)$$

Portanto, pelas relações (4.163) e (4.170), para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|\vec{w}_c(\cdot, t)\|_{H_{per}^1 \times H_{per}^1} &\approx \inf_{y \in [0, L], \theta \in [0, 2\pi)} \|\tilde{u}(\cdot + y, t)e^{i\theta} - \phi_c\|_{H_{per}^1} \\ &\leq \|\vec{w}_{s^*}(\cdot, t)\|_{H_{per}^1 \times H_{per}^1} + \|\phi_{s^*} - \phi_c\|_{H_{per}^1} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Esta última verificação garante a estabilidade orbital da onda estacionária periódica

$$u_c(x, t) = e^{ict} \phi_c(x), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

em conformidade com a Definição 4.5. ■

A Observação 4.8 permite reenunciar o Teorema 4.15 de uma forma mais abrangente. Segue abaixo o enunciado que contempla os estudos e resultados apresentados neste Capítulo.

Teorema 4.16. *Seja $p \in \mathcal{A}$. Consideremos que $c_1 > 0$ e que $L \in (\beta, +\infty)$, onde $\beta := \frac{2\pi}{\sqrt{p}}$, seja o período da função $\varphi = \varphi_{c_1}$, a solução par, estritamente positiva e L -periódica da equação de Euler-Lagrange (4.109) dada em vista do Teorema 4.6. Então, existe um intervalo $V \subset (0, +\infty)$ que contém c_1 , de tal maneira que a curva de funções*

$$c \in V \mapsto \phi_c \in H_{per}^s([0, L]), \quad s \gg 1,$$

é suave e ϕ_c é uma solução par, periódica e estritamente positiva da equação (4.109), para todo $c \in V$. Finalmente, para cada $c \in V$, a função

$$u_c(x, t) = e^{ict} \phi_c(x - ct), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

determina uma solução onda estacionária periódica orbitalmente estável para equação de Schrödinger Logarítmica (4.1). ■

Capítulo 5

Estabilidade Linear de Soluções do tipo Onda Viajante Periódica para a Equação ILW

Ao longo deste capítulo, estudaremos a estabilidade linear de soluções do tipo onda viajante periódica com média nula para a equação ILW (Intermediate Long Wave Equation). Primeiramente, apresentaremos a teoria geral de estabilidade linear seguindo as ideias de Deconinck e Kapitula, [31]. Após isto, determinaremos uma classe de soluções do tipo onda viajante periódica de média nula para a equação ILW e, com auxílio do estudo do índice Hamiltoniano de Krein, determinaremos que tais soluções são linearmente estáveis.

5.1 Condições Suficientes para Estabilidade ou Instabilidade Linear de Ondas Viajantes Periódicas

Sejam $L > 0$ um número real e $p \in \mathbb{N}$ fixados. Consideremos a equação de evolução

$$u_t + (p + 1)u^p u_x - (\mathcal{M}u)_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad (5.1)$$

onde \mathcal{M} é um operador diferencial ou pseudo-diferencial no contexto de funções L -periódicas. Em verdade, \mathcal{M} é definido como um operador multiplicador de Fourier por

$$\widehat{\mathcal{M}g}(n) = \zeta(n)\widehat{g}(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

onde o símbolo ζ de \mathcal{M} é assumido ser uma função real, mensurável, localmente limitada e par. Assumamos que existem constantes $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, $0 \leq m_1 \leq m_2$, tais que

$$A_1|n|^{m_1} \leq \zeta(n) \leq A_2(1 + |n|)^{m_2}, \quad \forall |n| \geq 0,$$

onde $A_1 > 0$ e $A_2 > 0$. Adicionalmente, façamos $\zeta(0) = 0$. Afirmamos que se u é uma função no domínio de \mathcal{M} , então,

$$\mathcal{M}(u + a) = \mathcal{M}(u), \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad e, \quad \int_0^L (\mathcal{M}u) \, dx = 0.$$

Com efeito, seja $a \in \mathbb{R}$. Notemos que se $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, então, $\widehat{a}(n) = 0$. Como $\zeta(0) = 0$, complementamos que $\widehat{(\mathcal{M}a)}(n) = \zeta(n)\widehat{a}(n) = 0$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Isto implica que $\mathcal{M}(a) = 0$ e

$$\mathcal{M}(u + a) = \mathcal{M}(u) + \mathcal{M}(a) = \mathcal{M}(u).$$

Além disto, pela definição de Transformada de Fourier Periódica,

$$\int_0^L (\mathcal{M}u) \, dx = L \cdot \widehat{(\mathcal{M}u)}(0) = L\zeta(0)\widehat{u}(0) = 0.$$

Em seguida, definiremos a noção de solução do tipo onda viajante periódica para a equação de evolução (5.1).

Definição 5.1. *A função $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma solução do tipo onda viajante periódica de período $L > 0$ para a equação (5.1) se existirem $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ e $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma função suave e periódica de período L , tais que*

$$u(x, t) := \varphi(x - ct), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad (5.2)$$

soluciona (5.1) no sentido pontual.

Suponhamos a existência de $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ e de $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, função suave e periódica de período $L > 0$, de tal modo que (5.2) seja uma solução do tipo onda viajante periódica da equação (5.1). Substituindo (5.2) na expressão (5.1), resulta que

$$-c\varphi' + (p + 1)\varphi^p\varphi' - (\mathcal{M}\varphi)_x = 0. \quad (5.3)$$

Integremos a expressão (5.3) sobre intervalos do tipo $[0, \xi]$, onde $0 \leq \xi \leq L$. Temos a existência de uma constante de integração A , tal que

$$-c\varphi + \varphi^{p+1} - \mathcal{M}\varphi = A. \quad (5.4)$$

Na sequência, definiremos as noções de estabilidade e instabilidade linear para as soluções do tipo onda viajante periódica da equação de evolução (5.1). De fato, consideremos uma função suave L -periódica $\varphi = \varphi_c$ que depende do parâmetro $c \in \mathbb{R}^+$ e que satisfaz a identidade (5.4). Introduzamos o operador linearizado associado a φ ,

$$\mathcal{L} := (\mathcal{M} + c) - (p + 1)\varphi^p, \quad (5.5)$$

definido sobre o domínio $H_{per}^{m_2}([0, L])$, que é denso no espaço de Hilbert $L_{per}^2([0, L])$.

Suponhamos que exista uma função $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, de tal modo que

$$u(x, t) = \varphi(x - ct) + v(x - ct, t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad (5.6)$$

também seja uma solução para a equação (5.1). Substituindo a expressão (5.6) na equação (5.1), temos que

$$-c\varphi' - cv_x + v_t + (p+1)[(\varphi+v)^p(\varphi'+v_x)] - (\mathcal{M}\varphi)_x - (\mathcal{M}v)_x = 0.$$

Isto é,

$$-c\varphi' - cv_x + v_t + (p+1)\varphi^p\varphi' + (p+1)\partial_x(\varphi^p v) - (\mathcal{M}\varphi)_x - (\mathcal{M}v)_x = \mathcal{O}(v). \quad (5.7)$$

Em vista das identidades (5.4) e (5.7), temos que

$$v_t - cv_x + (p+1)\partial_x(\varphi^p v) - (\mathcal{M}v)_x = \mathcal{O}(v).$$

Ou seja,

$$v_t = \partial_x(\mathcal{L}v) + \mathcal{O}(v). \quad (5.8)$$

O estudo da estabilidade linear das soluções da equação (5.8) pode ser estruturado em termos de propriedades referentes ao estudo da estabilidade linear das soluções da equação $v_t = \partial_x(\mathcal{L}v)$.

Consideremos que $(\lambda, \psi) \in \mathbb{C} \times L_{per}^2([0, L])$ e que

$$v(\xi, t) := e^{\lambda t}\psi(\xi), \quad \forall (\xi, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

seja uma função suave que soluciona a equação $v_t = \partial_x(\mathcal{L}v)$. Finalmente, ao substituir a função v nesta última identidade apresentada, obtemos o seguinte problema de autovalores

$$\partial_x \mathcal{L}\psi = \lambda\psi. \quad (5.9)$$

Definição 5.2. Dizemos que a onda viajante periódica (5.2), solução da equação de evolução (5.1), é linearmente instável no espaço de Hilbert $L_{per}^2([0, L])$ se existir $\lambda \in \mathbb{C}$, $Re(\lambda) > 0$, e se existir uma função $\psi \in L_{per}^2([0, L])$, $\psi \neq 0$, de tal modo que se verifica a identidade (5.9). Caso contrário, dizemos que a onda viajante periódica é linearmente estável no espaço $L_{per}^2([0, L])$.

Tratemos agora a equação Hamiltoniana abstrata

$$u_t = J\mathcal{E}'(u) \quad (5.10)$$

definida sobre o espaço de Hilbert H , onde o operador $J : H \rightarrow \mathcal{R}(J) \subset H$ é antissimétrico e o funcional $\mathcal{E} : H \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 . As referências [37] e [51] apresentam resultados para estabilidade e instabilidade linear de ondas viajantes periódicas que solucionam a

equação (5.10), no caso em que o operador J é invertível. Notemos que no caso específico em que $J = \partial_x$ e que

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (\mathcal{M}u)u \, dx - \frac{1}{p+2} \int_0^L u^{p+2} \, dx,$$

a equação (5.1) pode ser reduzida formalmente à forma dada pela equação (5.10).

Consideremos a função φ que soluciona a equação (5.4) e seja \mathcal{L} o operador definido em (5.5). Se supormos que o espaço de Hilbert seja $H = L_{per}^2([0, L])$, temos que o operador $J = \partial_x$ não é invertível. Isto, pois, $\ker(J) = \text{span}\{1\}$. Esta verificação, contudo, nos impede de fazer o estudo da estabilidade linear das ondas viajantes periódicas que solucionam (5.1) via teoria apresentada por [37] e [51]. Para suprir tal dificuldade, [31] e [41] consideram uma modificação do problema (5.9), que passa a ser estruturado sobre um espaço de Sobolev de média zero.

No que segue, iremos considerar o subespaço fechado de $L_{per}^2([0, L])$ dado por

$$H_0 = \left\{ f \in L_{per}^2([0, L]); \int_0^L f(x) \, dx = 0 \right\},$$

o qual é um espaço de Hilbert. Vamos olhar o problema (5.9) restrito ao espaço H_0 , ou seja, consideremos o problema de obter $(\lambda, \psi) \in \mathbb{C} \times H_0$ tal que

$$J\mathcal{L}|_{H_0} \psi = \lambda\psi, \tag{5.11}$$

onde $J := \partial_x$.

Definição 5.3. Dizemos que a onda viajante periódica (5.2), solução da equação de evolução (5.1), é linearmente instável no espaço H_0 se existir $\lambda \in \mathbb{C}$, onde $\text{Re}(\lambda) > 0$, e se existir uma função suave $\psi \in H_0$, $\psi \neq 0$, de tal modo que se verifica a identidade (5.11). Caso contrário, dizemos que a onda viajante periódica é linearmente estável no espaço H_0 .

Observação 5.4. Notemos que a instabilidade linear no contexto de H_0 implica na instabilidade linear no espaço $L_{per}^2([0, L])$. Por sua vez, a estabilidade linear no contexto de $L_{per}^2([0, L])$ implica na estabilidade linear no espaço H_0 .

Em seguida, introduziremos os elementos que serão usados na definição do índice Hamiltoniano de Krein.

Definição 5.5. Definimos k_r como a quantidade de autovalores reais estritamente positivos do operador $J\mathcal{L}|_{H_0}$, contando as possíveis multiplicidades.

Definição 5.6. Definimos k_c como a quantidade de autovalores complexos do operador $J\mathcal{L}|_{H_0}$, cuja parte real é estritamente positiva, contando as possíveis multiplicidades.

Seja \mathcal{A} um operador autoadjunto. Denotemos por $n(\langle w, \mathcal{A}w \rangle_0)$ a dimensão do subespaço maximal para o qual $\langle w, \mathcal{A}w \rangle_0 < 0$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ denota o produto interno em $L^2_{per}([0, L])$. Seja λ um autovalor não-nulo puramente imaginário do operador $J\mathcal{L}|_{H_0}$. Finalmente, consideremos E_λ o autoespaço associado ao autovalor λ .

Definição 5.7. Definimos a assinatura de Krein para λ por

$$k_i^-(\lambda) := n \left(\left\langle w, (\mathcal{L}|_{H_0})|_{E_\lambda} w \right\rangle_0 \right).$$

Dizemos que o autovalor λ tem assinatura de Krein negativa se $k_i^-(\lambda) \geq 1$. Caso verificemos que $k_i^-(\lambda) = 0$, dizemos que λ possui assinatura de Krein positiva.

Se λ for um autovalor algébrica e geometricamente simples de $J\mathcal{L}|_{H_0}$, cujo autoespaço associado é gerado pela autofunção ψ_λ , vemos que

$$k_i^-(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{se } \langle \psi_\lambda, (\mathcal{L}|_{H_0}) \psi_\lambda \rangle_0 \geq 0 \\ 1, & \text{se } \langle \psi_\lambda, (\mathcal{L}|_{H_0}) \psi_\lambda \rangle_0 < 0. \end{cases}$$

Definição 5.8. Definimos a assinatura total de Krein através da quantidade

$$k_i^- := \sum_{\lambda \in i\mathbb{R} - \{0\}} k_i^-(\lambda).$$

Definição 5.9. Definimos o índice Hamiltoniano de Krein associado ao operador $J\mathcal{L}|_{H_0}$ pelo número

$$K_{Ham} := k_r + k_c + k_i^-.$$

Nosso próximo passo é supor a validade de duas relevantes condições:

(c1) Consideremos o operador

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_c := \mathcal{M} + c - (p+1)\varphi_c^p.$$

Suponhamos a existência de um operador autoadjunto \mathcal{L}_0 , de modo que $(\mathcal{L}_0)^{-1}$ seja um operador compacto e que:

(i) $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{B}$, onde \mathcal{B} é um operador que satisfaz

$$\|\mathcal{B}u\|_{L^2_{per}} \leq \tilde{a}\|u\|_{L^2_{per}} + b\|\mathcal{L}_0|^r u\|_{L^2_{per}}, \quad \forall u \in L^2_{per}([0, L]),$$

para constantes positivas \tilde{a} , b e $r \in [0, 1)$.

(ii) A sequência crescente de autovalores não-nulos μ_n de \mathcal{L}_0 satisfaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^{-l} < +\infty,$$

para algum $l \geq 1$.

(iii) Existe uma subsequência de autovalores de \mathcal{L}_0 , $\{\mu_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$, e existem constantes $\tilde{c} > 0$ e $r' > r$ tais que

$$\mu_{n_j+1} - \mu_{n_j} \geq \tilde{c} \mu_{n_j+1}^{r'}.$$

(c2) $\ker(\mathcal{L}) = \text{span}\{\varphi'_c\}$. Além disto, o operador \mathcal{L} é autoadjunto e o espectro de \mathcal{L} é constituído por uma sequência de números reais de modo que existe uma constante $\varepsilon > 0$ para qual existe somente uma quantidade finita de elementos $\chi < \varepsilon$ que pertencem ao espectro de \mathcal{L} .

Observação 5.10. *Seja $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma base ortonormal do espaço $L^2_{\text{per}}([0, L])$ constituída pelas autofunções do operador \mathcal{L}_0 . Então, o operador $|\mathcal{L}_0|^r$ pode ser interpretado como*

$$|\mathcal{L}_0|^r u = \sum_{n=1}^{+\infty} |\omega_n(\mathcal{L}_0)|^r u_n e_n, \quad \text{onde } u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n e_n.$$

Suponhamos que sejam válidas as condições (c1) e (c2). Segundo [31], se $\text{Im}(\mathcal{L}) = 0$,¹ então, k_c é um inteiro par. Além disto, para cada $\lambda \in i\mathbb{R}$, temos que $k_i^-(\lambda) = k_i^-(\bar{\lambda})$, o que também implica que k_i^- é necessariamente um inteiro par.

O estudo do índice Hamiltoniano de Krein nos apresenta parâmetros que podem ser usados para deduzir a estabilidade ou a instabilidade linear de soluções do tipo onda viajante periódica para a equação (5.1). Com base no que foi descrito nesta seção, enunciamos o seguinte resultado devido a [31].

Teorema 5.11. *Suponhamos que as imposições (c1) e (c2) sejam válidas e que $c > 0$. Se $K_{\text{Ham}} = 0$, então, a função definida por $u(x, t) = \varphi_c(x - ct)$, $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, é uma solução do tipo onda viajante periódica da equação (5.1) linearmente estável no espaço H_0 . Se $K_{\text{Ham}} = 1$ e $\text{Im}(\mathcal{L}) = 0$, então, a referida solução é linearmente instável no espaço H_0 (e, conseqüentemente, linearmente instável no espaço $L^2_{\text{per}}([0, L])$).*

Demonstração. Se $K_{\text{Ham}} = 0$, então, $k_r = k_c = 0$. Isto implica que não existe um par $(\lambda, \psi) \in \mathbb{C} \times H_0$, onde $\text{Re}(\lambda) > 0$, de tal forma que se verifique a identidade (5.9). Se $K_{\text{Ham}} = 1$ e $\text{Im}(\mathcal{L}) = 0$, então, $k_r = 1$, o que é suficiente para concluir a prova. ■

¹Interpretamos o operador $\text{Im}(\mathcal{L})$ como aquele que associa um elemento $u \in D(\mathcal{L})$ à parte imaginária de $\mathcal{L}(u)$.

Na sequência, apresentaremos um resultado que pode ser usado na dedução analítica do índice Hamiltoniano de Krein K_{Ham} . Para isto, é preciso que façamos algumas considerações. Em função de termos $1 \perp \varphi'_c$ e $\varphi_c \perp \varphi'_c$ no contexto do espaço $L^2_{\text{per}}([0, L])$, as imposições (c1) e (c2) permitem obter $\mathcal{L}^{-1}[1]$ e $\mathcal{L}^{-1}[\varphi_c]$. Assim, podemos definir

$$\mathcal{J} := \langle \mathcal{L}^{-1}[1], 1 \rangle_0 \quad (5.12)$$

e, se $\mathcal{J} \neq 0$, definamos a matriz

$$\mathcal{D} := \frac{1}{\langle \mathcal{L}^{-1}[1], 1 \rangle_0} \begin{pmatrix} \langle \mathcal{L}^{-1}[\varphi_c], \varphi_c \rangle_0 & \langle \mathcal{L}^{-1}[\varphi_c], 1 \rangle_0 \\ \langle \mathcal{L}^{-1}[\varphi_c], 1 \rangle_0 & \langle \mathcal{L}^{-1}[1], 1 \rangle_0 \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Entendemos que

$$n(\mathcal{J}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \langle \mathcal{L}^{-1}[1], 1 \rangle_0 > 0 \\ 1, & \text{se } \langle \mathcal{L}^{-1}[1], 1 \rangle_0 < 0. \end{cases}$$

Denotemos por $n(\mathcal{L})$ o número de autovalores estritamente negativos do operador \mathcal{L} (somando as devidas multiplicidades) e designemos $n(\mathcal{D})$ o número de autovalores estritamente negativos relativos à matriz \mathcal{D} . Para que conheçamos informações acerca de $n(\mathcal{D})$, basta analisarmos o sinal de $\det(\mathcal{D})$. Suponhamos que $\mathcal{J} \neq 0$ e que $\det(\mathcal{D}) < 0$. Neste caso, \mathcal{D} apresenta um autovalor estritamente negativo e um autovalor estritamente positivo. Isto implica que $n(\mathcal{D}) = 1$. Se $\mathcal{J} \neq 0$ e $\det(\mathcal{D}) > 0$, há duas possibilidades: $n(\mathcal{D}) = 0$ (\mathcal{D} possui dois autovalores estritamente positivos) ou $n(\mathcal{D}) = 2$ (\mathcal{D} possui dois autovalores estritamente negativos). O trabalho em [31] deduz uma relação entre o índice Hamiltoniano de Krein e o número de autovalores estritamente negativos relativos a \mathcal{L} , \mathcal{J} e \mathcal{D} .

Teorema 5.12. *Suponhamos a validade das imposições (c1) e (c2). Se $\mathcal{J} \neq 0$ e se a matriz \mathcal{D} for não-singular, então, o índice Hamiltoniano de Krein associado ao operador $J\mathcal{L}|_{H_0}$ é dado por*

$$K_{\text{Ham}} = k_r + k_c + k_i^- = n(\mathcal{L}) - n(\mathcal{J}) - n(\mathcal{D}). \quad (5.14)$$

Demonstração. Ver [31] e sua referência [41].

■

5.2 Estabilidade Linear de Ondas Viajantes Periódicas para a equação ILW

Sejam $L > 0$ e $\delta > 0$ fixados. \mathcal{T}_δ designará o operador definido por

$$\mathcal{T}_\delta(f)(x) := i \sum_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}} \coth\left(\frac{2n\pi\delta}{L}\right) \hat{f}(n) e^{\frac{2in\pi x}{L}},$$

onde $x \in \mathbb{R}$, f é uma função L -periódica suave e,

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Nesta seção, apresentaremos a existência de uma classe de soluções do tipo onda viajante periódica para a equação ILW (Intermediate Long Wave Equation)

$$u_t + 2uu_x + \frac{1}{\delta}u_x + (\mathcal{T}_\delta \partial_x u)_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+. \quad (5.15)$$

Além disto, mostraremos o estudo da estabilidade linear para as ondas viajantes obtidas.

Seja f uma função L -periódica suave. Vemos que

$$\widehat{(f')}(n) = \left(\frac{2\pi i n}{L} \right) \hat{f}(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

e, interpretamos que

$$\widehat{(\mathcal{T}_\delta \partial_x f)}(n) = i \coth \left(\frac{2n\pi\delta}{L} \right) \widehat{(f')}(n) = - \left(\frac{2n\pi}{L} \right) \coth \left(\frac{2n\pi\delta}{L} \right) \hat{f}(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (5.16)$$

Em seguida, definamos o operador auxiliar

$$\mathcal{M}_\delta := -\mathcal{T}_\delta \partial_x - \frac{1}{\delta}.$$

Daí, a equação ILW (5.15) pode ser interpretada equivalentemente como

$$u_t + 2uu_x - (\mathcal{M}_\delta u)_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+. \quad (5.17)$$

Além disto, em vista da verificação (5.16), se g for uma função L -periódica suave pertencente ao domínio de \mathcal{M}_δ , então,

$$\widehat{(\mathcal{M}_\delta g)}(n) = \left[\frac{2n\pi}{L} \coth \left(\frac{2n\pi\delta}{L} \right) - \frac{1}{\delta} \right] \hat{g}(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (5.18)$$

Façamos $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\delta$ e $p = 1$. A equação de evolução (5.1) torna-se a equação (5.17). Devido à verificação (5.18), a equação ILW aqui abordada atende à proposta detalhada na Seção 5.1. Isto indica que podemos estudar a estabilidade linear de soluções do tipo onda viajante periódica para a equação (5.17) fazendo uso do índice Hamiltoniano de Krein.

Entretanto, antes de estudarmos condições que permitem estabelecer a estabilidade linear de ondas viajantes periódicas que solucionam equação ILW (5.17), relataremos um resultado que garante a boa colocação do problema de valor inicial associado a tal equação. A boa colocação para este problema permite que obtenhamos a existência de leis de conservação relevantes para que a equação (5.17) admita a estrutura de uma equação Hamiltoniana em conformidade com (5.10).

Teorema 5.13. *Seja $u_0 \in H_{per}^s([0, L])$. Se $s = 1$ ou se $s = \frac{3}{2}$, então, existe uma função $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H_{per}^s([0, L]))$, de tal forma que u soluciona o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u_t + 2uu_x - (\mathcal{M}_\delta u)_x = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+. \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (5.19)$$

Se $s > \frac{3}{2}$ e se $l \in \mathbb{N}$ é tal que $s - 2l > -\frac{3}{2}$, então, existe uma única função u que soluciona o problema de valor inicial (5.19) e, para cada $T > 0$, $u \in C^l([0, T]; H_{per}^{s-2l}([0, L]))$. Além disto, a aplicação que associa u_0 à única solução u do problema (5.19) é contínua de $H_{per}^s([0, L])$ em $C^l([0, T]; H_{per}^{s-2l}([0, L]))$, para cada $T > 0$.

Demonstração. Ver [1], Teorema 9.1. ■

Fazendo uso dos resultados propostos por Abdelouhab, Bona, Felland e Saut, ver [1] e suas referências, e usando de resultados referentes à densidade dos espaços $H_{per}^s([0, L])$ em $L_{per}^2([0, L])$, determinamos as seguintes quantidades conservadas associadas à equação (5.17):

$$I_{-1}(u) = \int_0^L u \, dx, \quad I_0(u) = \frac{1}{2} \int_0^L u^2 \, dx$$

e

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} \int_0^L (\mathcal{M}_\delta u) u \, dx - \frac{1}{3} \int_0^L u^3 \, dx.$$

Vemos que a equação (5.17) satisfaz, supondo que a evolução u seja regular,

$$u_t = -2uu_x + (\mathcal{M}_\delta u)_x = \partial_x(-u^2 + \mathcal{M}_\delta u) = J\mathcal{E}'(u),$$

onde $J = \partial_x$. Logo, a equação ILW (5.17) admite a estrutura de uma equação Hamiltoniana abstrata, conforme comentamos anteriormente.

Na sequência, consideremos $c \in \mathbb{R}$, onde $c > 0$ é arbitrário, porém, fixado. Suponhamos que exista uma função $\varphi \in H_0$, de tal forma que

$$u(x, t) = \varphi(x - ct), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

solucione a equação ILW (5.17). Devido à verificação (5.4), existe uma constante A , de tal modo que

$$-c\varphi + \varphi^2 - (\mathcal{M}_\delta \varphi) = A. \tag{5.20}$$

Integremos a identidade (5.20) sobre o intervalo $[0, L]$. Como a função φ satisfaz a condição de média nula, isto é,

$$\int_0^L \varphi(\xi) \, d\xi = 0,$$

segue que

$$A = \frac{1}{L} \int_0^L \varphi(\xi)^2 \, d\xi.$$

Mostraremos, no que segue, a validade da seguinte premissa:

(c0) Existe uma curva suave de funções periódicas, todas de mesmo período $L > 0$,

$$c \in \mathcal{V} \mapsto \varphi_c \in H_0 \cap H_{per}^s([0, L]), \quad s \gg 1,$$

onde $\mathcal{V} \subset (0, +\infty)$ é um intervalo aberto e a função φ_c satisfaz a identidade

$$-\mathcal{M}_\delta \varphi_c - c\varphi_c + \varphi_c^2 = \frac{1}{L} \int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi, \quad \forall c \in \mathcal{V}. \quad (5.21)$$

Determinemos que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_c := \mathcal{M}_\delta + c - 2\varphi_c, \quad \forall c \in \mathcal{V}, \quad (5.22)$$

é o operador estabelecido em (c1). Também mostraremos que, para certos valores de L e δ , para cada $c \in \mathcal{V}$, o operador $\mathcal{L} = \mathcal{L}_c$ atende às condições (c1) e (c2). Com isto, será possível a aplicação do Teorema 5.11 e do Teorema 5.12, os quais tornam viável a análise da estabilidade linear das soluções do tipo onda viajante periódica

$$u(x, t) = \varphi_c(x - ct), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

para a equação ILW (5.17).

5.2.1 Existência de Ondas Viajantes Periódicas

O objetivo desta subseção é apresentar a existência de ondas viajantes L -periódicas que solucionam a equação ILW (5.17). Em [61], Parker deduziu uma classe de soluções para a equação (5.17). Dentre tais soluções, conforme uma abordagem particular, se obtém uma curva sujeita à condição (c0) acima estabelecida. Na sequência, apresentaremos, em linhas gerais, a construção determinada por Parker, [61], evidenciando as relações que existem entre os parâmetros associados.

Suponhamos, inicialmente, a existência de uma função $f : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, de tal modo que

$$u(x, t) = i \frac{\partial}{\partial x} \left[\ln \left(\frac{f(x + i\delta, t)}{f(x - i\delta, t)} \right) \right], \quad (x, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R},$$

seja uma solução da equação ILW (5.17).

Denotemos $f_+(x, t) = f(x + i\delta, t)$ e $f_-(x, t) = f(x - i\delta, t)$. Segundo Parker, [61], existe uma constante de integração B , de tal maneira que

$$\left[iD_t + \frac{i}{\delta} D_x - D_x^2 + B \right] f_+ \cdot f_- = 0, \quad (5.23)$$

onde

$$D_t^m D_x^n a(x, t) \cdot b(x, t) := (\partial_t - \partial_{t'})^m (\partial_x - \partial_{x'})^n a(x, t) b(x', t')|_{x=x', t=t'}.$$

Mais que isto, propriedades referentes aos operadores diferenciais D_t e D_x permitem deduzir em (5.23) que

$$\tilde{F}(D_t, D_x) f \cdot f = 0, \quad (5.24)$$

onde

$$\tilde{F}(D_t, D_x) \equiv i \left(D_t + \frac{1}{\delta} D_x \right) \sinh(i\delta D_x) + (D_x^2 - B) \cosh(i\delta D_x).$$

Seja $z = px + \omega t$, onde p e ω são constantes reais a serem estabelecidas. Suponhamos que

$$f(x, t) = \theta_3(z, q) := 1 + 2 \left[\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n^2} \cos(2nz) \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2inz},$$

onde $q = e^{i\pi\tau} = e^{-\frac{\pi K(k')}{K(k)}}$ é a função “nome” e $\text{Im}(\tau) > 0$. Substituindo f na identidade (5.24), temos que

$$\tilde{F}_0 \theta_3(2z, q^2) + \tilde{F}_1 q^{-\frac{1}{2}} \theta_2(2z, q^2) = 0,$$

de forma que θ_2 é a segunda função Theta de Jacobi vista na Subseção 2.3.1 e

$$\tilde{F}_m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F[2i(2n-m)\omega, 2i(2n-m)p] q^{n^2+(n-m)^2}, \quad m = 0, 1.$$

De modo que $f(x, t) = \theta_3(z, q)$ seja uma solução de (5.24), é suficiente que tenhamos $\tilde{F}_0 = \tilde{F}_1 = 0$. Por sua vez, para que seja válida esta última informação, em vista da caracterização dada à função \tilde{F} , é suficiente que tenhamos

$$\frac{1}{\delta} \left(\omega + \frac{p}{\delta} \right) A'_0 - \frac{p^2}{\delta^2} A''_0 - A_0 B = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{\delta} \left(\omega + \frac{p}{\delta} \right) A'_1 - \frac{p^2}{\delta^2} A''_1 - A_1 B = 0, \quad (5.25)$$

onde

$$A_0 = A_0(p; q, \delta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{2n^2} \cosh(4np\delta) = \theta_3(2ip\delta, q^2),$$

$$A_1 = A_1(p; q, \delta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2+(n-1)^2} \cosh[2(2n-1)p\delta] = q^{\frac{1}{2}} \theta_2(2ip\delta, q^2)$$

e, A'_0 e A'_1 caracterizam, respectivamente, as derivadas de A_0 e A_1 com respeito ao parâmetro p .

Fixados os parâmetros p , q e δ , a resolução do sistema de equações apresentado em (5.25) nos leva a determinar que

$$B = B(p; q, \delta) = \frac{p^2}{\delta^2} \cdot \frac{A'_0 A''_1 - A''_0 A'_1}{A_0 A'_1 - A'_0 A_1}$$

e

$$\omega = \omega(p; q, \delta) = -\frac{p}{\delta} + \frac{p^2}{\delta} \cdot \frac{A_0 A''_1 - A''_0 A_1}{A_0 A'_1 - A'_0 A_1} = -\frac{p}{\delta} + \frac{p^2}{\delta} \cdot \frac{\partial}{\partial p} \{ \ln[W(A_0, A_1)] \},$$

onde $W(A_0, A_1) = A_0 A'_1 - A'_0 A_1$ é o Wronskiano de A_0 e A_1 .

Fazendo uso de algumas identidades elementares que envolvem funções elípticas (para informações sobre tais identidades, referimos ao leitor [3] e [22]), concluímos que, para p , q e δ fixados, $f(x, t) = \theta_3(z, q)$ satisfaz a identidade (5.24) se

$$B = B(p; q, \delta) = -p^2 \left[\frac{\theta''_1(2ip\delta, q)}{\theta_1(2ip\delta, q)} - \frac{\theta'''_1(0, q)}{\theta'_1(0, q)} \right]$$

e

$$\omega = \omega(p; q, \delta) = -\frac{p}{\delta} + 2ip^2 \cdot \frac{\theta_1'(2ip\delta, q)}{\theta_1(2ip\delta, q)}.$$

Uma abordagem similar pode ser feita no caso em que consideramos a mudança de variável $z \mapsto \frac{z}{2}$. Vemos que se

$$B = B(p; k, \delta) = -\frac{p^2}{4} \cdot \left[\frac{\theta_1''(ip\delta, q(k))}{\theta_1(ip\delta, q(k))} - \frac{\theta_1'''(0, q(k))}{\theta_1'(0, q(k))} \right] \quad (5.26)$$

e

$$\omega = \omega(p; k, \delta) = -\frac{p}{\delta} + ip^2 \cdot \frac{\theta_1'(ip\delta, q(k))}{\theta_1(ip\delta, q(k))}, \quad (5.27)$$

onde $k \in (0, 1)$, $k' = \sqrt{1 - k^2}$, $q(k) = e^{i\pi\tau} = e^{-\frac{\pi K(k')}{K(k)}}$ é a função “nome” e

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

então,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= i \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \ln \left[\frac{\theta_3 \left(\frac{1}{2}(z - ip\delta), q(k) \right)}{\theta_3 \left(\frac{1}{2}(z + ip\delta), q(k) \right)} \right] \right\} \\ &= \frac{ip}{2} \cdot \left[\frac{\theta_3' \left(\frac{1}{2}(z - ip\delta), q(k) \right)}{\theta_3 \left(\frac{1}{2}(z - ip\delta), q(k) \right)} - \frac{\theta_3' \left(\frac{1}{2}(z + ip\delta), q(k) \right)}{\theta_3 \left(\frac{1}{2}(z + ip\delta), q(k) \right)} \right] \end{aligned} \quad (5.28)$$

é uma solução da equação ILW (5.17), no caso de termos $z = px + \omega t$.

A função u , descrita em (5.28), é L -periódica na variável espacial, onde $L := \frac{2\pi}{p}$. Além disto, para k fixado, a função $\theta_3(z, q(k))$ tem zeros simples em

$$z = \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi + \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi\tau$$

(onde m e n são inteiros quaisquer) e, desta maneira, a expressão vista em (5.28) admite uma rede de polos simples que deve ser evitada. Esta situação é contornada desde que p , δ e k satisfaçam a condição de analiticidade

$$0 < p\delta < -i\pi\tau = \pi \frac{K(k')}{K(k)}. \quad (5.29)$$

Seja $k \in (0, 1)$ fixado. Assumamos que k satisfaça

$$v(L, \delta, k) := \frac{2\delta}{L} \cdot \frac{K(k)}{K(k')} < 1. \quad (5.30)$$

Desta maneira, a condição de analiticidade vista em (5.29) está satisfeita. Assumamos também que B esteja sujeita a (5.26) e ω atenda a (5.27). Usando a fórmula 16.34.3 relatada por Abramowitz e Stegun, [3] (nesta tese, ver (2.2)), em (5.28), temos que

$$u(x, t) = u_k(x, t) = \frac{iK(k)p}{\pi} \left[Z \left(\frac{K(k)}{\pi}(z - ip\delta); k \right) - Z \left(\frac{K(k)}{\pi}(z + ip\delta); k \right) \right] \quad (5.31)$$

determina uma classe de funções L -periódicas (na variável espacial) que solucionam a equação ILW (5.17), onde Z é a função Zeta de Jacobi definida como

$$Z(x; k) := \int_0^x \left[\operatorname{dn}^2(\xi; k) - \frac{E(k)}{K(k)} \right] d\xi.$$

Em seguida, seja c um parâmetro estabelecido como

$$c := -\frac{\omega}{p} = \frac{1}{\delta} - ip \cdot \frac{\theta'_1(ip\delta, q(k))}{\theta_1(ip\delta, q(k))} = \frac{1}{\delta} - \frac{2\pi i}{L} \cdot \frac{\theta'_1\left(\frac{2\pi\delta i}{L}, q(k)\right)}{\theta_1\left(\frac{2\pi\delta i}{L}, q(k)\right)}.$$

Fazendo uso da fórmula 16.34.1 dada por Abramowitz e Stegun, [3], temos que

$$c = \frac{1}{\delta} - \frac{4iK(k)}{L} \cdot \left[Z \left(\frac{4i\delta K(k)}{L}; k \right) + \frac{\operatorname{cn}\left(\frac{4i\delta K(k)}{L}; k\right) \cdot \operatorname{dn}\left(\frac{4i\delta K(k)}{L}; k\right)}{\operatorname{sn}\left(\frac{4i\delta K(k)}{L}; k\right)} \right]. \quad (5.32)$$

Lembremos que $z := px + \omega t$ e consideremos $\xi := x - ct$. Notemos que a solução de (5.17), dada em (5.31), pode ser apresentada como

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{iK(k)p}{\pi} \left[Z \left(\frac{K(k)}{\pi}(z - ip\delta); k \right) - Z \left(\frac{K(k)}{\pi}(z + ip\delta); k \right) \right] \\ &= \frac{iK(k)p}{\pi} \left[Z \left(\frac{K(k)p}{\pi} \left(x + \frac{\omega t}{p} - i\delta \right); k \right) - Z \left(\frac{K(k)p}{\pi} \left(x + \frac{\omega t}{p} + i\delta \right); k \right) \right] \\ &= \frac{2K(k)i}{L} \left[Z \left(\frac{2K(k)}{L}(x - ct - i\delta); k \right) - Z \left(\frac{2K(k)}{L}(x - ct + i\delta); k \right) \right]. \end{aligned}$$

Esta última expressão nos leva a introduzir a função

$$\varphi_c(\xi) := \varphi_c(L, \delta, k, \xi) = \frac{2K(k)i}{L} \left[Z \left(\frac{2K(k)}{L}(\xi - i\delta); k \right) - Z \left(\frac{2K(k)}{L}(\xi + i\delta); k \right) \right]. \quad (5.33)$$

Por construção, $\varphi_c \in H_0$. Além disto, a função par φ_c determina uma solução do tipo onda viajante L -periódica para a equação ILW (5.17), pois, φ_c satisfaz a identidade

$$-\mathcal{M}_\delta \varphi_c - c\varphi_c + \varphi_c^2 = \frac{1}{L} \int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi. \quad (5.34)$$

Notemos que o parâmetro c e a função φ_c são reais. Inicialmente, aplicando a fórmula 143.01 - ver Byrd e Friedman, [22] - na identidade (5.33), temos que

$$\begin{aligned} \varphi_c(\xi) = & -\frac{4K(k)}{L} \cdot Z\left(\frac{2K(k)\delta}{L}; k'\right) - \frac{4\delta\pi}{L^2} \cdot \frac{K(k)}{K(k')} \\ & + \frac{4K(k)}{L} \cdot \frac{\operatorname{dn}\left(\frac{2K(k)\xi}{L}; k\right)^2 \cdot \operatorname{cn}\left(\frac{2K(k)\delta}{L}; k'\right) \cdot \operatorname{sn}\left(\frac{2K(k)\delta}{L}; k'\right) \cdot \operatorname{dn}\left(\frac{2K(k)\delta}{L}; k'\right)}{1 - \operatorname{dn}\left(\frac{2K(k)\xi}{L}; k\right)^2 \cdot \operatorname{sn}\left(\frac{2K(k)\delta}{L}; k'\right)^2}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

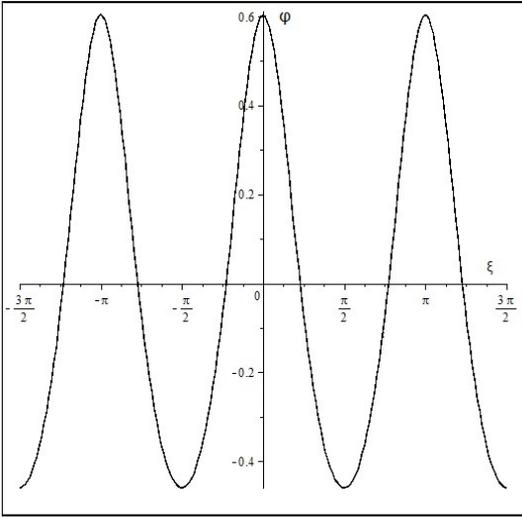


Figura 5.1: Gráfico da função φ_c em (5.35). Neste caso, $L = \pi$, $\delta = 1$ e $k = 0,5$. O valor de c é de aproximadamente $-1,00282166$.

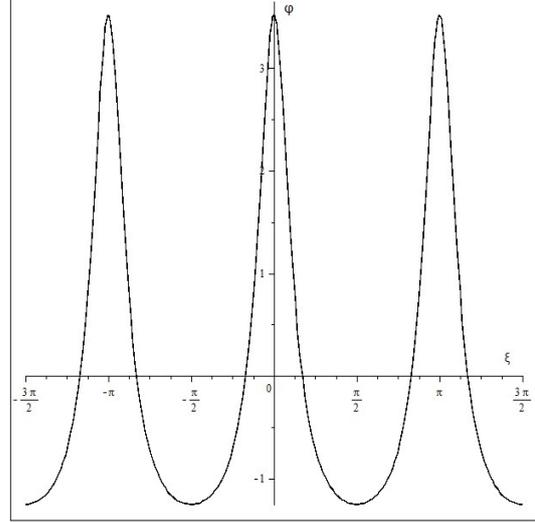


Figura 5.2: Gráfico da função φ_c em (5.35). Neste caso, $L = \pi$, $\delta = 1$ e $k = 0,8$. O valor de c é de aproximadamente $0,058332455$.

Em seguida, apliquemos as fórmulas 143.02, 161.01 e 120.02 em [22] na expressão que denota c em (5.32). Temos que

$$\begin{aligned} c = & \frac{1}{\delta} - \frac{8\pi\delta K(k)}{L^2 K(k')} - \frac{4K(k)}{L} \cdot Z\left(\frac{4\delta K(k)}{L}; k'\right) \\ & - \frac{4K(k)}{L} \cdot \frac{\operatorname{cn}\left(\frac{4\delta K(k)}{L}; k'\right) \cdot \operatorname{dn}\left(\frac{4\delta K(k)}{L}; k'\right)}{\operatorname{sn}\left(\frac{4\delta K(k)}{L}; k'\right)}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Notemos que para L e δ fixados, a função $c = c(k)$, determinada em (5.36), é dife-

reenciável com relação ao parâmetro k . Fazendo as devidas simplificações, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dk}[c(k)] &= -\frac{4}{L^2 \cdot k \cdot (1 - k^2) \cdot K(k')^2 \cdot \operatorname{sn}\left(\frac{4K(k)\delta}{L}; k'\right)^2} \\
&\times \left\{ L \cdot K(k')^2 \cdot Z\left(\frac{4K(k)\delta}{L}; k'\right) \cdot \left[\operatorname{sn}\left(\frac{4K(k)\delta}{L}; k'\right)^2 \cdot E(k) - K(k) \right] \right. \\
&+ L \cdot E(k) \cdot K(k')^2 \cdot \operatorname{sn}\left(\frac{4K(k)\delta}{L}; k'\right) \cdot \operatorname{cn}\left(\frac{4K(k)\delta}{L}; k'\right) \cdot \operatorname{dn}\left(\frac{4K(k)\delta}{L}; k'\right) \quad (5.37) \\
&+ 2 \cdot \delta \cdot [K(k') \cdot E(k) - K(k') \cdot K(k) + E(k') \cdot K(k)] \\
&\times \left. \left[-2 \cdot K(k) \cdot K(k') + [\pi + 2 \cdot K(k) \cdot (K(k') - E(k'))] \cdot \operatorname{sn}\left(\frac{4K(k)\delta}{L}; k'\right)^2 \right] \right\}.
\end{aligned}$$

5.2.2 1º Caso: $L = \pi$ e $\delta = 1$

Nesta subseção, faremos a análise da estabilidade linear de soluções do tipo onda viajante periódica para a equação ILW (5.17), no caso particular em que $L = \pi$ e $\delta = 1$.

Seja v a função definida em (5.30). Com auxílio do programa *Maple 16*, verificamos que, para cada $k \in (0, k_1)$, onde $k_1 \approx 0,944085037$, $v(\pi, 1, k) < 1$. Ou seja, sobre o intervalo $(0, k_1)$, estão bem definidas as fórmulas de φ_c e $c = c(k) = c(\pi, 1, k)$, dadas respectivamente em (5.35) e (5.36). Graficamente, temos que $c(k)$ é uma função estritamente crescente sobre o intervalo $(0, k_1)$. Daí,

$$\frac{d}{dk}[c(k)] > 0, \quad \forall k \in (0, k_1). \quad (5.38)$$

Nesta conjuntura, temos que $c(0) = \lim_{k \rightarrow 0^+} c(k) \approx -1,07462944$ e $\lim_{k \rightarrow k_1^-} c(k) = +\infty$. Em verdade, pela desigualdade proposta em (5.38), há uma relação biunívoca entre $k \in (0, k_1)$ e $c \in (c(0), +\infty)$. Finalmente, observamos a existência de $k_0 \approx 0,795178532$, de tal maneira que

$$c(k_0) = 0 \quad \text{e} \quad c(k) > 0, \quad \forall k \in (k_0, k_1). \quad (5.39)$$

No caso em que $L = \pi$ e $\delta = 1$, a Figura 5.3 apresenta o comportamento da função $c(k)$ e a Figura 5.4 apresenta o comportamento da função $c'(k)$.

Em seguida, mostraremos que o operador $\mathcal{L} = \mathcal{L}_c$ atende às condições (c1) e (c2), para cada $c \in (0, +\infty)$.

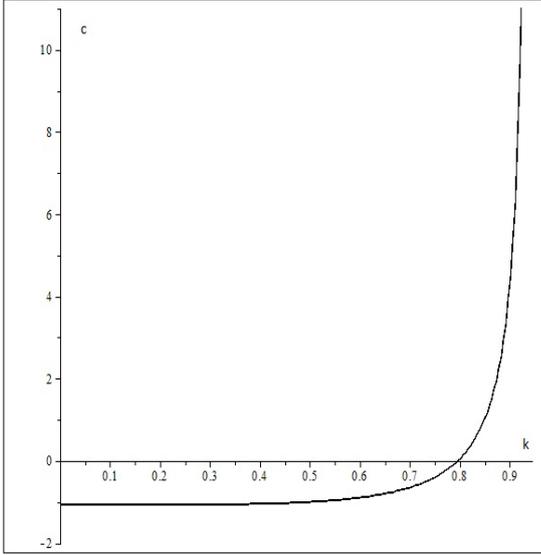


Figura 5.3: Gráfico da função $c(k)$, em (5.36), no caso em que $L = \pi$ e $\delta = 1$.

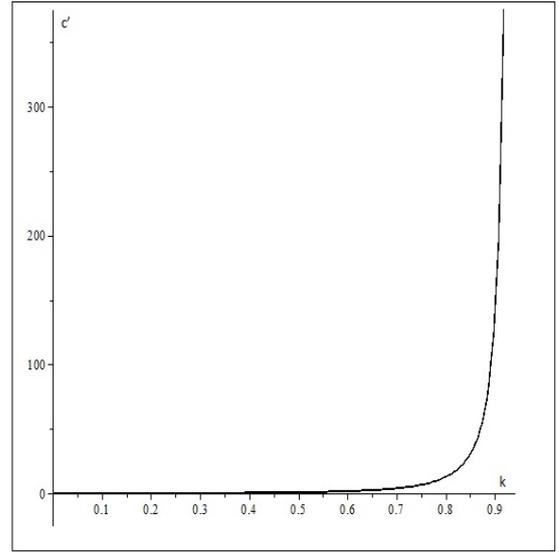


Figura 5.4: Gráfico da função $c'(k)$, em (5.37), no caso em que $L = \pi$ e $\delta = 1$.

Análise Espectral do Operador \mathcal{L}_0

Seja o operador

$$\mathcal{L}_0 := \mathcal{M}_\delta + \frac{1}{\delta}.$$

Ao longo da abordagem, mostraremos que o operador \mathcal{L}_0 é autoadjunto e que o operador $(\mathcal{L}_0)^{-1}$ está bem definido, é compacto e autoadjunto. Além disto, apresentaremos o comportamento dos autovalores do operador \mathcal{L}_0 .

Proposição 5.14. *O operador $\mathcal{L}_0 := \mathcal{M}_\delta + \frac{1}{\delta}$ é autoadjunto sobre o espaço $L^2_{per}([0, L])$.*

Demonstração. Afirmamos, inicialmente, que o operador \mathcal{M}_δ é simétrico. Com efeito, sejam $u, v \in D(\mathcal{M}_\delta) \subset L^2_{per}([0, L])$. Temos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{M}_\delta u, v \rangle &= L \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\widehat{\mathcal{M}_\delta u}](n) \overline{\widehat{v}(n)} \\ &= L \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2n\pi}{L} \coth\left(\frac{2n\pi\delta}{L}\right) - \frac{1}{\delta} \right] \widehat{u}(n) \overline{\widehat{v}(n)} \\ &= L \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{u}(n) \overline{\left[\frac{2n\pi}{L} \coth\left(\frac{2n\pi\delta}{L}\right) - \frac{1}{\delta} \right] \widehat{v}(n)} \\ &= L \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{u}(n) \overline{[\widehat{\mathcal{M}_\delta v}](n)} = \langle u, \mathcal{M}_\delta v \rangle. \end{aligned}$$

Como consequência, o operador \mathcal{L}_0 também é simétrico.

Afirmamos que o operador \mathcal{L}_0 é sobrejetivo. Com efeito, seja $f \in L_{per}^2([0, L])$. Em particular, $(\widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2$. Consideremos a função $u \in D(\mathcal{L}_0)$, de forma que

$$\widehat{u}(n) = \left[\frac{2n\pi}{L} \coth \left(\frac{2n\pi\delta}{L} \right) - \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta} \right]^{-1} \widehat{f}(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Assim,

$$(\widehat{\mathcal{L}_0 u})(n) = \left[\frac{2n\pi}{L} \coth \left(\frac{2n\pi\delta}{L} \right) \right] \widehat{u}(n) = \widehat{f}(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

e, conseqüentemente, $\mathcal{L}_0 u = f$.

Como \mathcal{L}_0 é um operador simétrico e sobrejetivo, segue que \mathcal{L}_0 é um operador autoadjunto. ■

Proposição 5.15. *Seja o operador*

$$R := \left(\mathcal{M}_\delta + \frac{1}{\delta} \right)^{-1}.$$

Então, R é um operador compacto e autoadjunto e, adicionalmente, existe $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, o conjunto infinito e enumerável de autovalores do operador \mathcal{L}_0 sobre $L_{per}^2([0, L])$, que satisfaz à cadeia de desigualdades

$$0 < \mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$$

Demonstração. Afirmamos que o operador \mathcal{L}_0 é positivo. Com efeito, seja $u \in D(\mathcal{L}_0)$. Vemos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_0 u, u \rangle &= L \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\widehat{\mathcal{L}_0 u}](n) \overline{\widehat{u}(n)} \\ &= L \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2n\pi}{L} \coth \left(\frac{2n\pi\delta}{L} \right) - \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta} \right] \widehat{u}(n) \overline{\widehat{u}(n)} \\ &\geq \delta^{-1} L \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{u}(n) \overline{\widehat{u}(n)} = \delta^{-1} \|u\|_{L_{per}^2}^2. \end{aligned}$$

Como consequência, o operador \mathcal{L}_0 é injetivo.

Na prova da Proposição 5.14, temos que o operador \mathcal{L}_0 é sobrejetivo e, portanto, é invertível. Desta maneira, o operador

$$R := (\mathcal{L}_0)^{-1} = \left(\mathcal{M}_\delta + \frac{1}{\delta} \right)^{-1} : L_{per}^2([0, L]) \rightarrow D(\mathcal{L}_0)$$

está bem definido. Além disto, para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$[\widehat{Ru}](n) = \left[\frac{2n\pi}{L} \coth \left(\frac{2n\pi\delta}{L} \right) \right]^{-1} \cdot \widehat{u}(n).$$

Afirmamos que o operador R é limitado. Com efeito, seja $u \in L^2_{per}([0, L])$. Temos que

$$\begin{aligned} \|Ru\|_{L^2_{per}}^2 &= L \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\widehat{Ru}(n)] \overline{[\widehat{Ru}(n)]} \\ &= L \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2n\pi}{L} \coth\left(\frac{2n\pi\delta}{L}\right) \right]^{-2} \widehat{u}(n) \overline{\widehat{u}(n)} \\ &\leq \delta^2 L \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{u}(n)|^2 = \delta^2 \|u\|_{L^2_{per}}^2, \end{aligned}$$

o que é suficiente para provar que $\|Ru\|_{L^2_{per}} \leq \delta \|u\|_{L^2_{per}}$.

Em seguida, afirmamos que o operador R é de Hilbert-Schmidt sobre o espaço $L^2_{per}([0, L])$. Ou seja, consideremos que $\{e_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ seja uma base ortonormal de $L^2_{per}([0, L])$, de forma que

$$\begin{cases} \widehat{e}_j(n) = 0, & \text{se } j \neq n, \\ \widehat{e}_n(n) = \frac{1}{\sqrt{L}}, & \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Mostraremos que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|Re_j\|_{L^2_{per}}^2 < +\infty.$$

De fato, para cada $j \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\begin{aligned} \|Re_j\|_{L^2_{per}}^2 &= L \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [\widehat{Re_j}(n)] \overline{[\widehat{Re_j}(n)]} \\ &= L \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2n\pi}{L} \coth\left(\frac{2n\pi\delta}{L}\right) \right]^{-2} \widehat{e}_j(n) \overline{\widehat{e}_j(n)} \end{aligned}$$

e, daí,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|Re_j\|_{L^2_{per}}^2 &= L \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2n\pi}{L} \coth\left(\frac{2n\pi\delta}{L}\right) \right]^{-2} \widehat{e}_j(n) \overline{\widehat{e}_j(n)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2n\pi}{L} \coth\left(\frac{2n\pi\delta}{L}\right) \right]^{-2} \cdot \left[L \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\widehat{e}_j(n)|^2 \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2n\pi}{L} \coth\left(\frac{2n\pi\delta}{L}\right) \right]^{-2}. \end{aligned}$$

Nosso próximo passo é mostrar que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2n\pi}{L} \coth\left(\frac{2n\pi\delta}{L}\right) \right]^{-2} < +\infty. \quad (5.40)$$

Para atingir este propósito, consideremos a função

$$x \mapsto \frac{4\pi^2 x^2}{L^2} \coth\left(\frac{2\pi\delta x}{L}\right)^2, \quad (5.41)$$

que é par e estritamente crescente sobre o intervalo $(0, +\infty)$. Notemos que se $x > 0$, a desigualdade

$$\frac{4\pi^2}{L^2} \leq \frac{4\pi^2}{L^2} \coth\left(\frac{2\pi\delta x}{L}\right)^2$$

é válida. Isto implica que

$$\left[\frac{2\pi x}{L} \coth\left(\frac{2\pi\delta x}{L}\right)\right]^{-2} \leq \frac{L^2}{4\pi^2 x^2}.$$

Desta maneira,

$$\int_1^\infty \left[\frac{2\pi x}{L} \coth\left(\frac{2\pi\delta x}{L}\right)\right]^{-2} dx \leq \frac{L^2}{4\pi^2} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{L^2}{4\pi^2}. \quad (5.42)$$

Em vista de (5.42), fazendo uso do teste da integral, temos que a série

$$\sum_{n=1}^\infty \left[\frac{2n\pi}{L} \coth\left(\frac{2n\pi\delta}{L}\right)\right]^{-2} < +\infty. \quad (5.43)$$

Devido ao fato de que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x\pi}{L} \coth\left(\frac{2x\pi\delta}{L}\right)\right]^{-2} = \delta^2$$

e que a função dada em (5.41) é par, com x variando sobre a reta, o mesmo raciocínio aplicado para deduzir (5.43) conclui a validade de (5.40). Portanto, R é um operador de Hilbert-Schmidt sobre $L_{per}^2([0, L])$.

Por consequência, R é um operador compacto (ver [60], Teorema 26.5). Mais que isto, como \mathcal{L}_0 é um operador autoadjunto e invertível, segue que R é um operador autoadjunto.

Afirmamos que 0 não é um autovalor do operador R . Suponhamos, por absurdo, que exista $u \in L_{per}^2([0, L])$, $u \neq 0$, de forma que $Ru = 0$. Daí, para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\left[\frac{2n\pi}{L} \coth\left(\frac{2n\pi\delta}{L}\right)\right]^{-1} \widehat{u}(n) = [\widehat{Ru}](n) = 0.$$

Como $u \neq 0$, existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ de tal forma que $\widehat{u}(n_0) \neq 0$ e, portanto,

$$\left[\frac{2n_0\pi}{L} \coth\left(\frac{2n_0\pi\delta}{L}\right)\right]^{-1} = 0.$$

Isto não ocorre e 0 não é um autovalor do operador R .

Como R é um operador compacto e autoadjunto, podemos aplicar o Teorema Espectral (ver [60], Teorema 30.11). Daí, existe uma base ortonormal $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $L_{per}^2([0, L])$, constituída pelas autofunções de R . Para cada $n \in \mathbb{N}$, entendemos que a autofunção ψ_n está associada ao autovalor real não-nulo λ_n . Mais que isto, temos que

$$\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots > 0$$

e $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Temos que $R\psi_n = \lambda_n\psi_n$. Em particular, aplicando \mathcal{L}_0 em ambos os lados desta igualdade, $\frac{1}{\lambda_n} \cdot \psi_n = \mathcal{L}_0\psi_n$. Definamos $\mu_n := \frac{1}{\lambda_n}$. Temos que $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ caracteriza um conjunto de autofunções do operador \mathcal{L}_0 e a ordenação

$$0 < \mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$$

é verificada, com $\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

Sabemos que o operador \mathcal{L}_0 é autoadjunto e que $\sigma(\mathcal{L}_0) \subset \mathbb{R}$. Suponhamos que $\mu \in \mathbb{R}$ seja um autovalor do operador \mathcal{L}_0 . Obviamente, $\mu \neq 0$. Além disto, existe uma função $\psi \in D(\mathcal{L}_0)$ tal que $\psi \neq 0$ e $\mathcal{L}_0\psi = \mu\psi$. Como consequência, $R\psi = \frac{1}{\mu} \cdot \psi$. Daí, $\mu = \frac{1}{\lambda_n}$ e $\psi = \psi_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Isto conclui que $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ constitui o conjunto de todos os autovalores do operador \mathcal{L}_0 , o que finaliza a prova desta Proposição. ■

Observação 5.16. *Podemos determinar explicitamente quais são os autovalores do operador \mathcal{L}_0 dados na Proposição 5.15.*

Determinamos que

$$\left\{ \frac{2n\pi}{L} \coth\left(\frac{2n\pi\delta}{L}\right); n \in \mathbb{N} \right\}$$

constitui o conjunto de todos os autovalores do operador \mathcal{L}_0 .

Em verdade, $\lim_{n \rightarrow 0} \left[\frac{2n\pi}{L} \coth\left(\frac{2n\pi\delta}{L}\right) \right] = \frac{1}{\delta}$ é um autovalor simples de \mathcal{L}_0 e o número real $\frac{2n\pi}{L} \coth\left(\frac{2n\pi\delta}{L}\right)$ é um autovalor de multiplicidade 2, para cada $n \geq 1$. Finalmente, $\sigma_p(\mathcal{L}_0) \subset \left[\frac{1}{\delta}, +\infty \right)$.

Sem perda de generalidade, assumamos que

$$\mu_n := \frac{2n\pi}{L} \coth\left(\frac{2n\pi\delta}{L}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é o conjunto dos autovalores do operador \mathcal{L}_0 .

Seja \mathcal{L}_c o operador definido em (5.22). Notemos que

$$\mathcal{L}_c = \mathcal{M}_\delta + c - 2\varphi_c = \left(\mathcal{M}_\delta + \frac{1}{\delta} \right) + \left(c - \frac{1}{\delta} - 2\varphi_c \right) = \mathcal{L}_0 + (\kappa - 2\varphi_c),$$

onde $\kappa := c - \frac{1}{\delta}$ é uma constante real. Definamos o operador auxiliar $\mathcal{B} := \kappa - 2\varphi_c$. Em seguida, provaremos o resultado que contempla a validade da exigência (c1).

Proposição 5.17. *São válidos os seguintes resultados:*

(i) *Seja $r = 0$. Existem constantes $\tilde{a} > 0$ e $b > 0$, tais que*

$$\|\mathcal{B}u\|_{L^2_{per}} \leq \tilde{a}\|u\|_{L^2_{per}} + b\|\mathcal{L}_0|^r u\|_{L^2_{per}}, \quad \forall u \in L^2_{per}([0, L]).$$

(ii) Existe $l \geq 1$, tal que $\sum_{n=0}^{+\infty} |\mu_n|^{-l} < +\infty$.

(iii) Existe uma subsequência de autovalores do operador \mathcal{L}_0 , $\{\mu_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$, e existem constantes $\tilde{c} > 0$ e $r' > 0$, tais que $\mu_{n_{j+1}} - \mu_{n_j} \geq \tilde{c} \cdot \mu_{n_{j+1}}^{r'}$.

Demonstração. Notemos que a função φ_c é limitada. Desta maneira, existe uma constante $\tilde{K} > 0$ tal que

$$\|\mathcal{B}u\|_{L_{per}^2} \leq \tilde{K}\|u\|_{L_{per}^2} \leq \tilde{K}\|u\|_{L_{per}^2} + \| |\mathcal{L}_0|^0 u \|_{L_{per}^2}, \quad \forall u \in L_{per}^2([0, L]).$$

Fazendo $\tilde{a} = \tilde{K}$ e $b = 1$, verificamos a validade do item (i).

Seja $l = 2$. Em vista da verificação de (5.40), temos a validade do item (ii).

Finalmente, lembremos que a função

$$x \mapsto \frac{2\pi x}{L} \coth\left(\frac{2\pi \delta x}{L}\right)$$

é crescente sobre o intervalo $(0, +\infty)$ e que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2\pi x}{L} \coth\left(\frac{2\pi \delta x}{L}\right) \right] = +\infty.$$

Assim, é possível estabelecer uma sequência de índices naturais $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de forma que $\mu_{n_{j+1}} > 2\mu_{n_j}$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Isto, por sua vez, é suficiente para que tenhamos

$$\mu_{n_{j+1}} - \mu_{n_j} > \mu_{n_{j+1}} - \frac{\mu_{n_{j+1}}}{2} = \frac{\mu_{n_{j+1}}}{2}, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

o que demonstra a validade do item (iii) no caso em que $\tilde{c} = \frac{1}{2}$ e que $r' = 1$. ■

Análise Espectral do Operador \mathcal{L}_c

Em seguida, estudaremos propriedades espectrais do operador

$$\mathcal{L}_c := \mathcal{M}_\delta + c - 2\varphi_c,$$

definido em (5.22). Antes, entretanto, será preciso que estudemos algumas noções e resultados elementares de positividade que são detalhados por Angulo e Natali, [12] e [11].

Definição 5.18. Dizemos que uma sequência $\gamma = \{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ está na classe $PF(2)$ discreto no sentido estrito se:

(i) $\gamma_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$;

(ii) $\gamma_{n_1 - m_1} \gamma_{n_2 - m_2} - \gamma_{n_1 - m_2} \gamma_{n_2 - m_1} > 0$, para $n_1 < n_2$ e $m_1 < m_2$.

A Definição 5.18 nada mais é do que uma discretização da definição usual que é tratada no caso contínuo.

Definição 5.19. *Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real. Dizemos que a função g está na classe $PF(2)$ contínuo no sentido estrito se:*

$$(i) \quad g(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$(ii) \quad g(x_1 - y_1) \cdot g(x_2 - y_2) - g(x_1 - y_2) \cdot g(x_2 - y_1) > 0, \quad \text{para } x_1 < x_2 \text{ e } y_1 < y_2.$$

A função $g(x) = \operatorname{sech}(x)^2$ está na classe $PF(2)$ contínuo no sentido estrito. O lema abaixo, determinado por Albert e Bona, ver [5], apresenta uma condição suficiente para que uma função contínua esteja na classe $PF(2)$ contínuo no sentido estrito.

Lema 5.20. *Suponhamos que g seja uma função estritamente positiva, duas vezes diferenciável sobre \mathbb{R} e que g satisfaça*

$$\frac{d^2}{dx^2} [\log(g(x))] < 0, \quad \forall x \neq 0.$$

Então, $g \in PF(2)$ contínuo no sentido estrito.

Demonstração. Ver [5]. ■

O resultado mais representativo feito em [12] (e também em [11]) e que nos permite estudar propriedades espectrais do operador \mathcal{L}_c está enunciado a seguir.

Teorema 5.21. *Suponhamos que $\varsigma > 0$ e que ϕ_ς seja uma função par e estritamente positiva que atende à identidade*

$$-\mathcal{M}_\delta \phi_\varsigma - \varsigma \phi_\varsigma + \phi_\varsigma^2 = 0. \tag{5.44}$$

Suponhamos também que $\widehat{\phi}_\varsigma \in PF(2)$ discreto no sentido estrito. Então, o operador

$$\mathcal{L}_\varsigma := \mathcal{M}_\delta + \varsigma - 2\phi_\varsigma$$

possui somente um autovalor estritamente negativo, o qual é simples e 0 é também um autovalor simples do operador \mathcal{L}_ς associado à autofunção ϕ'_ς . Além disto, existe uma constante $\varepsilon > 0$ para qual existe somente uma quantidade finita de elementos $\chi < \varepsilon$ que pertencem ao espectro de \mathcal{L}_ς .

Demonstração. Ver [12]. ■

Usaremos o Teorema 5.21, de modo a provar o seguinte resultado que contempla a validade da imposição (c2):

Teorema 5.22. *Seja $k \in (0, k_1)$. O operador \mathcal{L}_c é autoadjunto e $\ker(\mathcal{L}_c) = \text{span}\{\varphi'_c\}$. Além disto, o espectro de \mathcal{L}_c é constituído por uma sequência de números reais de modo que existe uma constante $\varepsilon > 0$ para qual existe somente uma quantidade finita de elementos $\chi < \varepsilon$ que pertencem ao espectro de \mathcal{L}_c . Finalmente, $n(\mathcal{L}_c) = 1$.*

Demonstração. Lembremos que \mathcal{L}_0 é um operador autoadjunto e que $\mathcal{B} = \kappa - 2\varphi_c$ é um operador simétrico e limitado. Estas informações combinadas concluem que o operador $\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_0 + \mathcal{B}$ é autoadjunto.

Seja $k \in (0, k_1)$. Temos que a função φ_c , descrita em (5.35), satisfaz a condição (5.34). Desta maneira, para cada $c = c(k) \in (c(0), +\infty)$ estabelecido em (5.36), vale a identidade

$$-\mathcal{M}_\delta \varphi_c - c\varphi_c + \varphi_c^2 = \frac{1}{L} \int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi.$$

Definamos as funções

$$M(k) := \int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi \quad \text{e} \quad S(k) := \frac{M(k)}{L},$$

para cada $k \in (0, k_1)$.

Em seguida, estudaremos particularidades da função $M(k)$. Consideremos as seguintes notações:

$$m_1 := \frac{4K(k)}{L} \cdot \text{cn} \left(\frac{2K(k)\delta}{L}; k' \right) \cdot \text{sn} \left(\frac{2K(k)\delta}{L}; k' \right) \cdot \text{dn} \left(\frac{2K(k)\delta}{L}; k' \right), \quad (5.45)$$

$$m_2 := \text{sn} \left(\frac{2K(k)\delta}{L}; k' \right)^2, \quad (5.46)$$

$$m_3 := -\frac{4K(k)}{L} \cdot Z \left(\frac{2K(k)\delta}{L}; k' \right) - \frac{4\delta\pi}{L^2} \cdot \frac{K(k)}{K(k')} \quad \text{e} \quad m_4 := \frac{2K(k)}{L}. \quad (5.47)$$

Usando as notações (5.45), (5.46) e (5.47) na função (5.35), temos que

$$\varphi_c(\xi) = m_1 \cdot \frac{\text{dn}(m_4 \cdot \xi; k)^2}{1 - m_2 \cdot \text{dn}(m_4 \cdot \xi; k)^2} + m_3 \quad (5.48)$$

e, por consequência,

$$\begin{aligned} M(k) &= \int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi = m_1^2 \cdot \int_0^L \frac{\text{dn}(m_4 \cdot \xi; k)^4}{[1 - m_2 \cdot \text{dn}(m_4 \cdot \xi; k)^2]^2} d\xi \\ &+ 2m_1m_3 \cdot \int_0^L \frac{\text{dn}(m_4 \cdot \xi; k)^2}{1 - m_2 \cdot \text{dn}(m_4 \cdot \xi; k)^2} d\xi + Lm_3^2. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Pela fórmula 410.04 dada por Byrd e Friedman, ver [22], temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^L \frac{\operatorname{dn}(m_4 \cdot \xi; k)^2}{1 - m_2 \cdot \operatorname{dn}(m_4 \cdot \xi; k)^2} d\xi &= \frac{1}{m_4} \cdot \int_0^{m_4 \cdot L} \frac{\operatorname{dn}(\zeta; k)^2}{1 - m_2 \cdot \operatorname{dn}(\zeta; k)^2} d\zeta \\
&= \frac{1}{m_4} \cdot \int_0^{2K(k)} \frac{\operatorname{dn}(\zeta; k)^2}{1 - m_2 + m_2 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}(\zeta; k)^2} d\zeta \\
&= \frac{2}{m_4 \cdot (1 - m_2)} \cdot \int_0^{K(k)} \frac{\operatorname{dn}(\zeta; k)^2}{1 - \alpha^2 \cdot \operatorname{sn}(\zeta; k)^2} d\zeta \\
&= \frac{2}{m_4 \cdot (1 - m_2)} \cdot \left[\frac{\pi \cdot (k^2 - \alpha^2) \cdot \Lambda_0(\psi, k)}{2\sqrt{\alpha^2 \cdot (1 - \alpha^2) \cdot (\alpha^2 - k^2)}} \right],
\end{aligned} \tag{5.50}$$

onde

$$\alpha^2 = -\frac{m_2 \cdot k^2}{1 - m_2} < 0 \text{ (quando } m_2 \neq 1), \quad \psi = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - k^2}} \right) \tag{5.51}$$

e Λ_0 é a função Lambda de Heuman dada por

$$\Lambda_0(\psi, k) = \frac{2}{\pi} \cdot [E(k) \cdot F(\psi, k') + K(k) \cdot E(\psi, k') - K(k) \cdot F(\psi, k')], \tag{5.52}$$

com

$$E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}} dt, \quad E(\psi, k') = \int_0^\psi \sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2(\theta)} d\theta \tag{5.53}$$

e

$$F(\psi, k') = \int_0^\psi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2(\theta)}}. \tag{5.54}$$

Finalmente, pela fórmula 410.08 dada por [22],

$$\begin{aligned}
\int_0^L \frac{\operatorname{dn}(m_4 \cdot \xi; k)^4}{[1 - m_2 \cdot \operatorname{dn}(m_4 \cdot \xi; k)^2]^2} d\xi &= \frac{1}{m_4} \cdot \int_0^{m_4 \cdot L} \frac{[\operatorname{dn}(\zeta; k)^2]^2}{[1 - m_2 \cdot \operatorname{dn}(\zeta; k)^2]^2} d\zeta \\
&= \frac{1}{m_4} \cdot \int_0^{2K(k)} \frac{[1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}(\zeta; k)^2]^2}{[1 - m_2 + m_2 \cdot k^2 \cdot \operatorname{sn}(\zeta; k)^2]^2} d\zeta \\
&= \frac{2}{m_4 \cdot (1 - m_2)^2} \cdot \int_0^{K(k)} \frac{[1 - k^2 \cdot \operatorname{sn}(\zeta; k)^2]^2}{[1 - \alpha^2 \cdot \operatorname{sn}(\zeta; k)^2]^2} d\zeta \\
&= \frac{2}{m_4 \cdot (1 - m_2)^2} \cdot \frac{1}{\alpha^4} \cdot [k^4 \cdot K(k) \\
&\quad + 2 \cdot k^2 \cdot (\alpha^2 - k^2) \cdot \Pi(\alpha^2, k) + (\alpha^2 - k^2)^2 \cdot V_2],
\end{aligned} \tag{5.55}$$

onde

$$\Pi(\alpha^2, k) = \frac{k^2 \cdot K(k)}{k^2 - \alpha^2} - \frac{\pi \cdot \alpha^2 \cdot \Lambda_0(\psi, k)}{2\sqrt{\alpha^2 \cdot (1 - \alpha^2)} \cdot (\alpha^2 - k^2)} \quad (5.56)$$

e

$$\begin{aligned} V_2 = & \frac{1}{2 \cdot (\alpha^2 - 1) \cdot (k^2 - \alpha^2)} \cdot \left\{ \frac{[2 \cdot k^4 \cdot \alpha^2 - 2 \cdot k^4 + \alpha^4 \cdot (1 - k^2)] \cdot K(k)}{k^2 - \alpha^2} \right. \\ & \left. + \alpha^2 \cdot E(k) - \frac{\pi \cdot (2 \cdot \alpha^2 \cdot k^2 + 2 \cdot \alpha^2 - \alpha^4 - 3 \cdot k^2) \cdot \alpha^2 \cdot \Lambda_0(\psi, k)}{2\sqrt{\alpha^2 \cdot (1 - \alpha^2)} \cdot (\alpha^2 - k^2)} \right\}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Preservando as informações dadas em (5.45)-(5.57), temos que

$$\begin{aligned} M(k) = & \int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi = \frac{2 \cdot m_1^2}{m_4 \cdot (1 - m_2)^2} \cdot \frac{1}{\alpha^4} \cdot [k^4 \cdot K(k) \\ & + 2 \cdot k^2 \cdot (\alpha^2 - k^2) \cdot \Pi(\alpha^2, k) + (\alpha^2 - k^2)^2 \cdot V_2] \\ & + \frac{2 \cdot m_1 \cdot m_3}{m_4 \cdot (1 - m_2)} \cdot \left[\frac{\pi \cdot (k^2 - \alpha^2) \cdot \Lambda_0(\psi, k)}{\sqrt{\alpha^2 \cdot (1 - \alpha^2)} \cdot (\alpha^2 - k^2)} \right] + Lm_3^2. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Na sequência, para cada $k \in (0, k_1)$, notemos a existência de $a = a(k) > 0$, de forma que

$$a^2 + ca - S = 0. \quad (5.59)$$

Em verdade,

$$a = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4S}}{2}. \quad (5.60)$$

No caso particular em que $L = \pi$ e $\delta = 1$, a Figura 5.5 mostra que, independentemente da escolha de $k \in (0, k_1)$, temos a relação

$$a > - \min_{\xi \in [0, L]} \varphi_c(\xi) = -\varphi_c \left(\frac{L}{2} \right). \quad (5.61)$$

Definamos a constante $\varsigma := c + 2a = \sqrt{c^2 + 4S} > 0$ e denotemos a função $\phi_\varsigma := a + \varphi_c$. Fazendo uso da relação (5.61), temos que $\phi_\varsigma > 0$. Além disto, como φ_c é uma função par, então, ϕ_ς também é par. Em seguida, afirmamos que a função ϕ_ς atende à identidade (5.44). De fato, em vista de (5.34) e (5.59),

$$\begin{aligned} -\mathcal{M}_\delta \phi_\varsigma - \varsigma \phi_\varsigma + \phi_\varsigma^2 &= -\mathcal{M}_\delta \phi_\varsigma - c \phi_\varsigma - 2a \phi_\varsigma + \phi_\varsigma^2 \\ &= -\mathcal{M}_\delta \varphi_c - c(\varphi_c + a) - 2a(\varphi_c + a) + (\varphi_c + a)^2 \\ &= -\mathcal{M}_\delta \varphi_c - c \varphi_c + \varphi_c^2 - S = 0. \end{aligned}$$

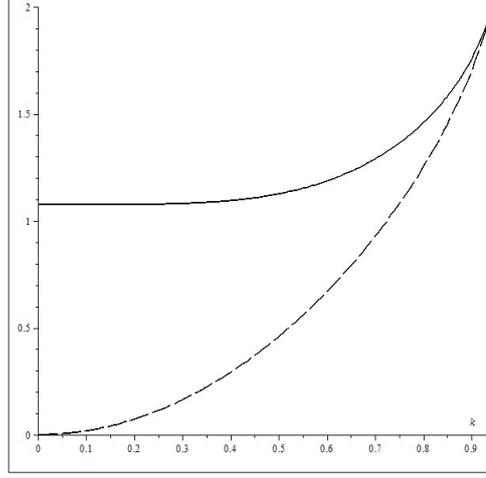


Figura 5.5: Suponhamos que $L = \pi$ e $\delta = 1$. A linha contínua caracteriza o comportamento de a dado em (5.60) conforme a variação de k sobre o intervalo $(0, k_1)$. A linha tracejada caracteriza o comportamento de $-\varphi_c(0, 5 \cdot L)$ conforme a variação de k sobre o intervalo $(0, k_1)$.

No que segue, verificaremos que, para cada $k \in (0, k_1)$, $\widehat{\phi}_\zeta \in PF(2)$ discreto no sentido estrito. Lembremos que k satisfaz a relação (5.30). Apliquemos a fórmula 905.01 dada por Byrd e Friedman, ver [22], na função definida em (5.33). Temos que

$$\begin{aligned}
\varphi_c(\xi) &= \frac{2K(k)i}{L} \left[Z \left(\frac{2K(k)}{L} \xi - i \frac{2K(k)}{L} \delta; k \right) - Z \left(\frac{2K(k)}{L} \xi + i \frac{2K(k)}{L} \delta; k \right) \right] \\
&= \frac{2\pi i}{L} \left[\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin \left(\frac{2m\pi}{L} (\xi - i\delta) \right)}{\sinh \left(\frac{m\pi K(k')}{K(k)} \right)} - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin \left(\frac{2m\pi}{L} (\xi + i\delta) \right)}{\sinh \left(\frac{m\pi K(k')}{K(k)} \right)} \right] \\
&= \frac{4\pi}{L} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sinh \left(\frac{2m\pi\delta}{L} \right)}{\sinh \left(\frac{m\pi K(k')}{K(k)} \right)} \cdot \cos \left(\frac{2m\pi\xi}{L} \right).
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Desta maneira,

$$\phi_\zeta(\xi) = a + \frac{4\pi}{L} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sinh \left(\frac{2m\pi\delta}{L} \right)}{\sinh \left(\frac{m\pi K(k')}{K(k)} \right)} \cdot \cos \left(\frac{2m\pi\xi}{L} \right). \tag{5.63}$$

Portanto, a Transformada de Fourier Periódica da função (5.63) é dada por $\widehat{\phi}_\zeta(0) = a$ e

$$\widehat{\phi}_\zeta(m) = \frac{2\pi}{L} \cdot \frac{\sinh \left(\frac{2m\pi\delta}{L} \right)}{\sinh \left(\frac{m\pi K(k')}{K(k)} \right)}, \quad \forall m \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$

Denotemos

$$\nu := \frac{2\pi\delta}{L} \quad \text{e} \quad \mu := \frac{\pi K(k')}{K(k)}.$$

Em virtude da imposição (5.30), vemos que $0 < \nu < \mu$. Definamos a função auxiliar

$$\mathcal{Q}(x) := \frac{\sinh(\nu x)}{\sinh(\mu x)}, \quad x \neq 0. \quad (5.64)$$

Segundo Albert, ver [4],

$$\frac{d^2}{dx^2} [\log(\mathcal{Q}(x))] < 0, \quad \forall x \neq 0. \quad (5.65)$$

Devido a esta última desigualdade e ao Lema 5.20, $\mathcal{Q} \in PF(2)$ contínuo no sentido estrito.

Além disto,

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{2\pi}{L} \cdot \frac{\sinh\left(\frac{2\pi\delta\xi}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi K(k')\xi}{K(k)}\right)} = \frac{4\pi\delta K(k)}{L^2 K(k')}. \quad (5.66)$$

A Figura 5.6 abaixo apresenta o comportamento de

$$a - \frac{2\pi}{L} \cdot v(L, \delta, k) = a - 2 \cdot v(\pi, 1, k),$$

conforme a variação de k sobre o intervalo $(0, k_1)$.

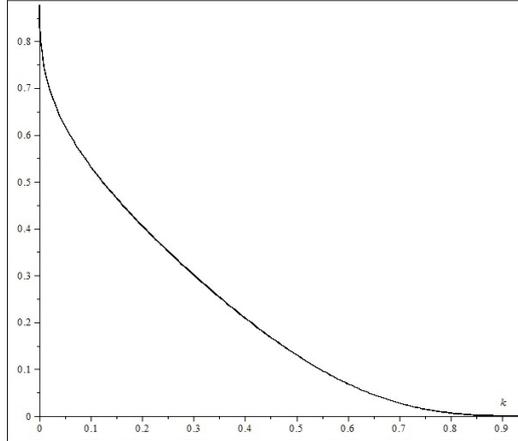


Figura 5.6: Seja a situação em que $L = \pi$ e $\delta = 1$. O gráfico acima apresenta o comportamento de $a - \frac{2\pi}{L} \cdot v(L, \delta, k)$ conforme a variação de k sobre o intervalo $(0, k_1)$. A função a está definida em (5.60). A função v , por sua vez, está definida em (5.30).

Notemos que, para cada $k \in (0, k_1)$,

$$a > \frac{4\pi\delta K(k)}{L^2 K(k')} = \frac{2\pi}{L} \cdot v(L, \delta, k). \quad (5.67)$$

Em razão das informações (5.64)-(5.67), podemos definir a função $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que $\tau(x) := \frac{2\pi\mathcal{Q}(x)}{L}$, $\forall x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, $\tau(0) = a$ e $\tau \in PF(2)$ contínuo no sentido estrito. A existência da função τ é suficiente para garantir que

$$\widehat{\phi}_\zeta = \{\widehat{\phi}_\zeta(m)\}_{m \in \mathbb{Z}} \in PF(2) \text{ discreto no sentido estrito.}$$

Segundo o Teorema 5.21, o operador \mathcal{L}_ς admite exatamente um autovalor estritamente negativo, o qual é simples e, 0 é também um autovalor simples do operador \mathcal{L}_ς associado à autofunção ϕ'_ς . Mais que isto, existe uma constante $\varepsilon > 0$ para qual existe somente uma quantidade finita de elementos $\chi < \varepsilon$ que pertencem ao espectro de \mathcal{L}_ς .

Além disto, observemos que

$$\mathcal{L}_\varsigma = \mathcal{M}_\delta + \varsigma - 2\phi_\varsigma = \mathcal{M}_\delta + (c + 2a) - (2\varphi_c + 2a) = \mathcal{M}_\delta + c - 2\varphi_c = \mathcal{L}_c \quad (5.68)$$

e que

$$\ker(\mathcal{L}_c) = \ker(\mathcal{L}_\varsigma) = \text{span}\{\phi'_\varsigma\} = \text{span}\{\varphi'_c\}. \quad (5.69)$$

Adicionalmente, as demais propriedades espectrais apresentadas pelo operador \mathcal{L}_ς também são satisfeitas por \mathcal{L}_c e, obtemos que

$$n(\mathcal{L}_c) = 1. \quad (5.70)$$

■

Estabilidade Linear

Na sequência, apresentaremos o estudo da estabilidade linear da solução do tipo onda viajante periódica da equação ILW (5.17), associada à função φ_c introduzida em (5.35). Usaremos como referência o estudo do índice Hamiltoniano de Krein K_{Ham} e os Teoremas 5.11 e 5.12.

Teorema 5.23. *Seja $k \in (k_0, k_1)$. A função*

$$u(x, t) = \varphi_c(x - ct), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

é uma solução do tipo onda viajante periódica linearmente estável para a equação ILW

$$u_t + 2uu_x - (\mathcal{M}_\delta u)_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

no espaço de Hilbert H_0 . Isto é, para cada $k \in (k_0, k_1)$ (ou, equivalentemente, para cada $c > 0$), não existe um par $(\lambda, \psi) \in \mathbb{C} \times H_0$, com $\psi \neq 0$ e $\text{Re}(\lambda) > 0$, para o qual

$$\partial_x \mathcal{L}_c \psi = \lambda \psi,$$

onde $\mathcal{L}_c := \mathcal{M}_\delta + c - 2\varphi_c$.

Demonstração. Consideremos que $k \in (k_0, k_1)$. Existe $c = c(k)$, uma função diferenciável, e o operador \mathcal{L}_c satisfaz

$$\mathcal{L}_c[1] = \mathcal{M}_\delta[1] + c - 2\varphi_c = c - 2\varphi_c. \quad (5.71)$$

Como $\ker(\mathcal{L}_c) = \text{span}\{\varphi'_c\}$, $\varphi'_c \perp 1$ e $\varphi'_c \perp \varphi_c$, aplicamos o operador \mathcal{L}_c^{-1} em ambos os lados da igualdade apresentada em (5.71). Disto, resulta que

$$1 = c\mathcal{L}_c^{-1}[1] - 2\mathcal{L}_c^{-1}[\varphi_c], \quad (5.72)$$

o que implica que

$$c\langle \mathcal{L}_c^{-1}[1], 1 \rangle_0 = \langle 1, 1 \rangle_0 + 2\langle \mathcal{L}_c^{-1}[\varphi_c], 1 \rangle_0$$

e, como $c > 0$,

$$\langle \mathcal{L}_c^{-1}[1], 1 \rangle_0 = \frac{L}{c} + \frac{2\langle \mathcal{L}_c^{-1}[\varphi_c], 1 \rangle_0}{c}. \quad (5.73)$$

Como a função φ_c satisfaz a identidade (5.21), temos que

$$-\mathcal{M}_\delta \varphi_c - c\varphi_c + \varphi_c^2 = \frac{1}{L} \int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi, \quad \forall c \in (0, +\infty).$$

Derivemos a igualdade dada em (5.21) com respeito ao parâmetro c . Vemos que

$$-\mathcal{M}_\delta \left[\frac{\partial}{\partial c}(\varphi_c) \right] - \varphi_c - c \left[\frac{\partial}{\partial c}(\varphi_c) \right] + 2\varphi_c \left[\frac{\partial}{\partial c}(\varphi_c) \right] = \frac{1}{L} \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial c}(\varphi_c(\xi)^2) \right] d\xi,$$

o que indica que

$$\mathcal{M}_\delta \left[\frac{\partial}{\partial c}(\varphi_c) \right] + c \left[\frac{\partial}{\partial c}(\varphi_c) \right] - 2\varphi_c \left[\frac{\partial}{\partial c}(\varphi_c) \right] = -\varphi_c - \frac{1}{L} \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial c}(\varphi_c(\xi)^2) \right] d\xi$$

e,

$$\mathcal{L}_c \left[\frac{\partial}{\partial c}(\varphi_c) \right] = -\varphi_c - \frac{1}{L} \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial c}(\varphi_c(\xi)^2) \right] d\xi. \quad (5.74)$$

Aplicamos o operador \mathcal{L}_c^{-1} na identidade (5.74). Este procedimento implica que

$$\frac{\partial}{\partial c}(\varphi_c) = -\mathcal{L}_c^{-1}[\varphi_c] - \frac{1}{L} \cdot \frac{\partial}{\partial c} \left[\int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi \right] \cdot \mathcal{L}_c^{-1}[1]. \quad (5.75)$$

Fazendo uso de $\varphi_c \in H_0$, temos que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial c}(\varphi_c), 1 \right\rangle_0 = \int_0^L \frac{\partial}{\partial c}(\varphi_c) d\xi = \frac{\partial}{\partial c} \left[\int_0^L \varphi_c d\xi \right] = \frac{\partial}{\partial c}[0] = 0. \quad (5.76)$$

Combinemos as relações (5.75) e (5.76). Segue que

$$\langle \mathcal{L}_c^{-1}[\varphi_c], 1 \rangle_0 + \frac{1}{L} \cdot \frac{\partial}{\partial c} \left[\int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi \right] \cdot \langle \mathcal{L}_c^{-1}[1], 1 \rangle_0 = 0. \quad (5.77)$$

Logo, de (5.73) e (5.77),

$$\langle \mathcal{L}_c^{-1}[1], 1 \rangle_0 + \frac{2}{Lc} \cdot \frac{\partial}{\partial c} \left[\int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi \right] \cdot \langle \mathcal{L}_c^{-1}[1], 1 \rangle_0 = \frac{L}{c}$$

e, no caso de termos $cL \neq -2 \cdot \frac{\partial}{\partial c} \left[\int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi \right]$,

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_c = \langle \mathcal{L}_c^{-1}[1], 1 \rangle_0 = \frac{L^2}{cL + 2 \cdot \frac{\partial}{\partial c} \left[\int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi \right]}. \quad (5.78)$$

Nestas condições, fazendo uso das relações (5.73) e (5.78),

$$\langle \mathcal{L}_c^{-1}[\varphi_c], 1 \rangle_0 = \frac{c \langle \mathcal{L}_c^{-1}[1], 1 \rangle_0}{2} - \frac{L}{2} = -\frac{L \cdot \frac{\partial}{\partial c} \left[\int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi \right]}{cL + 2 \cdot \frac{\partial}{\partial c} \left[\int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi \right]}. \quad (5.79)$$

Finalmente, usando as identidades (5.72) e (5.79) e o fato que $\varphi_c \in H_0$,

$$\langle \mathcal{L}_c^{-1}[\varphi_c], \varphi_c \rangle_0 = \frac{c}{2} \langle \mathcal{L}_c^{-1}[1], \varphi_c \rangle_0 = -\frac{cL \cdot \frac{\partial}{\partial c} \left[\int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi \right]}{2cL + 4 \cdot \frac{\partial}{\partial c} \left[\int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi \right]}. \quad (5.80)$$

Suponhamos que $\mathcal{J} \neq 0$. Usando as identidades (5.78), (5.79) e (5.80), simplificamos que

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{D}) &= \det(\mathcal{D}_c) = \frac{\langle \mathcal{L}_c^{-1}[\varphi_c], \varphi_c \rangle_0}{\langle \mathcal{L}_c^{-1}[1], 1 \rangle_0} - \frac{\langle \mathcal{L}_c^{-1}[\varphi_c], 1 \rangle_0^2}{\langle \mathcal{L}_c^{-1}[1], 1 \rangle_0^2} \\ &= \left[-\frac{cL \cdot \frac{\partial}{\partial c} \left[\int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi \right]}{2cL + 4 \cdot \frac{\partial}{\partial c} \left[\int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi \right]} - \frac{\left[\frac{\partial}{\partial c} \left[\int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi \right] \right]^2}{cL + 2 \cdot \frac{\partial}{\partial c} \left[\int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi \right]} \right] \cdot \frac{1}{\mathcal{J}} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mathcal{J}} \cdot \frac{\partial}{\partial c} \left[\int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi \right]. \end{aligned}$$

Lembremos que

$$n(\mathcal{J}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{J} > 0 \quad \text{e} \quad n(\mathcal{J}) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{J} < 0$$

e, no caso de termos $\mathcal{J} > 0$,

$$n(\mathcal{D}) = 1 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial c} \left[\int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi \right] > 0. \quad (5.81)$$

Determinaremos $n(\mathcal{J})$ e $n(\mathcal{D})$. Inicialmente, mostraremos que $\mathcal{J} > 0$. Notemos que, para cada $k \in (k_0, k_1)$,

$$\frac{\partial}{\partial c} \left[\int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi \right] = \frac{dk}{dc} \cdot \frac{\partial}{\partial k} \left[\int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi \right] = \frac{dk}{dc} \cdot M'(k). \quad (5.82)$$

No caso em que $L = \pi$ e $\delta = 1$, conforme apresentado em (5.38), $c'(k) > 0$, para cada $k \in (k_0, k_1)$. Em seguida, estabeleceremos o sinal de $M'(k)$ sobre o intervalo (k_0, k_1) .

Antes, entretanto, será preciso que vejamos a função $M(k)$, em (5.49), sob uma outra representação.

A função φ_c , em vista de (5.62), pode ser expressa na forma de uma série como

$$\varphi_c(\xi) = \frac{4\pi}{L} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sinh\left(\frac{2m\pi\delta}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{m\pi K(k')}{K(k)}\right)} \cdot \cos\left(\frac{2m\pi\xi}{L}\right).$$

Desta maneira, $\widehat{\varphi}_c(0) = 0$ e

$$\widehat{\varphi}_c(m) = \frac{2\pi}{L} \cdot \frac{\sinh\left(\frac{2m\pi\delta}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{m\pi K(k')}{K(k)}\right)}, \quad \forall m \in \mathbb{Z} - \{0\}. \quad (5.83)$$

Devido a (5.83) e ao Teorema de Plancharel, para cada $k \in (k_0, k_1)$,

$$M(k) = \int_0^L \varphi_c(\xi)^2 d\xi = L \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\varphi}_c(m)|^2 = \frac{8\pi^2}{L} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\left[\sinh\left(\frac{2m\pi\delta}{L}\right)\right]^2}{\left[\sinh\left(\frac{m\pi K(k')}{K(k)}\right)\right]^2}. \quad (5.84)$$

A convergência uniforme da série (5.84) nos permite determinar que, se $k \in (k_0, k_1)$,

$$M'(k) = -\frac{16\pi^3}{L} \sum_{m=1}^{+\infty} \left\{ \frac{m \cdot \left[\sinh\left(\frac{2m\pi\delta}{L}\right)\right]^2 \cdot \left[\cosh\left(\frac{m\pi K(k')}{K(k)}\right)\right] \cdot \left[\frac{d}{dk} \left[\frac{K(k')}{K(k)}\right]\right]}{\left[\sinh\left(\frac{m\pi K(k')}{K(k)}\right)\right]^3} \right\}.$$

Como

$$\frac{d}{dk} \left[\frac{K(k')}{K(k)}\right] = \frac{[E(k) - K(k)] \cdot K(k') + K(k) \cdot E(k')}{k(k^2 - 1) \cdot K(k)^2} < 0, \quad \forall k \in (0, 1),$$

facilmente observa-se que, pelo comportamento dos sinais das funções $\sinh(x)$ e $\cosh(x)$,

$$M'(k) > 0, \quad \forall k \in (k_0, k_1). \quad (5.85)$$

Devido às verificações (5.38) e (5.85), temos que

$$2 \cdot \left[\frac{\partial}{\partial k}[c(k)]\right]^{-1} \cdot M'(k) > 0, \quad \forall k \in (k_0, k_1). \quad (5.86)$$

As informações (5.39), (5.78) e (5.86) garantem que

$$\mathcal{J} = \frac{L^2}{c(k)L + 2 \cdot \left[\frac{\partial}{\partial k}[c(k)]\right]^{-1} \cdot M'(k)} > 0, \quad \forall k \in (k_0, k_1). \quad (5.87)$$

Em particular,

$$n(\mathcal{J}) = 0, \quad \forall k \in (k_0, k_1). \quad (5.88)$$

Finalmente, em vista de (5.81), (5.82) e (5.86), temos que

$$n(\mathcal{D}) = 1, \quad \forall k \in (k_0, k_1). \quad (5.89)$$

Logo, para cada $c \in (0, +\infty)$, devido a (5.70), (5.88) e (5.89), o Teorema 5.12 garante que

$$K_{Ham} = n(\mathcal{L}_c) - n(\mathcal{J}_c) - n(\mathcal{D}_c) = 1 - 0 - 1 = 0.$$

Portanto, pelo Teorema 5.11, a função $u(x, t) = \varphi_c(x - ct)$, $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, caracteriza uma solução do tipo onda viajante periódica linearmente estável para a equação ILW (5.17) no espaço H_0 . ■

Os resultados desenvolvidos nesta seção estão absorvidos pelo seguinte Teorema:

Teorema 5.24. (i) A função $c : (0, k_1) \mapsto (c(0), +\infty)$, de modo que $k_1 \approx 0,944085037$, $c(0) \approx -1,07462944$ e

$$c(k) = 1 - \frac{8K(k)}{\pi K(k')} - \frac{4K(k)}{\pi} \cdot Z\left(\frac{4K(k)}{\pi}; k'\right) - \frac{4K(k)}{\pi} \cdot \frac{cn\left(\frac{4K(k)}{\pi}; k'\right) \cdot dn\left(\frac{4K(k)}{\pi}; k'\right)}{sn\left(\frac{4K(k)}{\pi}; k'\right)}, \quad \forall k \in (0, k_1),$$

é suave e estritamente crescente.

(ii) A função

$$\varphi_c(\xi) = -\frac{4K(k)}{\pi} \cdot Z\left(\frac{2K(k)}{\pi}; k'\right) - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{K(k)}{K(k')} + \frac{4K(k)}{\pi} \cdot \frac{dn\left(\frac{2K(k)\xi}{\pi}; k\right)^2 \cdot cn\left(\frac{2K(k)}{\pi}; k'\right) \cdot sn\left(\frac{2K(k)}{\pi}; k'\right) \cdot dn\left(\frac{2K(k)}{\pi}; k'\right)}{1 - dn\left(\frac{2K(k)\xi}{\pi}; k\right)^2 \cdot sn\left(\frac{2K(k)}{\pi}; k'\right)^2},$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$, satisfaz a identidade

$$-\mathcal{M}_1 \varphi_c - c(k) \varphi_c + \varphi_c^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_c(\xi)^2 d\xi, \quad \forall k \in (0, k_1),$$

onde

$$(\widehat{\mathcal{M}_1 u})(n) = (2n \coth(2n) - 1) \widehat{u}(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Além disto, a aplicação $c \mapsto \varphi_c$ é suave sobre o espaço $H_0 \cap H_{per}^s([0, \pi])$, $s \gg 1$.

(iii) Seja $k_0 \approx 0,795178532$. Para cada $k \in (k_0, k_1)$, a função

$$u(x, t) = \varphi_c(x - ct), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

é uma solução do tipo onda viajante periódica linearmente estável para a equação ILW

$$u_t + 2uu_x - (\mathcal{M}_1 u)_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

no contexto do espaço de Hilbert H_0 . Isto é, para cada $k \in (k_0, k_1)$, não existe um par $(\lambda, \psi) \in \mathbb{C} \times H_0$, com $\psi \neq 0$ e $\text{Re}(\lambda) > 0$, para o qual

$$\partial_x \mathcal{L}_c \psi = \lambda \psi,$$

com $\mathcal{L}_c := \mathcal{M}_1 + c - 2\varphi_c$.

■

5.2.3 2º caso: $L = \pi$ e $\delta = 0,5$

Podemos fazer uma análise similar àquela que resultou no enunciado do Teorema 5.24, para o caso em que $L = \pi$ e $\delta = 0,5$.

Seja v a função definida em (5.30). Com auxílio do programa *Maple 16*, verificamos que, para cada $k \in (0, \kappa_1)$, onde $\kappa_1 \approx 0,999586300106303$, $v(\pi, \frac{1}{2}, k) < 1$. Ou seja, sobre o intervalo $(0, \kappa_1)$, estão bem definidas as fórmulas de φ_c e $c = c(k) = c(\pi, \frac{1}{2}, k)$, dadas respectivamente em (5.35) e (5.36).

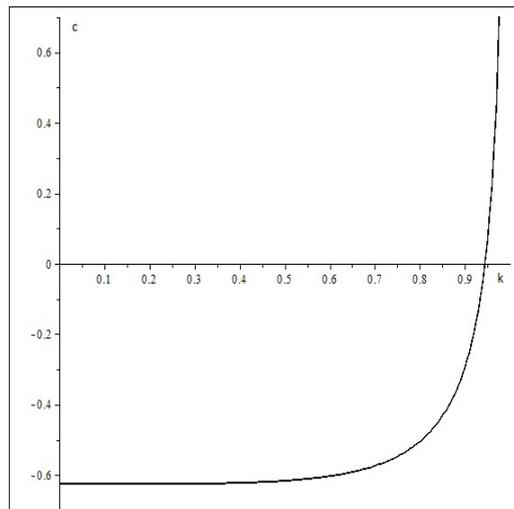


Figura 5.7: Gráfico da função $c(k)$, em (5.36), no caso em que $L = \pi$ e $\delta = 0,5$.

No caso em que $L = \pi$ e $\delta = 0,5$, a Figura 5.7 apresenta o comportamento da função $c(k)$. Graficamente, temos que $c(k)$ é uma função estritamente crescente sobre o intervalo

$(0, \kappa_1)$. Nesta conjuntura, temos que

$$c(0) = \lim_{k \rightarrow 0^+} c(k) \approx -0,62607057100 \text{ e } \lim_{k \rightarrow \kappa_1^-} c(k) = +\infty.$$

Em verdade, há uma relação biunívoca entre $k \in (0, \kappa_1)$ e $c \in (c(0), +\infty)$. Finalmente, observamos a existência de $\kappa_0 \approx 0,9440850374075$, de tal maneira que

$$c(\kappa_0) = 0 \text{ e } c(k) > 0, \forall k \in (\kappa_0, \kappa_1).$$

Seja a , o parâmetro definido em (5.60). Graficamente, notamos que, para $k \in (0, \kappa_1)$,

$$a > -\min_{\xi \in [0, \pi]} \varphi_c(\xi) = -\varphi_c\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ e } a > 2 \cdot v\left(\pi, \frac{1}{2}, k\right).$$

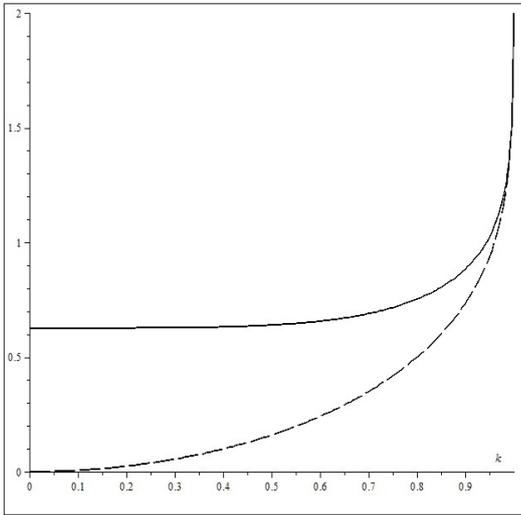


Figura 5.8: A linha contínua caracteriza o comportamento de a dado em (5.60) conforme a variação de k sobre o intervalo $(0, \kappa_1)$. A linha tracejada caracteriza o comportamento de $-\varphi_c(0, 5 \cdot \pi)$ conforme a variação de k sobre $(0, \kappa_1)$.

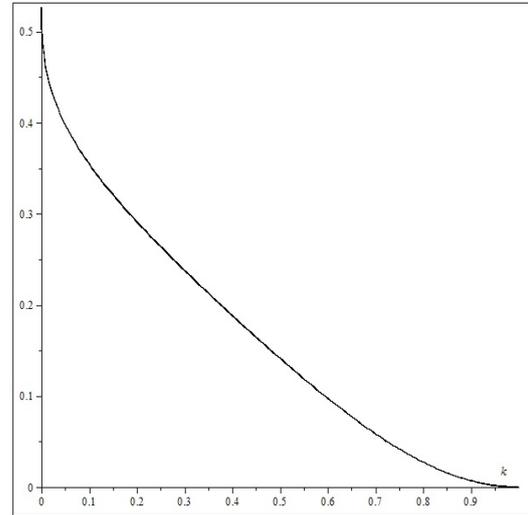


Figura 5.9: O gráfico acima apresenta o comportamento de $a - 2 \cdot v(\pi, \frac{1}{2}, k)$, conforme a variação de k sobre o intervalo $(0, \kappa_1)$. A função a está definida em (5.60). A função v , por sua vez, está definida em (5.30).

O mesmo procedimento detalhado na prova do Teorema 5.22 garante que, para cada $k \in (0, \kappa_1)$, $n(\mathcal{L}_c) = 1$. Por sua vez, a demonstração do Teorema 5.23 garante que, para cada $k \in (\kappa_0, \kappa_1)$, $n(\mathcal{J}_c) = 0$, $n(\mathcal{D}_c) = 1$ e a função φ_c determina uma solução do tipo onda viajante periódica linearmente estável no espaço H_0 para a equação ILW (5.17).

5.2.4 3º caso: $L = \pi$ e $\delta = 4$

Seguindo o padrão detalhado em situações anteriores, enunciamos mais um resultado:

Teorema 5.25. (i) A função $c : (0, \gamma_1) \mapsto (c(0), +\infty)$, de modo que $\gamma_1 \approx 0,07316436345$, $c(0) \approx -1,75000045014$ e

$$c(k) = \frac{1}{4} - \frac{32K(k)}{\pi K(k')} - \frac{4K(k)}{\pi} \cdot Z\left(\frac{16K(k)}{\pi}; k'\right) - \frac{4K(k)}{\pi} \cdot \frac{cn\left(\frac{16K(k)}{\pi}; k'\right) \cdot dn\left(\frac{16K(k)}{\pi}; k'\right)}{sn\left(\frac{16K(k)}{\pi}; k'\right)}, \quad \forall k \in (0, \gamma_1),$$

é suave e estritamente crescente.

(ii) A função

$$\varphi_c(\xi) = -\frac{4K(k)}{\pi} \cdot Z\left(\frac{8K(k)}{\pi}; k'\right) - \frac{16}{\pi} \cdot \frac{K(k)}{K(k')} + \frac{4K(k)}{\pi} \cdot \frac{dn\left(\frac{2K(k)\xi}{\pi}; k\right)^2 \cdot cn\left(\frac{8K(k)}{\pi}; k'\right) \cdot sn\left(\frac{8K(k)}{\pi}; k'\right) \cdot dn\left(\frac{8K(k)}{\pi}; k'\right)}{1 - dn\left(\frac{2K(k)\xi}{\pi}; k\right)^2 \cdot sn\left(\frac{8K(k)}{\pi}; k'\right)^2},$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$, satisfaz a identidade

$$-\mathcal{M}_4\varphi_c - c\varphi_c + \varphi_c^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_c(\xi)^2 d\xi, \quad \forall k \in (0, \gamma_1),$$

onde

$$(\widehat{\mathcal{M}_4 u})(n) = \left(2n \coth(8n) - \frac{1}{4}\right) \widehat{u}(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Além disto, a aplicação $c \mapsto \varphi_c$ é suave sobre o espaço $H_0 \cap H_{per}^s([0, \pi])$, $s \gg 1$.

(iii) Seja $\gamma_0 \approx 0,05437549544$. Para cada $k \in (\gamma_0, \gamma_1)$, $c(k) > 0$ e a função

$$u(x, t) = \varphi_c(x - ct), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

é uma solução do tipo onda viajante periódica linearmente estável para a equação ILW

$$u_t + 2uu_x - (\mathcal{M}_4 u)_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

no espaço de Hilbert H_0 .

■

Capítulo 6

Comentários e Estudos Futuros

Basicamente, ao longo desta tese, foram abordados três problemas:

- A instabilidade orbital de ondas estacionárias periódicas cnoidais para a equação de Klein-Gordon não-linear com potência polinomial quintica (3.1),

$$u_{tt} - u_{xx} + u - |u|^4 u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

- A estabilidade orbital de ondas estacionárias periódicas para a equação de Schrödinger Logarítmica (4.1),

$$iu_t + u_{xx} + \log(|u|^p)u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

onde $p \in \mathbb{N}$ está fixado.

- A estabilidade linear de ondas viajantes periódicas para a equação ILW (5.15),

$$u_t + 2uu_x + \frac{1}{\delta}u_x + (\mathcal{T}_\delta \partial_x u)_x = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

Cada uma das abordagens referentes aos problemas acima listados abre precedentes para que busquemos estratégias similares que podem ser usadas na resolução de outros problemas que estão em aberto. Ao que segue, mostraremos alguns exemplos de problemas que cogitamos solucionar em pesquisas futuras.

Instabilidade Orbital de Ondas Estacionárias Periódicas Cnoidais para a Equação de Klein-Gordon Não-Linear com Potência Polinomial Quintica

Uma ideia para estudos futuros seria a obtenção de parâmetros reais A , B e C , de maneira que se obtenha a existência de uma função

$$\varphi_c(\xi) = \frac{A \operatorname{cn}(C\xi; k)}{\sqrt{1 + B \operatorname{sn}(C\xi; k)^2}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

de tal forma que $u_c(x, t) = e^{ict}\varphi_c(x)$, $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, seja uma solução do tipo onda estacionária periódica da equação (3.1).

Deduzida esta função, buscaremos estratégias para verificar se tais ondas são orbitalmente instáveis em conformidade com as Definições 3.2 ou 3.3.

Estabilidade Orbital de Ondas Estacionárias Periódicas para a Equação de Klein-Gordon Não-Linear Logarítmica

Seja a equação de Klein-Gordon Não-Linear Logarítmica

$$u_{tt} - u_{xx} + u - \log(|u|^p)u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad (6.1)$$

onde $p \in \mathbb{N}$. Suponhamos a existência de $\varphi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma função suave, de tal maneira que

$$u_c(x, t) = e^{ict}\varphi_c(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

solucione a equação (6.1). Verificamos que

$$-\varphi_c'' + (1 - c^2)\varphi_c - \log(|\varphi_c|^p)\varphi_c = 0. \quad (6.2)$$

Usando a teoria das equações diferenciais ordinárias, pelo método do plano de fase, deduzimos a existência de uma função suave, estritamente positiva par $\varphi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que é L -periódica, onde $L > \frac{2\pi}{\sqrt{p}}$, de tal forma que φ_c satisfaz a identidade (6.2). Pretendemos determinar a estabilidade ou a instabilidade orbital das ondas $u_c(x, t) = e^{ict}\varphi_c(x)$.

Um problema adicional encontrado é que já sabemos ser possível estabelecer, em vista do Método de Galerkin, a boa colocação da equação (6.1) no espaço de Hilbert $H_{per}^1([0, L]) \times L_{per}^2([0, L])$, no caso em que o período satisfaz $0 < L < \frac{2\pi}{\sqrt{p}}$. Com isto, é preciso deduzir a boa colocação da equação (6.1) para os demais valores de $L > 0$, de modo que o estudo da referida estabilidade orbital possa ser embasado nos preceitos detalhados pelos Capítulos 3 e 4 desta tese.

Estabilidade Orbital ou Estabilidade Linear de Ondas Viajantes Periódicas para a Equação ILW

Com relação à equação ILW, objetivamos pesquisar a existência de outras classes de ondas viajantes periódicas que solucionam (5.15) e, a partir da determinação destas funções, fazer a estudo de sua estabilidade linear.

Um outro problema a ser pensado é utilizar a forma explícita da função (5.35), solução da equação ILW (5.15), de modo a determinarmos o comportamento da estabilidade linear nos casos limitantes em que $\delta \rightarrow 0^+$ e $\delta \rightarrow \infty$.

Finalmente, baseados em Andrade, [6], conjecturamos ser possível fazer o estudo da estabilidade orbital das ondas viajantes periódicas tratadas nesta tese.

Referências Bibliográficas

- [1] ABDELOUHAB, L.; BONA, J. L.; FELLAND, M.; SAUT, J. C. **Nonlocal Models for Nonlinear Dispersive Waves**. *Physica D*, **40** (1989), pg. 360-392.
- [2] ABLOWITZ, M. J.; FOKAS, A. S.; SATSUMA, J.; SEGUR, H. **On the Periodic Intermediate Long Wave Equation**. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **15** (1982), pg. 781-786.
- [3] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables**. Dover Publications, New York, 1972.
- [4] ALBERT, J. P. **Positivity Properties and Stability of Solitary-Wave Solutions of Model Equations for Long Waves**. *Comm. PDE*, **17** (1992), pg. 1-22.
- [5] ALBERT, J. P.; BONA, J. L. **Total Positivity and the Stability of Internal Waves in Fluids of Finite Depth**. *IMA J. Applied Math.*, **46** (1991), pg. 1-19.
- [6] ANDRADE, T. P. **Equações Dispersivas: Estabilidade Orbital de Ondas Viajantes Periódicas**. Tese de Doutorado, Doutorado em Matemática UNICAMP - Campinas/SP, 2014.
- [7] ANGULO, J. **Existence and Stability of Solitary Wave Solutions to Nonlinear Dispersive Evolution Equations**. IMPA Mathematical Publications, 24th Brazilian Mathematics Colloquium, Rio de Janeiro, 2003.
- [8] ANGULO, J. **Nonlinear Stability of Periodic Traveling Wave Solutions to the Schrödinger and the Modified Korteweg-de Vries Equations**. *J. Diff. Equat.*, **235** (2007), pg. 1-30.
- [9] ANGULO, J.; BONA, J. L.; SCIALOM, M. **Stability of Cnoidal Waves**. *Advances in Differential Equations*, Volume 11, **12** (2006), pg. 1321-1374.
- [10] ANGULO, J.; NATALI, F. M. **Instability of Periodic Traveling Waves for Dispersive Models**. *Advances in Nonlinear Analysis*, **3** (2014), pg. 95-123.
- [11] ANGULO, J.; NATALI, F. M. **Positivity Properties of the Fourier Transform and the Stability of Periodic Travelling-Wave Solutions**. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **40** (2008), pg. 1123-1151.

- [12] ANGULO, J.; NATALI, F. M. **Stability and Instability of Periodic Traveling Wave Solutions for the Critical Korteweg-de Vries and Nonlinear Schrödinger Equations.** *Physica D*, **238** (2009), pg. 603-621.
- [13] BANQUET BRANGO, C. A. **Existência e Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas para Alguns Modelos Dispersivos.** Tese de Doutorado, Doutorado em Matemática UNICAMP - Campinas/SP, 2009.
- [14] BENJAMIN, T. B. **The Stability of Solitary Waves.** *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **338** (1972), pg. 153-183.
- [15] BIALYNICKI-BIRULA, I. A.; SOWÍŃSKI, T. **Solutions of the Logarithmic Schrödinger Equation in a Rotating Harmonic Trap.** *Nonlinear Waves: Classical and Quantum Aspects*, F. Kh. Abdullaev and V. V. Konotop (eds.), Kluwer, Amsterdam, 2004, pg. 99-106.
- [16] BLANCHARD, P. H.; STUBBE, J.; VÁZQUES, L. **On the Stability of Solitary Waves for Classical Scalar Fields.** *Annal. Inst. Henry Poincaré Sec. A.*, **47** (1987), pg. 309-336.
- [17] BONA, J. L. **On the Stability Theory of Solitary Waves.** *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **344** (1975), pg. 363-374.
- [18] BOWMAN, F. **Introduction to Elliptic Functions with Applications.** Dover Publications, New York, 1961.
- [19] BREZIS, H. **Analyse Fonctionnelle - Théorie et Applications.** Dunod, Paris, 2005.
- [20] BREZIS, H.; CAZENAVE, T. **Nonlinear Evolution Equations.** Preprint, 1994.
- [21] BRONSKI, J.; JOHNSON, M. A.; KAPITULA, T. **An Instability Index Theory for Quadratic Pencils and Applications.** *Commun. Math. Phys.*, **327** (2014), pg. 521-550.
- [22] BYRD, P. F.; FRIEDMAN, M. D. **Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists.** 2nd ed., Springer, New York, 1971.
- [23] CARDOSO Jr, E.; NATALI, F. **Stability Properties of Periodic Waves for the Klein-Gordon Equation with Quintic Nonlinearity.** *Appl. Mathematics and Computation*, **224** (2013), pg. 581-592.
- [24] CARLES, R.; PELINOVSKY, D. **On the Orbital Stability of Solitary Waves in the Log-KDV Equation.** Preprint, 2014.
- [25] CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. D.; KOMORNIK, V. **Introdução à Análise Funcional.** Livro Texto, DMA-UEM, 2007.

- [26] CAZENAVE, T. **Semilinear Schrödinger Equation**. American Mathematical Soc., 2003.
- [27] CAZENAVE, T. **Stable Solutions of the Logarithmic Schrödinger Equation**. Non. Anal. Theory Meth. Appl., **7** (1983), pg. 1127-1140.
- [28] CAZENAVE, T.; HARAUX, A. **Équations d'Évolution avec non Linéarité Logarithmique**. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, **2** (1980), pg. 21-51.
- [29] CAZENAVE, T.; LIONS, P. L. **Orbital Stability of Standing Waves for Some Nonlinear Schrödinger Equation**. Comm. Math. Phys., **85** (1982), pg. 549-561.
- [30] CODDINGTON, E.; LEVINSON, N. **Theory of Ordinary Differential Equations**. MacGraw-Hill, New York, 1955.
- [31] DECONINCK, B.; KAPITULA, T. **On the Orbital (In)Stability of Spatially Periodic Stationary Solutions of Generalized Korteweg-de Vries Equations**. Preprint, 2011.
- [32] DEINLING, K. **Nonlinear Functional Analysis**. Springer-Verlag, 1980.
- [33] EKMAN, V. W. **The Norwegian North Polar Expedition 1893-96**. Volume 5, Chapter 15. Christiania, Oslo, 1906.
- [34] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. American Mathematical Society, 1998.
- [35] GOMES, A. M. **Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução**. 2nd ed., Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.
- [36] GRILLAKIS, M. **Linearized Instability for Nonlinear Schrödinger and Klein-Gordon Equations**. Commun. Pure Appl. Math., **61** (1988), pg. 747-774.
- [37] GRILLAKIS, M.; SHATAH, J.; STRAUSS, W. **Stability Theory of Solitary Waves in the Presence of Symmetry I**. J. Funct. Anal., **74** (1987), pg. 160-197.
- [38] GRILLAKIS, M.; SHATAH, J.; STRAUSS, W. **Stability Theory of Solitary Waves in the Presence of Symmetry II**. J. Funct. Anal., **94** (1990), pg. 308-348.
- [39] HALE, K. J. **Ordinary Differential Equations**. Wiley Interscience, New York, 1969.
- [40] HAKKAEV, S. **Linear Stability Analysis for Periodic Standing Waves of the Klein-Gordon Equation**. Differ. Equation Dyn. Syst., **22** (2014), pg. 209-219.

- [41] HARAGUS, M.; KAPITULA, T. **On the Spectra of Periodic Waves for Infinite-Dimensional Hamiltonian Systems.** *Physica D*, **237** (2008), pg. 2649-2671.
- [42] IÓRIO Jr., R. J.; IÓRIO, V. M. **Fourier Analysis and Partial Differential Equations.** Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001.
- [43] JOHNSON, M. A. **Nonlinear stability of periodic traveling wave solutions of the generalized Korteweg-de Vries equation.** *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **41** (2009), pg. 1921-1947.
- [44] JONES, C. K.; MARANGELL, R.; MILLER, P. D.; PLAZA, R. G. **Spectral and Modulational Stability of Periodic Wavetrains for the Nonlinear Klein-Gordon Equation.** *Journal of Differential Equations*, **257** (2014), pg. 4632-4703.
- [45] KAPITULA, T.; PROMISLOW, K. **Spectral and Dynamical Stability of Nonlinear Waves.** Springer, New York, 2013.
- [46] KAPITULA, T.; STEFANOV, A. **Hamiltonian-Krein (Instability) Index Theory for KdV - like Eigenvalue Problems.** Preprint, 2012. <http://arxiv.org/abs/1210.6005>
- [47] LEVINE, H. A. **Instability and Nonexistence of Global Solutions to Nonlinear Wave Equations of the form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$.** *Trans. A. M. S.*, **192** (1974), pg. 1-21.
- [48] LIN, Z. **Instability of Nonlinear Dispersive Solitary Waves.** *J. Funct. Anal.*, **255** (2008), pg. 1091-1124.
- [49] LIONS, J. L. **Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires.** Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [50] LIONS, J. L.; MAGENES, E. **Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications.** Vol. I, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1972.
- [51] LOPES, O. **A Linearized Instability Result for Solitary Waves.** *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **8** (2002), pg. 115-119.
- [52] MAGNUS, W.; WINKLER, S. **Hill's Equation.** Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, vol. 20, Wiley, New York, 1966.
- [53] MILOH, T. **On Periodic and Solitary Wavelike Solutions of the Intermediate Long-Wave Equation.** *J. Fluid Mech.*, **211** (1990), pg. 617-627.
- [54] NATALI, F. M. **Propriedades de Positividade e Estabilidade de Ondas Viajantes Periódicas.** Tese de Doutorado, Doutorado em Matemática UNICAMP - Campinas/SP, 2007.

- [55] NATALI, F. M.; NEVES, A. **Orbital Stability of Solitary Waves**. IMA Journal of Applied Mathematics, 2013.
- [56] NATALI, F. M.; PASTOR, A. **Orbital Stability of Periodic Waves for the Log-KdV Equation**. Preprint, 2014.
- [57] NATALI, F. M.; PASTOR, A. **Stability and Instability of Periodic Standing Wave Solutions of some Klein-Gordon Equations**. J. Math. Anal. Appl., **347** (2008), pg. 428-441.
- [58] NEVES, A. **Floquet's Theorem and Stability of Periodic Solitary Waves**. J. Dyn. Diff. Equat., **21** (2009), pg. 555-565.
- [59] NEVES, A. **Isoinertial Family of Operators and Convergence of KdV Cnoidal Waves to Solitons**. J. Differ. Equat., **244** (2008), pg. 875-886.
- [60] OLIVEIRA, C. R. **Introdução à Análise Funcional**. Publicações Matemáticas do IMPA, Rio de Janeiro, 2001.
- [61] PARKER, A. **Periodic Solutions of the Intermediate Long-Wave Equation: a Nonlinear Superposition Principle**. J. Physica A: Math. Gen., **25** (1992), pg. 2005-2032.
- [62] PAZY, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [63] RAVIART, P. A.; THOMAS, J. M. **Introduction à l'Analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles**. Masson, Paris, 1983.
- [64] STRAUSS, W. A. **Nonlinear Wave Equations**. Regional Conference Series in Mathematics, Number 73, American Mathematical Society, 1993.
- [65] STANISLAVOVA, M.; STEFANOV, A. **Linear Stability Analysis for Traveling Waves of Second Order in Time PDE's**. Nonlinearity, 25 (2012), pg.2625-2654.
- [66] WEINSTEIN, M. I. **Modulation Stability of Ground States of Nonlinear Schrödinger Equations**. SIAM J. Math, **16** (1985), pg. 472-490.