



Centro de Ciências Exatas
Universidade Estadual de Maringá
Programa de Pós-Graduação em Matemática
(Doutorado)

**Sobre o Decaimento da Equação da Onda com
Dissipação Friccional versus Viscoelástica em
Domínios Ilimitados de Medida Finita**

Flávio Roberto Dias Silva

Orientador: Marcelo Cavalcanti

Maringá - PR
2014

FLAVIO ROBERTO DIAS SILVA

**Sobre o Decaimento da Equação da Onda com
Dissipação Friccional versus Viscoelástica em
Domínios Ilimitados de Medida Finita.**

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor.

Orientador: Marcelo Moreira Cavalcanti.

Maringá - PR
2014

Agradecimentos

Agradeço a todos os meus professores que fizeram parte da construção desse trabalho, em especial, a professora Valéria, ao professor Juan e meu orientador professor Marcelo Cavalcanti.

Agradeço a Capes pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesse trabalho estudamos a existência de solução bem como taxas de decaimento associadas a equação da onda sobre um subconjunto Ω do \mathbb{R}^n , ilimitado, com medida finita e fronteira Γ ilimitada.

Estudamos a equação com duas configurações. No primeiro momento estudamos as taxas de decaimento para a equação da onda sujeita à ação de uma dissipação friccional localizada. A saber:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{em } \Gamma \times (0, \infty), \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

A função $a(x)$ responsável pelo mecanismo de dissipação localizado é assumida não negativa e essencialmente limitada e, além disso, consideramos:

$$a(x) \geq a_0 > 0 \quad \text{quase sempre em } \omega,$$

onde $\omega = \omega' \cup \{x \in \Omega; \|x\| > R\}$ ($R > 0$) e ω' é uma vizinhança em Ω de $\partial\Omega$ interseccionada com $B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}; \|x\| < R\}$.

Em seguida, no segundo momento, estudamos as taxas de decaimento para a equação da onda sujeita a ação de dois mecanismos de dissipação, friccional e viscoelástico, agindo em todo o domínio Ω dada por

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s) \operatorname{div}[a(x)\nabla u(s)] ds + b(x)f(u_t) = 0 & \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x), \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

Neste trabalho ambas dissipações, viscoelástica e friccional estão “competindo”, isto é, existe $\delta > 0$ tal que

$$a(x) + b(x) \geq \delta > 0 \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Abstract

In this work we study the existence of solution and decay rates associated with the wave equation posed on a unlimited domain Ω of \mathbb{R}^n , with finite measure and boundary Γ unlimited.

We study the equation under two configurations. At first we study the decay rates for the wave equation subject to the action of a localized frictional dissipation. Namely:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{on } \Gamma \times (0, \infty) \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

The function $a(x)$, responsible for the localized effect of the dissipative mechanism, is assumed to be nonnegative, essentially bounded and, in addition,

$$a(x) \geq a_0 > 0 \quad \text{a.e. in } \omega,$$

where $\omega = \omega' \cup \{x \in \Omega; \|x\| > R\}$ ($R > 0$) and ω' is a neighbourhood in Ω of the closure of $\partial\Omega \cap B_R$, where $B_R = \{x \in \Omega; \|x\| < R\}$.

Then in the second step, we study the decay rates for the wave equation subject to the action of two dissipation mechanisms, frictional and viscoelastic, acting on the whole domain given by

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s) \operatorname{div}[a(x)\nabla u(s)] ds + b(x)f(u_t) = 0 & \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x), \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

In this work, both viscoelastic and frictional damping mechanisms are active in a “competitive” way, since there exist $\delta > 0$ such that

$$a(x) + b(x) \geq \delta > 0 \quad \text{for all } x \in \Omega.$$

Conteúdo

Introdução	7
1 Preliminares	10
1.1 Espaços funcionais	10
1.1.1: Distribuições	10
1.1.2: Espaços $L^p(\Omega)$	11
1.1.3: Espaços de Sobolev	12
1.2 Espaços de funções a valores vetoriais	14
1.3 Topologias fracas, espaços reflexivos e separáveis	14
1.3.1: Topologia fraca	15
1.3.2: Topologia fraca $*$	15
1.3.3: Espaços reflexivos e espaços separáveis	16
1.4 Domínios Lipschitzianos	16
1.5 Semigrupo não linear	17
1.6 Teorema de Holmgren	19
1.7 Mais Alguns Resultados	20
2 Um domínio admissível	21
2.1 Definição analítica do domínio	21
2.2 Ω^R é um polígono curvilíneo de \mathbb{R}^2	22

3	Decaimento para a equação da onda com dissipação friccional	26
3.1	Introdução do problema	26
3.2	Teorema de existência	30
3.3	Regularidade elíptica local	34
3.4	Decaimento	35
3.4.1:	Considerações Iniciais	35
3.4.2:	Identidades fundamentais	37
3.4.3:	Construção de subconjuntos da região ω	42
3.4.4:	Definindo e aplicando funções auxiliares	44
3.4.5:	Absorção por continuação única	48
3.4.6:	Conclusão do teorema 3.3	51
3.5	Computação efetiva das taxas de decaimento	53
4	Decaimento para a equação da onda com dissipação friccional versus viscoelástica	56
4.1	Introdução do problema	56
4.2	Hipóteses e resultados preliminares	57
4.3	Existência e unicidade de solução	59
4.4	Notações e resultados fundamentais	60
4.5	Decaimento	63
4.5.1:	Exemplos de Taxas Explícitas de Decaimento	74

Introdução

Nesse trabalho estudaremos a existência de solução bem como taxas de decaimento associadas a equação da onda sobre um subconjunto Ω do \mathbb{R}^n , ilimitado, com medida finita e fronteira Γ ilimitada.

Estudaremos a equação em dois contextos. Em um primeiro momento estudaremos as taxas de decaimento para a equação da onda sujeita à ação de uma dissipação friccional localizada. Em seguida, em um segundo momento, estudaremos as taxas de decaimento para a equação da onda sujeita à ação de dois mecanismos de dissipação, friccional e viscoelástico, agindo em todo o domínio Ω mas de maneira concorrente, isto é, onde não age a dissipação friccional a dissipação viscoelástica está agindo e onde não age a dissipação viscoelástica a dissipação friccional estará agindo.

A seguir mais, detalhes sobre os dois problemas abordados.

- 1) O problema das taxas de decaimento para a equação da onda com uma dissipação não linear localizada do tipo friccional:

$$(1) \quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{em } \Gamma \times (0, \infty), \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

A função $a(x)$ responsável pelo mecanismo de dissipação localizado é assumida como não negativa, essencialmente limitada, além disso, assumimos:

$$(2) \quad a(x) \geq a_0 > 0 \quad \text{quase sempre em } \omega,$$

onde $\omega = \omega' \cup \{x \in \Omega; \|x\| > R\}$ ($R > 0$) e ω' é uma vizinhança em Ω de $\partial\Omega$ interseccionada com $B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < R\}$, ver figura 1. Além disso, a função g é assumida como monótona crescente e satisfazendo

$$(3) \quad \begin{cases} g(s)s > 0 & \text{para todo } s \neq 0 \\ k|s| \leq |g(s)| \leq K|s| & |s| > 1 \end{cases}$$

para algumas constantes positivas k, K .

Sobre o domínio Ω ilimitado, de medida finita e fronteira ilimitada assumiremos uma condição extra necessária para os cálculos do decaimento. Assumiremos que para todo $R > 0$ a região $\Omega \cap B_R(0)$ (ver figura 2) satisfaz as condições de um domínio Lipschitziano (ver Grisvard[GRIS]), essa condição nos permite recuperar

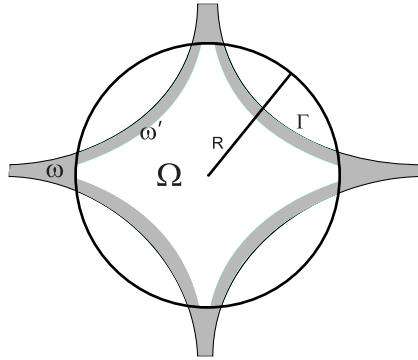


Figura 1: Distribuição da dissipação ω no domínio Ω

a regularidade elíptica para restrições das soluções à região $\Omega \cap B_R(0)$ bem como as desigualdades de Green e Gauss que são largamente utilizadas durante os cálculos para obtenção do decaimento.

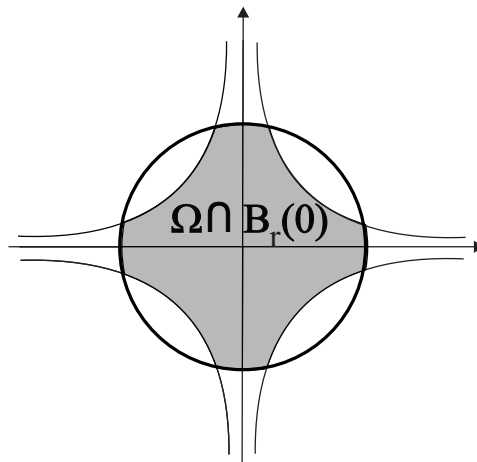


Figura 2: Distribuição da dissipação ω no domínio Ω

Nesse trabalho utilizaremos estimativas de energia combinadas com o método dos multiplicadores desenvolvido por Lasiecka e Tataru[LT] além de novos ingredientes adicionados pelas particularidades do problema.

- 2) Em um segundo momento estudaremos a equação da onda com duas dissipações de naturezas distintas que atuam de forma concorrente e complementar no domínio Ω , a primeira dissipação é de natureza viscoelástica e linear enquanto a segunda dissipação é de natureza friccional não linear:

$$(4) \quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s) \operatorname{div}[a(x) \nabla u(s)] ds + b(x) f(u_t) = 0 & \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

Neste trabalho ambas dissipações, viscoelástica e friccional são assumidas como “competindo”, isto é, existe $\delta > 0$ tal que

$$a(x) + b(x) \geq \delta > 0 \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Em relação a função de relaxamento g e a perturbação não linear f assumimos:

- $g : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função não decrescente que pertence a classe $C^1(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$ e satisfaz

$$g(0) > 0 \quad \text{e} \quad \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^\infty g(s) ds < 1.$$

Além disso, assumimos que

$$g'(t) \leq -H_1(g(t)), \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

para algum $H_1 \in C^1(\mathbb{R}^+)$, $H_1(0) = 0$, dado como uma função estritamente crescente e convexa.

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função estritamente crescente, contínua tal que $f(0) = 0$ e sujeita ao crescimento linear no infinito, isto é

$$k^{-1}s^2 \leq f(s)s \leq Ks^2, \quad |s| \geq 1,$$

onde k e K são duas constantes positivas.

É importante ressaltar as particularidades dos mecanismos de dissipação, que são, de naturezas distintas e devem atuar de forma competitiva em todo o domínio. Foi observado pela primeira vez por Fabrizio e Polidoro em [FP], que a dissipação viscoelástica tem o efeito dominante sobre a dissipação friccional no sentido de que as taxas de decaimento são determinadas pela primeira. Nessa direção, pela característica ilimitada do nosso domínio, o caso interessante ocorre quando a dissipação viscoelástica atua em um conjunto ilimitado (veja a figura 4.1) uma vez que tal fato já foi observado no trabalho de Cavalcanti e Oquendo [CO] quando a região mencionada é um subconjunto de um domínio limitado.

O ponto central neste trabalho é uma variante da desigualdade de Poincaré que é um resultado conhecido quando a desigualdade é aplicada sobre um conjunto limitado. No entanto, em uma região ilimitada essa desigualdade se torna um resultado interessante o qual será provado neste trabalho. Esta desigualdade nos permite provar o Lema 4.9 que é uma importante ferramenta no caminho de obter as taxas de decaimento.

O trabalho que segue é organizado da seguinte forma: O primeiro capítulo será dedicado aos resultados preliminares para o desenvolvimento do nosso trabalho. O segundo capítulo é dedicado a exibir um exemplo de domínio ilimitado de medida finita e fronteira ilimitada que ainda satisfaz as condições da Hipótese 3.2. O terceiro capítulo é dedicado a equação da onda posta sobre o domínio Ω nas condições enunciadas acima sujeita à dissipação friccional. Faremos a existência de solução via teoria de semigrupo não linear e em seguida a obtenção das taxas gerais de decaimento. No capítulo 4 trabalharemos em busca de encontrar as taxas de decaimento para a equação da onda posta sobre o domínio Ω nas condições enunciadas sujeita a ação das dissipações friccional e viscoelástica agindo em todo o domínio Ω .

É importante mencionar alguns trabalhos relevantes em conexão com os temas abordados nessa tese, a saber, [ALA, ALA2, ALA3, ACG, ALA4, AN, BLR, BRT, CDCL, CDC, CDCFS, CDCFS2, CO, CDCLF, DLT, CHEN1, CHEN2, ELN, FP, LMM, LT, LA-TO, LZ, Liu, MAR, MAR2, Mo, MRS, MRN, MRO, MGP, MRL, MRP, NA1, NA2, NA3, NA4, NJ, NP, NP2, NV, STV, TY, TY2, T, VM].

CAPÍTULO I

Preliminares

Nesse capítulo introduziremos alguns resultados básicos afim de tornar a leitura mais agradável. As demonstrações serão em sua maior parte omitidas, mas indicaremos as respectivas referências bibliográficas para os interessados.

Neste capítulo enumeraremos alguns resultados que serão usados no desenvolvimento do nosso trabalho. Por serem resultados familiares, apresentaremos apenas os seus enunciados, deixando a cargo do leitor interessado a busca de suas demonstrações.

1.1 Espaços funcionais

1.1.1: Distribuições

No estudo de problemas descritos pelas equações diferenciais parciais, cujos dados iniciais não são regulares o suficiente para possuírem derivada no sentido clássico, faz-se necessária a introdução de um novo conceito de derivada.

Para entendermos tal conceito, necessitamos de algumas definições.

Sejam $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ pontos do \mathbb{R}^n e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ as n-uplas de números inteiros não negativos. Considerando $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ e $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$ denotamos o operador derivação, em \mathbb{R}^n , por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Sejam Ω um aberto do \mathbb{R}^n e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Definimos o *suporte* da função φ e denotamos por $\text{supp}(\varphi)$, o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$. Quando $\text{supp}(\varphi)$ é compacto, dizemos que φ tem suporte compacto em Ω . Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que possuem suporte compacto em Ω .

O *espaço das funções testes* em Ω , $\mathcal{D}(\Omega)$, é o espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido da seguinte noção de convergência: Dadas uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ dizemos que

$$(1.1.1) \quad \varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{D}(\Omega)$$

se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω tal que

1. $\text{supp}(\varphi_\nu) \subset K, \forall \nu$ e $\text{supp}(\varphi) \subset K$;

2. $D^\alpha \varphi_\nu \longrightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente sobre K , $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Uma *distribuição* sobre Ω é uma forma linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência dada em (1.1.1), isto é

$$\langle T, \varphi_\nu \rangle \mapsto \langle T, \varphi \rangle \text{ em } \mathbb{R} \text{ sempre que } \varphi_\nu \mapsto \varphi \text{ em } \mathcal{D}(\Omega).$$

Chamamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o *espaço vetorial das distribuições* sobre Ω . Dizemos que $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{R}}$, uma seqüência de elementos de $\mathcal{D}'(\Omega)$, converge para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e escreveremos

$$T_\nu \longrightarrow T \text{ em } \mathcal{D}(\Omega)$$

quando

$$\langle T_\nu, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Dada uma distribuição T sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a derivada distribucional de ordem α da distribuição T , denotada por $D^\alpha T$, é definida por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com essa definição, uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ possui derivada distribucional de todas as ordens e $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Além disso a aplicação

$$\begin{aligned} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) &\rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\mapsto D^\alpha T \end{aligned}$$

é linear e contínua.

1.1.2: Espaços $L^p(\Omega)$

Sejam Ω um subconjunto do \mathbb{R}^n e p um número real tal que $1 \leq p < \infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis u , definidas em Ω tais que $|u|^p$ é Lebesgue integrável sobre Ω . O espaço $L^p(\Omega)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

é um espaço de Banach.

Se define $L^\infty(\Omega)$ como o conjunto formado pelas funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que u é mensurável e existe uma constante C tal que $|u(x)| \leq C$ para quase todo $x \in \Omega$. Uma norma em $L^\infty(\Omega)$ é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ C; |u(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega \},$$

a qual o torna um espaço de Banach.

Em particular, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno e norma denotamos respectivamente por

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx$$

e

$$\|u\| = (u, u)^{1/2} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Seja $1 < p < \infty$. Diz-se que p' é o *índice conjugado* de p se $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. No caso $p = 1$ definimos como seu índice conjugado $p' = \infty$.

Proposição 1.1 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Demonstração: Ver [B].

□

Proposição 1.2 (Desigualdade de Minkowski) *Sejam $u, v \in L^p(\Omega)$ e $1 \leq p \leq \infty$ então*

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [MED].

□

Denota-se por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $u \in L^p(\mathbb{K})$, para todo subconjunto compacto $\mathbb{K} \subset \Omega$.

Proposição 1.3 (Du Bois Raymond) *Sejam $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

então $u = 0$ quase sempre em Ω .

Demonstração: Ver [CDC].

□

Definição 1.4 *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Definimos a distribuição $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ por:*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Mostra-se sem dificuldades que T_u é uma distribuição. Do Lema de Du Bois Raymond segue-se que para cada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, temos T_u univocamente determinada por u sobre Ω , quase sempre, no seguinte sentido: se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ então $T_u = T_v$ se e somente se $u = v$ quase sempre em Ω . Por esta razão, identifica-se u com a distribuição T_u por ela definida e diz-se a distribuição u ao invés de dizer a distribuição T_u .

1.1.3: Espaços de Sobolev

Nesta seção veremos a definição e alguns resultados sobre os espaços de Sobolev, ferramenta indispensável para a resolução de problemas envolvendo equações diferenciais parciais.

Sejam Ω um aberto do \mathbb{R}^n , $1 \leq p \leq \infty$ e $m \geq 1$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que existe $w_\alpha \in L^p(\Omega)$ onde

$$T_{w_\alpha} = D^\alpha T_u \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tal que } |\alpha| \leq m$$

Simbolicamente

$$\begin{aligned}
W^{m,p}(\Omega) &= \{u \in L^p(\Omega); \text{ tal que existe } w_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ onde } T_{w_\alpha} = D^\alpha T_u \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \\
&\quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ com } |\alpha| \leq m\} \\
&= \left\{ u \in L^p(\Omega); \exists w_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \int_{\Omega} w_\alpha(x) \varphi(x) dx \right. \\
&\quad \left. = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^\alpha \varphi(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ com } |\alpha| \leq m \right\} \\
&= \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ com } |\alpha| \leq m\}.
\end{aligned}$$

Uma norma em $W^{m,p}(\Omega)$ é dada por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx, \text{ se } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)| dx,$$

a qual o torna um espaço de Banach. No caso $p = 2$, escrevemos $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ e munindo-o com o produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v),$$

temos um espaço de Hilbert.

Define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, ou seja,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Proposição 1.5 (Desigualdade de Poincaré) *Suponhamos que Ω seja um aberto limitado (ou ilimitado de medida finita) do \mathbb{R}^n . Então pra todo $1 \leq p < \infty$, existe uma constante C (dependendo da medida de Ω e de p) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: ver[B].

□

Quando Ω é limitado em alguma direção x_i de \mathbb{R}^n e $1 \leq p < \infty$ então a norma em $W_0^{m,p}(\Omega)$ dada por

$$\|u\|^p = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx$$

é equivalente a norma induzida por $W^{m,p}(\Omega)$.

Representa-se por $W^{-m,p'}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$, onde $1 \leq p < \infty$ e p' é o índice conjugado de p . Por $H^{-m}(\Omega)$ denota-se o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$.

Existem diversos teoremas de imersão para os espaços de Sobolev. No caso da reta obtemos uma melhor regularidade para as funções de $W^{m,p}(I)$, $I \subset \mathbb{R}$.

1.2 Espaços de funções a valores vetoriais

Seja X um espaço de Banach. Denotamos por $\mathcal{D}(0, T; X)$ o espaço das funções vetoriais $\varphi : (0, T) \rightarrow X$, infinitamente diferenciáveis cujo suporte é um compacto contido em $(0, T)$. Dizemos que uma sequência

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{D}(0, T; X)$$

se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω tal que

1. $\text{supp}(\varphi_\nu)$ e $\text{supp}(\varphi)$ estão contidos em K , para todo ν ;
2. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\frac{d^k}{dt^k} \varphi_\nu(t) \longrightarrow \frac{d^k}{dt^k} \varphi(t)$ em X , uniformemente em K .

O espaço das aplicações lineares contínuas de $\mathcal{D}(0, T) = \mathcal{D}(0, T; \mathbb{R})$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(0, T; X)$, ou seja, $S \in \mathcal{D}'(0, T; X)$ se $S : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow X$ é linear e se $\theta_\nu \longrightarrow \theta$ em $\mathcal{D}(0, T)$ então $\langle S, \theta_\nu \rangle \longrightarrow \langle S, \theta \rangle$ em X . Diremos que

$$S_\nu \longrightarrow S \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; X)$$

se

$$\langle S_\nu, \theta \rangle \longrightarrow \langle S, \theta \rangle \text{ em } X, \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T).$$

O espaço $\mathcal{D}'(0, T; X)$ equipado com a convergência acima é denominado espaço das *distribuições vetoriais* de $(0, T)$ com valores em X .

Denota-se por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das (classes de) funções vetoriais $u : (0, T) \rightarrow X$ mensuráveis em $(0, T)$, $(0, T)$ dotado da medida de Lebesgue, tais que

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < \infty.$$

Denota-se por $L^\infty(0, T; X)$, o espaço das (classes de) funções vetoriais $u : (0, T) \rightarrow X$ mensuráveis em $(0, T)$, $(0, T)$ dotado da medida de Lebesgue, tais que

$$\sup_{t \in [0, T]} \text{ess} \|u(t)\|_X < \infty.$$

Se X é Hilbert com produto interno $(\cdot, \cdot)_X$, então o espaço $L^2(0, T; X)$ munido do produto interno

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt$$

é também um espaço de Hilbert.

1.3 Topologias fracas, espaços reflexivos e separáveis

Nesta seção temos algumas propriedades das topologias fraca e fraca $*$, assim como resultados de convergência nestas topologias envolvendo a reflexividade e a separabilidade dos espaços.

1.3.1: Topologia fraca

Considerando E um espaço de Banach, a *topologia fraca* $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E que torna contínuas todas as aplicações $f \in E'$.

Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão convergente para x na topologia fraca $\sigma(E, E')$. Quando não houver possibilidade de confusão diremos apenas que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fraco para x e denotaremos por

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E$$

Proposição 1.6 *Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em E , então*

1. $x_n \rightharpoonup x$ em E se, e somente se, $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$, em $\mathbb{R} \forall f \in E'$;
2. Se $x_n \rightarrow x$ em E , então $x_n \rightharpoonup x$ em E ;
3. Se $x_n \rightharpoonup x$ em E , então $\|x\|_E$ é limitada e $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|_E$;
4. Se $x_n \rightharpoonup x$ em E e $f_n \rightarrow f$ em E' , então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ em \mathbb{R} .

Demonstração: Ver [B].

□

1.3.2: Topologia fraca *

Sejam E um espaço de Banach e $x \in E$ fixo. A aplicação

$$\begin{aligned} J_x : E' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \langle J_x, f \rangle = \langle f, x \rangle \end{aligned}$$

é linear e contínua e, portanto, $J_x \in E''$, $\forall x \in E$. Deste modo, definamos a aplicação $J : E \rightarrow E''$ tal que $J(x) = J_x$, a qual é chamada de *injeção canônica* de E em E'' .

A topologia fraca *, ou $\sigma(E', E)$, é a topologia menos fina sobre E' que faz contínuas todas as aplicações J_x .

Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão convergente para f na topologia fraca * $\sigma(E', E)$. Com vistas a simplificação das notações escreveremos apenas que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fraco * para f , ou simbolicamente

$$f_n \xrightarrow{*} f \text{ em } E',$$

quando não houver possibilidade confusão.

Proposição 1.7 *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em E' , então*

- i) $f_n \xrightarrow{*} f$ em E' se, e somente se, $\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ em $\mathbb{R} \quad \forall x \in E$;
- ii) Se $f_n \rightarrow f$ forte, então $f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(E', E'')$;
- iii) Se $f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(E', E'')$, então $f_n \xrightarrow{*} f$ em E' ;
1. Se $f_n \xrightarrow{*} f$ em E' , então $\|f_n\|_{E'}$ está limitada e $\|f\|_{E'} \leq \liminf \|f_n\|_{E'}$;
- iv) Se $f_n \xrightarrow{*} f$ em E' e $x_n \rightarrow x$ em E , então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ em \mathbb{R} .

Demonstração: Ver [B].

□

1.3.3: Espaços reflexivos e espaços separáveis

Dizemos que um espaço de Banach E é *reflexivo* quando a injeção canônica $J : E \rightarrow E''$ é sobrejetora.

Um espaço métrico E é dito *separável* quando existe um subconjunto $M \subset E$ enumerável e denso em E .

Teorema 1.8 *Seja E um espaço de Banach separável e seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência limitada em E' , então existe uma subseqüência $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ e $f \in E'$ tal que $f_{n_k} \xrightarrow{*} f$ em E' . ($\sigma(E', E)$).*

Demonstração: Ver [B].

□

Teorema 1.9 *Seja E um espaço de Banach reflexivo. Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada em E . Então existe uma subseqüência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ e $x \in E$ tal que $x_{n_k} \rightharpoonup x$ em E .*

Demonstração: Ver [B].

□

1.4 Domínios Lipschitzianos

Definição 1.10 *Seja Ω um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n . Dizemos que a fronteira Γ é contínua (respectivamente Lipschitziana, continuamente diferenciável de classe $C^{k,l}$, m vezes continuamente diferenciável) se para todo $x \in \Gamma$ existe uma vizinhança V de x em \mathbb{R}^n e um novo sistema de coordenadas ortogonal $\{y_1, \dots, y_n\}$ tal que*

a) V é um hipercubo nas novas coordenadas:

$$V = \{(y_1, \dots, y_n) \mid -a_i < y_i < a_i, 1 \leq j \leq n\}.$$

b) *Existe uma função contínua φ (respectivamente Lipschitziana, continuamente diferenciável, de classe $C^{k,l}$, m vezes diferenciável), definida em*

$$V' = \{(y_1, \dots, y_{n-1}) \mid -a_i < y_i < a_i, 1 \leq j \leq n-1\}.$$

e tal que

$$\begin{aligned} |\varphi(y')| &\leq a_n/2 \quad \text{para todo } y' = (y_1, \dots, y_n) \in V' \\ \Omega \cap V &= \{y = (y', y_n) \in V \mid y_n < \varphi(y')\} \\ \Gamma \cap V &= \{y = (y', y_n) \in V \mid y_n = \varphi(y')\} \end{aligned}$$

Proposição 1.11 *Um conjunto Ω de \mathbb{R}^n tem a propriedade uniforme do cone se e somente se tem uma fronteira Γ Lipschitziana.*

Veja Grisvard[GRIS] Teorema 1.2.2.2.

Definição 1.12 *Seja Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 . Diremos que a fronteira Γ é um polígono curvilíneo de classe C^m , m inteiro ≥ 1 se para todo $x \in \Gamma$ existe uma vizinhança V em \mathbb{R}^2 e uma aplicação $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ indo de V em \mathbb{R}^2 tal que*

(i) ψ é injetiva,

(ii) ψ tal como sua inversa ψ^{-1} (definida sobre $\psi(V)$) são de classe C^m ,

(iii) $\Omega \cap V$ é descrito como

$$\left\{ (x, y) \in V; \psi_2(x, y) < 0 \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ (x, y) \in V; \psi_1(x, y) < 0 \quad \text{e} \quad \psi_2(x, y) < 0 \right\}$$

ou

$$\left\{ (x, y) \in V; \psi_1(x, y) < 0 \quad \text{ou} \quad \psi_2(x, y) < 0 \right\}$$

Segundo Grisvard[GRIS], qualquer Ω satisfazendo a Definição 1.12 satisfaz também a definição 1.10

Teorema 1.13 *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^n com uma fronteira Lipschitziana Γ . Então, a aplicação $u \mapsto \gamma u$ que é definida para $u \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ como $\gamma u = u|_{\Gamma}$ tem uma única extensão para um operador contínuo de $W^{1,p}(\Omega)$ em $W^{1-1/p,p}(\Gamma)$. Este operador tem uma inversa contínua a direita que independe de p .*

Veja Grisvard[GRIS] Teorema 1.5.1.3.

Teorema 1.14 *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^n com fronteira Lipschitziana Γ . Então para todo $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$, temos*

$$\int_{\Omega} (\Delta u)v \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Gamma} \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \gamma v \, d\Gamma.$$

Veja Grisvard[GRIS] Lemma 1.5.3.7.

1.5 Semigrupo não linear

Nessa seção falaremos um pouco sobre a teoria de Semigrupo não linear, introduziremos elementos básicos e as proposições essenciais ao nosso trabalho. Para mais detalhes veja os livros de Barbu[BAR] e Showalter[SHOW].

No que segue nesta seção, V representará um espaço de Banach real e V' seu espaço dual.

Definição 1.15 *A derivada Gateaux de uma função $\varphi : V \rightarrow (-\infty, \infty]$ em $u \in D(\varphi)$ é uma função $f \in V'$ tal que $f(v) = \varphi'(u, v), \forall v \in V$. Esta função f é única, é denotada por $\varphi'(u)$ e dizemos que φ é Gateaux derivável.*

Observação: $\varphi'(u, v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\varphi(u + tv) - \varphi(u))$ é a derivada direcional de u na direção de v .

Proposição 1.16 *Se $K \subset V$ é convexo e seja $\varphi : V \rightarrow (-\infty, \infty]$ Gateaux diferenciável em cada $u \in K$. As seguintes afirmações são equivalentes*

- (i) φ é convexo.
- (ii) $\langle \varphi'(u), v - u \rangle \leq \varphi(v) - \varphi(u) \quad \forall u, v \in K$
- (iii) $\langle \varphi'(u) - \varphi'(u), v - u \rangle \leq 0 \quad \forall u, v \in K$

Demonstração: ver Proposição 7.4 Showater[SHOW].

□

Definição 1.17 *Seja $\varphi : V \rightarrow (-\infty, \infty]$ convexa e própria. A subdiferencial de φ em $u \in D(\varphi)$ é o conjunto de todos os funcionais $u^* \in V'$ tais que*

$$\langle u^*, v - u \rangle \leq \varphi(v) - \varphi(u), \quad v \in V,$$

e é denotado $\partial\varphi(u)$. Cada um desses $u^ \in \partial\varphi(u)$ é também chamado de subdiferencial de φ em u .*

Proposição 1.18 *Seja $\varphi : V \rightarrow (-\infty, \infty]$ um funcional convexo e próprio. Se φ é Gateaux diferenciável em $u \in \text{int}(D(\varphi))$, então $\partial\varphi(u) = \{\varphi'(u)\}$. Se φ é contínua e $\partial\varphi$ é único, então φ é Gateaux derivável em u .*

Demonstração: ver Proposição 7.6 Showalter[SHOW]

□

Definição 1.19 *A função $\varphi : V \rightarrow (-\infty, \infty]$ é dita semicontínua inferiormente em V se*

$$\liminf_{v \rightarrow u} \varphi(v) \geq \varphi(u), \quad \forall u \in V$$

Proposição 1.20 *Seja φ uma função própria, convexa e semicontínua inferiormente em V . Então $\partial\varphi$ é um operador maximal monótono de V em V' .*

Demonstração: ver Barbu[BAR] (página 48)

□

Teorema 1.21 (Hille-Yosida) *Seja A um operador maximal monótono de um espaço de Hilbert H . Então para todo $u_0 \in D(A)$ existe uma única função*

$$u \in C^1([0, \infty[; H) \cap C^0([0, \infty[; D(A))$$

tal que

$$(1.5.2) \quad \begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + Au = 0; \quad \forall t > 0 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Além disso se verifica

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad e \quad \left| \frac{du(t)}{dt} \right| = |A(t)u| \leq |Au_0|, \quad \forall t \geq 0$$

onde $D(A)$ é um espaço de Banach munido com a norma do gráfico

Demonstração: ver [B2]

□

1.6 Teorema de Holmgren

Considere um plano $\pi \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ de equação

$$\pi = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \sum_{i=1}^n a_i x_i + bt = c \right\}$$

onde $(a_i)_{i=1}^n, b$ e c são constantes arbitrárias. O polinômio $P(a_1, \dots, a_n, b)$ associado ao operador $P(D)$ é definido por

$$P(a_1, \dots, a_n, b) = b^2 - \sum_{i=1}^n |a_i|^2$$

e portanto, π é característico de $P(D) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |a_i|^2 = b^2$

Teorema 1.22 (de Holmgren) *Sejam \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 dois abertos convexos do \mathbb{R}^k tais que $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ e seja $P(D)$ um operador diferencial com coeficientes constantes, tal que todo plano π característico de $P(D)$ que verifica $\pi \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$ satisfaz também $\pi \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset$. Então, qualquer solução $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}_2)$ da equação $P(D)u = 0$ tal que $u = 0$ em \mathcal{O}_1 , verifica $u = 0$ em \mathcal{O}_2*

Demonstração: ver Lions [LIONS2]

□

1.7 Mais Alguns Resultados

Enunciamos nesta seção mais alguns resultados utilizados no texto.

Teorema 1.23 (Teorema da Função Inversa) *Seja $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k ($k \geq 1$) no aberto $W \subset \mathbb{R}^n$ e tal que $df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é inversível então existe uma bola aberta $V = B_\delta(a) \subset W$ tal que a restrição $f|_V$ é um difeomorfismo sobre um aberto U tal que $f(a) \in U$*

Um resultado importante no contexto de medida finita é a desigualdade de Jensen (ver Brézis[B] página 120):

Proposição 1.24 (desigualdade de Jensen) *Assuma que $med(\Omega) < \infty$. Seja $j : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, \infty]$ uma função convexa semi contínua inferiormente, $j \neq \infty$. Seja $f \in L^1(\Omega)$ tal que $f(x) \in D(j)$ quase sempre e $j(f) \in L^1(\Omega)$. Então*

$$(1.7.3) \quad j\left(\frac{1}{med(\Omega)} \int_{\Omega} f\right) \leq \frac{1}{med(\Omega)} \int_{\Omega} j(f).$$

Proposição 1.25 (Desigualdade de Young) *Se a e b são números reais não negativos então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

sempre que $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Demonstração: Ver [B].

□

Um domínio admissível

Esse capítulo é dedicado a construção de um exemplo de domínio satisfazendo as hipóteses requeridas em 3.1 e 3.2 enunciada no capítulo 3: Um domínio ilimitado de medida finita, satisfazendo as condições de domínio Lipschitziano (Definição 1.10) em $\Omega \cap B_R(0)$, $\forall R > 0$.

2.1 Definição analítica do domínio

Ilustraremos a seguir um exemplo de uma região Ω que satisfaz a condição de fronteira de Lipschitz para $\Omega \cap B_R(0)$.

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad |y| \leq \frac{1}{(|x| + 1)\sqrt{|x|}} \right\}$$

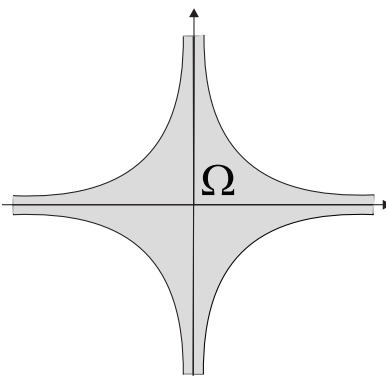


Figura 2.1: Região Ω de \mathbb{R}^2 .

Note que Ω realmente tem medida finita. Pelas simetrias de Ω basta calcularmos a

medida do domínio em um dos quadrantes, ou seja, basta calcularmos a seguinte integral

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx &= 2 \int_0^\infty \frac{1}{u^2+1} du \\ &= 2 \left(\lim_{s \rightarrow \infty} \arctan s - \underbrace{\arctan 0}_{=0} \right) \\ &= 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

portanto $med(\Omega) = 4\pi$.

A partir de agora trabalharemos com a teoria descrita no livro de Grisvard[GRIS] no sentido de colocar a região $\Omega^R = \Omega \cap B_R(0)$ nas condições da Definição 1.12 que define o que é um polígono curvilinear de \mathbb{R}^2 . Uma consequência desta definição é que todo polígono curvilinear tem fronteira Lipschitz pela Definição 1.10.

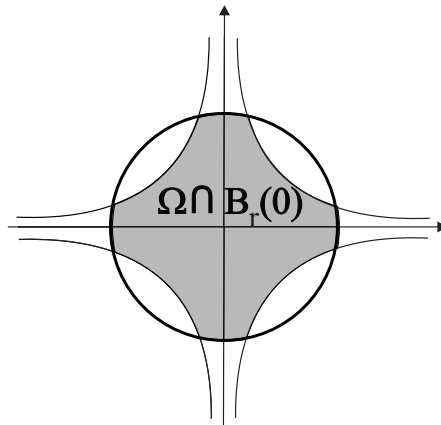


Figura 2.2: The Ω^R region

2.2 Ω^R é um polígono curvilinear de \mathbb{R}^2

No que segue identificaremos os vértices e os subconjuntos da fronteira de Ω^R compreendidos entre os vértices.

- Chamaremos de $S_j, j = 1, \dots, 8$ os vértices of Ω^R , como mostra a figura 2.3
- Chamaremos de Γ_j o subconjunto aberto de $\Gamma^R = \partial\Omega^R$ compreendido entre S_j e S_{j+1} , $j = 1, \dots, 7$ e de Γ_8 o subconjunto aberto da fronteira compreendido entre S_8 e S_1 .

Notemos em particular que nosso problema se concentra nos pontos S_j porque se $x \in \Gamma_j$ temos uma fronteira suave satisfazendo naturalmente (como na teoria de traço para fronteiras suaves) a condição da Definição 1.12. Então para cada ponto de vértice S_j mostraremos a existência de uma função satisfazendo as condições da Definição 1.12.

A fim de fixarmos a ideia provaremos para o ponto S_1 . Os demais pontos de vértice seguem analogamente pelas simetrias. O ponto é caracterizado por sua posição no gráfico

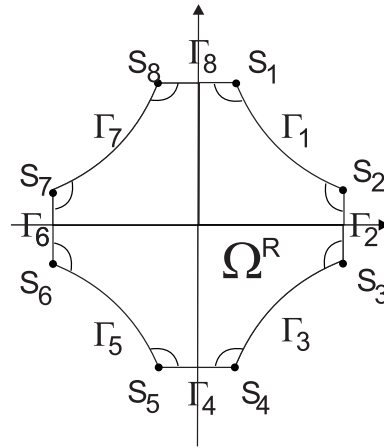


Figura 2.3: Vertices de Ω^R

da fronteira da seguinte maneira $S_1 = (x_0, y_0) = \left(x_0, \frac{1}{(x_0 + 1)\sqrt{x_0}}\right)$. A fim de encontrarmos a vizinhança referida na Definição 1.12 consideremos para S_1 a seguinte vizinhança

$$W = B_\rho(S_1) \quad \text{onde} \quad \rho = \frac{x_0}{2} = \min \left\{ \frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2} \right\}$$

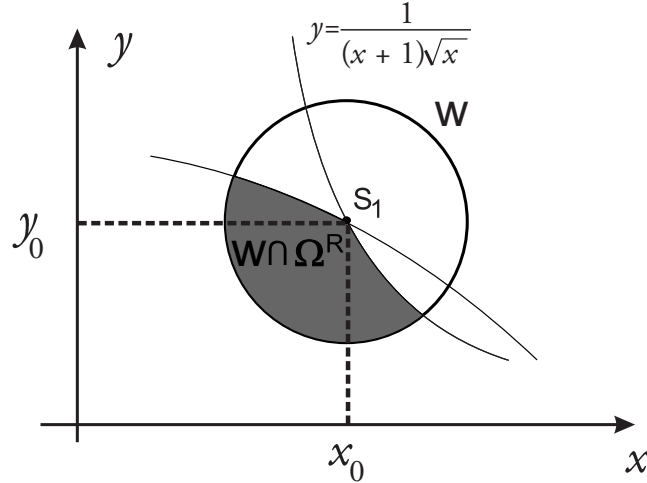


Figura 2.4: Vizinhança W de S_1

Observação 2.1 Da figura 2.4 observamos que a vizinhança W está inteiramente contida no primeiro quadrante de \mathbb{R}^2 , ou seja, se $(x, y) \in W$ então $x > 0$ e $y > 0$.

Definamos a seguinte função

$$\psi : W \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto \psi(x, y) = \left(\psi_1(x, y), \psi_2(x, y)\right) = \left(x^2 + y^2 - R^2, y - \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\right).$$

A partir da função ψ mostraremos a existência de uma função que satisfaz as condições da Definição 1.12.

• Para mostrar as condições (i) e (ii) da definição 1.12, ou seja, que ψ é injetora numa vizinhança V de S_1 e que ψ e sua inversa são C^∞ recorreremos ao Teorema da Função Inversa.

Observemos então que nossa função se encaixa nas hipóteses do Teorema da função Inversa (Teorema 1.23)

- $\psi \in C^\infty(W)$, posto que suas funções coordenadas são C^∞ , já que o problema para isso seria o conjunto dos pontos que anula o denominador de ψ_2 que são $x = -1$ e $x = 0$ que não pertencem a vizinhança W .
- $d\psi(S_1)$ é inversível. De fato,

$$d\psi(S_1) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{3x+1}{2x(x+1)^2\sqrt{x}} & 1 \end{bmatrix} \quad \forall (x, y) \in W,$$

para que $d\psi$ seja inversível no ponto $S_1 = (x_0, y_0) = \left(x_0, \frac{1}{(1+x_0)\sqrt{x_0}}\right)$ é suficiente verificarmos que $\det[d\psi(S_1)] \neq 0$. Calculemos tal determinante

$$\det[d\psi(S_1)] = \begin{vmatrix} 2x_0 & 2y_0 \\ \frac{3x_0+1}{2x_0(x_0+1)^2\sqrt{x_0}} & 1 \end{vmatrix} = 2x_0 + \frac{y_0(3x_0+1)}{2x_0(x_0+1)^2\sqrt{x_0}} = 2x_0 + \frac{3x_0+1}{x_0^2(x_0+1)^3}.$$

Da expressão acima levando em conta que $x_0 > 0$ em S_1 independente da escolha de $R > 0$ para o domínio Ω^R . Temos que

$$\det[d\psi(S_1)] > 0,$$

Logo, temos que $\det[d\psi(S_1)]$ é inversível.

Então pelo Teorema 1.23 (Teorema da Função Inversa) existe $V = B_\delta(S_1) \subset W$ tal que $\psi|_V$ é um difeomorfismo sobre um aberto U tal que $\psi(S_1) \in U$.

Com isso considerando a função ψ definida em V , temos verificados os seguintes itens da Definição 1.12

- (i) $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ é injetora de V em U , posto que ψ é inversível.
- (ii) ψ e ψ^{-1} são de classe C^∞ já que tínhamos $\psi \in C^\infty$ e além disso, ela é um difeomorfismo.

Resta verificar a condição (iii) da definição 1.12, isto é, que a imagem $\psi(\Omega^R \cap V)$ esta em uma determinada região de \mathbb{R}^2 . Mostraremos que

$$\Omega^R \cap V = \{(x, y) \in V; \quad \psi_1(x, y) < 0 \quad \text{e} \quad \psi_2(x, y) < 0\}$$

Notemos que

$$\Omega^R \cap V = \left\{ (x, y) \in V; y < \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} \text{ e } x^2 + y^2 < R^2 \right\}$$

Como $x^2 + y^2 < R^2$ temos naturalmente que

$$\psi_1(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 < 0,$$

além disso, pela definição de Ω^R temos $y < \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ então

$$\psi_2(x, y) = y - \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} < 0.$$

Consequentemente temos a inclusão

$$\Omega^R \cap V \subset \{(x, y) \in V; \psi_1(x, y) < 0 \text{ e } \psi_2(x, y) < 0\}$$

A inclusão contrária também se dá naturalmente da definição de ψ e de $\Omega^R \cap V$.

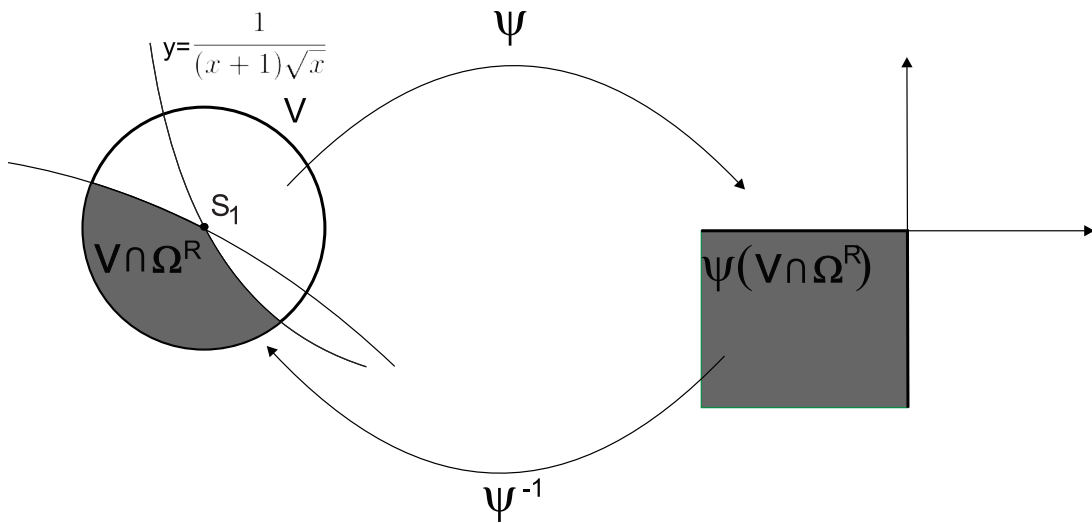


Figura 2.5: aplicação ψ

CAPÍTULO 3

Decaimento para a equação da onda com dissipação friccional

3.1 Introdução do problema

Neste capítulo estamos interessados em estudar as taxas de decaimento uniforme para a energia associada com a equação da onda com um amortecimento não linear localmente distribuído, a saber

$$(3.1.1) \quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 & \text{em } \Omega \times [0, T] \\ u = 0 & \text{em } \Gamma \times [0, T] \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $n \geq 2$ é um aberto ilimitado de medida finita e fronteira $\partial\Omega = \Gamma$ ilimitada. A função $a(x)$ é responsável pelo efeito localizado de dissipação é assumida como não negativa, essencialmente limitada e além disso.

$$(3.1.2) \quad a(x) \geq a_0 \geq 0 \quad \text{quase sempre em } \omega$$

onde $\omega = \omega' \cup \{x \in \Omega \mid \|x\| \geq R\}$ ($R > 0$) e ω' é uma vizinhança em Ω do fecho de $\partial\Omega = \Gamma$. Além disso g é uma função monótona crescente tal que

$$(3.1.3) \quad \begin{cases} g(s)s \geq 0 & \text{para todo } s \neq 0 \\ k|s| \leq g(s) \leq K|s| & \text{para todo } |s| \geq 1. \end{cases}$$

Hipótese 3.1 *Assumiremos para todo ($R > 0$) o conjunto aberto $\Omega^R = \Omega \cap B_R(0)$, onde $B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < R\}$ é um conjunto limitado de \mathbb{R}^n com fronteira Lipschitz, ou, em outras palavras, que $\Omega \cap B_R(0) = \Omega^R$ tem a propriedade uniforme do cone (Veja Definição 1.10 e Proposição 1.11 Grisvard [GRIS])*

Essa propriedade é necessária para garantir localmente as propriedades de traço bem como as fórmulas de Green e Gauss. A fim de apresentarmos o resultado e para que nossa abordagem seja a mais clara possível, nos voltaremos para uma situação simples.

Consideraremos um domínio simétrico $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ilimitado e de medida finita e assumiremos que sua fronteira $\partial\Omega$ é ilimitada e suave, além disso, que $\partial\Omega^R = \partial(\Omega \cap B_R(0))$ é Lipschitz ou tem a propriedade uniforme do cone para todo $R > 0$. Uma geometria admissível é como a da figura 3.1.

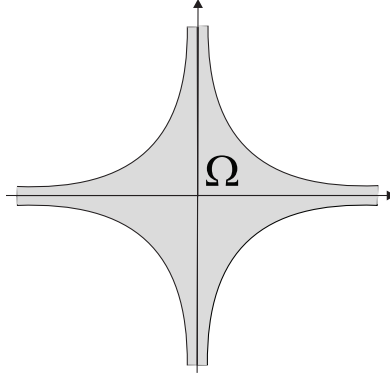


Figura 3.1: região admissível Ω

Hipótese 3.2 *Assumimos que o conjunto Ω tem a seguinte propriedade: para todo $r > 0$ existe um conjunto limitado Ω_χ tal que $\Omega \cap B_r \subset \Omega_\chi \subset \Omega$, $((\partial\Omega) \cap \partial(\Omega \cap B_r)) \subset \partial\Omega_\chi$ e além disso a fronteira de Ω_χ é completamente suave.*

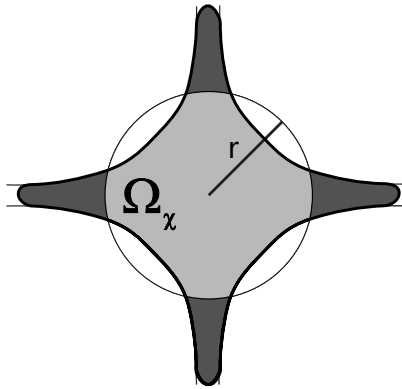


Figura 3.2: região Ω_χ

A área demarcada em cinza claro na figura 3.4 é a região

$$\omega = \omega' \cup \Omega_R; \quad \Omega_R = \{x \in \Omega; \|x\| > R\}$$

e ω' é a vizinhança em Ω de $\partial\Omega$ interseccionada com B_R . Note que temos dois casos a considerar

- i) $B_R(0) \subset \Omega$ Neste caso é suficiente considerar o amortecimento na região Ω_R (veja figura 3.3)
- ii) $B_R(0) \not\subset \Omega$. Neste caso a fim de não ferirmos a lei da ótica geométrica de Lebau, Bardo e Rauch temos que colocar o amortecimento em $\omega = \Omega_R \cup \omega'$. Precisamos evitar os raios presos em ω' conforme figuras 3.4 e 3.5.

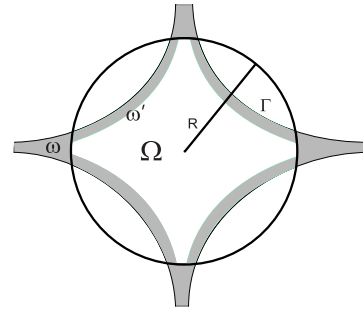
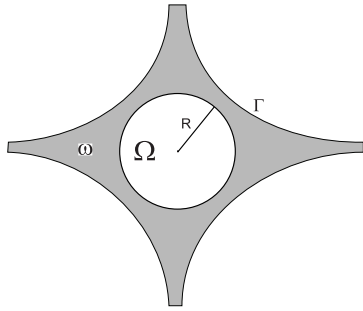


Figura 3.3: região de dissipação caso i) Figura 3.4: região de dissipação caso ii)

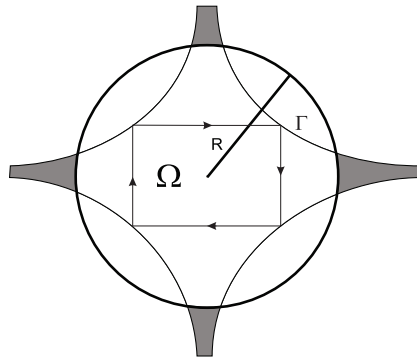


Figura 3.5: Precisamos evitar um raio preso refletindo na fronteira Γ , de acordo com as leis da ótica geométrica, sem interceptar a região de dissipação ω .

A estabilização para a equação da onda

$$u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 \quad \text{em } \Omega \times \mathbb{R}_+$$

onde Ω é um domínio limitado do \mathbb{R}^n ou uma variedade Riemanniana compacta, tem um estudo muito vasto na literatura. Podemos encontrar a equação da onda posta em \mathbb{R}^n todo em diferentes trabalhos. No entanto, quando se diz respeito a equação da onda posta em um domínio ilimitado e de fronteira ilimitada estamos cientes apenas de dois casos: uma faixa ou um semiplano. Na medida em que estamos interessados em considerar a equação da onda localmente dissipativa em um domínio ilimitado Ω (mesmo com medida finita) com fronteira ilimitada $\partial\Omega$ e tal que Ω é diferente de uma faixa infinita ou um semiplano esse problema parece nunca ter sido estudado na literatura.

As grandes dificuldades encontradas nesse contexto são a falta de compacidade, a não existência de um operador prolongamento e conseqüentemente a não existência de uma teoria de traço (apenas localmente), a falta de regularidade elíptica, a falta das fórmulas de Green e Gauss, etc. Apesar desses problemas somos capazes de encontrar taxas de decaimento para o problema (3.1.1) sujeito as condições de fronteira de Dirichlet e considerando um efeito dissipativo sem ferir as leis da ótica geométrica.

Os ingredientes usados na prova são as desigualdades integrais de energia, com base em multiplicadores devidamente escolhidos inspirados no método de Lasiecka e Tataru combinados com novos ingredientes envolvendo o problema em questão.

Nossa abordagem nos permite não impor qualquer restrição de crescimento a função g próxima da origem e estabelecer taxas gerais de decaimento de energia dadas por

$$E(t) \leq S \left(\frac{t}{T_0} - 1 \right) \quad \forall t > T_0,$$

motivados pela solução $S(t)$ da E.D.O. não linear

$$S_t + q(S(t)) = 0$$

onde q é uma função estritamente crescente ligada diretamente ao amortecimento $g(u_t)$. Para especificar um pouco mais a classe de dissipação não linear somos capazes de obter explicitamente as taxas de decaimento.

Além disso, nossa abordagem nos permite tratar a equação da onda semi-linear:

$$u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) + f(u) = 0$$

em um domínio ilimitado com medida finita e fronteira ilimitada, com a função f possuindo um crescimento polinomial como por exemplo $f(s) = |s|^\rho s$ ($\rho > 0$) satisfazendo a Hipótese (3.1.4) a seguir.

Como é usual assumiremos que ρ é uma constante positiva tal que

$$(3.1.4) \quad 0 < \rho = \frac{2}{n-2} \quad \text{se } n \geq 3 \quad \text{e } \rho > 0 \quad \text{se } n = 1, 2, \dots$$

Vamos considerar o espaço $H^1(\Omega)$, onde Ω é um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n munido com o produto interno

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$$

e definiremos o subespaço de $H^1(\Omega)$, o qual denotaremos como $H_0^1(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na topologia de $H^1(\Omega)$, então dado $v \in H_0^1(\Omega)$ denotando \tilde{v} a extensão nula de v para todo o \mathbb{R}^n , temos a seguintes propriedades

$$(3.1.5) \quad \tilde{v} \in H^1(\mathbb{R}^n)$$

$$(3.1.6) \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial x_j}$$

$$(3.1.7) \quad \|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\tilde{v}\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$$

De acordo com (3.1.4) e com as imersões de Sobolev temos

$$(3.1.8) \quad H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{se } n = 1$$

$$(3.1.9) \quad H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \quad \forall q \in [2, +\infty) \quad \text{se } n = 2$$

$$(3.1.10) \quad H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n) = L^{2(\rho+1)}(\mathbb{R}^n) \quad \text{se } n \geq 3.$$

Baseadas na propriedade (3.1.7) as imersões (3.1.8) - (3.1.10) são asseguradas trocando \mathbb{R}^n por Ω e $H^1(\mathbb{R}^n)$ por $H_0^1(\Omega)$. Em verdade podemos provar por exemplo (3.1.10). Temos para todo $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \leq \|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \leq C \cdot \|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

estando provado que

$$(3.1.11) \quad H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-1}}(\Omega) = L^{2\rho+1}(\Omega) \quad \text{se } n \geq 3$$

Observando que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ utilizando (3.1.11) e argumentos de interpolação podemos deduzir que

$$(3.1.12) \quad H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega) \quad \forall r \in [2, 2\rho + 1].$$

É importante notar que se $\text{med}(\Omega) < \infty$ a desigualdade de Poincaré permanece válida (ver Brézis[B] página 290), a saber

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \cdot \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

infy onde $C = C(\text{med}(\Omega))$.

3.2 Teorema de existência

O problema da boa colocação é resolvido usando a teoria de semigrupo não linear pela construção de um problema matricial envolvendo o operador $A = -\Delta$, o operador identidade I e o operador não linear B , que envolve o termo de amortecimento não linear $a(x)g(u_t)$. Mostraremos, a seguir, que o operador matricial é um operador maximal monótono.

Procederemos como na teoria descrita nos livros de Barbu [BAR] e Showalter [SHOW] para obter o seguinte resultado.

Teorema 3.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, ilimitado, de medida finita e fronteira ilimitada satisfazendo as Hipóteses 3.1 e 3.2. Então dado $(u_0, u_1) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ existe uma única solução regular $u : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ para o problema (3.1.1) sujeito as hipóteses (3.1.2) e (3.1.3) tal que*

$$(3.2.13) \quad u \in L^\infty(0, \infty; D(-\Delta)), \quad u_t \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega)) \quad e \quad u_{tt} \in L^\infty(0, \infty; L^1(\Omega))$$

Se $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ então existe uma única solução fraca $u : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ para o problema (3.1.1) sujeito as hipóteses (3.1.2) e (3.1.3) tal que

$$(3.2.14) \quad u \in C^0([0, \infty[; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, \infty[; L^2(\Omega))$$

Considere o problema

$$(3.2.15) \quad \begin{cases} u_{tt} + Au + Bu_t = 0 \\ u(0) = u^0 \quad u_t(0) = u_1 \end{cases}$$

onde o operador A

$$A : D(A) \subset H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$$

$$f \quad \mapsto \quad Af = -\Delta f$$

é definido por

$$\langle Af, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

com $D(A) = \{f \in H_0^1(\Omega); \Delta f \in L^2(\Omega)\}$.

O operador A acima mencionado é linear, limitado e coercivo, e satisfaz a condição de monotonia.

O operador B é definido por

$$B : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$$

$$v \quad \mapsto \quad Bv = a(x)g(v(x))$$

onde a ação em $H_0^1(\Omega)$ dada por

$$\langle Bv, w \rangle = \int_{\Omega} a(x)g(v(x))w(x)dx, \quad \forall v, w \in H_0^1(\Omega).$$

Observemos que o operador B está bem definido. De fato, considere $\Omega = \Omega^0 \cup \Omega^1$ onde

$$\Omega^0 = \{x \in \Omega; |v(x)| \leq 1\} \quad \text{and} \quad \Omega^1 = \{x \in \Omega; |v(x)| > 1\}.$$

Pelas hipóteses sobre a função a e g e fazendo uso da desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} |\langle Bv, w \rangle| &\leq \int_{\Omega} |a(x)| |g(v(x))| |w(x)| dx \\ &\leq \int_{\Omega^0} |a(x)| K_1 |w(x)| dx + \int_{\Omega^1} |a(x)| K |v(x)| |w(x)| dx \\ &\leq K_1 \|a\|_{L^\infty} \text{med}^{1/2}(\Omega) \|w\|_{L^2} + K \|a\|_{L^\infty} \|v\|_{L^2} \|w\|_{L^2} \\ &\leq \max \{K, K_1 \cdot \text{med}^{1/2}(\Omega)\} \|a\|_{L^\infty} \{ \|w\|_{L^2} + \|v\|_{L^2} \|w\|_{L^2} \} \\ &= K_2 \|a\|_{L^\infty} (1 + \|v\|_{L^2}). \end{aligned}$$

Portanto, como $w \in H_0^1(\Omega)$, pela desigualdade de Poincaré

$$\|w\|_{L^2} \leq K_3 \|\nabla w\|_{L^2} = K_3 \|w\|_{H_0^1},$$

onde K_3 depende somente da medida de Ω .

Então

$$|\langle Bv, w \rangle| \leq K_4 \|a\|_{L^\infty} (1 + \|v\|_{L^2}) \|w\|_{H_0^1},$$

provando que $Bv \in H^{-1}(\Omega)$.

Vejamos que $B : H_0^1 \rightarrow H^{-1}$ maximal monótono. De fato,

$$\begin{aligned} &\langle Bw - Bv, w - v \rangle \\ (3.2.16) \quad &= \int_{\Omega} a(x)g(w(x))[w(x) - v(x)]dx - \int_{\Omega} a(x)g(v(x))[w(x) - v(x)]dx \\ &= \int_{\Omega} a(x)[g(w(x)) - g(v(x))][w - v] dx \geq 0 \end{aligned}$$

como a não negativo e g é monótono por hipótese. Temos que B monótono.

Para provar a maximalidade de B , definimos o funcional $J : H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$Jv = \int_{\Omega} \int_0^{v(x)} a(x)g(s) ds dx.$$

A seguir, provaremos que B é subdiferencial de J . De fato, a derivada direcional de J em v na direção u é

$$\begin{aligned} J'(v, u) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(v + \lambda u) - J(v)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\int_{\Omega} \int_{v(x)+\lambda u(x)}^{v(x)} a(x)g(s) ds dx - \int_{\Omega} \int_0^{v(x)} a(x)g(s) ds dx}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} a(x) \left[\int_{v(x)}^{v(x)+\lambda u(x)} g(s) ds \right] dx \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\Omega} a(x) \left[\frac{1}{\lambda} \int_{v(x)}^{v(x)+\lambda u(x)} g(s) ds \right] dx \\ &= \int_{\Omega} a(x)g(v(x))u(x) dx \end{aligned}$$

onde a última identidade é obtida pelo teorema da diferenciação de Lebesgue. Então J é Gateaux derivável em $v \in H_0^1(\Omega)$ e, além disso

$$\langle J'v, u \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} = \int_{\Omega} a(x)g(v(x))u(x) = \langle Bv, u \rangle_{H^{-1} \times H_0^1}.$$

Então,

$$J'v = Bv \quad \forall v \in H_0^1.$$

Pela Proposição 1.16 é suficiente provar que

$$(3.2.17) \quad \langle J'w - J'v, w - v \rangle \geq 0, \quad \forall w, v \in H_0^1,$$

que é verdadeiro levando em conta (3.2.16). Conseqüentemente J é convexo.

Como J é próprio ($J \neq \infty$) podemos aplicar a proposição 1.18 para concluir

$$\partial(Jv) = J'v = Bv, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

o que prova que B subdiferencial de J .

No que segue provaremos que J é contínuo. Com efeito, como g é contínuo temos $|g(s)| < c$ para $|s| \leq 1$ e por hipótese (3.1.3) $|g(s)| \leq K|s|$ para $|s| > 1$. Então, $|g(s)| \leq c + K|s|$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Tendo em mente que $v \in H_0^1(\Omega)$ seja $\{v_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequencia tal que $v_n \rightarrow v$ em $H_0^1(\Omega)$. Temos,

$$(3.2.18) \quad \begin{aligned} |Jv_n - Jv| &= \left| \int_{\Omega} a(x) \int_0^{v_n(x)} g(s) ds dx - \int_{\Omega} a(x) \int_0^{v(x)} g(s) ds dx \right| \\ &\leq \|a\|_{L^\infty} c \underbrace{\int_{\Omega} |v_n(x) - v(x)| dx}_{I_1} + \|a\|_{L^\infty} \frac{K}{2} \underbrace{\int_{\Omega} \left| |v_n(x)|^2 - |v(x)|^2 \right| dx}_{I_2}. \end{aligned}$$

Estimativa para I_1 :

$$(3.2.19) \quad \begin{aligned} I_1 &\leq \text{meas}^{1/2}(\Omega) \cdot \|v_n - v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \text{meas}^{1/2}(\Omega) \cdot \|v_n - v\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Estimativa para I_2 :

$$(3.2.20) \quad \begin{aligned} I_2 &= \int_{\Omega} |v_n(x) - v(x)| |v_n(x) + v(x)| dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |v_n(x) - v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\Omega} |v_n(x) + v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left(2(\bar{c} + \|v\|_{L^2}^2) \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\Omega} |v_n(x) - v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

onde \bar{c} obtido pelo fato de v_n ser limitado em L^2 .

Combinando (3.2.18), (3.2.19) e (3.2.20) deduzimos que J contínuo.

Pelo feito acima e sendo B subdiferencial de J e uma vez que J é contínuo, convexo e próprio, pelo Teorema 2.1 encontrado em Barbu[BAR] (page 54) deduzimos que $\partial J = B$ é maximal monótono como desejávamos provar.

Podemos reformular o problema para obter

$$(3.2.21) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -I \\ A & B \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{matrix} H_0^1 \\ \times \\ L^2 \end{matrix}$$

Então temos o operador matricial $\mathbb{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ onde $\mathcal{H} = H_0^1 \times L^2$, definido por

$$\mathbb{A} \begin{pmatrix} v \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h \\ Av + Bh \end{pmatrix},$$

onde o domínio é dado por $D(\mathbb{A}) = \{(v, h) \in \mathcal{H}; h \in H_0^1(\Omega) \text{ e } Av + Bh \in L^2(\Omega)\}$. Temos que provar que \mathbb{A} maximal monótono em \mathcal{H} . Com efeito, \mathbb{A} é monótono, desde

$$\begin{aligned} & \left(\mathbb{A} \begin{bmatrix} v_1 \\ h_1 \end{bmatrix} - \mathbb{A} \begin{bmatrix} v_2 \\ h_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ h_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_2 \\ h_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} -h_1 + h_2 \\ A(v_1 - v_2) + Bh_1 - Bh_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ h_1 - h_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= (-h_1 + h_2, v_1 - v_2)_{H_0^1} + (A(v_1 - v_2) + Bh_1 - Bh_2, h_1 - h_2)_{L^2} \\ &= (-h_1 + h_2, v_1 - v_2)_{H_0^1} + \langle A(v_1 - v_2), h_1 - h_2 \rangle_{H^{-1}, H_0^1} + \langle Bh_1 - Bh_2, h_1 - h_2 \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ &= \langle Bh_1 - Bh_2, h_1 - h_2 \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \geq 0, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é similar a (3.2.16).

No caminho de provar a maximalidade de \mathbb{A} é suficiente provar que $Im(I + \mathbb{A}) = \mathcal{H}$, que é, dado $(v_0, h_0) \in \mathcal{H}$ temos que mostrar que existe $(v, h) \in D(\mathbb{A})$ tal que

$$(3.2.22) \quad (I + \mathbb{A}) \begin{bmatrix} v \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ h_0 \end{bmatrix},$$

que é

$$\begin{cases} v - h = v_0 \\ h + Av + Bh = h_0. \end{cases}$$

Combinando as identidades anteriores deduzimos

$$(3.2.23) \quad h + Ah + Bh = h_0 - Av_0.$$

Observamos que o operador $h \mapsto h + Ah$ contínuo. Além disso ele é coercivo,

$$\begin{aligned} \langle h + Ah, h \rangle &= \langle h, h \rangle + \langle Ah, h \rangle \\ &= \|h\|_{L^2}^2 + \|h\|_{H_0^1}^2 \geq \|h\|_{H_0^1}^2. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\langle Ah, h \rangle = \|h\|_{H_0^1}^2 \geq 0$$

o operador A é monótono, o que implica que $I + A$ também é monótono. Conseqüentemente aplicando a Proposição 1.20, concluímos que $(I + A) + B$ é maximal monótono.

Então a equação (3.2.23) possui uma única solução $h \in H_0^1(\Omega)$. Como, $v = v_0 + h$ e $Av + Bh = h_0 - h$, concluímos que $v \in H_0^1(\Omega)$ e $Av + Bh \in L^2(\Omega)$.

Consequentemente o sistema (3.2.22) tem uma única solução $(v, h) \in D(\mathbb{A})$, e, portanto, \mathbb{A} maximal monótono em \mathcal{H} .

Finalmente, fazendo uso do Teorema 3.1 em Brézis[B2] dados $(u_0, u_1) \in D(-\Delta) \times H_0^1(\Omega)$ existe uma única solução $u(t)$ *solução regular* do problema (3.2.15) na classe

$$(3.2.24) \quad u \in L^\infty(0, \infty; D(-\Delta)), \quad u_t \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega)), \quad u_{tt} \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)).$$

Além disso pelo Teorema 3.4 em Brézis[B2] e dada $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ existe uma única solução $u_t(t)$ fraca do problema (3.2.15) na classe

$$(3.2.25) \quad u \in C([0, \infty[; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, \infty[; L^2(\Omega)).$$

3.3 Regularidade elíptica local

É conveniente observar que se Ω bem como sua fronteira são ilimitados não podemos usar regularidade elíptica no sentido de garantir que $u(t) \in H^2(\Omega)$ para todo $t \geq 0$. No entanto, apesar disso, somos capazes de garantir que

$$(3.3.26) \quad u(t) \in H^2(\Omega \cap B_R(0)) = H^2(\Omega^R)$$

para todo $R > 0$.

Para verificar esse fato suponhamos sem perda de generalidade que $0 \in \Omega$, tendo em mente que $|\Omega| < +\infty$. Nós denotaremos $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < R\}$ se u é uma solução regular do problema (3.1.1) então de acordo com a seção 3.2:

$$u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 \quad \text{em} \quad L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$$

consequentemente para quase todo $t \in [0, \infty)$, nós temos

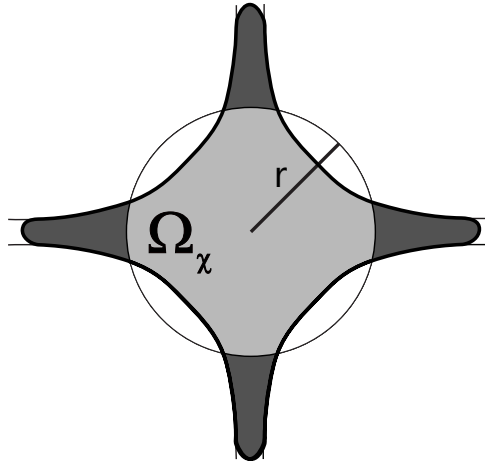
$$\begin{cases} -\Delta u(t) = -u_{tt}(t) - a(\cdot)g(u_t(t)) \equiv f(t) \in L^2(\Omega) \\ u(t) = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Para obter a regularidade elíptica local basta então analisarmos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f \in L^2(\Omega) \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

O problema acima possui uma única solução por Lax-Milgran em $H_0^1(\Omega)$ tal que $-\Delta u = f$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Sendo $f \in L^2(\Omega)$ e $\Delta u \in L^2(\Omega)$. Mas isso não implica que $u \in H^2(\Omega)$. No que segue, nós provaremos que $u|_{\Omega \cap B_R(0)} \in H^2(\Omega \cap B_R(0))$ para todo $R > 0$.

Seja Ω_χ um subconjunto de Ω com fronteira suave (como destacada em preto)(veja figura 3.6) tal que Ω_χ contém propriamente $\Omega \cap B_R(0)$ de acordo com a Hipótese 3.2. Seja χ uma função cutoff auxiliar tal que $\chi = 1$ em $\Omega \cap B_R(0)$, $\chi = 0$ em $\Omega \setminus \Omega_\chi$ e $0 \leq \chi \leq 1$.

Figura 3.6: Ω_χ

Pegue a equação original

$$\Delta u = f \quad \text{em } \Omega.$$

Definindo $w = \chi u$ em Ω_χ ; então multiplicando por χ temos

$$-\Delta w = [\Delta, \chi]u - \chi f \in \Omega_\chi$$

onde $[\cdot, \cdot]$ representa o comutador de dois operadores. Então, w satisfaz a condição zero na fronteira de Dirichlet para a fronteira de Ω_χ . Observe que o termo no lado direito $\chi f - [\Delta, \chi]u$ está em $L^2(\Omega_\chi)$ desde que $[\Delta, \chi]$ é um operador diferencial de primeira ordem e u a priori está em $H^1(\Omega_\chi)$. Mas a solução do problema elíptico homogêneo de Dirichlet tem uma única solução com regularidade H^2 quando a fronteira de Ω_χ é suave. Então χu pertence a $H^2(\Omega_\chi)$. Consequentemente no subconjunto $B_R(0) \cap \Omega$ de Ω_χ onde $\chi = 1$ temos que $u \in H^2(\Omega \cap B_R(0))$ o que prova, em vista da arbitrariedade de Ω_χ e B_R o desejado em (3.3.26)

3.4 Decaimento

3.4.1: Considerações Iniciais

Definição 3.2 Definimos como a energia associada ao problema (3.1.1) a função $E : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(3.4.27) \quad E(t) = \int_{\Omega} u_t^2(x, t) + |\nabla u(x, t)|^2 dx.$$

Antes de entrarmos nos resultados de estabilização definiremos algumas funções, para isso, seguindo ideias introduzidas na literatura por Lasiecka e Tataru [LT]. Para compreensão do leitor vamos repetir brevemente.

Seja h uma função concava estritamente crescente com $h(0) = 0$, e tal que

$$(3.4.28) \quad h(sh(s)) \geq s^2 + g^2(s), \quad \text{para } |s| < 1$$

Note que esta função pode ser explicitamente construída. Dadas as hipóteses sobre g em (3.1.3), com essa função definiremos

$$(3.4.29) \quad r(\cdot) = h\left(\frac{\cdot}{\text{med}(Q_T)}\right), \quad Q_T = \Omega \times (0, T)$$

como r é monótona crescente, $cI + r$ é invertível para todo $c > 0$. Para L uma constante, temos respectivamente

$$(3.4.30) \quad p(x) = (cI + r)^{-1}(Lx), \quad L = (c \cdot \text{med}(Q_T)),$$

onde c é uma constante que será determinada posteriormente.

A função p é claramente positiva, contínua estritamente crescente com $p(0)$. Finalmente seja

$$(3.4.31) \quad q(x) = x - (I + p)^{-1}(x).$$

Com isso prosseguiremos com o resultado de estabilização.

Teorema 3.3 (taxas de decaimento Uniforme) *Assuma as Hipóteses 3.1 e 3.2 e que as relações (3.1.1), (3.1.2) e (3.4.28) estejam satisfeitas. Seja u a solução fraca do problema (3.1.1) com a energia definida em (3.4.27). Então existe um $T_0 > 0$ tal que*

$$(3.4.32) \quad E(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right), \quad \forall t \geq T_0$$

com $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$, onde o semigrupo de contração é solução da equação

$$(3.4.33) \quad \frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0 \quad e \quad S(0) = E_0,$$

onde q é dado por (3.4.31). A constante c como mencionada anteriormente é dada por $c \equiv \frac{k^{-1} + K}{\text{med}(Q_T)(1 + \|a\|_\infty)}$

Demonstração do Teorema 3.3

No que segue para todo $r > 0$ seja

$$\begin{aligned} \Omega_r &= \{x \in \Omega \quad \text{tal que} \quad \|x\| \geq r\}, \\ B_r &= B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \quad \text{tal que} \quad \|x\| < r\}, \\ S_r &= \{x \in \mathbb{R}^n \quad \text{tal que} \quad \|x\| = r\}, \\ \Omega^r &= \{x \in \Omega \quad \text{tal que} \quad \|x\| < r\}. \end{aligned}$$

A partir desse momento consideraremos soluções regulares, aquelas pertencentes a uma determinada classe dada em (3.2.13) e (3.2.14) em seguida usando argumentos padrões de densidade a estimativa (3.4.32) permanece válida para soluções fracas.

3.4.2: Identidades fundamentais

Proposição 3.4 *Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)$ e u uma solução regular do problema (3.1.1). Temos a seguinte identidade:*

$$(3.4.34) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \varphi |\nabla u|^2 dx dt &= - \left[\int_\Omega u_t \varphi u dx \right]_0^T + \int_0^T \int_\Omega \varphi(x) |u_t|^2 dx dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \Delta \varphi u^2 dx dt - \int_0^T \int_\Omega a(x) g(u_t) \varphi u dx dt. \end{aligned}$$

Demonstração:

Multiplicando a equação (3.1.1) por $\varphi(x)u$ e integrando em $\Omega \times (0, T)$ deduzimos que

$$(3.4.35) \quad 0 = \int_0^T \int_\Omega (u_{tt} \varphi u - \Delta u \varphi u + a(x) g(u_t) \varphi u) dx dt.$$

Integrando por partes o primeiro termo no lado direito da identidade (3.4.35) obtemos

$$(3.4.36) \quad \int_0^T \int_\Omega u_{tt} \varphi u dx dt = \left[\int_\Omega u_t \varphi u dx \right]_0^T - \int_0^T \int_\Omega \varphi(x) |u_t|^2 dx dt.$$

Agora, tendo em mente que $\varphi|_\Omega u \in H_0^1(\Omega)$, $u^2 \in W_0^{1,1}(\Omega)$ (note que $\frac{\partial(\varphi|_\Omega)}{\partial x_j} \in L^\infty(\Omega)$, para todo $j = 1, \dots, n$), segue que

$$(3.4.37) \quad \begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega (-\Delta u) \varphi u dx dt &= \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(\varphi u) dx dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi) u dx dt + \int_0^T \int_\Omega \varphi(x) |\nabla u|^2 dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u^2}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx dt + \int_0^T \int_\Omega \varphi(x) |\nabla u|^2 dx dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \Delta \varphi u^2 dx dt + \int_0^T \int_\Omega \varphi(x) |\nabla u|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Então, combinando (3.4.35), (3.4.36) e (3.4.37) a proposição está provada. \square

Consideremos $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \cap W^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$(3.4.38) \quad 0 \leq \varphi \leq 1 \text{ em } \mathbb{R}^2, \quad \varphi = 0 \text{ in } B_R, \quad \varphi = 1 \text{ em } \mathbb{R}^2 \setminus B_{2R}.$$

Substituindo a função definida em (3.4.38) na identidade (3.4.34) levando em conta (3.1.2) obtemos

$$(3.4.39) \quad \begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega_{2R}} |\nabla u|^2 dx dt &\leq - \left[\int_\Omega u_t \varphi u dx \right]_0^T \\ &+ a_0^{-1} \int_0^T \int_{\Omega_R} a(x) u_t^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap B_{2R}} u^2 dx dt \\ &- \int_0^T \int_\Omega a(x) g(u_t) \varphi u dx dt. \end{aligned}$$

Observemos que

$$(3.4.40) \quad \int_0^T \int_{\Omega} a(x)g(u_t)\varphi u \, dx \, dt \leq \frac{\|\varphi\|_{\infty}}{4\varepsilon} \int_0^T \int_{\Omega} a(x)g^2(u_t) \, dx \, dt \\ + \varepsilon \|a\|_{\infty} \left[\int_0^T \int_{\Omega_{2R}} \underbrace{\varphi}_{=1} |u|^2 \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega \cap B_{2R}} \varphi |u|^2 \, dx \, dt \right],$$

onde ε uma constante positiva arbitrária. Escolha $\varepsilon = \frac{1}{2\|a\|_{\infty}\lambda}$, onde $\lambda > 0$ é obtida pela desigualdade de Poincaré (note que $\text{med}(\Omega) < +\infty$), por (3.4.39) e (3.4.40) deduzimos que

$$(3.4.41) \quad \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega_{2R}} |\nabla u|^2 \, dx \, dt \leq - \left[\int_{\Omega} u_t \varphi u \, dx \right]_0^T \\ + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda} \right) \int_0^T \int_{\Omega \cap B_{2R}} u^2 \, dx \, dt \\ + \frac{\|a\|_{\infty}\lambda}{2} \int_0^T \int_{\Omega} a(x)g^2(u_t) \, dx \, dt + a_0^{-1} \int_0^T \int_{\Omega_R} a(x)u_t^2 \, dx \, dt.$$

Adicione $\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega_{2R}} u_t^2 \, dx \, dt$ em ambos os lados da desigualdade (3.4.41) nós chegamos a

$$(3.4.42) \quad \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega_{2R}} [u_t^2 + |\nabla u|^2] \, dx \, dt \leq - \left[\int_{\Omega} u_t \varphi u \, dx \right]_0^T \\ + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda} \right) \int_0^T \int_{\Omega \cap B_{2R}} u^2 \, dx \, dt \\ + \frac{\|a\|_{\infty}\lambda}{2} \int_0^T \int_{\Omega} a(x)g^2(u_t) \, dx \, dt + \frac{3}{2}a_0^{-1} \int_0^T \int_{\Omega} a(x)u_t^2 \, dx \, dt.$$

De modo a obter a energia no lado esquerdo de (3.4.42) nos resta estimar $\int_0^T \int_{\Omega \cap B_{2R}} [u_t^2 + |\nabla u|^2] \, dx \, dt$ em termos do termo de dissipação $\int_0^T \int_{\Omega} a(x) (u_t^2 + g(u_t)^2) \, dx \, dt$ somado com $L.O.T. := \int_0^T \int_{\Omega \cap B_{2R}} |u|^2 \, dx \, dt$. Para isso precisamos de uma proposição envolvendo uma identidade no conjunto aberto e limitado $\Omega \cap B_r$, $r > 0$. É neste preciso momento que precisamos assumir as restrições na geometria de Ω . De fato, precisamos que para todo $r > 0$ o conjunto aberto $\Omega \cap B_r$ possua uma fronteira Lipschitz ou tenha a propriedade uniforme do cone para todo $r > 0$. Isto é requerido para recuperar propriedades de traço bem como as fórmulas de Green e Gauss (veja Lema 1.5.3.7 em Grisvard [GRIS]). Uma geometria admissível é exemplificada na Figura 3.4, é possível considerar uma grande variedade de exemplos (não necessariamente com simetrias).

Proposição 3.5 *Seja $q \in (W^{1,\infty}(\Omega))^2$ um campo vetorial. Então, para todo $T > 0, r > 0$ e se u é uma solução regular do problema (3.1.1), a seguinte identidade é assegurada:*

$$\begin{aligned}
(3.4.43) \quad & \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} \operatorname{div}(q) [u_t^2 - |\nabla u|^2] \, dx \, dt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} a(x) g(u_t) (q \cdot \nabla u) \, dx \, dt \\
& = - \left[\int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} u_t (q \cdot \nabla u) \, dx \right]_0^T + \frac{1}{2r} \int_0^T \int_{\Omega \cap S_r} (q \cdot x) u_t^2 \, d\Gamma \, dt \\
& + \int_0^T \int_{\partial(\Omega \cap B_r)} \partial_\nu u (q \cdot \nabla u) \, d\Gamma \, dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial(\Omega \cap B_r)} (q \cdot \nu) |\nabla u|^2 \, d\Gamma \, dt.
\end{aligned}$$

Demonstração: Multiplicando a equação (3.1.1) por $q \cdot \nabla u$ deduzimos

$$(3.4.44) \quad 0 = \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} (u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t)) (q \cdot \nabla u) \, dx \, dt.$$

Integrando por partes o primeiro termo da direita de (3.4.44) conseguimos

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} u_{tt} (q \cdot \nabla u) \, dx \, dt \\
& = \left[\int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} u_t (q \cdot \nabla u) \, dx \right]_0^T - \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} u_t (q \cdot \nabla u_t) \, dx \, dt \\
& = \left[\int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} u_t (q \cdot \nabla u) \, dx \right]_0^T - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} q_k \frac{\partial}{\partial x_k} (u_t)^2 \, dx \, dt \\
& = \left[\int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} u_t (q \cdot \nabla u) \, dx \right]_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} \operatorname{div}(q) u_t^2 \, dx \, dt \\
& - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial(\Omega \cap B_r)} (q \cdot \nu) u_t^2 \, d\Gamma \, dt.
\end{aligned}$$

Nesse momento recorreremos ao Teorema 1.13 para concluir que $u_t|_{\Gamma \cap B_r} = 0$ e observando que $\nu = \frac{x}{\|x\|} = \frac{x}{r}$ para todo $x \in S_r$, pela última identidade asseguramos

$$\begin{aligned}
(3.4.45) \quad & \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} u_{tt} (q \cdot \nabla u) \, dx \, dt \\
& = \left[\int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} u_t (q \cdot \nabla u) \, dx \right]_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} \operatorname{div}(q) u_t^2 \, dx \, dt \\
& - \frac{1}{2r} \int_0^T \int_{\Omega \cap S_r} (q \cdot x) u_t^2 \, d\Gamma \, dt.
\end{aligned}$$

Na sequência, vamos analisar o segundo termos do lado direito de (3.4.44). Inte-

grando por partes obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} -\Delta u (q \cdot \nabla u) \, dx \, dt \\
&= \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} \nabla u \cdot \nabla (q \cdot \nabla u) \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\partial(\Omega \cap B_r)} \partial_\nu u (q \cdot \nabla u) \, d\Gamma \, dt \\
&= \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} \, dx \, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} q_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 \right] \, dx \, dt \\
&\quad - \int_0^T \int_{\partial(\Omega \cap B_r)} \partial_\nu u (q \cdot \nabla u) \, d\Gamma \, dt \\
&= \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} \operatorname{div}(q) |\nabla u|^2 \, dx \, dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial(\Omega \cap B_r)} (q \cdot \nu) |\nabla u|^2 \, d\Gamma \, dt - \int_0^T \int_{\partial(\Omega \cap B_r)} \partial_\nu u (q \cdot \nabla u) \, d\Gamma \, dt,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
(3.4.46) \quad & \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} -\Delta u (q \cdot \nabla u) \, dx \, dt \\
&= \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} \operatorname{div}(q) |\nabla u|^2 \, dx \, dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial(\Omega \cap B_r)} (q \cdot \nu) |\nabla u|^2 \, d\Gamma \, dt - \int_0^T \int_{\partial(\Omega \cap B_r)} \partial_\nu u (q \cdot \nabla u) \, d\Gamma \, dt.
\end{aligned}$$

Combinando (3.4.44), (3.4.45) e (3.4.46) deduzimos o desejado em (3.4.43). Isto completa a prova. \square

Proposição 3.6 *Seja $T, r > 0$ e $\varphi \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Então, se u é uma solução regular do problema (3.1.1) a seguinte identidade é assegurada*

$$\begin{aligned}
(3.4.47) \quad & \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} \varphi |\nabla u|^2 \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} [\varphi u_t^2 - u (\nabla \varphi \cdot \nabla u)] \, dx \, dt \\
&\quad + \int_0^T \int_{\Omega \cap S_r} \varphi \partial_\nu u u \, d\Gamma \, dt - \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} a(x) g(u_t) \varphi u \, dx \, dt - \left[\int_{\Omega \cap B_r} u_t \varphi u \, dx \right]_0^T.
\end{aligned}$$

Demonstração: Multiplique a equação (3.1.1) por φu , integrando por partes e tendo em mente que $u = 0$ sobre $\partial\Omega$ localmente deduzimos o desejado de forma análoga como na Proposição 3.5. \square

Substituindo $q = x$ em (3.4.43) e $\varphi = \frac{n-1}{2}$ em (3.4.47) somando os resultados obtidos

nós conseguimos

$$\begin{aligned}
(3.4.48) \quad & \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} [u_t^2 + |\nabla u|^2] dx dt \\
&= - \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} a(x)g(u_t)(x \cdot \nabla u) dx dt - \frac{n-1}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} a(x)g(u_t)u dx dt \\
&\quad - \left[\int_{\Omega \cap B_r} u_t(x \cdot \nabla u) \right]_0^T - \left[\int_{\Omega \cap B_r} u_t \varphi u dx \right]_0^T \\
&\quad + \frac{r}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap S_r} u_t^2 d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\partial(\Omega \cap B_r)} \partial_\nu u(x \cdot \nabla u) d\Gamma dt \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial(\Omega \cap B_r)} (x \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\Gamma dt + \frac{n-1}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap S_r} \partial_\nu u u d\Gamma dt.
\end{aligned}$$

No que segue analisaremos os termos de fronteira. Inicialmente sendo $\nabla u = \partial_\nu u \nu + \nabla_T u$, onde $\nabla_T u$ denota o gradiente tangencial de u , deduzimos que

$$x \cdot \nabla u = \partial_\nu u(x \cdot \nu) + x \cdot \nabla_T u \text{ e } |\nabla u|^2 = (\partial_\nu u)^2 + |\nabla_T u|^2.$$

Pela última identidade podemos escrever

$$\begin{aligned}
(3.4.49) \quad & \int_0^T \int_{\partial(\Omega \cap B_r)} \partial_\nu u(x \cdot \nabla u) d\Gamma dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial(\Omega \cap B_r)} (x \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\Gamma dt \\
&= \int_0^T \int_{\partial(\Omega \cap B_r)} [(x \cdot \nu)(\partial_\nu u)^2 + (x \cdot \nabla_T u) \partial_\nu u] d\Gamma dt \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial(\Omega \cap B_r)} (x \cdot \nu) [(\partial_\nu u)^2 + |\nabla_T u|^2] d\Gamma dt.
\end{aligned}$$

Mas sendo $\nabla_T u = 0$ sobre $\partial\Omega$ localmente e $x \perp \nabla_T u$ em $S_r \cap \Omega$, por (3.4.49) podemos concluir

$$\begin{aligned}
(3.4.50) \quad & \int_0^T \int_{\partial(\Omega \cap B_r)} \partial_\nu u(x \cdot \nabla u) d\Gamma dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial(\Omega \cap B_r)} (x \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\Gamma dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial(\Omega \cap B_r)} (x \cdot \nu) (\partial_\nu u)^2 d\Gamma dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap S_r} (x \cdot \nu) |\nabla_T u|^2 d\Gamma dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial(\Omega \cap B_r)} (x \cdot \nu) (\partial_\nu u)^2 d\Gamma dt - \frac{r}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap S_r} |\nabla_T u|^2 d\Gamma dt,
\end{aligned}$$

onde na última integral do lado direito de (3.4.50) usamos o fato que $x \cdot \nu = x \cdot \frac{x}{r} = \frac{\|x\|^2}{r} = r$ sobre $\Omega \cap S_r$.

Então, substituindo (3.4.50) em (3.4.48) obtemos

$$\begin{aligned}
(3.4.51) \quad & \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} [u_t^2 + |\nabla u|^2] dx dt \\
& = - \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} a(x)g(u_t)(x \cdot \nabla u) dx dt - \frac{n-1}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} a(x)g(u_t)u dx dt \\
& \quad - \left[\int_{\Omega \cap B_r} u_t(x \cdot \nabla u) \right]_0^T - \left[\int_{\Omega \cap B_r} u_t \varphi u dx \right]_0^T \\
& \quad + \frac{r}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap S_r} [u_t^2 - |\nabla_T u|^2] d\Gamma dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial(\Omega \cap B_r)} (x \cdot \nu)(\partial_\nu u)^2 d\Gamma dt \\
& \quad + \frac{n-1}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap S_r} \partial_\nu u u d\Gamma dt.
\end{aligned}$$

3.4.3: Construção de subconjuntos da região ω

Em vista de controlar os termos de fronteira, precisamos definir funções auxiliares em subconjuntos da região de dissipação ω . Estas funções assumem diferentes valores em específicas regiões de ω . Nesta subseção trabalharemos para descrever essas divisões na região de dissipação ω .

Como mencionamos na introdução do presente trabalho, a região de damping é dada como a união de duas regiões, a saber,

$$\omega = \omega' \cup \{x \in \Omega; \|x\| > R\}.$$

onde o conjunto ω' é uma vizinhança em Ω de $\partial\Omega$ interseccionada com a bola de raio $R > 0$, B_R e o segundo conjunto é a região constituída pelos elementos de Ω que são exteriores a bola B_R , que é, $\Omega_R = \{x \in \Omega; \|x\| > R\}$.

Discutiremos inicialmente a constituição de ω' . Gostaríamos de considerar no conjunto $\Omega \cap B_R$, uma vizinhança tubular para $\partial(\Omega \cap B_R)$. No entanto, não podemos tendo em vista que $\partial(\Omega \cap B_R) \notin C^\infty$, não satisfaz a condição para existência de vizinhanças tubulares.

Para obter uma vizinhança tubular contida na região ω' vamos considerar novamente a região Ω_χ da seção 3.3 que tem fronteira C^∞ , $\partial\Omega_\chi$ e contém $\Omega \cap B_R$ conforme a definição 3.2 (veja a figura 3.7).

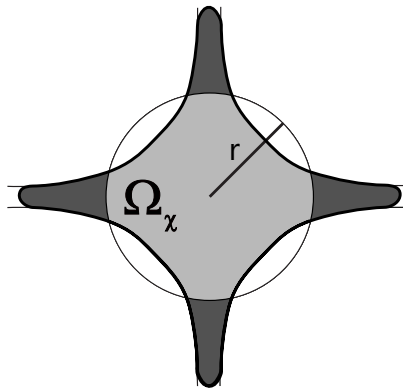


Figura 3.7:

Note que a região Ω_χ possui uma fronteira compacta C^∞ e, conseqüentemente, esta região admite uma vizinhança tubular ω_χ com comprimento 2ε . Então, podemos tomar

$$\omega' \supset (\omega_\chi \cap B_R).$$

Feitas essas considerações, consideremos agora $\omega_{\chi 1} \subset \omega_\chi$ vizinhança tubular de $\partial\Omega_\chi$ com comprimento ε .

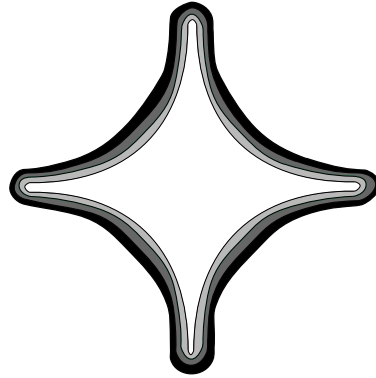


Figura 3.8:

A figura 3.8 mostra a seguinte situação: a região preta representa $\omega_{\chi 1}$, a região cinza escuro representa $\omega_\chi \setminus \omega_{\chi 1}$.

Consideremos $r > 0$ tal que $\Omega_\chi \subset B_r(0)$ e definamos as seguintes regiões:

- $\omega_1 = \omega_{\chi 1} \cup (\Omega \cap B_r \setminus \Omega_\chi)$
- $\omega_\varepsilon = \omega_\chi \setminus \omega_{\chi 1}$
- $\omega_{1\varepsilon} = \omega_1 \cup \omega_\varepsilon$
- $\omega_0 = \omega \setminus \omega_{1\varepsilon}$

Na figura 3.9, ω_1 está representado em preto, ω_ε é representado por cinza escuro ω_0 é representado na cor cinza claro.

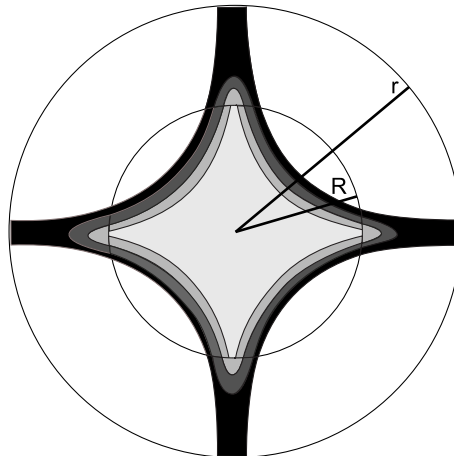


Figura 3.9:

3.4.4: Definindo e aplicando funções auxiliares

Tendo isso em mente podemos definir a seguinte função auxiliar:

$$(3.4.52) \quad \begin{cases} \psi = 1 \text{ em } \omega_1, \\ \psi = 0 \text{ em } (\Omega \cap B_r) \setminus \omega_{1\varepsilon}, \\ 0 \leq \psi \leq 1 \text{ em } \Omega \cap B_r. \end{cases}$$

Substituindo $q = \psi x$ em (3.4.43) segue que

$$(3.4.53) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} [\nabla \psi \cdot x + n\psi] [u_t^2 - |\nabla u|^2] dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} [\nabla \psi \cdot x + \psi] |\nabla u|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} a(x)g(u_t)\psi(x \cdot \nabla u) dx dt \\ & = - \left[\int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} u_t \psi(x \cdot \nabla u) dx \right]_0^T + \frac{r}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap S_r} u_t^2 d\Gamma dt \\ & + \int_0^T \int_{\partial(\Omega \cap B_r)} \partial_\nu u(x \cdot \nabla u) d\Gamma dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial(\Omega \cap B_r)} (x \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\Gamma dt. \end{aligned}$$

Substituindo (3.4.49) em (3.4.53) obtemos

$$(3.4.54) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} [\nabla \psi \cdot x + n\psi] [u_t^2 - |\nabla u|^2] dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} [\nabla \psi \cdot x + \psi] |\nabla u|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} a(x)g(u_t)\psi(x \cdot \nabla u) dx dt \\ & = - \left[\int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} u_t \psi(x \cdot \nabla u) dx \right]_0^T + \frac{r}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap S_r} u_t^2 d\Gamma dt \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial(\Omega \cap B_r)} (x \cdot \nu) (\partial_\nu u)^2 d\Gamma dt - \frac{r}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap S_r} |\nabla_T u|^2 d\Gamma dt, \end{aligned}$$

Substituindo (3.4.54) em (3.4.51) deduzimos que

$$(3.4.55) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} [u_t^2 + |\nabla u|^2] dx dt \\ & = - \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} a(x)g(u_t)(x \cdot \nabla u) dx dt - \frac{n-1}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} a(x)g(u_t)u dx dt \\ & - \left[\int_{\Omega \cap B_r} u_t(x \cdot \nabla u) \right]_0^T - \left[\int_{\Omega \cap B_r} u_t \varphi u dx \right]_0^T + \left[\int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} u_t \psi(x \cdot \nabla u) dx \right]_0^T \\ & + \frac{n-1}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap S_r} \partial_\nu u u d\Gamma dt \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} [\nabla \psi \cdot x + n\psi] [u_t^2 - |\nabla u|^2] dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} [\nabla \psi \cdot x + \psi] |\nabla u|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} a(x)g(u_t)\psi(x \cdot \nabla u) dx dt. \end{aligned}$$

Nos resta analisar o último termo de fronteira $\frac{n-1}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap S_r} \partial_\nu uu \, d\Gamma \, dt$. Para isso vamos considerar a identidade (3.4.47) com $\varphi = \psi$ dado em (3.4.52). Então, temos

$$(3.4.56) \quad \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} \psi |\nabla u|^2 \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1} \cap \Omega} [\psi u_t^2 - u(\nabla \psi \cdot \nabla u)] \, dx \, dt \\ + \int_0^T \int_{\Omega \cap S_r} \partial_\nu uu \, d\Gamma \, dt - \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} a(x)g(u_t)\psi u \, dx \, dt - \left[\int_{\omega_{\varepsilon 1}} u_t \psi u \, dx \right]_0^T.$$

Substituindo (3.4.56) em (3.4.55) deduzimos

$$(3.4.57) \quad \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} [u_t^2 + |\nabla u|^2] \, dx \, dt \\ = - \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} a(x)g(u_t)(x \cdot \nabla u) \, dx \, dt - \frac{n-1}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} a(x)g(u_t)u \, dx \, dt \\ - \left[\int_{\Omega \cap B_r} u_t(x \cdot \nabla u) \right]_0^T - \left[\int_{\Omega \cap B_r} u_t \varphi u \, dx \right]_0^T + \left[\int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} u_t \psi(x \cdot \nabla u) \, dx \right]_0^T \\ + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} [\nabla \psi \cdot x + n\psi] [u_t^2 - |\nabla u|^2] \, dx \, dt \\ + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} [\nabla \psi \cdot x + \psi] |\nabla u|^2 \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} a(x)g(u_t)\psi(x \cdot \nabla u) \, dx \, dt \\ + \frac{n-1}{2} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} \psi |\nabla u|^2 \, dx \, dt - \frac{n-1}{2} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} [\psi u_t^2 - u(\nabla \psi \cdot \nabla u)] \, dx \, dt \\ + \frac{n-1}{2} \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} a(x)g(u_t)\psi u \, dx \, dt + \frac{n-1}{2} \left[\int_{\omega_{\varepsilon 1}} u_t \psi u \, dx \right]_0^T.$$

Definindo

$$(3.4.58) \quad \chi := - \left[\int_{\Omega \cap B_r} u_t(x \cdot \nabla u) \right]_0^T - \left[\int_{\Omega \cap B_r} u_t \varphi u \, dx \right]_0^T \\ + \left[\int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} u_t \psi(x \cdot \nabla u) \, dx \right]_0^T + \frac{n-1}{2} \left[\int_{\omega_{\varepsilon 1}} u_t \psi u \, dx \right]_0^T,$$

fazendo uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz, tendo em mente que $a(x) \geq a_0 > 0$ q. s. em $\omega \supset \omega_\varepsilon$, considerando a desigualdade $ab \leq \frac{1}{4\alpha} a^2 + \alpha a^2$ onde $\alpha > 0$ arbitrário, por (3.4.57) e (3.4.58) conseguimos

$$(3.4.59) \quad \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} [u_t^2 + |\nabla u|^2] \, dx \, dt \\ \leq C|\chi| + C \left\{ \int_0^T \int_{\Omega} a(x)(u_t^2 + g(u_t)^2) \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} |\nabla u|^2 \, dx \, dt \right\}$$

onde $C = C(r, n, a_0, \|a\|_\infty, \|\psi\|_{W^{1,\infty}}, \lambda)$.

Nos resta estimar a quantidade $\int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} |\nabla u|^2 \, dx \, dt$ em termos do termo de dissipação $\int_0^T \int_{\Omega} [a(x)|g(u_t)|^2 + a(x)|u_t|^2] \, dx \, dt$. Para isso consideraremos uma nova função auxiliar η_ε em um específico subconjunto de ω . Inicialmente, defina $\tilde{\eta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{\eta}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq 0 \\ (x-1)^2 & \text{if } x \in [1/2, 1] \\ 0 & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

e é definida em $(0, 1/2)$ como sendo $\tilde{\eta}$ uma função não decrescente de classe C^1 . Para $\varepsilon > 0$, seja $\tilde{\eta}_\varepsilon(x) := \tilde{\eta}(x/\varepsilon)$. Temos então que existe uma constante M que não depende de ε tal que

$$\frac{|\tilde{\eta}'_\varepsilon(x)|^2}{\tilde{\eta}_\varepsilon(x)} \leq \frac{M}{\varepsilon^2}$$

para todo $x < \varepsilon$.

Agora, para $\varepsilon > 0$ fixado na construção (3.4.52) considere o seguinte subconjunto

$$(3.4.60) \quad \omega_{2\varepsilon} = \omega_{1\varepsilon} \cup (\Omega_{r+\varepsilon} \setminus \Omega_r)$$

Defina $\eta_\varepsilon : \Omega \cap B_{r'} \rightarrow \mathbb{R}$ as

$$\eta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \omega_1 \\ \tilde{\eta}_\varepsilon(d(x, \bar{\omega}_1)) & \text{se } x \in \omega_\varepsilon \cup (\Omega_{r+\varepsilon} \setminus \Omega_r) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Onde η_ε definida é uma função de classe C^1 em $\Omega \cap B_{r'}$ devido a suavidade de ω_1 e ω_ε . Note também que

$$(3.4.61) \quad \frac{|\nabla \eta_\varepsilon(x)|^2}{\eta_\varepsilon(x)} = \frac{|\tilde{\eta}'_\varepsilon(d(x, \bar{\omega}_1))|^2}{\tilde{\eta}_\varepsilon(d(x, \bar{\omega}_1))} \leq \frac{M}{\varepsilon^2},$$

para todo $x \in \omega_1$. Em particular, $\frac{|\nabla \eta_\varepsilon|^2}{\eta_\varepsilon} \in L^\infty(\omega_{2\varepsilon})$.

Então, construiremos como no Lemma 2.4 em Lions [LIONS1] a função $\eta \in W^{1,\infty}(\Omega \cap B_{r'})$, com $R < r < r + \varepsilon < r'$ satisfazendo

$$(3.4.62) \quad \begin{cases} 0 \leq \eta \leq 1 \text{ q.s. em } \Omega \cap B_{r'} \\ \eta = 0 \text{ em } (B_{r'} \setminus B_{r+\varepsilon}) \cap \Omega \\ \eta = 1 \text{ q.s. em } \omega_1, \\ \eta = 0 \text{ q.s. em } (\omega \cap B_r) \setminus \omega_{2\varepsilon}, \\ \frac{|\nabla \eta|^2}{\eta} \in L^\infty(\omega_{2\varepsilon}), \end{cases}$$

onde $\omega_{2\varepsilon}$ a vizinhança considerada em (3.4.60).

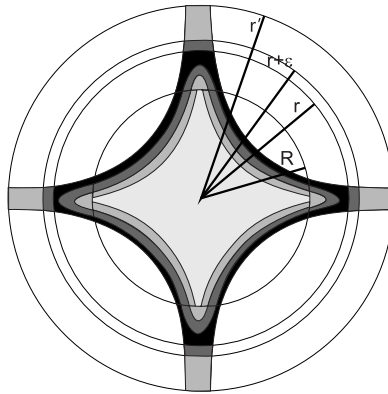


Figura 3.10:

Substituindo (3.4.62) em (3.4.47) obtemos

$$(3.4.63) \quad \int_0^T \int_{\omega_{2\varepsilon}} \eta |\nabla u|^2 dx dt = \int_0^T \int_{\omega_{2\varepsilon} \cap \Omega} [\eta u_t^2 - u(\nabla \eta \cdot \nabla u)] dx dt \\ - \int_0^T \int_{\omega_{2\varepsilon}} a(x)g(u_t)\eta u dx dt - \left[\int_{\omega_{2\varepsilon}} u_t \eta u dx \right]_0^T.$$

Sendo

$$(3.4.64) \quad \left| \int_0^T \int_{\omega_{2\varepsilon}} u(\nabla \eta \cdot \nabla u) dx dt \right| \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^T \left[\int_{\omega_{2\varepsilon}} \eta |\nabla u|^2 dx + \int_{\omega_{2\varepsilon}} \frac{|\nabla \eta|^2}{\eta} |u|^2 dx \right] dt,$$

por (3.4.63) e (3.4.64) deduzimos que

$$(3.4.65) \quad \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_{2\varepsilon}} \eta |\nabla u|^2 dx dt \\ \leq C \left\{ \int_0^T \int_{\omega_{2\varepsilon}} |u|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\omega_{2\varepsilon}} a(x)g(u_t)^2 dx dt \right\} \\ + C \left| \left[\int_{\omega_{2\varepsilon}} u_t \eta u dx \right]_0^T \right|,$$

onde $C = C \left(\left\| \frac{|\nabla \eta|^2}{\eta} \right\|_\infty, \|a\|_\infty \right)$.

Combinando (3.4.59) e (3.4.65) tendo em mente que

$$\int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} |\nabla u|^2 dx dt = \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon 1}} \eta |\nabla u|^2 dx dt \leq \int_0^T \int_{\omega_{2\varepsilon} \cap \Omega} \eta |\nabla u|^2 dx dt,$$

chegamos à

$$(3.4.66) \quad \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} [u_t^2 + |\nabla u|^2] dx dt \\ \leq C(|\mathcal{X}| + |\mathcal{Y}|) + C \left\{ \int_0^T \int_{\Omega} a(x)(u_t^2 + g(u_t)^2) dx dt + \int_0^T \int_{\omega_{2\varepsilon}} |u|^2 dx dt \right\}$$

onde $C = C \left(r, n, a_0, \|a\|_\infty, \|\psi\|_{W^{1,\infty}}, \lambda, \left\| \frac{|\nabla \eta|^2}{\eta} \right\|_\infty, \|a\|_\infty \right)$ e

$$(3.4.67) \quad \mathcal{Y} := \left[\int_{\omega_{2\varepsilon}} u_t \eta u dx \right]_0^T.$$

Para (3.4.58) e (3.4.68) deduzimos que

$$(3.4.68) \quad |\mathcal{X}| + |\mathcal{Y}| \leq C_r [E(T) + E(0)],$$

onde C_r uma constante positiva que não depende de $r > 0$.

Por (3.4.66), (3.4.68), consideremos a identidade de energia

$$E(T) - E(0) = - \int_0^T \int_{\Omega} a(x)g(u_t)u_t dx dt,$$

e fazendo uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz concluímos que

$$(3.4.69) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega \cap B_r} [u_t^2 + |\nabla u|^2] dx dt \\ & \leq C \left\{ \int_0^T \int_{\Omega} a(x)(u_t^2 + g(u_t)^2) dx dt + \int_0^T \int_{\omega_{2\varepsilon}} |u|^2 dx dt \right\}, \end{aligned}$$

onde C uma constante positiva. Tomando $r = 2R$, combinando (3.4.42) e (3.4.69), considerando, além disso, a identidade de energia e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, deduzimos que

$$(3.4.70) \quad \int_0^T E(t) dt \leq C \left\{ \int_0^T \int_{\Omega} a(x)(u_t^2 + g(u_t)^2) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega \cap B_{2R}} |u|^2 dx dt \right\},$$

para alguma constante positiva $C > 0$. Nos resta absorver o termo $LOT := \int_0^T \int_{\Omega \cap B_{2R}} |u|^2 dx dt$.

3.4.5: Absorção por continuação única

Lema 3.7 *Sobre as hipóteses do Teorema 3.3 e para todo $T > T_0$, T_0 tomado suficientemente grande, existe uma constante positiva $C(T, E(0))$ tal que se u uma solução regular de (3.1.1), temos*

$$(3.4.71) \quad \int_0^T \int_{\Omega \cap B_{2R}} |u|^2 dx dt \leq C(E(0)) \left\{ \int_0^T \int_{\Omega} (a(x) g^2(u_t) + a(x) u_t^2) dx dt \right\}.$$

Prova: Nós argumentaremos por contradição. Por simplicidade denotaremos $u' := u_t$. Suponhamos que (3.4.71) não é verificado e seja $\{u_k(0), u'_k(0)\}$ uma sequencia de dados iniciais onde as correspondentes soluções $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de (3.1.1) com $E_k(0)$, que é assumida uniformemente limitada em k , verifica

$$(3.4.72) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^T \|u_k(t)\|_{L^2(\Omega \cap B_{2R})}^2 dt}{\int_0^T \int_{\Omega} (a(x) g^2(u'_k) + a(x) u_k'^2) dx dt} = +\infty,$$

que é

$$(3.4.73) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^T \int_{\Omega} (a(x) g^2(u'_k) + a(x) u_k'^2) dx dt}{\int_0^T \|u_k(t)\|_{L^2(\Omega \cap B_{2R})}^2 dt} = 0.$$

Sendo $E_k(t) \leq E_k(0) \leq L$, onde L é uma constante positiva, obtemos uma sequencia, que será denotada por $\{u_k\}$, que verifica a convergência:

$$(3.4.74) \quad u_k \rightharpoonup u \text{ fraco em } H^1(Q_T),$$

$$(3.4.75) \quad u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ fraca estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

$$(3.4.76) \quad u'_k \overset{*}{\rightharpoonup} u' \text{ fraca estrela em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Aplicando resultados de compacidade podemos concluir que

$$(3.4.77) \quad u_k \rightarrow u \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(B_r(0))), \text{ para todo } r > 0.$$

Nesse momento dividiremos a prova em dois casos, a saber: quando $u \neq 0$ e $u = 0$.

(i) Caso (I): $u \neq 0$.

Podemos observar que de (3.4.73) e (3.4.77) temos

$$(3.4.78) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} (a(x) g^2(u'_k) + a(x) u_k'^2) dx dt = 0$$

Passando o limite na equação, onde $k \rightarrow +\infty$, conseguimos,

$$(3.4.79) \quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \text{ em } L^\infty(0, T : H^{-1}(\Omega)), \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma \times (0, T), \\ u_t = 0 \text{ sobre } \Omega \setminus (B_R \cap \Omega) \times (0, T), \end{cases}$$

e para $u_t = v$, obtemos, no sentido distribucional

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)), \\ v = 0 \text{ sobre } \Gamma \times (0, T), \\ v = 0 \text{ sobre } \Omega \setminus (B_R \cap \Omega) \times (0, T). \end{cases}$$

Pelo Teorema 1.22 (de Holmgren) concluímos que $v \equiv 0$ em $(\Omega \cap B_R) \times (0, T)$, isto é, $u_t = 0$ em $\Omega \cap B_R \times (0, T)$, para todo $R > 0$, ou seja, $u_t = 0$ em $\Omega \times (0, T)$.

Retornando para (3.4.79) obtemos a seguinte equação elíptica para quase todo $t \in (0, T)$ dado por

$$\Delta u = 0 \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \Gamma,$$

que implica que $u = 0$, o que é uma contradição.

(ii) Caso (II): $u = 0$.

Definindo

$$(3.4.80) \quad c_k := \left[\int_0^T \int_{\Omega \cap B_{2R}} |u_k|^2 dx dt \right]^{1/2},$$

e

$$(3.4.81) \quad \bar{u}_k := \frac{1}{c_k} u_k,$$

obtemos

$$(3.4.82) \quad \int_0^T \int_{\Omega \cap B_{2R}} |\bar{u}_k|^2 dx dt = \int_0^T \int_{\Omega \cap B_{2R}} \frac{|u_k|^2}{c_k^2} dx dt = \frac{1}{c_k^2} \int_0^T \int_{\Omega \cap B_{2R}} |u_k|^2 dx dt = 1.$$

Seja

$$\bar{E}_k(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\bar{u}_k'|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \bar{u}_k|^2 dx,$$

deduzimos automaticamente que

$$(3.4.83) \quad \bar{E}_k(t) = \frac{E_k(t)}{c_k^2}.$$

Reconsiderando (3.4.49) obtemos, para T suficientemente grande, temos que

$$E(T) \leq C_T \left[\int_0^T \int_{\Omega} (a(x) g^2(u_t) + a(x) u_t^2) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega \cap B_{2R}} |u|^2 dx dt \right].$$

Aplicando identidade $E(T) - E(0) = - \int_0^T \int_{\Omega} a(x) g(u_t) u_t dx dt$, podemos escrever

$$E(t) \leq E(0) \leq \tilde{C}_T \left[\int_0^T \int_{\Omega} (a(x) g^2(u_t) + a(x) u_t^2) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega \cap B_{2R}} |u|^2 dx dt \right],$$

para todo $t \in (0, T)$, com T suficientemente grande. Da última desigualdade e de (3.4.83) temos que

$$(3.4.84) \quad \bar{E}_k(t) := \frac{E_k(t)}{c_k^2} \leq \tilde{C}_T \left[\frac{\int_0^T \int_{\Omega} (a(x) g^2(u'_k) + a(x) u_k'^2) dx dt}{\int_0^T \int_{\Omega \cap B_{2R}} |u_k|^2 dx dt} + 1 \right].$$

Por (3.4.73) e (3.4.84) concluímos que existe uma constante positiva \tilde{M} tal que

$$\bar{E}_k(t) := \frac{E_k(t)}{c_k^2} \leq \tilde{M}, \quad \text{for all } t \in [0, T] \text{ e para todo } k \in \mathbb{N},$$

que é,

$$(3.4.85) \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\bar{u}'_k|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \bar{u}_k|^2 dx \leq \tilde{M}, \quad \text{for all } t \in [0, T] \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Para a subsequencia $\{\bar{u}_k\}$, obtemos

$$(3.4.86) \quad \bar{u}_k \rightharpoonup \bar{u} \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

$$(3.4.87) \quad \bar{u}'_k \rightharpoonup \bar{u}' \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$(3.4.88) \quad \bar{u}_k \rightarrow \bar{u} \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(\Omega \cap B_r(0))) \text{ para todo } r > 0.$$

Observamos que por (3.4.78) podemos deduzir

$$(3.4.89) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{a(x) g^2(u'_k)}{c_k^2} dx dt = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} a(x) |\bar{u}'_k|^2 dx dt = 0.$$

Além disso \bar{u}_k satisfaz a equação

$$\bar{u}_k'' - \Delta \bar{u}_k + a(x) \frac{g(u'_k)}{c_k} = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, T).$$

Passando o limite onde $k \rightarrow +\infty$ tendo a convergência computada, obtemos

$$(3.4.90) \quad \begin{cases} \bar{u}'' - \Delta \bar{u} = 0 & \text{em } L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)), \\ \bar{u} = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T), \\ \bar{u}' = 0 & \text{sobre } \Omega \setminus (B_R \cap \Omega) \times (0, T). \end{cases}$$

Então, $v = \bar{u}_t$ verifica, verifica no sentido distribucional

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)), \\ v = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, T), \\ v = 0 & \text{sobre } \Omega \setminus (B_R \cap \Omega) \times (0, T). \end{cases}$$

Aplicando, também, resultados de unicidade obtemos que $v = \bar{u}_t = 0$ em $\Omega \cap B_R$, para todo $R > 0$, isto é, \bar{u}_t em $\Omega \times (0, T)$. Retornando para (3.4.90) obtemos, para quase todo $t \in (0, T)$ que

$$\Delta \bar{u} = 0 \text{ em } \Omega, \quad \bar{u} = 0 \text{ sobre } \Gamma,$$

o que nos leva a deduzir que $\bar{u} = 0$ em Ω , o que é uma contradição tendo em vista que (3.4.82) e (3.4.88). O Lema está provado. \square

Então, por (3.4.70) e 3.4.71 deduzimos

$$(3.4.91) \quad E(T) \leq C \left(\int_0^T \int_{\Omega} a(x) ((g(u_t))^2 + u_t^2) dx dt \right),$$

onde C uma constante positiva que depende de T e de $E(0)$.

3.4.6: Conclusão do teorema 3.3

No que segue procederemos exatamente como no trabalho de Lasiecka e Tataru [LT](veja Lemma 3.2 e Lemma 3.3 do referido artigo) adaptado ao nosso contexto. Seja

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha} &= \{(t, x) \in Q_T := \Omega \times (0, T) / |u_t| > 1 \text{ q. s.}\}, \\ \Sigma_{\beta} &= Q_T \setminus \Sigma_{\alpha}. \end{aligned}$$

Então usando a hipótese (3.1.3), obtemos

$$(3.4.92) \quad \int_{\Sigma_{\alpha}} a(x) ([g(u_t)]^2 + (u_t)^2) d\Sigma_{\alpha} \leq (k^{-1} + K) \int_{\Sigma_{\alpha}} a(x) g(u_t) u_t d\Sigma_{\alpha}.$$

Além disso, por (3.1.8) e pelo fato que h concava e crescente, tendo em mente que $a(x) \leq \|a\|_{\infty} + 1$ e $\frac{a(x)}{1+\|a\|_{\infty}} < a(x)$ deduzimos que

$$\begin{aligned} (3.4.93) \quad \int_{\Sigma_{\beta}} a(x) ([g(u_t)]^2 + (u_t)^2) d\Sigma_{\beta} &\leq \int_{\Sigma_{\beta}} a(x) h(g(u_t) u_t) d\Sigma_{\beta} \\ &= \int_{\Sigma_{\beta}} (1 + \|a\|_{\infty}) \frac{a(x)}{1 + \|a\|_{\infty}} h(g(u_t) u_t) d\Sigma_{\beta} \\ &\leq \int_{\Sigma_{\beta}} (1 + \|a\|_{\infty}) h\left(\frac{a(x)}{1 + \|a\|_{\infty}} g(u_t) u_t\right) d\Sigma_{\beta} \\ &\leq \int_{\Sigma_{\beta}} (1 + \|a\|_{\infty}) h(a(x) g(u_t) u_t) d\Sigma_{\beta}. \end{aligned}$$

Então pela desigualdade de Jensen (1.24)

$$\begin{aligned} (3.4.94) \quad &(1 + \|a\|_{\infty}) \int_{\Sigma_{\beta}} h(a(x) g(u_t) u_t) d\Sigma_{\beta} \\ &\leq (1 + \|a\|_{\infty}) \text{meas}(Q_T) h\left(\frac{1}{\text{meas}(Q_T)} \int_{Q_T} a(x) g(u_t) u_t dQ\right) \\ &= (1 + \|a\|_{\infty}) \text{meas}(Q_T) r\left(\int_{Q_T} a(x) g(u_t) u_t dQ\right), \end{aligned}$$

onde $r(s) = h\left(\frac{s}{\text{meas}(Q_T)}\right)$ definido em (3.4.29). Então

$$(3.4.95) \quad \int_{Q_T} a(x) ([g(u_t)]^2 + (u_t)^2) dQ \leq (k^{-1} + K) \int_{Q_T} a(x) g(u_t) u_t dQ \\ + (1 + \|a\|_\infty) \text{meas}(Q_T) r\left(\int_{Q_T} a(x) g(u_t) u_t dQ\right).$$

Utilizando em conjunto com (3.4.91) e (3.4.95), temos

$$(3.4.96) \quad E(T) \leq (1 + \|a\|_\infty) C \left[\frac{K_0}{(1 + \|a\|_\infty)} \int_{Q_T} a(x) g(u_t) u_t dQ \right. \\ \left. + \text{meas}(Q_T) r\left(\int_{Q_T} a(x) g(u_t) u_t dQ\right) \right],$$

onde $K_0 = k^{-1} + K$. Escolhendo

$$L = \frac{1}{C \text{med}(Q_T) (1 + \|a\|_\infty)}, \\ c = \frac{K_0}{\text{med}(Q_T) (1 + \|a\|_\infty)},$$

obtemos

$$(3.4.97) \quad p[E(T)] \leq \int_{Q_T} a(x) g(u_t) u_t d\Sigma = E(0) - E(T),$$

onde a função p é definida em (3.4.30). Recordemos que o resultado acima é assegurado para um T suficientemente grande fixado, o que nos permite dizer que é válido para $T > T_0$, para algum $T_0 > 0$.

Para finalizar a prova do Teorema 3.3, aplicaremos o seguinte resultado devido a Lasiecka e Tataru [LT]:

Lemma A: *Seja p uma função positiva, crescente e tal que $p(0) = 0$. Sendo p crescente, podemos definir uma nova função crescente q , $q(x) = x - (I + p)^{-1}(x)$. Considere a sequência s_n de números positivos que satisfaz*

$$s_{m+1} + p(s_{m+1}) \leq s_m.$$

Então $s_m \leq S(m)$, onde $S(t)$ é um solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt} S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = s_0.$$

Além disso, se $p(x) > 0$ para $x > 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$.

Com este resultado em mente, podemos substituir T (resp. 0) em (3.4.97) com $m(T+1)$ (resp. mT) para obter

$$(3.4.98) \quad E(m(T+1)) + p(E(m(T+1))) \leq E(mT), \quad \text{for } m = 0, 1, \dots$$

Aplicando o Lemma A com $s_m = E(mT)$ resulta, portanto, em

$$(3.4.99) \quad E(mT) \leq S(m), \quad m = 0, 1, \dots$$

Finalmente, usando a dissipatividade de $E(t)$, temos para $t = mT + \tau$, $0 \leq \tau \leq T$,

$$(3.4.100) \quad E(t) \leq E(mT) \leq S(m) \leq S\left(\frac{t-\tau}{T}\right) \leq S\left(\frac{t}{T} - 1\right) \quad \text{for } t > T,$$

onde usamos o fato que $S(\cdot)$ dissipativo. Assim a prova do Teorema 3.3 está completa.

□

3.5 Computação efetiva das taxas de decaimento

Esta seção é dedicada a mostrar *estimativas para taxas de decaimento explícitas* para a fórmula geral dada em (3.4.32). Para compreensão do leitor, repetiremos (literalmente) os mesmos argumentos introduzidos em Cavalcanti, Domingos Cavalcanti e Lasiecka [CDCFS]. Neste contexto é importante mencionar outros importantes trabalhos anteriormente publicados na literatura que tratam de taxas de decaimento explícitas, como: [ALA], [ALA3], [ELN], [LZ], [MAR] e [MAR2].

O algoritmo para computação das taxas de decaimento dadas no Teorema 3.3 é bastante geral e fornece taxas de decaimento explícitas sem qualquer restrição sobre o crescimento da dissipação g na origem. Ilustraremos a seguir alguns exemplos simples. Para especificarmos um pouco mais a classe de dissipação não linear, seremos capazes de obter explicitamente a descrição das taxas de decaimento. A taxa de decaimento obtida é ótima, tendo em vista que as mesmas taxas são encontradas no trabalho de [ALA] (veja também em [ACG] e [VM]) para o modelo que não leva em conta termos de fonte.

Para prosseguir, notemos que o comportamento da função $q(s)$ (veja 3.4.31) na origem (esta é a única região relevante para as taxas de decaimento) é assintoticamente equivalente a $(h)^{-1}(s)$, onde, podemos recordar, que a função concava e crescente $h(s)$ é determinada a partir da relação $s^2 + g^2(s) \leq h(sg(s))$, $s \leq s_0 < 1$. O fato que tais funções sempre existem segue da monotonia de $h(s)$, como mostrado em [LT]. Assim o único problema está em verificar a estrutura de $(h)^{-1}$ próxima da origem. Além disso é suficiente restringir a análise para valores positivos de s . Como no Teorema 3.3 a equação a considerar é $S_t + c_0(h)^{-1}(c_1 S) = 0$, $S(0) = E(0)$ e a solução desta equação dá uma limitação assintótica para a função energia. Isto é para dizer que temos $E(t) \leq C(E(0))S(t)$, para $t > T_0$. As constantes c_0, c_1 levando em conta o fato que $q(s) \sim (CI + h)^{-1}(s)$ na origem. De fato, esse comportamento assintótico é consequência direta de (3.4.30), (3.4.31),

$$(3.5.101) \quad \begin{aligned} q &= I - (I + p)^{-1} = p \circ (I + p)^{-1} = p \circ [(p^{-1} + I) \circ p]^{-1} \\ &= p \circ [(L^{-1}(CI + r) + I) \circ p]^{-1} = L^{-1}(CI + r)^{-1}. \end{aligned}$$

Sendo $h(s) \geq cs$, próxima da origem, para alguma constante positiva c , (3.5.101) implica $q(s) \sim (CI + h)^{-1}(s) \geq c_1 h^{-1}$ na origem. Então, o comportamento assintótico da energia é determinado pela seguinte EDO: $S_t + c_0(h)^{-1}(c_1 S) = 0$, $S(0) = E(0)$, como queríamos acima.

Para uma melhor compreensão dividiremos em dois casos:

- (i) $g(s)$ decai para zero mais rapidamente que a função linear ;
- (ii) $g(s)$ decai mais lentamente que a função linear.

No primeiro caso basta para determinar $h(s)$ a desigualdade $s^2 \leq h(sg(s))$, enquanto que no segundo caso é preciso ter $g^2(s) \leq h(sh(s))$.

Resolvendo explicitamente $s^2 = h(sg(s))$ obtemos que $h^{-1}(s) = \sqrt{sg(\sqrt{s})}$, que foi inicialmente introduzido em [LZ] e [ALA]. Para que esta função seja “elegível” devemos verificar sua concavidade ou equivalentemente a convexidade de $h^{-1}(s) = \sqrt{sg(\sqrt{s})}$ que precisa ser assegurado em uma pequena vizinhança de zero.

Similarmente, no segundo caso obtemos $h^{-1}(s) = \sqrt{sg^{-1}(\sqrt{s})}$ com a mesma convexidade requerida. Resumindo esta discussão e negligenciando as constantes c_0, c_1 obtemos:

Corolário 3.8 *Se assumirmos que $g'(0) = 0$ (isto é o damping é “fraco” -superlinear na origem) e a função $\sqrt{sg(\sqrt{s})}$ convexa para $s \in [0, s_0]$, onde s_0 pode ser arbitrariamente*

pequena, a equação diferencial a ser resolvida torna-se

$$S_t + \sqrt{S}g(\sqrt{S}) = 0, S(0) = E(0) = S_0,$$

e $E(t) \leq C(E(0))S(t)$. Mais especificamente, integrando a equação diferencial obtemos com $G(S, S_0) \equiv \int_{\sqrt{S_0}}^{\sqrt{S}} \frac{1}{g(u)} du$, $S(t) = G^{-1}(-\frac{t}{2}, S_0)$.

Corolário 3.9 *Se assumirmos que $g(s)$ decai para zero de forma mais lenta do que qualquer função linear, ou seja:*

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{g(s)} = 0,$$

e além disso a função $\sqrt{s}g^{-1}(\sqrt{s})$ convexa para $s \in [0, s_0]$, onde s_0 podem ser arbitrariamente pequenos, a equação diferencial a ser resolvida se torna

$$S_t + \sqrt{S}g^{-1}(\sqrt{S}) = 0, S(0) = E(0) = S_0,$$

e $E(t) \leq C(E(0))S(t)$. Mais especificamente, integrando a equação diferencial obtemos com $G(S, S_0) \equiv \int_{\sqrt{S_0}}^{\sqrt{S}} \frac{1}{g^{-1}(u)} du$ $S(t) = G^{-1}(-\frac{t}{2}, S_0)$.

Observação 3.10 *De fato, como ilustrado acima, a equação diferencial no Corolário 3.9 segue instantaneamente pela construção intrínseca da função concava h - onde a última foi introduzida inicialmente em [LT]. É interessante no entanto, notar que as diferentes abordagens quando comparadas, descrevem as mesmas taxas de decaimento para soluções correspondentes.*

Ilustraremos o procedimento com alguns exemplos. Por simplicidade, normalizaremos as constantes de modo que elas não apareçam nas expressões.

- **Exemplo 1** Consideremos $g(s) = s^p$, $p > 1$ na origem. Sendo a função $s^{\frac{p+1}{2}}$ convexa para $p \geq 1$ vamos resolver

$$(3.5.102) \quad S_t + S^{\frac{p+1}{2}} = 0.$$

Esta equação pode ser integrada diretamente. Mas a fim de ilustrarmos a fórmula geral calculemos:

$$G(s, S_0) = \int_{\sqrt{S_0}}^{\sqrt{s}} u^{-p} du = \frac{1}{1-p} [s^{\frac{-p+1}{2}} - S_0^{\frac{-p+1}{2}}].$$

Aqui $G^{-1}(t) = [S_0^{\frac{-p+1}{2}} - t(1-p)]^{\frac{2}{-p+1}}$. Então

$$E(t) \leq C(E(0)) [E(0)^{\frac{-p+1}{2}} + t(p-1)]^{\frac{2}{-p+1}}.$$

Claro que as mesmas taxas de decaimento podem ser obtidas por integração direta de (3.5.102).

- **Exemplo 2** Tomemos $g(s) = s^3 e^{-\frac{1}{s^2}}$ para s na origem. Sendo a função $s^2 e^{-\frac{1}{s}}$ convexa em uma vizinhança da origem calculemos

$$(3.5.103) \quad S_t + S^2 e^{-\frac{1}{S}} = 0.$$

Neste caso $G(S, S_0) = -1/2[e^{-\frac{1}{S}} - e^{-\frac{1}{S_0}}]$ e $G^{-1}(t, S_0) = [\ln(e^{\frac{1}{S_0}} - 2t)]^{-1}$. Por isso

$$E(t) \leq C(E(0))[\ln(e^{\frac{1}{E(0)}} + t)]^{-1},$$

a qual a solução também pode ser obtida diretamente por integração. (3.5.103).

- **Exemplo 3** Consideremos $g(s) = s|s|e^{-\frac{1}{|s|}}$ para s próxima de zero. Sendo a função $s^{3/2}e^{-\frac{1}{\sqrt{s}}}$ convexa em $[0, s_0]$ para algum s_0 pequeno, somos levados a equação diferencial

$$(3.5.104) \quad S_t + S^{3/2} e^{-\frac{1}{\sqrt{S}}} = 0.$$

A função $G(S, S_0)$ dada por $G(S, S_0) = -[e^{\frac{1}{\sqrt{S}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{S_0}}}]$. Por isso $G^{-1}(t, S_0) = \frac{1}{\ln^2[e^{\frac{1}{\sqrt{S_0}}} - t]}$ e

$$E(t) \leq C(E(0)) \frac{1}{\ln^2[e^{\frac{1}{\sqrt{E(0)}}} + \frac{1}{2}t]}.$$

- **Exemplo 4** Tomemos $g(s) = |s|^{\theta-1}s, 0 < \theta < 1$. Neste caso a análise é idêntica ao caso do exemplo 1 sendo $g^{-1}(s) = s^{\frac{1}{\theta}}, s > 0$ e $\frac{1}{\theta} > 1$. Assim, as taxas de decaimento, nesse caso tornam-se

$$E(t) \leq C(E(0)) \left[E(0)^{\frac{-1+\theta}{2\theta}} + t \frac{1-\theta}{\theta} \right]^{\frac{2\theta}{\theta-1}}.$$

Decaimento para a equação da onda com dissipação friccional versus viscoelástica

4.1 Introdução do problema

Neste capítulo consideraremos o seguinte problema

$$(4.1.1) \quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s) \operatorname{div}[a(x)\nabla u(s)] ds + b(x)f(u_t) = 0 & \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x), \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

onde Ω um domínio aberto ilimitado de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, com medida finita e fronteira ilimitada. Um exemplo desse tipo de domínio está ilustrado na figura 4.1.

Bem como no capítulo 3 encontramos grandes dificuldades inerentes a domínios ilimitados como a falta de compacidade, a não existência de um operador prolongamento e conseqüentemente a não existência de uma teoria de traço(apenas localmente), a falta de regularidade elíptica, a falta das fórmulas de Green e Gauss,etc.

Apesar das dificuldades no trabalho em domínios ilimitados somos capazes de encontrar taxas de decaimento bem gerais para o problema (4.1.1) onde ambas dissipações, viscoelástica e friccional são assumidas como “competindo”, isto é, existe $\delta > 0$ tal que $a(x) + b(x) \geq \delta > 0$ para todo $x \in \Omega$.

Neste momento é importante ressaltar que os dois mecanismos de dissipação são de naturezas distintas e devem atuar de forma competitiva em todo o domínio. Como foi observado pela primeira vez em Fabrizio e Polidoro [FP], a dissipação viscoelástica tem o efeito dominante sobre a dissipação friccional no sentido de que as taxas de decaimento são determinadas pela primeira. Dessa forma, pela característica ilimitada do nosso domínio, o caso interessante ocorre quando a dissipação viscoelástica atua em um conjunto ilimitado (veja a figura 4.1) uma vez que o caso limitado já foi observado no trabalho de Cavalcanti e Oquendo [CO] quando a região mencionada é um subconjunto de um domínio limitado. O ponto central neste trabalho é uma variante da desigualdade de Poincaré que é um resultado conhecido quando a região de dissipação é um conjunto limitado, no entanto, quando essa região é ilimitada essa desigualdade se torna um resultado interessante e será provado no decorrer do texto. Esta desigualdade nos permite provar o Lema 4.9 que é uma importante ferramenta para a obtenção do resultado de decaimento.

O principal objetivo desse trabalho é a obtenção de taxas gerais de decaimento (veja por exemplo [ALA2, CDCL]) para as soluções de (4.1.1). Usaremos métodos combinados introduzidos por [CO] para o domínio em questão; o que generaliza substancialmente o trabalho de Cavalcanti e Oquendo [CO].

As seções são estruturadas como segue: A seção 4.2 é dedicada a Hipóteses e resultados preliminares referentes ao trabalho. A seção 4.3 é dedicada a enunciar os resultados de existência para a equação trabalhada. Na seção 4.4 serão destacados notações particulares do trabalho e alguns resultados auxiliares para obtenção do decaimento. Finalmente na seção 4.5 será feito o decaimento para a equação (4.1.1).

4.2 Hipóteses e resultados preliminares

Nesta seção introduziremos notações, algumas hipóteses e alguns resultados para obtenção do decaimento

Seja $H_0^1(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$ e defina

$$\mathcal{H} = \{u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que } \Delta u \in L^2(\Omega)\},$$

que é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno

$$(u, v)_{\mathcal{H}} = (u, v)_{H^1(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v), \quad u, v \in \mathcal{H}.$$

Observamos que para Ω um subconjunto de \mathbb{R}^n com medida finita, é válida a seguinte desigualdade de Poincaré

$$(4.2.2) \quad \|u\|_2^2 \leq \lambda_1^{-1} \|\nabla u\|_2^2, \quad \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega),$$

onde λ_1 é uma constante positiva que depende da medida de Ω . Então, como consequência, temos uma norma equivalente em $H_0^1(\Omega)$ como no caso de um domínio limitado.

Em relação a função relaxamento e a perturbação não linear as seguintes Hipóteses se fazem necessárias:

Hipótese 4.1

- $g : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função não decrescente que pertence a classe $C^1(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$ e satisfaz

$$g(0) > 0 \quad e \quad \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^\infty g(s) ds < 1.$$

Além disso, assumimos que

$$(4.2.3) \quad g'(t) \leq -H_1(g(t)), \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

para algum $H_1 \in C^1(\mathbb{R}^+)$, $H_1(0) = 0$, dado como uma função estritamente crescente e convexa.

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função estritamente crescente, contínua tal que $f(0) = 0$ e sujeita ao crescimento de Sobolev no infinito, isto é

$$(4.2.4) \quad k^{-1}s^2 \leq f(s)s \leq Ks^2, \quad |s| \geq 1,$$

onde k e K são duas constantes positivas.

Como provado em [LT], segue pela monotonia e continuidade de f que existe uma função contínua H_2 , que é crescente, convexa na origem e linear no infinito tal que $H_2(0) = 0$ e

$$(4.2.5) \quad s^2 + f^2(s) \leq H_2^{-1}(sf(s)), \quad |s| \leq 1.$$

A associação do comportamento critico da dissipação friccional para uma função convexa geral é um resultado bastante conhecido devido a Lasiecka e Tataru [LT]. Mais recentemente, Lasiecka et al. em [LMM] foram bem sucedidos em adaptar essa ideia para sistemas de dissipação viscoelástica. Esses métodos combinados mostraram bons resultados de modo a obter, grosseiramente falando, taxas para o decaimento dadas pela solução da EDO não linear de primeira ordem.

A fim de obter as taxas de decaimento uniforme para o sistema (4.1.1) precisamos impor algumas limitações nas funções de localização a e b .

Em relação as funções de localização fazemos as seguintes suposições:

Hipótese 4.2 *Seja $a \in C^1(\Omega)$ e $b \in L^\infty(\Omega)$ funções não negativas tais que*

$$\text{med}\{x \in \partial\Omega, a(x) > 0\} > 0 \quad \text{e} \quad a(x) + b(x) \geq \delta > 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega.$$

Como dito anteriormente, o caso interessante ocorre quando a dissipação viscoelástica ocorre e é efetiva em uma região ilimitada de Ω (veja a figura 4.1). De modo a estudar este caso, observamos que, sendo a uma função contínua, segue pela hipótese acima que existe um número real positivo ε_0 e uma vizinhança $V \subset \Omega$ de $\partial\Omega$ tal que

$$\text{med}(\partial V \cap \partial\Omega) > 0 \quad \text{e} \quad a(x) \geq \varepsilon_0 > 0, \quad \text{para todo} \quad x \in V.$$

Inspirado por esta análise, definimos o conjunto

$$(4.2.6) \quad \omega = \{x \in \Omega; a(x) > a_0\},$$

onde $a_0 := \min\{\varepsilon_0, \delta/4\}$.

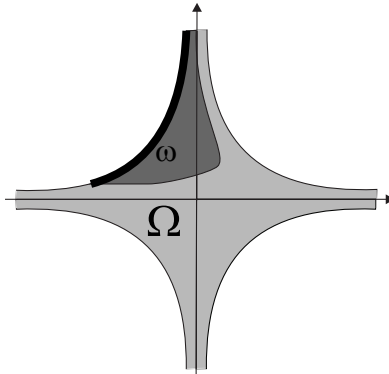


Figura 4.1: Região ilimitada ω

Vale a pena mencionar que ω é uma região ilimitada que não é necessariamente conexa como ilustrado na figura 4.2. Este tipo de região traz uma interessante dificuldade que é a necessidade de uma específica desigualdade de Poincaré que é um importante ingrediente para a demonstração do nosso resultado chave que é o Lema 4.9. Tal interesse

reside no fato que esse tipo de desigualdade é um conhecido resultado quando ω é um subconjunto aberto e limitado do domínio Ω .

De agora em diante, vamos considerar ω um subconjunto aberto e ilimitado de Ω . Então, na ordem de provar a desigualdade desejada, vamos precisar da seguinte hipótese sobre a região de dissipação ω .

Hipótese 4.3 *Se ω_i uma componente conexa ilimitada de ω então existe uma direção coordenada $e_j \in \mathbb{R}^n$ na qual ω_i é limitada nesta direção, i.e.*

$$\sup\{|\Omega_y|; y \in \omega_i\} < \infty$$

onde $\Omega_y := \{z \in \Omega; z = y + te_j; t \in \mathbb{R}\}$ e $|\Omega_y|$ denota a medida de Lebesgue do segmento Ω_y em \mathbb{R}^n . Além disso, temos $\text{med}\{x \in \partial\Omega \cap \partial\omega_i\} > 0$ e para todo $x \in \omega_i$ existe $y \in \partial\Omega \cap \partial\omega_i$ tal que $y = x + te_j$ para algum $t \in \mathbb{R}$.

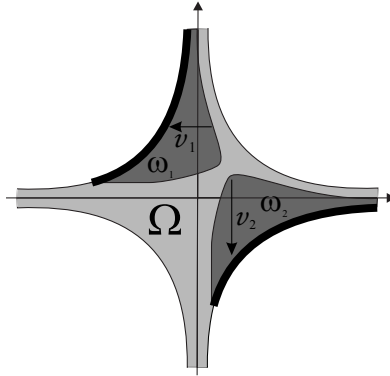


Figura 4.2: direções e_1 e e_2

Observação 4.1 *A figura 4.2 ilustra um exemplo onde é assegurada a hipótese 4.3. Esse tipo de hipótese não é restritiva quanto ao domínio Ω , ilimitado e de medida finita aqui considerado.*

4.3 Existência e unicidade de solução

A existência e unicidade de solução do problema (4.1.1) é feita de forma clássica usando, por exemplo, o método de Faedo-Galerkin. Omitimos os cálculos aqui, mas esses podem ser obtidos, seguindo de perto o feito em [V]. Segue o correspondente resultado:

Teorema 4.2 *Para qualquer $\{u^0, u^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ existe uma única solução do problema (4.1.1) na classe*

$$u \in C^0([0, \infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega)).$$

Além disso, se $\{u^0, u^1\} \in \mathcal{H} \times H_0^1(\Omega)$ então a solução u segue na classe

$$u \in L_{loc}^\infty(0, \infty; \mathcal{H}), \quad u_t \in L_{loc}^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega)), \quad u_{tt} \in L_{loc}^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)).$$

4.4 Notações e resultados fundamentais

Para simplificar as notações introduziremos os seguintes operadores binários:

$$\begin{aligned} (g * w)(t) &:= \int_0^t g(t-s)w(s) ds. \\ (g \square w)(t) &:= \int_0^t g(t-s)|w(t) - w(s)|^2 ds. \\ (g \diamond w)(t) &:= \int_0^t g(t-s)(w(t) - w(s)) ds. \end{aligned}$$

Lema 4.3 *Seja u uma solução de (4.1.1), $\psi \in L^1(0, \infty)$ e $\varphi = \varphi(x)$ uma função suave. Então,*

$$(4.4.7) \quad \|(\psi \diamond (\varphi u))\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\psi\|_{L^1(0, \infty)} (\psi \circ (\varphi u))(t).$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \|(\psi \diamond (\varphi u))\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \left(\int_0^t \sqrt{\psi(t-s)} \sqrt{\psi(t-s)} \varphi(x) (u(t) - u(s)) ds \right)^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\int_0^t \psi(\xi) d\xi \right) \int_0^t \psi(t-s) \varphi^2(x) (u(t) - u(s))^2 ds dx \\ &\leq \|\psi\|_{L^1(0, \infty)} \int_0^t \psi(t-s) \|\varphi(x) (u(t) - u(s))\|_{L^2(\Omega)}^2 dx ds \end{aligned}$$

□

O seguinte lema estabelece uma importante relação entre os operadores.

Lema 4.4 *Para qualquer $g, w \in C^1(\mathbb{R})$ obtemos a igualdade*

$$2[g * w] w' = g' \square w - g(t)|w|^2 - \frac{d}{dt} \left\{ g \square w - \left(\int_0^t g \right) |w|^2 \right\}.$$

Demonstração: Derivando a expressão

$$g \square w - \left(\int_0^t g(s) ds \right) |w|^2,$$

A conclusão segue.

□

Assumindo que u é uma solução do problema (4.1.1), definimos a energia correspondente como o funcional

$$(4.4.8) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|u_t(x, t)|^2 + \kappa(x, t) |\nabla u(x, t)|^2 + a(x) g \square \nabla u] dx,$$

onde

$$\kappa(x, t) := 1 - a(x) \int_0^t g(s) ds.$$

Note que, em vista da hipótese 4.1 temos

$$(4.4.9) \quad 0 < l := 1 - \|a\|_{L^\infty} \int_0^\infty g(s)ds \leq \kappa(x, t) \leq 1,$$

para todo $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}^+$.

Lema 4.5 *A derivada de primeira ordem da energia satisfaz a seguinte identidade:*

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) [g' \square \nabla u - g(t)|\nabla u|^2] dx - \int_{\Omega} b(x)f(u_t)u_t dx.$$

O resultado anterior é primeiramente provado para soluções mais regulares utilizando integração por partes e o Lema 4.4. Então, estendemos o resultado para soluções fracas usando argumentos de densidade.

Como consequência do lema 4.5, concluímos que toda solução de (4.1.1) satisfaz a seguinte identidade

$$(4.4.10) \quad E(t_2) - E(t_1) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} a(x) [g' \square \nabla u - g(t)|\nabla u|^2] - b(x)f(u_t)u_t dx dt,$$

para todo $t_2 \geq t_1 \geq 0$. Isto mostra que a energia é uma função não crescente no tempo.

Por simplicidade, denotaremos o termo de dissipação por

$$(4.4.11) \quad D(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{a(x) [-g' \square \nabla u + g(t)|\nabla u|^2] + b(x)f(u_t)u_t\} dx, \quad t \geq 0.$$

Algumas considerações sobre a geometria do nosso tipo de domínio são dadas a seguir. Seja \mathcal{O} um subconjunto aberto e ilimitado de Ω e Γ_0 um subconjunto ilimitado da fronteira. Denote por $\|\cdot\|_1$ a norma usual de $H^1(\Omega)$, defina o espaço $H_{\Gamma_0}^1(\mathcal{O}) = \overline{W}^{\|\cdot\|_1}$ onde o conjunto W dado como a seguir

$$W = \{\psi|_{\mathcal{O}}; \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{tal que} \quad \text{supp } \psi \cap \Gamma_0 = \emptyset\}.$$

É importante mencionar que para toda $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi|_{\mathcal{O}} \in W$ temos $\psi(x) = 0$ para qualquer $x \in \Gamma_0$. Temos o seguinte

Proposição 4.6 *(Desigualdade de Poincaré) Se \mathcal{O} limitado em alguma das direções coordenadas, i.e. $C := \sup\{|\mathcal{O}_y|; y \in \mathcal{O}\} < \infty$, onde $\mathcal{O}_y = \{y + te_j; t \in \mathbb{R}\} \cap \mathcal{O}$ para algum $j \in \{1, \dots, n\}$, e $\mathcal{O}_y \cap \Gamma_0 \neq \emptyset$ para todo $y \in \mathcal{O}$ então a seguinte desigualdade é assegurada*

$$(4.4.12) \quad \int_{\mathcal{O}} |w(x)|^2 dx \leq C^2 \int_{\mathcal{O}} |\nabla w(x)|^2 dx, \quad \forall w \in H_{\Gamma_0}^1(\mathcal{O}).$$

Demonstração: Usando argumentos padrões de densidade, é suficiente provar o resultado para $w \in W$. Primeiramente, escrevamos $x = (x_1, y)$, onde $x_1 \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Vamos assumir, sem perda de generalidade, que \mathcal{O} é limitado na direção do vetor e_1 . Então, para qualquer $(x, y) \in \mathcal{O}$, existe um $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 = x + t_0 e_1 \in \Gamma_0$. Portanto, aplicando a fórmula de Leibniz seguida pela desigualdade de Cauchy-Schwartz conseguimos

$$|w(x)|^2 \leq C \int_{\mathcal{O}_y} |\partial_1 w(t, y)|^2 dt.$$

Integrando com respeito a x sobre \mathcal{O} obtemos

$$\int_{\mathcal{O}} |w(x)|^2 dx \leq C^2 \int_{\mathcal{O}} |\partial_1 w(x)|^2 dx$$

o que implica na desigualdade desejada. □

Observação 4.7 *Não há dificuldades em verificar que para cada $h \in H_0^1(\Omega)$ temos $h|_{\mathcal{O}} \in H_{\Gamma_0}^1(\mathcal{O})$.*

Concuímos essa seção esboçando algumas ideias de Cavalcanti e Oquendo [CO]. Considere a função não negativa $\varphi \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ tal que

$$(4.4.13) \quad \begin{aligned} \varphi(x) &\geq \delta/2 & \text{se } x \in a^{-1}([\delta/2, \infty[), \\ 0 \leq \varphi(x) &\leq \delta/2 & \text{se } x \in a^{-1}([\delta/4, \delta/2]), \\ \varphi(x) &= 0 & \text{se } x \in a^{-1}([0, \delta/4]). \end{aligned}$$

Por construção, $\text{supp}(\varphi) \subset \text{supp}(a)$. De fato, podemos dizer mais. Se $x \in \text{supp}(\varphi)$ então $a(x) \geq \delta/4$, ou, em outras palavras, a função $a(x)$ inferiormente limitada por $\delta/4$ para todo $x \in \text{supp}(\varphi)$.

Como observado em [CO], $a(x) \leq \delta/2$ para todo $x \in \Omega$ implica que $b(x) > \delta/2$ para todo $x \in \Omega$. Portanto, teríamos a dissipação friccional agindo sobre Ω . Analogamente, $b(x) \leq \delta/2$ para todo $x \in \Omega$ implica que $a(x) > \delta/2$ para todo $x \in \Omega$ o que mostra que a dissipação viscoelástica age em todo Ω . Agora, quando temos $a(x) > \delta/2$ para algum $x \in \Omega$, e, tendo em mente que a uma função contínua, temos, $a(x) > \delta/2$ assegurado para alguma vizinhança V de Ω (que pode ser considerada como máxima satisfazendo $a(x) > \delta/2$). Isso significa, pelo menos, que $b(x) > \delta/2$ em $\Omega \setminus V$. É claro que o caso mais interessante acontece quando os efeitos dissipativos ocorrem simultaneamente porém, complementarmente. Então, como em [CO], o seguinte lema pode ser obtido.

Lema 4.8 *Temos:*

$$(4.4.14) \quad \varphi(x) + b(x) \geq \frac{\delta}{2}, \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Também é um resultado cuja prova pode ser encontrada em [CO]. Abaixo um importante resultado do nosso trabalho.

Lema 4.9 *As seguintes desigualdades são asseguradas:*

$$(4.4.15) \quad \int_{\Omega} ((\varphi(x))^2 + |\nabla \varphi(x)|^2) h^2 dx \leq C \int_{\Omega} a(x) |\nabla h|^2 dx,$$

$$(4.4.16) \quad \int_{\Omega} ((\varphi(x))^2 + |\nabla \varphi(x)|^2) |\nabla h|^2 dx \leq C \int_{\Omega} a(x) |\nabla h|^2 dx,$$

para todo $h \in H_0^1(\Omega)$ e para alguma constante positiva C que depende de φ, a_0 .

Demonstração:

É nesse exato momento que precisamos impor as Hipótese 4.2 e 4.3. No caso de ω limitado a Hipótese 4.2 é suficiente para se obter a desigualdade de Poincaré no conjunto, basta lembrarmos de um resultado usual que é uma variante da desigualdade de Poincaré

Seja Ω_1, Ω_2 um subconjunto de Ω de medida positiva e tal que $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. Então, assumimos que $\text{med}(\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega) \neq 0$, temos:

$$(4.4.17) \quad \int_{\Omega_1} |h|^2 dx \leq C \int_{\Omega_2} |\nabla h|^2 dx; \quad \forall h \in H_0^1(\Omega),$$

onde C uma constante positiva. . No caso ω ilimitado além da Hipótese 4.2 precisamos impor a condição da Hipótese 4.3.

A demonstração dessa última desigualdade no caso limitado é imediata, no caso ω ilimitado veja a prova da Proposição 4.6 com $\mathcal{O} = \omega$.

Tendo em mente que a desigualdade (4.4.17) é válida para

Escolha, $\Omega_1 := \text{supp}(\varphi)$, $\Omega_2 := \omega$ onde ω definido em 4.2.6 e considere $h \in H_0^1(\Omega)$, e portanto $h|_{\omega} \in H_{\Gamma_0}^1(\omega)$, das afirmações acima conseguimos que

$$(4.4.18) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} ((\varphi(x))^2 + |\nabla\varphi(x)|^2) h^2 dx &= \int_{\Omega_1} (\varphi(x))^2 + |\nabla\varphi(x)|^2 h^2 dx \\ &\leq C \int_{\Omega_2} |\nabla h|^2 dx \leq C a_0^{-1} \int_{\Omega_2} a(x) |\nabla h|^2 dx, \end{aligned}$$

que conclui a prova de (4.4.15). A prova da desigualdade (4.4.16) imediata. \square

4.5 Decaimento

Antes de entrar no nosso resultado principal, vamos proceder como em Lasiecka et al. [LMM] considere a função $\tilde{H}_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ que é convexa, contínua, crescente e se anula na origem satisfazendo

$$(4.5.19) \quad \tilde{H}_1((g \square w)(t)) \leq -g' \square w(t), \quad t > 0,$$

para qualquer função $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em que o operador \square pode ser aplicado. Um exemplo de tal função é obtida quando H_1 é linear e neste caso temos $\tilde{H}_1 = H_1$.

Feita essa consideração podemos enunciar o resultado principal.

Teorema 4.10 *Assumamos que as Hipóteses 4.1, 4.2 e 4.5.19 são satisfeitas. Então, temos que existe um tempo $T_0 > 0$ tal que toda solução do problema (4.1.1) satisfaz*

$$E(t) \leq S \left(\frac{t}{T_0} - 1 \right), \quad \forall t > T_0,$$

com $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$, onde $S(t)$ a solução da equação diferencial

$$(4.5.20) \quad \frac{d}{dt} S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = E(0)$$

onde q dado como no próximo Lema.

Um ingrediente importante para a prova é o seguinte resultado.

Lema 4.11 (*Lasiecka e Tataru [LT]*) *Seja p uma função positiva, crescente tal que $p(0) = 0$. Como p é crescente, podemos definir a função q também crescentes, $q(x) = x - (I + p)^{-1}(x)$. Considere a sequência s_n de números positivos satisfazendo*

$$s_{m+1} + p(s_{m+1}) \leq s_m.$$

Então $s_m \leq S(m)$ onde $S(t)$ uma solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = s_0.$$

Além disso, se $p(x) > 0$ para $x > 0$ então $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$.

Embora a chave para a prova do Teorema 4.10 seja usar o Lema 4.11 acima é a seguinte proposição que prova uma estimativa para o funcional energia em termos das funções de dissipação (4.4.11).

Proposição 4.12 *Para $T > 0$ suficientemente grande, existe uma constante positiva C_0 e uma função contínua, convexa e não decrescente $H : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que para todo $n = 0, 1, 2, \dots$,*

$$(4.5.21) \quad \frac{1}{C_0}E((n+1)T) \leq H^{-1} \left(\int_{nT}^{(n+1)T} D(t) dt \right)$$

De fato, assumamos por enquanto que a Proposição 4.12 está assegurada e vamos proceder para a prova do Teorema 4.10.

Demonstração:[Prova do Teorema 4.10] Seja $T > 0$ grande o suficiente como indicado na proposição 4.12. Segue por (4.5.21) e pela identidade de energia (4.4.10) que

$$E((n+1)T) + H \left(\frac{1}{C_0}E((n+1)T) \right) \leq E(nT), \quad n = 1, 2, \dots$$

Portanto, usando o Lema 4.11 com $s_n = E(nT)$ e $s_0 = E(0)$ concluímos que $E(nT) \leq S(m)$ onde $S(t)$ uma solução da E.D.O. não linear (4.5.20), com $p(s) = H(s)$, $s \in \mathbb{R}$. Então, para $t > T$ temos $t = nT + r$, com $0 < r < T$, e pelas propriedades assintóticas do funcional de energia $E(t)$ e a função $S(t)$ temos

$$E(t) \leq E(nT) \leq S(n) = S \left(\frac{t-r}{T} \right) \leq S \left(\frac{t}{T} - 1 \right),$$

o que finaliza a prova. □

Lembremos que esse trabalho é dedicado a prova da Proposição 4.12. Para simplificar os cálculos, faremos dois lemas auxiliares para utilizar na prova de Proposição 4.12.

Lema 4.13 (*Recuperação da Energia Cinética*) *Seja u uma solução forte de (4.1.1). Então para $T > 0$ suficientemente grande temos*

$$\begin{aligned}
(4.5.22) \quad & 2 \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} |u_t|^2 dxdt \\
& \leq C_1 [E((n+1)T) + E(nT)] + C_1 \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} b(x) [H_2^{-1} + (k+K)I] (f(u_t)u_t) dxdt \\
& \quad + C_{\varepsilon} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) [-g' \square \nabla u(t) + g \square \nabla u(t)] dxdt \\
& \quad + C_1 \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} k(x,t) |\nabla u(t)|^2 dxdt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,
\end{aligned}$$

onde $\varepsilon > 0$ é pequeno o suficiente e C_{ε}, C_1 são constantes positivas que não dependem de n .

Demonstração: Seja u uma solução forte e considere φ dado em (4.4.13). Compomos a equação (4.1.1) com $\varphi(x)(g \diamond u)(t)$ de modo a obter

$$\begin{aligned}
(4.5.23) \quad 0 &= \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} u_{tt}(t) \varphi(x)(g \diamond u)(t) dxdt - \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} \varphi(x)(g \diamond u)(t) \Delta u(t) dxdt \\
& \quad + \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} \varphi(x)(g \diamond u)(t) \int_0^t g(t-s) \operatorname{div}[a(x) \nabla u(s)] ds dxdt \\
& \quad + \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} b(x) f(u_t(t)) u_t(t) \varphi(x)(g \diamond u)(t) dxdt.
\end{aligned}$$

Calculamos cada parcela da identidade anterior utilizando “integração por partes”. Então, tendo em mente as notações fixadas, temos

$$\begin{aligned}
(4.5.24) \quad & \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} u_{tt}(t) \varphi(x)(g \diamond u)(t) dxdt \\
& = \left[\int_{\Omega} u_t(t) \varphi(x)(g \diamond u)(t) dx \right]_{t=nT}^{(n+1)T} - \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} u_t(t) \varphi(x)(g' \diamond u)(t) dxdt \\
& \quad - \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(s) ds \int_{\Omega} \varphi(x) |u_t(t)|^2 dxdt, \\
(4.5.25) \quad & - \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} \Delta u(t) \varphi(x)(g \diamond u)(t) dxdt \\
& = \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla \varphi(x)(g \diamond u)(t) dxdt + \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} \nabla u(t) \varphi(x)(g \diamond \nabla u)(t) dxdt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.5.26) \quad & \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} \varphi(x)(g \diamond u)(t) \int_0^t g(t-s) \operatorname{div}[a(x) \nabla u(s)] ds dxdt \\
& = - \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} [\nabla \varphi(x)(g \diamond u)(t) + \varphi(x)(g \diamond \nabla u)(t)] a(x) \int_0^t g(t-s) \nabla u(s) ds dxdt.
\end{aligned}$$

Levando em conta (4.5.24), (4.5.25) e (4.5.26), podemos reescrever (4.5.23) como segue

$$\begin{aligned}
& \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(s) ds \int_{\Omega} \varphi(x) |u_t(t)|^2 dx dt \\
&= \left[\int_{\Omega} u_t(t) \varphi(x) (g \diamond u)(t) dx \right]_{t=nT}^{(n+1)T} - \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} u_t(t) \varphi(x) (g' \diamond u)(t) dx dt \\
&\quad + \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla \varphi(x) (g \diamond u)(t) dx dt + \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} \nabla u(t) \varphi(x) (g \diamond \nabla u)(t) dx dt \\
&\quad - \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} [\nabla \varphi(x) (g \diamond u)(t) + \varphi(x) (g \diamond \nabla u)(t)] a(x) \int_0^t g(t-s) \nabla u(s) ds dx dt \\
&\quad + \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} b(x) f(u_t(t)) u_t(t) \varphi(x) (g \diamond u)(t) dx dt.
\end{aligned}$$

Cada termo da direita da identidade anterior pode ser estimado utilizando as desigualdades de Hölder e Young. De fato, para o primeiro termo usamos a notação das seções anteriores e o Lema 4.9 para encontrar

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} u_t(t) \varphi(x) (g \diamond u)(t) dx \right| &\leq \int_0^t g(t-s) \|u_t(t)\|_2 \|\varphi(u(t) - u(s))\|_2 ds \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^t g(s) ds \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{C}{2} \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} a(x) |\nabla u(t) - \nabla u(s)|_2^2 dx ds \\
&\leq \frac{\|g\|_{L^1(0,\infty)}}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{C}{2} \int_{\Omega} a(x) (g \square \nabla u)(t) dx \\
&\leq \left(\frac{\|g\|_{L^1(0,\infty)} + C}{2} \right) E(t), \quad \text{para todo } t \geq 0,
\end{aligned}$$

e portanto

$$(4.5.27) \quad \left| \left[\int_{\Omega} u_t(t) \varphi(x) (g \diamond u)(t) dx \right]_{t=nT}^{(n+1)T} \right| \leq \left(\frac{\|g\|_{L^1(0,\infty)} + C}{2} \right) [E((n+1)T) + E(nT)].$$

Usando os mesmos argumentos e a Hipótese 4.2 temos a seguinte estimativa para o segundo termo

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} u_t(t) \varphi(x) (g' \diamond u)(t) dx dt \right| \\
(4.5.28) \quad & \leq \varepsilon_1 \|g'\|_{L^1(0,\infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_2^2 dt + \frac{C}{4\varepsilon_1} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) (-g' \square \nabla u)(t) dx dt,
\end{aligned}$$

onde $\varepsilon_1 > 0$ será determinada posteriormente. No mesmo caminho, o terceiro e quarto

termo podem ser estimados por

$$\begin{aligned}
(4.5.29) \quad & \left| \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla \varphi(x) (g \diamond u)(t) dx dt + \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} \nabla u(t) \varphi(x) (g \diamond \nabla u)(t) dx dt \right| \\
& \leq \varepsilon \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \|\nabla u(t)\|_2^2 dt + \frac{C}{4\varepsilon} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) (g \square \nabla u)(t) dx dt \\
& = \varepsilon \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} [k(x,t) + a(x) \int_0^t g(s) ds] |\nabla u(t)|^2 dx dt \\
& \quad + \frac{C}{4\varepsilon} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) (g \square \nabla u)(t) dx dt.
\end{aligned}$$

onde $\varepsilon > 0$ será determinado posteriormente. Para o quinto termo temos

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} [\nabla \varphi(x) (g \diamond u)(t) + \varphi(x) (g \diamond \nabla u)(t)] a(x) (g * \nabla u)(t) dx dt \right| \\
& \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{nT}^{(n+1)T} \|\nabla \varphi(g \diamond u)(t)\|_2^2 + \|\varphi(g \diamond \nabla u)(t)\|_2^2 dt + \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \|a(g * \nabla u)(t)\|_2^2 dt.
\end{aligned}$$

Mas, usando o Lema 4.9 obtemos

$$\begin{aligned}
\|\nabla \varphi(g \diamond u)(t)\|_2^2 &= \int_{\Omega} |\nabla \varphi(x)|^2 \left| \int_0^t g(t-s) [u(t) - u(s)] ds \right|^2 dx \\
&\leq \int_0^t g(s) ds \int_{\Omega} |\varphi(x)|^2 \int_0^t g(t-s) |u(t) - u(s)|^2 ds dx \\
&\leq \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} |\nabla \varphi(x)|^2 |u(t) - u(s)|^2 dx ds \\
&\leq C \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_{\Omega} a(x) \int_0^t g(t-s) |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 ds dx \\
&= C \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_{\Omega} a(x) (g \square \nabla u)(t) dx
\end{aligned}$$

e pelos mesmos argumentos segue que

$$\|\varphi(g \diamond \nabla u)(t)\|_2^2 \leq C \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_{\Omega} a(x) (g \square \nabla u)(t) dx.$$

Também,

$$\begin{aligned}
\|a(g * \nabla u)(t)\|_2^2 &= \int_{\Omega} a(x)^2 \left| \int_0^t g(t-s) \nabla u(s) ds \right|^2 dx \\
&\leq \int_0^t g(s) ds \int_{\Omega} a(x)^2 \int_0^t g(t-s) |\nabla u(s)|^2 ds dx \\
&\leq 2 \|a\|_{\infty} \|g\|_{L^1(0,\infty)} \left[\int_{\Omega} a(x) (g \square \nabla u)(t) dx + \int_{\Omega} a(x) \int_0^t g(s) ds |\nabla u(t)|^2 dx \right].
\end{aligned}$$

Portanto, usando estas estimativas, o quinto termo pode ser trabalhado da seguinte forma

$$\begin{aligned}
(4.5.30) \quad & \left| \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} [\nabla \varphi(x)(g \diamond u)(t) + \varphi(x)(g \diamond \nabla u)(t)] a(x) \int_0^t g(t-s) \nabla u(s) ds dx dt \right| \\
& \leq 2 \|g\|_{L^1(0,\infty)} \left(\frac{C}{\varepsilon} + \|a\|_{\infty} \varepsilon \right) \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) (g \square \nabla u)(t) dx dt \\
& \quad + 2 \|a\|_{\infty} \|g\|_{L^1(0,\infty)} \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) \int_0^t g(s) ds |\nabla u(t)|^2 dx dt.
\end{aligned}$$

Finalmente, para o último termo temos

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} b(x) f(u_t(t)) \varphi(x) (g \diamond u)(t) dx dt \right| \\
& \leq \frac{1}{2} \int_{nT}^{(n+1)T} \|bf(u_t(t))\|_2^2 dt + \frac{1}{2} \int_{nT}^{(n+1)T} \|\varphi(g \diamond u)(t)\|_2^2 dt \\
& \leq \frac{C \|g\|_{L^1(0,\infty)}}{2} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) (g \square \nabla u)(x, t) dx dt + \frac{1}{2} \int_{nT}^{(n+1)T} \|bf(u_t(t))\|_2^2 dt.
\end{aligned}$$

Estimamos a última integral na desigualdade acima como segue

$$\int_{nT}^{(n+1)T} \|bf(u_t(t))\|_2^2 dt = \int_{\Sigma_A \cup \Sigma_B} b(x)^2 |f(u_t(x, t))|^2 dx dt,$$

onde

$$\Sigma_A = \{(x, t) \in \Omega \times (nT, (n+1)T); |u_t(x, t)| \leq 1\},$$

$$\Sigma_B = \{(x, t) \in \Omega \times (nT, (n+1)T); |u_t(x, t)| > 1\}.$$

Na região Σ_A usamos a estimativa (4.2.5) enquanto na região Σ_B usamos a hipótese 4.1 para obter

$$\int_{nT}^{(n+1)T} \|bf(u_t(t))u_t(t)\|_2^2 dt \leq \|b\|_{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} b(x) [H_2^{-1} + KI] (f(u_t)u_t) dx dt$$

Portanto, concluímos o seguinte

$$\begin{aligned}
(4.5.31) \quad & \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} b(x) f(u_t(t)) \varphi(x) (g \diamond u)(t) dx dt \\
& \leq \frac{C \|g\|_{L^1(0,\infty)}}{2} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) (g \square \nabla u)(x, t) dx dt \\
& \quad + \frac{\|b\|_{\infty}}{2} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} b(x) [H_2^{-1} + KI] (f(u_t)u_t) dx dt.
\end{aligned}$$

Combinando (4.5.27), (4.5.28), (4.5.29), (4.5.30) e (4.5.31) chegamos à

$$\begin{aligned}
& \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(s) ds \int_{\Omega} \varphi(x) |u_t(t)|^2 dx dt \\
& \leq \left(\frac{\|g\|_{L^1(0,\infty)} + C}{2} \right) [E((n+1)T) + E(nT)] + \varepsilon \|g'\|_{L^1(0,\infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_2^2 dt \\
& \quad + \frac{C}{4\varepsilon} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) (-g' \square \nabla u)(t) dx dt + \varepsilon \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \|\nabla u(t)\|_2^2 dt \\
& \quad + \left(\frac{C}{4\varepsilon} + 2 \|g\|_{L^1(0,\infty)} \left[\frac{C}{\varepsilon} + \|a\|_{\infty} \varepsilon \right] + \frac{C \|g\|_{L^1(0,\infty)}}{2} \right) \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) (g \square \nabla u)(t) dx dt \\
& \quad + 2 \|a\|_{\infty} \|g\|_{L^1(0,\infty)} \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) \int_0^t g(s) ds |\nabla u(t)|^2 dx dt \\
& \quad + \frac{\|b\|_{\infty}}{2} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} b(x) [H_2^{-1} + KI] (f(u_t) u_t) dx dt.
\end{aligned}$$

Agora, voltemos nossa atenção para a integral no lado esquerdo da desigualdade acima e observemos que, desde $g(0) > 0$ podemos escolher um $T_1 > 0$ tal que para todo $t \geq T_1$ a seguinte desigualdade é assegurada

$$\int_0^t g(s) ds \geq T_1 g(T_1) > 0,$$

e obtemos aplicando o Lema 4.3 a seguinte estimativa inferior

$$(4.5.32) \quad \frac{T_1 g(T_1) \delta}{2} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx dt \leq \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(s) ds \int_{\Omega} (\varphi(x) + b(x)) |u_t(t)|^2 dx dt.$$

Por outro lado, procedendo como anteriormente, usamos a hipótese (4.3) e (4.2.5) para obter

$$\begin{aligned}
& \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(s) ds \int_{\Omega} b(x) |u_t|^2 dx dt \\
& \leq \|g\|_{L^1(0,\infty)} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} b(x) [H_2^{-1} + kI] (f(u_t) u_t) dx dt.
\end{aligned}$$

As estimativas (4.5.31) e (4.5.32) levam para

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{T_1 g(T_1) \delta}{2} - \varepsilon_1 \|g'\|_{L^1(0,\infty)} \right) \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx dt \\
& \leq \left(\frac{\|g\|_{L^1(0,\infty)} + C}{2} \right) [E((n+1)T) + E(nT)] \\
& \quad + \frac{C}{4\varepsilon_1} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) (-g' \square \nabla u)(t) dx dt + \|g\|_{L^1(0,\infty)} \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} k(x, t) |\nabla u(t)|^2 dx dt \\
& \quad + \left(\frac{C}{4\varepsilon} + 2 \|g\|_{L^1(0,\infty)} \left[\frac{C}{\varepsilon} + \|a\|_{\infty} \varepsilon \right] + \frac{C \|g\|_{L^1(0,\infty)}}{2} \right) \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) (g \square \nabla u)(t) dx dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (2 \|a\|_\infty + 1) \|g\|_{L^1(0,\infty)} \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) \int_0^t g(s) ds |\nabla u(t)|^2 dx dt \\
& + \left(\frac{\|b\|_\infty}{2} + \|g\|_{L^1(0,\infty)} \right) \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} b(x) [H_2^{-1} + (k + K)I] (f(u_t)u_t) dx dt.
\end{aligned}$$

Note que, usando (4.4.9), para todo $t \geq 0$,

$$\int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) \int_0^t g(s) ds |\nabla u(t)|^2 dx dt \leq \frac{\|g\|_{L^1(0,\infty)} \|a\|_\infty}{l} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} k(x, t) |\nabla u(t)|^2 dx dt.$$

Neste caminho, para $T > T_1$ e escolhendo $\varepsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\frac{T_1 g(T_1) \delta}{2} - \varepsilon_1 \|g'\|_{L^1(0,\infty)} > 0,$$

e definindo C_ε, C_1 apropriadamente concluímos (4.5.22). \square

Lema 4.14 (*Recuperando a Energia Potencial*) *Seja u uma solução forte de (4.1.1). Então, temos*

$$\begin{aligned}
(4.5.33) \quad & \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} k(x, t) |\nabla u|^2 dx dt - \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx dt \\
& \leq C_2 [E((n+1)T) + E(nT)] + \tilde{C}_\varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} b(x) [H_2^{-1} + KI] (f(u_t)u_t) dx dt \\
& \quad + \tilde{C}_\varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) (g \square \nabla u)(t) dx dt \\
& \quad + C_2 \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} k(x, t) |\nabla u(t)|^2 dx dt,
\end{aligned}$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$, onde $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $\tilde{C}_\varepsilon, C_2$ são constantes positivas que não dependem de n .

Demonstração: Seja u uma solução forte de (4.1.1). Multiplicamos a equação (4.1.1) por u e integrando sobre $\Omega \times]nT, (n+1)T[$ por partes conseguimos

$$\begin{aligned}
& - \int_{nT}^{(n+1)T} \|u_t(t)\|_2^2 dt + \int_{nT}^{(n+1)T} \|\nabla u(t)\|_2^2 dt \\
& \leq \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) (g * \nabla u)(t) \nabla u(t) dx dt - \left[\int_{\Omega} u_t(t) u(t) dx \right]_{t=nT}^{(n+1)T} \\
& \quad - \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} b(x) f(u_t(t)) u(t) dx dt.
\end{aligned}$$

Estimamos a primeira integral no lado direito da desigualdade anterior usando as

desigualdades de Hölder e Young como segue

$$\begin{aligned}
& \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x)(g * \nabla u)(t) \nabla u(t) dx dt \\
& \leq \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \left\| a^{\frac{1}{2}} \nabla u(s) \right\|_2 \left\| a^{\frac{1}{2}} \nabla u(t) \right\|_2 ds dt \\
& \leq \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \left\| a^{\frac{1}{2}} (\nabla u(t) - \nabla u(s)) \right\|_2 \left\| a^{\frac{1}{2}} \nabla u(t) \right\|_2 ds dt \\
(4.5.34) \quad & \quad + \int_{nT}^{(n+1)T} \int_0^t g(t-s) \left\| a^{\frac{1}{2}} \nabla u(t) \right\|_2^2 ds dt \\
& \leq \frac{1}{4\varepsilon} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x)(g \square \nabla u)(t) dx dt \\
& \quad + (\varepsilon + 1) \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) \int_0^t g(s) ds |\nabla u(t)|^2 dx dt.
\end{aligned}$$

O segundo termo é estimado observando que para todo $t \geq 0$ temos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} u_t(x, t) u(x, t) dx \right| & \leq \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_2^2 \\
& \leq \frac{1 + \lambda_1^{-1}}{2} [\|u_t(t)\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2] \\
& \leq \frac{1 + \lambda_1^{-1}}{2} E(t),
\end{aligned}$$

onde utilizamos (4.2.2). Então, obtemos

$$(4.5.35) \quad \left| \left[\int_{\Omega} u_t(t) u(t) dx \right]_{t=nT}^{(n+1)T} \right| \leq \frac{1 + \lambda_1^{-1}}{2} [E(nT) + E((n+1)T)].$$

Para a última integral procedemos como no lema anterior e escrevemos

$$\int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} b(x) f(u_t(x, t)) u(x, t) dx dt = \int_{\Sigma_A \cup \Sigma_B} b(x) f(u_t(x, t)) u(x, t) dx dt,$$

onde

$$\Sigma_A = \{(x, t) \in \Omega \times (nT, (n+1)T); |u_t(x, t)| \leq 1\},$$

$$\Sigma_B = \{(x, t) \in \Omega \times (nT, (n+1)T); |u_t(x, t)| > 1\}.$$

Na região Σ_A usamos (4.2.5) e a desigualdade de Poincaré (4.2.2) para obter

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Sigma_A} b(x) f(u_t(x, t)) u(x, t) dx dt \right| \\
& \leq \frac{\lambda_1^{-1} \|b\|_{\infty}}{2\varepsilon} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} b(x) H_2^{-1}(f(u_t) u_t) dx dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{nT}^{(n+1)T} \|\nabla u(t)\|_2^2 dt.
\end{aligned}$$

Na região Σ_B usamos a Hipótese 4.1 e a desigualdade de Poincaré (4.2.2) para conseguir

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Sigma_B} b(x) f(u_t(x, t)) u(x, t) dx dt \right| \\
& \leq \frac{\lambda_1^{-1} \|b\|_{\infty}}{2\varepsilon} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} b(x) K f(u_t(t)) u_t(t) dx dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{nT}^{(n+1)T} \|\nabla u(t)\|_2^2 dt.
\end{aligned}$$

Portanto, combinando estas duas estimativas nós conseguimos

$$(4.5.36) \quad \left| \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} b(x) f(u_t(x, t)) u(x, t) dx dt \right| \leq \frac{\lambda_1^{-1} \|b\|_{\infty}}{2\varepsilon} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} b(x) [H_2^{-1} + KI] (f(u_t) u_t) dx dt + \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \|\nabla u(t)\|_2^2 dt.$$

Utilizando (4.5.34), (4.5.35) e (4.5.36) chegamos a

$$\begin{aligned} & \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} k(x, t) |\nabla u(t)|^2 dx dt - \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} |u_t(t)|^2 dx dt \\ & \leq \frac{1 + \lambda_1^{-1}}{2} [E(nT) + E((n+1)T)] \\ & \quad + \frac{\lambda_1^{-1} \|b\|_{\infty}}{2\varepsilon} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} b(x) [H_2^{-1} + KI] (f(u_t) u_t) dx dt \\ & \quad + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) (g \square \nabla u)(t) dx dt \\ & \quad + \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} k(x, t) |\nabla u(t)|^2 dx dt + \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \|\nabla u(t)\|_2^2 dt. \end{aligned}$$

Agora, usando (4.4.9), podemos notar que para todo $t \geq 0$,

$$\int_{nT}^{(n+1)T} \|\nabla u(t)\|_2^2 dt \leq \frac{1}{l} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} k(x, t) |\nabla u(t)|^2 dx dt.$$

A desigualdade (4.5.33) segue do exposto tomando \tilde{C}_ε e C_2 apropriadamente. \square

Vamos agora provar a Proposição 4.12.

Demonstração:[Prova da Proposição 4.12] Seja $T > 0$ suficientemente grande e u uma solução forte de (4.1.1). Então, combinando os Lemas 4.13 e 4.14, e a Hipótese 4.1 obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx dt + \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} k(x, t) |\nabla u(t)|^2 dx dt \\ & \leq (C_1 + C_2) [E((n+1)T) + E(nT)] \\ & \quad + (C_1 + \tilde{C}_\varepsilon) \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} b(x) [H_2^{-1} + (k + K)] (f(u_t) u_t) dx dt \\ & \quad + (C_\varepsilon + \tilde{C}_\varepsilon) \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) [-g' \square \nabla u(t) + g \square \nabla u(t)] dx dt \\ & \quad + (C_1 + C_2) \varepsilon \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} k(x, t) |\nabla u(t)|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\varepsilon_0 := 1 - (C_1 + C_2)\varepsilon > 0,$$

Obtemos,

$$\begin{aligned}
& \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} |u_t|^2 dxdt + \varepsilon_0 \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} k(x, t) |\nabla u(t)|^2 dxdt + \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) g \square \nabla u(t) dxdt \\
& \leq (C_1 + C_2) [E((n+1)T) + E(nT)] \\
& \quad + (C_1 + \tilde{C}_\varepsilon) \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} b(x) [H_2^{-1} + (k + K)] (f(u_t) u_t) dxdt \\
& \quad + (C_\varepsilon + \tilde{C}_\varepsilon + 1) \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) [-g' \square \nabla u(t) + g \square \nabla u(t)] dxdt.
\end{aligned}$$

Usando a expressão do funcional de energia (4.4.8) segue da desigualdade acima e denotando por $\tilde{C} > 0$ uma apropriada constante que não pode depender de n , temos,

$$\begin{aligned}
(4.5.37) \quad & \frac{1}{\tilde{C}} \int_{nT}^{(n+1)T} E(t) dt \\
& \leq [E((n+1)T) + E(nT)] + \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} b(x) [H_2^{-1} + (k + K)] (f(u_t) u_t) dxdt \\
& \quad + \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) [-g' \square \nabla u(t) + (g \square \nabla u)(t)] dxdt.
\end{aligned}$$

Agora, segue por (4.5.19) e aplicando a desigualdade de Jensen para funções convexas

$$\int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) (g \square \nabla u)(t) dxdt \leq \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) \tilde{H}_1^{-1} (-g' \square \nabla u)(t) dxdt.$$

e aplicando a desigualdade de Jensen para funções convexas, temos

$$\begin{aligned}
(4.5.38) \quad & \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) (g \square \nabla u)(t) dxdt \\
& \leq \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) \tilde{H}_1 [(-g' \square \nabla u)(t)] dxdt \\
& \leq a_0 T \tilde{H}_1^{-1} \left(\frac{1}{a_0 T} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} a(x) (-g' \square \nabla u)(t) dxdt \right),
\end{aligned}$$

onde $a_0 = \int_{\Omega} a(x) dx$.

Também aplicando a desigualdade de Jensen temos

$$\begin{aligned}
(4.5.39) \quad & \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} b(x) [H_2^{-1} + (k + K)I] (f(u_t) u_t) dxdt \\
& \leq b_0 T [H_2^{-1} + (k + K)I] \left(\frac{1}{b_0 T} \int_{nT}^{(n+1)T} \int_{\Omega} b(x) f(u_t) u_t dxdt \right),
\end{aligned}$$

onde $b_0 = \int_{\Omega} b(x) dx$.

Combinando (4.5.39) e (4.5.38) com (4.5.37), tendo em mente a expressão da dissipação friccional, obtemos

$$(4.5.40) \quad \frac{1}{\tilde{C}} \int_{nT}^{(n+1)T} E(t) dt \leq [E((n+1)T) + E(nT)] + [a_0 T [\tilde{H}_1^{-1} + I] + b_0 T [H_2^{-1} + (k + K)I]] \left(\frac{a_0 + b_0}{a_0 b_0 T} \int_{nT}^{(n+1)T} D(t) dt \right).$$

Por outro lado, segue pela identidade de energia (4.4.10) que

$$(4.5.41) \quad E(nT) = E((n+1)T) + \int_{nT}^{(n+1)T} D(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Também, usando o fato que o funcional energia é não crescente temos

$$(4.5.42) \quad TE((n+1)T) \leq \int_{nT}^{(n+1)T} E(t) dt.$$

Usando (4.5.41) e (4.5.42), desigualdade (4.5.40) implica que para $T_0 > 2\tilde{C}$ e para todo $T > T_0$ temos

$$\frac{1}{C_0} E((n+1)T) \leq H^{-1} \left(\int_{nT}^{(n+1)T} D(t) dt \right),$$

onde a função H é dada pela expressão

$$H^{-1}(s) = [\tilde{H}_1^{-1} + H_2^{-1} + (2 + k + K)I] \left(\frac{a_0 + b_0}{a_0 b_0 T_0} s \right) + s, \quad s \in \mathbb{R},$$

e

$$C_0 = \frac{[(a_0 + b_0)T_0 + 1]\tilde{C}}{T_0 - 2}.$$

O que finaliza a prova. □

4.5.1: Exemplos de Taxas Explícitas de Decaimento

Agora exibiremos algumas taxas de decaimento explícitas.

Decaimento Exponencial

Para obtermos taxas de decaimento exponencial assumimos as seguintes hipóteses:

$$g'(t) \leq -cg(t), \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

e

$$k^{-1}|s| \leq |f(s)| \leq K|s|, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Daí vem que, as hipóteses (4.2.3),(4.5.19) sobre a função de relaxamento g e (4.2.4), (4.2.5) sobre a não linearidade f , são satisfeitas, respectivamente quando,

$$H_1 = -cI, \quad \tilde{H}_1 = \frac{1}{c}I, \quad \text{e } H_2^{-1} = (k + K)I,$$

onde I é a identidade.

Uma vez que a função H do Lema 4.12 é dada por $H = [H_2^{-1} + (1+k+K)I + \tilde{H}_1^{-1}]^{-1}$, segue do exposto acima que, nesse caso, $H = C I$, onde C é uma constante positiva que não depende de n .

De (4.5.21), (4.4.11) e (4.5.41) temos para $T > T_0$,

$$E((n+1)T) \leq C \int_{nT}^{(n+1)T} D(t) dt = -CE((n+1)T) + CE(nT),$$

onde a constante C depende de T mas não depende de n .

A última desigualdade implica,

$$(4.5.43) \quad E((n+1)T) \leq \frac{C}{C+1} E(nT), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

o que fornece a estabilidade exponencial.

De fato, de (4.5.43) vem que,

$$(4.5.44) \quad E(T) \leq \frac{C}{1+C} E(0) = \frac{1}{1+\frac{1}{C}} E(0), \quad \text{para todo } T > T_0.$$

Repetindo o processo acima de T a $2T$, obtemos

$$E(2T) \leq \frac{1}{1+\frac{1}{C}} E(T) \leq \frac{1}{(1+\frac{1}{C})^2} E(0).$$

No caso geral, temos que,

$$E(nT) \leq \frac{1}{(1+\frac{1}{C})^n} E(0).$$

Uma vez que qualquer número t pode ser escrito como $t = nT + r$ onde $0 \leq r < T$ e $E_u(t)$ é uma função não crescente, temos

$$E(t) \leq E(t-r) \leq \frac{1}{(1+\frac{1}{C})^{\frac{t-r}{T}}} E(0) = C_0 e^{-\gamma t} E(0),$$

onde $C_0 = e^{\frac{r}{T} \ln(1+\frac{1}{C})}$, $\gamma = \frac{\ln(1+\frac{1}{C})}{T}$, e o decaimento exponencial segue.

Outras Taxas de Decaimento

Com o intuito de obtermos outras taxas de decaimento assumiremos as seguintes hipóteses:

$$g'(t) \leq -cg(t), \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

e

$$s^2 + f(s)^2 \leq H_2^{-1}(f(s)s), \quad \text{para } |s| < 1.$$

Daí vem que, as hipóteses (4.2.3),(4.5.19) sobre a função de relaxamento g são satisfeitas, respectivamente, quando

$$H_1 = -cI, \quad \text{e} \quad \tilde{H}_1 = \frac{1}{c}I,$$

onde I é a identidade.

Uma vez que a função H do Lema 4.12 é dada por $H = [H_2^{-1} + (1+k+K)I + \tilde{H}_1^{-1}]^{-1}$, segue do exposto acima que, nesse caso, $H = [CI + H_2^{-1}]^{-1}$, onde C é uma constante positiva que não depende de n .

De posse dessa informação podemos repetir o que foi feito na seção 3.5 no sentido de obtermos taxas análogas às encontradas na referida seção. Notemos que a equação a considerar é $S_t + c_0(H_2)(c_1S) = 0$, $S(0) = E(0)$ e a solução desta equação fornece uma limitação assintótica para a energia, isto é, $E(t) \leq C(E(0))S(t)$, para $t > T_0$, onde as constantes c_0 e c_1 são obtidas a partir do fato que $q(s)$ é assintoticamente equivalente a $(CI + H_2^{-1})^{-1}(s)$ próximo a origem.

Observamos que quando ambos os mecanismos dissipativos tiverem comportamento assintótico polinomial próximo a origem, então a taxa de decaimento da energia dar-se-á no pior cenário, ou seja, com a pior taxa de decaimento polinomial, ver [CDCLF].

Bibliografia

- [ALA] F. Alabau-Boussouira, Convexity e weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems, *Appl. Math. Optim.* 51(1), (2005), 61-105.
- [ALA2] Alabau-Boussouira, Observabilité frontière indirecte de systèmes faiblement couplés. (French) [Indirect boundary observability of a weakly coupled wave system] *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 333 (2001), no. 7, 645-650.
- [ALA3] F. Alabau-Boussouira, A unified approach via convexity for optimal energy decay rates of finite and infinite dimensional vibrating damped systems with applications to semi-discretized vibrating damped systems. *J. Differential Equations* 248 (2010), no. 6, 1473-1517.
- [ACG] F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa, R. Guglielmi, Indirect stabilization of weakly coupled systems with hybrid boundary conditions. *Math. Control Relat. Fields* 1 (2011), no. 4, 413-436.
- [ALA4] F. Alabau-Boussouira, New trends towards lower energy estimates and optimality for nonlinearly damped vibrating systems. *J. Differential Equations* 249 (2010), no. 5, 1145-1178.
- [AN] F. Ali Mehmeti, S. Nicaise, Nemytskij's operators and global existence of small solutions of semilinear evolution equations on nonsmooth domains. *Comm. Partial Differential Equations* 22 (1997), no. 9-10, 1559-1588.
- [BAR] V. Barbu, "Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces". România, Bucuresti: Noordhoff International Publishing, 1976.
- [BLR] C. Bardos, G. Lebeau e J. Rauch, Control and stabilisation de l'équation des ondes, Appendix II in J. L. Lions controllabilité exacte des systèmes distribués, Collection RMA, Vol. 8, Masson, Paris, 1988.
- [BRT] L. Bociu, Rammaha, M. Rammaha, D. Toundykov, On a wave equation with supercritical interior and boundary sources and damping terms, *Mathematische Nachrichten*, 284(16), (2011), 2032-2064.
- [B] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Universitext. Springer, New York, 2011.

- [B2] H. Brezis, Opérateurs Maximaux Monotones et Semigroupes de Contractions dans le espaces de Hilbert, Mathematics Studies, vol. 5, North Holland, Amsterdam, 1973
- [CDC] M. M. Cavalcanti e V. N. Domingos Cavalcanti, “*Iniciação à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*”, Vol. 1, DMA/UEM, Maringá, Brasil, 2000.
- [CDCFS] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka and J. A. Soriano, Uniform Stabilization of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping, *Transactions of AMS*, 361 (2009), no. 9, 4561-4580.
- [CDCFS2] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka and J. A. Soriano, Asymptotic stability of the wave equation on compact manifolds and locally distributed damping: a sharp result. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 197 (2010), no. 3, 925-964.
- [CDCL] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti e I. Lasiecka, Wellposedness and optimal decay rates for wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction, *J. Differential Equations* **236** (2007), 407-459.
- [CDCLF] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, I. Lasiecka, F. A. Falcão Nascimento, *Intrinsic Decay rate estimates for the wave equation with competing viscoelastic and frictional dissipation*. Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B.
- [CO] M.M. Cavalcanti e H.P. Oquendo, *Frictional versus viscoelastic damping in a semi-linear wave equation*, SIAM J. Control Optim. 42 (2003), no.4, 1310–1324.
- [CLT] M. M. Cavalcanti, D. Toundykov, e I. Lasiecka. Wave equation with damping affecting only a subset of static Wentzell boundary is uniformly stable. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364 (2012), p. 5693-5713.
- [CDCFT] M.M. Cavalcanti, V.N.Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka, e D. Toundykov. Stabilization of the damped wave equation with Cauchy-Ventcel boundary conditions. *J. Evol. Equ.*, 9(1):143–169, 2009.
- [CHEN1] G. Chen, A Note on the Boundary Stabilization of the Wave Equation, *SIAM J. Control and Optimization*, **19**(1), (1981), 106-113.
- [CHEN2] G. Chen, Control and Stabilization for the Wave Equation in a Bounded Domain, *SIAM J. Control and Optimization*, **19**(1), (1979), 114-122.
- [DLT] M. Daoulatli, I. Lasiecka, D. Toundykov, Uniform energy decay for a wave equation with partially supported nonlinear boundary dissipation without growth restrictions. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* 2 (2009), no. 1, 67-94.
- [ELN] M. Eller, J. Lagnese e S. Nicaise, Decay rates for solutions of a Maxwell system with nonlinear boundary damping. Special issue in memory of Jacques-Louis Lions. *Comput. Appl. Math.* 21 (2002), no. 1, 135-165.
- [FP] M. Fabrizio, S. Polidoro, *Asymptotic decay for some differential systems with fading memory*, Appl. Anal. 81 (2002), no.6, 1245–1264.
- [GRIS] Grisvard, P. Elliptic problems in nonsmooth domains, Pitman, London, 1985.

- [GT] Gilbarg, D. e Trudinger, N. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order Second edition. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [LMM] I. Lasiecka, S. Messaoudi, M. Mustafa, *Note on intrinsic decay rates for abstract wave equations with memory*, J. Math. Phys. 54 (2013).
- [LT] I. Lasiecka e D. Tataru, Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping, Differential and integral Equations, 6 (1993), 507-533.
- [LA-TO] I. Lasiecka, D. Toundykov, Regularity of higher energies of wave equation with nonlinear localized damping and a nonlinear source. Nonlinear Anal. 69 (2008), no. 3, 898-910.
- [LIONS1] J. L. Lions, Controlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués, tome 1, Masson, 1988.
- [LIONS2] J. L. Lions, Controlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués, tome 2, Masson, 1988.
- [LZ] W-J Liu, E. Zuazua, Enrique(E-MADC-AM) Decay rates for dissipative wave equations. (English summary) Papers in memory of Ennio De Giorgi (Italian). *Ricerche Mat.* 48 (1999), suppl., 61-75.
- [Liu] K. Liu, Locally distributed control and damping for conservative systems. *SIAM J. Control and Optimization* 35(5) (1997), 1574-1590.
- [MAR] P. Martinez, A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems with localized damping. *Rev. Mat. Complutense* 12(1) (1999), 251-283.
- [MAR2] P. Martinez, A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 4 (1999), 419-444.
- [MED] L.A. Medeiros e E.A. de Mello, "A Integral de Lebesgue", sexta edição, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2008.
- [Mo] T. Motai, Asymptotic behavior of solutions to the Klein-Gordon equation with a nonlinear dissipative term, *Tsukuba J. Math.* 15 (1991), no. 1, 151-160.
- [MGP] Giorgi, Claudio; Muñoz Rivera, Jaime E.; Pata, Vittorino Global attractors for a semilinear hyperbolic equation in viscoelasticity. J. Math. Anal. Appl. 260 (2001), no. 1, 83-99.
- [MRL] Muñoz Rivera, Jaime E.; Fatori, Luci Harue Smoothing effect and propagations of singularities for viscoelastic plates. J. Math. Anal. Appl. 206 (1997), no. 2, 397-427.
- [MRN] Muñoz Rivera, J. E.; Naso, M. G. On the decay of the energy for systems with memory and indefinite dissipation. *Asymptot. Anal.* 49 (2006), no. 3-4, 189-204.
- [MRP] Muñoz Rivera, Jaime E.; Perla Menzala, Gustavo Decay rates of solutions to a von Kármán system for viscoelastic plates with memory. *Quart. Appl. Math.* 57 (1999), no. 1, 181-200.

- [MRO] Muñoz Rivera, Jaime E.; Portillo Oquendo, Higidio Transmission problem for viscoelastic beams. *Adv. Math. Sci. Appl.* 12 (2002), no. 1, 1–20.
- [MRS] Muñoz Rivera, Jaime E.; Peres Salvatierra, Alfonso Asymptotic behaviour of the energy in partially viscoelastic materials. *Quart. Appl. Math.* 59 (2001), no. 3, 557–578.
- [NA1] M. Nakao, Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation. *Math. Ann.*, 305 (1996), 403–417.
- [NA2] M. Nakao, Decay of solutions of the wave equation with local degenerate dissipation. *Israel J. of Maths.* 95 (1996), 25–42.
- [NA3] M. Nakao, Decay and global existence for nonlinear wave equations with localized dissipations in general exterior domains. *New trends in the theory of hyperbolic equations*, 213–299, Oper. Theory Adv. Appl., 159, Birkhäuser, Basel, 2005.
- [NA4] M. Nakao, Energy decay for the wave equation with boundary and localized dissipations in exterior domains, *Math. Nachr.* **278**(7-8), (2005), 771–783.
- [NJ] M. Nakao, I. L. Jung, , Energy decay for the wave equation in exterior domains with some half-linear dissipation, *Differential Integral Equations* 16 (2003), no. 8, 927–948.
- [NP] S. Nicaise, C. Pignotti, Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks. *SIAM J. Control Optim.* 45 (2006), no. 5, 1561–1585.
- [NP2] S. Nicaise, C. Pignotti, Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay. *Differential Integral Equations* 21 (2008), no. 9-10, 935–958.
- [NV] S. Nicaise, J. Valein, Stabilization of second order evolution equations with unbounded feedback with delay. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 16 (2010), no. 2, 420–456.
- [R] A. Ruiz, Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potential, *J. Math. Pures Appl.*, **71** (1992), 455–467.
- [STV] J. Serrin, G. Todorova, E. Vitillaro, Existence for a nonlinear wave equation with damping and source terms, *Differential Integral Equations* 16 (2003), no. 1, 13–50.
- [SHOW] R. Showalter “*Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*”. AMS, Providence, 1997.
- [TY] G. Todorova, B. Yordanov, Critical exponent for a nonlinear wave equation with damping, *J. Differential Equations* **174** (2001), no. 2, 464–489.
- [TY2] G. Todorova, B. Yordanov, Nonlinear dissipative wave equations with potential. *Control methods in PDE-dynamical systems*, 317–337, Contemp. Math., 426, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [T] D. Toundykov, Optimal decay rates for solutions of nonlinear wave equation with localized nonlinear dissipation of unrestricted growth and critical exponents source terms under mixed boundary, *Nonlinear Analysis T. M. A.* **67**(2) (2007), 512–544.

- [VM] J. Vancostenoble, P. Martinez, Optimality of energy estimates for the wave equation with nonlinear boundary velocity feedbacks. *SIAM J. Control Optim.* 39 (2000), no. 3, 776-797.
- [V] C. O. Vieira, Existência e decaimento exponencial de soluções de uma equação da onda semilinear e parcialmente viscoelástica com dissipação friccional localizada. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.
- [Z] E. Zuazua, Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping, *Commun. Partial Differential Equations* 15(2), (1990), 205-235.
- [Z2] E. Zuazua, Exponential decay for the semilinear wave equation with localized damping in unbounded domains. *J. Math. Pures Appl.* 9 70 (1991), no. 4, 513-529.