UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

EMILIO DE CARVALHO

O Semianel e o Semimódulo de Valores de uma Curva Reduzida

Maringá - PR
2017

EMILIO DE CARVALHO

O Semianel e o Semimódulo de Valores de uma Curva Reduzida

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessÃ¡rios à obtenção do grau de Doutor.

Orientador: Marcelo Escudeiro Hernandes.

Maringá - PR

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Carvalho, Emilio de
C331s O semianel e o semimódulo de valores de uma curva reduzida / Emilio de Carvalho. -- Maringá, 2017.
iv, 121 f. : il.

Orientador: Prof°. Dr°. Marcelo Escudeiro Hernandes.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Álgebra, 2017.

1. Curvas reduzidas. 2. Semianel. 3. Semimódulo. 4. Singularidades. 5. Reduced curves. 6. Semiring. 7. Semimodule. 8. Singularities. I. Hernandes, Marcelo Escudeiro, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Álgebra. III. Título.

CDD 22.ed. 512

EMILIO DE CARVALHO

O SEMIANEL E O SEMIMÓDULO DE VALORES DE UMA CURVA REDUZIDA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Orientador)

Prof. Dr. Abramo Hefez
Universidade Federal Fluminense

Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas
Universidade de São Paulo – São Carlos

Prof. Dr. Rodrigo Martins
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Profa. Dra. Maria Elenice Rodrigues Hernandes
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 27 de março de 2017.
Local de defesa: Auditório do Departamento de Matemática, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Agradecimentos

Sem nenhuma dúvida devo grande parte do que sou ao meu pai. E esta tese de doutorado não é uma exceção. Este trabalho não teria se realizado sem o apoio dele em todos os momentos. Fica aqui o mais sincero reconhecimento por sua onipresença.

Agradeço também a uma das pessoas mais especiais que já conheci: Geni. Não quero ser repetitivo, porém não é possível não dizer que ela foi essencial para muito do que se passou nesses anos de doutorado - além de outros.

A toda a minha família e aos meus amigos agradeço pela companhia e incentivo sempre.

Fico grato a todos os professores que ajudaram na minha formação como matemático. Em especial, meu orientador Marcelo Escudeiro Hernandes. Sem suas ideias e seu entusiasmo, este trabalho não teria superado vários obstáculos que surgiram durante esses anos.

Finalmente, agradeço à Capes pelo auxílio financeiro sem o qual este trabalho não teria se desenvolvido.

Emilio de Carvalho

Resumo

Neste trabalho introduzimos os conceitos de semianel e semimódulo de valores de uma curva algebroide reduzida Q. Mostramos que estes objetos são sempre finitamente gerados e apresentamos algoritmos para obter conjuntos chamados de Bases Standard cujos valores são geradores do semianel e o semimódulo de valores.

No caso analítico plano, nossos resultados nos permitem conectar diretamente os resultados de Zariski e Waldi que caracterizam o tipo topológico de Q e determinar o conjunto de valores do módulo de diferenciais de Kähler, um importante invariante analítico de Q.

Palavras-chave: curvas reduzidas, semianel, semimódulo.

Abstract

In this work we introduce the concepts of semiring and semimodule of values of a reduced algebroid curve Q. We prove that these objects are always finitely generated and we present algorithms to obtain sets we call Standard Bases and whose values are generators for the semiring and the semimodule of values.

In the analytical plane case, our results allow us to connect directly the results of Zariski and Waldi that characterize the topological type of Q and determine the set of values of the module of differentials of Kähler, an important analytical invariant of Q.

Key words: reduced curves, semiring, semimodule.

Sumário

Introdução

Seja $f \in \mathbb{C}\{X,Y\}$ uma série de potências convergente em alguma vizinhança U da origem de $\mathbb{C}^2$. A curva analítica plana determinada por f é o germe do conjunto $C_f = \{(a,b) \in U;\ f(a,b) = 0\} \subset \mathbb{C}^2$.

Dizemos que duas curvas planas C_f e C_g são topologicamente equivalentes, ou equisingulares, e escrevemos $C_f \equiv_{Top} C_g$, se existem vizinhanças U e V da origem e um homeomorfismo Ψ de $(\mathbb{C}^2, 0)$ tais que

$$\Psi(C_f \cap U) = C_g \cap V.$$

Duas curvas regulares irredutíveis são sempre topologicamente equivalentes. No caso singular, muitos matemáticos se interessaram pela questão da equivalência topológica. Nas décadas de 20 e 30, Zariski, Brauner e Burau em [34], [7] e [8] abordaram a classificação topológica e como consequência de seus trabalhos temos que duas curvas irredutíveis são topologicamente equivalentes se, e somente se, elas têm os mesmos expoentes característicos, os quais podem ser facilmente computados por meio de parametrizações de Newton-Puiseux de C_f e C_g.

Vários outros invariantes topológicos completos foram descritos: os pares característicos, a sequência de multiplicidades na resolução canônica da singularidade, o semigrupo de valores, etc. Todos estes invariantes podem ser obtidos uns dos outros.

Para o caso de curvas com várias componentes irredutíveis (ramos), Zariski, também nos anos 30, mostrou que dadas curvas planas $C_f = \bigcup_{i=1}^{r} C_{f_i}$ e $C_g = \bigcup_{j=1}^{s} C_{g_j}$, em que $f = \prod_{i=1}^{r} f_i$ e $g = \prod_{j=1}^{s} g_j$ são séries de potências reduzidas, com componentes irredutíveis C_{f_i}, C_{g_j}, $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq s$, temos $C_f \equiv_{Top} C_g$ se, e somente se, $r = s$ e existe uma bijeção $p : \{1, \ldots, r\} \to \{1, \ldots, r\}$ tal que

$$C_{f_i} \equiv_{Top} C_{g_{p(i)}} \ \text{ e } \ (C_{f_i}, C_{f_j}) = (C_{g_{p(i)}}, C_{g_{p(j)}})$$

para todo $1 \leq i < j \leq r$, em que (C_{f_i}, C_{f_j}) denota a multiplicidade de interseção entre

C_{f_i} e C_{f_j}, que pode ser calculada por

$$(C_{f_i}, C_{f_j}) = I(f_i, f_j) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{X,Y\}}{\langle f_i, f_j \rangle}.$$

Como no caso irredutível, existem outras informações que caracterizam a equivalência topológica para uma curva plana C_f com vários ramos. Uma destas informações é o semigrupo de valores S_f introduzido por Waldi em 1972 (veja [33]).

De maneira mais explícita, se C_f é a curva determinada por $f = \prod_{i=1}^{r} f_i \in \mathbb{C}\{X,Y\}$ com f_i irredutível, então o semigrupo de valores de C_f é

$$S_f = \left\{ (I(h,f_1), \ldots, I(h,f_r)) \in \mathbb{N}^r;\ h \in \mathbb{C}\{X,Y\} \setminus \bigcup_{i=1}^{r} \langle f_i \rangle \right\}.$$

Para o ramo C_{f_i}, definimos, de maneira análoga, o semigrupo de valores

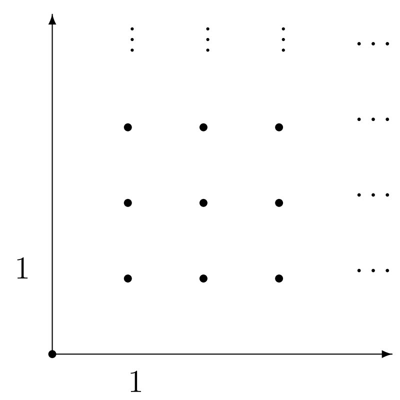
$$S_{f_i} = \{ I(h,f_i) \in \mathbb{N};\ h \in \mathbb{C}\{X,Y\} \setminus \langle f_i \rangle \}.$$

Os conjuntos S_f e S_{f_i} são de fato (sub)semigrupos aditivos de $\mathbb{N}^r$ e $\mathbb{N}$ respectivamente, isto é, são fechados com respeito à adição e possuem elemento neutro. Claramente, temos $S_f \subsetneq \bigoplus_{i=1}^{r} S_{f_i}$ e, além disto, se

$$\begin{array}{rccl} \pi_i : & \mathbb{N}^r & \to & \mathbb{N} \\ & (a_1, \ldots, a_r) & \mapsto & a_i \end{array}$$

denota a projeção na i-ésima coordenada, então $\pi_i(S_f) = S_{f_i}$.

Semigrupos de curvas irredutíveis e de curvas com vários ramos admitem muitas propriedades comuns (ambos admitem condutor[1], por exemplo), mas também possuem diferenças muito significativas, como o fato de semigrupos de curvas irredutíveis admitirem um conjunto finito de geradores, enquanto semigrupos de curvas com vários ramos não.



Semigrupo da curva C_f em que $f = XY$.

[1]Um semigrupo $S \subseteq \mathbb{N}^r$ admite condutor, se existe $c \in S$ tal que $c + \mathbb{N}^r \subseteq S$.

Como mencionamos anteriormente, no caso irredutível há métodos diretos de se obter um invariante topológico por meio dos demais. Naturalmente, os resultados de Zariski e Waldi nos fazem questionar.

Questão 1: Como obter S_f por meio de S_{f_i} e $I(f_i, f_j)$ para $1 \leq i \leq r$?

Nos anos 80, esta questão motivou teses de doutorado no Brasil. Mais especificamente, Garcia em [18] e Bayer em [3] consideraram o caso de curvas planas com dois ramos C_{f_1} e C_{f_2}. O primeiro autor considerou o caso em que os ramos não possuem mesma tangente, enquanto o segundo não impôs restrições.

Os resultados contidos nestes trabalhos introduzem o conceito de pontos maximais de S_f que ocorrem em uma quantidade finita, a saber, temos $I(f_1, f_2)$ desses pontos. Os pontos maximais possuem propriedades que os distinguem dos demais pontos de S_f. Bayer denominou "pontos maximais irredutíveis" os pontos maximais que possibilitam obter todos os pontos maximais. Tais pontos são determinados por S_{f_1}, S_{f_2} e $I(f_1, f_2)$.

Como $\pi_i(S_f) = S_{f_i}$ e o número de pontos maximais é $I(f_1, f_2)$, o semigrupo S_f determina S_{f_1}, S_{f_2} e $I(f_1, f_2)$. A recíproca também é abordada por estes autores apresentando resultados que permitem obter S_f por meio de S_{f_1}, S_{f_2} e dos pontos maximais.

Vale destacar que os resultados de Bayer e Garcia não utilizam propriedades topológicas ou analíticas das curvas, apenas propriedades aritméticas e combinatórias dos semigrupos envolvidos e deste modo, se aplicam a curvas algebroides definidas por séries de potências formais sobre corpos algebricamente fechados de característica arbitrária.

Assim, uma abordagem mais algébrica do que geométrica permite considerarmos uma curva algebroide plana como um ideal $Q = \langle f \rangle$ em que $f = \prod_{i=1}^{r} f_i \in \mathbb{K}[[X, Y]]$, com $\langle f_i \rangle \neq \langle f_j \rangle$ e $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ um corpo.

Sob este ponto de vista, Delgado em 1987 (veja [15]) aborda a Questão 1 para curvas planas algebroides com r ramos. Para tanto, o autor estende a noção de pontos maximais para o caso em que $r \geq 3$, dentre os quais nomeia (dependendo de determinadas propriedades) os "pontos maximais relativos" e "pontos maximais absolutos". Por meio de uma propriedade de simetria, já observada por Garcia para o caso de dois ramos, Delgado mostra que R é um ponto maximal relativo de S_f se, e somente se, $C - R - (1, ..., 1)$ é um ponto maximal absoluto de S_f, em que C é o condutor de S_f e que é caracterizado por meio de S_{f_i} e $I(f_i, f_j)$ para $1 \leq i < j \leq r$.

Similarmente ao realizado por Bayer, Delgado identifica determinados pontos maximais absolutos e os denomina "pontos maximais absolutos irredutíveis". Tais pontos são descritos explicitamente por meio de S_{f_i} e $I(f_i, f_j)$ para $1 \leq i < j \leq r$ e relacionados com valores de contato maximal com determinadas curvas. Tais pontos maximais absolutos irredutíveis geram os demais pontos maximais absolutos. Uma prova é apresentada, porém ela não é determinística, no sentido de que não é apresentado um modo sistemático de obter precisamente todos os pontos maximais absolutos.

Com tais conceitos, Delgado apresenta uma resposta para a Questão 1 caracterizando os pontos de S_f em termos de propriedades que fazem uso dos pontos maximais relativos e dos semigrupos de todas as curvas planas definidas por $\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} f_j$ para $1 \leq i \leq r$. Note que embora seja apresentada uma resposta, a solução transfere o problema para curvas com $r-1$ ramos e assim sucessivamente, aumentando consideravelmente o número de semigrupos a serem determinados. Por exemplo, se $r = 5$, então para obter S_f, o método de Delgado exige a determinação de 120 semigrupos intermediários.

O Capítulo 1 deste trabalho, entre outras coisas, propõe uma resposta direta para a questão 1 por meio de ferramentas algébricas no espírito das abordadas por Hefez e Hernandes em [23].

Mais geralmente, consideramos uma curva algebroide no espaço n-dimensional como um ideal radical próprio $Q = \bigcap_{i=1}^{r} P_i \subset \mathbb{K}[[\underline{X}]] = \mathbb{K}[[X_1, ..., X_n]]$ tal que $\mathbb{K}$ é um corpo algebricamente fechado e o anel $\mathcal{O}_i = \frac{\mathbb{K}[[\underline{X}]]}{P_i}$ tenha dimensão de Krull um para cada primo isolado P_i, com $i \in \{1, \ldots, r\}$.

O anel local da curva é o anel quociente $\mathcal{O} = \frac{\mathbb{K}[[\underline{X}]]}{Q}$ que é identificado com sua imagem homomórfica no fecho inteiro $\overline{\mathcal{O}} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{K}[[t_i]]$ utilizando as parametrizações $\phi_i(t_i) \in \mathbb{K}[[t_i]]^n$ de cada ramo P_i.

Munimos o conjunto

$$\Gamma = \{(v_1(h), \ldots, v_r(h));\ h \in \mathbb{K}[[\underline{X}]]\} \subset \overline{\mathbb{N}}^r,$$

em que $v_i(h) = ord_{t_i} h(\phi_i(t_i))$ e $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, com as operações da Álgebra Tropical, isto é, $(\Gamma, \min, +)$ de modo que tal conjunto tem estrutura de semianel, o qual denominamos semianel de valores da curva.

Mostramos que Γ é *finitamente gerado* (como semianel), bem como apresentamos um algoritmo que permite obter um conjunto de tais geradores. O método consiste em calcular uma Base Standard para o anel $\mathcal{O}$. Chamamos a atenção para o fato de que várias adaptações em conceitos ligados à clássica Teoria de Bases de Gröbner necessitaram ser feitas, tais como nos conceitos de S-processo, redução, etc. Um ponto crucial foi adaptar tais conceitos a subálgebras de $\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{K}[[t_i]]$ munidas de uma ordem parcial ao contrário da teoria clássica que utiliza ordem total.

O semianel Γ e o semigrupo S_f se determinam mutuamente como conjuntos, ou seja, Γ é também um invariante topológico completo quando consideramos curvas planas analíticas. Os resultados apresentados, quando aplicados ao caso de uma curva plana $Q = \langle f \rangle = \langle \prod_{i=1}^{r} f_i \rangle$, nos fornece um modo direto de obter Γ, e consequentemente S_f, por meio de Γ_i (ou equivalentemente S_i) e $I(f_i, f_j)$, fornecendo uma conexão entre os resultados de Zariski e Waldi, por meio da álgebra tropical.

Os resultados apresentados permitem deste modo determinar quando um elemento de $\overline{\mathbb{N}}^r$ pertence ou não ao semianel Γ de uma curva Q, bem como sua contrapartida algébrica, ou seja, podemos determinar quando um elemento de $\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{K}[[t_i]]$ pertence ou não ao anel $\mathcal{O}$ da curva Q.

Um passo natural é avançar para estruturas algébricas mais gerais. Nesta direção, no Capítulo 2, adaptamos a teoria desenvolvida no Capítulo 1 para *ideais fracionários*[2] de $\mathcal{O}$. Um exemplo trivial de ideal fracionário é o próprio anel $\mathcal{O}$.

O conjunto de valores de um ideal fracionário $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}$, denominado ideal relativo, é

$$v(\mathcal{I}) = \{(v_1(q), \ldots, v_r(q));\ q \in \mathcal{I}\}$$

que também pode ser munido com uma estrutura tropical, a saber, $(v(\mathcal{I}), \min)$ é um semimódulo sobre o semianel $(\Gamma, \min, +)$.

Vários autores (veja [2] e [14]) se interessam por questões aritméticas envolvendo semigrupos e ideais relativos, porém não conhecemos na literatura métodos que permitam obter sistematicamente o ideal relativo de um ideal fracionário e, muito menos, uma abordagem sob a ótica da álgebra tropical, o que esperamos permitir uma nova visão sobre a teoria. Neste trabalho, mostramos que o ideal relativo de um ideal fracionário é sempre *finitamente gerado* como semimódulo e, similarmente ao caso do semianel de valores, apresentamos algoritmos que permitem calcular um tal sistema finito de geradores.

Os conceitos e resultados relacionados aos ideais fracionários correspondem a uma generalização natural e podem ser obtidos de maneira análoga aos apresentados para o caso do anel $\mathcal{O}$. Optamos por não repetir demonstrações que são adaptações naturais dos resultados já descritos no Capítulo 1. Poderia ser questionado porque então não optamos em apresentar demonstrações detalhadas para este caso ao invés do feito para o anel $\mathcal{O}$ já que este é um caso particular de ideal fracionário? Isto poderia ser feito a exemplo do que é apresentado em [23]. No entanto, como os resultados referente a ideais fracionários necessitam previamente das conclusões obtidas para o anel $\mathcal{O}$, para maior comodidade do leitor optamos pela apresentação dada aqui.

[2] Um ideal fracionário $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}$ é um subconjunto do anel total de frações $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{O}$ que é um $\mathcal{O}$-módulo, contém um não divisor de zero e $\mathcal{O} :_{\mathcal{Q}} \mathcal{I} \neq \{0\}$.

Dentre os ideais fracionários do anel $\mathcal{O}$ de uma curva plana Q destacamos um relacionado ao módulo de diferenciais de Kähler

$$\Omega = \frac{\mathcal{O}dx + \mathcal{O}dy}{\mathcal{O}(f_x dx + f_y dy)}.$$

Mais especificamente, se $\mathcal{T} = \{\omega \in \Omega;\ \text{existe um não divisor de zero } h \in \mathcal{O};\ h\omega = 0\}$ é o submódulo de torção de Ω, então podemos considerar (a menos de isomorfismo)

$$\frac{\Omega}{\mathcal{T}} \subseteq \bigoplus_{i=1}^{r} \frac{\Omega_i}{\mathcal{T}_i} \subseteq \bigoplus_{i=1}^{r} \overline{\mathcal{O}}_i = \overline{\mathcal{O}}$$

e $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$ pode ser considerado como um ideal fracionário de $\mathcal{O}$.

No caso de curvas analíticas planas, o ideal relativo $\Lambda = v\left(\frac{\Omega}{\mathcal{T}}\right)$ é um importante invariante analítico, que foi considerado em [25] e [26] para o estudo da classificação analítica. Além disto, Pol em [30] utiliza o ideal relativo Λ para obter os valores de resíduos de formas diferenciais logarítmicas e relaciona Λ com o ideal jacobiano de curvas de interseção completa, embora não apresente algoritmo para calcular o conjunto Λ para curvas com vários ramos. Assim, a última seção do Capítulo 2 se justifica.

Reservamos o Capítulo 3 para algumas outras aplicações relacionadas a curvas planas. Uma delas é encontrada na Teoria de Folheações, uma vez que uma folheação holomorfa no plano pode ser definida por uma 1-forma diferencial. Adotamos uma abordagem superficial mais abstrata e algébrica para os conceitos da Teoria de Folheação, evitando assim, a introdução de muitos conceitos geométricos e apresentando diretamente os conceitos que utilizamos.

Um resultado clássico da Teoria de folheações, conhecido como o Teorema da separatriz de Camacho-Sad, assegura que toda folheação em $\mathbb{C}^2$ dada por uma 1-forma $\omega = a(X,Y)dX + b(X,Y)dY$ admite uma curva analítica $\langle f \rangle$ invariante (ou separatriz). Tal fato se traduz algebricamente pela relação $\omega \wedge df = gfdX \wedge dY$, em que $g \in \mathbb{C}\{X,Y\}$. Obter separatrizes de uma folheação a partir da 1-forma que a define não é ainda uma questão resolvida. Aqui não abordamos tal questão, mas uma no sentido contrário: dada uma curva plana $\langle f \rangle$ como descrever folheações que a admitem como separatriz?

Para abordar tal questão buscamos relacionar o submódulo de torção $\mathcal{T}$ do módulo de diferenciais de Kähler do anel $\mathcal{O}$ da curva $\langle f \rangle$ e as folheações que admitem tal curva como separatriz. Deste modo, foi possível aplicar os métodos desenvolvidos no Capítulo 2 de modo a responder a questão apresentada para curvas planas com dois ramos, que corresponde a determinar geradores para o submódulo $\mathcal{T}$.

O capítulo finaliza com uma seção em que apresentamos a descrição do conjunto Λ, com a apresentação de uma Base Standard para $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$, para todas as curvas com multiplicidade menor que 4. Acreditamos que tal descrição pode ser um bom catálogo para a pesquisa nesta área, seja para a classificação analítica, cálculo de invariantes, descrição de folheações, estudo do submódulo de torção $\mathcal{T}$, etc. A limitação pela multiplicidade 3, não é certamente uma restrição dos métodos, mas como o leitor verá, os cálculos se tornam extensos e mais complicados, motivando entre outras possíveis continuidades deste trabalho, a implementação dos algoritmos aqui descritos em um sistema de computação algébrica.

Capítulo 1

Bases Standard para o Anel Local

1.1 O Semianel de Valores de uma Curva

Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado de característica arbitrária. Denotamos por $\mathbb{K}[[\underline{X}]]$ o anel $\mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_n]]$ das séries de potências formais nas indeterminadas $X_1, \ldots,$ X_n com coeficientes em $\mathbb{K}$ e por $\mathbb{C}\{\{\underline{X}\}\}$ o anel $\mathbb{C}\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$ das séries de potências convergentes na origem nas indeterminadas $X_1, \ldots, X_n$ com coeficientes em $\mathbb{C}$.

Definição 1.1. *Uma* curva algebroide *no espaço n-dimensional $\mathbb{K}^n$ $(n > 1)$ é um ideal radical próprio*

$$Q = \bigcap_{i=1}^{r} P_i \subset \mathbb{K}[[\underline{X}]]$$

tal que o anel $\mathcal{O}_i = \frac{\mathbb{K}[[\underline{X}]]}{P_i}$ tenha dimensão de Krull um para cada primo isolado P_i, com $i \in \{1, \ldots, r\}$. Quando $Q \subset \mathbb{C}\{\{\underline{X}\}\}$, dizemos que Q é uma curva analítica.

Assumiremos que a curva Q seja *não degenerada*, ou seja,

$$\dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}^2} = n,$$

onde $\mathcal{M}$ denota o ideal maximal do anel local, completo e reduzido $\mathcal{O} = \frac{\mathbb{K}[[\underline{X}]]}{Q}$.

Cada P_i é chamado de *ramo* da curva. O fecho integral $\overline{\mathcal{O}}_i$ do domínio $\mathcal{O}_i = \frac{\mathbb{K}[[\underline{X}]]}{P_i}$ é um anel de valoração discreta isomorfo a $\mathbb{K}[[t_i]]$, onde t_i é um parâmetro uniformizante de $\overline{\mathcal{O}}_i$ e temos (via isomorfismo)

$$\mathcal{O} \subseteq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_i \subseteq \overline{\mathcal{O}} = \bigoplus_{i=1}^{r} \overline{\mathcal{O}}_i = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{K}[[t_i]], \tag{1.1}$$

onde $\overline{\mathcal{O}}$ denota o fecho integral de $\mathcal{O}$ em seu anel total de frações.

Neste trabalho, consideramos

$$\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Se $v_i : \overline{\mathcal{O}}_i \to \overline{\mathbb{N}}$ denota a valoração discreta normalizada de $\overline{\mathcal{O}}_i$, onde $v_i(0) = \infty$, para todo $i = 1, ..., r$, então o conjunto

$$S_i := \{v_i(g);\ g \in \mathcal{O}_i \setminus \{0\}\} \subseteq \mathbb{N}$$

é classicamente chamado de *semigrupo de valores* de $\mathcal{O}_i$ ou de P_i. Agora, dado um não divisor de zero $g \in \mathcal{O}$, definimos

$$v(g) := (v_1(g), \ldots, v_r(g)) \in \mathbb{N}^r,$$

onde $v_i(g)$ é o valor da imagem homomórfica de $g \in \mathcal{O}$ em $\mathcal{O}_i$. Desta maneira, obtemos o conjunto

$$S := \{v(g);\ g \text{ não é um divisor de zero de } \mathcal{O}\} \subseteq \bigoplus_{i=1}^{r} S_i \subseteq \mathbb{N}^r,$$

que é chamado de *semigrupo de valores* de $\mathcal{O}$ ou de Q.

Denotaremos o conjunto de índices $\{1, \ldots, r\}$ por I. Em $\overline{\mathbb{N}}^r$, denotamos $\underline{\gamma} = (\gamma, ..., \gamma)$. Em particular,

$$\underline{0} := (0, ..., 0), \qquad \underline{\infty} := (\infty, ..., \infty).$$

Consideramos a seguinte ordem parcial: se $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_r)$ e $\gamma' = (\gamma'_1, ..., \gamma'_r)$ são elementos de $\overline{\mathbb{N}}^r$, então

$$\gamma \leq \gamma' \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_i \leq \gamma'_i, \ \text{ para todo } i \in I.$$

Escrevemos $\gamma < \gamma'$ se $\gamma \leq \gamma'$ e $\gamma \neq \gamma'$. E, claramente, $\underline{0} \leq \gamma \leq \underline{\infty}$, para todo $\gamma \in \overline{\mathbb{N}}^r$.

No que segue, identificaremos $X_j + P_i \in \mathcal{O}_i$ com sua imagem isomórfica $x_j(t_i) \in \mathbb{K}[[t_i]]$ e $\mathcal{O}_i$ com $\mathbb{K}[[x_1(t_i), \ldots, x_n(t_i)]]$. Chamaremos $\phi_i(t_i) = (x_1(t_i), \ldots, x_n(t_i))$ de parametrização de P_i.

Consideremos o conjunto

$$\Gamma_i := \{v_i(g_i) = ord_{t_i}(g_i \circ \phi_i)(t_i);\ g_i \in \mathcal{O}_i\} \subseteq \overline{\mathbb{N}}.$$

É imediato que Γ_i é subsemigrupo aditivo de $\overline{\mathbb{N}}$, considerando $\gamma_i + \infty = \infty$ para todo $\gamma_i \in \Gamma_i$ e $i \in I$.

Denotando $t = (t_1, ..., t_r)$, chamaremos $\phi(t) = [\phi_1(t_1), ..., \phi_r(t_r)]$ de parametrização de Q. Assim, dado $g \in \mathcal{O}$, definimos

$$g(t) := (g \circ \phi)(t) = ((g \circ \phi_1)(t_1), ..., (g \circ \phi_r)(t_r)) \in \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{K}[[t_i]]$$

e

$$v(g) := (v_1(g), \ldots, v_r(g)).$$

Obtemos então o conjunto de valores de $\mathcal{O}$:

$$\Gamma := \{v(g) = (v_1(g), \ldots, v_r(g));\ g \in \mathcal{O}\} \subseteq \bigoplus_{i=1}^{r} \Gamma_i \subseteq \overline{\mathbb{N}}^r.$$

É fácil ver que $(\Gamma, +)$ é um semigrupo, considerando

$$\gamma + \underline{\infty} = \underline{\infty}, \quad \text{para todo } \gamma \in \Gamma.$$

Como conjuntos, S e Γ se determinam mutuamente, pois $S := \Gamma \cap \mathbb{N}^r$. Logo, Γ é também um invariante topológico completo para curvas analíticas planas. Além disso, como semigrupo, Γ é o fecho topológico de S no espaço produto $\overline{\mathbb{N}}^r$, com $\overline{\mathbb{N}}$ munido da topologia da compactificação em um ponto. Este completamento foi considerado para curvas planas por Delgado (para detalhes, veja a Seção 2 de [15]).

Consideremos agora um subconjunto não vazio $J = \{j_1, \ldots, j_s\}$ de I. Escrevendo Γ_J para o conjunto de valores de $\mathcal{O}_J = \frac{\mathbb{K}[[\underline{X}]]}{\bigcap_{j \in J} P_j}$, denotamos por Q^J a imagem canônica do ideal $\bigcap_{i \in I \setminus J} P_i + \bigcap_{j \in J} P_j \subset \mathbb{K}[[\underline{X}]]$ em $\mathcal{O}_J$ e por $v_J(Q^J)$ o Γ_J-monomódulo

$$\{v_J(q) := (v_{j_1}(q), \ldots, v_{j_s}(q));\ q \in Q^J\}.$$

Se $J = \{i\}$, escrevemos $Q^{\{i\}} = Q^i$ e $v_{\{i\}}(Q^{\{i\}}) = v_i(Q^i)$.

Observação 1.2. *Uma vez que $\overline{\mathcal{O}}$ é um $\mathcal{O}$-módulo de tipo finito, temos que o condutor $\mathcal{C} = (\mathcal{O} : \overline{\mathcal{O}}) = \{g \in \mathcal{O};\ g\overline{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}\}$ é um ideal de $\overline{\mathcal{O}}$ contendo um não divisor de zero e $\mathcal{C} = (t_1^{\sigma_1}, \ldots, t_r^{\sigma_r})\overline{\mathcal{O}}$. O elemento $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \in \Gamma$ é chamado de* condutor *de Γ (e também de S). Como Γ_i tem um condutor, existe $\delta_i \in v_i(Q^i)$ tal que $\delta_i + \overline{\mathbb{N}} \subseteq v_i(Q^i)$ e δ_i é o menor elemento em $v_i(Q^i)$ com esta propriedade. D'Anna, em* [14] *(Proposição 1.3), prova que $\sigma_i = \delta_i$ para todo $i \in I$.*

Em [23] é apresentado um algoritmo para calcular o conjunto de valores para qualquer $\mathcal{O}_i$-módulo finitamente gerado em $\mathbb{K}[[t_i]]$. Em particular, podemos obter $v_i(Q^i)$ e calcular σ_i para qualquer $i \in I$.

Observação 1.3. *Para uma curva plana* $Q = \langle \prod_{i\in I} f_i \rangle = \cap_{i\in I}\langle f_i\rangle$*, temos*

$$Q^i = \frac{\langle \prod_{\substack{j\in I\\ j\neq i}} f_j\rangle + \langle f_i\rangle}{\langle f_i\rangle}.$$

E temos o Γ_i*-monomódulo*

$$v_i(Q^i) = I\left(\prod_{\substack{j\in I\\ j\neq i}} f_j, f_i\right) + \Gamma_i = \sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}} I(f_j, f_i) + \Gamma_i,$$

onde $I(g,h) = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X,Y]]}{\langle g,h\rangle}$*, para* $g, h \in \mathbb{K}[[X,Y]]$*. Desta maneira, temos a bem conhecida igualdade*

$$\sigma_i = \sum_{j\in I, j\neq i} I(f_j, f_i) + c_i,$$

onde c_i *é o condutor de* Γ_i *(e também de* S_i*), que pode ser calculado em termos do conjunto mínimo de geradores de* Γ_i*.*

Sejam $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ e $\gamma' = (\gamma'_1, \ldots, \gamma'_r)$ elementos de Γ. Temos as seguintes propriedades:

A) Se $\gamma_k = \gamma'_k < \infty$ para algum $k \in I$, então existe $\gamma'' = (\gamma''_1, \ldots, \gamma''_r) \in \Gamma$ tal que $\gamma''_i \geq \min\{\gamma_i, \gamma'_i\}$ para todo $i \in I$ (a igualdade é válida se $\gamma_i \neq \gamma'_i$) e $\gamma''_k > \gamma_k = \gamma'_k$.

B) $\min\{\gamma, \gamma'\} := (\min\{\gamma_1, \gamma'_1\}, \ldots, \min\{\gamma_r, \gamma'_r\}) \in \Gamma$.

C) Se $\gamma_i = 0$ para algum $i \in I$, então $\gamma = \underline{0}$.

A Propriedade B acima nos permite considerar Γ munido com as operações (a adição e a multiplicação tropicais):

$$\gamma \oplus \gamma' = \min\{\gamma, \gamma'\} \quad \text{e} \quad \gamma \odot \gamma' = \gamma + \gamma'.$$

Deste modo, $(\Gamma, \oplus, \odot)$ é um semianel comutativo. De fato, sejam $\gamma, \gamma', \gamma'' \in \Gamma$.

- $(\Gamma, \oplus)$ é um monóide comutativo com elemento neutro $\underline{\infty}$:
  - $(\gamma \oplus \gamma') \oplus \gamma'' = \min\{(\min\{\gamma, \gamma'\}), \gamma''\} = \min\{\gamma, \gamma', \gamma''\} = \min\{\gamma, (\min\{\gamma', \gamma''\})\}$ $= \gamma \oplus (\gamma' \oplus \gamma'')$;
  - $\underline{\infty} \oplus \gamma = \min\{\underline{\infty}, \gamma\} = \gamma = \min\{\gamma, \underline{\infty}\} = \gamma \oplus \underline{\infty}$;
  - $\gamma \oplus \gamma' = \min\{\gamma, \gamma'\} = \min\{\gamma', \gamma\} = \gamma' \oplus \gamma$.
- $(\Gamma, \odot)$ é um monóide comutativo com identidade $\underline{0}$:
  - $(\gamma \odot \gamma') \odot \gamma'' = (\gamma + \gamma') + \gamma'' = \gamma + (\gamma' + \gamma'') = \gamma \odot (\gamma' \odot \gamma'')$;

- $\underline{0} \odot \gamma = \underline{0} + \gamma = \gamma = \gamma + \underline{0} = \gamma \odot \underline{0}$;
- $\gamma \odot \gamma' = \gamma + \gamma' = \gamma' + \gamma = \gamma' \odot \gamma$.

- A multiplicação é distributiva em relação à adição:
  - $\gamma \odot (\gamma' \oplus \gamma'') = \gamma + \min\{\gamma', \gamma''\} = \min\{\gamma + \gamma', \gamma + \gamma''\} = (\gamma \odot \gamma') \oplus (\gamma \odot \gamma'')$;
  - $(\gamma \oplus \gamma') \odot \gamma'' = \min\{\gamma, \gamma'\} + \gamma'' = \min\{\gamma + \gamma'', \gamma' + \gamma''\} = (\gamma \odot \gamma'') \oplus (\gamma' \odot \gamma'')$.

Definição 1.4. *Chamamos* $(\Gamma, \oplus, \odot)$ *de* semianel de valores *associado à curva* $Q = \bigcap_{i \in I} P_i$.

Introduziremos a seguir alguns conceitos importantes para a teoria que desenvolveremos sobre o anel local e o semianel de valores nas seções seguintes.

Definição 1.5. *Um elemento* $\gamma \in \Gamma \setminus \{\underline{0}\}$ *é chamado de* irredutível *se*

$$\gamma = \gamma' \odot \gamma'';\ \gamma', \gamma'' \in \Gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma' = \gamma \quad ou \quad \gamma'' = \gamma.$$

Destacamos a seguinte notação: se $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_r) \in \overline{\mathbb{N}}^r \setminus \{\underline{\infty}\}$, então

$$I_\gamma = \{i \in I;\ \gamma_i \neq \infty\}.$$

Se $g \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$, então $I_g = I_{v(g)}$. Ela será útil quando precisarmos evitar coordenadas infinitas.

Dados $\gamma \in \overline{\mathbb{N}}^r \setminus \{\underline{\infty}\}$ e um subconjunto próprio J de I_γ, definimos os conjuntos:

$$\overline{F}_J(\gamma) = \{\gamma' \in \overline{\mathbb{N}}^r;\ \gamma'_i > \gamma_i \text{ para } i \in I_\gamma \setminus J \text{ e } \gamma'_j = \gamma_j \text{ para } j \notin I_\gamma \setminus J\},$$

$$F_J(\gamma) = \{\gamma' \in \Gamma;\ \gamma'_i > \gamma_i \text{ para } i \in I_\gamma \setminus J \text{ e } \gamma'_j = \gamma_j \text{ para } j \notin I_\gamma \setminus J\} = \overline{F}_J(\gamma) \cap \Gamma.$$

Definição 1.6. *Dizemos que* $\gamma \in \Gamma$ *é um* ponto (maximal) absoluto *de* Γ *se* $F_J(\gamma) = \emptyset$ *para todo subconjunto próprio* J *de* I_γ.

Notemos que se I_γ tem somente um elemento, então não existe um subconjunto próprio J de I_γ tal que $F_J(\gamma) \neq \emptyset$. Desta maneira, por vacuidade, γ é considerado um ponto absoluto de Γ.

Para $r = 1$, a definição acima é equivalente a dizer que todo elemento de Γ é um ponto absoluto e o sistema mínimo de geradores de Γ é precisamente seu conjunto de pontos absolutos irredutíveis.

O lema a seguir caracteriza elementos γ de Γ tais que $\gamma_i \geq \sigma_i$ para alguma coordenada finita $i \in I$. Sua demonstração segue as ideias do Lema 1.8 de [16].

Lema 1.7. *Seja J um subconjunto não trivial de I e seja $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_r) \in \overline{\mathbb{N}}^r$ com $\sigma_i \leq \gamma_i < \infty$ para todo $i \notin J$, em que $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_r)$ é o condutor de Γ. Então $\gamma \in \Gamma$ se, e somente se, existe $\overline{\gamma} = (\overline{\gamma}_1, ..., \overline{\gamma}_r) \in \Gamma$, onde $\overline{\gamma}_j = \gamma_j$ para todo $j \in J$ e $\overline{\gamma}_i = \infty$ para todo $i \notin J$.*

Prova. Suponhamos que $\gamma \in \Gamma$. Para simplificar a demonstração do lema vamos assumir que $J = \{1, ..., s\}$. Denotemos por i o maior inteiro tal que $s < i \leq r$ para o qual existe um elemento do tipo $\gamma(i) = (\gamma_1, ..., \gamma_s, \gamma'_{s+1}, ..., \gamma'_i, \gamma_{i+1}, ..., \gamma_r) \in \Gamma$ com $\gamma'_k > \gamma_k$ para $s < k \leq i$.

Se $i < r$, consideremos $\overline{\gamma} \in \overline{F}_{\{i+1\}}(\gamma(i))$ com $\overline{\gamma}_j > \max\{\sigma_j, \gamma_j\}$ para todo $j \in J$. Uma vez que $\overline{\gamma} \geq \sigma$, temos $\overline{\gamma} \in \Gamma$ e, pela Propriedade A, existe $\gamma'' \in \Gamma$ tal que $\gamma''_{i+1} > \gamma_{i+1}$ e $\gamma''_k = \gamma(i)_k$ para todo $k \neq i+1$. Logo, γ'' é um elemento do tipo $\gamma(i+1)$, o que é contraditório à maximalidade de i. Assim, $i = r$.

Agora, consideremos um elemento γ^1 do tipo $\gamma(r)$. Como $\gamma(r)$ satisfaz as mesmas hipóteses de γ, podemos construir γ^2 do mesmo modo e, mais geralmente, a sequência de elementos de Γ: $\gamma = \gamma^0, \gamma^1, ..., \gamma^m, ...$ tal que $\gamma^{m+1} \in F_J(\gamma^m)$ para todo $m \geq 0$. Então $\overline{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_s, \infty, ..., \infty) \in \Gamma$, uma vez que este elemento é o limite (topológico) da sequência acima.

Suponhamos agora que $\overline{\gamma} \in \Gamma$. Uma vez que $(\infty, ..., \infty, \gamma_{s+1}, ..., \gamma_r) \in F_{I\setminus J}(\gamma)$, temos $F_{I\setminus J}(\gamma) \neq \emptyset$. Vamos mostrar que $\overline{F}_J(\gamma) \subset \Gamma$. Para isso, consideremos $\gamma' \in \overline{F}_J(\gamma)$. Como $F_{I\setminus J}(\gamma') \neq \emptyset$, podemos escolher $\gamma'' \in F_{I\setminus J}(\gamma')$. Portanto, temos $\gamma' = \overline{\gamma} \oplus \gamma'' \in \Gamma$.

Em particular, temos $F_J(\gamma) \neq \emptyset$. Deste modo, se $\gamma' \in F_J(\gamma)$ e $\gamma'' \in F_{I\setminus J}(\gamma)$, concluímos que $\gamma = \gamma' \oplus \gamma'' \in \Gamma$. ■

1.2 Bases Standard

Nesta seção introduziremos o conceito de Base Standard para o anel local $\mathcal{O}$ de uma curva algebroide reduzida que generaliza a noção dada por Hefez e Hernandes em [23] para o caso irredutível e que será ferramenta crucial para os principais resultados deste trabalho. Antes, porém, apresentaremos conceitos preliminares que serão amplamente utilizados neste trabalho.

Seja G um subconjunto não vazio do ideal maximal $\mathcal{M}$ de $\mathcal{O}$. Um G-produto é um elemento da forma

$$G^\alpha = \prod_{j=1}^{m} g_j^{\alpha_j},$$

onde $m \in \mathbb{N}$, $g_j \in G$ e $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$.

Definição 1.8. *Sejam $g \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$ e $k \in I_g$. Dizemos que h é uma k-redução de g módulo G se existem $c \in \mathbb{K}$ e um G-produto G^α tais que*

$$h = g - cG^\alpha,$$

com $v_i(h) \geq v_i(g)$, para todo $i \in I$ e com desigualdade estrita para $i = k$.

Definição 1.9. *Dado $g \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$, dizemos que h é uma redução de g módulo G se h é uma k-redução de g módulo G, para algum $k \in I_g$.*

O lema a seguir nos dá uma outra caracterização para uma k-redução.

Lema 1.10. *Sejam $g \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$ e $k \in I_g$. Existe uma k-redução de g módulo G se, e somente se, existe um G-produto G^α tal que*

$$v_i(g) \leq v_i(G^\alpha),$$

para todo $i \in I$ e com igualdade para $i = k$.

Prova. Suponhamos que h seja uma k-redução de g módulo G. Então existem $c \in \mathbb{K}$ e um G-produto G^α tais que $h = g - cG^\alpha$, com $v_i(h) \geq v_i(g)$, para todo $i \in I$ e com desigualdade estrita para $i = k$.

Se $v_i(G^\alpha) < v_i(g)$ para algum $i \in I$, teríamos $v_i(h) = v_i(G^\alpha) < v_i(g)$, o que contradiria a definição de k-redução. Logo, $v_i(g) \leq v_i(G^\alpha)$, para todo $i \in I$.

Se $v_k(g) < v_k(G^\alpha)$, teríamos $v_k(h) = v_k(g)$, o que também contradiria a definição de k-redução. Assim, temos $v_k(g) = v_k(G^\alpha)$.

A recíproca é imediata. ∎

Observação 1.11. *Se $g \in \bigcap_{\substack{i \in I \\ i \neq k}} P_i \setminus P_k$ admite uma redução módulo G, então uma vez que $I_g = \{k\}$, g admite somente k-redução e, neste caso, existe um G-produto G^α tal que $v(g) = v(G^\alpha)$, visto que $v_k(g) = v_k(G^\alpha)$ e $v_i(g) = \infty = v_i(G^\alpha)$.*

Seja agora $g \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$ e considere uma cadeia (possivelmente infinita) de reduções

$$g = h_0 \to h_1 \to h_2 \to ... \to h_l \to ..., \tag{1.2}$$

onde h_j é uma k_j-redução de h_{j-1} módulo G, com $k_j \in I_{h_{j-1}}$ para todo $j \geq 1$. Deste modo, existem $c_j \in \mathbb{K}$ e G-produtos G^{α_j} tais que

$$h_l = g - \sum_{j=1}^{l} c_j G^{\alpha_j},$$

onde, devido à definição de redução, devemos ter $v(G^{\alpha_{j_1}}) \neq v(G^{\alpha_{j_2}})$ para $j_1 \neq j_2$.

Notemos ainda que

$$v(g) \leq v(G^{\alpha_j}), \ \forall\ j \geq 1.$$

Se a cadeia (1.2) for infinita, obteremos a seguinte sequência em $\mathcal{O}$:

$$s_l = \sum_{j=1}^{l} c_j G^{\alpha_j},\ \ l \geq 1.$$

Observemos que se G é finito, digamos $G = \{g_1, ..., g_m\}$, então a sequência $(s_l)_{l \in \mathbb{N}^*}$ é convergente em $\mathcal{O}$, uma vez que $\mathcal{O}$ é completo com respeito à topologia $\mathcal{M}$-ádica (para detalhes sobre a topologia $\mathcal{M}$-ádica, veja [21]).

Com efeito, a condição $v(G^{\alpha_{j_1}}) \neq v(G^{\alpha_{j_2}})$, para $j_1 \neq j_2$, implica em $G^{\alpha_{j_1}} \neq G^{\alpha_{j_2}}$, para $j_1 \neq j_2$. Logo, o conjunto $\{c_j G^{\alpha_j};\ j \geq 1\}$ não tem elementos repetidos.

Consideremos agora $b \in \mathbb{N}$ e suponhamos que $\text{mult}(G^{\alpha_j}) = b$. Se $G^{\alpha_j} = g_1^{\alpha_{j1}} \cdot ... \cdot g_m^{\alpha_{jm}}$, então

$$\sum_{l=1}^{m} \alpha_{jl} \text{mult}(g_l) = b,$$

e assim temos a seguinte equação diofantina associada

$$a_1 z_1 + ... + a_m z_m = b,$$

onde $a_l = \text{mult}(g_l) \geq 1$, para $l = 1, ..., m$. Uma vez que as soluções dessa equação devem ser naturais, teremos um conjunto finito de soluções. Assim,

$$\sharp\{j \geq 1\ ;\ \text{mult}(G^{\alpha_j}) = b\} < \infty.$$

Portanto, a família $\{c_j G^{\alpha_j}\ ;\ j \geq 1\}$ é somável em $\mathcal{O}$ e a soma de seus elementos é o limite da sequência $(s_l)_{l \geq 1}$.

Definição 1.12. *Sejam $g \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$. Dizemos que h é uma redução final de g módulo G se h é obtido a partir de g via uma cadeia de reduções módulo G e h não pode mais ser reduzido.*

Notemos que se uma redução final de um elemento $g \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$ módulo G é nula e G é finito, então podemos escrever

$$g = \sum_{\delta \in \Delta} c_\delta G^\delta,$$

onde Δ é um subconjunto de $\mathbb{N}^{\sharp G}$, $c_\delta \in \mathbb{K}$ e G^δ é um G-produto.

Introduzimos agora o conceito de Base Standard para o anel local $\mathcal{O}$ de uma curva algebroide $Q = \bigcap_{i=1}^{r} P_i$.

Definição 1.13. *Seja G um subconjunto finito e não vazio de $\mathcal{M}$. Dizemos que G é uma Base Standard para $\mathcal{O}$ se todo elemento não nulo de $\mathcal{O}$ tem uma redução módulo G.*

Observação 1.14. *Se $G = \{g_1, ..., g_m\}$ é uma Base Standard para $\mathcal{O}$, então todo $g \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$ admite uma cadeia de reduções módulo G a 0, ou seja, $g = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} c_i G^{\alpha_i}$ ou, equivalentemente, $\mathcal{O} = \mathbb{K}[[g_1, \ldots, g_m]]$.*

A seguinte propriedade nos permite apresentar uma outra caracterização de uma Base Standard para o anel local $\mathcal{O}$.

Proposição 1.15. *As seguintes afirmações são equivalentes.*
(a) *Todo elemento não nulo g de $\mathcal{O}$ tem uma k-redução módulo G para todo $k \in I_g$.*
(b) *Todo elemento não nulo g de $\mathcal{O}$ tem uma redução módulo G.*

Prova. É suficiente provar que (b) $\Rightarrow$ (a). Suponhamos, por absurdo, que existam $g \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$ e $k \in I_g$ tais que g admita redução módulo G, mas g não tenha uma k-redução. Podemos assumir que g tenha apenas j-redução para j em um subconjunto não vazio J de $I_g \setminus \{k\}$.

Consideremos agora um elemento $h \in \mathcal{O}$ obtido a partir de g via uma cadeia finita de reduções módulo G de modo que h não tenha uma j-redução módulo G ou $\sigma_j \leq v_j(h) < \infty$, para todo $j \in J$. Notemos que $h \neq 0$, $v_i(h) = v_i(g)$ para todo $i \in I \setminus J$, isto é, $i \in I_h \subset I_g$, e desse modo h não admite i-redução para nenhum $i \in I_g \setminus J$, caso contrário o mesmo seria verdadeiro para g.

Seja $L \subseteq J$ tal que h não admita i-redução para nenhum $i \in I_g \setminus L \supseteq I_g \setminus J$, ou seja, $\sigma_l \leq v_l(h) < \infty$ para todo $l \in L$. Se $L = \emptyset$, então h não tem redução módulo G, o que é uma contradição. Por outro lado, se $L \neq \emptyset$, então pelo Lema 1.7 existe $h' \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$ tal que $v_i(h') = v_i(h)$ para todo $i \in I \setminus L$ e $v_l(h') = \infty$ para todo $l \in L$. Porém, dessa maneira h' não admite redução módulo G e obtemos uma contradição novamente. ∎

Como uma consequência imediata do conceito de redução e da proposição acima, temos o seguinte corolário que nos dá outra caracterização de uma Base Standard para o anel local de uma curva algebroide.

Corolário 1.16. *Seja G um subconjunto finito e não vazio de $\mathcal{M}$. As seguintes condições são equivalentes.*
(a) *G é uma Base Standard para $\mathcal{O}$.*
(b) *Para todo elemento não nulo $g \in \mathcal{O}$ e para algum $k \in I_g$, existe um G-produto G^α (dependendo de k) tal que $v_i(g) \leq v_i(G^\alpha)$ para todo $i \in I$ e $v_k(g) = v_k(G^\alpha)$.*
(c) *Para todo elemento não nulo $g \in \mathcal{O}$ e para todo $k \in I_g$, existe um G-produto G^α (dependendo de k) tal que $v_i(g) \leq v_i(G^\alpha)$ para todo $i \in I$ e $v_k(g) = v_k(G^\alpha)$.*

Em [23], a noção de Base Standard foi introduzida para anéis locais de curvas irredutíveis e, neste caso, sua existência é imediata. O seguinte teorema garante a existência de uma Base Standard para o anel local de uma curva algebroide com vários ramos.

Teorema 1.17. *O anel local $\mathcal{O}$ de uma curva $Q = \bigcap_{i=1}^{r} P_i$ admite uma Base Standard.*

Prova. Seja H um subconjunto de $\mathcal{O}$ satisfazendo $v(H) = v(\mathcal{M}) = \Gamma \setminus \{\underline{0}\}$ tal que $v(h) \notin v(H \setminus \{h\})$ para todo $h \in H$. Definimos

$$B_0 := \{h \in H;\ v_i(h) < \sigma_i \text{ se } i \in I_h\}.$$

Para todo $i \in I$, consideremos $B_i', B_i'' \subset \mathcal{O}$ tais que as imagens homomórficas de B_i' e B_i'' em $\mathcal{O}_i$ sejam Bases Standard para o anel local $\mathcal{O}_i$ e para o $\mathcal{O}_i$-módulo Q^i respectivamente. Tais bases podem ser obtidas como descrito em [23].

Uma vez que a imagem homomórfica de qualquer subconjunto finito A de $\mathcal{O}$ tal que $v_i(A) = v_i(B_i'')$ é uma Base Standard para Q^i, podemos considerar B_i'' como um subconjunto da imagem homomórfica de $\bigcap_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} P_j$ em $\mathcal{O}$, ou seja, $v_j(h) = \infty$ para todo $j \in I \setminus \{i\}$, onde $h \in B_i''$.

Seja agora $B_i = B_i' \cup B_i''$. Afirmamos que o conjunto finito $G = \bigcup_{i=0}^{r} B_i$ é uma Base Standard para $\mathcal{O}$.

Consideremos um elemento não nulo g de $\mathcal{O}$.

Se $v_i(g) < \sigma_i$ para todo $i \in I_g$, existe um G-produto G^α (mais especificamente, um B_0-produto) tal que $v(g) = v(G^\alpha)$.

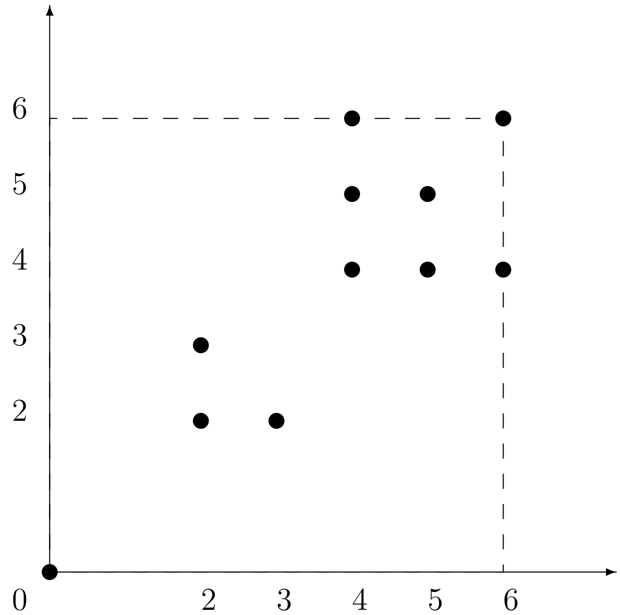
Se $\sigma_k \leq v_k(g)$ para algum $k \in I_g$, então, pela Observação 1.2, $v_k(g) \in v_k(Q^k)$. Como as imagens homomórficas de $B_k', B_k'' \subset \mathcal{O}$ são Bases Standard para $\mathcal{O}_k$ e Q^k, existe um G-produto G^α (mais precisamente, $G^\alpha = (B_k')^{\alpha'} h_k$, onde $(B_k')^{\alpha'}$ é um B_k'-produto e $h_k \in B_k''$)

tal que $v_k(g) = v_k(G^\alpha)$ e $v_i(g) \leq v_i(G^\alpha) = \infty$ para todo $i \in I \backslash \{k\}$. Pelo corolário anterior, concluímos que G é uma Base Standard para $\mathcal{O}$. ■

Exemplo 1.18. *Consideremos a curva plana $Q = \langle f \rangle$, com*

$$f = (Y^2 - X^3)(X^2 - Y^3)$$

Vamos escrever $f_1 = y^2 - x^3$ e $f_2 = x^2 - y^3$. A figura abaixo ilustra os elementos de $v(B_0)$ com coordenadas finitas e que pode ser obtida seguindo os resultados de Garcia e Bayer.



Elementos de $v(B_0)$ com coordenadas finitas.

Os pontos com alguma coordenada infinita são $(4, \infty)$ e $(\infty, 4)$. Deste modo,

$$v(B_0) = \{(2,2), (2,3), (3,2), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5), (4,\infty), (\infty, 4)\}.$$

Assim, podemos considerar

$$B_0 = \{x + y, x, y, f_1 + f_2, xy + f_2, xy + f_1, xy, f_2, f_1\}.$$

Vemos então que $B_1' = B_2' = \{x, y\}$ e, pela Observação 1.3, concluímos que $B_1'' = \{f_2\}$ e $B_2'' = \{f_1\}$, isto é, $B_1 = \{x, y, f_2\}$ e $B_2 = \{x, y, f_1\}$. Desta maneira, $G = \cup_{i=0}^{2} B_i = B_0$ é uma Base Standard para anel local $\mathcal{O}$ da curva Q.

O Teorema 1.17 nos permite concluir que o semianel de valores associado a uma curva algebroide é finitamente gerado.

Teorema 1.19. *O semianel* Γ *é gerado por* $v(G)$*, onde* G *é uma Base Standard para* $\mathcal{O}$*.*

Prova. Seja $G = \{g_1, \ldots, g_m\}$ uma Base Standard para $\mathcal{O}$, com

$$v(g_j) = \gamma_j = (\gamma_{j1}, \ldots, \gamma_{jr}) \in \overline{\mathbb{N}}^r, \text{ para } 1 \leq j \leq m.$$

Notemos inicialmente que $\underline{0} = \sum_{j=1}^{m} 0 \cdot \gamma_j = \gamma_1^0 \odot ... \odot \gamma_m^0$, em que $\gamma_j^{\alpha_j} := \alpha_j \cdot \gamma_j$.

Pela Observação 1.11, para cada $0 \neq h_k \in Q^k$, existe um G-produto G^{β_k} tal que $v(h_k) = v(G^{\beta_k})$. Desta maneira,

$$\underline{\infty} = v(h_1) + v(h_2) = v(G^{\beta_1}) + v(G^{\beta_2}) = v(G^{\alpha}) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot \gamma_j = \gamma_1^{\alpha_1} \odot ... \odot \gamma_m^{\alpha_m},$$

onde $\beta_1 + \beta_2 = \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$.

Agora, dado $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_r) \in \Gamma \setminus \{\underline{0}, \underline{\infty}\}$, existe $g \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ tal que $\rho = v(g)$.

Se $I_g = \{i_1, \ldots, i_s\}$, pelo Corolário 1.16, existem $\alpha_{kj} \in \mathbb{N}$ com $1 \leq k \leq s$ e $1 \leq j \leq m$ tais que

$$\rho_{i_k} = v_{i_k}(g_1^{\alpha_{k1}} \cdot \ldots \cdot g_m^{\alpha_{km}}) \text{ e } \rho_i \leq v_i(g_1^{\alpha_{k1}} \cdot \ldots \cdot g_m^{\alpha_{km}}), \text{ para todo } i \in I \setminus \{i_k\}.$$

Deste modo, se $i_k \in I_g$, então

$$\rho_{i_k} = \min\left\{\sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j}\gamma_{ji_1}, \ldots, \sum_{j=1}^{m} \alpha_{sj}\gamma_{ji_s}\right\}.$$

Portanto,

$$\rho = \min\left\{\sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j}\gamma_j, ..., \sum_{j=1}^{m} \alpha_{sj}\gamma_j\right\} = (\gamma_1^{\alpha_{11}} \odot ... \odot \gamma_m^{\alpha_{1m}}) \oplus ... \oplus (\gamma_1^{\alpha_{s1}} \odot ... \odot \gamma_m^{\alpha_{sm}}),$$

ou seja, o semianel Γ é finitamente gerado por $v(G)$. ■

Se G é uma Base Standard para $\mathcal{O}$ e $v(G) = \{\gamma_1, ..., \gamma_m\}$, escrevemos

$$\Gamma = \langle \gamma_1, ..., \gamma_m \rangle$$

para indicar que $\gamma_1, ..., \gamma_m$ geram Γ.

Exemplo 1.20. *Consideremos novamente a curva plana* $Q = \langle f \rangle$, *com*

$$f = (Y^2 - X^3)(X^2 - Y^3).$$

Vimos no Exemplo 1.18 que uma Base Standard para o anel local $\mathcal{O}$ *da curva* Q *é*

$$G = \{x, y, x + y, xy, f_1, f_2, f_1 + f_2, xy + f_1, xy + f_2\}.$$

Logo, pelo Teorema 1.19, o semianel de valores Γ *associado à curva* Q *é dado por*

$$\Gamma = \langle (2, 3), (3, 2), (2, 2), (\infty, 4), (4, \infty), (4, 4), (5, 4), (4, 5), (5, 5) \rangle.$$

1.3 Bases Standard mínimas

Notemos que se G é uma Base Standard para $\mathcal{O}$ e $g \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$, então $G \cup \{g\}$ é uma Base Standard para $\mathcal{O}$. Além disso, o Exemplo 1.18 sugere que o elemento xy pode ser descartado de G de modo que ainda tenhamos uma Base Standard para $\mathcal{O}$. Desta maneira, é natural questionarmos a existência de uma Base Standard com o menor número de elementos possível.

Definição 1.21. *Seja* G *uma Base Standard para* $\mathcal{O}$. *Dizemos que* G *é* mínima *se para todo* $g \in G$ *não existe redução de* g *módulo* $G \setminus \{g\}$.

Na próxima proposição, garantiremos a existência de uma Base Standard mínima para o anel local $\mathcal{O}$. Mais precisamente, provaremos que sempre podemos extrair uma Base Standard mínima de uma Base Standard G, descartando elementos $g \in G$ que admitem alguma redução módulo $G \setminus \{g\}$.

Proposição 1.22. *Seja* G *uma Base Standard para* $\mathcal{O}$. *Se* $g \in G$ *admite alguma redução módulo* $H = G \setminus \{g\}$, *então* H *é uma Base Standard para* $\mathcal{O}$.

Prova. Suponhamos que g admita uma k-redução módulo H para algum $k \in I_g$, ou seja, existem $c_1 \in \mathbb{K}$ e um H-produto H^{α_1} tais que $h = g - c_1 H^{\alpha_1}$ satisfaz $v_i(h) \geq v_i(g)$ para todo $i \in I$ e $v_k(h) > v_k(g)$.

Se $v_i(g) = v_i(H^{\alpha_1})$ para todo $i \in I$, pelo Corolário 1.16, g admite uma i-redução módulo H para todo $i \in I_g$. Logo, H é uma Base Standard para $\mathcal{O}$.

Por outro lado, se existe $j \in I_g$ tal que $v_j(g) < v_j(H^{\alpha_1})$, então $j \in I_h$ e h admite uma j-redução módulo G, visto que G é uma Base Standard para $\mathcal{O}$. Consequentemente, existem $c_2 \in \mathbb{K}$ e um G-produto G^β tais que o elemento $h' = h - c_2G^\beta = g - c_1H^{\alpha_1} - c_2G^\beta$ satisfaz $v_i(h') \geq v_i(h) \geq v_i(g)$ para todo $i \in I$ e $v_j(h') > v_j(h) = v_j(g)$.

Deste modo, devemos ter $G^\beta = g$ ou G^β é um H-produto H^{α_2}. Se $G^\beta = g$, então $c_2 = 1$, $h' = -c_1H^{\alpha_1}$ e $v_k(h') = v_k(H^{\alpha_1}) < v_k(h)$, o que é uma contradição. Segue que $G^\beta = H^{\alpha_2}$ e obtemos $v_i(g) \leq v_i(h) \leq v_i(H^{\alpha_2})$ para todo $i \in I$ e $v_j(g) = v_j(H^{\alpha_2})$. Pelo Corolário 1.16, concluímos que g admite uma j-redução módulo H. Portanto, H é uma Base Standard para $\mathcal{O}$. ■

Exemplo 1.23. *No Exemplo 1.18, podemos constatar que $x+y, f_1+f_2, xy+f_1$ e $xy+f_2$ admitem redução módulo $G = \{x, y, f_1, f_2\}$. De fato, temos*

$$\begin{aligned}
&v_1(x+y) = 2 = v_1(x) \quad e \quad v_2(x+y) = 2 < v_2(x)\\
&v_1(f_1+f_2) = 4 = v_1(f_2) \quad e \quad v_2(f_1+f_2) = 4 < v_2(f_2)\\
&v_1(xy+f_1) = 5 = v_1(xy) \quad e \quad v_2(xy+f_1) = 4 < v_2(xy)\\
&v_1(xy+f_2) = 4 = v_1(f_2) \quad e \quad v_2(xy+f_2) = 4 < v_2(f_2).
\end{aligned}$$

Logo, G é uma Base Standard para o anel local $\mathcal{O}$ da curva Q do Exemplo 1.18. Mais ainda, G é uma Base Standard mínima para $\mathcal{O}$. Com efeito, se x admitisse uma 1-redução módulo $\{y, f_1, f_2\}$, existiriam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}$ tais que $v_1(x) = 2 = v_1(y^{\alpha_1}f_1^{\alpha_2}f_2^{\alpha_3})$. Porém, devido às ordens de y, f_1 e f_2, isto é impossível. Também não é possível fazer uma 2-redução de x módulo $\{y, f_1, f_2\}$. Analogamente mostra-se que y não admite redução módulo $\{x, f_1, f_2\}$. Notemos agora que qualquer tentativa de se fazer uma 2-redução de f_1 implica na utilização de f_1, uma vez que qualquer produto da forma $x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}f_2^{\alpha_3}$, com $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}$, não satisfaz $v_1(f_1) = \infty \leq v_1(x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}f_2^{\alpha_3})$. Da mesma maneira, concluímos que f_2 não admite uma 1-redução módulo $\{x, y, f_1\}$.

É fácil ver que os elementos em uma Base Standard mínima têm ordens duas a duas distintas. Mais ainda, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.24. *Se G e H são Bases Standard para $\mathcal{O}$ com H mínima, então $v(H) \subseteq v(G)$. Em particular, todas as Bases Standard mínimas para $\mathcal{O}$ têm o mesmo conjunto de valores.*

Prova. Sejam $H = \{h_1, \ldots, h_s\}$ e $G = \{g_1, \ldots, g_m\}$ Bases Standard para $\mathcal{O}$ tais que H seja mínima.

Mostraremos que $v(h_l) \in v(G)$ para todo $h_l \in H$.

Sem perda de generalidade, podemos considerar $l = 1$. Como G é uma Base Standard para $\mathcal{O}$, dado $k \in I_{h_1}$ existe um G-produto $g_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot g_m^{\alpha_m}$ (com $\alpha_j = 0$ se $v_k(g_j) = \infty$) tal que

$$v_i(h_1) \leq v_i(g_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot g_m^{\alpha_m}), \text{ para todo } i \in I, \text{ e } v_k(h_1) = v_k(g_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot g_m^{\alpha_m}).$$

Por outro lado, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, com $v_k(g_j) \neq \infty$, existem H-produtos $h_1^{\beta_{j1}} \cdot \ldots \cdot h_s^{\beta_{js}}$ tais que

$$v_i(g_j) \leq v_i(h_1^{\beta_{j1}} \cdot \ldots \cdot h_s^{\beta_{js}}), \text{ para todo } i \in I, \text{ e } v_k(g_j) = v_k(h_1^{\beta_{j1}} \cdot \ldots \cdot h_s^{\beta_{js}}).$$

Mas, desta maneira, temos

$$v_i(h_1) \leq v_i(h_1^{\sum_{j=1}^m \alpha_j\beta_{j1}} \cdot \ldots \cdot h_s^{\sum_{j=1}^m \alpha_j\beta_{js}}), \text{ para todo } i \in I,$$
$$v_k(h_1) = v_k(h_1^{\sum_{j=1}^m \alpha_j\beta_{j1}} \cdot \ldots \cdot h_s^{\sum_{j=1}^m \alpha_j\beta_{js}}).$$

Em particular, devemos ter $\sum_{j=1}^m \alpha_j\beta_{j1} \leq 1$.

Se $\sum_{j=1}^m \alpha_j\beta_{j1} = 0$, então h_1 admite uma k-redução módulo $H \setminus \{h_1\}$, o que contradiz o fato de H ser uma Base Standard mínima para $\mathcal{O}$.

Segue que $\sum_{j=1}^m \alpha_j\beta_{j1} = 1$ e $\sum_{j=1}^m \alpha_j\beta_{j2} = \ldots = \sum_{j=1}^m \alpha_j\beta_{js} = 0$. Logo, existe $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\alpha_{j_0} = \beta_{j_01} = 1, \alpha_{j_0}\beta_{j_02} = \ldots = \alpha_{j_0}\beta_{j_0s} = 0$ e, consequentemente, $\beta_{j_0l} = 0$ para $l = 2, \ldots, s$. Então obtemos $v_k(g_{j_0}) = v_k(h_1)$ e $\alpha_j = 0$ para todo $j \neq j_0$. Além disso, $v_i(h_1) \leq v_i(g_{j_0}) \leq v_i(h_1)$.

Portanto, $v(h_1) = v(g_{j_0}) \in v(G)$. ∎

Pela proposição acima, se G é uma Base Standard mínima para $\mathcal{O}$, então $v(G)$ é o sistema mínimo de geradores para o semianel de valores Γ. No que segue continuaremos a explorar a relação entre uma Base Standard G para $\mathcal{O}$ e o semianel de valores Γ.

Notemos que o valor de qualquer elemento em uma Base Standard mínima é um elemento irredutível do semianel. A contrapartida algébrica desta propriedade é verdadeira também, ou seja, todo elemento em uma Base Standard mínima G é irredutível em $\mathcal{O}$. De fato, se $g = g'g'' \in G$, onde $g', g'' \in \mathcal{M}$, então

$$\gamma = v(g) = v(g') + v(g'') = \gamma' + \gamma'', \text{ com } \gamma' \neq \gamma \neq \gamma'',$$

que não pode ocorrer, uma vez que $v(g)$ é um elemento irredutível de Γ.

Lembremos que, dados $\gamma \in \Gamma$ e um subconjunto próprio J de I_γ, o conjunto $F_J(\gamma)$ é definido por

$$F_J(\gamma) = \{\gamma' \in \Gamma;\ \gamma'_i > \gamma_i \text{ para } i \in I_\gamma \setminus J \text{ e } \gamma'_j = \gamma_j \text{ para } j \notin I_\gamma \setminus J\}.$$

Observação 1.25. *Notemos que se $v(g) = \gamma \neq \underline{\infty}$ e $F_J(\gamma) \neq \emptyset$, com relação a um subconjunto próprio J de I_γ, então para todo $j \in J$ existe uma j-redução de g módulo uma Base Standard G. Por outro lado, se $F_J(\gamma) = \emptyset$ para todo $\emptyset \neq J \subset I_\gamma$, então a única possibilidade de redução de g é $h = g - cG^\alpha$, com $v_i(h) > v_i(g)$ para todo $i \in I_\gamma$, ou seja, $v(g) = v(G^\alpha)$.*

Mostraremos agora que, analogamente ao caso irredutível, Γ é um semianel minimamente gerado pelos seus pontos absolutos irredutíveis.

Teorema 1.26. *Seja G uma Base Standard para $\mathcal{O}$ tal que seus elementos têm ordens duas a duas distintas. Então G é mínima se, e somente se, $v(G)$ é o conjunto de pontos absolutos irredutíveis de Γ.*

Prova. Suponhamos que $G = \{g_1, \ldots, g_m\}$ seja uma Base Standard mínima para $\mathcal{O}$ e consideremos $g \in G$. Em particular, $v(g) \neq \underline{0}$ é irredutível. Se $v(g)$ não é um ponto absoluto de Γ, então existem $h \in \mathcal{O}$ e um subconjunto não trivial J de I_g tais que $v_i(g) < v_i(h)$ para todo $i \in I_g \setminus J$ e $v_j(g) = v_j(h)$ para todo $j \notin I_g \setminus J$ ou, equivalentemente, para todo $j \in J \cup (I \setminus I_g)$. Como G é uma Base Standard, para cada $k \in J$ existe um G-produto G^α (dependendo de k) tal que $v_i(h) \leq v_i(G^\alpha)$ para todo $i \in I$ e $v_k(h) = v_k(G^\alpha)$. Logo, $v_i(g) \leq v_i(G^\alpha)$ para todo $i \in I$ com $v_k(g) = v_k(G^\alpha)$ e $v_j(g) < v_j(G^\alpha)$ para $j \in I_g \setminus J$. Mas, desta maneira, G^α é um $G \setminus \{g\}$-produto, isto é, existe uma redução de g módulo $G \setminus \{g\}$, um absurdo pois G é mínima. Portanto, $v(g)$ é um ponto absoluto irredutível de Γ.

Agora, seja $\gamma = v(g)$ um ponto absoluto irredutível de Γ. Pela Observação 1.25, existe um G-produto tal que $v(g) = v(G^\alpha)$. Além disso, desde que o elemento γ é irredutível, devemos ter $G^\alpha = g_1^0 \cdot \ldots \cdot g_j^1 \cdot \ldots \cdot g_m^0$, para algum $1 \leq j \leq m$. Portanto, $\gamma = v(g_j) \in v(G)$.

Reciprocamente, suponhamos que $v(G)$ seja o conjunto de todos os pontos absolutos irredutíveis de Γ e seja g um elemento de G. A Observação 1.25 implica que $v(g) = v(G^\alpha)$ para algum G-produto G^α. Agora, como os elementos de G têm ordens duas a duas distintas e $v(g)$ é irredutível, devemos ter $G^\alpha = g$, ou seja, g não têm redução módulo $G \setminus \{g\}$. Portanto, G é uma Base Standard mínima para $\mathcal{O}$. ∎

Exemplo 1.27. *Com o Exemplo 1.23 e o Teorema 1.26 concluímos que os pontos absolutos irredutíveis do semianel Γ associado à curva plana $Q = \langle f \rangle$, com*

$$f = (Y^2 - X^3)(X^2 - Y^3)$$

são $(2,3),(3,2),(\infty,4)$ *e* $(4,\infty)$.

Observemos que no exemplo acima os pontos absolutos irredutíveis de Γ com uma coordenada infinita correspondem aos valores de f_1 e f_2. Investigaremos esse fato a seguir.

Para encerrar essa seção, demonstramos o seguinte corolário do Teorema 1.26.

Corolário 1.28. *Seja G um subconjunto finito e não vazio de $\mathcal{M}$ tal que $v(G)$ seja exatamente o conjunto dos pontos absolutos irredutíveis de Γ. Então G é uma Base Standard mínima para $\mathcal{O}$.*

Prova. Seja G' uma Base Standard para $\mathcal{O}$. Então $G'' = G' \cup G$ também é uma Base Standard para $\mathcal{O}$ e podemos extrair uma Base Standard mínima H de G''. Pelo Teorema 1.26, devemos ter $v(G) = v(H)$, o que implica em $v(G^\alpha) = v(H^\beta)$, onde G^α é um G-produto e H^β é um H-produto. Isto é suficiente para mostrar que G é uma Base Standard para $\mathcal{O}$. Pelo Teorema 1.26, concluímos que G é mínima. ■

1.4 Curvas Planas

Para uma curva analítica plana $Q = \cap_{i=1}^{r}\langle f_i\rangle$, Zariski em [36] mostrou que o tipo topológico de Q é completamente caracterizado pelos semigrupos $S_1, S_2, ..., S_r$ e pelas multiplicidades de interseção $I(f_j, f_k)$, com $1 \leq j < k \leq r$. Por outro lado, Waldi em [33] obteve a caracterização topológica de Q através do semigrupo S. Desta maneira, o conhecimento de S é equivalente ao conhecimento de S_i, para $1 \leq i \leq r$, e $I(f_j, f_k)$, para $1 \leq j < k \leq r$.

Mesmo no caso de curvas algebroides, dado $J \subseteq I$, se π_J denota a projeção natural de $\overline{\mathbb{N}}^r$ sobre o conjunto $\overline{\mathbb{N}}^{\sharp J}$, então $\pi_{\{i\}}(S) = S_i$ e o número de pontos absolutos de $\pi_{\{j,k\}}(S)$ é exatamente a multiplicidade de interseção $I(f_j, f_k)$ (para mais detalhes, veja [19]). Desta maneira, sabemos como obter S_i, para $1 \leq i \leq r$, e $I(f_j, f_k)$, para $1 \leq j < k \leq r$, a partir de S.

Uma questão que surge naturalmente é a seguinte:

Questão 1.29. *Como obter S a partir de S_i, para $1 \leq i \leq r$, e $I(f_j, f_k)$, para $1 \leq j < k \leq r$?*

Para curvas planas com dois ramos (não necessariamente analíticas), Garcia em [19] e Bayer em [4] responderam esta questão usando os pontos absolutos de S.

No caso geral, Delgado em [15] caracterizou S em função dos semigrupos das curvas $Q^j = \langle \prod_{\substack{i\in I \\ i\neq j}} f_i \rangle$ e o conjunto R dos pontos maximais relativos de S (veja o Teorema da Geração em [15]). Para obter R, deve-se encontrar o conjunto dos pontos absolutos irredutíveis de S, o qual Delgado mostra corresponder ao conjunto A dos valores das curvas de contato maximal com algum ramo de Q e, usando uma propriedade de simetria com respeito ao condutor de S, Delgado obtém um conjunto que contém R e este conjunto nos permite aplicar o Teorema da Geração. Notemos que A é exatamente o conjunto dos pontos absolutos irredutíveis de $S = \Gamma \cap \mathbb{N}^r$ e ele pode ser obtido através de S_i, para $i \in I$, e $I(f_j, f_k)$, para $1 \leq j < k \leq r$.

O método de Delgado não nos permite, porém, obter S *diretamente* a partir de S_i, com $1 \leq i \leq r$, e $I(f_j, f_k)$, para $1 \leq j < k \leq r$. Os Teoremas 1.19 e 1.26 nos dizem como Γ pode ser obtido a partir de seus pontos absolutos irredutíveis. A próxima proposição descreve os pontos absolutos irredutíveis de Γ com alguma coordenada infinita em função de $I(f_j, f_k)$. Desta maneira, como o semianel Γ e o semigrupo S se determinam mutuamente, tal resultado nos diz como obter S *diretamente* a partir de S_i, para $1 \leq i \leq r$, e $I(f_j, f_k)$, para $1 \leq j < k \leq r$.

Proposição 1.30. *O conjunto de pontos absolutos irredutíveis de Γ com alguma coordenada infinita para uma curva plana $Q = \cap_{i\in I}\langle f_i \rangle$ é $\{v(f_i);\ i \in I\}$.*

Prova. Se $\gamma = v(f_i)$ não é um ponto absoluto de Γ para algum $i \in I$, então existe um subconjunto não trivial J de $I_{f_i} = I \setminus \{i\}$ tal que $F_J(\gamma) \neq \emptyset$, ou seja, existe $\gamma' \in \Gamma$ tal que $\gamma'_j = \gamma_j$ para todo $j \in J$, $\gamma'_i = \gamma_i = \infty$ e $\gamma'_k > \gamma_k$ para todo $k \notin J$ e $k \neq i$. Como $\gamma'_i = \gamma_i = \infty$, concluímos que $\gamma' = v(hf_i)$ para algum $h \in \mathcal{O}$.

Por outro lado, a igualdade $\gamma'_j = \gamma_j$, para todo $j \in J$, implica $v(h) = \underline{0}$, mas, desta maneira, $\gamma' = \gamma$, o que é um absurdo pois $\gamma'_k > \gamma_k$ para todo $k \notin J$ e $k \neq i$. Portanto, $v(f_i)$ é um ponto absoluto de Γ. É imediato que $v(f_i)$ é irredutível, pois f_i é irredutível.

Agora, se $\gamma = v(g) \notin \mathbb{N}^r$ é um ponto absoluto irredutível de Γ. Fazendo $K = I \setminus I_\gamma$, concluímos que $g = h \cdot \prod_{k\in K} f_k^{\alpha_k}$ e

$$\gamma = v(g) = v(h) + \sum_{k\in K} \alpha_k \cdot v(f_k).$$

Uma vez que γ é irredutível, devemos ter $v(h) = \underline{0}$, $K = \{k_0\}$ e $\alpha_{k_0} = 1$, ou seja, $\gamma = v(f_{k_0})$. ∎

Vamos agora aplicar os resultados apresentados por Delgado em [15] e a Proposição 1.30 para o caso de uma curva plana $Q = \langle \prod_{i\in I} f_i \rangle$ tais que quaisquer dois ramos possuem tangentes distintas ou, equivalentemente, $I_{i,j} = I(f_i, f_j) = m_i m_j$, para $1 \leq i < j \leq r$, onde m_k denota a multiplicidade de f_k.

Se o conjunto mínimo de geradores do semigrupo S_i é $\{v_{i,0}, ..., v_{i,g_i}\}$, onde $v_{i,0} = m_i$ e g_i é o gênero de S_i, isto é, $g_i + 1$ é a cardinalidade do conjunto mínimo de geradores de S_i, escrevemos

$$e_{i,0} = v_{i,0} \ \text{ e } \ e_{i,j} = \mathrm{MDC}(e_{i,j-1}, v_{i,j}),\ j = 1, ..., g_i.$$

Uma curva plana irredutível $\langle h \rangle \subset \mathbb{K}[[X,Y]]$ de multiplicidade n e de gênero $q < g_i$ tem contato maximal de ordem q com o ramo $P_i = \langle f_i \rangle$ se

$$\frac{I(f_i, h)}{m_i n} = \frac{e_{i,q} v_{i,q+1}}{v_{i,0}^2}.$$

Para $q \geq 0$, consideremos os conjuntos

$$\mathrm{W}^q := \{i \in I;\ g_i \geq q\},$$

$$\mathrm{T}^q := \{A \in \wp(\mathrm{W}^q); \text{existe uma curva plana de gênero } q \text{ que tem contato maximal de ordem } q \text{ com } P_i, \text{para todo } i \in A\},$$

$$\mathrm{M}^q := \{\text{elementos maximais de } \mathrm{T}^q \text{ com respeito a inclusão}\},$$

em que $\wp(\mathrm{W}^q)$ denota o conjunto das partes de W^q.

Seja $q \geq 0$. Definimos como *valores de contato maximal* de gênero q para Q os elementos do conjunto

$$V^q(f) := \{v(h_E);\ E \in \mathrm{M}^q\},$$

onde $\langle h_E \rangle$ denota uma curva com contato maximal de ordem q com P_i para todo $i \in E$. Por razões técnicas, definimos $V^{-1}(f) := \{(v_{1,0}, ..., v_{r,0})\}$ caso todos os ramos de Q tenham a mesma tangente e $V^{-1}(f) := \emptyset$ caso contrário. Os valores de contato maximal para Q são os elementos do conjunto finito

$$V(f) := \bigcup_{q=-1}^{\infty} V^q(f) \subset S \subset \Gamma.$$

Omitiremos as demonstrações dos resultados enunciados a seguir. Tais demonstrações podem ser encontradas em [15].

Proposição 1.31 (Delgado)**.** *Sejam $q > 0$, $E \in \mathrm{M}^q$ e (h) uma curva plana com contato maximal de ordem q para todo ramo P_i, com $i \in E$. Então*

$$v_i(h) = v_{i,q+1}, \ \textit{se } i \in E, \ \textit{e } v_j(h) = \frac{I_{i,j}}{e_{i,q}}, \ \textit{se } j \notin E.$$

Teorema 1.32 (Delgado)**.** *O elemento γ é um ponto absoluto irredutível de S se, e somente se, γ é um dos valores de contato maximal para Q, isto é, $\gamma \in V(f)$.*

Vamos aplicar tais resultados no caso em que os ramos da curva Q têm tangentes duas a duas distintas.

Notemos primeiramente que

$$\mathrm{M}^q = \mathrm{T}^q = \{\{i\}; \ i \in I \text{ e } g_i > q\}.$$

Considerando então $E = \{i\}$ e uma curva plana $\langle h_{i,q} \rangle$ com contato maximal de ordem q com o ramo P_i, pela proposição anterior, temos

$$v_i(h_{i,q}) = v_{i,q+1} \quad \text{e} \quad v_j(h_{i,q}) = \frac{I_{i,j}}{e_{i,q}} = \frac{m_i m_j}{e_{i,q}}, \quad \text{se } j \neq i.$$

Logo,

$$v(h_{i,q}) = \left(\frac{m_i m_1}{e_{i,q}}, ..., v_{i,q+1}, ..., \frac{m_i m_r}{e_{i,q}} \right),$$

com $1 \leq i \leq r$ e $0 \leq q < g_i$.

Portanto, pelo teorema acima, o conjunto

$$V = \{v(h_{i,q}); \ 1 \leq i \leq r \text{ e } 0 \leq q < g_i\}$$

é o conjunto dos pontos absolutos irredutíveis de S.

Observemos ainda que, pela Proposição 1.30, os elementos da forma

$$v(f_i) = (I_{i,1}, ..., \infty, ..., I_{i,r}) = (m_i m_1, ..., \infty, ..., m_i m_r)$$

correspondem aos pontos absolutos irredutíveis de Γ com alguma coordenada infinita.

Dessa maneira, Γ é minimamente gerado por $V \cup \{v(f_i); \ i = 1, ..., r\}$ e

$$\sharp V = \sum_{i=1}^{r} (g_i + 1).$$

O exemplo seguinte generaliza o Exemplo 1.27 e será retomado no próximo capítulo.

Exemplo 1.33. *Consideremos a curva plana* $Q = \langle f \rangle$, *com*

$$f = (Y^{m_1} - X^{n_1})(X^{m_2} - Y^{n_2}),$$

onde $\mathrm{MDC}(m_i, n_i) = 1 < m_i < n_i$, *para* $i = 1, 2$. *Escrevemos* $f_1 = Y^{m_1} - X^{n_1}$ *e* $f_2 = X^{m_2} - Y^{n_2}$.

A curva Q *admite a parametrização*

$$\phi(t) = [(t_1^{m_1}, t_1^{n_1}), (t_2^{n_2}, t_2^{m_2})].$$

Uma vez que os ramos possuem tangentes distintas e o gênero de cada ramo é igual a 1, *o número de pontos absolutos irredutíveis do semianel* Γ *associado a* Q *é* $\sum_{i=1}^{2}(1+1) = 4$ *e são dados, de acordo com o que vimos anteriormente, por:*

$$\begin{aligned}
&\left(v_{1,1}, \frac{m_1 m_2}{e_{1,0}}\right) = \left(n_1, \frac{m_1 m_2}{m_1}\right) = (n_1, m_2) = v(y),\\
&\left(\frac{m_2 m_1}{e_{2,0}}, v_{2,1}\right) = \left(\frac{m_2 m_1}{m_2}, n_2\right) = (m_1, n_2) = v(x),\\
&(\infty, m_1 m_2) = v(f_1),\\
&(m_1 m_2, \infty) = v(f_2).
\end{aligned}$$

Portanto, o semianel de valores associado à curva Q *é*

$$\Gamma = \langle\, (m_1, n_2), (n_1, m_2), (\infty, m_1 m_2), (m_1 m_2, \infty) \,\rangle.$$

Além disso, pelo Corolário 1.28, concluímos que o conjunto $G = \{x, y, f_1, f_2\}$ *é uma Base Standard mínima para o anel local* $\mathcal{O}$ *da curva* Q.

Notemos que o método de Delgado está restrito ao caso de curvas planas, isto é, seu método nos permite apenas obter os pontos absolutos irredutíveis com coordenadas finitas do semianel de valores Γ associado a uma curva plana reduzida Q. Na próxima seção desenvolveremos um algoritmo que permitirá obter uma Base Standard para o anel local $\mathcal{O}$ de uma curva reduzida Q qualquer (plana ou espacial) e, consequentemente, os pontos absolutos irredutíveis de Γ.

1.5 Algoritmo para Obtenção de uma Base Standard

Encontramos em [23] um método que permite obter uma Base Standard para o anel local de uma curva irredutível por meio de uma parametrização. Tal método é uma generalização do clássico algoritmo de Buchberger para o contexto de subálgebras de $\mathbb{K}[[t]]$ utilizando a ordem total correspondente à multiplicidade de interseção com a curva.

Nesta seção, propomos uma outra generalização do referido algoritmo, em que consideramos a ordem parcial natural em $\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{K}[[t_i]]$. Nossa abordagem é coerente e compatível com o caso de curvas reduzidas com vários ramos. Antes, porém, necessitamos adaptar alguns conceitos de [23] para a nossa situação.

Seja $G \subset \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{O} = \mathbb{K}[[G]]$. Desta maneira, dado $g \in \mathcal{O}$, podemos representar g como uma soma não necessariamente única da forma $\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta$, onde $a_\delta \in \mathbb{K}$ e G^δ é um G-produto.

Definição 1.34. *A altura da representação $\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta$ de g é definida como*

$$\mathrm{ht}\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right) = \left(\mathrm{ht}_1\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right), ..., \mathrm{ht}_r\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right)\right),$$

onde para cada $i \in I$

$$\mathrm{ht}_i\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right) = \min\{v_i(G^\delta);\ \delta \in \Delta\}.$$

A amplitude da representação $\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta$ de g é definida como

$$\mathrm{Amp}\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right) = \left(\mathrm{Amp}_1\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right), ..., \mathrm{Amp}_r\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right)\right),$$

onde $\mathrm{Amp}_i(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta)$ é o número de G-produtos G^δ tais que $v_i(G^\delta) = \mathrm{ht}_i(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta)$.

Observação 1.35. *Dada uma representação $\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta$ de um elemento g de $\mathcal{O}$, sempre temos*

$$\mathrm{ht}\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right) \leq v\left(g\right).$$

Embora o resultado abaixo seja de fácil constatação, ele está em destaque para referência no próximo teorema.

Lema 1.36. *Seja $g \in \mathcal{O}$ e consideremos uma representação de g como uma soma da forma $\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta$. Se $\mathrm{ht}\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right) = v\left(g\right)$, então para cada $k \in I$, existe $\delta_k \in \Delta$ tal que*

$$v_i\left(g\right) \leq v_i(G^{\delta_k}),$$

para todo $i \in I$ e com igualdade para $i = k$.

Prova. Para cada $k \in I$ existe $\delta_k \in \Delta$ tal que $v_k(G^{\delta_k}) = \mathrm{ht}_k\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right)$. Seja $i \in I$, temos

$$v_i\,(g) = \mathrm{ht}_i\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right) \leq v_i(G^{\delta_k}),$$

com igualdade se $i = k$. ∎

O próximo conceito é crucial para o algoritmo que propomos.

Definição 1.37. *Sejam $G \subset \mathcal{M}$ e $k \in I$. Um S_k-processo de G é um elemento da forma*

$$aG^\alpha + bG^\beta,$$

onde $a, b \in \mathbb{K}$ e G^α, G^β são G-produtos tais que

$$v_k(aG^\alpha + bG^\beta) > \mathrm{ht}_k(aG^\alpha + bG^\beta).$$

Observemos que se $aG^\alpha + bG^\beta$ é um S_k-processo de G, com $G^\alpha = \prod_{j=1}^m g_j^{\alpha_j}$ e $G^\beta = \prod_{j=1}^m g_j^{\beta_j}$, então $v_k(G^\alpha) = v_k(G^\beta)$, isto é,

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j v_k(g_j) = \sum_{j=1}^m \beta_j v_k(g_j).$$

Deste modo, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2m}$ corresponde a uma solução da equação diofantina homogênea

$$\sum_{j=1}^m v_k(g_j) W_j = \sum_{j=1}^m v_k(g_j) Z_j, \tag{1.3}$$

que pode ser obtida por vários métodos (veja [12] ou [13]).

O teorema a seguir é uma generalização do Teorema 4.1 de [22].

Teorema 1.38. *Seja G um subconjunto não vazio de $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{O} = \mathbb{K}[[G]]$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) *Todo elemento não nulo de $\mathcal{O}$ tem uma redução módulo G.*

(b) *Toda redução final módulo G de qualquer elemento de $\mathcal{O} \setminus \{0\}$ é nula.*

(c) *G é fechado em relação a S_k-processos, isto é, todo S_k-processo de G tem uma redução final nula módulo G.*

(d) *Todo S_k-processo não nulo $aG^\alpha + bG^\beta$ de G tem uma representação como uma soma da forma $\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta$, onde $a_\delta \in \mathbb{K}$, G^δ é um G-produto e*

$$\mathrm{ht}_i\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right) \geq \mathrm{ht}_i(aG^\alpha + bG^\beta),$$

para todo $i \in I$ e com desigualdade estrita para $i = k$.

Prova. (a) $\Rightarrow$ (b) Suponhamos que todo elemento não nulo de $\mathcal{O}$ tenha uma redução módulo G. Consideremos $g \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$ e h uma redução final de g módulo G. Se $h \neq 0$, então h admite uma redução módulo G, o que contradiz o fato de h ser uma redução final de g módulo G. Portanto, $h = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Basta observar que todo S_k-processo não nulo de G é um elemento de $\mathcal{O}$. Portanto, admite uma redução final nula módulo G.

(c) $\Rightarrow$ (d) Seja $g = aG^\alpha + bG^\beta$ um S_k-processo não nulo de G e suponhamos que g tenha uma redução final nula módulo G. Podemos escrever então $g = \sum_{\delta \in \Delta} a_\delta G^\delta$, onde $a_\delta \in \mathbb{K}$ e G^δ é um G-produto. Isto implica em $v(g) \leq v(G^\delta)$, para todo $\delta \in \Delta$. Devido à Observação 1.35, concluímos que $v(g) = \mathrm{ht}\left(\sum_{\delta \in \Delta} a_\delta G^\delta\right)$. Logo,

$$\mathrm{ht}_i\left(\sum_{\delta \in \Delta} a_\delta G^\delta\right) \geq \mathrm{ht}_i(aG^\alpha + bG^\beta), \text{ para todo } i \in I.$$

Além disso, pela definição de S_k-processo, temos

$$\mathrm{ht}_k\left(\sum_{\delta \in \Delta} a_\delta G^\delta\right) > \mathrm{ht}_k(aG^\alpha + bG^\beta).$$

(d) $\Rightarrow$ (a) Seja $g \in \mathcal{O}\setminus\{0\}$ e consideremos o conjunto das alturas das representações de g em relação a G

$$\mathrm{ht}_G(g) := \left\{\mathrm{ht}\left(\sum_{\delta \in \Delta} a_\delta G^\delta\right);\ g = \sum_{\delta \in \Delta} a_\delta G^\delta\right\}.$$

Tal conjunto é não vazio. Além disso, pela Observação 1.35, sabemos que ele é limitado superiormente por $v(g)$. Logo, $\mathrm{ht}_G(g)$ admite elementos maximais. Assim podemos considerar uma representação

$$g = \sum_{\delta \in \Delta} a_\delta G^\delta,$$

cuja altura seja um elemento maximal de $\mathrm{ht}_G(g)$. Devido ao Lema 1.36, é suficiente provar que

$$\mathrm{ht}\left(\sum_{\delta \in \Delta} a_\delta G^\delta\right) = v(g).$$

Suponhamos, por absurdo, que

$$\mathrm{ht}\left(\sum_{\delta \in \Delta} a_\delta G^\delta\right) < v(g).$$

Então para algum $k \in I$, temos

$$\mathrm{ht}_k\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right) < v_k(g).$$

Logo, $\mathrm{Amp}_k\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right) \geq 2$. Isso significa que existem $\alpha, \beta \in \Delta$ tais que

$$\mathrm{ht}_k\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right) = v_k(G^\alpha) = v_k(G^\beta),$$

bem como existe $b \in \mathbb{K}$ tal que $h := a_\alpha G^\alpha + b a_\beta G^\beta$ é um S_k-processo de G. Agora, por hipótese, existe uma representação

$$h = \sum_{\theta\in\Theta} b_\theta G^\theta,$$

onde $b_\theta \in \mathbb{K}$, G^θ é um G-produto e

$$\mathrm{ht}_i\left(\sum_{\theta\in\Theta} b_\theta G^\theta\right) \geq \mathrm{ht}_i(a_\alpha G^\alpha + b a_\beta G^\beta),$$

para todo $i \in I$ e com desigualdade estrita para $i = k$. Dessa maneira,

$$a_\alpha G^\alpha + a_\beta G^\beta = (1-b)a_\beta G^\beta + \sum_{\theta\in\Theta} b_\theta G^\theta.$$

Assim, podemos escrever

$$g = (1-b)a_\beta G^\beta + \sum_{\theta\in\Theta} b_\theta G^\theta + \sum_{\delta\in\Delta\setminus\{\alpha,\beta\}} a_\delta G^\delta = \sum_{\xi\in\Xi} c_\xi G^\xi,$$

onde $c_\xi \in \mathbb{K}$ e G^ξ é um G-produto.

Se $\mathrm{Amp}_k\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right) > 2$, então

$$\mathrm{ht}_k\left(\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi G^\xi\right) = \mathrm{ht}_k\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right).$$

Neste caso, para $i \in I\backslash\{k\}$ temos

$$\mathrm{ht}_i\left(\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi G^\xi\right) \geq \min\{v_i(G^\beta), v_i(G^\theta), v_i(G^\delta);\ \theta\in\Theta, \delta\in\Delta\setminus\{\alpha,\beta\}\}.$$

Uma vez que $\min\{v_i(b_\theta G^\theta)\} \geq \min\{v_i(G^\alpha), v_i(G^\beta)\}$, para todo $i \in I\backslash\{k\}$, temos

$$\mathrm{ht}_i\left(\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi G^\xi\right) \geq \mathrm{ht}_i\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right), \text{ para todo } i \in I\backslash\{k\}.$$

Se ocorrer desigualdade estrita para algum $i \in I\backslash\{k\}$, teremos

$$\mathrm{ht}\left(\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi G^\xi\right) > \mathrm{ht}\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right),$$

o que seria um absurdo, pois supomos que $\mathrm{ht}\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right)$ era um elemento maximal de $\mathrm{ht}_G(g)$.

Por outro lado, se $\mathrm{ht}_i\left(\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi G^\xi\right) = \mathrm{ht}_i\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right)$, para todo $i \in I \setminus \{k\}$, teremos

$$\mathrm{ht}\left(\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi G^\xi\right) = \mathrm{ht}\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right),$$

mas com $\mathrm{Amp}_k\left(\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi G^\xi\right) < \mathrm{Amp}_k\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right)$.

Dessa maneira, podemos supor que $\mathrm{Amp}_k\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right) = 2$.

Se $b \neq 1$, então

$$\mathrm{ht}_k\left(\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi G^\xi\right) = \mathrm{ht}_k\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right),$$

porém $\mathrm{Amp}_k\left(\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi G^\xi\right) = \mathrm{Amp}_k\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right) - 1 = 1$.

Consequentemente,

$$v_k(g) = \mathrm{ht}_k\left(\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi G^\xi\right) = \mathrm{ht}_k\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right).$$

Porém, isso é um absurdo, pois assumimos

$$\mathrm{ht}_k\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right) < v_k(g).$$

Por outro lado, se $b = 1$, temos

$$\mathrm{ht}_k\left(\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi G^\xi\right) > \mathrm{ht}_k\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right)$$

e para $i \in I\backslash\{k\}$, temos

$$\mathrm{ht}_i\left(\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi G^\xi\right) = \min\{v_i(G^\theta), v_i(G^\delta);\ \theta \in \Theta, \delta \in \Delta \setminus \{\alpha, \beta\}\}.$$

Assim obtemos

$$\mathrm{ht}_i\left(\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi G^\xi\right) \geq \mathrm{ht}_i\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right), \text{ para todo } i \in I\backslash\{k\}.$$

Portanto,

$$\mathrm{ht}\left(\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi G^\xi\right) > \mathrm{ht}\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right).$$

Mas isso é um absurdo, pois supomos que $\mathrm{ht}\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right)$ era um elemento maximal de $\mathrm{ht}_G(g)$.

Portanto, devemos ter

$$\mathrm{ht}\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right) = v(g),$$

donde concluímos que g tem uma redução módulo G. ∎

Observação 1.39. *Se o conjunto G no Teorema 1.38 for finito, então teremos na verdade outras caracterizações para uma Base Standard para o anel local de uma curva.*

O leitor deve ter observado que, até este ponto nesta seção, não utilizamos nenhuma propriedade específica do anel local de uma curva algebroide. De fato, os conceitos e resultados até o momento poderiam ser apresentados para uma subálgebra $\mathcal{A} \subset \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{K}[[t_i]]$ qualquer, utilizando $v_i(a) = ord_{t_i}(a_i)$ para $a = (a_1, ..., a_r) \in \mathcal{A}$. No entanto, ao considerar $\mathcal{A} = \mathcal{O}$, temos, devido ao Teorema 1.17, a existência de uma Base Standard, bem como podemos utilizar o condutor $\mathcal{C} = (\mathcal{O} : \overline{\mathcal{O}})$ (veja Observação 1.2) para obter uma Base Standard para $\mathcal{O}$. Mais precisamente, a caracterização dada pelo item (c) do teorema anterior permite-nos obter um algoritmo para encontrar uma Base Standard para $\mathcal{O}$.

Teorema 1.40. *Seja G_0 um subconjunto finito e não vazio de $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{O} = \mathbb{K}[[G_0]]$ e $\cup_{i=1}^r B_i \subset G_0$, onde B_i é como na demonstração do Teorema 1.17. Sempre obtemos uma Base Standard G para $\mathcal{O}$ com o seguinte algoritmo:*

ALGORITMO 1. Base Standard para $\mathcal{O}$

input: G_0;

define: $G_{-1} := \emptyset$ **and** $j := 0$;

while $G_j \neq G_{j-1}$ **do**

$\mathcal{S} := \cup_{k=1}^r \{g;\ g$ *é um* S_k*-processo de* G_j *e* $v_i(g) < \sigma_i$ *para algum* $i \in I\}$;

$\mathcal{R} := \{h;\ h$ *é uma redução final de* g *módulo* $G_j,\ g \in \mathcal{S}$ *e* $h \neq 0\}$;

$G_{j+1} := G_j \cup \mathcal{R}$;

output: $G = G_{j+1}$.

Prova. Notemos inicialmente que em cada iteração o conjunto $\mathcal{S}$ é finito devido à condição "$v_i(g) < \sigma_i$ para algum $i \in I$" imposta a um S_k-processo g de $\mathcal{S}$. Por outro lado, a hipótese "$\cup_{i=1}^{r} B_i \subset G_0$" nos permite dizer que se $v(g) \geq \sigma$, então g admite redução final nula módulo G_0.

Consideremos então $G = \cup_{j\geq 0} G_j$ e seja g um S_k-processo de G. Logo, g também é um S_k-processo de G_j para algum $j \geq 0$. Pelo Algoritmo 1, g tem uma redução final nula módulo G_{j+1}. Consequentemente, sua redução final módulo G também é nula, ou seja, G é fechado em relação a S_k-processos.

Vamos mostrar agora que G é finito. Seja $H = \{h_1, ..., h_d\}$ uma Base Standard para $\mathcal{O}$, que existe pela Proposição 1.17. Pelo Teorema 1.38, para todo $h_l \in H$ e para todo $k \in I_{h_l}$, existe um G-produto $G^{\alpha_{k,l}}$ tal que $v_i(h_l) \leq v_i(G^{\alpha_{k,l}})$ para todo $i \in I$ e com igualdade para $i = k$. Consideremos então o conjunto finito

$$G' = \{g \in G;\ g \text{ divide } G^{\alpha_{k,l}},\ \text{com } 1 \leq l \leq d \text{ e } k \in I_{h_l}\}.$$

Notemos que $G' \subset G_j$ para algum $j \geq 0$. Agora, como todo elemento não nulo de $\mathcal{O}$ tem uma redução módulo H, pois H é uma Base Standard para $\mathcal{O}$, todo elemento não nulo de $\mathcal{O}$ tem uma redução módulo G' e, consequentemente, módulo G_j. Assim, pelo item (c) do Teorema 1.38, todo S_k-processo de G_j tem redução final nula módulo G_j. Desta maneira, $G_{j+1} = G_j$, o que mostra que $G = G_j$ é finito e, portanto, uma Base Standard para $\mathcal{O}$. ■

Exemplo 1.41. *Consideremos a curva espacial* $Q = \bigcap_{i\in I} P_i \subset \mathbb{K}[[X_1, ..., X_r]]$, *onde*

$$P_i = \langle X_1, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_r \rangle,$$

para todo $i \in I$. *Uma parametrização para o ramo* P_i *é* $\phi_i(t_i) = (0, ..., t_i, ..., 0)$.

Notemos que $\mathcal{O}_i \simeq \mathbb{K}[[t_i]]$ *e* $Q^i = \langle x_i \rangle$. *Assim,* $B_i = \{x_i\}$ *e podemos iniciar o Algoritmo 1 com o conjunto*

$$G_0 = \{x_1, ..., x_r\}.$$

Observemos agora que como $v_i(Q^i) = \overline{\mathbb{N}} \setminus \{0\}$, *o condutor do semianel* Γ *associado à curva* Q *é* $\sigma = (1, ..., 1)$, *ou seja,*

$$\Gamma = \{\underline{0}\} \cup \{\underline{1} + \gamma;\ \gamma \in \overline{\mathbb{N}}^r\}.$$

Logo, uma vez que $v(x_i) = (\infty, ..., 1, ..., \infty)$, *todo* S_k*-processo de* G_0 *têm redução final nula módulo* G_0 *e, dessa maneira,* $G_1 = G_0$. *Portanto,*

$$G = \{x_1, ..., x_r\}$$

é uma Base Standard para o anel local $\mathcal{O}$ da curva Q.

Uma vez que x_i não admite redução módulo $G \setminus \{x_i\}$, concluímos que G é uma Base Standard mínima para $\mathcal{O}$. Consequentemente,

$$\Gamma = \langle\, (1, \infty, ..., \infty), ..., (\infty, ..., 1, ..., \infty), ..., (\infty, ..., \infty, 1)\,\rangle.$$

Examinemos um pouco mais a equação (1.3). Consideremos $G = \{g_1, ..., g_m\} \subset \mathcal{M}$. Podemos supor que um S_k-processo de G seja da forma $G^\alpha + bG^\beta$, onde $b \in \mathbb{K}$. O S_k-processo é então unicamente determinado pelo vetor $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2m}$, solução da equação diofantina homogênea (1.3).

O conjunto de todas as soluções de (1.3) é um subsemigrupo aditivo de $\mathbb{N}^{2m}$, gerado pelo conjunto finito E de todas as soluções não nulas de (1.3) que são mínimas com respeito à ordem parcial

$$(\alpha, \beta) \leq (\alpha', \beta') \;\Leftrightarrow\; \alpha_j \leq \alpha'_j \text{ e } \beta_j \leq \beta'_j, \text{ para todo } j = 1, ..., m. \tag{1.4}$$

Em [12], encontra-se um algoritmo que permite obter o conjunto de todas as soluções mínimas de uma equação diofantina não necessariamente homogênea.

Definição 1.42. *Seja G um subconjunto finito e não vazio de $\mathcal{M} \setminus \{0\}$. Os S_k-processos correspondentes às soluções mínimas da equação acima, ou seja, ao conjunto E, são chamados de S_k-processos mínimos de G.*

A conjectura a seguir nos permite melhorar a performance do Algoritmo 1. Exemplos analisados além dos contidos neste trabalho nos dão indícios de que a mesma seja verdadeira.

Conjectura 1.43. *Seja $G = \{g_1, ..., g_m\} \subset \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{O} = \mathbb{K}[[G]]$. Se todo S_k-processo mínimo de G tiver uma redução final nula módulo G, então todo S_k-processo $aG^\alpha + bG^\beta$ de G terá uma representação como uma soma da forma $\sum_{\delta \in \Delta} a_\delta G^\delta$, onde $\Delta \subset \mathbb{N}^m$, $a_\delta \in \mathbb{K}$, G^δ é um G-produto e*

$$\mathrm{ht}_i \left(\sum_{\delta \in \Delta} a_\delta G^\delta \right) \geq \mathrm{ht}_i(aG^\alpha + bG^\beta)$$

para todo $i \in I$ e com desigualdade estrita para $i = k$.

A seguir provaremos a conjectura acima para o caso de dois ramos, isto é, $I = \{1, 2\}$.

Prova da Conjectura 1.43 para dois ramos.

Podemos supor $k = 1$, sendo o caso $k = 2$ inteiramente análogo. Fixemos um S_1-processo de G. Sem perda de generalidade, podemos assumir que ele seja da forma $G^\alpha + bG^\beta$, onde $b \in \mathbb{K}$ é univocamente determinado por G, α e β.

Desde que a solução (α, β) da equação diofantina associada ao S_1-processo pode ser escrita na forma

$$(\alpha, \beta) = \sum_{j=1}^{d} n_j(\alpha_j, \beta_j),$$

onde $(\alpha_j, \beta_j) \in E$, $d = \sharp E$ e $n_j \in \mathbb{N}$, podemos escrever

$$G^\alpha = \prod_{j=1}^{d} (G^{\alpha_j})^{n_j} \quad \text{e} \quad G^\beta = \prod_{j=1}^{d} (G^{\beta_j})^{n_j}.$$

Além disso, $S_j = G^{\alpha_j} + b_j G^{\beta_j}$ representa um S_1-processo mínimo de G, para $j = 1, ..., d$. Logo, por hipótese, S_j tem uma redução final nula. Podemos então escrever $S_j = \sum_{\theta_j \in \Theta_j} a_{\theta_j} G^{\theta_j}$, onde $\Theta_j \subset \mathbb{N}^m$, $a_{\theta_j} \in \mathbb{K}$, G^{θ_j} é um G-produto e

$$\mathrm{ht}_i \left(\sum_{\theta_j \in \Theta_j} a_{\theta_j} G^{\theta_j} \right) \geq \mathrm{ht}_i (G^{\alpha_j} + b_j G^{\beta_j}),$$

para todo $i \in I$ e com desigualdade estrita para $i = 1$. Assim,

$$G^{\alpha_j} = -b_j G^{\beta_j} + \sum_{\theta_j \in \Theta_j} a_{\theta_j} G^{\theta_j}.$$

Escrevemos agora $D = \{1, 2, ..., d\}$ e fazemos

$$\begin{aligned} D' &= \{j \in D;\ \mathrm{ht}_2(G^{\alpha_j} + b_j G^{\beta_j}) = v_2(G^{\alpha_j})\}; \\ D'' &= \{j \in D;\ \mathrm{ht}_2(G^{\alpha_j} + b_j G^{\beta_j}) = v_2(G^{\beta_j}) < v_2(G^{\alpha_j})\}. \end{aligned}$$

Notemos que $D' \cup D'' = D$ e $D' \cap D'' = \emptyset$. Temos então $G^\alpha = G^{\alpha'} G^{\alpha''}$, com

$$G^{\alpha'} = \prod_{j \in D'} (G^{\alpha_j})^{n_j} = \prod_{j \in D'} \left(-b_j G^{\beta_j} + \sum_{\theta_j \in \Theta_j} a_{\theta_j} G^{\theta_j} \right)^{n_j}, \quad G^{\beta'} = \prod_{j \in D'} (G^{\beta_j})^{n_j},$$

$$G^{\alpha''} = \prod_{j \in D''} (G^{\alpha_j})^{n_j} = \prod_{j \in D''} \left(-b_j G^{\beta_j} + \sum_{\theta_j \in \Theta_j} a_{\theta_j} G^{\theta_j} \right)^{n_j} \quad \text{e} \quad G^{\beta''} = \prod_{j \in D''} (G^{\beta_j})^{n_j}.$$

Além disso, para bem unicamente determinados $b', b'' \in \mathbb{K}$, $G^{\alpha'} + b' G^{\beta'}$ e $G^{\alpha''} + b'' G^{\beta''}$ são S_1-processos.

Observemos agora que

$$\left(-b_jG^{\beta_j}+\sum_{\theta_j\in\Theta_j}a_{\theta_j}G^{\theta_j}\right)^{n_j}=(-b_jG^{\beta_j})^{n_j}+\sum_{p_j=1}^{n_j}\begin{pmatrix}n_j\\p_j\end{pmatrix}(-b_jG^{\beta_j})^{n_j-p_j}\left[\sum_{\theta_j\in\Theta_j}a_{\theta_j}G^{\theta_j}\right]^{p_j}.$$

Escrevendo

$$\Sigma_j=\sum_{p_j=1}^{n_j}\begin{pmatrix}n_j\\p_j\end{pmatrix}(-b_jG^{\beta_j})^{n_j-p_j}\left[\sum_{\theta_j\in\Theta_j}a_{\theta_j}G^{\theta_j}\right]^{p_j},$$

teremos

$$G^{\alpha'}=\prod_{j\in D'}\left((-b_jG^{\beta_j})^{n_j}+\Sigma_j\right)=\left[\prod_{j\in D'}(-b_j)^{n_j}\right]G^{\beta'}+\sum_{\delta'\in\Delta'}a_{\delta'}G^{\delta'}$$

onde

$$\sum_{\delta'\in\Delta'}a_{\delta'}G^{\delta'}=\sum\left[\prod_{j\in D_1'}(-b_jG^{\beta_j})^{n_j}\right]\left[\prod_{j\in D_2'}\Sigma_j\right],$$

com $D_1'\cup D_2'=D'$, $D_1'\cap D_2'=\emptyset$ e $D_2'\neq\emptyset$.

Notemos agora que uma vez que para todo $j\in D'$,

$$\mathrm{ht}_1\left(\sum_{\theta_j\in\Theta_j}a_{\theta_j}G^{\theta_j}\right)>\mathrm{ht}_1(G^{\alpha_j}+b_jG^{\beta_j}),$$

teremos

$$\begin{aligned}\mathrm{ht}_1\left(\sum_{\delta'\in\Delta'}a_{\delta'}G^{\delta'}\right)&>v_1\left(\prod_{j\in D_1'}(G^{\beta_j})^{n_j}\right)+v_1\left(\prod_{j\in D_2'}(G^{\beta_j})^{n_j}\right)\\&=v_1\left(\prod_{j\in D'}(G^{\beta_j})^{n_j}\right)=v_1(G^{\beta'})=v_1(G^{\alpha'})=\mathrm{ht}_1(G^{\alpha'}+b'G^{\beta'}).\end{aligned}$$

Desde que a constante b' é unicamente determinada, temos $-\prod_{j\in D'}(-b_j)^{n_j}=b'$, o que mostra que

$$G^{\alpha'}+b'G^{\beta'}=\sum_{\delta'\in\Delta'}a_{\delta'}G^{\delta'}.$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ht}_2\left(\sum_{\delta'\in\Delta'} a_{\delta'}G^{\delta'}\right) &\geq v_2\left(\prod_{j\in D_1'}(G^{\beta_j})^{n_j}\right) + v_2\left(\prod_{j\in D_2'}(G^{\alpha_j})^{n_j}\right)\\
&\geq v_2\left(\prod_{j\in D_1'}(G^{\alpha_j})^{n_j}\right) + v_2\left(\prod_{j\in D_2'}(G^{\alpha_j})^{n_j}\right)\\
&= v_2\left(\prod_{j\in D'}(G^{\alpha_j})^{n_j}\right) = v_2(G^{\alpha'}) = \mathrm{ht}_2(G^{\alpha'} + b'G^{\beta'}).
\end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$G^{\alpha''} + b''G^{\beta''} = \sum_{\delta''\in\Delta''} a_{\delta''}G^{\delta''},$$

com

$$\begin{aligned}
\mathrm{ht}_1\left(\sum_{\delta''\in\Delta''} a_{\delta''}G^{\delta''}\right) &> \mathrm{ht}_1(G^{\alpha''} + b''G^{\beta''}),\\
\mathrm{ht}_2\left(\sum_{\delta''\in\Delta''} a_{\delta''}G^{\delta''}\right) &\geq v_2(G^{\beta''}) = \mathrm{ht}_2(G^{\alpha''} + b''G^{\beta''}).
\end{aligned}$$

Para facilitar a notação, vamos escrever agora

$$G^{\alpha'} + b'G^{\beta'} = \Sigma' \text{ e } G^{\alpha''} + b''G^{\beta''} = \Sigma''.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
G^{\alpha} = G^{\alpha'}G^{\alpha''} &= (-b'G^{\beta'} + \Sigma')(-b''G^{\beta''} + \Sigma'')\\
&= b'b''G^{\beta'}G^{\beta''} - b'G^{\beta'}\Sigma'' - b''\Sigma'G^{\beta''} + \Sigma'\Sigma''.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
G^{\alpha} - b'b''G^{\beta} &= -b'G^{\beta'}\Sigma'' + \Sigma'(-b''G^{\beta''} + \Sigma'')\\
&= -b'G^{\beta'}\Sigma'' + \Sigma'G^{\alpha''} = \sum_{\delta\in\Delta} a_{\delta}G^{\delta}.
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{ht}_1\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_{\delta}G^{\delta}\right) &= \min\{\mathrm{ht}_1(G^{\beta'}\Sigma''),\ \mathrm{ht}_1(\Sigma'G^{\alpha''})\}\\
&> \min\{v_1(G^{\beta'}G^{\beta''}),\ v_1(G^{\alpha'}G^{\alpha''})\}\\
&= \mathrm{ht}_1(G^{\alpha} + bG^{\beta}),
\end{aligned}$$

o que nos mostra que $G^\alpha - b'b''G^\beta$ é um S_1-processo.

Logo, $b = -b'b''$, pois b é unicamente determinado. Além disso,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ht}_2\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right) &= \min\{\mathrm{ht}_2(G^{\beta'}\Sigma''),\ \mathrm{ht}_2(\Sigma' G^{\alpha''})\} \\
&\geq \min\{v_2(G^{\beta'}G^{\beta''}),\ v_2(G^{\alpha'}G^{\alpha''})\} \\
&= \mathrm{ht}_2(G^\alpha + bG^\beta).
\end{aligned}$$

Portanto, conseguimos uma representação como uma soma da forma $\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta$ para o S_1-processo $G^\alpha + bG^\beta$ tal que

$$\mathrm{ht}_1\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right) > \mathrm{ht}_1(G^\alpha + bG^\beta) \ \text{ e } \ \mathrm{ht}_2\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta\right) \geq \mathrm{ht}_2(G^\alpha + bG^\beta).$$

■

Corolário 1.44. *Seja G um subconjunto finito e não vazio de $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{O} = \mathbb{K}[[G]]$. Assumindo a Conjectura 1.43, G é uma Base Standard para $\mathcal{O}$ se, e somente se, todo S_k-processo mínimo de G tem uma redução final nula módulo G.*

Com esses resultados, podemos modificar o Algoritmo 1 de forma a otimizá-lo. A demonstração do teorema a seguir é essencialmente a mesma demonstração do Teorema 1.40 e como a Conjectura 1.43 é verdadeira para curvas com dois ramos, o teorema pode ser aplicado neste caso.

Teorema 1.45. *Seja G_0 um subconjunto de $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{O} = \mathbb{K}[[G_0]]$. Se a Conjectura 1.43 é verdadeira, então sempre obtemos uma Base Standard G para $\mathcal{O}$ aplicando o seguinte algoritmo:*

ALGORITMO 2. Base Standard para $\mathcal{O}$

input: G_0;

define: $G_{-1} := \emptyset$ **and** $j := 0$;

while $G_j \neq G_{j-1}$ **do**

$\mathcal{S} := \cup_{k=1}^{r}\{g;\ g \text{ é um } S_k\text{-processo mínimo de } G_j \text{ e } v_i(g) < \sigma_i, \text{ para algum } i \in I\}$;

$\mathcal{R} := \{h;\ h \text{ é uma redução final de } g \text{ módulo } G_j,\ g \in \mathcal{S},\ \text{ e } h \neq 0\}$;

$G_{j+1} := G_j \cup \mathcal{R}$;

output: $G = G_{j+1}$.

Vejamos um exemplo da utilização do Algoritmo 2.

Exemplo 1.46. *Consideremos a curva espacial* $Q = P_1 \cap P_2 \subset \mathbb{K}[[X, Y, Z]]$, *em que* $car(\mathbb{K}) \neq 2$,

$$P_1 = \langle X^2 - Y^5, Z - XY \rangle \quad e \quad P_2 = \langle X^3 - Y^2, Z + XY \rangle.$$

Sejam $g_1 = x$, $g_2 = y$, $g_3 = z$, $g_4 = x^2 - y^5$, $g_5 = z - xy$, $g_6 = x^3 - y^2$ *e* $g_7 = z + xy$. *Como a curva* Q *é parametrizada por*

$$\phi(t) = [\phi_1(t_1), \phi_2(t_2)] = [(t_1^5, t_1^2, t_1^7), (t_2^2, t_2^3, -t_2^5)],$$

temos

$$\begin{aligned}
g_1(t) &= (g_1 \circ \phi)(t_1, t_2) = (t_1^5, t_2^2),\\
g_2(t) &= (g_2 \circ \phi)(t_1, t_2) = (t_1^2, t_2^3),\\
g_3(t) &= (g_3 \circ \phi)(t_1, t_2) = (t_1^7, -t_2^5),\\
g_4(t) &= (g_4 \circ \phi)(t_1, t_2) = (0, t_2^4 - t_2^{15}),\\
g_5(t) &= (g_5 \circ \phi)(t_1, t_2) = (0, -2t_2^5),\\
g_6(t) &= (g_6 \circ \phi)(t_1, t_2) = (t_1^{15} - t_1^4, 0),\\
g_7(t) &= (g_7 \circ \phi)(t_1, t_2) = (2t_1^7, 0).
\end{aligned}$$

Seja $G_0 = \{g_1, g_2, ..., g_7\}$. *Notemos que* $\mathcal{O} = \mathbb{K}[[G_0]]$. *Além disso, aplicando os métodos de* [23], *vemos que* $\{g_1, g_2\}$, $\{g_6, g_7\}$, $\{g_1, g_2\}$ *e* $\{g_4, g_5\}$ *são Bases Standard para* $\mathcal{O}_1$, Q^1, $\mathcal{O}_2$ *e* Q^2 *respectivamente e* $\sigma = (6, 4)$. *Desta maneira, todo* S_k*-processo* g *de* G_0 *tal que* $v(g) \geq \sigma$ *admite redução final nula módulo* G_0.

Iniciaremos então o Algoritmo 2 com o conjunto $G_0 = \{g_1, g_2, ..., g_7\}$.

Um S_1*-processo de* G_0 *é da forma*

$$g = c_1 g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} g_3^{\alpha_3} g_6^{\alpha_4} g_7^{\alpha_5} + c_2 g_1^{\beta_1} g_2^{\beta_2} g_3^{\beta_3} g_6^{\beta_4} g_7^{\beta_5},$$

onde as constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ *devem ser determinadas.*

Uma vez que as imagens de g_1, g_2, g_3 *e* g_7 *em* $\mathbb{K}[[t_1]]$ *são monômios, se* $\alpha_4 = \beta_4 = 0$, *teremos* $v_1(g) = \infty$. *Desta maneira,* $g \in \langle g_4, g_5 \rangle$, *o que implica em*

$$v_2(g) \geq 4 = \min\{v_2(g_4), v_2(g_5)\}.$$

Logo, teremos $v(g) > \sigma$, *ou seja,* g *admitirá redução final nula módulo* G_0.

Assumiremos agora que $\alpha_4 \neq 0$ e $\beta_4 = 0$, pois estamos considerando apenas S_1-processos mínimos. Se $\alpha_4 \geq 2$ ou $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 \neq 0$, então $v_1(g) \geq 6$. Se $\beta_5 \neq 0$, teremos $v_2(g) = \infty$. Logo, $v(g) > \sigma$ e, novamente, g admitirá redução final nula módulo G_0.

Suponhamos então que $\beta_5 = 0$. Assim, $v_2(g) = v_2(g_1^{\beta_1} g_2^{\beta_2} g_3^{\beta_3}) = 2\beta_1 + 3\beta_2 + 5\beta_3$. Para termos $v_2(g) < 4$, as únicas possibilidades são

- *$\beta_1 = 1$, $\beta_2 = \beta_3 = 0$;*
- *$\beta_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$.*

No entanto, tais valores não fazem de g um S_1-processo de G_0.

Consequentemente, g deve ser da forma $g = c_1 g_6 + c_2 g_1^{\beta_1} g_2^{\beta_2} g_3^{\beta_3} g_7^{\beta_5}$, o que nos fornece a equação diofantina $5\beta_1 + 2\beta_2 + 7\beta_3 + 7\beta_5 = 4$. Sua única solução é $\beta_2 = 2$, isto é, $g = g_6 + g_2^2$ e

$$g(t) = (t_1^{15} - t_1^4 + t_1^4, t_2^6) = (t_1^{15}, t_2^6),$$

o que mostra que g admite redução final nula módulo G_0.

Um S_2-processo de G_0 é da forma

$$g = c_1 g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} g_3^{\alpha_3} g_4^{\alpha_4} g_5^{\alpha_5} + c_2 g_1^{\beta_1} g_2^{\beta_2} g_3^{\beta_3} g_4^{\beta_4} g_5^{\beta_5},$$

onde as constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ devem ser determinadas.

Uma vez que as imagens de g_1, g_2, g_3 e g_5 em $\mathbb{K}[[t_2]]$ são monômios, se $\alpha_4 = \beta_4 = 0$, teremos $v_2(g) = \infty$. Desta maneira, $g \in \langle g_4, g_5 \rangle$, o que implica em

$$v_1(g) \geq 4 = \min\{v_1(g_4), v_1(g_5)\}.$$

Se $v_1(g) = 4$, então g pode ser reduzido a um elemento h usando g_6. Afirmamos que $v_1(h) \geq 6$. De fato, se $v_1(h)$ fosse 5, teríamos $(5, \infty) \in \Gamma$, o que implicaria em $\sigma \leq (6, 4)$. Portanto, g admite redução final nula módulo G_0.

Assumiremos agora que $\alpha_4 \neq 0$ (consequentemente, $\beta_4 = 0$). Neste caso, $v_2(g) \geq 4$. Se $\beta_5 \neq 0$, teremos $v_1(g) = \infty$. Logo, $v(g) > \sigma$ e, novamente, g admitirá redução final nula módulo G_0.

Suponhamos então que $\beta_5 = 0$. Assim, $v_1(g) = v_1(g_1^{\beta_1} g_2^{\beta_2} g_3^{\beta_3}) = 5\beta_1 + 2\beta_2 + 7\beta_3$.

Para termos $v_1(g) < 6$, as únicas possibilidades são

- *$\beta_1 = 1$, $\beta_2 = \beta_3 = 0$;*
- *$\beta_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$;*
- *$\beta_2 = 2$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$.*

As duas primeiras possibilidades não fazem de g um S_2-processo de G_0. Para a terceira, temos $g = g_1g_4 - g_2^2$ e

$$g(t) = (-t_1^4, t_2^2(t_2^4 - t_2^{15}) - t_2^6) = (-t_1^4, -t_2^{17}).$$

Assim, $g \to h := g - g_6$ e

$$h(t) = (-t_1^4 - (t_1^{15} - t_1^4), -t_2^{17}) = (-t_1^{15}, -t_2^{17}),$$

o que mostra que g admite redução final nula módulo G_0.

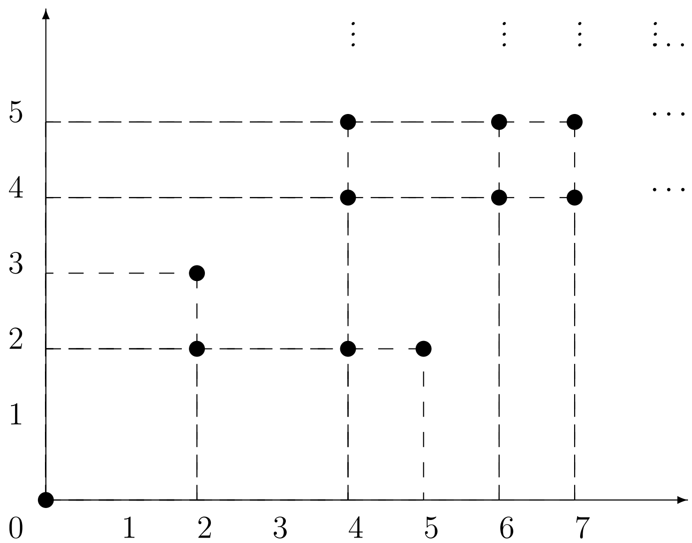
Logo, todo S_k-processo mínimo de G_0 têm redução final nula módulo G_0 e, dessa maneira, $G_1 = G_0$. Portanto, $G = \{g_1, g_2, ..., g_7\}$ é uma Base Standard para o anel local $\mathcal{O}$ da curva Q.

Observemos ainda que g_3 admite redução módulo $H = G\backslash\{g_3\}$, uma vez que $g_3 - g_1g_2 = g_5$ é tal que

$$v_1(g_5) = \infty > 7 = v_1(g_3) \quad e \quad v_2(g_5) = 5 = v_2(g_3).$$

Devido às ordens dos elementos de H, constatamos que H é uma Base Standard mínima para $\mathcal{O}$. Consequentemente, o semianel de valores Γ associado à curva Q é

$$\Gamma = \langle\, (2,3), (5,2), (\infty,4), (\infty,5), (4,\infty), (7,\infty)\,\rangle.$$



Semianel da curva $Q = P_1 \cap P_2$.

Capítulo 2

Bases Standard para Ideais Fracionários

Enquanto o semianel de valores do anel local $\mathcal{O}$ de uma curva analítica plana é um invariante topológico completo, vários invariantes analíticos estão relacionados com outros objetos algébricos tais como o ideal Jacobiano $\langle f, f_X, f_Y \rangle$ e o módulo de diferenciais de Kähler da curva. Tais objetos algébricos são casos particulares de uma estrutura mais geral: os ideais fracionários. Neste capítulo vamos estender as ideias apresentadas no capítulo anterior para ideais fracionários do anel local $\mathcal{O}$ de uma curva algebroide Q qualquer.

2.1 Ideais Fracionários e Ideais Relativos

Iniciaremos esta seção recordando a noção de ideais fracionários. Sejam $\mathcal{A}$ um anel comutativo e $F_{\mathcal{A}}$ seu anel total de frações. Dizemos que um subconjunto $\mathcal{I}$ de $F_{\mathcal{A}}$ é um *ideal fracionário* de $\mathcal{A}$ se

(a) $\mathcal{I}$ é um $\mathcal{A}$-módulo;

(b) $\mathcal{A} :_{F_{\mathcal{A}}} \mathcal{I} \neq \{0\}$;

(c) $\mathcal{I}$ contém um não divisor de zero.

Observação 2.1. *Muitos autores definem ideal fracionário impondo apenas as condições* (a) *e* (b) *acima e, neste caso, ele é chamado de* regular *ao satisfazer a condição* (c).

Como anteriormente, $Q = \cap_{i=1}^{r} P_i$ é uma curva algebroide com semianel Γ. Denotando por $\mathcal{Q}_i$ o corpo de frações de $\mathcal{O}_i$ e por $\mathcal{Q}$ o anel total de frações de $\mathcal{O}$, podemos escrever

(via isomorfismos)

$$\mathcal{O} \subseteq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_i \subseteq \overline{\mathcal{O}} = \bigoplus_{i=1}^{r} \overline{\mathcal{O}}_i = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{K}[[t_i]] \subseteq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{K}((t_i)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}. \tag{2.1}$$

No que segue, consideraremos apenas ideais fracionários de $\mathcal{O}$ finitamente gerados.

Notemos que se $\mathcal{I}$ é um ideal fracionário de $\mathcal{O}$, então a imagem homomórfica $\mathcal{I}_i$ de $\mathcal{I}$ em $\mathcal{Q}_i$ é um ideal fracionário de $\mathcal{O}_i$, para todo $i \in I$. Mais ainda, considerando a inclusão $\iota : \mathcal{I} \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}$ e projeção canônica $\pi_i : \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}_i = \mathbb{K}((t_i))$, temos $(\pi_i \circ \iota)(\mathcal{I}) = \mathcal{I}_i$.

Observemos também que o próprio anel local $\mathcal{O}$ é um ideal fracionário de si mesmo. Deste modo, os resultados neste capítulo se aplicam também a $\mathcal{O}$ e correspondem aos apresentados no Capítulo 1.

Se $v_i : \mathcal{Q}_i \to \overline{\mathbb{Z}} := \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ denota a valoração discreta normalizada de $\mathcal{Q}_i$, onde $v_i(0) = \infty$, para todo $i \in I$, então o conjunto

$$v_i(\mathcal{I}_i) := \{v_i(f);\ f \in \mathcal{I}_i\} \subseteq \overline{\mathbb{Z}}$$

é chamado de *ideal relativo* associado a $\mathcal{I}_i$.

Dado $f \in \mathcal{Q}$, definimos

$$v(f) := (v_1(f), \ldots, v_r(f)) \in \overline{\mathbb{Z}}^r,$$

onde $v_i(f)$ é o valor da imagem homomórfica de $f \in \mathcal{Q}$ em $\mathcal{Q}_i$. Desta maneira, obtemos o conjunto

$$v(\mathcal{I}) := \{v(f);\ f \in \mathcal{I}\} \subseteq \bigoplus_{i=1}^{r} v_i(\mathcal{I}_i) \subseteq \overline{\mathbb{Z}}^r,$$

que é chamado de *ideal relativo* associado a $\mathcal{I}$.

Além disto, denotamos por $\mathcal{I}^i$ a imagem canônica do $\mathcal{O}$-módulo

$$\mathcal{T}^i = \{f \in \mathcal{I};\ v_j(f) = \infty,\ \text{para todo } j \in I \setminus \{i\}\}$$

em $\mathcal{I}_i$ e $v_i(\mathcal{I}^i) = \{v_i(f);\ f \in \mathcal{I}^i\}$. Notemos que se $\mathcal{I} = \mathcal{O}$, então $\mathcal{I}_i = \mathcal{O}_i$ e $\mathcal{I}^i = \mathcal{O}^i$.

Podemos obter $v_i(\mathcal{I}_i)$ e $v_i(\mathcal{I}^i)$ usando o algoritmo apresentado em [23] para calcular o conjunto de valores de um $\mathcal{O}_i$-módulo finitamente gerado em $\mathbb{K}[[t_i]]$.

Sejam $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ e $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_r)$ elementos de $v(\mathcal{I})$. As seguintes propriedades são de fácil verificação:

A) Se $\lambda_k = \lambda'_k < \infty$ para algum $k \in I$, então existe $\lambda'' = (\lambda''_1, \ldots, \lambda''_r) \in v(\mathcal{I})$ tal que $\lambda''_i \geq \min\{\lambda_i, \lambda'_i\}$, para todo $i \in I$ (a igualdade é válida se $\lambda_i \neq \lambda'_i$), e $\lambda''_k > \lambda_k = \lambda'_k$.

B) $\min\{\lambda, \lambda'\} := (\min\{\lambda_1, \lambda'_1\}, \ldots, \min\{\lambda_r, \lambda'_r\}) \in v(\mathcal{I})$.

C) $\Gamma + v(\mathcal{I}) \subseteq v(\mathcal{I})$.

D) Existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma + v(\mathcal{I}) \subseteq \Gamma$.

Observemos que as propriedades A e B acima são exatamente as mesmas propriedades A e B que o semianel de valores Γ satisfaz. Deste modo, muitos dos resultados que se baseiam nestas propriedades e que foram demonstrados no Capítulo 1 serão apresentados neste capítulo sem demonstração.

Observação 2.2. *A Propriedade* C *indica que* $v(\mathcal{I})$ *admite um condutor, o qual denotaremos por* $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_r) \in v(\mathcal{I})$*, isto é,* $\kappa + \overline{\mathbb{N}}^r \subset v(\mathcal{I})$*.*

A Propriedade B permite considerarmos as operações

$$\oplus : v(\mathcal{I}) \times v(\mathcal{I}) \to v(\mathcal{I}) \qquad \text{e} \qquad \odot : \Gamma \times v(\mathcal{I}) \to v(\mathcal{I})$$

definidas por

$$\lambda \oplus \lambda' := \min\{\lambda, \lambda'\} \qquad \text{e} \qquad \gamma \odot \lambda := \gamma + \lambda,$$

para todos $\lambda, \lambda' \in v(\mathcal{I})$ e todo $\gamma \in \Gamma$.

Essas operações são tais que $(v(\mathcal{I}), \oplus)$ é um monóide comutativo com elemento neutro $\underline{\infty}$ e, para $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ e $\lambda, \lambda' \in v(\mathcal{I})$, temos

- $\gamma \odot (\lambda \oplus \lambda') = \gamma + \min\{\lambda, \lambda'\} = \min\{\gamma + \lambda, \gamma + \lambda'\} = (\gamma \odot \lambda) \oplus (\gamma \odot \lambda')$;
- $(\gamma \oplus \gamma') \odot \lambda = \min\{\gamma, \gamma'\} + \lambda = \min\{\gamma + \lambda, \gamma' + \lambda\} = (\gamma \odot \lambda) \oplus (\gamma' \odot \lambda)$;
- $(\gamma \odot \gamma') \odot \lambda = (\gamma + \gamma') + \lambda = \gamma + (\gamma' + \lambda) = \gamma \odot (\gamma' \odot \lambda)$;
- $\underline{0} \odot \lambda = \underline{0} + \lambda = \lambda$.

Isto faz de $v(\mathcal{I})$ um Γ- semimódulo.

No que segue, vamos rever conceitos introduzidos no capítulo anterior agora para ideais fracionários e ideais relativos.

Definição 2.3. *Um elemento* $\lambda \in v(\mathcal{I}) \setminus \{\underline{0}\}$ *é chamado de* irredutível *se*

$$\lambda = \gamma \odot \lambda';\ \gamma \in \Gamma, \lambda' \in v(\mathcal{I}) \quad \Rightarrow \quad \gamma = \underline{0}.$$

Como antes, usaremos a seguinte notação: se $f \in \mathcal{Q}$, então

$$I_f = I_{v(f)} = \{i \in I;\ v_i(f) \neq \infty\}.$$

Dados $\lambda \in \overline{\mathbb{Z}}^r \setminus \{\underline{\infty}\}$ e um subconjunto próprio J de I_λ, definimos os seguintes conjuntos:

$$\overline{F}_J(\lambda) = \{\lambda' \in \overline{\mathbb{Z}}^r;\ \lambda'_i > \lambda_i \text{ para } i \in I_\lambda \setminus J \text{ e } \lambda'_j = \lambda_j \text{ para } j \notin I_\lambda \setminus J\},$$

$$F_J(\lambda) = \{\lambda' \in v(\mathcal{I});\ \lambda'_i > \lambda_i \text{ para } i \in I_\lambda \setminus J \text{ e } \lambda'_j = \lambda_j \text{ para } j \notin I_\lambda \setminus J\} = \overline{F}_J(\lambda) \cap v(\mathcal{I}).$$

Definição 2.4. *Dizemos que $\lambda \in v(\mathcal{I})$ é um* ponto absoluto *de $v(\mathcal{I})$ se $F_J(\lambda) = \emptyset$ para todo subconjunto próprio J de I_λ.*

Como no caso do semianel de valores Γ, se $\lambda \in v(\mathcal{I})$ e $\sharp I_\lambda = 1$, então λ é um ponto absoluto.

O lema a seguir caracteriza elementos λ de $v(\mathcal{I})$ tais que $\lambda_i \geq \kappa_i$ para alguma coordenada finita $i \in I$. Sua demonstração é análoga à prova do Lema 1.7.

Lema 2.5. *Sejam J um subconjunto não trivial de I e $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \overline{\mathbb{Z}}^r$ tal que $\kappa_i \leq \lambda_i < \infty$, para todo $i \notin J$. Então $\lambda \in v(\mathcal{I})$ se, e somente se, existe $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_1, ..., \overline{\lambda}_r) \in v(\mathcal{I})$, onde $\overline{\lambda}_j = \lambda_j$, para todo $j \in J$, e $\overline{\lambda}_i = \infty$ para todo $i \notin J$.*

2.2 Bases Standard

Nesta seção introduziremos o conceito de Base Standard para um ideal fracionário $\mathcal{I}$ do anel local $\mathcal{O}$ de uma curva algebroide reduzida Q.

Consideraremos G sempre como uma Base Standard para $\mathcal{O}$.

No que segue, H é um subconjunto não vazio de $\mathcal{I}$.

Definição 2.6. *Sejam $f \in \mathcal{I} \setminus \{0\}$ e $k \in I_f$. Dizemos que f' é uma k-redução de f módulo (H, G) se existem $c \in \mathbb{K}$, um G-produto G^α e $h \in H$ tais que*

$$f' = f - cG^\alpha h,$$

com $v_i(f') \geq v_i(f)$, para todo $i \in I$ e com desigualdade estrita para $i = k$. Dizemos que f' é uma redução de f módulo (H, G) se f' é uma k-redução de f módulo (H, G), para algum $k \in I_f$.

Notemos que é possível recuperar o conceito de redução apresentado no Capítulo 1, bem como os demais conceitos e resultados utilizando $H = \{1\}$ no caso em que $\mathcal{I} = \mathcal{O}$.

Embora redundante, apresentaremos os resultados, observações e conceitos cujas justificativas decorrem como no caso do anel local $\mathcal{O}$. No entanto, omitiremos as demonstrações, a menos que apresentem alguma diferença relevante.

Lema 2.7. *Sejam $f \in \mathcal{I} \setminus \{0\}$ e $k \in I_f$. Existe uma k-redução de f módulo (H, G) se, e somente se, existem um G-produto G^α e um elemento $h \in H$ tais que*

$$v_i(f) \leq v_i(G^\alpha h),$$

para todo $i \in I$ e com igualdade para $i = k$.

Prova. Análoga à demonstração do Lema 1.10. ∎

Observação 2.8. *Se $f \in \mathcal{T}^k \setminus \{0\}$ admite uma redução módulo (H, G), então, uma vez que $I_f = \{k\}$, f admite somente uma k-redução e, neste caso, existem um G-produto G^α e $h \in H$ tais que $v(f) = v(G^\alpha h)$, visto que $v_k(f) = v_k(G^\alpha h)$ e $v_i(f) = \infty = v_i(G^\alpha h)$.*

Como antes, dada uma cadeia de reduções

$$f = f_0 \to f_1 \to f_2 \to ... \to f_l \to ..., \tag{2.2}$$

podemos escrever

$$f_l = f - \sum_{j=1}^{l} c_j G^{\alpha_j} h_j,$$

onde $c_j \in \mathbb{K}$, G-produtos G^{α_j} e $h_j \in H$, com $v(G^{\alpha_{j_1}} h_{j_1}) \neq v(G^{\alpha_{j_2}} h_{j_2})$, para $j_1 \neq j_2$, e $v(f) \leq v(G^{\alpha_j} h_j)$, $\forall\, j \geq 1$.

Se a cadeia (2.2) for infinita, obteremos a seguinte sequência em $\mathcal{I}$:

$$s_l = \sum_{j=1}^{l} c_j G^{\alpha_j} h_j,\ l \geq 1.$$

Se H é finito, então a família $\{c_j G^{\alpha_j} h_j;\ j \geq 1\}$ é somável em $\mathcal{I}$.

Dizemos que f' é uma redução final de $f \in \mathcal{I} \setminus \{0\}$ módulo (H, G) se f' é obtido a partir de f via uma cadeia de reduções módulo (H, G) e f' não pode mais ser reduzido. Além disto, se uma redução final de $f \in \mathcal{I} \setminus \{0\}$ módulo (H, G) é nula, podemos escrever

$$f = \sum_{\delta \in \Delta} c_\delta G^\delta h_\delta,$$

onde Δ é um subconjunto de $\mathbb{N}^{\sharp G}$, $c_\delta \in \mathbb{K}$, G^δ é um G-produto e $h_\delta \in H$.

Uma vez reapresentados os conceitos anteriores, podemos também estender a noção de Base Standard para um ideal fracionário $\mathcal{I}$ do anel local $\mathcal{O}$ de uma curva algebroide $Q = \bigcap_{i=1}^{r} P_i$.

Definição 2.9. *Um subconjunto finito e não vazio H de $\mathcal{I}$ é uma Base Standard para $\mathcal{I}$ se todo elemento não nulo de $\mathcal{I}$ tem uma redução módulo (H, G).*

Se H é uma Base Standard para $\mathcal{I}$, então H é um conjunto de geradores de $\mathcal{I}$ como $\mathcal{O}$-módulo e, neste caso, escrevemos $\mathcal{I} = \langle H \rangle$.

Como no Corolário 1.16, obtemos as seguintes caracterizações de uma Base Standard para um ideal fracionário $\mathcal{I}$.

Proposição 2.10. *Sejam G uma Base Standard para $\mathcal{O}$ e H um subconjunto finito e não vazio de $\mathcal{I}$. As seguintes condições são equivalentes.*
(a) *H é uma Base Standard para $\mathcal{I}$.*
(b) *Para todo elemento não nulo $f \in \mathcal{I}$ e para algum $k \in I_f$, existem um G-produto G^α e $h \in H$ (dependendo de k) tais que $v_i(f) \leq v_i(G^\alpha h)$, para todo $i \in I$, e $v_k(f) = v_k(G^\alpha h)$.*
(c) *Para todo elemento não nulo $f \in \mathcal{I}$ e para todo $k \in I_f$, existem um G-produto G^α e $h \in H$ (dependendo de k) tais que $v_i(f) \leq v_i(G^\alpha h)$, para todo $i \in I$, e $v_k(f) = v_k(G^\alpha h)$.*

O seguinte resultado garante a existência de uma Base Standard para um ideal fracionário do anel local de uma curva algebroide com vários ramos.

Teorema 2.11. *Todo ideal fracionário $\mathcal{I}$ do anel local $\mathcal{O}$ de uma curva $Q = \bigcap_{i=1}^r P_i$ admite uma Base Standard.*

Prova. Seja B_0' um subconjunto de $\mathcal{I}$ satisfazendo $v(B_0') = v(\mathcal{I}) \setminus \{\underline{0}\}$ e $v(h) \notin v(B_0' \setminus \{h\})$, para todo $h \in B_0'$. Definimos

$$B_0 := \{h \in B_0';\ v_i(h) < \kappa_i \text{ se } i \in I_h\}.$$

Para todo $i \in I$, consideramos $B_i \subset \mathcal{I}$ tal que a imagem homomórfica de B_i em $\mathcal{I}_i$ seja uma Base Standard para $\mathcal{I}^i$, que pode ser obtida como descrito em [23]. Uma vez que a imagem homomórfica de qualquer subconjunto finito A de $\mathcal{I}$ tal que $v_i(A) = v_i(B_i)$ é uma Base Standard para $\mathcal{I}^i$, podemos considerar B_i como um subconjunto de $\mathcal{T}^i$, isto é, $v_j(h) = \infty$ para todo $j \in I \setminus \{i\}$, onde $h \in B_i$.

Afirmamos que o conjunto finito $H = \bigcup_{i=0}^r B_i$ é uma Base Standard para $\mathcal{I}$.

De fato, seja f um elemento não nulo em $\mathcal{I}$.

Se $v_i(f) < \kappa_i$, para todo $i \in I_f$, existe $h \in B_0$ tal que $v(f) = v(h)$.

Se $\kappa_k \leq v_k(f)$, para algum $k \in I_f$, então $v_k(f) \in v_k(\mathcal{I}^k)$. Desde que as imagens homomórficas de $G \subset \mathcal{O}$ e $B_k \subset \mathcal{I}$ são Bases Standard para $\mathcal{O}_k$ e $\mathcal{I}^k$ respectivamente, existem um G-produto G^β e $h_k \in B_k$ tais que $v_k(f) = v_k(G^\beta h_k)$ e $v_i(f) \leq v_i(G^\beta h_k) = \infty$ para todo $i \in I \setminus \{k\}$.

Pela proposição anterior, concluímos que H é uma Base Standard para $\mathcal{I}$. ∎

O teorema anterior permite recuperarmos os resultados da Seção 1.2 para o contexto de ideais fracionários do anel local de uma curva algebroide reduzida. Em particular, o ideal relativo $v(\mathcal{I})$ é um Γ-semimódulo gerado por $v(H)$, onde H é uma Base Standard para $\mathcal{I}$. Mais especificamente, se $H = \{h_1, ..., h_s\}$, então todo elemento $\lambda \in v(\mathcal{I})$ se expressa como

$$\lambda = \gamma_1 \odot v(h_1) \oplus ... \oplus \gamma_s \odot v(h_s),$$

com $\gamma_j \in \Gamma$, para todo $j = 1, ..., s$.

A partir de agora G sempre denotará uma Base Standard mínima para $\mathcal{O}$.

De modo natural e similar ao que introduzimos no Capítulo 1, dizemos que H é uma Base Standard *mínima* para $\mathcal{I}$ se para todo $h \in H$ não existe redução de h módulo $(H \setminus \{h\}, G)$.

Sem maiores esforços, analogamente às Proposições 1.22 e 1.24, podemos obter uma Base Standard mínima para $\mathcal{I}$ simplesmente descartando elementos h de uma Base Standard H que admitem alguma redução módulo $(H \setminus \{h\}, G)$. Em particular, duas Bases Standard mínimas para $\mathcal{I}$ têm o mesmo conjunto de valores.

Elementos de uma Base Standard mínima H de um ideal fracionário de $\mathcal{O}$ têm propriedades particulares. De fato, como no caso do anel local $\mathcal{O}$, se $h \in H$, então $v(h)$ é um elemento irredutível de $v(\mathcal{I})$ e h é irredutível em $\mathcal{I}$, isto é, não podemos escrever $h = gh'$, com $g \in \mathcal{M} \subset \mathcal{O}$ e $h' \in \mathcal{I}$.

Além disto, analogamente ao Teorema 1.26 e Corolário 1.28, temos o seguinte reultado.

Teorema 2.12. *Seja H um subconjunto finito e não vazio de um ideal fracionário $\mathcal{I}$ do anel local $\mathcal{O}$ de uma curva algebroide Q. Então H é uma Base Standard mínima para $\mathcal{I}$ se, e somente se, $v(H)$ é o conjunto de pontos absolutos irredutíveis de $v(\mathcal{I})$.*

Com as devidas adaptações dos conceitos apresentados na Seção 1.5, podemos obter um algoritmo para encontrar uma Base Standard para um ideal fracionário $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}$ a partir de um conjunto finito de geradores.

Mais diretamente, sejam G uma Base Standard para $\mathcal{O}$ e H um conjunto finito de geradores para $\mathcal{I}$. Dado $f \in \mathcal{I}$, podemos representar f como uma soma da forma $\sum_{\delta \in \Delta} a_\delta G^\delta h_\delta$, onde $\Delta \subset \mathbb{N}^{\sharp G}$, $a_\delta \in \mathbb{K}$, G^δ é um G-produto e $h_\delta \in H$. A altura dessa representação de f é

$$\mathrm{ht}\left(\sum_{\delta \in \Delta} a_\delta G^\delta h_\delta\right) = \left(\mathrm{ht}_1\left(\sum_{\delta \in \Delta} a_\delta G^\delta h_\delta\right), ..., \mathrm{ht}_r\left(\sum_{\delta \in \Delta} a_\delta G^\delta h_\delta\right)\right),$$

onde para cada $i \in I$

$$\mathrm{ht}_i\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta h_\delta\right) = \min\{v_i(G^\delta h_\delta),\ \delta \in \Delta\}.$$

e a amplitude da representação $\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta h_\delta$ é

$$\mathrm{Amp}\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta h_\delta\right) = \left(\mathrm{Amp}_1\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta h_\delta\right), ..., \mathrm{Amp}_r\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta h_\delta\right)\right),$$

onde $\mathrm{Amp}_i(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta h_\delta)$ é o número de $\delta \in \Delta$ tais que $v_i(G^\delta h_\delta) = \mathrm{ht}_i(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta h_\delta)$.

Dado $k \in I$, um *S_k-processo* de um par de elementos h_1, h_2 de H sobre G é um elemento da forma

$$aG^\alpha h_1 + bG^\beta h_2,$$

onde $a, b \in \mathbb{K}$ e G^α, G^β são G-produtos tais que

$$v_k(aG^\alpha h_1 + bG^\beta h_2) > \mathrm{ht}_k(aG^\alpha h_1 + bG^\beta h_2).$$

O teorema abaixo, cuja demonstração é análoga à prova do Teorema 1.38, é o ponto chave para o algoritmo que permite calcular uma Base Standard para um ideal fracionário $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}$.

Teorema 2.13. *Sejam H um conjunto de geradores para $\mathcal{I}$ e G uma Base Standard para $\mathcal{O}$. As seguintes afirmações são equivalentes.*
(a) *Todo elemento não nulo de $\mathcal{I}$ tem uma redução módulo (H, G).*
(b) *Toda redução final módulo (H, G) de qualquer elemento de $\mathcal{I} \setminus \{0\}$ é nula.*
(c) *H é fechado em relação a S_k-processos, isto é, todo S_k-processo de um par de elementos de H sobre G tem uma redução final nula módulo (H, G).*
(d) *Todo S_k-processo não nulo $aG^\alpha h_1 + bG^\beta h_2$ do par de elementos h_1, h_2 de H sobre G tem uma representação como uma soma da forma $\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta h_\delta$, onde $\Delta \subset \mathbb{N}^{\sharp G}$, $a_\delta \in \mathbb{K}$, G^δ é um G-produto, $h_\delta \in H$ e*

$$\mathrm{ht}_i\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta h_\delta\right) \geq \mathrm{ht}_i(aG^\alpha h_1 + bG^\beta h_2),$$

para todo $i \in I$ e com desigualdade estrita para $i = k$.

Obtemos a partir desse teorema, analogamente ao Teorema 1.40 (isto é, ao Algoritmo 1), um algoritmo para encontrar uma Base Standard para um ideal fracionário $\mathcal{I}$ do anel local $\mathcal{O}$ de uma curva $Q = \cap_{i=1}^r P_i$.

Teorema 2.14. *Seja H_0 um conjunto finito de geradores para $\mathcal{I}$ tal que $\cup_{i=1}^{r} B_i \subset H_0$, onde B_i é como na demonstração do Teorema 2.11. Sempre conseguimos obter uma Base Standard H para $\mathcal{I}$ com o seguinte algoritmo:*

ALGORITMO 3. Base Standard para $\mathcal{I}$

input: G, H_0;

define: $H_{-1} := \emptyset$ **and** $j := 0$;

while $H_j \neq H_{j-1}$ **do**

$\mathcal{S} := \cup_{k=1}^{r}\{f;\ f$ *é um* S_k*-processo de* H_j *sobre* G *e* $v_i(f) < \kappa_i$ *para algum* $i \in I\}$;

$\mathcal{R} := \{h;\ h$ *é uma redução final de* f *módulo* $(H_j, G),\ f \in \mathcal{S},$ *e* $h \neq 0\}$;

$H_{j+1} := H_j \cup \mathcal{R}$;

output: $H = H_{j+1}$.

Algumas observações merecem ser feitas. Primeiramente, enquanto o condutor do semianel de valores Γ pode ser calculado antecipadamente considerando o conjunto de valores $v_i(Q^i)$, não conhecemos algo semelhante para um ideal fracionário $\mathcal{I}$ qualquer. Deste modo, a condição "$v_i(f) < \kappa_i$" na instrução do algoritmo pode ser substituída por um limitante superior para κ em cada etapa do algoritmo.

Vejamos mais de perto o conceito de um S_k-processo. Se $G = \{g_1, ..., g_m\}$ é uma Base Standard para $\mathcal{O}$, então um S_k-processo de um par de elementos h_1, h_2 de H sobre G é da forma $G^{\alpha}h_1 + bG^{\beta}h_2$, onde $b \in \mathbb{K}$. O S_k-processo é então unicamente determinado pelos vetores $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^m$, soluções da seguinte equação diofantina

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_k(g_j) + v_k(h_1) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_k(g_j) + v_k(h_2). \qquad (2.4)$$

Apesar do conjunto de todas as soluções da equação acima não ter estrutura de monóide quando $v(h_1) \neq v(h_2)$, podemos definir o conjunto D' de todas as soluções (não nulas) que são mínimas com respeito à ordem parcial (1.4). O conjunto D' é então finito e uma solução da equação diofantina (2.4) pode ser obtida através da adição de uma solução mínima pertencente a D' com uma solução da equação homogênea associada (1.3), cujo conjunto de soluções D sabemos ser finitamente gerado.

Ambos os conjuntos D e D' podem ser computados por meio de algoritmos apresentados em [12] e [13].

Como antes, um S_k-processo associado a uma solução no conjunto D' é chamado de S_k-processo mínimo do par h_1 e h_2.

A Conjectura 1.43 também admite uma versão análoga no contexto mais geral de ideais fracionários.

Conjectura 2.15. *Seja H um conjunto finito de geradores para $\mathcal{I}$. Se todo S_k-processo mínimo de um par de elementos de H sobre G tiver uma redução final nula módulo G, então todo S_k-processo $aG^{\alpha}h_1 + bG^{\beta}h_2$ do par de elementos h_1, h_2 de H sobre G terá uma representação como uma soma da forma $\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta h_\delta$, onde $\Delta \subset \mathbb{N}^{\sharp G}$, $a_\delta \in \mathbb{K}$, G^δ é um G-produto, $h_\delta \in H$ e*

$$\mathrm{ht}_i\left(\sum_{\delta\in\Delta} a_\delta G^\delta h_\delta\right) \geq \mathrm{ht}_i(G^{\alpha}h_1 + bG^{\beta}h_2)$$

para todo $i \in I$ e com desigualdade estrita para $i = k$.

Se a curva Q tem apenas dois ramos, podemos constatar a veracidade da conjectura acima e como consequência do Teorema 2.13, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 2.16. *Seja H um conjunto finito de geradores para um ideal fracionário $\mathcal{I}$ do anel local de uma curva com dois ramos. Então H é uma Base Standard para $\mathcal{I}$ se, e somente se, todo S_k-processo mínimo de um par de elementos de H sobre G tem uma redução final nula módulo (H, G).*

Com esses resultados para curvas com dois ramos (ou se a Conjectura 2.15 for verdadeira), podemos modificar o Algoritmo 3 de forma a melhorá-lo. A demonstração do teorema a seguir é essencialmente a mesma demonstração do Teorema 2.14.

Teorema 2.17. *Seja H_0 um conjunto finito de geradores para $\mathcal{I}$ tal que $\cup_{i=1}^{r} B_i \subset H_0$. Sempre obtemos uma Base Standard H para $\mathcal{I}$ com o seguinte algoritmo:*

ALGORITMO 4. Base Standard para $\mathcal{I}$

input: G, H_0;
define: $H_{-1} := \emptyset$ **and** $j := 0$;
while $H_j \neq H_{j-1}$ **do**
  $\mathcal{S} := \cup_{k=1}^{r}\{f;\ f$ *é um* S_k*-processo mínimo de* H_j *sobre* G *e* $\exists\, i \in I, v_i(f) < \kappa_i\}$;
  $\mathcal{R} := \{h;\ h$ *é uma redução final de* f *módulo* $(H_j, G),\ f \in \mathcal{S},$ *e* $h \neq 0\}$;
  $H_{j+1} := H_j \cup \mathcal{R}$;
output: $H = H_{j+1}$.

2.3 O Módulo de Diferenciais de Kähler

Nesta seção exploraremos o módulo de diferenciais de Kähler de uma curva plana reduzida. Ele é um relevante exemplo de ideal fracionário do anel local de uma curva analítica plana, pois seu conjunto de valores Λ é um importante invariante analítico que desempenha papel crucial na classificação analítica, como pode ser visto em [25] para o caso irredutível e em [26] para o caso de dois ramos. Embora utilizado como importante ferramenta e com ligação com outros invariantes analíticos não se conhece um modo sistemático de se calcular Λ para curvas com vários ramos.

No que segue, $\mathbb{K}$ é um corpo algebricamente fechado de característica zero e $Q = \langle f \rangle$ é uma curva algebroide plana reduzida, com $f = \prod_{i \in I} f_i \in \mathbb{K}[[X,Y]]$.

Consideremos o $\mathbb{K}[[X,Y]]$-módulo das 1-formas diferenciais

$$\Omega_{\mathbb{K}^2} = \mathbb{K}[[X,Y]]dX + \mathbb{K}[[X,Y]]dY.$$

O *módulo de diferenciais de Kähler* de $\mathcal{O}$ é o $\mathcal{O}$-módulo

$$\Omega := \Omega_{\mathcal{O}} = \frac{\Omega_{\mathbb{K}^2}}{\mathbb{K}[[X,Y]]df + f\Omega_{\mathbb{K}^2}} \cong \frac{\mathcal{O}dx + \mathcal{O}dy}{\langle f_x dx + f_y dy \rangle},$$

em que $df = f_X dX + f_Y dY$.

Uma diferencial $\omega \in \Omega$ é chamada de *exata* se ω pertence à imagem da $\mathbb{K}$-derivação universal $d : \mathcal{O} \to \Omega$ definida por

$$d(g) := dg = g_x dx + g_y dy,$$

para todo $g \in \mathcal{O}$, isto é, se existe $g \in \mathcal{O}$ tal que $\omega = dg := g_x dx + g_y dy$. Se não existe tal g, dizemos que ω é uma diferencial não exata.

Exceto para o caso no qual a curva é regular, o $\mathcal{O}$-módulo Ω tem um submódulo de torção

$$\mathcal{T} := \mathcal{T}_{\mathcal{O}} = \{\omega \in \Omega;\ g\omega = 0 \text{ para algum não divisor de zero } g \in \mathcal{O}\}$$

não trivial.

De maneira análoga, para cada $i \in I$, definimos o módulo de diferenciais de Kähler de $\mathcal{O}_i$:

$$\Omega_i := \Omega_{\mathcal{O}_i} = \frac{\mathcal{O}_i dx_i + \mathcal{O}_i dy_i}{\langle (f_i)_{x_i} dx_i + (f_i)_{y_i} dy_i \rangle},$$

e seu respectivo submódulo de torção:

$$\mathcal{T}_i := \mathcal{T}_{\mathcal{O}_i} = \{\omega_i \in \Omega_i;\ g_i\omega_i = 0 \text{ para algum } g_i \in \mathcal{O}_i \setminus \{0\}\}.$$

Para cada $i \in I$, seja $\omega_i = p_i dx_i + q_i dy_i \in \Omega_i$. Representamos o elemento $\overline{\omega}_i = \omega_i + \mathcal{T}_i \in \frac{\Omega_i}{\mathcal{T}_i}$ por $\overline{\omega}_i = \overline{p}_i dx_i + \overline{q}_i dy_i$.

Temos então um monomorfismo bem definido de $\mathcal{O}_i$-módulos $\varphi_i : \dfrac{\Omega_i}{\mathcal{T}_i} \to \mathbb{K}[[t_i]]$ (veja [25]) dado por

$$\varphi_i(\overline{p}_i dx_i + \overline{q}_i dy_i) = p_i(\phi_i(t_i)) \cdot x_i'(t_i) + q_i(\phi_i(t_i)) \cdot y_i'(t_i),$$

onde $\phi_i(t_i) = (x_i(t_i), y_i(t_i))$ é uma parametrização do ramo $\langle f_i \rangle$.

Identificando $\frac{\Omega_i}{\mathcal{T}_i}$ com sua imagem isomórfica em $\overline{\mathcal{O}}_i = \mathbb{K}[[t_i]]$, podemos considerar

$$\frac{\Omega_i}{\mathcal{T}_i} \subseteq \overline{\mathcal{O}}_i.$$

Além disso, podemos definir o homomorfismo de $\mathcal{O}$-módulos $\Psi : \Omega \to \bigoplus_{i=1}^{r} \Omega_i$ de modo que se $\omega = pdx + qdy \in \Omega$, então

$$\Psi(\omega) = (\omega_1, ..., \omega_n),$$

onde $\omega_i = p_i dx_i + q_i dy_i$, para todo $i \in I$.

O homomorfismo Ψ não é injetivo, pois considerando, por exemplo, uma curva plana com dois ramos $Q = \langle f \rangle$, com $f = f_1 f_2$, temos $f_1 df_2 \neq 0$ em Ω, mas $\Psi(f_1 df_2) = (0, 0)$ em $\Omega_1 \oplus \Omega_2$.

Notemos que $f_1 df_2 \in \mathcal{T}$. De fato, como $f_y = f_1(f_2)_y + (f_1)_y f_2$ não é divisor de zero em $\mathcal{O}$, $f_1 df_2 = df - f_2 df_1$ e

$$\begin{aligned} f_y f_1 df_2 &= f_1(f_2)_y f_1 df_2 + (f_1)_y f_2 f_1 df_2 \\ &= f_1(f_2)_y(df - f_2 df_1) + f(f_1)_y df_2 \\ &= f_1(f_2)_y df - f(f_2)_y df_1 + f(f_1)_y df_2 \\ &= f_1(f_2)_y df + f((f_1)_y df_2 - (f_2)_y df_1) = 0, \end{aligned}$$

concluímos que $f_1 df_2$ é uma diferencial de torção.

Bayer, Hefez e Hernandes demonstram em [6] a seguinte proposição.

Proposição 2.18. *Se $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}_i$ são os submódulos de torção de Ω e Ω_i respectivamente, então*

$$\Psi(\mathcal{T}) \subset \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{T}_i.$$

Mais ainda, o homomorfismo de $\mathcal{O}$-módulos $\overline{\Psi} : \frac{\Omega}{\mathcal{T}} \to \bigoplus_{i=1}^{r} \frac{\Omega_i}{\mathcal{T}_i}$ dado por

$$\overline{\Psi}(\omega + \mathcal{T}) = (\omega_1 + \mathcal{T}_1, ..., \omega_r + \mathcal{T}_r) = (\omega_1, ..., \omega_r) + \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{T}_i$$

é bem definido e injetivo.

Dessa maneira, podemos considerar (via isomorfismo)

$$\frac{\Omega}{\mathcal{T}} \subseteq \bigoplus_{i=1}^{r} \frac{\Omega_i}{\mathcal{T}_i} \subseteq \bigoplus_{i=1}^{r} \overline{\mathcal{O}}_i = \overline{\mathcal{O}}.$$

Com tais inclusões, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.19. *O $\mathcal{O}$-módulo $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$ é um ideal fracionário do anel local $\mathcal{O}$.*

Prova. Utilizando a imagem isomórfica de $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$ em $\overline{\mathcal{O}}$, podemos ver que $g\frac{\Omega}{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{O}$, onde $g \in \mathcal{O}$ é tal que $v(g) = \sigma$. Logo,

$$\mathcal{O} :_{\mathcal{Q}} \frac{\Omega}{\mathcal{T}} \neq \{0\}.$$

Agora, uma vez que $d\mathcal{O} \subseteq \frac{\Omega}{\mathcal{T}}$, concluímos que $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$ contém um não divisor de zero. Portanto, $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$ é um ideal fracionário de $\mathcal{O}$. ■

Para cada $i \in I$, definimos a ordem ou valor de um elemento $\omega_i \in \frac{\Omega_i}{\mathcal{T}_i}$ como

$$\nu_i(\omega_i) = v_i(\varphi_i(\omega_i)) + 1 \in \overline{\mathbb{N}},$$

onde $v_i(\varphi_i(\omega_i))$ é a valoração discreta normalizada de $\mathbb{K}[[t_i]]$.

Assim, definimos o conjunto das ordens das diferenciais de $\mathcal{O}_i$ como

$$\Lambda_i := \left\{ \nu(\omega_i);\ \omega_i \in \frac{\Omega_i}{\mathcal{T}_i} \right\}.$$

Definimos a ordem $\nu(\omega)$ de um elemento $\omega \in \frac{\Omega}{\mathcal{T}}$ identificando-o com um elemento $(\omega_1, ..., \omega_n) \in \oplus_{i=1}^{r} \frac{\Omega_i}{\mathcal{T}_i}$ e considerando

$$\nu(\omega) := (\nu_1(\omega_1), ..., \nu_r(\omega_r)) \in \overline{\mathbb{N}}^r,$$

escrevemos

$$\Lambda = \left\{ \nu(\omega);\ \omega \in \frac{\Omega}{\mathcal{T}} \right\}$$

para representar o conjunto das ordens das diferenciais de $\mathcal{O}$.

Corolário 2.20. *O conjunto Λ é um ideal relativo.*

Notemos também que para todo $g \in \mathcal{M}$, temos $\nu(dg) = v(g)$. Isto implica, em particular, que $\Gamma \setminus \{\underline{0}\} \subseteq \Lambda$ e $\kappa \leq \sigma$.

Deste modo, podemos aplicar os algoritmos da seção anterior para encontrar uma Base Standard para $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$ e, consequentemente, descrever o conjunto Λ.

Primeiramente, seja G uma Base Standard para $\mathcal{O}$. Logo, $v(f_i) \in v(G)$, para todo $i \in I$. Podemos supor então que $f_i \in G$, para todo $i \in G$. Além disto, podemos assumir que G seja mínima e que pode ser computada por meio do Algoritmo 1.

Como não conhecemos um modo de calcular o condutor κ de Λ previamente, podemos utilizar o condutor σ de Γ, uma vez que $\Gamma \setminus \{\underline{0}\} \subset \Lambda$.

Observemos agora que na inicialização do Algoritmo 3 usamos um conjunto finito H_0 de geradores para o ideal fracionário tal que $\cup_{i=1}^{r} B_i \subset H_0$, onde B_i é como na demonstração do Teorema 2.11 e pode ser encontrado utilizando o algoritmo apresentado em [23].

No entanto, na demonstração do Teorema 2.11, o conjunto $\cup_{i=1}^{r} B_i$ foi útil apenas para garantir que podemos reduzir elementos tais que sua ordem $(\lambda_1, ..., \lambda_r)$ é tal que $\lambda_i \geq \kappa_i$. Como estamos adotando σ como limitante superior para κ, basta considerar que H_0 contenha um conjunto de elementos que permita redução de elementos com ordem $(\lambda_1, ..., \lambda_r)$ com $\lambda_i \geq \sigma_i$, para algum $i \in I$. Como $\nu(dg) = v(g)$, para todo $g \in \mathcal{M}$, podemos, como analisado na Proposição 1.17, considerar B_i como um conjunto tal que sua imagem homomórfica seja uma Base Standard para dQ^i. Desta maneira, no caso de curvas planas, podemos simplesmente utilizar o seguinte conjunto de geradores para $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$:

$$H_0 = \{dg;\ g \in G\}.$$

A proposição a seguir caracteriza o conjunto Λ no caso em que H_0 é uma Base Standard para $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$.

Proposição 2.21. *Seja $G = \{g_1, ..., g_m\}$ uma Base Standard para $\mathcal{O}$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) $dG = \{dg_1, ..., dg_m\}$ *é uma Base Standard para* $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$;

(b) $\Lambda = \Gamma \setminus \{\underline{0}\}$.

Prova. (a) $\Rightarrow$ (b) Já sabemos que $\Gamma \setminus \{\underline{0}\} \subseteq \Lambda$. Se dG é uma Base Standard para $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$, então dado $\gamma \in \Lambda$,

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_1 \odot \nu(dg_1) \oplus ... \oplus \gamma_m \odot \nu(dg_m) \\ &= \gamma_1 \odot v(g_1) \oplus ... \oplus \gamma_m \odot v(g_m) \in \Gamma \setminus \{\underline{0}\}, \end{aligned}$$

ou seja, $\Lambda = \Gamma \setminus \{\underline{0}\}$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Seja $\lambda = \nu(\omega) \in \Lambda \setminus \{\underline{\infty}\} = \Gamma \setminus \{\underline{0}, \underline{\infty}\}$. Deste modo, existe $g \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$ tal que $v(g) = \lambda$.

Seja agora $k \in I_g = I_\omega$. Como G é uma Base Standard para $\mathcal{O}$, existe um G-produto $G^\alpha = g_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot g_m^{\alpha_m}$ tal que

$$\lambda_i \leq v_i(G^\alpha), \text{ para todo } i \in I, \text{ e } \lambda_k = v_k(G^\alpha).$$

Uma vez que $g \neq 0$, existe j, $1 \leq j \leq m$, tal que $\alpha_j \neq 0$. Assim, podemos escrever $G^\alpha = G^\beta g_j$, onde G^β é o G-produto $g_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot g_j^{\alpha_j - 1} \cdot ... \cdot g_m^{\alpha_m}$. Dessa maneira, temos

$$\lambda_i \leq v_i(G^\beta g_j), \text{ para todo } i \in I, \text{ e } \lambda_k = v_k(G^\beta g_j),$$

o que significa que

$$\nu_i(\omega) \leq \nu_i(G^\beta dg_j), \text{ para todo } i \in I, \text{ e } \nu_k(\omega) = \nu_k(G^\beta dg_j).$$

Portanto, dG é uma Base Standard para $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$. ■

Corolário 2.22. *Se $\Lambda \neq \Gamma \setminus \{\underline{0}\}$, então toda Base Standard para $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$ contém uma diferencial não exata.*

Prova. Seja H' uma Base Standard para $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$ e suponhamos, por absurdo, que H' contenha apenas diferenciais exatas. Logo, $H' = dG'$ para algum subconjunto finito G' de $\mathcal{O}$. Podemos considerar uma Base Standard G para $\mathcal{O}$ que contenha G' e, dessa maneira, $H = dG$ é uma Base Standard para $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$, uma vez que $H' \subset H$. Portanto, $\Lambda = \Gamma \setminus \{\underline{0}\}$, uma contradição. ■

Observação 2.23. *Pol em [30] mostra que para uma curva analiticamente equivalente a uma curva quasehomogênea, temos*

$$\Lambda = \Gamma \setminus \{\underline{0}\}$$

(veja o Lema 4.15 de [30]).

Para encerrar esse capítulo, aplicaremos o Algoritmo 4 para caracterizar o conjunto mínimo de geradores do conjunto Λ de uma curva analítica plana Q com dois ramos com tangentes distintas e cada ramo com multiplicidade 2.

Exemplo 2.24. *Hefez, Hernandes e Rodrigues Hernandes mostram em [26] que uma curva analítica plana Q com dois ramos com tangentes distintas e cada ramo com multiplicidade 2 tem a seguinte parametrização (forma normal)*

$$\phi(t) = [(t_1^2, t_1^m), (t_2^n, t_2^2)],$$

com m, n ímpares e maiores que 2, ou seja, podemos supor

$$Q = \langle (Y^2 - X^m)(X^2 - Y^n) \rangle.$$

Pelo Exemplo 1.33, uma Base Standard mínima para o anel local $\mathcal{O}$ da curva Q é $G = \{x, y, f_1, f_2\}$, onde $f_1 = y^2 - x^m$ e $f_2 = x^2 - y^n$.

Assim, temos

$$\begin{aligned}
(x \circ \phi)(t) &= (t_1^2, t_2^n),\\
(y \circ \phi)(t) &= (t_1^m, t_2^2),\\
(f_1 \circ \phi)(t) &= (0, t_2^4 - t_2^{mn}),\\
(f_2 \circ \phi)(t) &= (t_1^4 - t_1^{mn}, 0),
\end{aligned}$$

e o condutor de Γ é $\sigma = (m+3, n+3)$.

Vamos então iniciar o Algoritmo 4 com o conjunto $H_0 = dG$. Notemos que

$$\begin{aligned}
(dx \circ \phi)(t) &= (2t_1, nt_2^{n-1}),\\
(dy \circ \phi)(t) &= (mt_1^{m-1}, 2t_2),\\
(df_1 \circ \phi)(t) &= (0, 4t_2^3 - mnt_2^{mn-1}),\\
(df_2 \circ \phi)(t) &= (4t_1^3 - mnt_1^{mn-1}, 0).
\end{aligned}$$

Observemos ainda que S_k-processos mínimos ω de um par de elementos de H_0 sobre G tais que $\nu(\omega) \geq \sigma$ admitem redução final nula módulo (H_0, G).

Calculemos agora os S_k-processos mínimos de pares de elementos de H_0 sobre G.

• *S_1-processos mínimos entre dx e dy: $\omega = c_1 x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} f_2^{\alpha_3} dx + c_2 x^{\beta_1} y^{\beta_2} f_2^{\beta_3} dy$.*

$\omega_1 = mydx - 2xdy = (mt_1^m \cdot 2t_1 - 2t_1^2 \cdot mt_1^{m-1}, mt_2^2 \cdot nt_2^{n-1} - 2t_2^n \cdot 2t_2) = (0, (mn-4)t_2^{n+1})$

$\omega_2 = mx^{m-1}dx - 2ydy = -df_1$

$\omega_3 = mf_2^{(m-1)/2}dx - 2ydy = (m(t_1^4 - t_1^{mn})^{(m-1)/2} \cdot 2t_1 - 2t_1^m \cdot mt_1^{m-1}, -2t_2^2 \cdot 2t_2)$
$\quad = (-m(m-1)t_1^{m(n+2)-5} + ..., -4t_2^3)$

$\omega_4 = my^3dx - 2f_2^{(m+1)/2}dy = (mt_1^{3m} \cdot 2t_1 - 2(t_1^4 - t_1^{mn})^{(m+1)/2} \cdot mt_1^{m-1}, mt_2^6 \cdot nt_2^{n-1})$
$\quad = (m(m+1)t_1^{3m+mn-3} + ..., mnt_2^{n+5})$

$$\omega_5 = mx^{m+1}dx - 2yf_2dy = (mt_1^{2(m+1)} \cdot 2t_1 - 2t_1^m \cdot (t_1^4 - t_1^{mn}) \cdot mt_1^{m-1}, mt_2^{n(m+1)} \cdot nt_2^{n-1})$$
$$= (2mt_1^{mn+2m-1}, mnt_2^{mn+2n-1})$$
$$\omega_6 = myf_2dx - 2x^3dy = (mt_1^m \cdot (t_1^4 - t_1^{mn}) \cdot 2t_1 - 2t_1^6 \cdot mt_1^{m-1}, -2t^{3n} \cdot 2t_2)$$
$$= (-2mt_1^{mn+m+1}, -4t_2^{3n+1}).$$

Nos próximos S_1-processos os expoentes indicados são todos não nulos (quando o S_1-processo de fato existir).

$$\omega_7 = mf_2^{\alpha_3}dx - 2x^{\beta_1}y^{\beta_2}dy = (m(t_1^4 - t_1^{mn})^{\alpha_3} \cdot 2t_1 - 2t_1^{2\beta_1} \cdot t_1^{m\beta_2} \cdot mt_1^{m-1}, -2t_2^{n\beta_1} \cdot t_2^{2\beta_2} \cdot 2t_2)$$
$$= (-2m\alpha_3 t_1^{4(\alpha_3-1)+mn+1} + ..., -4t_2^{n\beta_1+2\beta_2+1})$$
$$\omega_8 = mx^{\alpha_1}y^{\alpha_2}dx - 2f_2^{\beta_3}dy = (mt_1^{2\alpha_1} \cdot t_1^{m\alpha_2} \cdot 2t_1 - 2(t_1^4 - t_1^{mn})^{\beta_3} \cdot mt_1^{m-1}, mt_2^{n\alpha_1} \cdot t_2^{2\alpha_2} \cdot nt_2^{n-1})$$
$$= (2m\beta_3 t_1^{4(\beta_3-1)+mn+m-1} + ..., mnt_2^{n\alpha_1+2\alpha_2+n-1})$$
$$\omega_9 = my^{\alpha_2}dx - 2x^{\beta_1}f_2^{\beta_3}dy = (mt_1^{m\alpha_2} \cdot 2t_1 - 2t_1^{2\beta_1} \cdot (t_1^4 - t_1^{mn})^{\beta_3} \cdot mt_1^{m-1}, mt_2^{2\alpha_2} \cdot nt_2^{n-1})$$
$$= (-2m\beta_3 t_1^{4(\beta_3-1)+mn+2\beta_1+m-1} + ..., mnt_2^{n+2\alpha_2-1})$$
$$\omega_{10} = mx^{\alpha_1}f_2^{\alpha_3}dx - 2y^{\beta_2}dy = (mt_1^{2\alpha_1} \cdot (t_1^4 - t_1^{mn})^{\alpha_3} \cdot 2t_1 - 2t_1^{m\beta_2} \cdot mt_1^{m-1}, -2t_2^{2\beta_2} \cdot 2t_2)$$
$$= (2m\alpha_3 t_1^{4(\alpha_3-1)+mn+2\alpha_1+1} + ..., -4t_2^{2\beta_2+1}).$$

Os S_1-processos $\omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7$ e ω_8 claramente têm redução final nula módulo (H_0, G). Para ω_3 e ω_{10}, temos

$$\omega_3 \to \omega_3' := \omega_3 + df_1 = (-m(m-1)t_1^{m(n+2)-5} + ..., -4t_2^3 + 4t_2^3 - mnt_2^{mn-1})$$
$$= (-m(m-1)t_1^{m(n+2)-5} + ..., -mnt_2^{mn-1})$$

$$\omega_{10} \to \omega_{10}' := \omega_{10} + y^{\beta_2-1}df_1$$
$$= (2m\alpha_3 t_1^{4(\alpha_3-1)+mn+2\alpha_1+1} + ..., -4t_2^{2\beta_2+1} + t_2^{2\beta_2-2}(4t_2^3 - mnt_2^{mn-1}))$$
$$= (2m\alpha_3 t_1^{4(\alpha_3-1)+mn+2\alpha_1+1} + ..., -mnt_2^{2\beta_2+mn-3}).$$

Vemos assim que ω_3' e ω_{10}' admitem redução final nula módulo (H_0, G).

Para ω_9, se $\alpha_2 = 1$, devemos ter obrigatoriamente $\beta_1 = 1$ e $\beta_3 = 0$, o que nos dá ω_1. Logo, $\alpha_2 \geq 2$ e, neste caso, temos $\nu_2(\omega_9) \geq n+3 = \sigma_2$. Portanto, ω_9 admite redução final nula módulo (H_0, G).

Notemos finalmente que ω_1 não admite redução módulo (H_0, G). De fato, se ω_1 admitisse uma redução ω_1', existiriam $c \in \mathbb{K}$ e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}$ tais que ω_1' seria de uma das seguintes formas

A) $\omega_1' := \omega_1 + cx^{\alpha_1}y^{\alpha_2}f_1^{\alpha_3}df_1$,

B) $\omega_1' := \omega_1 + cx^{\alpha_1}y^{\alpha_2}f_1^{\alpha_3+1}dx$,

C) $\omega_1' := \omega_1 + cx^{\alpha_1}y^{\alpha_2}f_1^{\alpha_3+1}dy$.

No caso A, *teríamos $n\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = \nu_2(\omega_1) - \nu_2(df_1) = n + 2 - 4 = n - 2$. No entanto, $n - 2 \notin \Gamma_2$.*

No caso B*, teríamos* $n\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3 = \nu_2(\omega_1)-\nu_2(dx)-v(f_1) = n+2-2-4 = n-4$. *No entanto,* $n-4 \notin \Gamma_2$.

No caso C*, teríamos* $n\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3 = \nu_2(\omega_1)-\nu_2(dy)-v(f_1) = n+2-n-4 = -2$. *No entanto,* $-2 \notin \Gamma_2$.

Logo, não existe redução de ω_1 *módulo* (H_0, G).

• S_1*-processos mínimos entre* dx *e* df_2*:* $\omega = c_1x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}f_2^{\alpha_3}dx + c_2x^{\beta_1}y^{\beta_2}f_2^{\beta_3}df_2$.

$\omega_{11} = 2xdx - df_2 = (2t_1^2 \cdot 2t_1 - (4t_1^3 - mnt_1^{mn-1}), 2t_2^n \cdot nt_2^{n-1}) = (mnt_1^{mn-1}, 2nt_2^{2n-1})$

$\omega_{12} = 2y^2dx - x^{m-1}df_2 = (2t_1^{2m} \cdot 2t_1 - t_1^{2(m-1)} \cdot (4t_1^3 - mnt_1^{mn-1}), 2t_2^4 \cdot nt_2^{n-1})$
$\quad = (mnt_1^{2m+mn-3}, 2nt_2^{n+3})$

$\omega_{13} = 2f_2dx - xdf_2 = (2(t_1^4 - t_1^{mn}) \cdot 2t_1 - t_1^2 \cdot (4t_1^3 - mnt_1^{mn-1}), 0) = ((mn-4)t_1^{mn+1}, 0)$

$\omega_{14} = 2y^2dx - f_2^{(m-1)/2}df_2 = (2t_1^{2m} \cdot 2t_1 - (t_1^4 - t_1^{mn})^{(m-1)/2} \cdot (4t_1^3 - mnt_1^{mn-1}), 2t_2^4 \cdot nt_2^{n-1})$
$\quad = (p(t_1), 2nt_2^{n+3})$*, com* $ord_{t_1}(p(t_1)) > 2m+1$

$\omega_{15} = 2f_2^{(m+1)/2}dx - y^2df_2 = (2(t_1^4 - t_1^{mn})^{(m+1)/2} \cdot 2t_1 - t_1^{2m} \cdot (4t_1^3 - mnt_1^{mn-1}), 0)$
$\quad = ((mn-2m-2)t_1^{2m+mn-1} + ..., 0)$

$\omega_{16} = 2y^2f_2dx - x^{m+1}df_2 = (2t_2^{2m} \cdot (t_1^4 - t_1^{mn}) \cdot 2t_1 - t_1^{2(m+1)} \cdot (4t_1^3 - mnt_1^{mn-1}), 0)$
$\quad = ((mn-4)t_1^{mn+2m+1}, 0)$.

Nos próximos S_1*-processos os expoentes indicados são todos não nulos (quando o* S_1*-processo de fato existir).*

$\omega_{17} = 2y^{\alpha_2}dx - x^{\beta_1}f_2^{\beta_3}df_2 = (2t_1^{m\alpha_2} \cdot 2t_1 - t_1^{2\beta_1} \cdot (t_1^4 - t_1^{mn})^{\beta_3} \cdot (4t_1^3 - mnt_1^{mn-1}), 2t_2^{2\alpha_2} \cdot nt_2^{n-1})$
$\quad = (p(t_1), 2nt_2^{n+2\alpha_2-1})$*, com* $ord_{t_1}(p(t_1)) > mn$

$\omega_{18} = 2x^{\alpha_1}f_2^{\alpha_3}dx - y^{\beta_2}df_2 = (2t_1^{2\alpha_1} \cdot (t_1^4 - t_1^{mn})^{\alpha_3} \cdot 2t_1 - t_1^{m\beta_2} \cdot (4t_1^3 - mnt_1^{mn-1}), 0)$
$\quad = (p(t_1), 0)$*, com* $ord_{t_1}(p(t_1)) > m\beta_2 + 3$

$\omega_{19} = 2f_2^{\alpha_3}dx - x^{\beta_1}y^{\beta_2}df_2 = (2(t_1^4 - t_1^{mn})^{\alpha_3} \cdot 2t_1 - t_1^{2\beta_1} \cdot t_1^{m\beta_2} \cdot (4t_1^3 - mnt_1^{mn-1}), 0)$
$\quad = (p(t_1), 0)$*, com* $ord_{t_1}(p(t_1)) > m\beta_2 + 2\beta_1 + 3$

$\omega_{20} = 2x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}dx - f_2^{\beta_3}df_2 = (2t_1^{2\alpha_1} \cdot t_1^{m\alpha_2} \cdot 2t_1 - (t_1^4 - t_1^{mn})^{\beta_3} \cdot (4t_1^3 - mnt_1^{mn-1}), 2t_2^{n\alpha_1} \cdot t_2^{2\alpha_2} \cdot nt_2^{n-1})$
$\quad = (p(t_1), 2nt_2^{n\alpha_1+n+2\alpha_2-1})$*, com* $ord_{t_1}(p(t_1)) > m\alpha_2 + 2\alpha_1 + 1$.

Exceto por ω_{17}*, todos os* S_1*-processos têm redução final nula óbvia. Para* ω_{17}*, devemos ter* α_2 *obrigatoriamente par (para o* S_1*-processo existir). Logo,* $\alpha_2 \geq 2$ *e, neste caso, temos* $\nu_2(\omega_{17}) \geq n+3 = \sigma_2$*. Portanto,* ω_9 *admite redução final nula módulo* (H_0, G).

• S_1*-processos mínimos entre* dy *e* df_2*:* $\omega = c_1x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}f_2^{\alpha_3}dy + c_2x^{\beta_1}y^{\beta_2}f_2^{\beta_3}df_2$.

$\omega_{21} = 4x^2dy - mydf_2 = (4t_1^4 \cdot mt_1^{m-1} - mt_1^m \cdot (4t_1^3 - mnt_1^{mn-1}), 4t_2^{2n} \cdot 2t_2)$
$\quad = (m^2nt_1^{mn+m-1}, 8t_2^{2n+1})$

$\omega_{22} = 4ydy - mx^{m-2}df_2 = (4t_1^m \cdot mt_1^{m-1} - mt_1^{2(m-2)} \cdot (4t_1^3 - mnt_1^{mn-1}), 4t_2^2 \cdot 2t_2)$
$\quad = (m^2nt_1^{mn+2m-5}, 8t_2^3)$

$$\omega_{23} = 4f_2dy - mydf_2 = (4(t_1^4 - t_1^{mn}) \cdot mt_1^{m-1} - mt_1^m \cdot (4t_1^3 - mnt_1^{mn-1}), 0)$$
$$= ((m^2n - 4m)t_1^{mn+m-1}, 0)$$
$$\omega_{24} = 4y^3dy - mf_2^{m-1}df_2 = (4t_1^{3m} \cdot mt_1^{m-1} - m(t_1^4 - t_1^{mn})^{m-1} \cdot (4t_1^3 - mnt_1^{mn-1}), 4t_2^6 \cdot 2t_2)$$
$$= ((m^2n + 4m^2 - 4m)t_1^{mn+4m-5} + ..., 8t_2^7).$$

Nos próximos S_1-processos os expoentes indicados são todos não nulos (quando o S_1-processo de fato existir).

$$\omega_{25} = 4x^{\alpha_1}dy - my^{\beta_2}f_2^{\beta_3}df_2 = (4t_1^{2\alpha_1} \cdot mt_1^{m-1} - mt_1^{m\beta_2} \cdot (t_1^4 - t_1^{mn})^{\beta_3} \cdot (4t_1^3 - mnt_1^{mn-1}), 4t_2^{n\alpha_1} \cdot 2t_2)$$
$$= (p(t_1), 8t_2^{n\alpha_1+1}),\ com\ ord_{t_1}(p(t_1)) > m\beta_2 + 4\beta_3 + 3$$
$$\omega_{26} = 4y^{\alpha_2}f_2^{\alpha_3}dy - mx^{\beta_1}df_2 = (4t_1^{m\alpha_2} \cdot (t_1^4 - t_1^{mn})^{\alpha_3} \cdot mt_1^{m-1} - mt_1^{2\beta_1} \cdot (4t_1^3 - mnt_1^{mn-1}), 0)$$
$$= (p(t_1), 0),\ com\ ord_{t_1}(p(t_1)) > m\alpha_2 + m + 4\alpha_3 - 1$$
$$\omega_{27} = 4y^{\alpha_2}dy - mx^{\beta_1}f_2^{\beta_3}df_2 = (4t_1^{m\alpha_2} \cdot mt_1^{m-1} - mt_1^{2\beta_1} \cdot (t_1^4 - t_1^{mn})^{\beta_3} \cdot (4t_1^3 - mnt_1^{mn-1}), 4t_2^{2\alpha_2} \cdot 2t_2)$$
$$= (p(t_1), 8t_2^{2\alpha_2+1}),\ com\ ord_{t_1}(p(t_1)) > m\alpha_2 + m - 1$$
$$\omega_{28} = 4x^{\alpha_1}f_2^{\alpha_3}dy - my^{\beta_2}df_2 = (4t_1^{2\alpha_1} \cdot (t_1^4 - t_1^{mn})^{\alpha_3} \cdot mt_1^{m-1} - mt_1^{m\beta_2} \cdot (4t_1^3 - mnt_1^{mn-1}), 0)$$
$$= (p(t_1), 0),\ com\ ord_{t_1}(p(t_1)) > m\beta_2 + 3$$
$$\omega_{29} = 4f_2^{\alpha_3}dy - mx^{\beta_1}y^{\beta_2}df_2 = (4(t_1^4 - t_1^{mn})^{\alpha_3} \cdot mt_1^{m-1} - mt_1^{2\beta_1} \cdot t_1^{m\beta_2} \cdot (4t_1^3 - mnt_1^{mn-1}), 0)$$
$$= (p(t_1), 0),\ com\ ord_{t_1}(p(t_1)) > m + 4\alpha_3 - 1$$
$$\omega_{30} = 4x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}dy - mf_2^{\beta_3}df_2$$
$$= (4t_1^{2\alpha_1} \cdot t_1^{m\alpha_2} \cdot mt_1^{m-1} - m(t_1^4 - t_1^{mn})^{\beta_3} \cdot (4t_1^3 - mnt_1^{mn-1}), 4t_2^{n\alpha_1} \cdot t_2^{2\alpha_2} \cdot 2t_2)$$
$$= (p(t_1), 8t_2^{n\alpha_1+2\alpha_2+1}),\ com\ ord_{t_1}(p(t_1)) > m\alpha_2 + m + 2\alpha_1 - 1.$$

Os S_1-processos $\omega_{21}, \omega_{23}, \omega_{26}, \omega_{28}, \omega_{29}$ e ω_{30} claramente têm redução final nula módulo (H_0, G). Para ω_{22}, ω_{24} e ω_{27}, temos

$$\omega_{22} \to \omega_{22}' := \omega_{22} - 2df_1 = (m^2nt_1^{mn+2m-5}, 8t_2^3 - 2(4t_2^3 - mnt_2^{mn-1}))$$
$$= (m^2nt_1^{mn+2m-5}, 2mnt_2^{mn-1})$$
$$\omega_{24} \to \omega_{24}' := \omega_{24} - 2y^2df_1 = ((m^2n + 4m^2 - 4m)t_1^{mn+4m-5} + ..., 8t_2^7 - 2t_2^4 \cdot (4t_2^3 - mnt_2^{mn-1}))$$
$$= ((m^2n + 4m^2 - 4m)t_1^{mn+4m-5} + ..., 2mnt_2^{mn+3})$$
$$\omega_{27} \to \omega_{27}' := \omega_{27} - 2y^{\alpha_2-1}df_1 = (p(t_1), 8t_2^{2\alpha_2+1} - 2t_2^{2(\alpha_2-1)} \cdot (4t_2^3 - mnt_2^{mn-1}))$$
$$= (p(t_1), 2mnt_2^{mn+2\alpha_2-3}).$$

Vemos assim que ω_{22}', ω_{24}' e ω_{27}' admitem redução final nula módulo (H_0, G).

Para ω_{25}, se $\alpha_1 = 1$, não temos um S_1-processo. Logo, $\alpha_1 \geq 2$ e, neste caso, temos $\nu_2(\omega_{25}) \geq n + 3 = \sigma_2$. Portanto, ω_{25} admite redução final nula módulo (H_0, G).

- *S_2-processos mínimos entre dx e dy: $\omega = c_1x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}f_2^{\alpha_3}dx + c_2x^{\beta_1}y^{\beta_2}f_2^{\beta_3}dy$.*

Estes são análogos aos S_1-processos mínimos entre dx e dy. Logo, o único S_2-processo mínimo sem redução final nula módulo (H_0, G) é o correspondente a ω_1. Para facilitar a *notação, ele será denotado por ω_2. Assim,*

$$\omega_2 = 2ydx - nxdy = ((4-mn)t_1^{m+1}, 0).$$

- *S_2-processos mínimos entre dx e df_1: $\omega = c_1x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}f_2^{\alpha_3}dx + c_2x^{\beta_1}y^{\beta_2}f_2^{\beta_3}df_1$.*

Estes são análogos aos S_1-processos mínimos entre dy e df_2. Logo, todos terão redução final nula módulo (H_0, G).

- *S_2-processos mínimos entre dy e df_1: $\omega = c_1x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}f_2^{\alpha_3}dx + c_2x^{\beta_1}y^{\beta_2}f_2^{\beta_3}df_1$.*

Estes são análogos aos S_1-processos mínimos entre dx e df_2. Logo, todos terão redução final nula módulo (H_0, G).

Temos, portanto, $H_1 = \{dx, dy, df_1, df_2, \omega_1, \omega_2\}$.

Calculemos agora os S_k-processos mínimos de pares de elementos de H_1 sobre G. Notemos que devemos calcular S_k-processos mínimos envolvendo apenas ω_1 ou ω_2.

- *S_1-processos mínimos entre dx e ω_2: $\omega = c_1x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}f_2^{\alpha_3}dx + c_2x^{\beta_1}y^{\beta_2}f_2^{\beta_3}\omega_2$.*

Primeiramente observemos que $\nu_1(\omega) \geq m+3$. Desta maneira, se $\alpha_3 \neq 0$, teremos $\nu(\omega) \geq \sigma$. Portanto, podemos supor que $\alpha_3 = 0$ e, assim, ficamos com os seguintes S_1-processos mínimos.

$$\begin{aligned}
\omega_{31} &= (4-mn)x^m dx - 2y\omega_2 = ((4-mn)t_1^{2m}\cdot 2t_1 - 2t_1^m\cdot(4-mn)t_1^{m+1}, (4-mn)t_2^{mn}\cdot nt_2^{n-1})\\
&= (0, (4n-mn^2)t_2^{mn+n-1})\\
\omega_{32} &= (4-mn)ydx - 2\omega_2 = ((4-mn)t_1^m\cdot 2t_1 - 2(4-mn)t_1^{m+1}, (4-mn)t_2^2\cdot nt_2^{n-1})\\
&= (0, (4n-mn^2)t_2^{n+1}) = -n\omega_1\\
\omega_{33} &= (4-mn)x^{m+2}dx - 2yf_2\omega_2\\
&= ((4-mn)t_1^{2(m+2)}\cdot 2t_1 - 2t_1^m\cdot(t_1^4 - t_1^{mn})\cdot(4-mn)t_1^{m+1}, (4-mn)t_2^{(m+2)n}\cdot nt_2^{n-1})\\
&= ((8-2mn)t_1^{mn+2m+1}, (4n-mn^2)t_2^{(m+2)n+n-1}).
\end{aligned}$$

Todos esses S_1-processos têm redução final nula módulo (H_1, G).

- *S_1-processos mínimos entre dy e ω_2: $\omega = c_1x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}f_2^{\alpha_3}dy + c_2x^{\beta_1}y^{\beta_2}f_2^{\beta_3}\omega_2$.*

Podemos supor também que $\alpha_3 = 0$, ficando com os seguintes S_1-processos mínimos.

$$\begin{aligned}
\omega_{34} &= (4-mn)xdy - m\omega_2 = ((4-mn)t_1^2\cdot mt_1^{m-1} - m(4-mn)t_1^{m+1}, (4-mn)t_2^n\cdot 2t_2)\\
&= (0, 2(4-mn)t_2^{n+1}) = -2\omega_1\\
\omega_{35} &= (4-mn)y^2dy - mx^{m-1}\omega_2\\
&= ((4-mn)t_1^{2m}\cdot mt_1^{m-1} - mt_1^{2(m-1)}\cdot(4-mn)t_1^{m+1}, (4-mn)t_2^4\cdot 2t_2)\\
&= (0, (8-2mn)t_2^5)\\
\omega_{36} &= (4-mn)y^2dy - mf_2^{(m-1)/2}\omega_2\\
&= ((4-mn)t_1^{2m}\cdot mt_1^{m-1} - m(t_1^4 - t_1^{mn})^{(m-1)/2}\cdot(4-mn)t_1^{m+1}, (4-mn)t_2^4\cdot 2t_2)
\end{aligned}$$

$= (\frac{m(m-1)(4-mn)}{2} t_1^{mn+3m-2} + ..., (8-2mn)t_2^5)$.

No próximo S_1-processo os expoentes indicados são todos não nulos (quando o S_1-processo de fato existir).

$$\begin{aligned}
\omega_{37} &= (4-mn)y^{\alpha_2}dy - mx^{\beta_1}f_2^{\beta_3}\omega_2 \\
&= ((4-mn)t_1^{m\alpha_2} \cdot mt_1^{m-1} - mt_1^{2\beta_1} \cdot (t_1^4 - t_1^{mn})^{\beta_3} \cdot (4-mn)t_1^{m+1}, (4-mn)t_2^{2\alpha_2} \cdot 2t_2) \\
&= (p(t_1), (8-2mn)t_2^{2\alpha_2+1}), \text{ com } ord_{t_1}(p(t_1)) > m\alpha_2 + m - 1.
\end{aligned}$$

O S_1-processo ω_{34} têm redução final nula módulo (H_1, G) óbvia. Para os demais S_1-processos, temos

$$\begin{aligned}
\omega_{35} \to \omega_{35}' &:= \omega_{35} - \tfrac{8-2mn}{4} y df_1 = (0, (8-2mn)t_2^5 - \tfrac{8-2mn}{4} t_2^2 \cdot (4t_2^3 - mnt_2^{mn-1})) \\
&= (0, \tfrac{(4-mn)mn}{2} t_2^{mn+1}) \\
\omega_{36} \to \omega_{36}' &:= \omega_{36} - \tfrac{8-2mn}{4} y df_1 \\
&= (\tfrac{m(m-1)(4-mn)}{2} t_1^{mn+3m-2} + ..., (8-2mn)t_2^5 - \tfrac{8-2mn}{4} t_2^2 \cdot (4t_2^3 - mnt_2^{mn-1})) \\
&= (\tfrac{m(m-1)(4-mn)}{2} t_1^{mn+3m-2} + ..., \tfrac{(4-mn)mn}{2} t_2^{mn+1}) \\
\omega_{37} \to \omega_{37}' &:= \omega_{37} - \tfrac{8-2mn}{4} y^{\alpha_2-1} df_1 \\
&= (p(t_1), (8-2mn)t_2^{2\alpha_2+1} - \tfrac{8-2mn}{4} t_2^{2(\alpha_2-1)} \cdot (4t_2^3 - mnt_2^{mn-1})) \\
&= (p(t_1), \tfrac{(4-mn)mn}{2} t_2^{mn+2\alpha_2-3}).
\end{aligned}$$

Vemos assim que $\omega_{35}', \omega_{36}'$ e ω_{37}' admitem redução final nula módulo (H_1, G).

- *S_1-processos mínimos entre df_2 e ω_2: $\omega = c_1x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}f_2^{\alpha_3}df_2 + c_2x^{\beta_1}y^{\beta_2}f_2^{\beta_3}\omega_2$.*

Todos satisfazem $\nu(\omega) \geq \sigma$. Logo, todos terão redução final nula módulo (H_1, G).

- *S_2-processos mínimos entre dx e ω_1: $\omega = c_1x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}f_2^{\alpha_3}dx + c_2x^{\beta_1}y^{\beta_2}f_2^{\beta_3}\omega_1$.*

Estes são análogos aos S_1-processos mínimos entre dy e ω_2. Logo, todos terão redução final nula módulo (H_1, G).

- *S_2-processos mínimos entre dy e ω_1: $\omega = c_1x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}f_2^{\alpha_3}dy + c_2x^{\beta_1}y^{\beta_2}f_2^{\beta_3}\omega_1$.*

Estes são análogos aos S_1-processos mínimos entre dx e ω_2. Logo, todos terão redução final nula módulo (H_1, G).

- *S_2-processos mínimos entre df_1 e ω_1: $\omega = c_1x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}f_2^{\alpha_3}df_1 + c_2x^{\beta_1}y^{\beta_2}f_2^{\beta_3}\omega_1$.*

Todos satisfazem $\nu(\omega) \geq \sigma$. Logo, todos terão redução final nula módulo (H_1, G).

Desta maneira, $H_2 = H_1$. Portanto,

$$H = \{dx, dy, df_1, df_2, \omega_1, \omega_2\}$$

é uma Base Standard para $\frac{\Omega}{T}$.

Mais ainda, devido às ordens dos elementos de H, constatamos que H é uma Base Standard mínima para $\frac{\Omega}{T}$. Consequentemente, o conjunto Λ é minimamente gerado pelo *conjunto*

$$v(H) = \{(2,n), (m,2), (\infty,4), (4,\infty), (\infty, n+2), (m+2, \infty)\}.$$

Embora a complexidade do algoritmo apresentado cresça com o número de ramos, o procedimento pode ser implementado e possibilita inclusive determinar todos os possíveis conjuntos Λ para curvas com um semianel Γ fixo.

Capítulo 3

Aplicações

Os resultados apresentados nos capítulos anteriores permitem utilizações em vários ramos da Matemática. Por exemplo, o estudo de ideais fracionários permite abordagens mais abstratas e aritméticas como as realizadas em [1], [2] e [14] e o cálculo do conjunto de ordens de diferenciais, um importante invariante analítico utilizado em [26] para a classificação analítica de curvas planas reduzidas.

Pol em [30] mostra que o conjunto de valores Λ das diferenciais de Kähler para uma curva plana $Q = \langle f \rangle$ está relacionado com o conjunto de valores do módulo de resíduos logarítmicos e com o conjunto de valores do ideal Jacobiano $J_f = \langle f, f_X, f_Y \rangle$ da curva. Mais especificamente,

$$v(J_f) = \Lambda + \sigma - (1, ..., 1),$$

em que σ é o condutor do semianel de valores Γ associado a Q (veja o Corolário 3.32 de [30]).

Neste capítulo aplicaremos os resultados em duas situações: uma de grande interesse na Teoria de Folheações e a outra para ilustrar como se pode calcular o conjunto de ordens de diferenciais para classes de curvas.

Tais aplicações que demandaram muitos cálculos, nos motivam a implementar os algoritmos apresentados.

3.1 Folheações com Separatrizes Pré-fixadas

Camacho e Sad em [9] provaram um resultado, hoje conhecido como Teorema de Camacho-Sad ou Teorema da Separatriz, que assegura que toda folheação no plano admite uma separatriz analítica. Nesta seção, propomos estudar a questão na outra direção: dada uma curva reduzida, como descrever folheações no plano que admitem tal curva como separatriz?

Como o objetivo desta seção é aplicar os resultados já apresentados, propomos a introdução dos conceitos relacionados à Teoria de Folheações do ponto de vista abstrato, como abordado por Cano, Cerveau e Déserti em algumas seções de [10].

3.1.1 Folheações, Separatrizes e o Submódulo de Torção

Seja $\omega = p(X,Y)dX + q(X,Y)dY$, com $p, q \in \mathbb{C}\{X,Y\}$, uma 1-forma holomorfa em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Denotaremos por $\Omega^1_{\mathbb{C}^2,0}$ o conjunto das 1-formas holomorfas, isto é,

$$\Omega^1_{\mathbb{C}^2,0} := \mathbb{C}\{X,Y\}dX + \mathbb{C}\{X,Y\}dY.$$

Uma *folheação singular holomorfa* $\mathcal{F}$ em uma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ pode ser definida por uma 1-forma

$$\omega = p(X,Y)dX + q(X,Y)dY \in \Omega^1_{\mathbb{C}^2,0},$$

com singularidade isolada na origem, isto é, $p, q \in \mathbb{C}\{X,Y\}$, $p(0,0) = q(0,0) = 0$ e são tais que p e q não têm fatores comuns.

Seja $Q = \langle f \rangle = \langle \prod_{i \in I} f_i \rangle$ uma curva analítica plana reduzida. Dizemos que Q é uma *separatriz* de uma folheação singular holomorfa $\mathcal{F}$ definida por uma 1-forma ω se f divide $\omega \wedge df$, ou seja,

$$\omega \wedge df = gf \ dX \wedge dY,$$

onde $g \in \mathbb{C}\{X,Y\}$ e $\wedge$ é o produto exterior de 1-formas.

Observação 3.1. *É conhecido da Teoria de Folheações que a definição acima é equivalente ao seguinte fato: se $\phi_i(t_i) = (x(t_i), y(t_i))$ é uma parametrização do ramo $P_i = \langle f_i \rangle$, então*

$$\omega(\phi_i(t_i)) := p(x(t_i), y(t_i))x'(t_i) + q(x(t_i), y(t_i))y'(t_i) = 0,$$

para todo $i = 1, ..., r$. O caso irredutível pode ser encontrado em [10] (Lema 3.4). Para o caso em que $f = \prod_{i=1}^r f_i$, basta usar o caso irredutível uma vez que

$$\omega(\phi_i(t_i)) = 0, \ \forall i = 1, ..., r \ \Leftrightarrow \ \omega \wedge df_i = g_i f_i \ dx \wedge dy,$$

segue que

$$\omega \wedge df = \sum_{i=1}^r \left(\prod_{j=1, j \neq i}^r f_j \right) \omega \wedge df_i = \left(\sum_{i=1}^r g_i \right) f \ dx \wedge dy.$$

Denotamos por $\mathcal{F}ol(Q)$ o conjunto de todas as folheações em $(\mathbb{C}^2, 0)$ com singularidade isolada que admitem Q como separatriz. Podemos identificar $\mathcal{F}ol(Q)$ com um subconjunto de $\Omega^1_{\mathbb{C}^2,0}$.

Saito mostrou em [32] que $\Omega^1(\log Q)$, o $\mathbb{C}\{X, Y\}$-módulo de todas as 1-formas meromorfas ω tais que $f\omega$ e $\omega \wedge df$ são holomorfas, é minimamente gerado por dois elementos. Mais ainda, $\Omega^1(\log Q)$ é isomorfo ao $\mathbb{C}\{X, Y\}$-módulo gerado pelo conjunto $\mathcal{F}ol(Q)$, o qual denotaremos por $[\mathcal{F}ol(Q)]$ e, portanto, existem $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{F}ol(Q)$ tais que $[\mathcal{F}ol(Q)] = [\omega_1, \omega_2]$. Esta condição é equivalente a

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = uf \ dX \wedge dY, \tag{3.1}$$

para alguma unidade $u \in \mathbb{C}\{X, Y\}$.

Exemplo 3.2. *Consideremos a curva analítica plana $Q = \langle \prod_{i\in I} f_i \rangle$, onde*

$$f_i = Y^m - c_i X^n,$$

com $\mathrm{MDC}(m, n) = 1 < m < n$ *e $c_i \neq c_j$, se $i \neq j$. Seja agora a folheação singular holomorfa $\mathcal{F}$ definida pela 1-forma*

$$\omega = \frac{1}{m} Y dX - \frac{1}{n} X dY \in \Omega^1_{\mathbb{C}^2,0}.$$

Para todo $i \in I$, temos

$$\begin{aligned}
\omega \wedge df_i &= \left(\frac{1}{m} Y dX - \frac{1}{n} X dY\right) \wedge (-nc_i X^{n-1} dX + mY^{m-1} dY) \\
&= (Y^m - c_i X^n) \ dX \wedge dY \\
&= f_i \ dX \wedge dY.
\end{aligned}$$

Desta maneira,

$$\begin{aligned}
\omega \wedge df &= \omega \wedge \sum_{i=1}^{r} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{r} f_j \right) df_i = \sum_{i=1}^{r} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{r} f_j \right) (\omega \wedge df_i) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{r} f_j \right) f_i \ dX \wedge dY = \sum_{i=1}^{r} f \ dX \wedge dY \\
&= rf \ dX \wedge dY,
\end{aligned}$$

o que mostra que Q é uma separatriz de $\mathcal{F}$. Mais ainda, concluímos que ω e df são geradores mínimos de $[\mathcal{F}ol(Q)]$.

Exemplo 3.3. *Consideremos a curva analítica plana*

$$Q = \langle Y(X^3 - 3XY^5 - Y^7 - Y^8) \rangle.$$

Consideremos também as 1*-formas*

$$\omega_1 = 3Y(Y^3 + Y^2 + 2X)dX - (15X^2 + 7XY^2 + 8XY^3)dY,$$
$$\omega_2 = -3Y(X + Y^3)dX + (7X^2 + 8XY^3 + Y^5)dY.$$

Notemos inicialmente que $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{F}ol(Q)$*. De fato, como* Q *admite a parametrização*

$$\phi(\underline{t}) = [(t_1, 0), (t_2^7 + t_2^8, t_2^3)],$$

temos:

$$\begin{aligned}
\omega_1(t_1) &= 0\\
\omega_1(t_2) &= 3t_2^3(t_2^9 + t_2^6 + 2(t_2^7 + t_2^8))(7t_2^6 + 8t_2^7) - (15(t_2^7 + t_2^8)^2 + 7(t_2^7 + t_2^8)t_2^6 + 8(t_2^7 + t_2^8)t_2^9)3t_2^2\\
&= 0\\
\omega_2(t_1) &= 0\\
\omega_2(t_2) &= -3t_2^3((t_2^7 + t_2^8) + t_2^9)(7t_2^6 + 8t_2^7) + (7(t_2^7 + t_2^8)^2 + 8(t_2^7 + t_2^8)t_2^9 + t_2^{15})3t_2^2 = 0.
\end{aligned}$$

Observemos também que

$$\begin{aligned}
\omega_1 \wedge \omega_2 &= 3Y[(Y^3 + Y^2 + 2X)(7X^2 + 8XY^3 + Y^5) - (15X^2 + 7XY^2 + 8XY^3)(X + Y^3)]\, dX \wedge dY\\
&= -3Y(X^3 - 3XY^5 - Y^7 - Y^8)\, dX \wedge dY\\
&= -3f\, dX \wedge dY.
\end{aligned}$$

Portanto, ω_1 *e* ω_2 *são geradores mínimos de* $[\mathcal{F}ol(Q)]$*.*

Os exemplos acima instigam a curiosidade e nos levam a indagar como obter as 1-formas ω_1 e ω_2 que admitem uma curva $Q = \langle f \rangle$ como separatriz.

Dada uma curva $Q = \langle f \rangle$, consideremos o seguinte submódulo de $[\mathcal{F}ol(Q)]$:

$$\mathcal{F}(Q) = \{hdf + f\eta;\ h \in \mathbb{C}\{X, Y\} \text{ e } \eta \in \Omega^1_{\mathbb{C}^2,0}\}.$$

Notemos que o módulo de diferenciais de Kähler Ω da curva Q pode também ser definido do seguinte modo

$$\Omega = \frac{\Omega^1_{\mathbb{C}^2,0}}{\mathcal{F}(Q)}.$$

Escrevemos $\overline{\omega}$ para representar a imagem de uma 1-forma $\omega \in \Omega^1_{\mathbb{C}^2,0}$ em Ω.

O submódulo de torção $\mathcal{T}$ de Ω é então

$$\mathcal{T} = \frac{[\mathcal{F}ol(Q)]}{\mathcal{F}(Q)}.$$

Logo, todo elemento de $[\mathcal{F}ol(Q)]$ pode ser expresso como uma soma de elementos de $\mathcal{T}$ e de $\mathcal{F}(Q)$.

Pinkham mostrou em [29] que o comprimento $l(\mathcal{T})$ do submódulo de torção $\mathcal{T}$ de Ω está relacionado com o ideal Jacobiano $J_f = \langle f, f_X, f_Y \rangle \subset \mathbb{C}\{X,Y\}$ de $Q = \langle f \rangle$. Mais precisamente,

$$l(\mathcal{T}) = \tau = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{X,Y\}}{J_f} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}}{\mathcal{O}\langle f_x, f_y \rangle}.$$

Em [17], encontramos uma outra relação entre o número de Tjurina de uma curva plana $Q = \langle f \rangle$ e o submódulo de torção. Mais especificamente, se $\mathcal{T} = [\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2]$ e

$$\omega_i \wedge df = g_i f \ dx \wedge dy,$$

então temos

$$\mu - \tau = I(g_1, g_2) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{X,Y\}}{\langle g_1, g_2 \rangle}$$

em que μ é o número de Milnor de Q, que satisfaz

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{X,Y\}}{\langle f_X, f_Y \rangle} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i + 2 \sum_{1 \le i < j \le r} I(f_i, f_j) - r + 1$$

e μ_i denota o número de Milnor do ramo $\langle f_i \rangle$, isto é,

$$\mu_i = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{X,Y\}}{\langle (f_i)_X, (f_i)_Y \rangle}$$

que coincide com o condutor do semianel associado a $\langle f_i \rangle$.

Saito em [31] mostrou que Q é analiticamente equivalente a uma curva plana $\langle f \rangle$, onde f é um polinômio quasehomogêneo, se, e somente se, $\mu = \tau$, ou, equivalentemente, $f \in \langle f_X, f_Y \rangle$. Dessa maneira, podemos supor que

$$f = q \cdot f_X + p \cdot f_Y, \text{ com } p, q \in \mathbb{C}\{X,Y\}.$$

Isto equivale a afirmar que

$$(pdX - qdY) \wedge df = f \ dX \wedge dY,$$

isto é, $\{pdX - qdY, df\}$ gera $[\mathcal{F}ol(Q)]$ como $\mathbb{C}\{X,Y\}$-módulo e $\{pdx - qdy\}$ gera $\mathcal{T}$ como $\mathcal{O}$-módulo.

Por outro lado, se $\mathcal{T}$ é cíclico e $[\mathcal{F}ol(Q)] = [\omega_1, \omega_2]$, então podemos assumir que $\overline{\omega}_2 \in [\overline{\omega}_1] = \mathcal{T}$, ou seja, existem $g, h \in \mathbb{C}\{X,Y\}$ e $\eta \in \Omega^1_{\mathbb{C}^2,0}$ tais que

$$\omega_2 = g\omega_1 + hdf + f\eta.$$

Sabemos de (3.1) que $\omega_1 \wedge \omega_2 = uf\ dx \wedge dy$ e como $Q = \langle f \rangle$ é uma separatriz da folheação definida por ω_1, temos $\omega_1 \wedge df = g_1 f\ dx \wedge dy$. Assim,

$$uf\ dx \wedge dy = \omega_1 \wedge \omega_2 = h\omega_1 \wedge df + f\omega_1 \wedge \eta.$$

Se $\eta = adx + bdy$ e $\omega_1 = a_1dx + b_1dy$, com $a_1, b_1 \in \langle x, y \rangle$, então $\omega_1 \wedge \eta = (a_1b - b_1a)\ dx \wedge dy$ e

$$(u - a_1b + b_1a)f\ dx \wedge dy = hg_1 f\ dx \wedge dy,$$

ou seja, $u - a_1b + b_1a = hg_1$.

Deste modo, h e g_1 são unidades, isto é, ω_1 e df geram $[\mathcal{F}ol(Q)]$.

Tendo em vista os resultados acima, o submódulo de torção $\mathcal{T}$ do módulo de diferenciais Ω da curva analítica

$$Q = \left\langle \prod_{i \in I} (Y^m - c_i X^n) \right\rangle$$

do Exemplo 3.2 é cíclico. Mais precisamente,

$$\mathcal{T} = \left[\frac{1}{m} ydx - \frac{1}{n} xdy \right].$$

O submódulo de torção $\mathcal{T}$ do módulo de diferenciais Ω da curva analítica

$$Q = \langle Y(X^3 - 3XY^5 - Y^7 - Y^8) \rangle$$

do Exemplo 3.3 é dado por $\mathcal{T} = [\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2]$, onde

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}_1 &= 3y(y^3 + y^2 + 2x)dx - (15x^2 + 7xy^2 + 8xy^3)dy, \\
\overline{\omega}_2 &= -3y(x + y^3)dx + (7x^2 + 8xy^3 + y^5)dy.
\end{aligned}$$

Definiremos a seguir multiplicidade de uma 1-forma holomorfa e multiplicidade de um submódulo de $\Omega^1_{\mathbb{C}^2,0}$.

Definição 3.4. *Seja $\omega = pdX + qdY \in \Omega^1_{\mathbb{C}^2,0}$. Definimos a multiplicidade de ω por*

$$\text{mult}(\omega) := \min\{\text{mult}(p), \text{mult}(q)\}.$$

A multiplicidade de um submódulo Σ de $\Omega^1_{\mathbb{C}^2,0}$ é definida por

$$\text{mult}(\Sigma) := \min\{\text{mult}(\omega);\ \omega \in \Sigma\}.$$

A multiplicidade de uma 1-forma holomorfa satisfaz as seguintes propriedades:

A) $\text{mult}(g\omega) = \text{mult}(g) + \text{mult}(\omega)$, para todo $g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ e para todo $\omega \in \Omega^1_{\mathbb{C}^2,0}$;

B) $\text{mult}(\omega_1 + \omega_2) \geq \min\{\text{mult}(\omega_1), \text{mult}(\omega_2)\}$, para quaisquer $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1_{\mathbb{C}^2,0}$.

Em particular, da condição (3.1) dada por Saito, segue que se $[\mathcal{F}ol(Q)] = [\omega_1, \omega_2]$, então $0 < \text{mult}(\omega_i) < \text{mult}(f)$, em que $Q = \langle f \rangle$.

O seguinte lema nos mostra que é sempre possível extrair dois elementos ω_j e ω_k de $[\mathcal{F}ol(Q)]$ de um conjunto qualquer de geradores $\{\omega_1, ..., \omega_s\}$ de $[\mathcal{F}ol(Q)]$ satisfazendo (3.1), isto é, $[\mathcal{F}ol(Q)] = [\omega_j, \omega_k]$.

Lema 3.5. *Seja $\mathcal{N} = \{\omega_1, ..., \omega_s\}$ um conjunto de geradores de $[\mathcal{F}ol(Q)]$. Então existem $\omega_j, \omega_k \in \mathcal{N}$ tais que $[\mathcal{F}ol(Q)] = [\omega_j, \omega_k]$.*

Prova. Sejam $\mathcal{N} = \{\omega_1, ..., \omega_s\}$ um conjunto de geradores de $[\mathcal{F}ol(Q)]$ e $\eta_1, \eta_2 \in \Omega^1_{\mathbb{C}^2,0}$ tais que $[\mathcal{F}ol(Q)] = [\eta_1, \eta_2]$. Logo,

$$\eta_1 \wedge \eta_2 = uf \ dX \wedge dY,$$

onde u é uma unidade de $\mathbb{C}\{X, Y\}$. Uma vez que $\text{mult}([\mathcal{F}ol(Q)]) = \text{mult}(\omega)$, para algum $\omega = p_1\eta_1 + p_2\eta_2 \in [\mathcal{F}ol(Q)]$, temos

$$\text{mult}([\mathcal{F}ol(Q)]) = \text{mult}(p_1\eta_1 + p_2\eta_2) \geq \min\{\text{mult}(p_i) + \text{mult}(\eta_i);\ i = 1, 2\} \geq \text{mult}(\eta_i).$$

Logo, $\text{mult}([\mathcal{F}ol(Q)]) = \text{mult}(\eta_i)$, para $i = 1$ ou $i = 2$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\text{mult}([\mathcal{F}ol(Q)]) = \text{mult}(\eta_1)$.

Por outro lado, escrevendo $\omega = \sum_{i=1}^{s} q_i\omega_i$, teremos

$$\text{mult}([\mathcal{F}ol(Q)]) = \text{mult}(\omega) \geq \min\{\text{mult}(q_i) + \text{mult}(\omega_i);\ i = 1, ..., s\} \geq \text{mult}(\omega_i).$$

Deste modo, $\text{mult}([\mathcal{F}ol(Q)]) = \text{mult}(\omega_j)$, para algum $j = 1, ..., s$. Agora, visto que $\omega_j = g_1\eta_1 + g_2\eta_2$, temos

$$\text{mult}(\omega_j) = \text{mult}([\mathcal{F}ol(Q)]) = \text{mult}(\eta_1),$$

isto é, g_1 é uma unidade de $\mathbb{C}\{X, Y\}$ e $\text{mult}(g_2\eta_2) \geq \text{mult}(g_1\eta_1) = \text{mult}(\eta_1)$.

Notemos também que $\eta_1 = g_1^{-1}\omega_j - g_1^{-1}g_2\eta_2$, ou seja,

$$[\mathcal{F}ol(Q)] = [\eta_1, \eta_2] \subset [\omega_j, \eta_2] \subset [\mathcal{F}ol(Q)].$$

Consequentemente, $[\mathcal{F}ol(Q)] = [\omega_j, \eta_2]$, o que nos diz que

$$\omega_j \wedge \eta_2 = g_1\eta_1 \wedge \eta_2 = g_1uf \ dX \wedge dY.$$

Mas, como $\eta_2 \in [\omega_1, ..., \omega_s]$, temos $\eta_2 = \sum_{i=1}^{s} h_i\omega_i$ e, assim,

$$g_1uf\ dX \wedge dY = \omega_j \wedge \eta_2 = \omega_j \wedge \sum_{i=1}^{s} h_i\omega_i.$$

Notemos que $\omega_j \wedge \omega_i = h_{j,i}uf\ dX \wedge dY$, com $h_{j,i} \in \mathbb{C}\{X, Y\}$, para todo $i \neq j$. De fato, se

$$\omega_j = g_1\eta_1 + g_2\eta_2 \ \text{ e } \ \omega_i = g_{i,1}\eta_1 + g_{i,2}\eta_2, \ \text{para } i \neq j,$$

então

$$\omega_j \wedge \omega_i = (g_1g_{i,2} - g_2g_{i,1})\ \eta_1 \wedge \eta_2 = (g_1g_{i,2} - g_2g_{i,1})uf\ dX \wedge dY$$

e a afirmação segue considerando $h_{j,i} = g_1g_{i,2} - g_2g_{i,1}$.

Assim, temos

$$g_1uf\ dX \wedge dY = \omega_j \wedge \sum_{i=1}^{s} h_i\omega_i = \sum_{i=1}^{s} h_i\ (\omega_j \wedge \omega_i) = \left(\sum_{i=1}^{s} h_ih_{j,i}\right) uf\ dX \wedge dY.$$

Logo, $g_1 = \sum_{i=1}^{s} h_ih_{j,i}$. Desta maneira, existem unidades h_k e $h_{j,k}$, para algum $k \neq j$. Temos então

$$\omega_j \wedge \omega_k = h_{j,k}uf\ dX \wedge dY,$$

ou seja, $[\mathcal{F}ol(Q)] = [\omega_j, \omega_k]$. ∎

Observação 3.6. *Pelo Lema 3.5, notamos que a escolha de ω_j é feita dentre os geradores $\omega_1, ..., \omega_s$ de $[\mathcal{F}ol(Q)]$ com menor multiplicidade e a determinação de ω_k pode ser feita calculando $\omega_j \wedge \omega_i$, para todo $i \neq j$.*

3.1.2 Algoritmo e Exemplos

Sejam agora G uma Base Standard para $\mathcal{O}$ e $H = \{\overline{\omega}_1, ..., \overline{\omega}_s\}$ uma Base Standard para $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$. Logo, todo S_k-processo mínimo não nulo $s_k(\overline{\omega}_{j_1}, \overline{\omega}_{j_2})$ do par de elementos $\overline{\omega}_{j_1}, \overline{\omega}_{j_2}$ de H sobre G tem redução final nula módulo (H, G), isto é,

$$s_k(\overline{\omega}_{j_1}, \overline{\omega}_{j_2}) = aG^{\alpha}\overline{\omega}_{j_1} + bG^{\beta}\overline{\omega}_{j_2} = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{\delta_i} a_{\delta_i}G^{\delta_i}\right) \overline{\omega}_i. \tag{3.2}$$

É claro que devemos ter $k \in I_{\overline{\omega}_{j_1}} \cap I_{\overline{\omega}_{j_2}}$ para de fato existir o S_k-processo acima. Além disso, definimos

$$n(j_1, j_2, k) = \sharp\{s_k(\overline{\omega}_{j_1}, \overline{\omega}_{j_2});\ 1 \leq j_1 < j_2 \leq s,\ k \in I_{\overline{\omega}_{j_1}} \cap I_{\overline{\omega}_{j_2}}\}.$$

Consideremos agora $\omega_1, ..., \omega_s \in \Omega$ tais que $\overline{\omega}_l = \omega_l + \mathcal{T}$, para todo $l = 1, ..., s$. Observemos que o conjunto

$$B_1 := \left\{ \eta_i := \left(\prod_{j \in I_{\overline{\omega}_i}} f_j \right) \omega_i;\ 1 \leq i \leq s \text{ e } I_{\overline{\omega}_i} \neq I \right\}$$

está contido em $\mathcal{T}$. De fato, seja $\phi_k(t_k)$ uma parametrização de $\langle f_k \rangle$. Se $k \notin I_{\overline{\omega}_i}$, temos $(\omega_i)_k(\phi_k(t_k)) = 0$. Por outro lado, se $k \in I_{\overline{\omega}_i}$, temos $\left(\prod_{j \in I_{\overline{\omega}_i}} f_j\right)(\phi_k(t_k)) = 0$. Assim, $\eta_i(\phi(t_1, ..., t_r)) = 0$ e, pela Observação 3.1, segue que $\eta_i \in \mathcal{T}$.

Definimos também

$$\omega_{j_1,j_2,k,l} = aG^{\alpha}\omega_{j_1} + bG^{\beta}\omega_{j_2} - \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{\delta_i} a_{\delta_l} G^{\delta_i} \right) \omega_i, \tag{3.3}$$

para $1 \leq j_1 < j_2 \leq s$, $k \in I_{\overline{\omega}_{j_1}} \cap I_{\overline{\omega}_{j_2}}$ e $1 \leq l \leq n(j_1, j_2, k)$.

Notemos que $\omega_{j_1,j_2,k,l} \in \mathcal{T}$ e que o conjunto

$$B_2 := \{\omega_{j_1,j_2,k,l};\ 1 \leq j_1 < j_2 \leq s,\ k \in I_{\overline{\omega}_{j_1}} \cap I_{\overline{\omega}_{j_2}} \text{ e } 1 \leq l \leq n(j_1, j_2, k)\}$$

é finito.

Conjectura 3.7. *O conjunto $B = B_1 \cup B_2$ gera o submódulo de torção $\mathcal{T}$ de Ω.*

Notemos que se a conjectura anterior for verdadeira, como $\mathcal{T} = \frac{[\mathcal{F}ol(Q)]}{\mathcal{F}(Q)}$, podemos usar o Lema 3.5 e obter geradores para $[\mathcal{F}ol(Q)]$.

A seguir provaremos a Conjectura 3.7 para o caso de uma curva analítica com dois ramos.

Proposição 3.8. *Seja Q uma curva analítica plana com dois ramos. Então o conjunto $B = B_1 \cup B_2$ gera o submódulo de torção $\mathcal{T}$ do módulo de diferenciais Ω de Q.*

Prova. Seja $\omega \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$. Como $H = \{\overline{\omega}_1, ..., \overline{\omega}_s\}$ é uma Base Standard para $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$, o conjunto $\{\omega_1, ..., \omega_s\}$ gera Ω. Assim, existem $g_1, ..., g_s \in \mathcal{O}$ (não todos nulos) tais que $\omega = \sum_{i=1}^{s} g_i \omega_i$.

Obtemos então a seguinte relação em $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$

$$\sum_{i=1}^{s} g_i \overline{\omega}_i = 0.$$

Notemos que se

$$\text{ht}\left(\sum_{i=1}^{s} g_i \overline{\omega}_i \right) = \underline{\infty},$$

então $\nu(g_i\overline{\omega}_i) = \underline{\infty}$ para todo $i = 1, ..., s$, ou seja, $g_i\omega_i \in \mathcal{T}$ para todo $i = 1, ..., s$.

Suponhamos que $g_i \neq 0$ para algum i. Neste caso temos $I_{\overline{\omega}_i} \neq I$. Com efeito, se $I_{\overline{\omega}_i} = I$, teríamos $\nu_j(\overline{\omega}_i) < \infty$, para todo $j \in I$ e, como $g_i \neq 0$, $v_k(g_i) < \infty$ para algum $k \in I$. Logo, $\nu_k(g_i\overline{\omega}_i) < \infty$, o que seria uma contradição.

Observemos agora que se $j \in I_{\overline{\omega}_i}$ e $\nu_j(g_i\overline{\omega}_i) = \infty$, então $v_j(g_i) = \infty$, isto é, f_j divide g_i. Desta maneira, devemos ter $g_i = h_i \prod_{j\in I_{\overline{\omega}_i}} f_j$, com $h_i \in \mathcal{O}$. Portanto, se $g_i\omega_i \in \mathcal{T}$, para todo $i = 1, ..., s$ com $g_i \neq 0$, temos

$$g_i\omega_i = h_i \left(\prod_{j\in I_{\overline{\omega}_i}} f_j \right) \omega_i = h_i\eta_i,$$

o que mostra que ω pertence ao $\mathcal{O}$-módulo gerado por B (mais precisamente, por B_1).

Agora, uma vez que G é uma Base Standard para $\mathcal{O}$, podemos escrever $g_i = \sum_{\gamma_i} a_{\gamma_i} G^{\gamma_i}$. Consequentemente, temos a seguinte representação de $0 \in \frac{\Omega}{\mathcal{T}}$

$$\sum_{i=1}^{s} g_i\overline{\omega}_i = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{\gamma_i} a_{\gamma_i} G^{\gamma_i} \right) \overline{\omega}_i = 0,$$

ou seja, $(g_1, ..., g_s)$ é sygyzy para $(\overline{\omega}_1, ..., \overline{\omega}_s)$.

Suponhamos agora que

$$\mathrm{ht} \left(\sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{\gamma_i} a_{\gamma_i} G^{\gamma_i} \right) \overline{\omega}_i \right) \neq \underline{\infty}.$$

Logo, existem j_1 e j_2, com $1 \leq j_1 < j_2 \leq s$, e α', $\beta' \in \mathbb{N}^{\sharp G}$ tais que

$$\nu_k(G^{\alpha'}\overline{\omega}_{j_1}) = \nu_k(G^{\beta'}\overline{\omega}_{j_2}) = \mathrm{ht}_k \left(\sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{\gamma_i} a_{\gamma_i} G^{\gamma_i} \right) \overline{\omega}_i \right) < \infty,$$

para algum $k \in I_{\overline{\omega}_{j_1}} \cap I_{\overline{\omega}_{j_2}}$. Em particular, existe $b' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que

$$\varpi = a_{\alpha'} G^{\alpha'} \overline{\omega}_{j_1} + b' a_{\beta'} G^{\beta'} \overline{\omega}_{j_2}$$

seja um S_k-processo do par de elementos $\overline{\omega}_{j_1}$ e $\overline{\omega}_{j_2}$ de H sobre G.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $j_1 = 1$ e $j_2 = 2$. Assim, temos

$$\varpi + \sum_{\gamma_1 \neq \alpha'} a_{\gamma_1} G^{\gamma_1} \overline{\omega}_1 + (1 - b') a_{\beta'} G^{\beta'} \overline{\omega}_2 + \sum_{\gamma_2 \neq \beta'} a_{\gamma_2} G^{\gamma_2} \overline{\omega}_2 + \sum_{i=3}^{s} \left(\sum_{\gamma_i} a_{\gamma_i} G^{\gamma_i} \right) \overline{\omega}_i = 0 \quad (3.4)$$

O S_k-processo ϖ acima pode também ser escrito da seguinte forma

$$\varpi = a_{\alpha'} \left(\prod_{n=1}^{d} (G^{\alpha_n})^m \right) G^{\alpha} \overline{\omega}_1 + b' a_{\beta'} \left(\prod_{n=1}^{d} (G^{\beta_n})^m \right) G^{\beta} \overline{\omega}_2,$$

onde $m \in \mathbb{N}$, (α, β) é uma solução mínima da equação diofantina associada ao S_k-processo entre $\overline{\omega}_1$ e $\overline{\omega}_2$ e (α_n, β_n) é uma das soluções mínimas da equação diofantina homogênea correspondente.

Definindo $G^\theta := \prod_{n=1}^d (G^{\alpha_n})^m$, temos

$$\varpi = a_{\alpha'} G^\theta G^\alpha \overline{\omega}_1 + b' a_{\beta'} \left(\prod_{n=1}^d (G^{\beta_n})^m \right) G^\beta \overline{\omega}_2 + b'' a_{\beta'} G^\theta G^\beta \overline{\omega}_2 - b'' a_{\beta'} G^\theta G^\beta \overline{\omega}_2,$$

onde $b'' \in \mathbb{C}$ é tal que

$$a_{\alpha'} G^\theta G^\alpha \overline{\omega}_1 + b'' a_{\beta'} G^\theta G^\beta \overline{\omega}_2 = G^\theta (a_{\alpha'} G^\alpha \overline{\omega}_1 + b'' a_{\beta'} G^\beta \overline{\omega}_2)$$

seja um S_k-processo entre $\overline{\omega}_1$ e $\overline{\omega}_2$.

Notemos agora que $a_{\alpha'} G^\alpha \overline{\omega}_1 + b'' a_{\beta'} G^\beta \overline{\omega}_2$ é um S_k-processo mínimo entre $\overline{\omega}_1$ e $\overline{\omega}_2$. Assim, existe $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$a_{\alpha'} G^\alpha \overline{\omega}_1 + b'' a_{\beta'} G^\beta \overline{\omega}_2 = c \cdot s_k(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2).$$

Desse modo, por (3.2) e (3.3), temos

$$\begin{aligned} \varpi = {} & cG^\theta \left(s_k(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2) - \sum_{i=1}^s \left(\sum_{\delta_i} a_{\delta_i} G^{\delta_i} \right) \overline{\omega}_i \right) + cG^\theta \sum_{i=1}^s \left(\sum_{\delta_i} a_{\delta_i} G^{\delta_i} \right) \overline{\omega}_i \\ & + a_{\beta'} (b' G^{\beta'} - b'' G^\theta G^\beta) \overline{\omega}_2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

A partir de (3.4) e (3.5), obtemos

$$cG^\theta \left(s_k(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2) - \sum_{i=1}^s \left(\sum_{\delta_i} a_{\delta_i} G^{\delta_i} \right) \overline{\omega}_i \right) + \sum_{i=1}^s \left(\sum_{\epsilon_i} a_{\epsilon_i} G^{\epsilon_i} \right) \overline{\omega}_i = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \left(\sum_{\epsilon_i} a_{\epsilon_i} G^{\epsilon_i} \right) \overline{\omega}_i &= cG^\theta \sum_{i=1}^s \left(\sum_{\delta_i} a_{\delta_i} G^{\delta_i} \right) \overline{\omega}_i + a_{\beta'} (b' G^{\beta'} - b'' G^\theta G^\beta) \overline{\omega}_2 + \sum_{\gamma_1 \neq \alpha'} a_{\gamma_1} G^{\gamma_1} \overline{\omega}_1 \\ & \quad + (1 - b') a_{\beta'} G^{\beta'} \overline{\omega}_2 + \sum_{\gamma_2 \neq \beta'} a_{\gamma_2} G^{\gamma_2} \overline{\omega}_2 + \sum_{i=3}^s \left(\sum_{\gamma_i} a_{\gamma_i} G^{\gamma_i} \right) \overline{\omega}_i \\ &= cG^\theta \sum_{i=1}^s \left(\sum_{\delta_i} a_{\delta_i} G^{\delta_i} \right) \overline{\omega}_i + a_{\beta'} (G^{\beta'} - b'' G^\theta G^\beta) \overline{\omega}_2 \\ & \quad + \sum_{\gamma_1 \neq \alpha'} a_{\gamma_1} G^{\gamma_1} \overline{\omega}_1 + \sum_{\gamma_2 \neq \beta'} a_{\gamma_2} G^{\gamma_2} \overline{\omega}_2 + \sum_{i=3}^s \left(\sum_{\gamma_i} a_{\gamma_i} G^{\gamma_i} \right) \overline{\omega}_i. \end{aligned}$$

Vamos agora desenvolver a expressão acima. Como a curva tem apenas dois ramos, sem perda de generalidade podemos supor que

$$v\left(\prod_{n=1}^{d}(G^{\beta_n})^m\right) \le v\left(\prod_{n=1}^{d}(G^{\alpha_n})^m\right).$$

Observando que $h = a_{\beta'}(G^{\beta'} - b''G^{\theta}G^{\beta}) \in \mathcal{O}$ e que G é uma Base Standard para $\mathcal{O}$, podemos escrever

$$h = \sum_{\xi} a_\xi G^\xi.$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\epsilon_i} a_{\epsilon_i}G^{\epsilon_i}\right)\overline{\omega}_i &= cG^\theta\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\delta_i} a_{\delta_i}G^{\delta_i}\right)\overline{\omega}_i + \sum_{\xi} a_\xi G^\xi\overline{\omega}_2\\ &+ \sum_{\gamma_1\neq\alpha'} a_{\gamma_1}G^{\gamma_1}\overline{\omega}_1 + \sum_{\gamma_2\neq\beta'} a_{\gamma_2}G^{\gamma_2}\overline{\omega}_2 + \sum_{i=3}^{s}\left(\sum_{\gamma_i} a_{\gamma_i}G^{\gamma_i}\right)\overline{\omega}_i.\end{aligned}$$

Notemos que

$$\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\epsilon_i} a_{\epsilon_i}G^{\epsilon_i}\right)\overline{\omega}_i = 0 \in \frac{\Omega}{\mathcal{T}}$$

e essa representação de 0 satisfaz

$$\mathrm{ht}\left(\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\gamma_i} a_{\gamma_i}G^{\gamma_i}\right)\overline{\omega}_i\right) \le \mathrm{ht}\left(\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\epsilon_i} a_{\epsilon_i}G^{\epsilon_i}\right)\overline{\omega}_i\right).$$

De fato, por (3.3)

$$\begin{aligned}\mathrm{ht}_j\left(G^\theta\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\delta_i} a_{\delta_i}G^{\delta_i}\right)\overline{\omega}_i\right) &\ge \min\{\nu_j(G^\theta G^\alpha\overline{\omega}_1), \nu_j(G^\theta G^\beta\overline{\omega}_2)\}\\ &= \min\{\nu_j(G^{\alpha'}\overline{\omega}_1), \nu_j(G^\theta G^\beta\overline{\omega}_2)\}\\ &\ge \min\{\nu_j(G^{\alpha'}\overline{\omega}_1), \nu_j(G^{\beta'}\overline{\omega}_2)\}\\ &\ge \mathrm{ht}_j\left(\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\gamma_i} a_{\gamma_i}G^{\gamma_i}\right)\overline{\omega}_i\right).\end{aligned}$$

E também

$$\mathrm{ht}_j\left(\sum_{\xi} a_\xi G^\xi\overline{\omega}_2\right) = \nu_j(h\overline{\omega}_2) \ge \nu_j(G^{\beta'}\overline{\omega}_2) \ge \mathrm{ht}_j\left(\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\gamma_i} a_{\gamma_i}G^{\gamma_i}\right)\overline{\omega}_i\right).$$

As outras somas não precisam ser verificadas, pois elas já aparecem na representação $\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\gamma_i} a_{\gamma_i}G^{\gamma_i}\right)\overline{\omega}_i$.

Observemos ainda que se

$$\mathrm{ht}_k\left(\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\gamma_i} a_{\gamma_i}G^{\gamma_i}\right)\overline{\omega}_i\right) = \mathrm{ht}_k\left(\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\epsilon_i} a_{\epsilon_i}G^{\epsilon_i}\right)\overline{\omega}_i\right),$$

então podemos ter

$$\mathrm{ht}_k\left(\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\epsilon_i} a_{\epsilon_i}G^{\epsilon_i}\right)\overline{\omega}_i\right) = \nu_k(G^{\xi'}\overline{\omega}_2),$$

para um único ξ' ou

$$\mathrm{ht}_k\left(\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\epsilon_i} a_{\epsilon_i}G^{\epsilon_i}\right)\overline{\omega}_i\right) = \nu_k(G^{\gamma_i}\overline{\omega}_i),$$

para algum γ_i, com $i = 1, ..., s$ e $\gamma_i \neq \alpha', \beta'$.

Assim, no máximo pode ocorrer

$$\mathrm{Amp}_k\left(\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\epsilon_i} a_{\epsilon_i}G^{\epsilon_i}\right)\overline{\omega}_i\right) = \mathrm{Amp}_k\left(\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\gamma_i} a_{\gamma_i}G^{\gamma_i}\right)\overline{\omega}_i\right) - 1.$$

Para concluir que o conjunto B gera $\mathcal{T}$, notemos que

$$cG^{\theta}\left(s_k(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2) - \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\delta_i} a_{\delta_i}G^{\delta_i}\right)\overline{\omega}_i\right) + \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\epsilon_i} a_{\epsilon_i}G^{\epsilon_i}\right)\overline{\omega}_i = 0$$

nos fornece o seguinte:

$$\omega = cG^{\theta}\omega_{1,2,k,l} + \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\epsilon_i} a_{\epsilon_i}G^{\epsilon_i}\right)\omega_i.$$

Observemos também que os cálculos que fizemos com $\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\gamma_i} a_{\gamma_i}G^{\gamma_i}\right)\omega_i$ podem ser feitos com $\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\epsilon_i} a_{\epsilon_i}G^{\epsilon_i}\right)\omega_i$. Assim, após um número finito de passos, encontramos

$$\omega = \omega' + \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\zeta_i} a_{\zeta_i}G^{\zeta_i}\right)\omega_i,$$

onde ω' é uma soma finita de elementos da forma $c'G^{\theta}\omega_{j_1,j_2,k,l}$, com $c' \in \mathbb{C}$, e

$$\mathrm{ht}_k\left(\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\gamma_i} a_{\gamma_i}G^{\gamma_i}\right)\overline{\omega}_i\right) < \mathrm{ht}_k\left(\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\zeta_i} a_{\zeta_i}G^{\zeta_i}\right)\overline{\omega}_i\right).$$

Procedendo similarmente com o elemento $\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\zeta_i} a_{\zeta_i}G^{\zeta_i}\right)\overline{\omega}_i$, concluimos que

$$\omega = \omega_{B_2} + \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\rho_i} a_{\rho_i}G^{\rho_i}\right)\omega_i,$$

onde ω_{B_2} é uma soma (possivelmente infinita) de elementos com a forma de ω' e

$$\mathrm{ht}\left(\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{\rho_i} a_{\rho_i} G^{\rho_i}\right)\overline{\omega}_i\right) = \underline{\infty}.$$

A convergência da soma infinita se deve ao fato da família $\{G^{\theta}\omega_{j_1,j_2,k,l}\}$ ser somável, pois G e o número de S_k-processos mínimos são finitos. Assim, podemos escrever $\omega = \omega_{B_1} + \omega_{B_2}$, onde ω_{B_1} pertence ao $\mathcal{O}$-módulo gerado por B_1 e ω_{B_2} ao gerado por B_2, o que mostra que B gera $\mathcal{T}$. ∎

Exemplo 3.9. *Consideremos a curva analítica plana $Q = \langle f \rangle$, onde*

$$f = (Y^2 - X^3)(X^2 - Y^3).$$

Pelo Exemplo 1.33, uma Base Standard mínima para o anel local $\mathcal{O}$ de Q é o conjunto $G = \{x, y, f_1, f_2\}$, onde $f_1 = y^2 - x^3$ e $f_2 = x^2 - y^3$ são as imagens homomórficas de $f_1 = Y^2 - X^3$ e $f_2 = X^2 - Y^3$ em $\mathcal{O}$ respectivamente, as quais representaremos com a mesma notação.

Consideremos também os seguintes elementos $\omega_1 = dx$, $\omega_2 = dy$, $\omega_3 = df_1 = -3x^2dx + 2ydy$, $\omega_4 = df_2 = 2xdx - 3y^2dy$, $\omega_5 = 3ydx - 2xdy$ e $\omega_6 = 2ydx - 3xdy$ de Ω, que em virtude do Exemplo 2.24 sabemos que $H = \{\overline{\omega}_1, ..., \overline{\omega}_6\}$ é uma Base Standard mínima para $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$.

Vamos então computar os dois geradores mínimos de $\mathcal{T}$ por meio de $B = B_1 \cup B_2$. Antes de determinarmos tais conjuntos, observemos que se ω é um desses dois geradores mínimos de $\mathcal{T}$, então $\mathrm{mult}(\omega) > 1$. De fato, se $\omega = pdx + qdy$ suponhamos, por absurdo, que $\mathrm{mult}(p) = 1$. Logo, $p(x,y) = ax + by + p_1(x,y)$, com $a, b \in \mathbb{C}$, não ambos nulos, e $\mathrm{mult}(p_1) > 1$. Como $\omega \wedge df = gf\ dx \wedge dy$, com $g \in \mathcal{M}$, pois $\mathcal{T}$ não é cíclico, e

$$\begin{aligned}\omega \wedge df &= (pf_y - qf_x)\ dx \wedge dy \\ &= (p \cdot (2x^2y - 5y^4 + 3x^3y^2) - q \cdot (2xy^2 - 5x^4 + 3x^2y^3))\ dx \wedge dy,\end{aligned}$$

devemos ter $\mathrm{mult}(pf_y - qf_x) \geq 5$. Desta maneira, $p(x,y) = cy + p_1(x,y)$ e também temos $q(x,y) = cx + q_1(x,y)$, com $\mathrm{mult}(q_1) > 1$ e $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Escrevamos agora

$$\omega = c(ydx + xdy) + (p_1dx + q_1dy)$$

e notemos que $\nu(\overline{ydx + xdy}) = (5,5)$. Além disso,

$$\nu_1(\overline{p_1dx + q_1dy}) \geq \mathrm{ht}_1(\overline{p_1dx + q_1dy}) = 6 \text{ e } \nu_2(\overline{p_1dx + q_1dy}) \geq \mathrm{ht}_2(\overline{p_1dx + q_1dy}) = 6,$$

o que mostra que $\nu(\overline{\omega}) = (5,5)$*, o que contradiz o fato de* ω *pertencer a* $\mathcal{T}$*. Portanto, um elemento em* B *tem multiplicidade no mínimo* 2*.*

Comecemos então pelo conjunto $B_1 = \{\eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6\}$*, onde*

$$\begin{aligned}
\eta_3 &= f_2\omega_3 = (x^2 - y^3)(-3x^2dx + 2ydy) = (3x^2y^3 - 3x^4)dx + (2x^2y - 2y^4)dy \\
\eta_4 &= f_1\omega_4 = (y^2 - x^3)(2xdx - 3y^2dy) = (2xy^2 - 2x^4)dx - (3y^4 - 3x^3y^2)dy \\
\eta_5 &= f_2\omega_5 = (x^2 - y^3)(3ydx - 2xdy) = (3x^2y - 3y^4)dx - (2x^3 - 2xy^3)dy \\
\eta_6 &= f_1\omega_6 = (y^2 - x^3)(2ydx - 3xdy) = (2y^3 - 2x^3y)dx - (3xy^2 - 3x^4)dy.
\end{aligned}$$

Observemos que $\mathrm{mult}(\eta_i) = 3$*, para* $i = 3, ..., 6$*.*

Agora com base no Exemplo 2.24, vamos encontrar os elementos de B_2*. Inicialmente obtemos os elementos da forma* $\omega_{1,2,1,l}$*:*

$$\begin{aligned}
\omega_{1,2,1,1} &= 3ydx - 2xdy - \omega_5 = 0 \\
\omega_{1,2,1,2} &= 3x^2dx - 2ydy + \omega_3 = 0 \\
\omega_{1,2,1,3} &= 3f_2dx - 2ydy + 3y^3dx + \omega_3 = 0 \\
\omega_{1,2,1,4} &= 3y^3dx - 2f_2^2dy - \frac{9}{5}y^2\omega_5 + \frac{6}{5}x^4(2y - x^4)\omega_6 \\
\omega_{1,2,1,5} &= 3xydx - 2f_2dy - \frac{9}{5}x\omega_5 + \frac{6}{5}x^2y\omega_6.
\end{aligned}$$

Notemos que $\omega_{1,2,1,5}$ *tem multiplicidade* 2*, bem como o elemento*

$$\omega = \frac{5}{2}\omega_{1,2,1,5} = (-6xy + 6x^2y^2)dx + (4x^2 - 9x^3y + 5y^3)dy \in \mathcal{T}.$$

Do mesmo modo, por meio de um S_2*-processo entre* $\overline{\omega}_1$ *e* $\overline{\omega}_2$ *e uma redução final, é possível obter o elemento*

$$\omega_{1,2,2,5} = 2f_1dx - 3xydy - \frac{9}{5}y\omega_6 + \frac{6}{5}xy^2\omega_5,$$

que também tem multiplicidade 2*, assim como o elemento*

$$\omega' = \frac{5}{2}\omega_{1,2,2,5} = (-4y^2 + 9xy^3 - 5x^3)dx + (6xy - 6x^2y^2)dy \in \mathcal{T}.$$

Consideremos agora os seguintes elementos em $[\mathcal{F}ol(Q)]$*:*

$$\begin{aligned}
\omega &= (-6XY + 6X^2Y^2)dX + (4X^2 - 9X^3Y + 5Y^3)dY, \\
\omega' &= (-4Y^2 + 9XY^3 - 5X^3)dX + (6XY - 6X^2Y^2)dY.
\end{aligned}$$

Por abuso de notação, continuamos usando ω *e* ω' *para representar tais elementos.*

Afirmamos que $[\mathcal{F}ol(Q)] = [\omega, \omega']$. *Com efeito,*

$$\omega \wedge \omega' = (-20 + 45XY)f \; dX \wedge dY.$$

E, portanto, ω *e* ω' *são geradores mínimos do submódulo de torção* $\mathcal{T}$ *do módulo de diferenciais da curva* Q.

Exemplo 3.10. *Consideremos a curva analítica plana* $Q = \langle f \rangle$, *onde*

$$f = (Y^2 - X^m)(X^2 - Y^n),$$

com m, n *ímpares e maiores que* 1.

Novamente, o Exemplo 1.33 nos dá que uma Base Standard mínima para o anel local $\mathcal{O}$ *de* Q *é o conjunto* $G = \{x, y, f_1, f_2\}$, *onde* $f_1 = y^2 - x^m$ *e* $f_2 = x^2 - y^n$ *são as imagens homomórficas de* $f_1 = Y^2 - X^m$ *e* $f_2 = X^2 - Y^n$ *em* $\mathcal{O}$ *respectivamente, as quais representaremos com a mesma notação.*

Além disto, pelo Exemplo 2.24, temos que $H = \{\omega_1, ..., \omega_6\}$ *é uma Base Standard mínima para* $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$, *em que* $\omega_1 = dx$, $\omega_2 = dy$, $\omega_3 = df_1 = -mx^{m-1}dx + 2ydy$, $\omega_4 = df_2 = 2xdx - ny^{n-1}dy$, $\omega_5 = mydx - 2xdy$ *e* $\omega_6 = 2ydx - nxdy$.

Como generalização do exemplo anterior, vamos mostrar que os elementos de $\Omega^1_{\mathbb{C}^2,0}$

$$\begin{aligned}
\omega &= (-2mXY + 2mX^{m-1}Y^{n-1})dX + (4X^2 - mnX^mY^{n-2} + (mn-4)Y^n)dY \\
\omega' &= (-4Y^2 + mnX^{m-2}Y^n - (mn-4)X^m)dX + (2nXY - 2nX^{m-1}Y^{n-1})dY
\end{aligned}$$

são geradores mínimos de $[\mathcal{F}ol(Q)]$. *Primeiramente, notemos que* $\omega \in \mathcal{F}ol(Q)$. *De fato, como uma parametrização para* Q *é*

$$\phi(\underline{t}) = [(t_1^2, t_1^m), (t_2^n, t_2^2)],$$

e escrevendo $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, *temos*

$$\begin{aligned}
\omega_1(t_1) &= (-2mt_1^2t_1^m + 2mt_1^{2(m-1)}t_1^{m(n-1)})2t_1 + (4t_1^4 - mnt_1^{2m}t_1^{m(n-2)} + (mn-4)t_1^{mn})mt_1^{m-1} \\
&= -4mt_1^{m+3} + 4mt_1^{mn+m-1} + 4mt_1^{m+3} - m^2nt_1^{mn+m-1} + m^2nt_1^{mn+m-1} - 4mt_1^{mn+m-1} \\
&= 0, \\
\omega_2(t_2) &= (-2mt_2^nt_2^2 + 2mt_2^{n(m-1)}t_2^{2(n-1)})nt_2^{n-1} + (4t_2^{2n} - mnt_2^{mn}t_2^{2(n-2)} + (mn-4)t_2^{2n})2t_2 \\
&= -2mnt_2^{2n+1} + 2mnt_2^{mn+2n-3} + 8t_2^{2n+1} - 2mnt_2^{mn+2n-3} + 2mnt_2^{2n+1} - 8t_2^{2n+1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, pela Observação 3.1, concluímos que $\omega \in [\mathcal{F}ol(Q)]$. *De maneira análoga podemos mostrar que* $\omega' \in [\mathcal{F}ol(Q)]$.

Agora observemos que

$$\omega \wedge \omega' = [-4(mn-4) + mn(mn-4)X^{m-2}Y^{n-2}]f \; dX \wedge dY.$$

Portanto, $[\mathcal{F}ol(Q)] = [\omega, \omega']$ *e disto concluímos que o submódulo de torção* $\mathcal{T}$ *do módulo de diferenciais da curva* Q *é minimamente gerado por*

$$\overline{\omega} = (-2mxy + 2mx^{m-1}y^{n-1})dx + (4x^2 - mnx^m y^{n-2} + (mn-4)y^n)dy,$$
$$\overline{\omega'} = (-4y^2 + mnx^{m-2}y^n - (mn-4)x^m)dx + (2nxy - 2nx^{m-1}y^{n-1})dy.$$

Em particular, temos

$$\omega \wedge df = (m+2)(-4 + mnx^{m-2}y^{n-2})xf \; dx \wedge dy,$$
$$\omega' \wedge df = (n+2)(-4 + mnx^{m-2}y^{n-2})yf \; dx \wedge dy.$$

Como observamos no início desta seção, podemos relacionar a codimensão do ideal gerado por

$$g = (m+2)(-4 + mnx^{m-2}y^{n-2})x \quad e \quad g' = (n+2)(-4 + mnx^{m-2}y^{n-2})y$$

com μ *e* τ *por meio da relação*

$$\mu - \tau = I(g, g') = I(x, y) = 1.$$

Como

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + 2I(f_1, f_2) - 1 = (m-1) + (n-1) + 2 \cdot 4 - 1 = m + n + 5,$$

temos $\tau = \mu - 1 = m + n + 4$.

Exemplo 3.11. *Vamos considerar uma situação similar ao exemplo anterior, porém com ramos admitindo mesma tangente.*

Seja $Q = \langle f \rangle$ *uma curva analítica plana, com*

$$f = (Y^2 - X^m)(Y^2 - X^n),$$

com m, n *ímpares e* $n > m > 1$.

Pelos resultados vistos na Seção 1.4, uma Base Standard mínima para o anel local $\mathcal{O}$ *de* Q *é o conjunto* $G = \{x, y, f_1, f_2\}$, *onde* $f_1 = y^2 - x^m$ *e* $f_2 = y^2 - x^n$ *são as* *imagens homomórficas de* $f_1 = Y^2 - X^m$ *e* $f_2 = Y^2 - X^n$ *em* $\mathcal{O}$ *respectivamente, as quais representaremos com a mesma notação.*

Consideremos também os elementos $\omega_1 = dx$, $\omega_2 = dy$, $\omega_3 = df_1 = -mx^{m-1}dx + 2ydy$, $\omega_4 = df_2 = -nx^{n-1}dx + 2ydy$, $\omega_5 = mydx - 2xdy$ *e* $\omega_6 = nydx - 2xdy$ *de* Ω. *Aplicando o Algoritmo 4, vemos que* $H = \{\overline{\omega}_1, ..., \overline{\omega}_6\}$ *é uma Base Standard mínima para* $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$.

Consideremos também os seguintes elementos de $\Omega^1_{\mathbb{C}^2,0}$:

$$\omega = ((n-m)X^n + mY^2 - nX^{n-m}Y^2)dX + 2(X^{n-m+1}Y - XY)dY,$$
$$\omega' = mn(X^{n-1}Y - X^{m-1}Y)dX + 2((n-m)Y^2 - nX^n + mX^m)dY,$$

obtidos por meio de redução final de S_k*-processos mínimos de um par de elementos de* H *sobre* G.

Uma vez que

$$\phi(t) = [(t_1^2, t_1^m), (t_2^2, t_2^n)]$$

é uma parametrização de Q, *escrevendo* $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, *temos*

$$\begin{aligned}\omega_1(t_1) &= ((n-m)t_1^{2n} + mt_1^{2m} - nt_1^{2(n-m)}t_1^{2m})2t_1 + 2(t_1^{2(n-m+1)}t_1^m - t_1^2t_1^m)mt_1^{m-1}\\ &= 2(n-m)t_1^{2n+1} + 2mt_1^{2m+1} - 2nt_1^{2n+1} + 2mt_1^{2n+1} - 2mt_1^{2m+1} = 0\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}\omega_2(t_2) &= ((n-m)t_2^{2n} + mt_2^{2n} - nt_2^{2(n-m)}t_2^{2n})2t_2 + 2(t_2^{2(n-m+1)}t_2^n - t_2^2t_2^n)nt_2^{n-1}\\ &= 2(n-m)t_2^{2n+1} + 2mt_2^{2n+1} - 2nt_2^{4n-2m+1} + 2nt_2^{4n-2m+1} - 2nt_2^{2n+1} = 0.\end{aligned}$$

Assim, $\omega \in [\mathcal{F}ol(Q)]$. *Da mesma maneira podemos constatar que* $\omega' \in [\mathcal{F}ol(Q)]$.

Além disto, temos $[\mathcal{F}ol(Q)] = [\omega, \omega']$. *Com efeito,*

$$\omega \wedge \omega' = 2(n-m)(m - nX^{n-m})f \ dX \wedge dY.$$

O submódulo de torção $\mathcal{T}$ *do módulo de diferenciais da curva* Q *é então minimamente gerado pelos elementos*

$$\overline{\omega} = ((n-m)x^n + my^2 - nx^{n-m}y^2)dx + 2(x^{n-m+1}y - xy)dy,$$
$$\overline{\omega'} = mn(x^{n-1}y - x^{m-1}y)dx + 2((n-m)y^2 - nx^n + mx^m)dy.$$

Como no exemplo anterior, podemos calcular o número de Tjurina de Q *sabendo que*

$$\omega \wedge df = 4y(m - nx^{n-m})f \ dx \wedge dy,$$
$$\omega' \wedge df = 2(m+n)x^{m-1}(-m + nx^{n-m})f \ dx \wedge dy.$$

Assim, $g = 4y(m - nx^{n-m})$ *e* $g' = 2(m+n)x^{m-1}(-m+nx^{n-m})$ *nos dão* $\mu - \tau = m-1$. *Uma vez que* $\mu = (m-1)+(n-1)+2\cdot 2m-1 = 5m+n-3$, *obtemos* $\tau = 4m+n-2$.

Observação 3.12. *Embora tenhamos apresentado 3 conjecturas: Conjectura 1.43, Conjectura 2.15 e Conjectura 3.7 e que têm formulações aparentemente distintas, o cerne das mesmas é idêntico, a saber, controlar a altura de representações para* 3 *ou mais ramos no processo de redução. Mais especificamente, no caso de dois ramos se duas representações* $\sum$ *e* $\sum'$ *são tais que* $\mathrm{ht}_1(\sum) = \mathrm{ht}_1(\sum')$, *então* $\mathrm{ht}_2(\sum)$ *e* $\mathrm{ht}_2(\sum')$ *satisfazem a tricotomia*

$$\mathrm{ht}_2(\textstyle\sum) < \mathrm{ht}_2(\sum'), \quad \mathrm{ht}_2(\sum) > \mathrm{ht}_2(\sum') \quad \textit{ou} \quad \mathrm{ht}_2(\sum) = \mathrm{ht}_2(\sum').$$

Porém, para 3 *ou mais ramos e duas representações* $\sum$ *e* $\sum'$ *tais que* $\mathrm{ht}_1(\sum) = \mathrm{ht}_1(\sum')$, *podemos ter, por exemplo,*

$$\mathrm{ht}_2(\textstyle\sum) < \mathrm{ht}_2(\sum') \quad \textit{e} \quad \mathrm{ht}_3(\sum) > \mathrm{ht}_3(\sum')$$

o que foge de nosso controle ao refinar as análises.

3.2 Descrição de Λ e τ para Curvas de Multiplicidade menor que 4

Como vimos na seção anterior, o número de Tjurina de uma curva plana pode ser calculado por meio de informações do submódulo de torção do módulo de diferenciais de Kähler do anel local de uma curva plana $Q = \langle \prod_{i=1}^{r} f_i \rangle = \cap_{i=1}^{r} \langle f_i \rangle$. No entanto, podemos computar τ diretamente por meio de Λ. Em [6] e [20], encontramos resultados que permitem tal cálculo. Por exemplo, em [6] encontramos o seguinte resultado.

Proposição 3.13. *Seja* $Q = \langle \prod_{i=1}^{r} f_i \rangle = \cap_{i=1}^{r} \langle f_i \rangle$ *uma curva analítica plana reduzida. Então o número de Tjurina de* Q *é*

$$\tau = \sum_{i=1}^{r} \tau_i + \sum_{1 \le i < j \le r} I_{i,j} + l\left(\frac{\bigoplus_{i=1}^{r} \frac{\Omega_i}{\mathcal{T}_i}}{\frac{\Omega}{\mathcal{T}}} \right), \tag{3.6}$$

em que τ_i *é o número de Tjurina do ramo* $\langle f_i \rangle$ *e* $I_{i,j}$ *é a multiplicidade de interseção dos ramos* $\langle f_i \rangle$ *e* $\langle f_j \rangle$.

Para calcular o número

$$l\left(\frac{\bigoplus_{i=1}^{r} \frac{\Omega_i}{\mathcal{T}_i}}{\frac{\Omega}{\mathcal{T}}} \right), \tag{3.7}$$

utilizaremos alguns resultados sobre ideais fracionários e ideais relativos. Tais resultados encontram-se nas referências [1] e [2].

Para cada $i \in I$, definimos $e_i := (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbb{N}^r$.

Proposição 3.14. *Sejam $\alpha \in \mathbb{N}^r$ e $\mathcal{I}$ um ideal fracionário de $\mathcal{O}$. Consideremos ainda o conjunto $\mathcal{I}(\alpha) = \{h \in \mathcal{I};\ v(h) \geq \alpha\}$, que também é um ideal fracionário de $\mathcal{O}$. Então*

$$l\left(\frac{\mathcal{I}(\alpha)}{\mathcal{I}(\alpha + e_i)}\right) \leq 1,$$

com igualdade se, e somente se, $F_i^{v(\mathcal{I})}(\alpha) := \{\beta \in v(\mathcal{I});\ \beta_i = \alpha_i \text{ e } \beta_j \geq \alpha_j,\ j \neq i\} \neq \emptyset$.

Seja $\mathcal{I}$ um ideal fracionário de $\mathcal{O}$. Pela Propriedade B dos ideais fracionários apresentada no Capítulo 2, o ideal relativo $v(\mathcal{I})$ admite um elemento mínimo α. Agora, dado $\beta \in v(\mathcal{I})$, consideremos uma cadeia saturada de elementos em $v(\mathcal{I})$

$$\alpha = \alpha^0 < \alpha^1 < ... < \alpha^m = \beta,$$

isto é, para todo $j = 1, ..., m$, $\alpha^j - \alpha^{j-1} = e_i$, para algum $i \in I$. Então

$$l\left(\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}(\beta)}\right) = \sum_{j=1}^{m} l\left(\frac{\mathcal{I}(\alpha^{j-1})}{\mathcal{I}(\alpha^j)}\right).$$

Proposição 3.15. *Sejam $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ dois ideais fracionários de $\mathcal{O}$. Então*

$$l\left(\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{I}}\right) = l\left(\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}(\kappa)}\right) - l\left(\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}(\kappa)}\right),$$

onde κ é o condutor de $v(\mathcal{I})$.

As Proposições 3.14 e 3.15 nos permitem calcular o número de Tjurina de uma curva analítica plana Q utilizando a fórmula (3.6). Em particular, para uma curva Q com dois ramos, em [6] obtemos o seguinte resultado.

Proposição 3.16. *Seja $Q = \langle f_1 f_2 \rangle = \langle f_1 \rangle \cap \langle f_2 \rangle$ uma curva analítica plana reduzida. Então o número de Tjurina de Q é*

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + I_{1,2} + m_\Lambda, \tag{3.8}$$

onde m_Λ denota o número de pontos absolutos do conjunto $\Lambda \cap \mathbb{N}^2$.

Observamos que o número de Tjurina para o caso em que Q é irredutível com multiplicidade menor que 4 é bem conhecido e divulgado na literatura, veja, por exemplo, [37] ou [24] para resultados que incluem curvas de multiplicidade 4 e descrição completa do conjunto $\Lambda \cap \mathbb{N}$.

Se $Q = \langle \prod_{i=1}^{r} f_i \rangle$, então pelo Lema 5.1 de [21], sabemos que por meio de uma mudança de coordenadas, podemos assumir que o ramo $\langle f_1 \rangle$ admite uma parametrização da forma $(t_1^{m_1}, \varphi(t_1))$, onde m_1 é a multiplicidade de f_1 e a multiplicidade de $\varphi(t_1)$ não é divisível por m_1.

Se Q tem multiplicidade 1, então Q é irredutível, $\Gamma = \overline{\mathbb{N}}$, $\Lambda = \Gamma \setminus \{0\}$, $\tau = \mu = 0$ e a curva é analiticamente equivalente à curva $\langle Y \rangle$, cuja parametrização é $(t_1, 0)$.

3.2.1 Multiplicidade 2

Uma curva de multiplicidade 2 pode admitir 1 ou 2 ramos. Analisemos tais casos.

1 **RAMO**

Consideremos um ramo plano Q com multiplicidade 2. É fato conhecido que

(a) $\Gamma = \langle 2, n, \infty \rangle$, com n ímpar;

(b) Q é analiticamente equivalente a um ramo com parametrização $\phi(t) = (t^2, t^n)$;

(c) $\Lambda = \Gamma \setminus \{0\}$;

(d) $\tau = \mu = n - 1$.

2 **RAMOS**

Consideremos uma curva plana reduzida $Q = P_1 \cap P_2$. Como a multiplicidade de cada ramo é 1, o semianel de valores associado ao ramo P_i é dado por $\Gamma_i = \overline{\mathbb{N}}$, para $i = 1, 2$.

Neste caso, podemos ter duas situações de acordo com o cone tangente das curvas.

TANGENTES DISTINTAS

Sem perda de generalidade, podemos assumir que a reta tangente a P_1 é $\langle Y \rangle$ e a reta tangente a P_2 é $\langle X \rangle$.

A multiplicidade de interseção $I_{1,2}$ entre os ramos também é 1.

Então P_1 admite uma parametrização da forma $(t_1, 0)$ e P_2 uma da forma $(\varphi_2(t_2), t_2)$ com multiplicidade de $\varphi_2(t_2)$ maior que 1.

Por meio da mudança de coordenadas $\sigma(x, y) = (x - \alpha_i y^i, y)$, com $i > 1$, temos que Q é analiticamente equivalente a uma curva parametrizada por $\phi(t) = [(t_1, 0), (0, t_2)]$, isto é, podemos considerar, a menos de mudanças de coordenadas analíticas, que $Q = \langle XY \rangle$.

Deste modo, pelo Exemplo 1.41, segue que o semianel de valores associado a Q é

$$\Gamma = \langle (1,\infty),(\infty,1)\rangle = \{(0,0)\} \cup \{(1,1)+(\gamma_1,\gamma_2);\ (\gamma_1,\gamma_2)\in \overline{\mathbb{N}}^2\}.$$

Como Q é definida por um polinômio quasehomogêneo, segue da Observação 2.23 que

$$\Lambda = \Gamma \setminus \{(0,0)\} = \{(1,1)+(\gamma_1,\gamma_2);\ (\gamma_1,\gamma_2)\in \overline{\mathbb{N}}^2\}.$$

Além disso, $\tau = \mu = \mu_1+\mu_2+2I_{1,2}-1 = 0+0+2\cdot 1-1 = 1.$

MESMA TANGENTE

Neste caso podemos supor que reta tangente dos ramos seja $\langle Y\rangle$ e que a multiplicidade de interseção entre os ramos P_1 e P_2 seja $I_{1,2}=n>1$, ou seja, podemos considerar que a curva seja parametrizada por

$$\phi(t) = \left[(t_1,0),\left(t_2, t_2^n+\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i t_2^i\right)\right].$$

Mais ainda, por meio de mudanças de coordenadas da forma $\sigma(x,y)=(x,y-a_ix^iy)$, para $i\geq 1$, a curva Q é analiticamente equivalente a uma curva com parametrização $\phi(t)=[(t_1,0),(t_2,t_2^n)]$. Assim, Q é analiticamente equivalente à curva quasehomogênea $\langle Y(Y-X^n)\rangle$.

Utilizando os resultados de Delgado vistos na Seção 1.4 e a Proposição 1.30, constatamos que os pontos absolutos irredutíveis do semianel de valores Γ associado a Q são $v(g_1)=(1,1)$, $v(g_2)=(\infty,n)$ e $v(g_3)=(n,\infty)$, onde $g_1=x$, $g_2=y$ e $g_3=y-x^n$. Logo, o semianel de valores associado a Q é

$$\Gamma = \langle\, (1,1),(\infty,n),(n,\infty)\,\rangle.$$

Como a curva Q é quasehomogênea, pela Observação 2.23 segue que

$$\Lambda = \Gamma\setminus\{(0,0)\}.$$

Mais especificamente,

$$\Lambda = \{(1,1),...,(n-1,n-1)\}\cup\{(n,n)+(\gamma_1,\gamma_2);\ (\gamma_1,\gamma_2)\in\overline{\mathbb{N}}^2\}.$$

Além disso,

$$\tau = \mu = \mu_1+\mu_2+2I_{1,2}-1 = 0+0+2n-1 = 2n-1.$$

3.2.2 Multiplicidade 3

Uma curva com multiplicidade 3 pode admitir uma, duas ou três componentes irredutíveis. Analisemos cada um destes casos.

1 **RAMO**

Consideremos um ramo plano Q de multiplicidade 3. Neste caso, o semianel de valores associado a Q é $\Gamma = \langle 3, n, \infty \rangle$, com $\mathrm{MDC}(3, n) = 1$. É conhecido (veja [37] e [24]) que há duas possibilidades.

1) Se $\Lambda = \Gamma \setminus \{0\}$, então Q é analiticamente equivalente a um ramo com parametrização $\phi(t) = (t^3, t^n)$ e $\tau = \mu = 2(n-1)$.

2) Se $\Lambda \neq \Gamma \setminus \{0\}$, então Q é analiticamente equivalente a um ramo parametrizado por $\phi(t) = (t^3, t^n + t^{2n-3m})$, para algum $2 \leq m \leq \left[\frac{n}{3}\right]$ (parte inteira de $\frac{n}{3}$). Consequentemente, Λ é minimamente gerado por $\{3, n, 2n - 3(m-1)\}$ e $\tau = 2n - m - 1$.

2 **RAMOS**

Consideremos uma curva plana reduzida $Q = P_1 \cap P_2$. Podemos supor que a multiplicidade do ramo P_1 seja 1 e a multiplicidade de P_2 seja 2. O semianel de valores associado a P_1 é então $\Gamma_1 = \overline{\mathbb{N}}$, o semianel de valores associado a P_2 é $\Gamma_2 = \langle 2, n, \infty \rangle$, com n ímpar.

Como no caso de multiplicidade 2, temos duas análises a considerar de acordo com as tangentes dos ramos.

TANGENTES DISTINTAS

Neste caso, a multiplicidade de interseção entre os ramos é o produto das multiplicidades, ou seja, $I_{1,2} = 2$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que a reta tangente de P_1 é $\langle Y \rangle$ e a de P_2 é $\langle X \rangle$, isto é, podemos considerar a curva parametrizada por

$$\phi(t) = [(t_1, 0), (\varphi_2(t_2), t_2^2)],$$

com $\mathrm{mult}(\varphi_2(t_2)) > 2$.

Por meio de mudanças de coordenadas da forma $\sigma(x, y) = (x + ay^k, y)$ e $\sigma'(x, y) = (x - bxy^k, y)$, podemos eliminar os termos de $\varphi_2(t_2)$ com potências $2k$ e $n + 2k$, $k \geq 1$, ou seja, Q é analiticamente equivalente a uma curva parametrizada por $\phi(t) = [(t_1, 0), (t_2^n, t_2^2)]$, isto é, podemos assumir que Q seja dada por $\langle Y(X^2 - Y^n) \rangle$, que é quasehomogênea.

Agora, pelo que vimos na Seção 1.4, os pontos absolutos irredutíveis do semianel de valores Γ associado à curva Q são $v(g_1) = (1, n)$, $v(g_2) = (\infty, 2)$ e $v(g_3) = (2, \infty)$, onde

$g_1 = x$, $g_2 = y$ e $g_3 = x^2 - y^n$. Logo, o semianel de valores associado a Q é

$$\Gamma = \langle\, (1,n), (\infty,2), (2,\infty)\,\rangle.$$

Mais explicitamente, temos

$$\begin{aligned}\Gamma = \{(0,0)\} \cup &\left\{(\alpha_1, 2\alpha_2);\ \alpha_1 \geq 1 \text{ e } 1 \leq \alpha_2 \leq \frac{n-1}{2}\right\}\\ \cup\ &\{(1,n)\} \cup \{(2,n+1) + (\gamma_1,\gamma_2);\ (\gamma_1,\gamma_2) \in \overline{\mathbb{N}}^2\}.\end{aligned}$$

Novamente, pela Observação 2.23, concluímos que

$$\Lambda = \Gamma \setminus \{(0,0)\}.$$

Além disso, temos $\tau = \mu = \mu_1 + \mu_2 + 2I_{1,2} - 1 = 0 + (n-1) + 2\cdot 2 - 1 = n+2$.

MESMA TANGENTE

Como antes podemos assumir que a reta tangente dos ramos seja $\langle Y\rangle$. Deste modo, Q é analiticamente equivalente a uma curva parametrizada por

$$\phi(t) = \left[(t_1,0), \left(t_2^2,\ \sum_{j=2}^{[\frac{n}{2}]} a_j t_2^{2j} + \sum_{j=n}^{\infty} a_j t_2^j\right)\right],\ \text{com } a_j \in \mathbb{C} \text{ e } a_n \neq 0.$$

Notemos que a multiplicidade de interseção $I_{1,2}$ entre os ramos dessa curva será a multiplicidade de

$$\sum_{j=2}^{[\frac{n}{2}]} a_j t_2^{2j} + \sum_{j=n}^{\infty} a_j t_2^j.$$

Vamos então dividir nossa análise em dois casos.

Caso 1. $I_{1,2} = 2m < n$.

Neste caso, considerando mudanças de coordenadas:

- $\sigma(x,y) = (x, y - a_i' x^{i-m} y)$, $i = m+1, ..., \left[\frac{n}{2}\right]$, eliminamos o termo t_2^{2i};
- $\sigma(x,y) = (x, y - b_i' x^{n+1+2i-2m})$, eliminamos os termos t_2^{n+1+2i}, com $i \geq 0$;
- $\sigma(x,y) = (x, y - c_i'(y - x^m)x^i y)$, eliminamos os termos $t_2^{n+2(m+i)}$, com $i \geq 0$;
- $\sigma(x,y) = (x + \alpha_i x^{i+1}, y + \alpha_i m x^i y)$, $i \geq 1$, e as mudanças de parâmetros $\rho_1(t_1) = t_1(1 + \alpha_i t_1^i)$ e $\rho_2(t_2) = t_2(1 + \alpha_i t_2^{2i})^{\frac{1}{2}}$, eliminamos o termo t_2^{n+2i}.

Combinando as mudanças de coordenadas e parâmetros acima, podemos assumir que a curva seja parametrizada por $\phi(t) = [(t_1,0), (t_2^2, t_2^{2m} + ct_2^n)]$, com $c \neq 0$.

Mais ainda, considerando $\gamma \in \mathbb{C}$ tal que $\gamma^{n-2m} = c$, $\sigma(x,y) = (\gamma^2 x, \gamma^{2m} y)$, $\rho_1(t_1) = \gamma^2 t_1$ e $\rho_2(t_2) = \gamma t_2$, podemos considerar a seguinte parametrização para a curva Q:

$$\phi(t) = [(t_1, 0), (t_2^2, t_2^{2m} + t_2^n)].$$

Desta maneira, Q é analiticamente equivalente à curva $\langle Y\left((Y - X^m)^2 - X^n\right)\rangle$.

Sejam

$$g_1 = x, \quad g_2 = y - x^m, \quad g_3 = y \quad \text{e} \quad g_4 = (y - x^m)^2 - x^n.$$

Utilizando os resultados descritos na Seção 1.4, constatamos que os pontos absolutos irredutíveis do semianel de valores Γ associado à curva Q são $v(g_1) = (1, 2)$, $v(g_2) = (m, n)$, $v(g_3) = (\infty, 2m)$ e $v(g_4) = (2m, \infty)$. Logo, o semianel de valores Γ associado a Q é

$$\Gamma = \langle (1, 2), (m, n), (\infty, 2m), (2m, \infty) \rangle.$$

Consequentemente, uma Base Standard mínima para o anel local da curva Q é o conjunto $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$.

Sejam agora Ω o módulo de diferenciais de Kähler da curva Q e $\mathcal{T}$ seu submódulo de torção. No apêndice deste capítulo pode ser encontrada uma Base Standard mínima H para $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$. Essa base H nos fornece o conjunto de geradores mínimos para o conjunto das ordens de diferenciais Λ de Q e, consequentemente, para o conjunto Λ. Tal conjunto mínimo é

$$\{(1, 2), (m, n), (\infty, 2m), (2m, \infty), (\infty, n + 2), (m + 1, \infty)\}.$$

Além disso, o condutor de Λ é $\kappa = (m + 1, n + 1)$ e temos $m_\Lambda = m$ pontos absolutos de $\Lambda \cap \mathbb{N}^2$ dados por

$$(1, 2), (2, 4), ..., (m - 1, 2(m - 1)), (m, n).$$

O número de Tjurina de Q pode ser calculado por (3.8), ou seja,

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + I_{1,2} + m_\Lambda = 0 + (n - 1) + 2m + m = n + 3m - 1.$$

Caso 2. $I_{1,2} = n$.

Neste caso, consideramos a parametrização

$$\phi(t) = \left[(t_1, 0), \left(t_2^2,\ t_2^n + \sum_{j=1}^{\infty} a_j t_2^{n+j}\right)\right], \text{ com } a_j \in \mathbb{C}.$$

Por meio da mudança de coordenadas $\sigma(x,y) = (x, y - a_i' x^i y)$, com $i \geq 0$, podemos eliminar o termo com expoente $n + 2i$, por meio de $\sigma'(x,y) = (x, y - b_j' y^2 x^j)$, $j \geq 0$, podemos eliminar termos com expoente $2n+2j$ e por meio de $\sigma''(x,y) = (x+c'y, y)$ juntamente com a mudança de parâmetros $\rho_2(t_2) = t_2(1+at_2^{n-2}+...)^{\frac{1}{2}}$, em que $\rho_2^2(t_2) = t_2^2 + a(t_2^n + \sum t_2^{n+j})$, podemos eliminar o termo t_2^{2n-2}. Desse modo, considerando tais mudanças de coordenadas, podemos assumir que Q admita uma parametrização

$$\phi(t) = \left[(t_1, 0), \left(t_2^2, t_2^n + \sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} b_j t_2^{n+2j-1}\right)\right], \text{ com } b_j \in \mathbb{C}.$$

Temos assim dois subcasos.

Subcaso *(i)* $b_j = 0$, para todo $j = 1, ..., \frac{n-3}{2}$.

Neste subcaso, temos a parametrização $\phi(t) = [(t_1,0),(t_2^2, t_2^n)]$, isto é, Q é analiticamente equivalente à curva $\langle Y(Y^2 - X^n)\rangle$, que é quasehomogênea.

Pelos resultados da Seção 1.4, concluímos que $G = \{x, y, y^2 - x^n\}$ é uma Base Standard mínima para anel local da curva. Deste modo, o semianel de valores Γ associado a Q é dado por

$$\Gamma = \langle (1,2), (\infty, n), (n, \infty)\rangle.$$

Mais explicitamente, temos

$$\Gamma = \{(0,0),(1,2),...,(n-1, 2(n-1))\} \cup \{(n, 2n-1) + (\gamma_1, \gamma_2);\ (\gamma_1,\gamma_2) \in \overline{\mathbb{N}}^2\}.$$

Como Q é quasehomogênea, pela Observação 2.23, temos $\Lambda = \Gamma \setminus \{(0,0)\}$ e

$$\begin{aligned} \tau = \mu &= \mu_1 + \mu_2 + 2I_{1,2} - 1 \\ &= 0 + (n-1) + 2n - 1 = 3n-2. \end{aligned}$$

Subcaso *(ii)* $b_j \neq 0$, para algum $j = 1, ..., \frac{n-3}{2}$.

Observemos que para este subcaso devemos obrigatoriamente ter $n \geq 5$. Sejam m o menor índice j tal que $b_j \neq 0$ e

$$\phi(t) = \left[(t_1, 0), \left(t_2^2, t_2^n + \sum_{j=m}^{\frac{n-3}{2}} b_j t_2^{n+2j-1}\right)\right].$$

Combinando as mudanças de coordenadas dadas no início do caso $I_{1,2} = n$, a mudança de coordenadas $\sigma(x,y) = (x + \alpha_i x^{i+1}, y + \alpha_i \frac{n}{2} x^i y)$, $i \geq 1$, de parâmetros $\rho_1(t_1) = t_1(1+\alpha_i t_1^i)$ e $\rho_2(t_2) = t_2(1+\alpha_i t_2^{2i})^{\frac{1}{2}}$, que eliminam o termo $t_2^{n+2(m+i)-1}$, podemos considerar que a curva seja dada por uma parametrização da forma

$$\phi(t) = [(t_1,0),(t_2^2, t_2^n + bt_2^{n+2m-1})].$$

Mais ainda, considerando $\sigma(x,y) = (\gamma^2 x, \gamma^n y)$, $\rho_1(t_1) = \gamma^2 t_1$ e $\rho_2(t_2) = \gamma t_2$, em que $\gamma \in \mathbb{C}$ satisfazendo $\gamma^{2m-1} = b$, podemos assumir que Q admite a parametrização

$$\phi(t) = [(t_1, 0), (t_2^2, t_2^n + t_2^{n+2m-1})].$$

Logo, Q é analiticamente equivalente à curva

$$\left\langle Y \left(Y^2 - X^n - 2X^{\frac{n+2m-1}{2}} Y + X^{n+2m-1} \right) \right\rangle.$$

O semianel de valores Γ associado a Q ainda é igual a

$$\Gamma = \langle (1,2), (\infty, n), (n, \infty) \rangle.$$

Uma Base Standard mínima para anel local da curva Q é então $G = \{x, f_1, f_2\}$, onde

$$f_1 = y \quad \text{e} \quad f_2 = y^2 - x^n - 2x^{\frac{n+2m-1}{2}} y + x^{n+2m-1}.$$

Sejam agora Ω o módulo de diferenciais de Kähler da curva Q e $\mathcal{T}$ seu submódulo de torção. No apêndice deste capítulo pode ser encontrada uma Base Standard mínima H para $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$. Essa base H nos fornece o conjunto de geradores mínimos para o conjunto das ordens de diferenciais Λ de Q. Tal conjunto mínimo é

$$\left\{ (1,2), (\infty, n), (\infty, n+2m+1), \left(\frac{n+2m+1}{2}, \infty \right) \right\}.$$

Além disso, o condutor de Λ é $\kappa = \left(\frac{n+2m+1}{2}, n+2m \right)$ e temos $m_\Lambda = \frac{n+2m-1}{2}$ pontos absolutos de $\Lambda \cap \mathbb{N}^2$ dados por

$$(1,2), (2,4), ..., \left(\frac{n+2m-1}{2}, n+2m-1 \right).$$

O número de Tjurina de Q pode ser calculado por (3.8), ou seja,

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + I_{1,2} + m_\Lambda = 0 + (n-1) + n + \frac{n+2m-1}{2} = \frac{5n+2m-3}{2}.$$

3 RAMOS

Consideremos uma curva plana reduzida $Q = P_1 \cap P_2 \cap P_3$ com multiplicidade 3. Como a multiplicidade de cada ramo é 1, o semianel de valores Γ_i associado a P_i é igual a $\overline{\mathbb{N}}$, para $i = 1, 2, 3$.

A rigor podemos ter 3 possibilidades com respeito às tangentes dos ramos: todas distintas, duas iguais e a outra distinta ou ainda, todas iguais. No que segue vamos abordar as duas primeiras possibilidades conjuntamente.

AO MENOS DUAS TANGENTES DISTINTAS

Sem perda de generalidade, podemos assumir que os ramos P_1 e P_2 tenham tangentes distintas. Logo, $I_{1,2} = 1$.

Supondo ainda que $I_{1,3} = n \geq 1$, a curva Q é analiticamente equivalente a uma curva parametrizada por

$$\phi(t) = \left[(t_1, 0), \left(\sum_{i=2}^{\infty} a_i t_2^i, t_2\right), \left(t_3, t_3^n + \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j t_3^j\right)\right].$$

Se $P_i = \langle f_i \rangle$, então considerando mudanças de coordenadas da forma $\sigma(x, y) = (x + bf_1^i f_3, y + cf_1 f_2^j)$, com $i \geq 1$ e $j \geq 1$, podemos eliminar termos t_2^{i+1} e t_3^{n+j}, ou seja, podemos assumir que a parametrização seja

$$\phi(t) = \left[(t_1, 0), (0, t_2), (t_3, t_3^n)\right].$$

Deste modo, Q é analiticamente equivalente à curva quasehomogênea $\langle XY(Y - X^n) \rangle$.

Pela Proposição 1.30, vemos que os pontos absolutos irredutíveis do semianel de valores Γ associado a Q são $v(g_1) = (\infty, 1, n), v(g_2) = (1, \infty, 1)$ e $v(g_3) = (n, 1, \infty)$, onde $g_1 = y$, $g_2 = x$ e $g_3 = y - x^n$. Assim, temos

$$\Gamma = \langle (\infty, 1, n), (1, \infty, 1), (n, 1, \infty) \rangle.$$

Logo, uma Base Standard mínima para o anel local da curva Q é $G = \{g_1, g_2, g_3\}$.

Pela Observação 2.23, temos $\Lambda = \Gamma \setminus \{(0, 0)\}$ e

$$\begin{aligned}\tau = \mu &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + 2(I_{1,2} + I_{1,3} + I_{2,3}) - (3 - 1)\\ &= 0 + 0 + 0 + 2(1 + n + 1) - 2 = 2n + 2.\end{aligned}$$

MESMA TANGENTE

Sem perda de generalidade, podemos supor que $1 < I_{1,2} = n \leq m = I_{1,3}$. Assim, a curva Q é analiticamente equivalente a uma curva parametrizada por

$$\phi(t) = \left[(t_1, 0), \left(t_2, t_2^n + \sum_{i=n+1}^{\infty} b_i t_2^i\right), \left(t_3, ct_3^m + \sum_{j=m+1}^{\infty} c_j t_3^j\right)\right],$$

com $b_i, c_j \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Denotemos por $I_{2,3} = p$, sabemos que $p \geq n$.

Por meio de mudanças de coordenadas da forma $\sigma(x,y) = (x, y + a_i x^i y)$, com $i > 1$, podemos assumir que a curva admita parametrização

$$\phi(t) = \left[(t_1, 0), (t_2, t_2^n), \left(t_3, ct_3^m + \sum_{j=m+1}^{\infty} c_j t_3^j\right)\right].$$

Além disso, mudanças de coordenadas da forma $\sigma(x,y) = (x, y + a_i x^i y(y - x^n))$, com $i \geq 1$, permitem que consideremos a curva dada por

$$\phi(t) = \left[(t_1, 0), (t_2, t_2^n)\,, \left(t_3, t_3^m \left(a + \sum_{j=1}^{p-1} a_j t_3^j\right)\right)\right].$$

Vamos agora dividir nossa análise em dois casos.

Caso 1. $n < m$.

Neste caso, temos $p = n$ e

$$\phi(t) = \left[(t_1, 0), (t_2, t_2^n)\,, \left(t_3, t_3^m \left(a + \sum_{j=1}^{n-1} a_j t_3^j\right)\right)\right].$$

Assim, Q é analiticamente equivalente à curva

$$\left\langle Y(Y - X^n)\left(Y - X^m \left(a + \sum_{j=1}^{n-1} a_j X^j\right)\right)\right\rangle.$$

Agora se

$$g_1 = x,\ g_2 = y,\ g_3 = y - x^n \text{ e } g_4 = y - x^m \left(a + \sum_{j=1}^{n-1} a_j x^j\right),$$

pelos resultados descritos na Seção 1.4, constatamos que os pontos absolutos irredutíveis do semianel de valores Γ associado a Q são $v(g_1) = (1,1,1)$, $v(g_2) = (\infty, n, m)$, $v(g_3) = (n, \infty, n)$ e $v(g_4) = (m, n, \infty)$.

Logo, o semianel de valores associado a Q é

$$\Gamma = \langle\, (1,1,1), (\infty, n, m), (n, \infty, n), (m, n, \infty)\,\rangle.$$

Desta maneira, uma Base Standard mínima para o anel local da curva Q é o conjunto $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$.

Sejam agora Ω o módulo de diferenciais de Kähler da curva Q e $\mathcal{T}$ seu submódulo de torção. No apêndice deste capítulo pode ser encontrada uma Base Standard mínima H

para $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$. Tal base H nos fornece o conjunto de geradores mínimos para o conjunto das ordens de diferenciais Λ. O conjunto de geradores mínimos é

$$\{(1,1,1),(\infty,n,m),(n,\infty,n),(m,n,\infty),(\infty,\infty,m+1),(\infty,n+1,\infty),(m+1,\infty,\infty)\}.$$

Além disso, o condutor de Λ é $\kappa=(m+1,n+1,m+1)$.

Vamos agora usar a fórmula (3.6) para calcular o número de Tjurina de Q.

Inicialmente, como cada ramo é regular, temos $\tau_i=\mu_i=0$, para $i=1,2,3$.

Para encontrar (3.7), consideremos

$$\mathcal{I}=\frac{\Omega}{\mathcal{T}} \ \text{ e } \ \mathcal{J}=\bigoplus_{i=1}^{3}\frac{\Omega_i}{\mathcal{T}_i},$$

$\alpha=(1,1,1)$ e a seguinte cadeia saturada

$$\begin{aligned}
&\alpha^0=(1,1,1)<(2,1,1)<...<(m+1,1,1)=\alpha^m\\
&\alpha^m=(m+1,1,1)<(m+1,2,1)<...<(m+1,n+1,1)=\alpha^{m+n}\\
&\alpha^{m+n}=(m+1,n+1,1)<(m+1,n+1,2)<...<(m+1,n+1,m+1)=\alpha^{2m+n}=\kappa.
\end{aligned}$$

Usando essa cadeia, temos

$$\begin{aligned}
l\left(\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}(\kappa)}\right)&=\sum_{j=1}^{m}l\left(\frac{\mathcal{J}(j,1,1)}{\mathcal{J}(j+1,1,1)}\right)+\sum_{j=1}^{n}l\left(\frac{\mathcal{J}(m+1,j,1)}{\mathcal{J}(m+1,j+1,1)}\right)\\
&+\sum_{j=1}^{m}l\left(\frac{\mathcal{J}(m+1,n+1,j)}{\mathcal{J}(m+1,n+1,j+1)}\right).
\end{aligned}$$

Como $v(\mathcal{J})=\bigoplus_{i=1}^{3}\Lambda_i=\bigoplus_{i=1}^{3}(\overline{\mathbb{N}}\setminus\{0\})$, temos que

$$\begin{aligned}
&(j,1,1)\in F_1^{v(\mathcal{J})}(j,1,1),\ j=1,...,m\\
&(m+1,j,1)\in F_1^{v(\mathcal{J})}(m+1,j,1),\ j=1,...,n\\
&(m+1,n+1,j)\in F_1^{v(\mathcal{J})}(m+1,n+1,j),\ j=1,...,m.
\end{aligned}$$

Logo, $l\left(\dfrac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}(\kappa)}\right)=m+n+m=n+2m.$

Passemos agora ao cálculo de $l\left(\dfrac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}(\kappa)}\right)$. Notemos inicialmente que $v(\mathcal{I})=\Lambda$.

Agora, uma vez que $(j,j,j)\in F_1^{v(\mathcal{I})}(j,1,1)$, para todo $j=1,...,m$, temos

$$\sum_{j=1}^{m}l\left(\frac{\mathcal{I}(j,1,1)}{\mathcal{I}(j+1,1,1)}\right)=m.$$

Afirmamos que $F_2^{v(\mathcal{I})}(m+1, j, 1) = \emptyset$, para todo $j = 1, ..., n-1$. De fato, como $j < n$, o único elemento $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \Lambda$, com $\beta_2 = j$ é $\beta = (j, j, j)$, pois $(1, 1, 1)$ é o único ponto absoluto irredutível de Λ que podemos utilizar para gerar um elemento em Λ com segunda coordenada menor que n. Além disso, notemos que $(\infty, n, m) \in F_2^{v(\mathcal{I})}(m+1, n, 1)$. Logo,

$$\sum_{j=1}^{n} l\left(\frac{\mathcal{I}(m+1, j, 1)}{\mathcal{I}(m+1, j+1, 1)}\right) = 1.$$

Observemos finalmente que $F_3^{v(\mathcal{I})}(m+1, n+1, j) = \emptyset$, para todo $j = 1, ..., m$. A prova deste fato é similar à demonstração feita para verificar que κ é o condutor de Λ (veja no Apêndice a Afirmação 3 referente a esta curva). Logo,

$$\sum_{j=1}^{m} l\left(\frac{\mathcal{I}(m+1, n+1, j)}{\mathcal{I}(m+1, n+1, j+1)}\right) = 0.$$

Assim, $l\left(\dfrac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}(\kappa)}\right) = m+1$. Consequentemente,

$$l\left(\frac{\bigoplus_{i=1}^{r} \frac{\Omega_i}{\mathcal{T}_i}}{\frac{\Omega}{\mathcal{T}}}\right) = n + 2m - (m+1) = n + m - 1.$$

Portanto, utilizando a fórmula (3.6), o número de Tjurina de Q é

$$\begin{aligned} \tau &= \sum_{i=1}^{3} \tau_i + \sum_{1 \le i < j \le 3} I_{i,j} + l\left(\frac{\bigoplus_{i=1}^{3} \frac{\Omega_i}{\mathcal{T}_i}}{\frac{\Omega}{\mathcal{T}}}\right) \\ &= 0 + 0 + 0 + n + m + n + n + m - 1 = 3n + 2m - 1 \end{aligned}$$

Caso 2. $n = m$.

Neste caso, temos a parametrização

$$\phi(t) = \left[(t_1, 0), (t_2, t_2^n), \left(t_3, t_3^n\left(a + \sum_{j=1}^{n-1} a_j t_3^j\right)\right)\right],$$

com $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Seja agora $k-1$ o menor índice j tal que $a_j \neq 0$. Vamos dividir nossa análise em dois subcasos.

Subcaso *(i)* $2 \le k \le n-1$.

Ficamos assim com a seguinte parametrização

$$\phi(t) = \left[(t_1, 0), (t_2, t_2^n), \left(t_3, t_3^n\left(a + \sum_{j=k-1}^{n-1} a_j t_3^j\right)\right)\right], \text{ com } 2 \le k \le n-1.$$

A curva Q é então analiticamente equivalente à curva

$$\left\langle Y(Y-X^n)\left(Y-X^n\left(a+\sum_{j=k-1}^{n-1}a_jX^j\right)\right)\right\rangle.$$

Consideremos ainda

$$g_1=x,\ g_2=y,\ g_3=y-x^n \text{ e } g_4=y-x^n\left(a+\sum_{j=k-1}^{n-1}a_jx^j\right).$$

Pelos resultados vistos na Seção 1.4, constatamos que os pontos absolutos irredutíveis do semianel de valores Γ associado a Q são $v(g_1)=(1,1,1)$, $v(g_2)=(\infty,n,n)$, $v(g_3)=(n,\infty,n)$ e $v(g_4)=(n,n,\infty)$. Assim, temos

$$\Gamma=\langle\,(1,1,1),(\infty,n,n),(n,\infty,n),(n,n,\infty)\,\rangle.$$

Logo, uma Base Standard mínima para anel local da curva Q é $G=\{g_1,g_2,g_3,g_4\}$.

Sejam agora Ω o módulo de diferenciais de Kähler da curva Q e $\mathcal{T}$ seu submódulo de torção. O leitor pode encontrar no apêndice deste capítulo uma Base Standard mínima $H=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_7\}$ para $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$.

Logo, o conjunto de geradores mínimos de Λ é

$$\{(1,1,1),(\infty,n,n),(n,\infty,n),(n,n,\infty),(\infty,\infty,n+k),(\infty,n+k,\infty),(n+k,\infty,\infty)\}.$$

Além disso, o condutor de Λ é $\kappa=(n+k,n+k,n+k)$.

Assim, para calcular o número de Tjurina de Q, consideremos

$$\mathcal{I}=\frac{\Omega}{\mathcal{T}}\ \text{ e }\ \mathcal{J}=\bigoplus_{i=1}^{3}\frac{\Omega_i}{\mathcal{T}_i},$$

$\alpha=(1,1,1)$ e a seguinte cadeia saturada

$$\begin{aligned}
&\alpha^0=(1,1,1)<(2,1,1)<...<(n+k,1,1)=\alpha^{n+k}\\
&\alpha^{n+k}=(n+k,1,1)<(n+k,2,1)<...<(n+k,n+k,1)=\alpha^{2(n+k)}\\
&\alpha^{2(n+k)}=(n+k,n+k,1)<(n+k,n+k,2)<...<(n+k,n+k,n+k)=\alpha^{3(n+k)}=\kappa.
\end{aligned}$$

Usando essa cadeia, temos

$$\begin{aligned}
l\left(\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}(\kappa)}\right)=&\sum_{j=1}^{n+k-1}l\left(\frac{\mathcal{J}(j,1,1)}{\mathcal{J}(j+1,1,1)}\right)+\sum_{j=1}^{n+k-1}l\left(\frac{\mathcal{J}(n+k,j,1)}{\mathcal{J}(n+k,j+1,1)}\right)\\
&+\sum_{j=1}^{n+k-1}l\left(\frac{\mathcal{J}(n+k,n+k,j)}{\mathcal{J}(n+k,n+k,j+1)}\right).
\end{aligned}$$

Como $v(\mathcal{J}) = \bigoplus_{i=1}^{3} \Lambda_i = \bigoplus_{i=1}^{3}(\overline{\mathbb{N}} \setminus \{0\})$, temos que

$$l\left(\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}(\kappa)}\right) = n + k - 1 + n + k - 1 + n + k - 1 = 3n + 3k - 3.$$

Para o cálculo de $l\left(\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}(\kappa)}\right)$, notemos inicialmente que $v(\mathcal{I}) = \Lambda$. Agora, uma vez que $(j, j, j) \in F_1^{v(\mathcal{I})}(j, 1, 1)$, para todo $j = 1, ..., n + k - 1$, temos

$$\sum_{j=1}^{n+k-1} l\left(\frac{\mathcal{I}(j, 1, 1)}{\mathcal{I}(j + 1, 1, 1)}\right) = n + k - 1.$$

Também observemos que $F_2^{v(\mathcal{I})}(n + k, j, 1) = \emptyset$, para todo $j = 1, ..., n - 1$. Por outro lado, $(\infty, j, j) \in F_2^{v(\mathcal{I})}(n + k, j, 1)$, para todo $j = n, n + 1, ..., n + k - 1$. Logo,

$$\sum_{j=1}^{n+k-1} l\left(\frac{\mathcal{I}(n + k, j, 1)}{\mathcal{I}(n + k, j + 1, 1)}\right) = k.$$

Finalmente como $F_3^{v(\mathcal{I})}(n + k, n + k, j) = \emptyset$, para todo $j = 1, ..., n + k - 1$, temos

$$\sum_{j=1}^{n+k-1} l\left(\frac{\mathcal{I}(n + k, n + k, j)}{\mathcal{I}(n + k, n + k, j + 1)}\right) = 0.$$

Assim, $l\left(\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}(\kappa)}\right) = n + 2k - 1$. Consequentemente,

$$l\left(\frac{\bigoplus_{i=1}^{3} \frac{\Omega_i}{\mathcal{T}_i}}{\frac{\Omega}{\mathcal{T}}}\right) = 3n + 3k - 3 - (n + 2k - 1) = 2n + k - 2.$$

Portanto, utilizando a fórmula (3.6), o número de Tjurina de Q é

$$\begin{aligned}
\tau &= \sum_{i=1}^{3} \tau_i + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} I_{i,j} + l\left(\frac{\bigoplus_{i=1}^{3} \frac{\Omega_i}{\mathcal{T}_i}}{\frac{\Omega}{\mathcal{T}}}\right) \\
&= 0 + 0 + 0 + n + n + n + 2n + k - 2 \\
&= 5n + k - 2.
\end{aligned}$$

Subcaso (*ii*) $k = n$.

Ficamos com a seguinte parametrização

$$\phi(t) = \left[(t_1, 0), \left(t_2, t_2^n\right), \left(t_3, at_3^n\right)\right].$$

Desta maneira, a curva Q é analiticamente equivalente à curva quasehomogênea

$$\langle Y(Y-X^n)(Y-aX^n)\rangle.$$

O semianel de valores Γ associado a Q ainda é igual a

$$\Gamma = \langle (1,1,1),(\infty,n,n),(n,\infty,n),(n,n,\infty)\rangle.$$

Como Q é quasehomogênea, pela Observação 2.23, temos $\Lambda = \Gamma \setminus \{(0,0)\}$ e

$$\begin{aligned}\tau = \mu &= \mu_1+\mu_2+\mu_3+2(I_{1,2}+I_{1,3}+I_{2,3})-(3-1)\\ &= 0+0+0+2\cdot(n+n+n)-2 = 6n-2.\end{aligned}$$

3.2.3 Tabelas

Reunimos nas tabelas a seguir os resultados encontrados nesta seção de acordo com a multiplicidade da curva.

Multiplicidade 1		
$\Gamma = \overline{\mathbb{N}}$		
Parametrização $\phi = [\phi]$	Geradores mínimos de Λ	Número de Tjurina
$\phi = (t,0)$	1	$\tau = 0$

Multiplicidade 2		
$\Gamma = \langle 2,n,\infty\rangle$, n ímpar		
Parametrização $\phi = [\phi]$	Geradores mínimos de Λ	Número de Tjurina
$\phi = (t^2,t^n)$	$2,n$	$\tau = n-1$
$\Gamma = \langle (1,\infty),(\infty,1)\rangle$		
Parametrização $\phi = [\phi_1,\phi_2]$	Geradores mínimos de Λ	Número de Tjurina
$\phi_1 = (t_1,0)$, $\phi_2 = (0,t_2)$	$(1,\infty),(\infty,1)$	$\tau = 1$
$\Gamma = \langle (1,1),(\infty,n),(n,\infty)\rangle$, $n \geq 2$		
Parametrização $\phi = [\phi_1,\phi_2]$	Geradores mínimos de Λ	Número de Tjurina
$\phi_1 = (t_1,0)$, $\phi_2 = (t_2,t_2^n)$	$(1,1),(\infty,n),(n,\infty)$	$\tau = 2n-1$

Multiplicidade 3		
$\Gamma = \langle 3, n, \infty \rangle$, MDC$(3,n) = 1$		
Parametrização $\phi = [\phi]$	Geradores mínimos de Λ	Número de Tjurina
$\phi = (t^3, t^n)$	$3, n$	$\tau = 2(n-1)$
$\phi = (t^3, t^n + t^{2n-3m})$, para algum $2 \leq m \leq \left[\frac{n}{3}\right]$	$3, n, 2n - 3(m-1)$	$\tau = 2n - m - 1$
$\Gamma = \langle\, (1,n), (\infty, 2), (2, \infty) \,\rangle$, n ímpar e $n > 1$		
Parametrização $\phi = [\phi_1, \phi_2]$	Geradores mínimos de Λ	Número de Tjurina
$\phi_1 = (t_1, 0),\ \phi_2 = (t_2^n, t_2^2)$	$(1,n), (\infty, 2), (2, \infty)$	$\tau = n + 1$
$\Gamma = \langle\, (1,2), (m,n), (\infty, 2m), (2m, \infty) \,\rangle$, $2m < n$, n ímpar		
Parametrização $\phi = [\phi_1, \phi_2]$	Geradores mínimos de Λ	Número de Tjurina
$\phi_1 = (t_1, 0)$ $\phi_2 = (t_2^2, t_2^{2m} + t_2^n)$	$(1,2), (m,n), (\infty, 2m), (2m, \infty)$, $(\infty, n+2), (m+1, \infty)$	$\tau = n + 3m - 1$
$\Gamma = \langle\, (1,2), (\infty, n), (n, \infty) \,\rangle$, n ímpar e $n > 1$		
Parametrização $\phi = [\phi_1, \phi_2]$	Geradores mínimos de Λ	Número de Tjurina
$\phi_1 = (t_1, 0),\ \phi_2 = (t_2^2, t_2^n)$	$(1,2), (\infty, n), (n, \infty)$	$\tau = 3n - 2$
$\phi_1 = (t_1, 0)$ $\phi_2 = (t_2^2, t_2^n + t_2^{n+2m-1})$, para algum $1 \leq m \leq \frac{n-3}{2}$	$(1,2), (\infty, n), (\infty, n + 2m + 1)$, $\left(\frac{n+2m+1}{2}, \infty\right)$	$\tau = \dfrac{5n + 2m - 3}{2}$
$\Gamma = \langle\, (\infty, 1, n), (1, \infty, 1), (n, 1, \infty) \,\rangle,\ \ n \geq 1$		
Parametrização $\phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3]$	Geradores mínimos de Λ	Número de Tjurina
$\phi_1 = (t_1, 0),\ \phi_2 = (0, t_2),\ \phi_3 = (t_3, t_3^n)$	$(\infty, 1, n), (1, \infty, 1), (n, 1, \infty)$	$\tau = 2n + 2$
$\Gamma = \langle\, (1,1,1), (\infty, n, m), (n, \infty, n), (m, n, \infty) \,\rangle$, $1 < n < m$		
Parametrização $\phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3]$	Geradores mínimos de Λ	Número de Tjurina
$\phi_1 = (t_1, 0)$ $\phi_2 = (t_2, t_2^n)$ $\phi_3 = (t_3, t_3^m(a + \sum_{j=1}^{n-1} a_j t_3^j))$, $a \neq 0$	$(1,1,1)$, (∞, n, m), (n, ∞, n), (m, n, ∞), $(\infty, \infty, m+1)$, $(\infty, n+1, \infty)$, $(m+1, \infty, \infty)$	$\tau = 3n + 2m - 1$
$\Gamma = \langle\, (1,1,1), (\infty, n, n), (n, \infty, n), (n, n, \infty) \,\rangle$, $n > 1$		
Parametrização $\phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3]$	Geradores mínimos de Λ	Número de Tjurina
$\phi_1 = (t_1, 0),\ \phi_2 = (t_2, t_2^n)$ $\phi_3 = (t_3, t_3^n(a + \sum_{j=k-1}^{n-1} a_j t_3^j))$, $a \neq 0, 1$ e $a_{k-1} \neq 0$, para algum $2 \leq k \leq n-1$	$(1,1,1)$, (∞, n, n), (n, ∞, n), (n, n, ∞), $(\infty, \infty, n+k)$, $(\infty, n+k, \infty)$, $(n+k, \infty, \infty)$	$\tau = 5n + k - 2$
$\phi_1 = (t_1, 0),\ \phi_2 = (t_2, t_2^n)$ $\phi_3 = (t_3, a t_3^n)$, $a \neq 0, 1$	$(1,1,1)$, (∞, n, n), (n, ∞, n), (n, n, ∞)	$\tau = 6n - 2$

Apêndice

Curva $Q = \left\langle Y\left((Y - X^m)^2 - X^n\right)\right\rangle$, $2m < n$

Uma Base Standard mínima para o anel local de Q é o conjunto $G = \{x, y, z, f_2\}$, onde $z = y - x^m$ e $f_2 = (y - x^m)^2 - x^n$.

Consideremos o conjunto $H = \{dx, dy, dz, df_2, \omega_1, \omega_2\}$, onde

$$\omega_1 = mydx - xdy \quad \text{e} \quad \omega_2 = nzdx - 2xdz.$$

Como uma parametrização para Q é $\phi(t) = [(t_1, 0), (t_2, t_2^{2m} + t_2^n)]$, temos

$$\begin{aligned}
(x \circ \phi)(t) &= (t_1, t_2^2),\\
(y \circ \phi)(t) &= (0, t_2^{2m} + t_2^n),\\
(z \circ \phi)(t) &= (-t_1^m, t_2^n),\\
(f_2 \circ \phi)(t) &= (t_1^{2m} - t_1^n, 0),\\
(dx \circ \phi)(t) &= (1, 2t_2),\\
(dy \circ \phi)(t) &= (0, 2mt_2^{2m-1} - nt_2^{n-1}),\\
(dz \circ \phi)(t) &= (-mt_1^{m-1}, nt_2^{n-1}),\\
(df_2 \circ \phi)(t) &= (2mt_1^{2m-1} - nt_1^{n-1}, 0),\\
(\omega_1 \circ \phi)(t) &= (0, (2m - n)t_2^{n+1}),\\
(\omega_2 \circ \phi)(t) &= ((2m - n)t_1^m, 0).
\end{aligned}$$

Afirmação 1. Seja $\omega \in \frac{\Omega}{\mathcal{T}}$. Se $\nu(\omega) \geq (m + 1, n + 1)$, então ω admite redução módulo (H, G). Em particular, ω tem uma redução final nula módulo (H, G).

De fato, seja $\lambda = \nu(\omega)$ e escrevamos $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \overline{\mathbb{N}}^2$, com $\lambda_1 \geq m + 1$ e $\lambda_2 \geq n + 1$. Suponhamos que $\lambda_1 < \infty$. Como $\nu(\omega_2) = (m+1, \infty)$, considerando $\lambda_1 = m+1+\alpha_1$, com $0 \leq \alpha_1 < \infty$, temos

$$\nu_1(\omega) = \lambda_1 = m + 1 + \alpha_1 = \nu_1(x^{\alpha_1}\omega_2) \quad \text{e} \quad \nu_2(\omega) = \lambda_2 \leq \infty = \nu_2(x^{\alpha_1}\omega_2),$$

o que mostra que ω admite uma 1-redução módulo (H, G).

Suponhamos agora que $\lambda_2 < \infty$. Uma vez que $\nu(\omega_1) = (\infty, n+2)$ e $\nu(dy) = (\infty, 2m)$, consideremos $\lambda_2 = n + 1 + \alpha_2$, com $0 \leq \alpha_2 < \infty$.

Se α_2 é ímpar, temos $\alpha_2 = 2l + 1$, para algum $l \geq 0$, e $\lambda_2 = n + 2l + 2$. Assim,

$$\nu_1(\omega) = \lambda_1 \leq \infty = \nu_1(x^l\omega_1) \quad \text{e} \quad \nu_2(\omega) = \lambda_2 = n + 2l + 2 = \nu_2(x^l\omega_1).$$

Se α_2 é par, temos $\alpha_2 = 2l$, para algum $l \geq 0$, e $\lambda_2 = n+1+2l > 2m$. Assim,

$$\nu_1(\omega) = \lambda_1 \leq \infty = \nu_1(x^{\frac{n+1}{2}+l-m}dy) \;\text{ e }\; \nu_2(\omega) = \lambda_2 = n+1+2l = \nu_2(x^{\frac{n+1}{2}+l-m}dy),$$

o que mostra que ω admite uma 2-redução módulo (H, G).

Afirmação 2. O conjunto H é uma Base Standard mínima para $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$.

Vamos mostrar que todos os S_1-processos e S_2-processos mínimos entre dois elementos de H sobre G têm redução final nula módulo (H, G).

• S_1-processos mínimos entre dx e dz: $\varpi = c_1 x^{\alpha_1} z^{\alpha_2} f_2^{\alpha_3} dx + c_2 x^{\beta_1} z^{\beta_2} f_2^{\beta_3} dz$

$\varpi_1 = mx^{m-1}dx + dz = mx^{m-1}dx + dy - mx^{m-1}dx = dy = df_1$

$\varpi_2 = mzdx - xdz = m(y - x^m)dx - x(dy - mx^{m-1}dx) = mydx - xdy = \omega_1$

$\varpi_3 = mf_2dx + x^{m+1}dz = (m(t_1^{2m} - t_1^n) + t_1^{m+1}(-mt_1^{m-1}), t_2^{2(m+1)} \cdot nt_2^{n-1}) = (-mt_1^n, nt_2^{n+2m+1})$

$\varpi_4 = mz^3dx - xf_2dz = (m(-t^m)^3 - t_1 \cdot (t_1^{2m} - t_1^n) \cdot (-mt_1^{m-1}), mt_2^{3n} \cdot 2t_2) = (-mt_1^{m+n}, 2mt_2^{3n+1})$

$\varpi_5 = mf_2dx - xzdz = (m(t_1^{2m} - t_1^n) - t_1 \cdot (-t_1^m) \cdot (-mt_1^{m-1}), -t_2^2 \cdot t_2^n \cdot nt_2^{n-1}) = (-mt_1^n, -nt_2^{2n+1})$

$\varpi_6 = mzf_2dx - x^{2m+1}dz = (m(-t_1^m) \cdot (t_1^{2m} - t_1^n) - t_1^{2m+1} \cdot (-mt_1^{m-1}), -t_2^{2(2m+1)} \cdot nt_2^{n-1})$
$\quad = (mt^{m+n}, -nt_2^{n+4m+1})$.

Notemos que devido à Afirmação 1 os S_1-processos $\varpi_3, \varpi_4, \varpi_5$ e ϖ_6 têm redução final nula módulo (H, G).

• S_2-processos mínimos entre dx e dz: $\varpi = c_1 x^{\alpha_1} z^{\alpha_2} f_1^{\alpha_3} dx + c_2 x^{\beta_1} z^{\beta_2} f_1^{\beta_3} dz$

$\varpi_7 = nx^{n-1}dx - 2zdz = -df_2$

$\varpi_8 = nzdx - 2xdz = \omega_2$

$\varpi_9 = nx^{n+m-1}dx - 2zf_1dz = (nt_1^{n+m-1}, nt_2^{2(n+m-1)} \cdot 2t_2 - 2t_2^n \cdot (t_2^{2m} + t_2^n) \cdot nt_2^{n-1})$
$\quad = (nt_1^{n+m-1}, -2nt_2^{3n-1})$

$\varpi_{10} = nx^{m-1}zdx - 2f_1dz = (nt_1^{m-1} \cdot (-t_1^m), nt_2^{2(m-1)} \cdot t_2^n \cdot 2t_2 - 2(t_2^{2m} + t_2^n) \cdot nt_2^{n-1})$
$\quad = (-nt_1^{2m-1}, -2nt_2^{2n-1})$

$\varpi_{11} = nx^{n-m-1}f_1dx - 2zdz = (-2(-t_1^m) \cdot (-mt_1^{m-1}), nt_2^{2(n-m-1)} \cdot (t_1^{2m} + t_1^n) \cdot 2t_2 - 2t_2^n \cdot nt_2^{n-1})$
$\quad = (-2mt_1^{2m-1}, 2nt_2^{3n-2m-1})$

$\varpi_{12} = nzf_1dx - 2x^{m+1}dz = (-2t_1^{m+1} \cdot (-mt_1^{m-1}), nt_2^n \cdot (t_2^{2m} + t_2^n) \cdot 2t_2 - 2t_2^{2(m+1)} \cdot nt_2^{n-1})$
$\quad = (2mt_1^{2m}, 2nt_2^{2n+1})$.

Nos próximos S_2-processos os expoentes indicados são todos não nulos (quando o S_2-processo de fato existir).

$\varpi_{13} = nz^{\alpha_2}dx - 2f_1^{\beta_3}dz = (n(-t_1^m)^{\alpha_2}, nt_2^{n\alpha_2} \cdot 2t_2 - 2(t_2^{2m} + t_2^n)^{\beta_3} \cdot nt_2^{n-1})$
$\quad = ((-1)^{\alpha_2} nt_1^{m\alpha_2}, p(t_2))$, com $ord_{t_2}(p(t_2)) > n\alpha_2 + 1$

$\varpi_{14} = nf_1^{\alpha_3}dx - 2z^{\beta_2}dz = (-2(-t_1^m)^{\beta_2} \cdot (-mt_1^{m-1}), n(t_2^{2m} + t_2^n)^{\alpha_3} \cdot 2t_2 - 2t_2^{n\beta_3} \cdot nt_2^{n-1})$

$= ((-1)^{\beta_2+1} 2t_1^{m\beta_2}, p(t_2))$, com $ord_{t_2}(p(t_2)) > n\beta_3 + n - 1$

$\varpi_{15} = nz^{\alpha_2}dx - 2x^{\beta_1}f_1^{\beta_3}dz = (n(-t_1^m)^{\alpha_2}, nt_2^{n\alpha_2} \cdot 2t_2 - 2t_2^{2\beta_1} \cdot (t_2^{2m} + t_2^n)^{\beta_3} \cdot nt_2^{n-1})$

$= ((-1)^{\alpha_2} nt_1^{m\alpha_2}, p(t_2))$, com $ord_{t_2}(p(t_2)) > n\alpha_2 + 1$

$\varpi_{16} = nf_1^{\alpha_3}dx - 2x^{\beta_1}z^{\beta_2}dz = (-2t_1^{\beta_1} \cdot (-t_1^m)^{\beta_2} \cdot (-mt_1^{m-1}), n(t_2^{2m} + t_2^n)^{\alpha_3} - 2t_2^{2\beta_1} \cdot t_2^{n\beta_2} \cdot nt_2^{n-1})$

$= ((-1)^{\beta_2+1} 2t_1^{m\beta_2+m+\beta_1-1}, p(t_2))$, com $ord_{t_2}(p(t_2)) > n\beta_2 + n + 2\beta_1 + 1$.

Logo, todos os S_2-processos mínimos entre dx e dz têm uma redução final nula módulo (H, G).

• S_1-processos mínimos entre dx e df_2: $\varpi = c_1x^{\alpha_1}z^{\alpha_2}f_2^{\alpha_3}dx + c_2x^{\beta_1}z^{\beta_2}f_2^{\beta_3}df_2$

$\varpi_{17} = 2mx^{2m-1}dx - df_2 = (2mt_1^{2m-1} - (2mt_1^{2m-1} - nt_1^{n-1}), 2mt_2^{2(2m-1)} \cdot 2t_2) = (nt_1^{n-1}, 4mt_2^{4m-1})$

$\varpi_{18} = 2mz^2dx - xdf_2 = (2m(-t^m)^2 - t_1 \cdot (2mt_1^{2m-1} - nt_1^{n-1}), 2mt_2^{2n} \cdot 2t_2) = (2mnt_1^n, 4mt_2^{2n+1})$

$\varpi_{19} = 2mf_2dx - xdf_2 = (2m(t_1^{2m} - t_1^n) - t_1 \cdot (2mt_1^{2m-1} - nt_1^{n-1}), 0) = ((n - 2m)t_1^n, 0)$

$\varpi_{20} = 2mz^4dx - xf_2df_2 = (2m(-t_1^m)^4 - t_1 \cdot (t_1^{2m} - t_1^n) \cdot (2mt_1^{2m-1} - t_1^{n-1}), 2mt_2^{4n} \cdot 2t_2)$

$= ((2m + 1)t_1^{2m+n} - t_1^{2n}, 4mt_2^{4n+1})$

$\varpi_{21} = 2mf_2^2dx - xz^2df_2 = (2m(t_1^{2m} - t_1^n)^2 - t_1 \cdot (-t_1^m)^2 \cdot (2mt_1^{2m-1} - nt_1^{n-1}), 0)$

$= ((n - 4m)t_1^{2m+n} + 2mt_1^{2n}, 0)$

$\varpi_{22} = 2mzf_2dx + x^{m+1}df_2 = (2m(-t_1^m) \cdot (t_1^{2m} - t_1^n) + t_1^{m+1} \cdot (2mt_1^{2m-1} - nt_1^{n-1}), 0)$

$= ((2m - n)t_1^{m+n}, 0)$

$\varpi_{23} = 2mx^{m-1}f_2dx + zdf_2 = (2mt_1^{m-1} \cdot (t_1^{2m} - t_1^n) + (-t_1^m) \cdot (2mt_1^{2m-1} - nt_1^{n-1}), 0)$

$= ((n - 2m)t_1^{m+n-1}, 0)$

$\varpi_{24} = 2mx^{m-1}zdx + df_2 = (2mt_1^{m-1} \cdot (-t_1^m) + (2mt_1^{2m-1} - nt_1^{n-1}), 2mt_2^{2(m-1)} \cdot t_2^n \cdot 2t_2)$

$= (-nt_1^{n-1}, 4mt_2^{n+2m-1})$

$\varpi_{25} = 2mf_2^2dx + x^{m+1}zdf_2 = (2m(t_1^{2m} - t_1^n)^2 + t_1^{m+1} \cdot (-t_1^m) \cdot (2mt_1^{2m-1} - nt_1^{n-1}), 0)$

$= ((n - 4m)t_1^{2m+n} + 2mt_1^{2n}, 0)$.

Observemos agora que

$$\begin{aligned}\varpi_{17} \to \varpi'_{17} &:= \varpi_{17} - 2x^m df_1 = (nt_1^{n-1}, 4mt_2^{4m-1} - 2t_2^{2m} \cdot (2mt_2^{2m-1} + nt_2^{n-1})) \\ &= (nt_1^{n-1}, -2nt_2^{n+2m-1}).\end{aligned}$$

Logo, todos os S_1-processos mínimos entre dx e df_2 têm uma redução final nula módulo (H, G).

• S_2-processos mínimos entre dx e df_1: $\varpi = c_1x^{\alpha_1}z^{\alpha_2}f_1^{\alpha_3}dx + c_2x^{\beta_1}z^{\beta_2}f_1^{\beta_3}df_1$

$\varpi_{26} = mx^{m-1}dx - df_1 = -dz$

$\varpi_{27} = mz^2dx - x^{n+1-m}df_1 = (m(-t_1^m)^2, mt_2^{2n} \cdot 2t_2 - t_2^{2(n+1-m)} \cdot (2mt_2^{2m-1} + nt_2^{n-1}))$

$= (mt_1^{2m}, -nt_2^{3n-2m+1})$

$\varpi_{28} = mf_1dx - xdf_1 = \omega_1$

$$\varpi_{29} = mz^2 f_1 dx - x^{n+1} df_1 = (0, mt_2^{2n} \cdot (t_2^{2m} + t_2^n) \cdot 2t_2 - t_2^{2(n+1)} \cdot (2mt_2^{2m-1} + nt_2^{n-1}))$$
$$= (0, (2m-n)t_2^{3n+1}).$$

Nos próximos S_2-processos os expoentes indicados são todos não nulos (quando o S_2-processo de fato existir).

$$\varpi_{30} = mz^{\alpha_2} dx - f_1^{\beta_3} df_1 = (m(-t_1^m)^{\alpha_2}, mt_2^{n\alpha_2} \cdot 2t_2 - (t_2^{2m} + t_2^n)^{\beta_3} \cdot (2mt_2^{2m-1} + nt_2^{n-1}))$$
$$= ((-1)^{\alpha_2} mt_1^{m\alpha_2}, p(t_2)), \text{ com } ord_{t_2}(p(t_2)) > n\alpha_2 + 1$$
$$\varpi_{31} = mf_1^{\alpha_3} dx - z^{\beta_2} df_1 = (0, m(t_2^{2m} + t_2^n)^{\alpha_3} \cdot 2t_2 - t_2^{n\beta_2} \cdot (2mt_2^{2m-1} + nt_2^{n-1}))$$
$$= (0, p(t_2)), \text{ com } ord_{t_2}(p(t_2)) > n\beta_2 + 2m - 1$$
$$\varpi_{32} = mz^{\alpha_2} dx - x^{\beta_1} f_1^{\beta_3} df_1 = (m(-t_1^m)^{\alpha_2}, mt_2^{n\alpha_2} \cdot 2t_2 - t_2^{2\beta_1} \cdot (t_2^{2m} + t_2^n)^{\beta_3} \cdot (2mt_2^{2m-1} + nt_2^{n-1}))$$
$$= ((-1)^{\alpha_2} mt_1^{m\alpha_2}, p(t_2)), \text{ com } ord_{t_2}(p(t_2)) > n\alpha_2 + 1$$
$$\varpi_{33} = mf_1^{\alpha_3} dx - x^{\beta_1} z^{\beta_2} df_1 = (0, m(t_2^{2m} + t_2^n)^{\alpha_3} \cdot 2t_2 - t_2^{2\beta_1} \cdot t_2^{n\beta_2} \cdot (2mt_2^{2m-1} + nt_2^{n-1}))$$
$$= (0, p(t_2)), \text{ com } ord_{t_2}(p(t_2)) > n\beta_2 + 2m + 2\beta_1 - 1$$
$$\varpi_{34} = mx^{\alpha_1} f_1^{\alpha_3} dx - z^{\beta_2} df_1 = (0, mt_2^{2\alpha_1} \cdot (t_2^{2m} + t_2^n)^{\alpha_3} \cdot 2t_2 - t_2^{n\beta_2} \cdot (2mt_2^{2m-1} + nt_2^{n-1}))$$
$$= (0, p(t_2)), \text{ com } ord_{t_2}(p(t_2)) > n\beta_2 + 2m - 1$$
$$\varpi_{35} = mx^{\alpha_1} z^{\alpha_2} dx - f_1^{\beta_3} df_1 = (mt_1^{\alpha_1} \cdot (-t_1^m)^{\alpha_2}, mt_2^{2\alpha_1} \cdot t_2^{n\alpha_2} \cdot 2t_2 - (t_2^{2m} + t_2^n)^{\beta_3} \cdot (2mt_2^{2m-1} + nt_2^{n-1})$$
$$= ((-1)^{\alpha_2} mt_1^{m\alpha_2 + \alpha_1}, p(t_2)), \text{ com } ord_{t_2}(p(t_2)) > n\alpha_2 + 2\alpha_1 + 1.$$

Logo, todos os S_2-processos mínimos entre dx e df_1 têm uma redução final nula módulo (H, G).

- S_1-processos mínimos entre dx e ω_2: $\varpi = c_1 x^{\alpha_1} z^{\alpha_2} f_2^{\alpha_3} dx + c_2 x^{\beta_1} z^{\beta_2} f_2^{\beta_3} \omega_2$

$$\varpi_{36} = (2m-n)x^m dx - \omega_2 = ((2m-n)t_1^m - (2m-n)t_1^m, (2m-n)t_2^{2m} \cdot 2t_2)$$
$$= (0, 2(2m-n)t_2^{2m+1})$$
$$\varpi_{37} = (2m-n)z dx + \omega_2 = ((2m-n)(-t_1^m) + (2m-n)t_1^m, (2m-n)t_2^n \cdot 2t_2)$$
$$= (0, 2(2m-n)t_2^{n+1})$$
$$\varpi_{38} = (2m-n)f_2 dx - x^m \omega_2 = ((2m-n)(t_1^{2m} - t_1^n) - t_1^m \cdot (2m-n)t_1^m, 0) = ((n-2m)t_1^n, 0)$$
$$\varpi_{39} = (2m-n)f_2 dx + z\omega_2 = ((2m-n)(t_1^{2m} - t_1^n) + (-t_1^m) \cdot (2m-n)t_1^m, 0) = ((n-2m)t_1^n, 0).$$

Notemos agora que

$$\varpi_{39} \to \varpi'_{39} := \varpi_{39} - \tfrac{2m-n}{m} x df_1 = ((0, 2(2m-n)t_2^{2m+1} - \tfrac{2m-n}{m} t_2^2 \cdot (2mt_2^{2m-1} + nt_2^{n-1}))$$
$$= (0, -\tfrac{(2m-n)n}{m} t_2^{n+1}).$$

Logo, todos os S_1-processos mínimos entre dx e ω_2 têm uma redução final nula módulo (H, G).

- S_2-processos mínimos entre dx e ω_1: $\varpi = c_1 x^{\alpha_1} z^{\alpha_2} f_1^{\alpha_3} dx + c_2 x^{\beta_1} z^{\beta_2} f_1^{\beta_3} \omega_1$

$$\varpi_{40} = (2m-n)x^n dx - 2z\omega_1 = ((2m-n)t_1^n, (2m-n)t_2^{2n} \cdot 2t_2 - 2t_2^n \cdot (2m-n)t_2^{n+1})$$
$$= ((2m-n)t_1^n, 0)$$

$$\begin{aligned}
\varpi_{41} &= (2m-n)zdx - 2\omega_1 = ((2m-n)(-t^m), (2m-n)t_2^n \cdot 2t_2 - 2(2m-n)t_2^{n+1}) \\
&= ((n-2m)t_1^m, 0) = \omega_2 \\
\varpi_{42} &= (2m-n)x^m zdx - 2f_1\omega_1 \\
&= ((2m-n)t_1^m \cdot (-t_1^m), (2m-n)t_2^{2m} \cdot t_2^n \cdot 2t_2 - 2(t_2^{2m} + t_2^n) \cdot (2m-n)t_2^{n+1}) \\
&= ((n-2m)t_1^{2m}, -2(2m-n)t_2^{2n+1}) \\
\varpi_{43} &= (2m-n)zf_1dx - x^m\omega_1 = (0, (2m-n)t_2^n \cdot (t_2^{2m} + t_2^n) \cdot 2t_2 - t_2^{2m} \cdot (2m-n)t_2^{n+1}) \\
&= (0, 2(2m-n)t_2^{2n+1}).
\end{aligned}$$

Nos próximos S_2-processos os expoentes indicados são todos não nulos (quando o S_2-processo de fato existir).

$$\begin{aligned}
\varpi_{44} &= (2m-n)f_1^{\alpha_3}dx - 2z^{\beta_2}\omega_1 = (0, (2m-n)(t_2^{2m} + t_2^n)^{\alpha_3} - 2t_2^{n\beta_2} \cdot (2m-n)t_2^{n+1}) \\
&= (0, p(t_2)), \text{ com } ord_{t_2}(p(t_2)) > n\beta_2 + n + 1 \\
\varpi_{45} &= (2m-n)f_1^{\alpha_3}dx - 2x^{\beta_1}z^{\beta_2}\omega_1 = (0, (2m-n)(t_2^{2m} + t_2^n)^{\alpha_3} - 2t_2^{2\beta_1} \cdot t_2^{n\beta_2} \cdot (2m-n)t_2^{n+1}) \\
&= (0, p(t_2)), \text{ com } ord_{t_2}(p(t_2)) > n\beta_2 + n + 2\beta_1 + 1 \\
\varpi_{46} &= (2m-n)x^{\alpha_1}f_1^{\alpha_3}dx - 2z^{\beta_2}df_1 = (0, (2m-n)t_1^{\alpha_1} \cdot (t_2^{2m} + t_2^n)^{\alpha_3} - 2t_2^{n\beta_2} \cdot (2m-n)t_2^{n+1}) \\
&= (0, p(t_2)), \text{ com } ord_{t_2}(p(t_2)) > n\beta_2 + n + 1.
\end{aligned}$$

Logo, todos os S_2-processos mínimos entre dx e ω_1 têm uma redução final nula módulo (H, G).

- S_1-processos mínimos entre dz e df_2: $\varpi = c_1x^{\alpha_1}z^{\alpha_2}f_2^{\alpha_3}dz + c_2x^{\beta_1}z^{\beta_2}f_2^{\beta_3}df_2$

$$\begin{aligned}
\varpi_{47} &= 2x^m dz + df_2 = (2t_1^m \cdot (-mt_1^{m-1}) + (2mt_1^{2m-1} - nt_1^{n-1}), 2t_2^{2m} \cdot nt_2^{n-1}) \\
&= (-nt_1^{n-1}, 2nt_2^{n+2m-1}) \\
\varpi_{48} &= 2zdz - df_2 = (2(-t_1^m) \cdot (-mt_1^{m-1}) - (2mt_1^{2m-1} - nt_1^{n-1}), 2t_2^n \cdot nt_2^{n-1}) = (nt_1^{n-1}, 2nt_2^{2n-1}) \\
\varpi_{49} &= 2f_2dz - zdf_2 = (2(t_1^{2m} - t_1^n) \cdot (-mt_1^{m-1}) - (-t_1^m) \cdot (2mt_1^{2m-1} - nt_1^{n-1}), 0) \\
&= ((2m-n)t_1^{m+n-1}, 0) \\
\varpi_{50} &= 2f_2dz + x^m df_2 = (2(t_1^{2m} - t_1^n) \cdot (-mt_1^{m-1}) + (t_1^m) \cdot (2mt_1^{2m-1} - nt_1^{n-1}), 0) \\
&= ((2m-n)t_1^{m+n-1}, 0).
\end{aligned}$$

Logo, todos os S_1-processos mínimos entre dz e df_2 têm uma redução final nula módulo (H, G).

- S_2-processos mínimos entre dz e df_1: $\varpi = c_1x^{\alpha_1}z^{\alpha_2}f_1^{\alpha_3}dz + c_2x^{\beta_1}z^{\beta_2}f_1^{\beta_3}df_1$

$$\begin{aligned}
\varpi_{51} &= 2mx^m dz - nzdf_1 = (2mt_1^m \cdot (-mt_1^{m-1}), 2mt_2^{2m} \cdot nt_2^{n-1} - nt_2^n \cdot (2mt_2^{2km-1} + nt_2^{n-1})) \\
&= (-2m^2t_1^{2m-1}, -n^2t_2^{2n-1}) \\
\varpi_{52} &= 2mzdz - nx^{n-m}df_1 \\
&= (2m(-t_1^m) \cdot (-mt_1^{m-1}), 2mt_2^n \cdot nt_2^{n-1} - nt_2^{2(n-m)} \cdot (2mt_2^{2m-1} + nt_2^{n-1})) \\
&= (2m^2t_1^{2m-1}, -n^2t_2^{3n-2m-1})
\end{aligned}$$

$\varpi_{53} = 2mf_1dz - nzdf_1 = (0, 2m(t_2^{2m} + t_2^n) \cdot nt_2^{n-1} - nt_2^n \cdot (2mt_2^{2m-1} + nt_2^{n-1}))$
$= (0, (2m-n)nt_2^{2n-1}).$

Nos próximos S_2-processos os expoentes indicados são todos não nulos (quando o S_2-processo de fato existir).

$\varpi_{54} = 2mz^{\alpha_2}dz - nf_1^{\beta_3}df_1$
$= (2m(-t_1^m)^{\alpha_2} \cdot (-mt_1^{m-1}), 2mt_2^{n\alpha_2} \cdot nt_2^{n-1} - n(t_2^{2m} + t_2^n)^{\beta_3} \cdot (2mt_2^{2m-1} + nt_2^{n-1}))$
$= ((-1)^{\alpha_2}2m^2t_1^{m\alpha_2+m-1}, p(t_2))$, com $ord_{t_2}(p(t_2)) > n\alpha_2 + n - 1$

$\varpi_{55} = 2mx^{\alpha_1}z^{\alpha_2}dz - nf_1^{\beta_3}df_1$
$= (2mt_1^{\alpha_1} \cdot (-t_1^m)^{\alpha_2} \cdot (-mt_1^{m-1}), 2mt_2^{2\alpha_1} \cdot t_2^{n\alpha_2} \cdot nt_2^{n-1} - n(t_2^{2m} + t_2^n)^{\beta_3} \cdot (2mt_2^{2m-1} + nt_2^{n-1}))$
$= ((-1)^{\alpha_2+1}2m^2t_1^{m\alpha_2+m+\alpha_1-1}, p(t_2))$, com $ord_{t_2}(p(t_2)) > n\alpha_2 + n + 2\alpha_1 - 1$

$\varpi_{56} = 2mx^{\alpha_1}f_1^{\alpha_3}dz - nz^{\beta_2}df_1 = (0, 2mt_2^{2\alpha_1} \cdot (t_2^{2m} + t_2^n)^{\alpha_3} \cdot nt_2^{n-1} - nt_2^{n\beta_2} \cdot (2mt_2^{2m-1} + nt_2^{n-1}))$
$= (0, p(t_2))$, com $ord_{t_2}(p(t_2)) > n\beta_2 + 2m - 1$

$\varpi_{57} = 2mz^{\alpha_2}dz - nx^{\beta_1}f_1^{\beta_3}df_1$
$= (2m(-t_1^m)^{\alpha_2} \cdot (-mt_1^{m-1}), 2mt_2^{n\alpha_2} \cdot nt_2^{n-1} - nt_2^{n\beta_1} \cdot (t_2^{2m} + t_2^n)^{\beta_3} \cdot (2mt_2^{2m-1} + nt_2^{n-1}))$
$= ((-1)^{\alpha_2+1}2m^2t_1^{m\alpha_2+m-1}, p(t_2))$, com $ord_{t_2}(p(t_2)) > n\alpha_2 + n - 1$

$\varpi_{58} = 2mf_1^{\alpha_3}dz - nx^{\beta_1}z^{\beta_2}df_1 = (0, 2m(t_2^{2m} + t_2^n)^{\alpha_3} \cdot nt_2^{n-1} - nt_2^{2\beta_1} \cdot t_2^{n\beta_2} \cdot (2mt_2^{2m-1} + nt_2^{n-1}))$
$= (0, p(t_2))$, com $ord_{t_2}(p(t_2)) > n\beta_2 + 2m + 2\beta_1 - 1.$

Logo, todos os S_2-processos mínimos entre dz e df_1 têm uma redução final nula módulo (H, G).

- S_1-processos mínimos entre dz e ω_2: $\varpi = c_1x^{\alpha_1}z^{\alpha_2}f_2^{\alpha_3}dz + c_2x^{\beta_1}z^{\beta_2}f_2^{\beta_3}\omega_2$

$\varpi_{59} = (2m-n)xdz + m\omega_2 = ((2m-n)t_1 \cdot (-mt_1^{m-1}) + m(2m-n)t_1^m, (2m-n)t_2^2 \cdot nt_2^{n-1})$
$= (0, (2m-n)nt_2^{n+1}) = n\omega_1$

$\varpi_{60} = (2m-n)zdz - mx^{m-1}\omega_2$
$= ((2m-n)(-t_1^m) \cdot (-mt_1^{m-1}) - mt_1^{m-1} \cdot (2m-n)t_1^m, (2m-n)t_2^n \cdot nt_2^{n-1})$
$= (0, (2m-n)nt_2^{2n-1})$

$\varpi_{61} = (2m-n)f_2dz + mx^{2m-1}\omega_2 = ((2m-n)(t_1^{2m} - t_2^n) \cdot (-mt_1^{m-1}) + mt_1^{2m-1} \cdot (2m-n)t_1^m, 0)$
$= ((2m-n)mt_1^{m+n-1}, 0)$

$\varpi_{62} = (2m-n)f_2dz - mx^{m-1}z\omega_2$
$= ((2m-n)(t_1^{2m} - t_2^n) \cdot (-mt_1^{m-1}) - mt_1^{m-1} \cdot (-t_1^m) \cdot (2m-n)t_1^m, 0)$
$= ((2m-n)mt_1^{m+n-1}, 0).$

Logo, todos os S_1-processos mínimos entre dz e ω_2 têm uma redução final nula módulo (H, G).

- S_2-processos mínimos entre dz e ω_1: $\varpi = c_1x^{\alpha_1}z^{\alpha_2}f_1^{\alpha_3}dz + c_2x^{\beta_1}z^{\beta_2}f_1^{\beta_3}\omega_1$

$$
\begin{aligned}
\varpi_{63} &= (2m-n)xdz - n\omega_1 = ((2m-n)t_1 \cdot (-mt_1^m), (2m-n)t_2^2 \cdot nt_2^{n-1} - n(2m-n)t_2^{n+1}) \\
&= ((n-2m)mt_1^{m+1}, 0) \\
\varpi_{64} &= (2m-n)z^2dz - nx^{n-1}\omega_1 \\
&= ((2m-n)(-t_1^m)^2 \cdot (-mt_1^{m-1}), (2m-n)t_2^{2n} \cdot nt_2^{n-1} - nt_2^{2(n-1)} \cdot (2m-n)t_2^{n+1}) \\
&= ((n-2m)mt_1^{3m-1}, 0) \\
\varpi_{65} &= (2m-n)f_1dz - nx^{m-1}\omega_1 = (0, (2m-n)(t_2^{2m}+t_2^n) \cdot nt_2^{n-1} - nt_2^{2(m-1)} \cdot (2m-n)t_2^{n+1}) \\
&= (0, (2m-n)nt_2^{2n-1}).
\end{aligned}
$$

Nos próximos S_2-processos os expoentes indicados são todos não nulos (quando o S_2-processo de fato existir).

$$
\begin{aligned}
\varpi_{66} &= (2m-n)z^{\alpha_2}dz - nf_1^{\beta_3}\omega_1 \\
&= ((2m-n)(-t_1^m)^{\alpha_2} \cdot (-mt_1^{m-1}), (2m-n)t_2^{n\alpha_2} \cdot nt_2^{n-1} - n(t_2^{2m}+t_2^n)^{\beta_3} \cdot (2m-n)t_2^{n+1}) \\
&= ((-1)^{\alpha_2+1}(2m-n)mt_1^{m\alpha_2+m-1}, p(t_2)), \text{ com } ord_{t_2}(p(t_2)) > n\alpha_2 + n - 1 \\
\varpi_{67} &= (2m-n)f_1^{\alpha_3}dz - nz^{\beta_2}\omega_1 = (0, (2m-n)(t_2^{2m}+t_2^n)^{\alpha_3} \cdot nt_2^{n-1} - nt_2^{n\beta_2} \cdot (2m-n)t_2^{n+1}) \\
&= (0, p(t_2)), \text{ com } ord_{t_2}(p(t_2)) > n\beta_2 + n + 1 \\
\varpi_{68} &= (2m-n)x^{\alpha_1}z^{\alpha_2}dz - nf_1^{\beta_3}\omega_1 \\
&= ((2m-n)t_1^{\alpha_1} \cdot (-t_1^m)^{\alpha_2} \cdot (-mt_1^{m-1}), (2m-n)t_2^{2\alpha_1} \cdot t_2^{n\alpha_2} \cdot nt_2^{n-1} - n(t_2^{2m}+t_2^n)^{\beta_3} \cdot (2m-n)t_2^{n+1}) \\
&= ((-1)^{\alpha_2+1}(2m-n)mt_1^{m\alpha_2+m-1}, p(t_2)), \text{ com } ord_{t_2}(p(t_2)) > n\alpha_2 + n + 2\alpha_1 - 1 \\
\varpi_{69} &= (2m-n)x^{\alpha_1}f_1^{\alpha_3}dz - nz^{\beta_2}\omega_1 = (0, (2m-n)t_2^{2\alpha_1} \cdot (t_2^{2m}+t_2^n)^{\alpha_3} \cdot nt_2^{n-1} - nt_2^{n\beta_2} \cdot (2m-n)t_2^{n+1}) \\
&= (0, p(t_2)), \text{ com } ord_{t_2}(p(t_2)) > n\beta_2 + n + 1 \\
\varpi_{70} &= (2m-n)z^{\alpha_2}dz - nx^{\beta_1}f_1^{\beta_3}\omega_1 \\
&= ((2m-n)(-t_1^m)^{\alpha_2} \cdot (-mt_1^{m-1}), (2m-n)t_2^{n\alpha_2} \cdot nt_2^{n-1} - nt_2^{2\beta_1} \cdot (t_2^{2m}+t_2^n)^{\beta_3} \cdot (2m-n)t_2^{n+1}) \\
&= ((-1)^{\alpha_2+1}(2m-n)mt_1^{m\alpha_2+m-1}, p(t_2)), \text{ com } ord_{t_2}(p(t_2)) > n\alpha_2 + n - 1 \\
\varpi_{71} &= (2m-n)f_1^{\alpha_3}dz - nx^{\beta_1}z^{\beta_2}\omega_1 = (0, (2m-n)(t_2^{2m}+t_2^n)^{\alpha_3} \cdot nt_2^{n-1} - nt_2^{2\beta_1} \cdot t_2^{n\beta_2} \cdot (2m-n)t_2^{n+1}) \\
&= (0, p(t_2)), \text{ com } ord_{t_2}(p(t_2)) > n\beta_2 + n + 2\beta_1 + 1.
\end{aligned}
$$

Logo, todos os S_2-processos mínimos entre dz e ω_1 têm uma redução final nula módulo (H, G).

- S_1-processos mínimos entre df_2 e ω_2: $\varpi = c_1x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}f_2^{\alpha_3}df_2 + c_2x^{\beta_1}y^{\beta_2}f_2^{\beta_3}\omega_2$

Todos satisfazem $\nu(\varpi) \geq (m+1, n+1)$. Logo, todos têm redução final nula módulo (H, G).

- S_2-processos mínimos entre df_1 e ω_1: $\varpi = c_1x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}f_1^{\alpha_3}df_1 + c_2x^{\beta_1}y^{\beta_2}f_1^{\beta_3}\omega_1$

Todos satisfazem $\nu(\varpi) \geq (m+1, n+1)$. Logo, todos têm redução final nula módulo (H, G).

Portanto, H é uma Base Standard para $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$. A minimalidade de H é devida às ordens de seus elementos.

Curva $Q = \left\langle Y(Y^2 - X^n - 2X^{\frac{n+2m-1}{2}}Y + X^{n+2m-1})\right\rangle$**,** $1 \leq m \leq \frac{n-3}{2}$

Uma Base Standard mínima para o anel local de Q é o conjunto $G = \{x, y, f_2\}$, onde $f_2 = y^2 - x^n - 2x^{\frac{n+2m-1}{2}y + x^{n+2m-1}}$.

Consideremos o conjunto $H = \{dx, dy, \omega_1, \omega_2\}$, onde

$$\omega_1 = nydx - 2xdy \ \text{ e } \ \omega_2 = (-2m+1)x^{\frac{n+2m-1}{2}}dx - \omega_1.$$

Como uma parametrização para Q é $\phi(t) = [(t_1, 0), (t_2^2, t_2^n + t_2^{n+2m-1})]$, temos

$$\begin{aligned}
&(x \circ \phi)(t) = (t_1, t_2^2),\\
&(y \circ \phi)(t) = (0, t_2^n + t_2^{n+2m-1}),\\
&(f_2 \circ \phi)(t) = (-t_1^n + t_1^{n+2m-1}, 0),\\
&(dx \circ \phi)(t) = (1, 2t_2),\\
&(dy \circ \phi)(t) = (0, nt_2^{n-1} + (n+2m-1)t_2^{n+2m-2}),\\
&(\omega_1 \circ \phi)(t) = (0, (-4m+2)t_2^{n+2m}),\\
&(\omega_2 \circ \phi)(t) = ((-2m+1)t_1^{\frac{n+2m-1}{2}}, 0).
\end{aligned}$$

Afirmação 1. Seja $\omega \in \frac{\Omega}{\mathcal{T}}$. Se $\nu(\omega) \geq \left(\frac{n+2m+1}{2}, n+2m\right)$, então ω admite redução módulo (H, G). Em particular, ω tem uma redução final nula módulo (H, G).

De fato, seja $\lambda = \nu(\omega)$ e escrevamos $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \overline{\mathbb{N}}^2$, com $\lambda_1 \geq \frac{n+2m+1}{2}$ e $\lambda_2 \geq n+2m$. Suponhamos que $\lambda_1 < \infty$. Como $\nu(\omega_2) = \left(\frac{n+2m+1}{2}, \infty\right)$, considerando $\lambda_1 = \frac{n+2m+1}{2} + \alpha_1$, com $0 \leq \alpha_1 < \infty$, temos

$$\nu_1(\omega) = \lambda_1 = \frac{n+2m+1}{2} + \alpha_1 = \nu_1(x^{\alpha_1}\omega_2) \ \text{ e } \ \nu_2(\omega) = \lambda_2 \leq \infty = \nu_2(x^{\alpha_1}\omega_2),$$

o que mostra que ω admite uma 1-redução módulo (H, G).

Suponhamos agora que $\lambda_2 < \infty$. Uma vez que $\nu(\omega_1) = (\infty, n+2m+1)$ e $\nu(dy) = (\infty, n)$, consideremos $\lambda_2 = n + 2m + \alpha_2$, com $0 \leq \alpha_2 < \infty$.

Se α_2 é ímpar, temos $\alpha_2 = 2l + 1$, para algum $l \geq 0$, e $\lambda_2 = n + 2m + 2l + 1$. Assim,

$$\nu_1(\omega) = \lambda_1 \leq \infty = \nu_1(x^l\omega_1) \ \text{ e } \ \nu_2(\omega) = \lambda_2 = n + 2m + 1 + 2l = \nu_2(x^l\omega_1).$$

Se α_2 é par, temos $\alpha_2 = 2l$, para algum $l \geq 0$, e $\lambda_2 = n + 2m + 2l$. Assim,

$$\nu_1(\omega) = \lambda_1 \leq \infty = \nu_1(x^{m+l}dy) \ \text{ e } \ \nu_2(\omega) = \lambda_2 = n + 2m + 2l = \nu_2(x^{m+l}dy),$$

o que mostra que ω admite uma 2-redução módulo (H, G).

Afirmação 2. O conjunto H é uma Base Standard mínima para $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$.

Vamos mostrar que todos os S_1-processos e S_2-processos mínimos entre dois elementos de H sobre G têm redução final nula módulo (H, G).

• S_1-processos mínimos entre dx e ω_2: $\varpi = c_1 x^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} dx + c_2 x^{\beta_1} f_2^{\beta_2} \omega_2$.

$$\varpi_1 = (2m-1)x^{\frac{n+2m-1}{2}} dx + \omega_2 = -\omega_1$$
$$\begin{aligned}\varpi_2 &= (2m-1)f_2 dx - x^{\frac{n-2m+1}{2}}\omega_2 = ((2m-1)(-t_1^n + t_1^{n+2m-1}) - t_1^{\frac{n-2m+1}{2}} \cdot (-2m+1)t_1^{\frac{n+2m-1}{2}}, 0)\\ &= ((2m-1)t_1^{n+2m-1}, 0).\end{aligned}$$

Notemos que devido à Afirmação 1 o S_1-processo ϖ_2 tem redução final nula módulo (H, G).

• S_2-processos mínimos entre dx e dy: $\varpi = c_1 x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} dx + c_2 x^{\beta_1} y^{\beta_2} dy$.

$$\begin{aligned}\varpi_3 &= nx^{n-1}dx - 2ydy\\ &= (nt_1^{n-1}, nt_2^{2(n-1)} \cdot 2t_2 - 2(t_2^n + t_2^{n+2m-1}) \cdot (nt_2^{n-1} + (n+2m-1)t_2^{n+2m-2}))\\ &= (nt_1^{n-1}, -2(2n+2m-1)t_2^{2n+2m-2} - 2(n+2m-1)t_2^{2n+4m-3})\end{aligned}$$
$$\varpi_4 = nydx - 2xdy = \omega_1.$$

Notemos que devido à Afirmação 1 o S_2-processo ϖ_3 tem redução final nula módulo (H, G).

• S_2-processos mínimos entre dx e ω_1: $\varpi = c_1 x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} dx + c_2 x^{\beta_1} y^{\beta_2} \omega_1$.

$$\begin{aligned}\varpi_5 &= (2m-1)x^{\frac{n+2m-1}{2}} dx + \omega_1 = ((2m-1)t_1^{\frac{n+2m-1}{2}}, (2m-1)t_2^{n+2m-1} \cdot 2t_2 + (-4m+2)t_2^{n+2m})\\ &= ((2m-1)t_1^{\frac{n+2m-1}{2}}, 0) = -\omega_2\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\varpi_6 &= (2m-1)y^2 dx + x^{\frac{n-2m+1}{2}}\omega_1\\ &= (0, (2m-1)(t_2^n + t_2^{n+2m-1})^2 \cdot 2t_2 + t_2^{n-2m+1} \cdot (-4m+2)t_2^{n+2m})\\ &= (0, (8m-4)t_2^{2n+2m} + (4m-2)t_2^{2n+4m-1}).\end{aligned}$$

Notemos que devido à Afirmação 1 o S_2-processo ϖ_6 tem redução final nula módulo (H, G).

• S_2-processos mínimos entre dy e ω_1: $\varpi = c_1 x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} dy + c_2 x^{\beta_1} y^{\beta_2} \omega_1$.

Todos satisfazem $\nu(\varpi) \geq \left(\frac{n+2m+1}{2}, n+2m\right)$. Logo, todos têm redução final nula módulo (H, G).

Portanto, H é uma Base Standard para $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$. A minimalidade de H é devida às ordens de seus elementos.

Curva $Q = \left\langle Y(Y-X^n)\left(Y - X^m\left(a+\sum_{j=1}^{n-1} a_jX^j\right)\right)\right\rangle$**,** $1<n<m$ **e** $a\neq 0$

Uma Base Standard mínima para o anel local de Q é o conjunto $G=\{g_1,g_2,g_3,g_4\}$, onde $g_1=x$, $g_2=y$, $g_3=y-x^n$ e $g_4=y-x^m\left(a+\sum_{j=1}^{n-1}a_jx^j\right)$.

Consideremos o conjunto $H=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_7\}$, onde $\omega_i=dg_i$, para $i=1,2,3,4$ e

$$\begin{aligned}
\omega_5 &= ng_2\omega_1 - g_1\omega_2,\\
\omega_6 &= (n-m)g_1\omega_2 - \left(m+\frac{ma_1}{a(n-m)}g_1+...\right)\omega_5,\\
\omega_7 &= (n-m)g_1\omega_4 - \left(1+ag_1^{m-n}+...\right)\omega_6.
\end{aligned}$$

Como uma parametrização para Q é $\phi(t)=\left[(t_1,0),(t_2,t_2^n),\left(t_3,t_3^m\left(a+\sum_{j=1}^{n-1}a_jt_3^j\right)\right)\right]$, temos

$$\begin{aligned}
&g_1(t)=(t_1,t_2,t_3),\\
&g_2(t)=\left(0,t_2^n,t_3^m\left(a+\sum_{j=1}^{n-1}a_jt_3^j\right)\right),\\
&g_3(t)=\left(-t_1^n,0,t_3^m\left(a+\sum_{j=1}^{n-1}a_jt_3^j\right)-t_3^n\right),\\
&g_4(t)=\left(-t_1^m\left(a+\sum_{j=1}^{n-1}a_jt_1^j\right),t_2^n-t_2^m\left(a+\sum_{j=1}^{n-1}a_jt_2^j\right),0\right),\\
&\omega_1(t)=(1,1,1),\\
&\omega_2(t)=\left(0,nt_2^{n-1},t_3^{m-1}\left(am+\sum_{j=1}^{n-1}(m+j)a_jt_3^j\right)\right),\\
&\omega_3(t)=\left(-nt_1^{n-1},0,t_3^{m-1}\left(am+\sum_{j=1}^{n-1}(m+j)a_jt_3^j\right)-nt_3^{n-1}\right),\\
&\omega_4(t)=\left(-t_1^{m-1}\left(am+\sum_{j=1}^{n-1}(m+j)a_jt_1^j\right),nt_2^{n-1}-t_2^{m-1}\left(am+\sum_{j=1}^{n-1}(m+j)a_jt_2^j\right),0\right),\\
&\omega_5(t)=\left(0,0,t_3^m\left(a(n-m)+\sum_{j=1}^{n-1}(n-m-j)a_jt_3^j\right)\right),\\
&\omega_6(t)=(0,n(n-m)t_2^n,0),\\
&\omega_7(t)=\left(-(n-m)t_3^m\left(am+\sum_{j=1}^{n-1}(m+j)a_jt_3^j\right),0,0\right)
\end{aligned}$$

Afirmação 1. Seja $\varpi \in \frac{\Omega}{\mathcal{T}} \setminus \{0\}$. Se $\nu(\omega) \geq (m+1, n+1, m+1)$, então ϖ admite redução módulo (H, G). Em particular, ϖ tem redução final nula módulo (H, G).

Com efeito, seja $\lambda = \nu(\varpi)$ e escrevamos $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \overline{\mathbb{N}}^3 \setminus \{\underline{\infty}\}$, com $\lambda_1, \lambda_3 \geq m+1$ e $\lambda_2 \geq n+1$. Suponhamos que $\lambda_1 < \infty$. Como $\nu(\omega_7) = (m+1, \infty, \infty)$, considerando $\lambda_1 = m + 1 + \alpha_1$, com $0 \leq \alpha_1 < \infty$, temos

$$\begin{aligned}
\nu_1(\varpi) &= \lambda_1 = m + 1 + \alpha_1 = \nu_1(g_1^{\alpha_1}\omega_7),\\
\nu_2(\varpi) &= \lambda_2 \leq \infty = \nu_2(g_1^{\alpha_1}\omega_7),\\
\nu_3(\varpi) &= \lambda_3 \leq \infty = \nu_3(g_1^{\alpha_1}\omega_7),
\end{aligned}$$

o que mostra que ϖ admite uma 1-redução módulo (H, G).

Analogamente mostra-se que se $\lambda_k < \infty$, então ϖ admite uma k-redução módulo (H, G), para $k = 2, 3$.

Afirmação 2. H é uma Base Standard mínima para $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$.

Para provar essa afirmação, basta aplicar o Algoritmo 3 ao conjunto H. Notemos inicialmente que devido à Afirmação 1 se ϖ é um S_k-processo de H sobre G tal que $\nu(\varpi) \geq (m + 1, n + 1, m + 1)$, então ϖ tem redução final nula módulo (H, G).

Analisemos agora $\nu_1(\varpi)$, $\nu_2(\varpi)$ e $\nu_3(\varpi)$, onde ϖ é um S_1-processo de H sobre G.

- S_1-processos entre ω_1 e ω_3: $\varpi = c_1 g_1^{\alpha_1} g_3^{\alpha_3} g_4^{\alpha_4}\omega_1 + c_2 g_1^{\beta_1} g_3^{\beta_3} g_4^{\beta_4}\omega_3$

$*$ $\nu_1(\varpi)$

Notemos que $\nu_1(\varpi) > \alpha_1 + n\alpha_3 + m\alpha_4 + 1 = \beta_1 + n\beta_3 + m\beta_4 + n$. Assim, se $\alpha_4 \neq 0$ ou $\beta_4 \neq 0$, então $\nu_1(\varpi) > m$. Se $\alpha_4 = \beta_4 = 0$, então devemos ter

$$\varpi_1(t_1) = (-1)^{\beta_3} n t_1^{\alpha_1}(-t_1^n)^{\alpha_3} + (-1)^{\alpha_3} t_1^{\beta_1}(-t_1^n)^{\beta_3}(-n t_1^{n-1}) = 0.$$

Portanto, sempre temos $\nu_1(\varpi) > m$.

$*$ $\nu_2(\varpi)$

Notemos que $\nu_2(\varpi) = \nu_2(g_1^{\alpha_1} g_3^{\alpha_3} g_4^{\alpha_4}\omega_1)$. Assim, se $\alpha_3 \neq 0$, então $\nu_2(\varpi) = \infty$. Se $\alpha_3 = 0$, então $\nu_2(\varpi) = \alpha_1 + n\alpha_4 + 1$. Deste modo, se $\alpha_4 \neq 0$, então $\nu_2(\varpi) \geq n + 1$. Agora se $\alpha_4 = 0$, como $\alpha_1 + n\alpha_3 + m\alpha_4 + 1 = \beta_1 + n\beta_3 + m\beta_4 + n$ é a equação diofantina associada a esse S_1-processo, temos $\alpha_1 \geq n-1$. Se $\alpha_1 > n-1$, então $\nu_2(\varpi) > n$. Portanto, $\nu_2(\varpi) < n + 1$ se, e somente se, $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ e $\alpha_1 = n - 1$.

$*$ $\nu_3(\varpi)$

Notemos que $\nu_3(\varpi) \geq \min\{\nu_3(g_1^{\alpha_1} g_3^{\alpha_3} g_4^{\alpha_4}\omega_1), \nu_3(g_1^{\beta_1} g_3^{\beta_3} g_4^{\beta_4}\omega_3)\}$. Assim, se $\alpha_4 \neq 0$ e $\beta_4 \neq 0$, então $\nu_3(\varpi) = \infty$. Supondo que $\alpha_4 = 0$ e $\beta_4 \neq 0$, devido à equação diofantina, temos $\nu_3(\varpi) = \alpha_1 + n\alpha_3 + 1 = \beta_1 + n\beta_3 + m\beta_4 + n > m$. Supondo que $\alpha_4 \neq 0$ e $\beta_4 = 0$, devido à equação diofantina, temos $\nu_3(\varpi) = \beta_1 + n\beta_3 + n = \alpha_1 + n\alpha_3 + m\alpha_4 + 1 > m$. Supondo que $\alpha_4 = \beta_4 = 0$, obtemos $\nu_3(\varpi) \geq \alpha_1 + n\alpha_3 + 1 = \beta_1 + n\beta_3 + n$ (novamente pela equação diofantina). Agora, como neste caso $c_1 = (-1)^{\beta_3}n$ e $c_2 = (-1)^{\alpha_3}$, temos

$$
\begin{aligned}
\varpi_3(t_3) &= (-1)^{\beta_3} n t_3^{\alpha_1}\left(t_3^m\left(a + \sum_{j=1}^{n} a_j t_3^j\right) - t_3^n\right)^{\alpha_3} \\
&\quad + (-1)^{\alpha_3} t_3^{\beta_1}\left(t_3^m\left(a + \sum_{j=1}^{n} a_j t_3^j\right) - t_3^n\right)^{\beta_3}\left(t_3^{m-1}\left(am + \sum_{j=1}^{n}(m+j)a_j t_3^j\right) - n t_3^{n-1}\right) \\
&= (-1)^{\alpha_3+\beta_3} n (t_3^{\alpha_1+n\alpha_3} - t_3^{\beta_1+n\beta_3+n-1}) + p(t_3),
\end{aligned}
$$

com $ord_{t_3}(p(t_3)) > \alpha_1 + n\alpha_3$. Isto nos diz que ϖ também é um S_3-processo entre ω_1 e ω_3.

Assim, se $\alpha_3 \neq 0$ e $\beta_3 \neq 0$, então $\nu_3(\varpi) \geq \min\{\alpha_1 + n(\alpha_3 - 1) + m + 1, \beta_1 + n\beta_3 + m\} > m$. Se $\alpha_3 = 0$ e $\beta_3 \neq 0$, então $\nu_3(\varpi) \geq \beta_1 + n\beta_3 + m > m$. Se $\alpha_3 \neq 0$ e $\beta_3 = 0$, então, pela equação diofantina, temos $\beta_1 \geq 1$. Logo, $\nu_3(\varpi) \geq \min\{\alpha_1 + n(\alpha_3 - 1) + m + 1, \beta_1 + m\} > m$. Agora, se $\alpha_3 = \beta_3 = 0$, temos $\alpha_1 \geq n - 1$. Se $\alpha_1 > n - 1$, então $\beta_1 \geq 1$. Desta maneira, $\nu_3(\varpi) = \beta_1 + m \geq m + 1$. Portanto, $\nu_3(\varpi) < m + 1$ se, e somente, se $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ e $\alpha_1 = n - 1$.

Logo, o único S_1-processo ϖ entre ω_1 e ω_3 que não satisfaz $\nu(\varpi) \geq (m+1, n+1, m+1)$ é $\varpi = n g_1^{n-1}\omega_1 + \omega_3$. Porém, observando que

$$
\begin{aligned}
\varpi(t) &= \left(n t_1^{n-1} - n t_1^{n-1}, n t_2^{n-1}, n t_3^{n-1} + t_3^{m-1}\left(am + \sum_{j=1}^{n-1}(m+j)a_j t_3^j\right) - n t_3^{n-1}\right) \\
&= \left(0, n t_2^{n-1}, t_3^{m-1}\left(am + \sum_{j=1}^{n-1}(m+j)a_j t_3^j\right)\right) = \omega_2(t),
\end{aligned}
$$

concluímos que todo S_1-processo entre ω_1 e ω_3 tem redução final nula módulo (H, G).

- S_1-processos entre ω_1 e ω_4: $\varpi = c_1 g_1^{\alpha_1} g_3^{\alpha_3} g_4^{\alpha_4}\omega_1 + c_2 g_1^{\beta_1} g_3^{\beta_3} g_4^{\beta_4}\omega_4$

$*$ $\nu_1(\varpi)$

Temos $\nu_1(\varpi) > \nu_1(g_1^{\beta_1} g_3^{\beta_3} g_4^{\beta_4}\omega_4) \geq \nu_1(\omega_4) = m$.

$*$ $\nu_2(\varpi)$

Notemos que $\nu_2(\varpi) \geq \min\{\nu_3(g_1^{\alpha_1} g_3^{\alpha_3} g_4^{\alpha_4}\omega_1), \nu_3(g_1^{\beta_1} g_3^{\beta_3} g_4^{\beta_4}\omega_4)\}$. Assim, se $\alpha_3 \neq 0$ e $\beta_3 \neq 0$, então $\nu_2(\varpi) = \infty$. Supondo que $\alpha_3 = 0$ e $\beta_3 \neq 0$, temos $\nu_2(\varpi) = \alpha_1 + n\alpha_4 + 1$. Se $\alpha_4 \neq 0$, então $\nu_2(\varpi) \geq n+1$. Se $\alpha_4 = 0$, como $\alpha_1 + n\alpha_3 + m\alpha_4 + 1 = \beta_1 + n\beta_3 + m\beta_4 + m$ é a equação diofantina associada a esse S_1-processo, temos $\nu_2(\varpi) = \beta_1 + n\beta_3 + m\beta_4 + m > n$.

Supondo que $\alpha_3 \neq 0$ e $\beta_3 = 0$, temos $\nu_2(\varpi) = \beta_1 + n\beta_4 + n$. Se $\beta_1 \neq 0$ ou $\beta_4 \neq 0$, então $\nu_2(\varpi) > n$. Se $\beta_1 = \beta_4 = 0$, pela equação diofantina obtemos $\alpha_1 + n\alpha_3 + m\alpha_4 + 1 = m$, o que implica em $\alpha_4 = 0$. Assim, podemos ter $\nu_2(\varpi) < n + 1$ se $\beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = \alpha_4 = 0$ e $\alpha_3 \neq 0$. Supondo que $\alpha_3 = \beta_3 = 0$, obtemos $\nu_2(\varpi) \geq \min\{\alpha_1 + n\alpha_4 + 1, \beta_1 + n\beta_4 + n\}$. Se o mínimo é $\alpha_1 + n\alpha_4 + 1$, então já sabemos que $\nu_2(\varpi) > n$. Se o mínimo é $\beta_1 + n\beta_4 + n$, então $\nu_2(\varpi) = \beta_1 + n\beta_4 + n$ e, analogamente ao que foi feito acima, vemos que podemos ter $\nu_2(\varpi) < n + 1$ se $\beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Portanto, os únicos S_1-processos entre ω_1 e ω_4 que podem não satisfazer $\nu_2(\varpi) \geq n + 1$ são da forma $\varpi = amg_1^{\alpha_1} g_3^{\alpha_3} \omega_1 + (-1)^{\alpha_3} \omega_4$.

$*$ $\nu_3(\varpi)$

Notemos que $\nu_3(\varpi) = \nu_3(g_1^{\alpha_1} g_3^{\alpha_3} g_4^{\alpha_4} \omega_1)$. Assim, se $\alpha_4 \neq 0$, então $\nu_3(\varpi) = \infty$. Se $\alpha_4 = 0$, então $\nu_3(\varpi) = \alpha_1 + n\alpha_3 + 1 = \beta_1 + n\beta_3 + m\beta_4 + m$, pela equação diofantina. Se $\beta_1 \neq 0$ ou $\beta_3 \neq 0$ ou $\beta_4 \neq 0$, então $\nu_3(\varpi) > m$. Portanto, $\nu_3(\varpi) < m + 1$ se, e somente se, $\beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = \alpha_4 = 0$.

Pela análise feita acima, os únicos S_1-processos entre ω_1 e ω_4 que podem não satisfazer $\nu_2(\varpi) \geq (m+1, n+1, m+1)$ são da forma $\varpi = amg_1^{\alpha_1} g_3^{\alpha_3} \omega_1 + (-1)^{\alpha_3} \omega_4$. Porém, observando que para $\alpha_3 \neq 0$

$$
\begin{aligned}
\varpi_1(t_1) &= amt_1^{\alpha_1}(-t_1^n)^{\alpha_3} + (-1)^{\alpha_3}\left(-t_1^{m-1}\left(am + \sum_{j=1}^{n-1}(m+j)a_j t_1^j\right)\right), \\
\varpi_2(t_2) &= (-1)^{\alpha_3}\left(nt_2^{n-1} - t_2^{m-1}\left(am + \sum_{j=1}^{n-1}(m+j)a_j t_2^j\right)\right), \\
\varpi_3(t_3) &= amt_3^{\alpha_1}\left(t_3^m\left(a + \sum_{j=1}^{n-1} a_j t_3^j\right) - t_3^n\right)^{\alpha_3},
\end{aligned}
$$

vemos que $\nu(\varpi) = (m + k, n, m)$, com $k \geq 1$. Mais ainda, como

$$
\begin{aligned}
\varpi_2(t_2) &= (-1)^{\alpha_3} nt_2^{n-1} + ..., \\
\varpi_3(t_3) &= (-1)^{\alpha_3} amt_3^{\alpha_1 + n\alpha_3} + ... = (-1)^{\alpha_3} amt_3^{m-1} + ...,
\end{aligned}
$$

ϖ tem a seguinte redução módulo (H, G):

$$\eta := \varpi - (-1)^{\alpha_3}\omega_2.$$

Para $\alpha_3 = 0$, temos

$$
\begin{aligned}
\varpi_2(t_2) &= amt_2^{\alpha_1} + nt_2^{n-1} + ... = nt_2^{n-1} + amt_2^{m-1}..., \\
\varpi_3(t_3) &= amt_3^{\alpha_1} + ... = amt_3^{m-1} + ...
\end{aligned}
$$

Logo, ϖ tem a seguinte redução módulo (H, G):

$$\eta := \varpi - \omega_2.$$

Em ambos os casos, $\nu(\eta) \geq (m+1, n+1, m+1)$, ou seja, ϖ admite uma redução final nula módulo (H, G).

Pela análise feita acima, concluímos que todo S_1-processo entre ω_1 e ω_4 tem redução final nula módulo (H, G).

• S_1-processos entre ω_1 e ω_7: $\varpi = c_1 g_1^{\alpha_1} g_3^{\alpha_3} g_4^{\alpha_4} \omega_1 + c_2 g_1^{\beta_1} g_3^{\beta_3} g_4^{\beta_4} \omega_7$

$*$ $\nu_1(\varpi)$

Temos $\nu_1(\varpi) > \nu_1(g_1^{\beta_1} g_3^{\beta_3} g_4^{\beta_4} \omega_7) \geq \nu_1(\omega_7) = m + 1$.

$*$ $\nu_2(\varpi)$

Notemos que $\nu_2(\varpi) = \nu_2(g_1^{\alpha_1} g_3^{\alpha_3} g_4^{\alpha_4} \omega_1)$. Assim, se $\alpha_3 \neq 0$, então $\nu_2(\varpi) = \infty$. Se $\alpha_3 = 0$, então $\nu_2(\varpi) = \alpha_1 + n\alpha_4 + 1$. Deste modo, se $\alpha_4 \neq 0$, então $\nu_2(\varpi) \geq n + 1$. Agora se $\alpha_4 = 0$, como $\alpha_1 + n\alpha_3 + m\alpha_4 + 1 = \beta_1 + n\beta_3 + m\beta_4 + m + 1$ é a equação diofantina associada a esse S_1-processo, temos $\nu_2(\varpi) = \alpha_1 + 1 = \beta_1 + n\beta_3 + m\beta_4 + m + 1 > n + 1$. Portanto, sempre temos $\nu_2(\varpi) \geq n + 1$.

$*$ $\nu_3(\varpi)$

Notemos que $\nu_3(\varpi) = \nu_3(g_1^{\alpha_1} g_3^{\alpha_3} g_4^{\alpha_4} \omega_1)$. Assim, se $\alpha_4 \neq 0$, então $\nu_2(\varpi) = \infty$. Se $\alpha_4 = 0$, então $\nu_3(\varpi) = \alpha_1 + n\alpha_3 + 1 = \beta_1 + n\beta_3 + m\beta_4 + m + 1 \geq m + 1$ (devido à equação diofantina novamente). Portanto, sempre temos $\nu_3(\varpi) \geq m + 1$.

Pelo que observamos acima, concluímos que todo S_1-processo entre ω_1 e ω_7 tem redução final nula módulo (H, G).

• S_1-processos entre ω_3 e ω_4: $\varpi = c_1 g_1^{\alpha_1} g_3^{\alpha_3} g_4^{\alpha_4} \omega_3 + c_2 g_1^{\beta_1} g_3^{\beta_3} g_4^{\beta_4} \omega_4$

$*$ $\nu_1(\varpi)$

Temos $\nu_1(\varpi) > \nu_1(g_1^{\beta_1} g_3^{\beta_3} g_4^{\beta_4} \omega_4) \geq \nu_1(\omega_4) = m$.

$*$ $\nu_2(\varpi)$

Notemos que $\nu_2(\varpi) = \nu_2(g_1^{\beta_1} g_3^{\beta_3} g_4^{\beta_4} \omega_4)$. Assim, se $\beta_3 \neq 0$, então $\nu_2(\varpi) = \infty$. Se $\beta_3 = 0$, temos $\nu_3(\varpi) = \beta_1 + n\beta_4 + n$. Se $\beta_1 \neq 0$ ou $\beta_4 \neq 0$, então $\nu_2(\varpi) \geq n + 1$. Portanto, $\nu_2(\varpi) < n + 1$ se, e somente se, $\beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = 0$.

$*$ $\nu_3(\varpi)$

Notemos que $\nu_3(\varpi) = \nu_3(g_1^{\alpha_1} g_3^{\alpha_3} g_4^{\alpha_4} \omega_3)$. Assim, se $\alpha_4 \neq 0$, então $\nu_3(\varpi) = \infty$. Se $\alpha_4 = 0$, como $\alpha_1 + n\alpha_3 + m\alpha_4 + n = \beta_1 + n\beta_3 + m\beta_4 + m$ é a equação diofantina associada a esse S_1-processo, obtemos $\nu_3(\varpi) = \alpha_1 + n\alpha_3 + n = \beta_1 + n\beta_3 + m\beta_4 + m$. Se $\beta_1 \neq 0$

ou $\beta_3 \neq 0$ ou $\beta_4 \neq 0$, então $\nu_3(\varpi) \geq m+1$. Portanto, $\nu_3(\varpi) < m+1$ se, e somente se, $\beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = 0$.

Agora, devido à equação diofantina, se $\beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = 0$, devemos ter $\alpha_4 = 0$ e $\alpha_1 + n\alpha_3 + n = m$. Logo, os únicos S_1-processos ϖ entre ω_3 e ω_4 que não satisfazem $\nu(\varpi) \geq (m+1, n+1, m+1)$ são da forma $\varpi = amg_1^{\alpha_1}g_3^{\alpha_3}\omega_3 - (-1)^{\alpha_3}n\omega_4$. Porém, observando que

$$\begin{aligned}
\varpi_1(t_1) &= amt_1^{\alpha_1}(-t_1^n)^{\alpha_3}(-nt_1^{n-1}) - (-1)^{\alpha_3}n\left(-t_1^{m-1}\left(am + \sum_{j=1}^{n-1}(m+j)a_jt_1^j\right)\right),\\
\varpi_2(t_2) &= -(-1)^{\alpha_3}n\left(nt_2^{n-1} - t_2^{m-1}\left(am + \sum_{j=1}^{n-1}(m+j)a_jt_2^j\right)\right),\\
\varpi_3(t_3) &= amt_3^{\alpha_1}\left(t_3^m\left(a + \sum_{j=1}^{n-1}a_jt_3^j\right) - t_3^n\right)^{\alpha_3}\left(t_3^{m-1}\left(am + \sum_{j=1}^{n-1}(m+j)a_jt_3^j\right) - nt_3^{n-1}\right),
\end{aligned}$$

vemos que $\nu(\varpi) = (m+k, n, m)$, com $k \geq 1$. Mais ainda, como

$$\begin{aligned}
\varpi_2(t_2) &= (-1)^{\alpha_3+1}n(nt_2^{n-1} + \ldots),\\
\varpi_3(t_3) &= (-1)^{\alpha_3+1}n(amt_3^{\alpha_1+n\alpha_3+n-1} + \ldots) = (-1)^{\alpha_3+1}n(amt_3^{m-1} + \ldots),
\end{aligned}$$

ϖ tem a seguinte redução módulo (H, G):

$$\eta := \varpi - (-1)^{\alpha_3+1}n\omega_2.$$

Logo, $\nu(\eta) \geq (m+1, n+1, m+1)$, ou seja, ϖ admite uma redução final nula módulo (H, G).

Pela análise feita acima, concluímos que todo S_1-processo entre ω_3 e ω_4 tem redução final nula módulo (H, G).

- S_1-processos entre ω_3 e ω_7: $\varpi = c_1g_1^{\alpha_1}g_3^{\alpha_3}g_4^{\alpha_4}\omega_3 + c_2g_1^{\beta_1}g_3^{\beta_3}g_4^{\beta_4}\omega_7$

$*$ $\nu_1(\varpi)$

Temos $\nu_1(\varpi) > \nu_1(g_1^{\beta_1}g_3^{\beta_3}g_4^{\beta_4}\omega_7) \geq \nu_1(\omega_7) = m+1$.

$*$ $\nu_2(\varpi)$

Temos $\nu_2(\varpi) = \infty$.

$*$ $\nu_3(\varpi)$

Notemos que $\nu_3(\varpi) = \nu_3(g_1^{\alpha_1}g_3^{\alpha_3}g_4^{\alpha_4}\omega_3)$. Assim, se $\alpha_4 \neq 0$, então $\nu_3(\varpi) = \infty$. Se $\alpha_4 = 0$, como $\alpha_1 + n\alpha_3 + m\alpha_4 + n = \beta_1 + n\beta_3 + m\beta_4 + m + 1$ é a equação diofantina associada a esse S_1-processo, obtemos $\nu_3(\varpi) = \alpha_1 + n\alpha_3 + n = \beta_1 + n\beta_3 + m\beta_4 + m + 1 \geq m+1$. Portanto, sempre temos $\nu_3(\varpi) \geq m+1$.

Pelo que observamos acima, concluímos que todo S_1-processo entre ω_3 e ω_7 tem redução final nula módulo (H, G).

• S_1-processos entre ω_4 e ω_7: $\varpi = c_1 g_1^{\alpha_1} g_3^{\alpha_3} g_4^{\alpha_4} \omega_4 + c_2 g_1^{\beta_1} g_3^{\beta_3} g_4^{\beta_4} \omega_7$

$*$ $\nu_1(\varpi)$

Temos $\nu_1(\varpi) > \nu_1(g_1^{\beta_1} g_3^{\beta_3} g_4^{\beta_4} \omega_7) \geq \nu_1(\omega_7) = m + 1$.

$*$ $\nu_2(\varpi)$

Notemos que $\nu_2(\varpi) = \nu_2(g_1^{\alpha_1} g_3^{\alpha_3} g_4^{\alpha_4} \omega_4)$. Assim, se $\alpha_3 \neq 0$, então $\nu_2(\varpi) = \infty$. Se $\alpha_3 = 0$, temos $\nu_3(\varpi) = \alpha_1 + n\alpha_4 + n$. Se $\alpha_1 \neq 0$ ou $\alpha_4 \neq 0$, então $\nu_2(\varpi) \geq n + 1$. Agora, como $\alpha_1 + n\alpha_3 + m\alpha_4 + m = \beta_1 + n\beta_3 + m\beta_4 + m + 1$ é a equação diofantina associada a esse S_1-processo, devemos ter $\alpha_1 \neq 0$ ou $\alpha_3 \neq 0$ ou $\alpha_4 \neq 0$. Portanto, sempre temos $\nu_3(\varpi) \geq m + 1$.

$*$ $\nu_3(\varpi)$

Temos $\nu_3(\varpi) = \infty$.

Pelo que observamos acima, concluímos que todo S_1-processo entre ω_4 e ω_7 tem redução final nula módulo (H, G).

Portanto, todo S_1-processo de H sobre G tem redução final nula módulo (H, G). Analogamente, podemos mostrar que todo S_2-processo e todo S_3-processo de H sobre G têm redução final nula módulo (H, G). Isso nos permite concluir que H é uma Base Standard para $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$. A minimalidade de H é devida à ordem de seus elementos.

Deste modo, o conjunto das ordens de diferenciais Λ de Q é minimamente gerado pelo conjunto

$$\{(1,1,1), (\infty, n, m), (n, \infty, n), (m, n, \infty), (\infty, \infty, m+1), (\infty, n+1, \infty), (m+1, \infty, \infty)\}.$$

Afirmação 3. O condutor de Λ é $\kappa = (m + 1, n + 1, m + 1)$.

De fato, como o elemento

$$\begin{aligned}
\lambda &= (\infty, \infty, m + 1 + \lambda_3) \oplus (\infty, n + 1 + \lambda_2, \infty) \oplus (m + 1 + \lambda_1, \infty, \infty) \\
&= (m + 1 + \lambda_1, n + 1 + \lambda_2, m + 1 + \lambda_3) \\
&= (m + 1, n + 1, m + 1) + (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)
\end{aligned}$$

é um elemento de Λ, para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \overline{\mathbb{N}}$, já temos $\kappa \leq (m + 1, n + 1, m + 1)$.

Também temos (m, n, m), $(m + 1, n, m)$, $(m, n + 1, m)$, $(m, n, m + 1) \in \Lambda$. Logo, é suficiente mostrar que $(m + 1, n + 1, m), (m + 1, n, m + 1), (m, n + 1, m + 1) \notin \Lambda$.

Suponhamos, por absurdo, que $(m+1, n+1, m) \in \Lambda$. Então existe $\omega \in \frac{\Omega}{T}$ tal que $\nu(\omega) = (m+1, n+1, m)$. Notemos agora que a igualdade $\nu_3(\omega) = \nu_3(g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} g_3^{\alpha_3} g_4^{\alpha_4} \omega_i)$ apenas é possível se $i = 1, 2, 3$ e $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$. Assim, se $i = 1$, então $m = \nu_3(\omega) = \alpha_1 + n\alpha_3 + 1$. Mas como $\nu_1(g_1^{\alpha_1} g_3^{\alpha_3} \omega_1) = \alpha_1 + n\alpha_3 + 1$, temos $\nu_1(g_1^{\alpha_1} g_3^{\alpha_3} \omega_1) = m < \nu(\omega)$. Se $i = 2$, uma vez que $\nu_3(\omega_2) = m$, temos $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$. Porém, $\nu_2(\omega_2) = n < \nu_2(\omega)$. Se $i = 3$, então $m = \nu_3(\omega) = \alpha_1 + n\alpha_3 + n$. Mas como $\nu_1(g_1^{\alpha_1} g_3^{\alpha_3} \omega_3) = \alpha_1 + n\alpha_3 + n$, temos $\nu_1(g_1^{\alpha_1} g_3^{\alpha_3} \omega_3) = m < \nu(\omega)$. Isso implica que ω não admite uma 3-redução módulo (H, G), o que contradiz o fato de H ser uma Base Standard para $\frac{\Omega}{T}$. Portanto, $(m+1, n+1, n) \notin \Lambda$. De maneira análoga, mostramos que $(m+1, n, m+1), (m, n+1, m+1) \notin \Lambda$.

Curva $Q = \left\langle Y(Y - X^n)\left(Y - X^n\left(a + \sum_{j=k-1}^{n-1} a_j X^j\right)\right)\right\rangle$, $n > 1$, $2 \leq k \leq n-1$ e $a \neq 0, 1$

Uma Base Standard mínima para o anel local de Q é o conjunto $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$, onde $g_1 = x$, $g_2 = y$, $g_3 = y - x^n$ e $g_4 = y - x^n\left(a + \sum_{j=k-1}^{n-1} a_j x^j\right)$.

Consideremos o conjunto $H = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_7\}$, onde $\omega_i = dg_i$, para $i = 1, 2, 3, 4$ e

$$
\begin{aligned}
\omega_5 &= ng_2\omega_1 - g_1\omega_2,\\
\omega_6 &= (k-1)a_{k-1}g_1^k\omega_2 + \left(an - \frac{anka_k}{(k-1)a_{k-1}}g_1 + ...\right)\omega_5,\\
\omega_7 &= (k-1)a_{k-1}g_1^k\omega_4 + \left((a-1) - \frac{(n+k-1)a_{k-1}}{n}g_1^{k-1} + ...\right)\omega_6.
\end{aligned}
$$

Como $\phi(t) = \left[(t_1, 0), (t_2, t_2^n), \left(t_3, t_3^n\left(a + \sum_{j=k-1}^{n-1} a_j t_3^j\right)\right)\right]$ é uma parametrização para Q, temos

$$
\begin{aligned}
g_1(t) &= (t_1, t_2, t_3),\\
g_2(t) &= \left(0, t_2^n, t_3^n\left(a + \sum_{j=k-1}^{n-1} a_j t_3^j\right)\right),\\
g_3(t) &= \left(-t_1^n, 0, t_3^n\left((a-1) + \sum_{j=k-1}^{n-1} a_j t_3^j\right)\right),\\
g_4(t) &= \left(-t_1^n\left(a + \sum_{j=k-1}^{n-1} a_j t_1^j\right), -t_2^n\left((a-1) + \sum_{j=k-1}^{n-1} a_j t_2^j\right), 0\right),\\
\omega_1(t) &= (1, 1, 1),\\
\omega_2(t) &= \left(0, nt_2^{n-1}, t_3^{n-1}\left(an + \sum_{j=k-1}^{n-1} (n+j)a_j t_3^j\right)\right),
\end{aligned}
$$

$$\omega_3(t) = \left(-nt_1^{n-1}, 0, t_3^{n-1}\left((a-1)n + \sum_{j=k-1}^{n}(n+j)a_j t_3^j\right)\right),$$
$$\omega_4(t) = \left(-t_1^{n-1}\left(an + \sum_{j=k-1}^{n-1}(n+j)a_j t_1^j\right), -t_2^{n-1}\left((a-1)n + \sum_{j=k-1}^{n-1}(n+j)a_j t_2^j\right), 0\right),$$
$$\omega_5(t) = \left(0, 0, -t_3^n \sum_{j=k-1}^{n-1} j a_j t_3^j\right),$$
$$\omega_6(t) = (0, (k-1)na_{k-1}t_2^{n+k-1}, 0),$$
$$\omega_7(t) = \left(-(k-1)a_{k-1}t_3^{n+k-1}\left(an + \sum_{j=k-1}^{n-1}(k+j)a_j t_3^j\right), 0, 0\right).$$

As Afirmações 1, 2 e 3 a seguir são análogas às afirmações feitas para a curva $Q = \left\langle Y(Y - X^n)\left(Y - X^m\left(a + \sum_{j=1}^{n-1} a_j X^j\right)\right)\right\rangle$, com $1 < n < m$ e $a \neq 0$, e têm demonstrações também análogas às realizadas naquele caso.

Afirmação 1. Seja $\varpi \in \frac{\Omega}{\mathcal{T}} \setminus \{0\}$. Se $\nu(\omega) \geq (n+k, n+k, n+k)$, então ϖ admite redução módulo (H, G). Em particular, ϖ tem redução final nula módulo (H, G).

Afirmação 2. H é uma Base Standard mínima para $\frac{\Omega}{\mathcal{T}}$.

Afirmação 3. O condutor de Λ é $\kappa = (n+k, n+k, n+k)$.

Referências Bibliográficas

[1] Barucci, V., D'Anna, M. and Fröberg, R., *The semigroup of values of a one-dimensional local ring with two minimal primes*, Communications in Algebra, 28(8), 3607-3633 (2000).

[2] Barucci, V., D'Anna, M. and Fröberg, R., *Analytically unramified one-dimensional semilocal rings and their value semigroups*, Journal of Pure and Applied Algebra, 147, 215-254 (2000).

[3] Bayer, V. A. S., *Semigrupo Associado a duas Curvas Planas Irredutíves Algebroides.* Tese de doutorado. IMPA (1984).

[4] Bayer, V. A. S., *Semigroup of two irreducible algebroid plane curves*, Manuscripta Math. 49, 207-241 (1985).

[5] Bayer, V. A. S. and Hefez, A., *Algebroid plane curves whose Milnor and Tjurina numbers differ by one or two.* Bol. Soc. Bras. Mat. 32, 63-81, (2001).

[6] Bayer, V. A. S., Hefez, A. and Hernandes, M. E., *A new analytic invariant for reduced plane curves.* Manuscrito não publicado.

[7] Brauner, K., *Zur Geometrie def Funktionen zweier Veränderliche.* II-IV. Abh. Math. Sem. Hamburg, 6, 1-54 (1928).

[8] Burau, W., *Kennzeichnung der Schlauchverkettungen.* Abh. Math. Sem. Hamburg, 10, 285-297 (1934).

[9] Camacho, C. and Sad, P., *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields.* Ann. of Math. 115, 579-595 (1982).

[10] Cano, F., Cerveau, D. and Déserti, J., *Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singulares.* Éditions Belin (2013).

[11] Castellanos, A. and Castellanos, J., *Algorithm for the semigroup of a space curve singularity*, Semigroup Forum 70, 44-60 (2005).

[12] Clausen, M. and Fortenbacher, A., *Efficient solution of linear diophantine equations*, J. Symbolic Comput. 8, 201-216, (1989).

[13] Contejean, E. and Devie. H., *An efficient incremental algorithm for solving systems of linear diophantine equations*, Inform. and Comput. 113, 143-172, (1994).

[14] D'Anna, M., *The canonical module of a one-dimensional reduced local ring*. Communications in Algebra. 25(9), 2939-2965 (1997).

[15] Delgado, F., *The semigroup of values of a curve singularity with several branches.* Manuscripta Math. 59, 347-374 (1987).

[16] Delgado, F., *Gorenstein curves and symmetry of the semigroup of values.* Manuscripta Math. 61, 285-296 (1988).

[17] Fernández-Sánchez, P. and Hernandes, M. E., *Describing foliations with prescribed separatrices.* Submitted.

[18] Garcia, A. L. P., *Semigrupos Associados a Pontos Singulares de Curvas Algébricas.* Tese de doutorado. IMPA (1980).

[19] Garcia, A. L. P., *Semigroups associated to singular points of plane curves.* J. Reine. Angew. Math. 336, 165-184 (1982).

[20] Guzmán, E. M. N., *Fractional Ideals of the Ring of an Algebroid Curve with an Application to the Computation of its Tjurina number*. Tese de doutorado. UFF (2017).

[21] Hefez, A., *Irreducible plane curve singularities*, Real and Complex Singularities, 1-120. Lectures Notes in Pure and Appl. Math., 232 Dekker, New York, (2003).

[22] Hefez, A. and Hernandes, M. E., *Computational methods in the local theory of curves.* In: 23º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, Rio de Janeiro. (2001).

[23] Hefez, A. and Hernandes, M. E., *Standard bases for local rings of branches and their modules of differentials.* J. Symb. Comput. 42, 178-191, (2007).

[24] Hefez, A. and Hernandes, M. E., *Analytic classification of plane branches up to multiplicity 4*. J. Symb. Comput. 44, 626-634, (2008).

[25] Hefez, A. and Hernandes, M. E., *The analytic classification of plane branches.* Bull. London Math. Soc. 43, 289-298 (2011).

[26] Hefez, A., Hernandes, M. E. and Rodrigues Hernandes, M. E., *The analytic classification of plane curves with two branches.* Mathematische Zeitschrift. 279, 508-520, (2015).

[27] Lejeune-Jalabert, M. and Michler, R. I., *Affine hypersurfaces with Gorenstein singular loci.* Proceedings of the American Mathematical Society 130 (12), 3453-3460 (2002).

[28] Michler, R. I., *On the number of generators of the torsion module of differentials.* Proceedings of the American Mathematical Society 129 (3), 639-646 (2000).

[29] Pinkham, H. C., *Deformations of Algebraic Varieties with G_m-action.* Astérisque 20, Sociéte Mathématique de France (1974).

[30] Pol, D., *On the values of logarithmic residues along curves.* arXiv.org 1410.2126 (2015).

[31] Saito, K., *Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen.* Inv. Math 14, 123-142 (1971).

[32] Saito, K., *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields.* Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo. Sect. 1 A, Mathematics 27 (2), 265-291 (1980).

[33] Waldi, R., *Wertehalbgruppe und Singularität einer ebenen algebraischen Kurve*, Dissertation. Regensburg (1972).

[34] Zariski, O., *On the topology of algebraic singularities.* Amer. J. Math. 54, 453-465 (1932).

[35] Zariski, O., *Characterization of plane algebroid curves whose module of differentials has maximum torsion.* Proc. Nat. Acad. Sci., 56, 781-786 (1966).

[36] Zariski, O., *Studies in Equisingularity I,II and III.* Amer. J. Math., 87, 507-536 and 972-1006 (1965); 90, 961-1023 (1968).

[37] Zariski, O., *The Moduli Problem for Plane Branches.* University Lecture Series, AMS. (2006).