UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

HÉLIO VINICIUS M. TOZATTI

Dispersividade e Recursividade para Ações de Semigrupos.

Maringá - PR

HÉLIO VINICIUS M. TOZATTI

Dispersividade e Recursividade para Ações de Semigrupos.

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor.

Orientador: Prof. Dr. Josiney Alves de Souza;
Co-Orientador Prof. Dr. Carlos José Braga Barros.

Maringá - PR

Agradecimentos

Agradeço em especial ao orientador Prof. Dr. Josiney Alves de Souza e ao Co-orientador Prof. Dr. Carlos José Braga Barros pelo empenho e dedicação ao meu desenvolvimento científco desde a minha graduação. Ao amigo de pesquisa Victor Hugo Lourenço da Rocha que contribuiu com este trabalho e a Capes pelo apoio financeiro.

Hélio Vinicius M. Tozatti

Resumo

Os conceitos de recursividade e dispersividade para sistemas dinâmicos em espaços métricos estão relacionados com estabilidade de Poisson, pontos não-dispersivos, instabilidade de Poisson e pontos-dispersivos. No presente trabalho será exposto uma extensão destes conceitos para ações de semigrupos em espaços admissíveis. Apresentaremos os conceitos de prolongamento, conjuntos limites prolongacionais, estabilidade de Poisson, pontos não-dispersivos, instabilidade de Poisson e pontos-dispersivos para ações de semigrupos. Provaremos a principal propriedade de um ponto não-dispersivo, ou seja, o ponto é não-dispersivo se, e somente se, este ponto pertence ao seu conjunto limite prolongacional e mostraremos quais condições para que a ação é dispersiva se, e somente se, para todo ponto do espaço topológico, o prolongamento deste ponto é igual a sua órbita e não existem pontos quase periódicos. Em seguida, apresentaremos algumas aplicações para sistemas de controle e fibrados.

Palavras Chaves: Recursividade, Dispersividade, Estabilidade de Poisson, Instabilidade de Poisson, Prolongamentos, Conjuntos Limites Prolongacionais, Ações de Semigrupos, Espaços Admissíveis, Sistemas de Controle, Espaços Fibrados, Sistemas Dinâmicos e Sistemas Semi-Dinâmicos.

Abstract

The recursive and dispersive concepts for dynamical systems in metric spaces are related to Poisson stability, non-wandering points, Poisson instability and dispersive points. The present thesis extends these concepts to semigroup actions on admissible spaces. We present the concepts of prolongation, prolongational limit sets, Poisson stability, non-wandering points, Poisson instability and dispersive points for semigroups actions. Prove the main property of a non-dispersive point, i.e., the point is non-dispersive if, and only if, this point belongs to the whole prolongational limit and show conditions for which the action is dispersive if, and only if, for every point of the topological space, the prolongation of this point is equal to its orbit and there are not almost periodic points. We also present some applications to control systems and fiber bundles.

Key Words: Recursive, Dispersive, Poisson Stability, Poisson Instability, Prolongation, Prolongational limit sets, Semigroups Actions, Admissible Spaces, Control Systems, Fiber Bundles, Dynamical Systems and Semi-Dynamical Systems.

Introdução

O estudo dos conceitos de dispersividade e recursividade em sistemas dinâmicos tem como ferramenta os conjuntos limites, prolongamentos e conjuntos limites prolongacionais. Estes conjuntos descrevem o comportamento assintótico das trajetórias no espaço de fase. Neste trabalho, iremos estender estes conceitos para ações de semigrupos em espaços admissíveis, referente a uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos do semigrupo, que está relacionada com as propriedades de direção e invariança do semigrupo.

A ideia de considerar uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos do semigrupo para definir conceitos dinâmicos se deve primeiramente a Braga Barros e San Martin em [3], que introduziram o conceito de conjunto $\mathcal{F}$-controlável por cadeias. Este conceito foi estudado em termos de uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de um semigrupo agindo em um espaço métrico. O estudo de ações de semigrupos em espaços admissíveis surgiu com Braga Barros e Souza em [4] e [5], com a finalidade de estender os conceitos de atrator e recorrência por cadeias para ações de semigrupos em espaços topológicos. Para esse fim, houve a necessidade do espaço topológico possuir uma família de coberturas abertas admissível, conceito primeiramente idealizado por Patrão e San Martin em [11] e [12]. Com a mesma metodologia surgiram os trabalhos [2], [6], [15], [16] e [17].

No primeiro capítulo, desenvolvemos resultados de Souza em [13] e de Braga Barros; Rocha e Souza em [7], sobre espaços admissíveis. Iniciamos o trabalho apresentando o conceito de família admissível e espaços admissíveis. Em seguida definimos o conceito de $\mathcal{U}$-vizinhança de um conjunto, onde $\mathcal{U}$ é uma família de coberturas abertas. Mostramos que dado um espaço admissível M, a coleção de todas as $\mathcal{U}$-vizinhanças, onde $\mathcal{U}$ pertence a uma família admissível de M, é uma base para uma topologia de M e esta topologia coincide com a de M. Provamos que se M é um espaço paracompacto e Hausdorff então a família de todas as coberturas abertas de M é admissível. Finalizamos a seção de espaços admissíveis, provando que todos espaços uniformes são espaços admissíveis, ou seja, existe uma classe enorme de espaços topológicos que possuem uma família admissível. Na segunda seção, desenvolvemos uma breve introdução sobre convergência de redes, e mostramos algumas propriedades de convergência de redes relacionadas com espaços admissíveis.

No segundo capítulo abordamos os estudos de comportamento assintótico para ações de semigrupos em espaços topológicos desenvolvido em [3], [4] e [5], onde são definidos órbitas progressivas e regressivas de um conjunto e as propriedades de invariança. Definimos conjuntos minimais e algumas de suas propriedades. Em seguida, apresentamos a definição dos conjuntos omega-limites para ações de semigrupos referente a uma família de subconjuntos do semigrupo, mostramos uma definição equivalente envolvendo redes e que a definição feita para ações de semigrupos generaliza o conceito de conjuntos omegas-limites para sistemas dinâmicos. Apresentamos as hipóteses necesárias sobre a família de subconjuntos do semigrupo para estabelecermos quando os conjuntos omega-limites possuem as propriedades de invariança e mostramos algumas relações entre conjuntos minimais e conjuntos limites. Na segunda seção, apresentamos os conceitos de prolongamentos e conjuntos limites prolongacionais para ações de semigrupos desenvolvidos por Braga Barros; Rocha e Souza em [7] e Souza e Tozatti em [20]. Iniciamos definindo conjuntos prolongacionais e conjuntos limites prolongacionais para ações de semigrupos em espaços admissíveis, mostramos definições equivalentes envolvendo redes e mostramos que estes conceitos generalizam os de sistemas dinâmicos. Concluimos mostrando sobre quais hipóteses os conjuntos limites prolongacionais satisfazem as propriedades de invariança.

Desenvolvemos no terceiro capítulo os conceitos de recursividade e dispersividade para ações de semigrupos apresentados por Souza e Tozatti em [20]. Iniciamos com os conceitos de recursividade para a ação de semigrupo em um espaço topológico, referente a uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos do semigrupo. Em seguida, apresentamos estabilidade de Poisson, definimos o que é um ponto $\mathcal{F}$-Poisson estável, relacionamos este conceito com os conjuntos limites e mostramos propriedades entre pontos quase periódicos e pontos $\mathcal{F}$-Poisson estáveis. Continuamos o estudo definindo pontos $\mathcal{F}$-não dispersivos e mostramos a principal relação com os conjuntos limites prolongacionais, ou seja, um ponto é $\mathcal{F}$-não dispersivo se, e somente se, ele pertence ao seu conjunto limite prolongacional. Provamos sobre quais hipóteses os pontos pertencentes ao conjunto omega-limite de um ponto são $\mathcal{F}$-não dispersivos, mostramos que os pontos pertencentes ao fecho do conjunto dos pontos $\mathcal{F}$-progressivamente Poisson estáveis ou $\mathcal{F}$-regressivamente Poisson estáveis são $\mathcal{F}$-não dispersivos. Provamos que para um espaço métrico completo, onde a ação é aberta e sobrejetiva e todos os pontos são $\mathcal{F}$-não dispersivos, o conjunto dos pontos $\mathcal{F}$-Poisson estáveis é um conjunto denso do espaço. Expomos os conceitos de dispersividade para ações de semigrupos, definindo quando uma ação é Poisson instável, completamente instável e $\mathcal{F}$-dispersiva. Demonstramos as principais propriedades para que a ação é $\mathcal{F}$-dispersiva, ou seja, a ação é $\mathcal{F}$-dispersiva se, e somente se, todos os conjuntos limites prolongacionais são vazios e mostramos quando o semigrupo é um espaço topológico, onde a família $\mathcal{F}$ satisfaz certas hipóteses, a ação é $\mathcal{F}$-dispersiva se, e somente se, para todo ponto do espaço topológico, o prolongamento deste ponto é igual a sua órbita e não existem pontos quase periódicos.

O quarto capítulo é dedicado ao trabalho de Souza e Tozatti em [19], onde são abordados prolongamentos, conjuntos limites prolongacionais, conceitos de recursividade e dispersividade para sistemas de controle. Neste capítulo apresentamos a estrutura necessária para aplicarmos os resultados expostos nos Capítulos 2 e 3, referente ao comportamento assintótico das concatenações das soluções do sistema.

No quinto capítulo, apresentamos ações de semigrupos em fibrados. Os conceitos deste capítulo foram estudados em [5], [12], [14], [17]. Iniciamos introduzindo os conceitos básicos de fibrados associados a um fibrado principal, ações de semigrupos em fibrados e aplicações equivariantes. Mostramos algumas propriedades sobre estabilidade de Poisson e pontos não-dispersivos em fibrados. Provamos que se um ponto no espaço total é $\mathcal{F}$-não dispersivo então a sua projeção no espaço base também será $\mathcal{F}$-não dispersivo. Expomos um exemplo de um sistema semi-dinâmico dispersivo que induz um sistema semi-dinâmico não-dispersivo. Encerramos o capítulo definindo o conceito de cociclo e um exemplo que mostra uma forma de construir ações de semigrupos em fibrados principais triviais por meios de cociclos.

O sexto capítulo é sobre o estudo de dispersividade e recursividade para sistemas semi-dinâmicos em fibrados, referente ao trabalho de Souza e Tozatti em [21]. Todo o capítulo é desenvolvido tendo como pré requisitos os Capítulos 2,3 e 5, mostrando quais relações existem entre espaço total, espaço base, fibra e espaço associado referente as propriedades de dispersividade e recursividade. Apresentamos as condições necessárias para provar que o sistema semi-dinâmico no espaço base é dispersivo se, e somente se, não existem pontos quase periódicos e o sistema semi-dinâmico no fibrado associado é dispersivo.

Sumário

Capítulo 1

Espaços Admissíveis

Para o desenvolvimento dos estudos, apresentaremos uma estrutura básica dos espaços topológicos onde serão desenvolvidos os conceitos de recursividade e dispersividade para ações de semigrupos. Na primeira seção deste capítulo, apresentaremos o conceito de família admissível de um espaço topológico e suas propriedades. Mostraremos que todo espaço topológico uniforme possui uma família de coberturas abertas admissível. Temos como referência os artigos, [7] e [13]. Na segunda seção, será apresentado uma breve introdução sobre convergência de redes e algumas propriedades importantes para o desenvolvimento do assunto.

1.1 Família Admissível de Coberturas

Nesta seção, apresentaremos o conceito de família de coberturas abertas admissível de um espaço topológico. Mostraremos algumas propriedades topológicas e quais classes de espaços topológicos possuem uma família de coberturas abertas admissível.

Inicialmente, fixados M um espaço topológico e duas coberturas abertas $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ de M, denotaremos por $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{U}$ se $\mathcal{V}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$ se para quaisquer $V, V' \in \mathcal{V}$, com $V \cap V' \neq \varnothing$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \cup V' \subset U$. Observe que $\leqslant$ é uma pré-ordem no conjunto das coberturas abertas de M. Denotaremos por $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$ a cobertura

$$\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} = \{U \cap V : U \in \mathcal{U} \; e \; V \in \mathcal{V}\}.$$

Por construção, temos que $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} \leqslant \mathcal{U}$ e $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} \leqslant \mathcal{V}$.

Para um subconjunto C de M, definimos o conjunto

$$[\mathcal{U}, C] = \{U \in \mathcal{U} : C \cap U \neq \varnothing\}.$$

Definição 1. *Sejam V um aberto de M e K um subconjunto compacto de M contido em V. Dizemos que uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de M é K-**subordinada** a V se todo elemento de $\mathcal{U}$ que intercepta K está contido em V, ou seja, se $U \in [\mathcal{U}, K]$, então $U \subset V$.*

Definição 2. *Uma família $\mathcal{O}$ de coberturas abertas de M é **admissível** se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$;*

2. *dado um aberto $V \subset M$ e dado um compacto $K \subset M$ contido em V, então existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ que é K-subordinada a V.*

3. *dadas $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ que refina simultaneamente $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$.*

Definição 3. *Um espaço topológico M é um **espaço admissível** se M possui uma família admissível.*

A seguir definiremos um conjunto que é uma ferramenta importante para o desenvolvimento do trabalho. Este conjunto tem a propriedade de vizinhança aberta referente a um conjunto fixado.

Definição 4. *Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de M. Chamaremos de $\mathcal{U}$-**vizinhança** de um subconjunto C de M, o conjunto*

$$\mathrm{B}(C,\mathcal{U}) = \{y \in M : \textit{existem } x \in C \textit{ e } U \in \mathcal{U} \textit{ tais que } x, y \in U\} = \bigcup_{U \in [\mathcal{U}, C]} U.$$

O conjunto $\mathrm{B}(C,\mathcal{U})$ definido acima é conhecido em geral como *a estrela* de C com respeito a cobertura $\mathcal{U}$. Observe que $\mathrm{B}(C,\mathcal{U})$ é um conjunto aberto. Para $x \in M$, $\mathrm{B}(\{x\},\mathcal{U})$ será denotado por $\mathrm{B}(x,\mathcal{U})$.

Definição 5. *Sejam M um espaço topológico, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{U}$ coberturas de M. Dizemos que $\mathcal{V}$ é um* ***refinamento estrela*** *de $\mathcal{U}$ se para cada $V \in \mathcal{V}$, $\mathrm{B}(V, \mathcal{V}) \subset U$ para algum $U \in \mathcal{U}$. Notação $\mathcal{V}* \leq \mathcal{U}$.*

Sobre a definição acima, temos que $\mathcal{V}* \leqslant \mathcal{U}$ implica $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. De fato, para V, $V' \in \mathcal{V}$ onde $V \cap V' \neq \emptyset$, temos que $V \cup V' \subset B(V, \mathcal{V})$. Como $\mathcal{V}* \leqslant \mathcal{U}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\mathrm{B}(V, \mathcal{V}) \subset U$ então $V \cup V' \subset U$, mostrando que $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Mas a recíproca nem sempre vale, como no exemplo a seguir.

Exemplo 1. *Dado $\mathbb{R}$ com a topologia usual, seja a cobertura $\mathcal{U} = \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$. Temos que $\mathcal{U} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$, mas $\mathcal{U}* \leqslant \mathcal{U}$ é falso. De fato, sejam $(-n_1, n_1), (-n_2, n_2) \in \mathcal{U}$. Para $n = max\{n_1, n_2\}$ temos que $(-n_1, n_1) \cup (-n_2, n_2) \subset (-n, n) \in \mathcal{U}$, provando $\mathcal{U} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Como $\mathrm{B}((-n, n), \mathcal{U}) = \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que não existe $(-n, n) \in \mathcal{U}$ tal que $\mathrm{B}((-n, n), \mathcal{U}) \subset (-n, n)$, mostrando que $\mathcal{U}* \leqslant \mathcal{U}$ é falso.*

Na proposição a seguir, apresentamos uma propriedade sobre a segunda condição da Definição 2. Proposição se encontra em [7] e [23].

Proposição 1. *Seja $\mathcal{O}$ uma família de coberturas abertas admissível de M. Dados um compacto $K \subset M$, um aberto $V \subset M$ que contém K e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, então $\mathcal{U}$ é K-subordinada a V se e somente se $\mathrm{B}(K, \mathcal{U}) \subset V$.*

Demonstração: A equivalência é imediata a partir do fato que

$$\mathrm{B}(K, \mathcal{U}) = \bigcup_{W \in [\mathcal{U}, K]} W.$$

□

O próximo lema, mostrado em [7] e [23], destaca uma importante característica das coberturas que satisfazem a primeira exigência da Definição 2.

Lema 1. *Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ duas coberturas abertas de M tais que $\mathcal{U} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{V}$ e C um subconjunto de M. Então, $\overline{\mathrm{B}(C, \mathcal{U})} \subset \mathrm{B}(C, \mathcal{V})$.*

Demonstração: Seja $x \in \overline{\mathrm{B}\,(C,\mathcal{U})}$. Então, existem $x_{\mathcal{U}} \in \mathrm{B}\,(x,\mathcal{U}) \cap \mathrm{B}\,(C,\mathcal{U})$ e $c \in C$ tais que $x_{\mathcal{U}} \in \mathrm{B}\,(c,\mathcal{U})$. Por definição, existem $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ tais que $x, x_{\mathcal{U}} \in U_1$ e $c, x_{\mathcal{U}} \in U_2$. Como $\mathcal{U} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{V}$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $U_1 \cup U_2 \subset V$, de modo que $c, x \in V$. Isso significa que $x \in \mathrm{B}\,(c,\mathcal{V}) \subset \mathrm{B}\,(C,\mathcal{V})$ provando o resultado. □

No teorema a seguir, retirado de [23], mostraremos a relação entre a topologia do espaço M e o conjunto de todas as $\mathcal{U}$-vizinhanças $\mathrm{B}(x,\mathcal{U})$, onde $x \in M$ e $\mathcal{U}$ pertence a uma família de coberturas abertas admissível de M.

Teorema 1. *Seja (M, τ) um espaço topológico e $\mathcal{O}$ uma família de coberturas abertas admissível de M. A coleção de todas as $\mathcal{U}$-vizinhanças $\mathrm{B}\,(x,\mathcal{U})$, com $x \in M$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, é uma base para uma topologia em M. Essa topologia coincide com a topologia inicial de M.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{B}_{\mathcal{O}} = \{\mathrm{B}\,(x,\mathcal{U}) : x \in M \text{ e } \mathcal{U} \in \mathcal{O}\}$. Dado $x \in M$, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $x \in \mathrm{B}\,(x,\mathcal{U}) \subset M$. Agora, sejam $\mathrm{B}\,(x,\mathcal{U}), \mathrm{B}\,(y,\mathcal{V}) \in \mathfrak{B}_{\mathcal{O}}$ dois elementos de $\mathfrak{B}_{\mathcal{O}}$ que possuem intersecção e tome $z \in \mathrm{B}\,(x,\mathcal{U}) \cap \mathrm{B}\,(y,\mathcal{V})$. Como $\mathcal{O}$ é admissível e $\mathrm{B}\,(x,\mathcal{U}) \cap \mathrm{B}\,(y,\mathcal{V})$ é um conjunto aberto de M, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathrm{B}\,(z,\mathcal{W}) \subset \mathrm{B}\,(x,\mathcal{U}) \cap \mathrm{B}\,(y,\mathcal{V})$. Isso mostra que $\mathfrak{B}_{\mathcal{O}}$ é uma base para uma topologia em M. Denote por $\tau_{\mathcal{O}}$ a topologia gerada por $\mathfrak{B}_{\mathcal{O}}$. Mostraremos que $\tau = \tau_{\mathcal{O}}$. Seja $\mathfrak{B}$ uma base para a topologia τ. Tome $x \in M$ e $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B$. Como $\mathcal{O}$ é admissível, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathrm{B}\,(x,\mathcal{U}) \subset B$, de modo que $\tau_{\mathcal{O}} \supset \tau$. Reciprocamente, sejam $x \in M$ e $\mathrm{B}\,(y,\mathcal{U}) \in \mathfrak{B}_{\mathcal{O}}$ tais que $x \in \mathrm{B}\,(y,\mathcal{U})$. Como $\mathrm{B}\,(y,\mathcal{U}) \in \tau$, existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B \subset \mathrm{B}\,(y,\mathcal{U})$, de forma que $\tau \supset \tau_{\mathcal{O}}$. Portanto, $\tau = \tau_{\mathcal{O}}$. □

Referente ao resultado apresentado, se $\mathcal{O}'$ é uma outra família de coberturas abertas admissível de M, então as topologias geradas por $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ coincidem. Além disso, concluímos que um subconjunto U de M é aberto em M se e somente se, para cada $x \in U$, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathrm{B}\,(x,\mathcal{V}) \subset U$.

O próximo resultado diz que se M é um espaço topológico paracompacto e Hausdorff, então a família de todas as coberturas abertas de M é admissível. A demonstração deste resultado foi retirada de [10, pag. 170]. Para provar este resultado, usaremos um teorema encontrado em [24, Teorema 20.14] que será enunciado a seguir.

Teorema 2. *Seja M um T_1-espaço. Então M é paracompacto se, e somente se, toda cobertura aberta de M possui um refinamento estrela aberto.*

Teorema 3. *Se M é um espaço paracompacto e Hausdorff então a família de todas as coberturas abertas de M é admissível.*

Demonstração: Denote por $\mathcal{O}$ a família de todas coberturas abertas de M. Como M é paracompacto temos pelo Teorema 2, que para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V}* \leqslant \mathcal{U}$. Sabendo que $\mathcal{V}* \leqslant \mathcal{U}$ implica $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$, então a primeira condição de família admissível é satisfeita. Para mostrar a segunda condição de família admissível, sejam Y um subconjunto aberto de M e K um subconjunto compacto de M que está contido em Y. Como M é Hausdorff, K é um subconjunto fechado de M e $\mathcal{U} = \{Y, M \backslash K\}$ é uma cobertura aberta de de M. Seja $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V}* \leqslant \mathcal{U}$. Se $V \in \mathcal{V}$ com $V \cap K \neq \emptyset$, então $V \not\subseteq M \backslash K$, ou seja, $V \subset Y$. Assim temos que $\mathrm{B}(K, \mathcal{V}) \subset Y$ e $\mathcal{V}$ é K-subordinado a Y, provando o segundo item da Definição 2. Por fim, se $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$, tome $\mathcal{W} = \mathcal{U} \wedge \mathcal{V} \in \mathcal{O}$. Assim $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{U}$ e $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$, mostrando que satisfaz a terceira condição de família admissível e concluindo que $\mathcal{O}$ é admissível. $\square$

A classe de espaços topológicos que possuem família de coberturas abertas admissível não se limita aos espaços paracompactos e Hausdorff. Em [[12], Proposição 3.19] foi demonstrado que espaços Tychonoff possuem uma família de coberturas abertas admissível. O que iremos mostrar nesta seção é que espaços topológicos uniformizáveis possuem uma família de coberturas abertas admissível, resultado retirado de [13]. A teoria de espaços topológicos uniformizáveis é referente ao Capítulo 9 de [24]. Em [[24], Teorema 38.2] está provado que um espaço topológico é uniformizável se, e somente se, é completamente regular. Logo qualquer espaço Tychonoff é um espaço uniformizável, mas nem todo espaço uniformizável é Tychonoff. De fato, seja M um espaço topológico com mais de um ponto, munido da topologia trivial. De acordo com [[24], Exemplo 35.8], M é uniformizável e conforme [[24], Exemplo 13.2], M não é um T_0-espaço.

No próximo resultado, retirado de [13], mostramos que um T_0-espaço que possui uma família de coberturas abertas admissível é Hausdorff.

Proposição 2. *Se M é um T_0-espaço que admite uma família $\mathcal{O}$ de coberturas abertas admissível, então M é Hausdorff.*

Demonstração: Sejam $x, y \in M$ e V um subconjunto aberto de M tal que $x \in V$ e $y \notin V$. Escolha $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tais que $\mathcal{U}$ é $\{x\}$-subordinada a V e $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Agora sejam $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ tais que $x \in V_1$ e $y \in V_2$. Mostraremos que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. De fato, se $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, então existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V_1 \cup V_2 \subset U$, pois $\mathcal{V} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Assim, temos que $x, y \in U$. Como $\mathcal{U}$ é $\{x\}$-subordinada a V e $x \in V$, então $U \subset V$, ou seja, $x, y \in V$, o que contradiz a hipótese. Portanto, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, concluindo que M é Hausdorff. □

Com o resultado acima, podemos afirmar que se M é no máximo um T_1-espaço e não Hausdorff, então M não possui família de coberturas abertas admissível.

A partir de agora, assumiremos que M é um espaço uniforme e $\mathcal{O}$ a família de todas as *coberturas uniformes* de M (ver [[24], Def. 36.1]). De acordo com a Proposição 36.2 de [[24]], a família $\mathcal{O}$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. Se $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{O}$ então existe $\mathcal{U}_3 \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{U}_3* \leqslant \mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_3* \leqslant \mathcal{U}_2$,
2. Se $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{U}'$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ então $\mathcal{U}' \in \mathcal{O}$.

Cada membro desta família é chamada de *cobertura uniforme*. Uma *base* de $\mathcal{O}$ é qualquer subcoleção $\mathcal{O}'$ de $\mathcal{O}$ tal que

$$\mathcal{O} = \{\mathcal{U} : \mathcal{U} \text{ é uma cobertura de } M \text{ e } \mathcal{U}' \leqslant \mathcal{U} \text{ para algum } \mathcal{U}' \in \mathcal{O}'\}.$$

A demonstração do teorema que será enunciado se encontra em [[24], 36.6].

Teorema 4. *Se $\mathcal{O}'$ é uma base da família $\mathcal{O}$ de M, então os conjuntos $B(x,\mathcal{U})$ onde $\mathcal{U} \in \mathcal{O}'$ formam uma base de vizinhanças de x na topologia uniforme de M.*

A seguir mostraremos um resultado de [13], onde todo espaço uniforme possui uma família de coberturas abertas admissível.

Teorema 5. *Se M é um espaço uniforme então existe uma família de coberturas abertas admissível de M.*

Demonstração: Sejam M um espaço uniforme e $\mathcal{O}$ uma base da família de todas as coberturas uniformes de M. Para $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$, temos que existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{W}* \leqslant \mathcal{U}$ e $\mathcal{W}* \leqslant \mathcal{V}$. Como $\mathcal{W}* \leqslant \mathcal{U}$ implica que $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$ e esta condição implica em $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{U}$. Então temos que $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$, $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{U}$ e $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$, para quaisquer $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}$, provando a primeira e terceira condição de família de coberturas abertas admissível. Seja $Y \subset M$ um conjunto aberto e K um compacto de M tal que K está contido em Y. Pelo Teorema 4, os conjuntos $\mathrm{B}(x,\mathcal{U})$ onde $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ formam uma base de vizinhanças de x na topologia uniforme de M. Assim, para cada $x \in K$ podemos tomar $\mathcal{U}_x \in \mathcal{O}$ tal que $\mathrm{B}(x,\mathcal{U}_x) \subset Y$. Note que $K \subset \bigcup_{x\in K} \mathrm{B}(x,\mathcal{U}_x)$, ou seja, os conjuntos $\mathrm{B}(x,\mathcal{U}_x)$ com $x \in K$ formam uma cobertura aberta de K. Como K é compacto, existem $x_1, ..., x_n \in K$ tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}(x_i,\mathcal{U}_{x_i})$. Agora tome $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{U}_{x_i}$ para todo $i = 1, ..., n$. Assim, dado $V \in [\mathcal{V}, K]$ temos que $x_i \in V$ para algum $i = 1, ..., n$. De fato, suponha que $x_i \notin V$ para todo $i = 1, ..., n$. Então $V \cap \mathrm{B}(x_i,\mathcal{U}_{x_i}) = \emptyset$ para todo $i = 1, ..., n$, ou seja,

$$V \subset \bigcap_{i=1}^{n} (M \setminus \mathrm{B}(x_i,\mathcal{U}_{x_i})) = M \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}(x_i,\mathcal{U}_{x_i}) \subset M \setminus K,$$

que contradiz a hipótese de $V \in [\mathcal{V}, K]$. Como $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{U}_i$, então existe $U \in \mathcal{U}_i$ tal que $V \subset U \subset \mathrm{B}(x_i,\mathcal{U}_{x_i}) \subset Y$. Portanto, $\mathcal{V}$ é K-subordinado a Y, provando a segunda condição de família de coberturas abertas admissível e finalizando o teorema. $\square$

1.2 Convergência de redes

Nesta seção, introduziremos o conceito de convergência de redes em espaços topológicos, teoria encontrada em [[24], Capítulo 11]. Apresentaremos algumas propriedades de redes em espaços admissíveis.

Inicialmente, assumiremos que M é um espaço topológico que possui uma família $\mathcal{O}$ de coberturas abertas admissível. Agora, comentaremos algumas definições e notações de redes e subredes. Seja Λ um conjunto e $\prec$ uma pré-ordem em Λ. Dizemos que Λ é um **conjunto dirigido** se, para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\lambda \succ \lambda_1$ e $\lambda \succ \lambda_2$. Neste caso, dizemos que $\prec$ é uma **direção** em Λ. Uma **rede** em M é uma aplicação $x : \Lambda \longrightarrow M$. É usual denotar uma rede $x : \Lambda \longrightarrow M$ por $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ou (x_λ). Uma **subrede** de $x : \Lambda \longrightarrow M$ é uma rede da forma $x \circ \phi : \Sigma \longrightarrow X$, onde Σ é um conjunto dirigido e $\phi : \Sigma \longrightarrow \Lambda$ é uma aplicação **crescente** e **cofinal**, isto é,

1. se $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$, $\sigma_1 \prec \sigma_2$, então $\phi(\sigma_1) \prec \phi(\sigma_2)$ (ϕ é crescente) e
2. dado $\lambda \in \Lambda$, existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $\lambda \prec \phi(\sigma)$ (ϕ é cofinal).

Dizemos que uma rede (x_λ) **converge** a $x \in M$ se para qualquer vizinhança U de x em M, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que, se $\lambda \succ \lambda_0$, então $x_\lambda \in U$.

Referente a definição de convergência de redes, como $\mathrm{B}(x, \mathcal{U})$ é aberto, para toda cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, temos que uma rede (x_λ) em M converge para $x \in M$ se, e somente se, para toda cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que, se $\lambda \succcurlyeq \lambda_0$, então $x_\lambda \in \mathrm{B}(x, \mathcal{U})$.

O terceiro item da Definição 2 permite trabalhar com redes tendo como conjunto dirigido a família $\mathcal{O}$. A relação em $\mathcal{O}$ que a torna um conjunto dirigido é a ordem contrária a dada por refinamentos. Em outras palavras, a pré-ordem em $\mathcal{O}$ definida por

$$\mathcal{U} \preccurlyeq \mathcal{V} \text{ se e somente se } \mathcal{V} \leqslant \mathcal{U}, \text{ com } \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O},$$

torna a família $\mathcal{O}$ um conjunto dirigido. Daqui em diante, sempre que trabalharmos com redes indexadas em $\mathcal{O}$, utilizaremos essa pré-ordem. Além disso, escreveremos $\mathcal{V} \succcurlyeq \mathcal{U}$ com o mesmo significado de $\mathcal{U} \preccurlyeq \mathcal{V}$.

Com estas observações temos os seguintes lemas referente aos trabalhos [7] e [23].

Lema 2. *Seja $x \in M$. Se para cada $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, tomarmos $x_{\mathcal{V}} \in \mathrm{B}(x, \mathcal{V})$, então $x_{\mathcal{V}} \longrightarrow x$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Observe que, se $\mathcal{V} \succcurlyeq \mathcal{U}$ então $\mathrm{B}(x, \mathcal{V}) \subset \mathrm{B}(x, \mathcal{U})$. Logo, $x_{\mathcal{V}} \in \mathrm{B}(x, \mathcal{U})$ e segue o resultado. □

Uma generalização do lema anterior para conjuntos compactos é apresentada a seguir.

Lema 3. *Seja K um subconjunto compacto de M. Para cada $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, tome $x_{\mathcal{V}} \in \mathrm{B}(K, \mathcal{V})$. Então, existe uma subrede $\left(x_{\phi(\sigma)}\right)_{\sigma \in \Sigma}$ de $(x_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V} \in \mathcal{O}}$ que converge a algum ponto de K.*

Demonstração: Inicialmente, observe que

$$\mathrm{B}(K, \mathcal{V}) = \bigcup_{k \in K} \mathrm{B}(k, \mathcal{V}),$$

para toda cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$. Assim, para cada $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, existe $k_{\mathcal{V}} \in K$ tal que $x_{\mathcal{V}} \in \mathrm{B}(k_{\mathcal{V}}, \mathcal{V})$. Como K é compacto, existe uma subrede $\left(k_{\phi(\sigma)}\right)_{\sigma \in \Sigma}$ de $(k_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V} \in \mathcal{O}}$ que converge a algum ponto de K, digamos $k_{\phi(\sigma)} \longrightarrow k \in K$. Vamos mostrar que $x_{\phi(\sigma)} \longrightarrow k$. Seja $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e tome $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Para a $\mathcal{W}$-vizinhança $\mathrm{B}(x, \mathcal{W})$ de x, existe $\sigma_1 \in \Sigma$ tal que, se $\sigma \succ \sigma_1$, então $k_{\phi(\sigma)} \in \mathrm{B}(k, \mathcal{W})$. Além disso, existe $\sigma_2 \in \Sigma$ tal que $\phi(\sigma_2) \succcurlyeq \mathcal{W}$ e existe $\sigma_0 \in \Sigma$ tal que $\sigma_0 \succ \sigma_1$ e $\sigma_0 \succ \sigma_2$. Note que $\phi(\sigma_0) \succcurlyeq \phi(\sigma_1)$ e $\phi(\sigma_0) \succcurlyeq \phi(\sigma_2)$. Fixe $\sigma \succ \sigma_0$. Temos que $k_{\phi(\sigma)} \in \mathrm{B}(k, \mathcal{W})$ e $x_{\phi(\sigma)} \in \mathrm{B}\left(k_{\phi(\sigma)}, \phi(\sigma)\right) \subset \mathrm{B}\left(k_{\phi(\sigma)}, \mathcal{W}\right)$. Pela Definição 4, existem abertos $W_1, W_2 \in \mathcal{W}$ tais que $k_{\phi(\sigma)}, k \in W_1$ e $x_{\phi(\sigma)}, k_{\phi(\sigma)} \in W_2$. Como $\mathcal{W} \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{U}$ e $W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $W_1 \cup W_2 \subset U$. Assim, $x_{\phi(\sigma)}, k \in U$. Em outras palavras, $x_{\phi(\sigma)} \in \mathrm{B}(k, \mathcal{U})$.

Portanto, $x_{\phi(\sigma)} \longrightarrow k$. $\square$

Um outro fator relevante é que podemos relacionar fecho de um subconjunto M em termos de redes indexadas em $\mathcal{O}$. Mais precisamente, temos o seguinte lema.

Lema 4. *Seja C um subconjunto de M. Então $x \in \overline{C}$ se e somente se existe uma rede $(x_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}} \subset C$, tal que $x_{\mathcal{V}} \longrightarrow x$.*

Demonstração: Se existe uma rede $(x_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}} \subset C$ tal que $x_{\mathcal{V}} \longrightarrow x$, então pela definição de fecho temos que $x \in \overline{C}$. Por outro lado, se $x \in \overline{C}$, então, para cada cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, existe $x_{\mathcal{V}} \in \mathrm{B}\,(x, \mathcal{V}) \cap C$. Então, $(x_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}\in\mathcal{O}} \subset C$ e, pelo Lema 2, $x_{\mathcal{V}} \longrightarrow x$.

$\square$

Capítulo 2

Ações de Semigrupos em Espaços Topológicos

Sabendo que um semigrupo é um conjunto munido de uma operação interna que satisfaz a associatividade, neste capítulo apresentaremos os conceitos de conjuntos limites, prolongamentos e conjuntos limites prolongacionais, para a ação de um semigrupo em um espaço admissível. Em conjunto, definiremos os conceitos de invariança da ação do semigrupo e discutiremos sob quais hipóteses os conjuntos limites e os conjuntos limites prolongacionais são invariantes, além de algumas propriedades particulares dos mesmos.

2.1 Conjuntos limites

Nesta seção, apresentamos o conceito de ação de um semigrupo em um espaço topológico. Definiremos o conceito de conjunto limite para uma família de subconjuntos do semigrupo que age em um espaço topológico. Os resultados apresentados nesta seção são referentes aos trabalhos [4], [5], [6] e [14], exceto o Teorema 6, que relaciona conjuntos limites com o conceito de redes, um resultado deste trabalho.

Primeiro, começamos com as notações usuais de ações de semigrupos. Suponha que M é um espaço topológico e S um semigrupo.

Definição 6. *Uma **ação** (ação a esquerda) de S em M é uma aplicação*

$$\begin{array}{rrl} \mu: & S \times M \to & M \\ & (s,x) \mapsto & \mu(s,x) = sx \end{array}$$

*satisfazendo $s(ux) = (su)x$ para todo $x \in M$ e $u, s \in S$. Neste caso dizemos que S **age** em M.*

Denotaremos por $\mu_s : M \to M$ a aplicação definida como $\mu_s(x) = \mu(s, x)$. Assumiremos que μ_s é contínua para todo $s \in S$.

Agora, definiremos as órbitas para ações de semigrupos.

Definição 7. *Assumindo que S age em M, temos que para $x \in M$, os conjuntos*

$$Sx = \{y \in M;\ \text{existe } s \in S \text{ tal que } sx = y\} \text{ e}$$

$$S^*x = \{y \in M;\ \text{existe } s \in S \text{ tal que } sy = x\},$$

*são chamados respectivamente de **órbita** e **órbita regressiva** de S no ponto x.*

Dado $X \subset M$, definimos $SX = \bigcup_{x \in X} Sx$ e $S^*X = \bigcup_{x \in X} S^*x$.

Para um subconjunto não vazio X de M é usual dizer que:

1. *X é **progressivamente invariante** para a ação do semigrupo S se $SX \subset X$.*

2. *X é **regressivamente invariante** para a ação do semigrupo S se $S^*X \subset X$.*

3. *X é **invariante** para a ação do semigrupo S se este é progressivamente invariante e regressivamente invariante.*

Para $X \subset M$, é imediato verificar que SX e $\overline{SX}$ são progressivamente invariantes por S. De fato, se $z \in SX$, temos que existe $s \in S$ e $x \in X$ tal que $sx = z$. Assim para qualquer $t \in S$ temos $t(sx) = (ts)x \in SX$, logo $S(SX) \subset SX$, mostrando que SX é progressivamente invariante. Para o caso $\overline{SX}$, dado $s \in S$, segue por continuidade que

$$s\overline{SX} \subset \overline{sSX} \subset \overline{SX},$$

logo temos que $S\overline{SX} \subset \overline{SX}$.

Definição 8. *Dizemos que a ação do semigrupo S em um espaço topológico M é uma **ação aberta** se para todo $s \in S$ e todo conjunto aberto V de M, sV é um conjunto aberto em M.*

Proposição 3. *Se a ação do semigrupo S no espaço topológico M for aberta então o conjunto $\overline{S^*X}$ é regressivamente invariante se ele não for vazio.*

Demonstração: Dado $z \in S^*\overline{S^*X}$, existe $s \in S$ e $u \in \overline{S^*X}$ tal que $sz = u$. Seja V uma vizinhança de z. Sabendo que a ação de S é aberta em M temos que sV é um aberto e sV é uma vizinhança de u. Como $u \in \overline{S^*X}$ temos que $sV \cap S^*X \neq \emptyset$. Tome $b \in sV \cap S^*X$. Então existe $v \in V$ tal que $sv = b$ e existe $s' \in S$ e $x \in X$ tal que $s'b = x$. Assim temos que $s'sv = x$ para algum $x \in X$, ou seja, $(s's)v = x$. Como $s's \in S$ segue que $v \in S^*X$, concluindo que $V \cap S^*X \neq \emptyset$ e que $z \in \overline{S^*X}$. Portanto $\overline{S^*X}$ é regressivamente invariante. □

Definição 9. *Um subconjunto $X \subset M$ é um **conjunto minimal** para a ação de S se*

1. *X é não vazio, fechado e progressivamente invariante pela ação de S.*
2. *X é minimal (com respeito a inclusão) satisfazendo a propriedade 1.*

Usando a definição apresentada acima, temos o seguinte resultado.

Proposição 4. *Um subconjunto não vazio X de M é um conjunto minimal pela ação de S se, e somente se, $X = \overline{Sx}$ para todo $x \in X$.*

Demonstração: De fato, suponha primeiro que X é um conjunto minimal para a ação de S. Então $Sx \subset X$ para todo $x \in X$ e consequentemente $\overline{Sx} \subset \overline{X} = X$. Mostramos anteriormente que $\overline{Sx}$ é fechado e progressivamente invariante. Usando o fato que X é minimal com respeito a inclusão satisfazendo a propriedade 1, obtemos que $\overline{Sx} = X$ para todo $x \in X$. Reciprocamente, suponha que $\overline{Sx} = X$ para todo $x \in X$. Temos de imediato que X é fechado e progressivamente invariante. Seja $X' \subset X$ satisfazendo a propriedade 1. Então $\overline{Sx'} \subset X'$ para todo $x' \in X'$. Como $x' \in X$ e, por hipótese, $\overline{Sx'} = X$, podemos concluir que $X' = X$. Portanto, X é minimal para a ação de S. $\square$

Definição 10. *Um semigrupo S é chamado **reversível a direita** se $Ss \cap St \neq \emptyset$ para todo $s, t \in S$; no caso em que $sS \cap tS \neq \emptyset$ para todo $s, t \in S$ o semigrupo S é chamado de **reversível a esquerda**. Um semigrupo S é chamado **reversível** se ele é reversível a direita e a esquerda.*

Proposição 5. *Seja S um semigrupo reversível a direita. Suponha que a ação de S em M é aberta. Então um subconjunto X de M é minimal para a ação de S se, e somente se, $\overline{S^*Sx} = X$ para todo $x \in X$.*

Demonstração: Suponha que X é minimal para a ação de S e tome $x \in X$. Como X é invariante e fechado, temos que $\overline{S^*Sx} \subset X$. Note que $\overline{S^*Sx}$ é regressivamente invariante, assim podemos tomar $t \in S$, $x \in \overline{S^*Sx}$ e uma vizinhança aberta V de tx. Como $\mu_t^{-1}(V)$ é uma vizinhança aberta de x, existe $y \in \mu_t^{-1}(V) \cap S^*Sx$, onde $ty \in V$ e $sy \in Sx$ para algum $s \in S$. Como S é reversível a direita, para $\tau \in Ss \cap St$ temos que $\tau y \in Ssy \cap Sty \subset Sx$. Logo $ty \in V \cap S^*SX$, resultando que $tx \in \overline{S^*Sx}$ e que $\overline{S^*Sx}$ é invariante. Pela minimalidade de X, segue que $\overline{S^*Sx} = X$. Reciprocamente, suponha que $\overline{S^*Sx} = X$ para todo $x \in X$. Então X é um subconjunto invariante e fechado de M. Seja Y um subconjunto não vazio de X que é fechado e invariante. Tomando um ponto $y \in Y$, temos $\overline{S^*Sy} \subset Y$. Desde que $\overline{S^*Sx} = X$ conclui-se que $X = Y$. Portanto X é um conjunto minimal para a ação de S. $\square$

De agora em diante, denotaremos por $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos do semigrupo S. Para um subconjunto X de M e $A \in \mathcal{F}$, definimos:

$$AX = \{y \in M; \text{ existe } s \in A \text{ e } x \in X \text{ tal que } sx = y\} \text{ e}$$

$$A^*X = \{y \in M; \text{ existe } s \in A \text{ e } x \in X \text{ tal que } sy = x\}.$$

Definição 11. *O conjunto* ω***-limite*** *de* $X \subset M$ *referente a família* $\mathcal{F}$ *é*

$$\omega(X, \mathcal{F}) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{AX}.$$

O conjunto ω^****-limite*** *de* X *referente a família* $\mathcal{F}$ *é*

$$\omega^*(X, \mathcal{F}) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A^*X}.$$

Os conjuntos ω*-limite e* ω^**-limite de* X *são chamados* ***conjuntos limite*** *de* X*.*

A seguir, definiremos algumas propriedades adicionais para família $\mathcal{F}$.

Definição 12. *Dizemos que:*

1. $\mathcal{F}$ *é uma* ***base de filtro*** *de* S*, se* $\emptyset \notin \mathcal{F}$ *e para cada* $A, B \in \mathcal{F}$*, existe* $C \in \mathcal{F}$ *tal que* $C \subset A \cap B$*;*

2. *uma rede* $(t_\lambda) \subset S$ *é* $\mathcal{F}$***-divergente****, se para todo* $A \in \mathcal{F}$ *existe* λ_0 *tal que* $\lambda \geq \lambda_0$ *implica* $t_\lambda \in A$*. Denotaremos por* $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$*.*

O conceito de família $\mathcal{F}$-divergente é retirada do artigo [22].

No próximo resultado, forneceremos uma definição equivalente de conjunto ω-limite usando as propriedades apresentadas na definição anterior.

Teorema 6. *Para M um espaço admissível com família admissível $\mathcal{O}$ e $\mathcal{F}$ uma base de filtro, dado $x \in M$,*

$$\omega(x, \mathcal{F}) = \{y \in M; \textit{ existe uma rede } (t_\lambda) \subset S \textit{ tal que } t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty \textit{ e } t_\lambda x \to y\}.$$

Demonstração: Dado $y \in \omega(x, \mathcal{F})$, temos que $y \in \overline{Ax}$ para todo $A \in \mathcal{F}$. Assim para cada $A \in \mathcal{F}$, existe uma rede $(z_{\lambda_A}) \subset M$ onde $z_{\lambda_A} = t_{\lambda_A}x$, com $t_{\lambda_A} \in A$ e $z_{\lambda_A} \to y$. Agora para cada $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ e $A \in \mathcal{F}$, tome λ_A tal que $t_{\lambda_A}x \in \mathrm{B}(y, \mathcal{V})$. Tome também a rede $(t_{\lambda_{A,\mathcal{V}}})$, onde cada elemento desta rede satisfaz as condições acima. A direção desta rede será a seguinte: $\lambda_{A,\mathcal{V}} \preccurlyeq \lambda_{B,\mathcal{U}}$ se $B \subset A$ e $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$. Note que esta direção está bem definida. De fato; Claro que $\lambda_{A,\mathcal{V}} \preccurlyeq \lambda_{A,\mathcal{V}}$. Se $\lambda_{A,\mathcal{V}} \preccurlyeq \lambda_{B,\mathcal{U}}$ e $\lambda_{B,\mathcal{U}} \preccurlyeq \lambda_{C,\mathcal{W}}$, temos que $C \subset B \subset A$ e $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$, ou seja, $\lambda_{A,\mathcal{V}} \preccurlyeq \lambda_{C,\mathcal{W}}$. E, para $\lambda_{A,\mathcal{V}}$ e $\lambda_{B,\mathcal{U}}$, existem $C \subset A \cap B$ e $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ e $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{U}$, pois $\mathcal{F}$ é uma base de filtro e $\mathcal{O}$ é uma família admissível de coberturas de M, o que implica em $\lambda_{C,\mathcal{W}} \succcurlyeq \lambda_{A,\mathcal{V}}$ e $\lambda_{C,\mathcal{W}} \succcurlyeq \lambda_{B,\mathcal{U}}$. Agora, note que $t_{\lambda_{A,\mathcal{V}}}x \to y$. Para mostrar isso, seja $\mathrm{B}(y,\mathcal{U})$ uma vizinhança de y. Por construção $t_{\lambda_{A,\mathcal{U}}}x \in \mathrm{B}(y,\mathcal{U})$. Assim para $\lambda_{B,\mathcal{V}} \succcurlyeq \lambda_{A,\mathcal{U}}$ temos $t_{\lambda_{B,\mathcal{V}}}x \in \mathrm{B}(y,\mathcal{V}) \subset \mathrm{B}(y,\mathcal{U})$. Portanto $t_{\lambda_{A,\mathcal{V}}}x \to y$. Note também que $t_{\lambda_{A,\mathcal{U}}} \to_{\mathcal{F}} \infty$. De fato, para cada $A \in \mathcal{F}$ temos que $t_{\lambda_{A,\mathcal{U}}} \in A$ para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Assim, se $\lambda_{B,\mathcal{V}} \succcurlyeq \lambda_{A,\mathcal{U}}$ então $B \subset A$ e $t_{\lambda_{B,\mathcal{V}}} \in A$. Para a inclusão oposta, se para $y \in M$ existe $(t_\lambda) \subset S$ com $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ e $t_\lambda x \to y$, então dado $A \in \mathcal{F}$ temos que existe λ_0 tal que $\lambda \succcurlyeq \lambda_0$ implica $t_\lambda \in A$, assim temos $(t_\lambda x)_{\lambda \succcurlyeq \lambda_0} \to y$, ou seja, $y \in \overline{Ax}$ para todo $A \in \mathcal{F}$, concluindo que $y \in \omega(x, \mathcal{F})$. $\square$

No exemplo a seguir, mostraremos que a Definição 11 generaliza o conceito de conjunto limite para fluxos e semi-fluxos.

Exemplo 2. *Seja M um espaço métrico e o semigrupo $S = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$, com operação interna da adição. Suponhamos que ϕ é um fluxo em M. Defina a ação a esquerda de S em M por $sx = \phi(s, x)$. Seja $\mathcal{F}$ a família de todos os conjuntos $A_t = \{s \in S; s \geq t\}$, com $t \geq 0$. A família $\mathcal{F}$ é chamada de* ***filtro de Frechet*** *de $\mathbb{R}$. Para $A_t \in \mathcal{F}$ temos*

$$A_tX = \{y \in M : \textit{existe } s \geq t \textit{ e } x \in X \textit{ com } \phi(s,x) = y\} = \bigcup_{s\geq t} \phi(s,X) \textit{ e}$$

$$A_t^*X = \{y \in M : \textit{existe } s \geq t \textit{ e } x \in X \textit{ com } \phi(s,y) = x\}$$

$$= \{y \in M : \textit{existe } s \geq t \textit{ e } x \in X \textit{ com } \phi^{-1}(s,x) = \phi(-s,x) = y\} = \bigcup_{r\leq -t} \phi(r,X).$$

Portanto,

$$\omega(X,\mathcal{F}) = \bigcap_{t>0}(\overline{\bigcup_{s\geq t} \phi(s,X)}) \textit{ e } \omega^*(X,\mathcal{F}) = \bigcap_{t>0}(\overline{\bigcup_{r\geq -t} \phi(r,X)})$$

que são os conjuntos limites usuais usados na teoria de fluxos. No caso onde o semigrupo é $S = \mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{Z}^+$ e tomando a família $\mathcal{F}$ como descrito acima, temos que os conjuntos limites são

$$\omega(X,\mathcal{F}) = \bigcap_{t\in S}(\overline{\bigcup_{s\geq t} \phi(s,X)}) \textit{ e } \omega^*(X,\mathcal{F}) = \bigcap_{t\in S}(\overline{\bigcup_{s\geq t} \phi^{-1}(r,X)}).$$

que são os conjuntos limites usados na teoria de sistema semi-dinâmicos.

Agora apresentaremos algumas hipóteses sobre a família $\mathcal{F}$ de subconjuntos do semigrupo S. Essas hipóteses são importantes para a discussão de invariança dos conjuntos limites.

Definição 13. *A família $\mathcal{F}$ satisfaz*

1. *A* ***hipótese*** *H_1, se para todo $s \in S$ e $A \in \mathcal{F}$ existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $sB \subset A$.*
2. *A* ***hipótese*** *H_2, se para todo $s \in S$ e $A \in \mathcal{F}$ existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $Bs \subset A$.*
3. *A* ***hipótese*** *H_3, se para todo $s \in S$ e $A \in \mathcal{F}$ existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset As$.*

Proposição 6. *Dados $x \in M$, $s \in S$ e $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de S, então:*

1. $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \omega(sx, \mathcal{F})$ *se $\mathcal{F}$ satisfaz H_3;*

2. $\omega(sx, \mathcal{F}) \subset \omega(x, \mathcal{F})$ *se $\mathcal{F}$ satisfaz H_2.*

Demonstração: Se $\mathcal{F}$ satisfaz H_3, para $s \in S$ e $A \in \mathcal{F}$, existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset As$. Assim, para $y \in \omega(x, \mathcal{F})$ temos $y \in \overline{Bx} \subset \overline{Asx}$. Pela arbitrariedade de $A \in \mathcal{F}$ temos $y \in \omega(sx, \mathcal{F})$. No item 2, a demonstração é análoga. □

A seguir, mostraremos sob quais hipóteses os conjuntos limites são progressivamente ou regressivamente invariante.

Proposição 7. *Suponha que a família $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_1. Então $\omega(X, \mathcal{F})$ é progressivamente invariante se este é não vazio.*

Demonstração: Sejam $z \in \omega(X, \mathcal{F})$, $s \in S$ e $A \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_1, existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $sB \subset A$. Pela definição de ω-limite, $z \in \overline{BX}$. Pela continuidade da ação de s temos que

$$sz \in \overline{sBX} \subset \overline{AX}.$$

Como vale para todo $A \in \mathcal{F}$, temos que $sz \in \omega(X, \mathcal{F})$ e $S\omega(X, \mathcal{F}) \subset \omega(X, \mathcal{F})$. Portanto $\omega(X, \mathcal{F})$ é progressivamente invariante. □

Observe que com as mesmas hipóteses da proposição anterior, se $x \in \omega(x, \mathcal{F})$ temos que $\omega(x, \mathcal{F}) = \overline{Ax}$ para todo $A \in \mathcal{F}$. De fato, como $\omega(x, \mathcal{F})$ é progressivamente invariante temos

$$Ax \subset Sx \subset S\omega(x, \mathcal{F}) \subset \omega(x, \mathcal{F}),$$

para todo $A \in \mathcal{F}$. Como $\omega(x, \mathcal{F})$ é fechado, temos que $\overline{Ax} \subset \omega(x, \mathcal{F})$ para todo $A \in \mathcal{F}$. Usando a definição de $\omega(x, \mathcal{F})$, temos que $\omega(x, \mathcal{F}) \subset Ax \subset \overline{Ax}$, para todo $A \in \mathcal{F}$.

Proposição 8. *Se a família $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_3 e $\omega^*(X, \mathcal{F})$ é não vazio, então $\omega^*(X, \mathcal{F})$ é progressivamente invariante.*

Demonstração: Tome $z \in \omega^*(X, \mathcal{F})$, $s \in S$ e $A \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_3 existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset As$. Aplicando a definição de ω-limite temos que $z \in \overline{B^*X}$. Seja U um aberto que contém sz. Pela continuidade da ação de s tem-se que $\mu_s^{-1}(U)$ é um aberto que contém z. Obtemos assim, $\mu_s^{-1}(U) \cap B^*X \neq \emptyset$. Tomando $w \in \mu_s^{-1}(U) \cap B^*X$, temos que existe $b \in B$ e $x \in X$ tal que $bw = x$. Além disso $sw \in U$. Como $B \subset As$ obtemos que $U \cap A^*X \neq \emptyset$, concluindo que $sz \in \overline{A^*X}$. Como A é arbitrário tem-se que $sz \in \overline{A^*X}$ para todo $A \in \mathcal{F}$, ou seja, $sz \in \omega^*(X, \mathcal{F})$, provando que $S\omega^*(X, \mathcal{F}) \subset \omega^*(X, \mathcal{F})$. Portanto $\omega^*(X, \mathcal{F})$ é progressivamente invariante. □

Proposição 9. *Suponha que a ação de S em M é aberta, $\omega^*(X, \mathcal{F})$ é não vazio e que a família $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_2. Então $\omega^*(X, \mathcal{F})$ é regressivamente invariante.*

Demonstração: Tomemos $A \in \mathcal{F}$, $z \in \omega^*(X, \mathcal{F})$ e $w \in S^*z$. Iremos mostrar que $w \in \overline{A^*X}$, obtendo assim que $w \in \omega^*(X, \mathcal{F})$, o que mostra o resultado. De fato, dado uma vizinhança aberta U de w existe $s \in S$ tal que $sw = z$. Como a ação é aberta tem-se que sU é uma vizinhança aberta de z. Pela hipótese H_2 existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $Bs \subset A$. Assim, $z \in \overline{B^*X}$ e obtemos que $sU \cap B^*X \neq \emptyset$. Temos também que existe $p \in U$ tal que $sp \in B^*X$. Portanto existe $b \in B$ tal que $b(sp) = (bs)p \in X$. Como $bs \in A$, temos que $U \cap A^*X \neq \emptyset$ e concluindo que $w \in \overline{A^*X}$. □

Aplicando a última proposição para o caso onde $X = \{x\}$ e $x \in \omega^*(x, \mathcal{F})$, temos que $\omega^*(x, \mathcal{F}) = \overline{A^*x}$ para todo $A \in \mathcal{F}$. De fato, como $\omega^*(x, \mathcal{F})$ é regressivamente invariante, usando o fato de que $x \in \omega^*(x, \mathcal{F})$ temos

$$A^*x \subset S^*x \subset S^*\omega^*(x, \mathcal{F}) \subset \omega^*(x, \mathcal{F}),$$

para todo $A \in \mathcal{F}$. Pela definição de ω^*-limite temos que $\omega^*(x, \mathcal{F}) \subset A^*x$ para todo $A \in \mathcal{F}$.

A seguir apresentamos uma relação entre conjuntos minimais e conjuntos limites.

Proposição 10. *Seja $\mathcal{F}$ uma família que satisfaz a hipótese H_1. Suponha que $X \subset M$ é um subconjunto minimal para a ação de S e que $\omega(x, \mathcal{F})$ é não vazio para todo $x \in X$. Então $\omega(x, \mathcal{F}) = X$ para todo $x \in X$. Reciprocamente temos que $\omega(x, \mathcal{F})$ é minimal se $\omega(x, \mathcal{F}) = X$ para todo $x \in X$ e $X \neq \emptyset$.*

Demonstração: Suponha que X é um conjunto minimal para a ação de S. Para $x \in X$, temos que $\omega(x, \mathcal{F}) \subset X$. Como $\omega(x, \mathcal{F})$ é não vazio, temos que $\omega(x, \mathcal{F})$ é fechado e progressivamente invariante. Assim, pela minimalidade de X que satisfaz estas propriedades, obtém-se que $\omega(x, \mathcal{F}) = X$. Por outro lado, suponha que $\omega(x, \mathcal{F}) = X$ para todo $x \in X$. De imediato temos que X é fechado e progressivamente invariante. Resta mostrar que é minimal com essas propriedades. Para isto, seja um subconjunto Y não vazio, progressivamente invariante e fechado de X e tome $y \in Y$. Como Y é progressivamente invariante temos que $\omega(y, \mathcal{F}) \subset Y$, mas por hipótese $\omega(y, \mathcal{F}) = X$. Assim $X \subset Y$ concluindo que X é um conjunto minimal pela ação de S. $\square$

Definição 14. *Dizemos que a família $\mathcal{F}$ é* ***ideal à direita****, se para todo $A \in \mathcal{F}$, A é um ideal a direita de S, ou seja, $SA \subset A$.*

É fácil ver que se $\mathcal{F}$ é ideal à direita então $\mathcal{F}$ satisfaz H_1.

Proposição 11. *Se $\mathcal{F}$ é ideal à direita e X é um conjunto minimal então $\omega(x, \mathcal{F}) = \overline{Ax} = \overline{Sx}$ para todo $x \in X$ e $A \in \mathcal{F}$.*

Demonstração: Como X é um conjunto minimal, pela Proposição 4, $\overline{Sx} = X$ para todo $x \in X$, assim $\overline{Ax} \subset \overline{Sx} = X$ para todo $x \in X$. Sabendo que $\mathcal{F}$ é ideal à direita, pela continuidade da ação, dado $A \in \mathcal{F}$, temos que $S\overline{Ax} \subset \overline{SAx} \subset \overline{Ax} \subset X$, ou seja, $\overline{Ax}$ é um subconjunto de X progressivamente invariante. Pela minimalidade de X temos que $X = \overline{Ax}$ para todo $A \in \mathcal{F}$ e $x \in X$. Portanto, pela definição de conjunto limite, temos

$$\omega(x, \mathcal{F}) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{Ax} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} X = X = \overline{Sx}.$$

□

2.2 Prolongamentos e Conjuntos Limites Prolongacionais

Nesta seção, apresentamos os conceitos de prolongamentos e conjuntos limites prolongacionais para ações de semigrupos em espaços admissíveis, assunto motivado pelo conceito de prolongamentos e conjuntos limites prolongacionais para sistemas dinâmicos apresentado em [1]. Sendo assim, assumiremos que S é um semigrupo agindo no espaço admissível Hausdorff M, $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de S e $\mathcal{O}$ a família admissível de M. Os resultados apresentados nesta seção tem como referência o artigo [7].

A seguir, definiremos primeiro prolongamento progressivo e primeiro prolongamento regressivo referente a um subconjunto do semigrupo.

Definição 15. *Dados $x \in M$ e A um subconjunto não vazio de S, chamaremos de **primeiro A-prolongamento progressivo** e **primeiro A-prolongamento regressivo** os respectivos subconjuntos:*

$$D(x, A) = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}} \overline{A\mathrm{B}(x,\mathcal{U})} \text{ e } D^*(x, A) = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}} \overline{A^*\mathrm{B}(x,\mathcal{U})}.$$

Nos próximos resultados, apresentaremos formulações equivalentes para a Definição 15.

Proposição 12. *Dados $x \in M$ e $A \subset S$, então*

$$D(x,A) = \{y \in M;\ \textit{existem redes } (t_{\mathcal{V}}) \subset A \textit{ e } (x_{\mathcal{V}}) \subset M \textit{ tais que } x_{\mathcal{V}} \to x \textit{ e } t_{\mathcal{V}} x_{\mathcal{V}} \to y\}.$$

Demonstração: Seja $y \in D(x,A)$. Então, $y \in \overline{A\mathrm{B}(x,\mathcal{U})}$, para toda cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Note que, fixadas $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, existe $z_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \in A\mathrm{B}(x,\mathcal{V})$ tal que $z_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \in \mathrm{B}(y,\mathcal{U})$, de modo que existem $t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \in A$ e $x_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \in \mathrm{B}(x,\mathcal{V})$ tais que $z_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} x_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$. Agora, considere as redes $\left(t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}\right) \subset \mathcal{S}$ e $\left(x_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}\right) \subset M$. Pelo Lema 3, $x_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}} \longrightarrow x$ e $t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}} x_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}} \longrightarrow y$. Reciprocamente, fixe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $y \in M$ para o qual existem redes $(t_{\mathcal{V}}) \subset A$ e $(x_{\mathcal{V}}) \subset M$ satisfazendo $x_{\mathcal{V}} \longrightarrow x$ e $t_{\mathcal{V}} x_{\mathcal{V}} \longrightarrow y$. Como $x_{\mathcal{V}} \longrightarrow x$, existe $\mathcal{V}_0 \in \mathcal{O}$ tal que, se $\mathcal{V} \succcurlyeq \mathcal{V}_0$, então $x_{\mathcal{V}} \in \mathrm{B}(x,\mathcal{U})$. Logo, $(t_{\mathcal{V}} x_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V} \succcurlyeq \mathcal{V}_0} \subset A\mathrm{B}(x,\mathcal{U})$. Isso mostra que $y \in \overline{A\mathrm{B}(x,\mathcal{U})}$, o que encerra a demostração. $\square$

Proposição 13. *Dados $x \in M$ e $A \subset S$, então*

$$D^*(x,A) = \{y \in M;\ \textit{existem redes } (t_{\mathcal{V}}) \subset A \textit{ e } (x_{\mathcal{V}}) \subset M \textit{ tais que } t_{\mathcal{V}} x_{\mathcal{V}} \to x \textit{ e } x_{\mathcal{V}} \to y\}.$$

Demonstração: Seja $y \in D^*(x,A)$. Então, $y \in \overline{A^*\mathrm{B}(x,\mathcal{U})}$, para toda cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Note que, fixadas $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, existe $z_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \in A^*\mathrm{B}(x,\mathcal{V})$ tal que $z_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \in \mathrm{B}(y,\mathcal{U})$, de modo que existem $t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \in A$ e $x_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} \in \mathrm{B}(x,\mathcal{V})$ tais que $t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} z_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} = x_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$. Agora, considere as redes $\left(t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}\right) \subset A$ e $\left(z_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}\right) \subset M$. Pelo Lema 3, temos que $z_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}} \longrightarrow y$ e $t_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}} z_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}} \longrightarrow x$. Reciprocamente, fixe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $y \in M$ para o qual existem redes $(t_{\mathcal{V}}) \subset A$ e $(x_{\mathcal{V}}) \subset M$ tais que $z_{\mathcal{V}} \longrightarrow y$ e $t_{\mathcal{V}} z_{\mathcal{V}} \longrightarrow x$. Como $t_{\mathcal{V}} z_{\mathcal{V}} \longrightarrow x$, existe $\mathcal{V}_0 \in \mathcal{O}$ tal que $t_{\mathcal{V}} z_{\mathcal{V}} \in \mathrm{B}(x,\mathcal{U})$ para $\mathcal{V} \succcurlyeq \mathcal{V}_0$. Logo, $(z_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V} \succcurlyeq \mathcal{V}_0} \subset A^*\mathrm{B}(x,\mathcal{U})$, mostrando que $y \in \overline{A^*\mathrm{B}(x,\mathcal{U})}$ e encerrando a demonstração. $\square$

No exemplo a seguir, veremos que o conceito de prolongamento para ações de semigrupos generaliza o conceito de prolongamentos para sistemas dinâmicos.

Exemplo 3. *Considere M um espaço métrico e ϕ um fluxo em M. Por abuso de linguagem omitiremos o fluxo ϕ. Seja, $A = \mathcal{S} = \mathbb{R}_+$ e $\mathcal{O}$ a família admissível das coberturas abertas de M dadas pelas ε-bolas, $\varepsilon > 0$. Fixado $x \in M$, então dado $y \in D(x, \mathbb{R}_+)$, existem redes $(t_\mathcal{V}) \subset \mathbb{R}_+$ e $(x_\mathcal{V}) \subset M$ tais que $t_\mathcal{V} x_\mathcal{V} \to y$ e $x_\mathcal{V} \to x$. Note que para estas redes podemos tomar uma subrede, tal que esta subrede é uma sequência. Assim, dado $y \in D(x, \mathbb{R}_+)$ existem sequências $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ e $(x_n) \subset M$ tais que $t_n x_n \to y$ e $x_n \to x$, ou seja, $y \in D^+(x)$ referente a definição de $D^+(x)$ em [1]. Como toda sequência é uma rede, temos que a inclusão $D^+(x) \subset D(x, \mathbb{R}_+)$ é obvia. Assim mostramos que a definição de primeiro prolongamente progressivo, generaliza a definição de primeiro prolongamento positivo. Agora vamos mostrar que a definição de primeiro prolongamento regressivo generaliza a definição de primeiro prolongamento negativo. De fato, dado M um espaço métrico, $A = \mathcal{S} = \mathbb{R}_+$ e $\mathcal{O}$ a família admissível das coberturas abertas de M dadas pelas ε-bolas, $\varepsilon > 0$. Para $x \in M$, temos que dado $y \in D^*(x, \mathbb{R}_+)$ existem redes $(t_\mathcal{V}) \subset \mathbb{R}_+$ e $(x_\mathcal{V}) \subset M$ tais que $t_\mathcal{V} x_\mathcal{V} \to x$ e $x_\mathcal{V} \to y$. Note que para estas redes podemos tomar uma subrede, tal que esta subrede é uma sequência. Então, existem sequências $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ e $(x_n) \subset M$ tais que $t_n x_n \to x$ e $x_n \to y$. Note que para cada $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, existe um índice $n_\mathcal{V} \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_\mathcal{V}} \in \mathrm{B}(y, \mathcal{V})$ e $t_{n_\mathcal{V}} x_{n_\mathcal{V}} \in \mathrm{B}(x, \mathcal{V})$. Assim, tomando $y_{n_\mathcal{V}} \in \mathrm{B}(x, \mathcal{V})$ tal que $x_{n_\mathcal{V}} = -t_{n_\mathcal{V}} y_{n_\mathcal{V}}$. Pelo Lema 3, temos que a rede $(y_{n_\mathcal{V}})$ converge para x e a rede $(-t_{n_\mathcal{V}} y_{n_\mathcal{V}})$ converge para y, com $(-t_{n_\mathcal{V}}) \subset \mathbb{R}_-$. Assim tomando subredes, com mesma ordem de $\mathbb{N}$, temos que existem sequências $(-t_n) \subset \mathbb{R}_-$, $(y_n) \subset M$ tais que $y_n \to x$ e $-t_n y_n \to y$, ou seja, $y \in D^-(x)$ referente a definição de $D^-(x)$ em [1]. Reciprocamente tome $y \in D^-(x)$. Então existem sequências $(t_n) \subset \mathbb{R}_-$, $(y_n) \subset M$ tais que $y_n \to x$ e $t_n y_n \to y$. Para cada $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, existe um índice $n_\mathcal{V} \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_\mathcal{V}} \in \mathrm{B}(x, \mathcal{V})$ e $t_{n_\mathcal{V}} x_{n_\mathcal{V}} \in \mathrm{B}(y, \mathcal{V})$. Seja $y_{n_\mathcal{V}} \in \mathrm{B}(y, \mathcal{V})$ tal que $x_{n_\mathcal{V}} = -t_{n_\mathcal{V}} y_{n_\mathcal{V}}$. Pelo Lema 3, temos que as redes $x_{n_\mathcal{V}} = -t_{n_\mathcal{V}} y_{n_\mathcal{V}} \to x$ e $y_{n_\mathcal{V}} \to y$. Assim tomando as redes $(y_{n_\mathcal{V}}) \subset M$, $(-t_{n_\mathcal{V}}) \subset \mathbb{R}_+$, temos $-t_{n_\mathcal{V}} y_{n_\mathcal{V}} \to x$ e $y_{n_\mathcal{V}} \to y$, ou seja, $y \in D^*(x, \mathbb{R}_+)$.*

Proposição 14. *Seja $x \in M$ e seja $A \subset S$. Então,*

1. $\mathrm{D}(x, A)$ *e* $\mathrm{D}^*(x, A)$ *são fechados;*

2. $\overline{Ax} \subset \mathrm{D}(x, A)$ *e* $\overline{A^*x} \subset \mathrm{D}^*(x, A)$.

Demonstração: Os conjuntos $\mathrm{D}(x, A)$ e $\mathrm{D}^*(x, A)$ são obviamente fechados pois consistem de intersecções de conjuntos fechados. Para ver o item 2, lembre-se que $\overline{Ax} \subset \overline{A\mathrm{B}(x,\mathcal{U})}$ e $\overline{A^*x} \subset \overline{A^*\mathrm{B}(x,\mathcal{U})}$, para toda cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, de modo que $\overline{Ax} \subset \mathrm{D}(x, A)$ e $\overline{A^*x} \subset \mathrm{D}^*(x, A)$. □

Fixada uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de S, iremos definir primeiro conjunto limite prolongacional progressivo e primeiro conjunto limite prolongacional regressivo referente a um ponto do espaço topológico M.

Definição 16. *O* ***primeiro $\mathcal{F}$-conjunto limite prolongacional progressivo*** *e o* ***primeiro $\mathcal{F}$-conjunto limite prolongacional regressivo*** *de $x \in M$ são respectivamente os conjuntos:*

$$J(x, \mathcal{F}) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} D(x, A) \quad e \quad J^*(x, \mathcal{F}) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} D^*(x, A).$$

Os conjuntos ω-limites mostra qual é o comportamento assintótico do ponto. A diferença dos conjuntos ω-limites para os conjuntos limites prolongacionais é que os conjuntos limites prolongacionais mostra a interseção dos comportamentos assintóticos das vizinhanças do ponto.

De acordo com as Proposições 12 e 13, temos os seguintes resultados.

Corolário 1. *Dado $x \in M$, temos que*

$$J(x, \mathcal{F}) = \{y \in M;\ \text{para todo } A \in \mathcal{F},\ \text{existem } (t_{\mathcal{V}}) \subset A \text{ e } (y_{\mathcal{V}}) \subset M \text{ tais que } y_{\mathcal{V}} \to x \text{ e } t_{\mathcal{V}} y_{\mathcal{V}} \to y\} \text{ e}$$

$$J^*(x, \mathcal{F}) = \{y \in M;\ \text{para todo } A \in \mathcal{F},\ \text{existem } (t_{\mathcal{V}}) \subset A \text{ e } (y_{\mathcal{V}}) \subset M \text{ tais que } t_{\mathcal{V}} y_{\mathcal{V}} \to x \text{ e } y_{\mathcal{V}} \to y\}.$$

Demonstração: Segue imediatamente da definição e das Proposições 12 e 13. $\square$

Corolário 2. *Dados x, $z \in M$, $z \in J(x, \mathcal{F})$ se, e somente se, $x \in J^*(z, \mathcal{F})$.*

Demonstração: Segue imediatamente pelo corolario anterior. $\square$

A seguir, apresentaremos uma definição equivalente de conjunto limite prolongacional usando o conceito de rede $\mathcal{F}$-divergente. Este conceito é referente ao artigo [22], feito para o caso de espaço métrico.

Teorema 7. *Para $\mathcal{F}$ uma base de filtro, dado $x \in M$ temos que*

$$J(x, \mathcal{F}) = \{y \in M;\ \textit{existem redes } t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty \textit{ e } (x_\lambda) \to x \textit{ tais que } t_\lambda x_\lambda \to y\}.$$

Demonstração: Dado $y \in J(x, \mathcal{F})$, então $y \in \overline{A\mathrm{B}(x, \mathcal{U})}$ para todo $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Assim existem redes $(t_{\lambda_{A,\mathcal{U}}}) \subset A$ e $(x_{\lambda_{A,\mathcal{U}}}) \subset \mathrm{B}(x, \mathcal{U})$ tal que $t_{\lambda_{A,\mathcal{U}}} x_{\lambda_{A,\mathcal{U}}} \to y$. Primeiro, observe que para cada $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$, existe um índice $\lambda_{A,\mathcal{U}}$ tal que $t_{\lambda_{A,\mathcal{U}}} x_{\lambda_{A,\mathcal{U}}} \in \mathrm{B}(y, \mathcal{W})$. Assim, tome as redes $(t_{\lambda_{A,\mathcal{U}}})$ e $(x_{\lambda_{A,\mathcal{U}}})$ com a direção $\lambda_{A,\mathcal{U}} \succcurlyeq \lambda_{B,\mathcal{V}}$ se $A \subset B$ e $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$. Agora, temos que provar: (1) $x_{\lambda_{A,\mathcal{U}}} \to x$, (2) $t_{\lambda_{A,\mathcal{U}}} \to_{\mathcal{F}} \infty$ e (3) $t_{\lambda_{A,\mathcal{U}}} x_{\lambda_{A,\mathcal{U}}} \to y$. De fato, fixe $\lambda_{B,\mathcal{V}}$. Para $\lambda_{A,\mathcal{U}} \succcurlyeq \lambda_{B,\mathcal{V}}$, temos $t_{\lambda_{A,\mathcal{U}}} x_{\lambda_{A,\mathcal{U}}} \in \mathrm{B}(y, \mathcal{V})$, como $\mathcal{V}$ é arbitrário, temos que a convergência (3) é verdadeira. Para $\mathrm{B}(x, \mathcal{V})$ temos $x_{\lambda_{A,\mathcal{U}}} \in \mathrm{B}(x, \mathcal{U}) \subset \mathrm{B}(x, \mathcal{V})$, assim temos que a convergência (1) é válida. Por ultimo, dado $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$ temos $t_{\lambda_{A,\mathcal{U}}} \in A$ e se $\lambda_{B,\mathcal{V}} \succcurlyeq \lambda_{A,\mathcal{U}}$ então $t_{\lambda_{B,\mathcal{V}}} \in B \subset A$, provando a convergência (2). Por outro lado, seja $y \in M$ tal que existem redes $t_\lambda \to_{\mathcal{F}} \infty$ e $(x_\lambda) \to x$ tais que $t_\lambda x_\lambda \to y$. Fixe $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Note que existe λ_0 tal que para $\lambda \succcurlyeq \lambda_0$ temos que $t_\lambda \in A$, $x_\lambda \in \mathrm{B}(x, \mathcal{U})$ e $t_\lambda x_\lambda \in \mathrm{B}(y, \mathcal{U})$. Como $x_\lambda \to x$ e $t_\lambda x_\lambda \to y$ para $\lambda \succcurlyeq \lambda_0$, temos que $y \in \overline{A\mathrm{B}(x, \mathcal{U})}$. Pela arbitrariedade de $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, temos $y \in J(x, \mathcal{F})$. $\square$

Nos próximos exemplos, mostraremos que o primeiro conjunto limite prolongacional negativo e o primeiro conjunto limite prolongacional positivo apresentados em

[1] são casos particulares de conjunto limite prolongacional regressivo e conjunto limite prolongacional progressivo para ações de semigrupos.

Exemplo 4. *Considere M um espaço métrico e ϕ um fluxo em M. Por abuso de linguagem omitiremos o fluxo ϕ. Seja $\mathcal{O}$ a família admissível das coberturas abertas de M dadas pelas ε-bolas, $\varepsilon > 0$. Tomando o filtro de Frechet $\mathcal{F} = \{(a, +\infty); a > 0\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$, dado $y \in J^* (x, \mathcal{F})$, temos que para todo $(a, +\infty) \in \mathcal{F}$ existem redes $(t^a_{\mathcal{V}}) \subset (a, +\infty)$ e $(y^a_{\mathcal{V}}) \subset M$ tais que $t^a_{\mathcal{V}} y^a_{\mathcal{V}} \to x$ e $y^a_{\mathcal{V}} \to y$. Em particular podemos tomar sequências $(t^a_m) \subset (a, +\infty)$ e $(y^a_m) \subset M$ tais que $t^a_m y^a_m \to x$ e $y^a_m \to y$. Como vale para todo $a \in \mathbb{R}$, podemos tomar em particular as sequências $a = n \in \mathbb{N}$. Tomando a diagonal de Cantor das sequências (y^n_m) e (t^n_m), obtemos duas novas sequência, (y^n_n) e (t^n_n), onde $y^n_n \to y$ e $t^n_n y^n_n \to x$. Observe que $t^n_n \in (n, +\infty)$, para $n \in \mathbb{N}$, assim temos que $t^n_n \to +\infty$. Tomando as sequências, $(x^n_n = t^n_n y^n_n) \subset M$ e $(-t^n_n) \subset \mathbb{R}_-$, temos que $x^n_n \to x$ e $-t^n_n x^n_n = y^n_n \to y$, com $-t^n_n \to -\infty$, ou seja, $y \in J^- (x)$. Concluindo que $J^* (x, \mathcal{F}) \subset J^- (x)$. Reciprocamente, dado $y \in J^- (x)$, existem sequências $(x_n) \subset M$ e $(t_n) \subset \mathbb{R}_-$, onde $t_n \to -\infty$, $x_n \to x$ e $t_n x_n \to y$. Fixe $(a, +\infty) \in \mathcal{F}$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $-t_m \in (a, +\infty)$, para todo $m > n_0$. Fixando as sequências, $(y_n = x_{n+n_0}) \subset M$ e $(a_n = -t_{n+n_0}) \subset (a, +\infty)$, temos que $y_n \to x$ e $-a_n y_n \to y$. Assim, para cada $\mathcal{V} \subset \mathcal{O}$, existe $n_{\mathcal{V}} \in \mathbb{N}$, tal que $y_{n_{\mathcal{V}}} \in \mathrm{B} (x, \mathcal{V})$ e $-a_{n_{\mathcal{V}}} y_{n_{\mathcal{V}}} \in \mathrm{B} (y, \mathcal{V})$. Como $-a_{n_{\mathcal{V}}} y_{n_{\mathcal{V}}} \in \mathrm{B} (y, \mathcal{V})$ existe $z_{n_{\mathcal{V}}} \in \mathrm{B} (y, \mathcal{V})$, tal que $a_{n_{\mathcal{V}}} z_{n_{\mathcal{V}}} = y_{n_{\mathcal{V}}} \in \mathrm{B} (x, \mathcal{V})$. Pelo Lema 3, temos que a rede $(z_{n_{\mathcal{V}}})$ converge para y e a rede $(a_{n_{\mathcal{V}}} z_{n_{\mathcal{V}}} = y_{n_{\mathcal{V}}})$ converge para x. Assim, podemos concluir que existem redes $(z_{n_{\mathcal{V}}}) \subset M$ e $(a_{n_{\mathcal{V}}}) \subset (a, +\infty)$, tais que $z_{n_{\mathcal{V}}} \to y$ e $a_{n_{\mathcal{V}}} z_{n_{\mathcal{V}}} \to x$. Pela arbitrariedade de $(a, +\infty)$ obtemos que $y \in J^* (x, \mathcal{F})$, ou seja, $J^- (x) \subset J^* (x, \mathcal{F})$. Portanto $J^- (x) = J^* (x, \mathcal{F})$, mostrando que a definição de conjunto limite prolongacional negativo é um caso particular da definição de primeiro $\mathcal{F}$-conjunto limite prolongacional regressivo.*

Exemplo 5. *Sejam M um espaço métrico, $\mathcal{S} = \mathbb{R}_+$, $\mathcal{F} = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{O}$ a família admissível das coberturas abertas de M dadas por ε-bolas e ϕ um fluxo definido em M. Fixado $a \in \mathbb{R}_+$, note que $D(ax, \mathbb{R}_+) = D(x, (a, +\infty))$. Com efeito, dado $y \in D(ax, \mathbb{R}_+)$, existem sequências $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ e $(x_n) \subset M$ tais que $x_n \longrightarrow ax$ e $t_n x_n \longrightarrow y$. Como ϕ_a é contínua, segue que $-ax_n \longrightarrow x$. Agora, considere as sequências $(t_n + a) \subset (a, +\infty)$ e $(-ax_n) \subset M$. Temos que $-ax_n \longrightarrow x$ e $(t_n + a - a)x_n = t_n x_n \longrightarrow y$, de forma que $y \in D(x, (a, +\infty))$. Reciprocamente, dado $y \in D(x, (a, +\infty))$, existem sequências $(s_n) \subset (a, +\infty)$ e $(x_n) \subset M$ tais que $x_n \longrightarrow x$ e $s_n x_n \longrightarrow y$. Como existe uma sequência $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ tal que $s_n = t_n + a$, para cada $n \in \mathbb{N}$, pela continuidade temos que $ax_n \longrightarrow ax$, ou seja, as sequências $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ e $(ax_n) \subset M$ satisfazem as condições da definição $D(ax, \mathbb{R}_+)$, concluindo que $y \in D(ax, \mathbb{R}_+)$. Portanto,*

$$J(x, \mathcal{F}) = \bigcap_{a \in \mathbb{R}_+} D(x, (a, +\infty)) = \bigcap_{a \in \mathbb{R}} D(x, (a, +\infty)) = \bigcap_{a \in \mathbb{R}} D(ax, \mathbb{R}_+) = \bigcap_{a \in \mathbb{R}} D^+(\phi(a, x)),$$

que é a expressão para o primeiro conjunto limite prolongacinal positivo.

Agora, apresentaremos algumas propriedades dos prolongamentos e dos conjuntos limites prolongacionais.

Teorema 8. *Seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de S e $x \in M$. Assumindo que $\mathrm{J}(x, \mathcal{F})$ e $\mathrm{J}^*(x, \mathcal{F})$ são ambos não-vazios:*

1. *Se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_1, então $\mathrm{J}(x, \mathcal{F})$ é S-progressivamente invariante.*
2. *Se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_3, então $\mathrm{J}^*(x, \mathcal{F})$ é S-progressivamente invariante.*
3. *Se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_2 e a ação de S em M é aberta, então $\mathrm{J}^*(x, \mathcal{F})$ é S-regressivamente invariante.*

Demonstração: (1) Sejam $s \in S$, $z \in \mathrm{J}(x, \mathcal{F})$, $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Da hipótese H_1, existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $sB \subset A$. Pela continuidade da ação, segue que

$$sz \in s\overline{B\mathrm{B}(x, \mathcal{U})} \subset \overline{sB\mathrm{B}(x, \mathcal{U})} \subset \overline{A\mathrm{B}(x, \mathcal{U})}.$$

Portanto, $sz \in \mathrm{J}(x, \mathcal{F})$ e $\mathrm{J}(x, \mathcal{F})$ é S-progressivamente invariante.

(2) Sejam $s \in S$, $z \in \mathrm{J}^*(x, \mathcal{F})$, $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Pela hipótese H_3, existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset As$. Segue que $z \in \overline{B^*\mathrm{B}(x,\mathcal{U})}$. Agora, seja U uma vizinhança de sz em M. Pela continuidade da ação, temos que $\mu_s^{-1}(U)$ é uma vizinhança de z em M. Logo, $\mu_s^{-1}(U) \cap B^*\mathrm{B}(x,\mathcal{U}) \neq \varnothing$. Tome $w \in \mu_s^{-1}(U) \cap B^*\mathrm{B}(x,\mathcal{U})$. Note que existem $b \in B$ e $c \in \mathrm{B}(x,\mathcal{U})$ tais que $bw = c$. Além disso, $sw \in U$. Como $B \subset As$, existe $a \in A$ tal que $b = as$. Assim, $c = bw = (as)w = a(sw)$. Por definição, $sw \in A^*\mathrm{B}(x,\mathcal{U})$. Dessa forma, obtemos que $sw \in U \cap A^*\mathrm{B}(x,\mathcal{U})$. Portanto, $sz \in \mathrm{J}^*(x, \mathcal{F})$ e $\mathrm{J}^*(x, \mathcal{F})$ é S-progressivamente invariante.

(3) Dados $y \in S^*\mathrm{J}^*(x, \mathcal{F})$, $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existem $s \in \mathcal{S}$ e $z \in \mathrm{J}^*(x, \mathcal{F})$ tais que $sy = z$. A hipótese H_2 assegura que existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $Bs \subset A$. Seja U uma vizinhança de y em M. Como a ação de S em M é aberta, sU é uma vizinhança de sy em M, com isso, $sU \cap B^*\mathrm{B}(x,\mathcal{U}) \neq \varnothing$, donde existe $p \in U$ tal que $sp \in B^*\mathrm{B}(x,\mathcal{U})$. Isso implica que existe $b \in B$ tal que $(bs)p = b(sp) \in \mathrm{B}(x,\mathcal{U})$. Como $Bs \subset A$, temos que $bs = a \in A$ e $ap \in \mathrm{B}(x,\mathcal{U})$, de maneira que $p \in A^*\mathrm{B}(x,\mathcal{U})$. Portanto, $U \cap A^*\mathrm{B}(x,\mathcal{U}) \neq \varnothing$, $y \in \mathrm{J}^*(x, \mathcal{F})$ e $\mathrm{J}^*(x, \mathcal{F})$ é S-regressivamente invariante. □

Teorema 9. *Fixada uma topologia em S, se para todo $A \in \mathcal{F}$ e A^C é compacto então*

$$D(x, S) = Sx \cup J(x, \mathcal{F}).$$

Demonstração: Pela definição de $D(x, S)$, temos de imediato que $Sx \cup J(x, \mathcal{F}) \subset D(x, S)$. Assim, resta mostrar a outra inclusão. Dado $y \in D(x, S)$, então existem $(t_\mathcal{V}) \subset S$ e $(x_\mathcal{V}) \subset M$, tais que $x_\mathcal{V} \to x$ e $t_\mathcal{V} x_\mathcal{V} \to y$. Vamos supor que $y \notin J(x, \mathcal{F})$, ou seja, existe $A \in \mathcal{F}$, tal que para toda rede $(a_\mathcal{V}) \subset A$ e $(y_\mathcal{V}) \subset M$ com $y_\mathcal{V} \to x$, então $a_\mathcal{V} y_\mathcal{V} \nrightarrow y$. Agora iremos analisar as seguintes situações da rede $(t_\mathcal{V}) \subset S$.

Se $(t_\mathcal{V}) \subset A^C$ então existe uma subrede $(t_\lambda) \subset (t_\mathcal{V})$, tal que $t_\lambda \to t$, para algum $t \in A^C$. Como $t_\lambda x_\lambda \to y$ e pela continuidade temos que $t_\lambda x_\lambda \to tx$. Pela unicidade do limite, temos que $tx = y$, ou seja, $y \in Sx$.

Se $(t_{\mathcal{V}}) \cap A \neq \emptyset$, então existe um índice $\mathcal{V}_0$ tal que para todo $\mathcal{V} \geq \mathcal{V}_0$, $t_{\mathcal{V}} \in A^C$. De fato, se a afirmação fosse falsa, teríamos que para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existiria $\mathcal{V} \geq \mathcal{U}$, tal que $t_{\mathcal{V}} \in A$. Assim, tomando a rede $(t_{\mathcal{V}_{\mathcal{U}}})_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}}$, temos que $t_{\mathcal{V}_{\mathcal{U}}} x_{\mathcal{V}_{\mathcal{U}}} \to y$, o que é absurdo, pois assumimos que $y \notin J(x, \mathcal{F})$. Agora, dado $\mathcal{V}_0$ tal que para todo $\mathcal{V} \geq \mathcal{V}_0$ tem-se que $t_{\mathcal{V}} \in A^C$, tomando a rede $(t_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V} \geq \mathcal{V}_0}$, temos que existe uma subrede $(t_\lambda) \subset (t_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V} \geq \mathcal{V}_0}$ tal que $t_\lambda \to t$ para algum $t \in A^C$. Como $t_\lambda x_\lambda \to y$, pela continuidade temos que $t_\lambda x_\lambda \to tx$. Pela unicidade do limite, temos que $tx = y$, ou seja, $y \in Sx$. $\square$

Capítulo 3

Recursividade e Dispersividade para Ações de Semigrupos

Neste capítulo, estudaremos os conceitos de recursividade, estabilidade de Poisson e a relação de pontos estáveis com conjuntos limites. Em seguida, apresentaremos o conceito de pontos não-dispersivos e mostraremos a relação destes pontos com os conjuntos limites prolongacionais. Por fim, veremos os conceitos de dispersividade para ações de semigrupos. Os resultados apresentados neste capítulo são referentes ao artigo [20], motivado pela teoria de recursividade e dispersividade para sistemas dinâmicos encontrada em [1]. Mostraremos no final do capítulo que os conceitos de dispersividade e recursividade para ações de semigrupos generalizam os conceitos de recursividade e dispersividade para sistemas dinâmicos.

3.1 Recursividade para ações de semigrupos

Assumiremos que M é um espaço topológico, S é um semigrupo agindo sobre M e $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de S.

Definição 17. *Dado um subconjunto não vazio $X \subset M$, diremos que X é* ***$\mathcal{F}$- progressivamente recursivo*** *com respeito ao conjunto não vazio $Z \subset M$, se para todo $A \in \mathcal{F}$, $AZ \cap X \neq \emptyset$. Se para todo $A \in \mathcal{F}$, $A^*Z \cap X \neq \emptyset$, então diremos que X é* ***$\mathcal{F}$-regressivamente recursivo*** *com respeito ao conjunto Z.*

Referente a definição acima, temos que se um subconjunto não vazio X de

M é $\mathcal{F}$-progressivamente recursivo com respeito ao conjunto não vazio Z, então para todo $A \in \mathcal{F}$, existem $a \in A$, $x \in X$ e $z \in Z$, tais que $x = az$. Analogamente, se X é $\mathcal{F}$-regressivamente recursivo com respeito ao conjunto não vazio Z, então para todo $A \in \mathcal{F}$, existem $a \in A$, $x \in X$ e $z \in Z$, tais que $ax = z$.

3.1.1 Estabilidade de Poisson e pontos não-dispersivos para ações de semigrupos

Nesta seção, apresentaremos a definição de ponto Poisson estável para ação de um semigrupo em um espaço topológico, mostraremos algumas relações destes pontos com conjuntos limites, veremos o que são pontos quase periódicos e também veremos algumas relações dos pontos quase periódicos com o conceito de estabilidade de Poisson. Em seguida, definiremos o que são pontos não dispersivos e sua relação com conjuntos limites prolongacionais e mostraremos sob quais condições o conjunto dos pontos Poisson estáveis é denso no espaço topológico.

Definição 18. *Um ponto $x \in M$ é $\mathcal{F}$**-progressivamente Poisson estável** se para toda vizinhança V de x, V é $\mathcal{F}$-progressivamente recursivo com respeito ao conjunto $\{x\}$. Se para toda vizinhança V de x, V é $\mathcal{F}$-regressivamente recursivo com respeito ao conjunto $\{x\}$, dizemos que x é $\mathcal{F}$**-regressivamente Poisson estável**. Dizemos que x é $\mathcal{F}$**-Poisson estável**, se x é $\mathcal{F}$-progressivamente Poisson estável e $\mathcal{F}$-regressivamente Poisson estável.*

Nas próximas proposições, mostraremos que um ponto é $\mathcal{F}$-progressivamente Poisson estável se e somente se este ponto pertence ao seu conjunto ω-limite e resultado análogo para um ponto $\mathcal{F}$-regressivamente Poisson estável. Assim, podemos concluir que um ponto x é $\mathcal{F}$-Poisson estável se, e somente se, $x \in \omega(x, \mathcal{F}) \cap \omega^*(x, \mathcal{F})$.

Proposição 15. *Um ponto $x \in M$ é $\mathcal{F}$-progressivamente Poisson estável se, e somente se, $x \in \omega(x, \mathcal{F})$.*

Demonstração: Se x é $\mathcal{F}$-progressivamente Poisson estável, então para toda vizinhança V de x, $V \cap Ax \neq \emptyset$, qualquer que seja $A \in \mathcal{F}$, ou seja, $x \in \overline{Ax}$, para todo $A \in \mathcal{F}$. Isso prova que $x \in \omega(x, \mathcal{F})$. Reciprocamente, se $x \in \omega(x, \mathcal{F})$ temos que $x \in \overline{Ax}$, para todo $A \in \mathcal{F}$, ou seja, para todo $A \in \mathcal{F}$ e toda vizinhança V de x, temos $V \cap Ax \neq \emptyset$, mostrando que x é $\mathcal{F}$-progressivamente Poisson estável. □

Proposição 16. *Um ponto $x \in M$ é $\mathcal{F}$-regressivamente Poisson estável se, e somente se, $x \in \omega^*(x, \mathcal{F})$.*

Demonstração: Se x é $\mathcal{F}$-regressivamente Poisson estável, então para toda vizinhança V de x, $V \cap A^*x \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{F}$, ou seja, $x \in \overline{A^*x}$, para todo $A \in \mathcal{F}$, provando que $x \in \omega^*(x, \mathcal{F})$. Por outro lado, se $x \in \omega^*(x, \mathcal{F})$, temos que $x \in \overline{A^*x}$, para todo $A \in \mathcal{F}$, ou seja, para todo $A \in \mathcal{F}$ e toda vizinhança V de x, temos $V \cap A^*x \neq \emptyset$, mostrando que x é $\mathcal{F}$-regressivamente Poisson estável. □

Agora apresentaremos algumas propriedades de pontos Poisson estáveis.

Proposição 17. *Se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_1 e $x \in M$ é $\mathcal{F}$-progressivamente Poisson estável então $\overline{Sx} = \omega(x, \mathcal{F})$.*

Demonstração: Dado $x \in M$ $\mathcal{F}$-progressivamente Poisson estável, temos que $x \in \omega(x, \mathcal{F})$. É claro que $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \overline{Sx}$. Como $\mathcal{F}$ satisfaz H_1, pela Proposição 7 temos que $\omega(x, \mathcal{F})$ é progressivamente invariante. Usando o fato de que $x \in \omega(x, \mathcal{F})$ e de que os conjuntos limites são fechados, podemos concluir que $\overline{Sx} \subset \omega(x, \mathcal{F})$. Portanto, $\overline{Sx} = \omega(x, \mathcal{F})$. □

Proposição 18. *Se $\mathcal{F}$ satisfaz H_1, H_3 e $x \in M$ é $\mathcal{F}$-progressivamente Poisson estável então sx é $\mathcal{F}$-progressivamente Poisson estável para todo $s \in S$.*

Demonstração: Como $\mathcal{F}$ satisfaz H_1 e x é $\mathcal{F}$-progressivamente Poisson estável temos pela proposição anterior, que $\overline{Sx} = \omega(x, \mathcal{F})$. Assim, dado $s \in S$ temos que $sx \in \overline{Ax}$ para todo $A \in \mathcal{F}$. Por H_3, dado $A \in \mathcal{F}$ existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset As$. Assim, $\overline{Bx} \subset \overline{Asx}$. Como $sx \in \overline{Bx} \subset \overline{Asx}$ e A é arbitrário temos $sx \in \omega(sx, \mathcal{F})$. $\square$

Observe que a Proposição 18 diz que o conjunto dos pontos $\mathcal{F}$-progressivamente Poisson estável é progressivamente invariante se H_1 e H_3 são satisfeitas.

A seguir, definiremos ponto quase periódico e em seguida apresentaremos as relações entre pontos quase periódicos e pontos Poisson estáveis.

Definição 19. *Dizemos que $x \in M$ é* ***quase periódico*** *se $\overline{Sx}$ é um conjunto minimal contendo x.*

Proposição 19. *Se $x \in M$ é quase periódico e $\mathcal{F}$ é ideal à direita, então $y \in \overline{Sx}$ é $\mathcal{F}$-progressivamente Poisson estável.*

Demonstração: Supondo que $x \in M$ é quase periódico, temos que $\overline{Sx}$ é um conjunto minimal. Pelas Proposições 4 e 11, temos que para $y \in \overline{Sx}$, $\omega(y, \mathcal{F}) = \overline{Sy} = \overline{Sx}$, ou seja, $y \in \omega(y, \mathcal{F})$, concluindo que y é $\mathcal{F}$-progressivamente Poisson estável. $\square$

Agora, apresentaremos a definição de pontos não-dispersivos e mostraremos que estes pontos estão relacionados com os conjuntos limites prolongacionais.

Definição 20. *Um ponto $x \in M$ é* ***$\mathcal{F}$-não-dispersivo****, se para toda vizinhança U de x, U é $\mathcal{F}$-progressivamente recursivo com respeito a U, ou seja, para todo $A \in \mathcal{F}$, $AU \cap U \neq \emptyset$.*

Na definição acima não há necessidade que M seja um espaço admissível, mas para o teorema a seguir, que relaciona pontos não dispersivos com conjuntos limites prolongacionais, impomos essa condição.

Teorema 10. *Se M é um espaço admissível com família admissível $\mathcal{O}$ então para $x \in M$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *x é $\mathcal{F}$-não-dispersivo.*

2. *$x \in J(x, \mathcal{F})$.*

3. *Para toda vizinhança U de x e $A \in \mathcal{F}$, $A^*U \cap U \neq \emptyset$.*

4. *$x \in J^*(x, \mathcal{F})$.*

Demonstração: Pelo Corolário 2, temos que (2) é equivalente à (4). Para provarmos o teorema, demonstraremos que, (1) é equivalente à (2) e (3) é equivalente à (4). Seja $x \in M$, tal que x é $\mathcal{F}$-não-dispersivo. Então para cada $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, $\mathrm{B}\,(x, \mathcal{V}) \cap A\mathrm{B}\,(x, \mathcal{V}) \neq \emptyset$, ou seja, existem $x_{\mathcal{V}} \in \mathrm{B}\,(x, \mathcal{V})$ e $a_{\mathcal{V}} \in A$ tais que $a_{\mathcal{V}} x_{\mathcal{V}} \in \mathrm{B}\,(x, \mathcal{V})$. Pelo Lema 3, temos que as redes $(x_{\mathcal{V}})$ e $(a_{\mathcal{V}} x_{\mathcal{V}})$ convergem para x, ou seja, $x \in J(x, \mathcal{F})$. Reciprocamente, se $x \in J(x, \mathcal{F})$ para todo $A \in \mathcal{F}$, existem redes $(t_{\mathcal{V}}) \subset A$ e $(x_{\mathcal{V}}) \subset M$, tais que $x_{\mathcal{V}} \to x$ e $t_{\mathcal{V}} x_{\mathcal{V}} \to x$. Pela convergência das duas redes, dado U uma vizinhança de x, existe um índice $\mathcal{V}_0$ tal que $x_{\mathcal{V}_0}, t_{\mathcal{V}_0} x_{\mathcal{V}_0} \in U$, ou seja, $AU \cap U \neq \emptyset$, mostrando que x é $\mathcal{F}$-não-dispersivo. Agora, suponha que para toda vizinhança U de x, $A^*U \cap U \neq \emptyset$. Dados $A \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$, temos que $\mathrm{B}\,(x, \mathcal{V}) \cap A^*\mathrm{B}\,(x, \mathcal{V}) \neq \emptyset$, ou seja, existem $x_{\mathcal{V}}, x'_{\mathcal{V}} \in \mathrm{B}\,(x, \mathcal{V})$ e $a_{\mathcal{V}} \in A$, tais que $a_{\mathcal{V}} x_{\mathcal{V}} = x'_{\mathcal{V}}$. Pelo Lema 3, as redes $(a_{\mathcal{V}} x_{\mathcal{V}} = x'_{\mathcal{V}})$ e $(x_{\mathcal{V}})$ convergem para x. Assim temos redes $(a_{\mathcal{V}}) \subset A$ e $(x_{\mathcal{V}}) \subset M$, tais que $x_{\mathcal{V}} \to x$ e $a_{\mathcal{V}} x_{\mathcal{V}} \to x$, concluindo que $x \in J^*(x, \mathcal{F},)$. Reciprocamente, suponha que

$$x \in J^*(x, \mathcal{F}) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} D^*\,(x, A) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}, \mathcal{U} \in \mathcal{O}} \overline{A^*\mathrm{B}(x, \mathcal{U})}.$$

Seja U uma vizinhança de x e $A \in \mathcal{F}$. Sabendo que $\mathcal{O}$ é admissível, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathrm{B}\,(x, \mathcal{V}) \subset U$. Como $U \cap A^*\mathrm{B}\,(x, \mathcal{V}) \neq \emptyset$ e $A^*\mathrm{B}\,(x, \mathcal{V}) \subset A^*U$, temos que

$\emptyset \neq U \cap A^{*}\mathrm{B}\,(x, \mathcal{V}) \subset U \cap A^{*}U.$ $\square$

No próximo teorema, mostraremos que todos os pontos que pertencem a um conjunto ω-limite são não-dispersivos, se a família de subconjuntos do semigrupo satisfaz a hipótese H_3.

Teorema 11. *Assuma que $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_3 e seja $x \in M$. Então todo $y \in \omega(x, \mathcal{F})$ é $\mathcal{F}$-não dispersivo.*

Demonstração: Dado $y \in \omega(x, \mathcal{F})$, vamos mostrar que $y \in \overline{A\mathrm{V}_y}$ para todo $A \in \mathcal{F}$ e qualquer vizinhança V_y de y. De fato, como $y \in \omega(x, \mathcal{F})$ temos que $y \in \overline{Sx}$. Dado V_y uma vizinhança de y, temos que existe $s \in S$ tal que $sx \in \mathrm{V}_y$. Como $\mu_s^{-1}\mathrm{V}_y$ é uma vizinhança aberta de x e que $\omega(x, \mathcal{F}) \subset J(x, \mathcal{F})$, temos que $y \in \overline{A\,(\mu_s^{-1}\mathrm{V}_y)}$ para todo $A \in \mathcal{F}$. Por H_3, existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset As$. Assim, $y \in \overline{B\,(\mu_s^{-1}\mathrm{V}_y)} \subset \overline{As\,(\mu_s^{-1}\mathrm{V}_y)} \subset \overline{A\mathrm{V}_y}$. Pela arbitrariedade de V_y e A, temos o desejado. $\square$

No teorema a seguir, mostraremos que os pontos que pertencem ao fecho do conjunto de todos os pontos $\mathcal{F}$-progressivamente Poisson estáveis são $\mathcal{F}$-não dispersivos.

Teorema 12. *Seja $P \subset M$, o conjunto de todos os pontos $\mathcal{F}$-progressivamente Poisson estáveis. Então $x \in \overline{P}$ é $\mathcal{F}$-não dispersivo.*

Demonstração: Dado $x \in \overline{P}$, seja $(x_\lambda) \subset P$, tal que $x_\lambda \to x$. Assim, para todo λ, x_λ é $\mathcal{F}$-progressivamente Poisson estável, ou seja, $x_\lambda \in \omega(x_\lambda, \mathcal{F})$ para todo λ. Dado uma vizinhança U de x, temos que existe λ_0 tal que para $\lambda' \succ \lambda_0$, $x_{\lambda'} \in U$. Logo para todo $A \in \mathcal{F}$, temos $U \cap Ax_{\lambda'} \neq \emptyset$. Sabendo que $x_{\lambda'} \in U$, temos $Ax_{\lambda'} \subset AU$. Portanto, $\emptyset \neq U \cap Ax_{\lambda'} \subset U \cap AU$. Pela arbitrariedade de $A \in \mathcal{F}$ e da vizinhança U de x, temos que x é $\mathcal{F}$-não dispersivo. $\square$

Teorema 13. *Seja $P \subset M$, o conjunto de todos os pontos $\mathcal{F}$-regressivamente Poisson estáveis. Então $x \in \overline{P}$ é $\mathcal{F}$-não dispersivo.*

Demonstração: Dado $x \in \overline{P}$, seja $(x_\lambda) \subset P$, tal que $x_\lambda \to x$. Logo, para todo λ, x_λ é $\mathcal{F}$-regressivamente Poisson estável, ou seja, $x_\lambda \in \omega^*(x_\lambda, \mathcal{F})$ para todo λ. Dada uma vizinhança U de x, temos que existe λ_0 tal que para $\lambda' \succ \lambda_0$, $x_{\lambda'} \in U$. Assim para todo $A \in \mathcal{F}$, temos $U \cap A^* x_{\lambda'} \neq \emptyset$. Sabendo que $x_{\lambda'} \in U$, temos $A^* x_{\lambda'} \subset A^* U$. Portanto, $\emptyset \neq U \cap A^* x_{\lambda'} \subset U \cap A^* U$. Pela arbitrariedade de $A \in \mathcal{F}$ e da vizinhança U de x, temos que x é $\mathcal{F}$-não dispersivo. □

No teorema a seguir, assumiremos que a ação é sobrejetiva, ou seja, dado $s \in S$, $sM = M$.

Teorema 14. *Seja M um espaço métrico completo. Assuma que todo $x \in M$ é $\mathcal{F}$-não dispersivo e que a ação é sobrejetiva. Então o conjunto P dos pontos $\mathcal{F}$-progressivamente Poisson estáveis é denso em M.*

Demonstração: Fixe $A \in \mathcal{F}$ e sejam $x \in M$ e $\varepsilon > 0$. Acharemos $y \in \mathrm{B}(x, \varepsilon)$ tal que $y \in \omega(y, \mathcal{F})$. Tome $U = \mathrm{B}(x, \varepsilon)$. Desde que $U \cap A^* U \neq \emptyset$, existem $x_1 \in U \cap A^* U$ e $\frac{1}{2} > \varepsilon_1 > 0$, tais que $U_1 = \mathrm{B}(x_1, \varepsilon_1) \subset U \cap A^* U$. Como, $U_1 \cap A^* U_1 \neq \emptyset$, existem $x_2 \in U_1 \cap A^* U_1$ e $\frac{1}{3} > \varepsilon_2 > 0$, tais que $U_2 = \mathrm{B}(x_2, \varepsilon_2) \subset U_1 \cap A^* U_1$. Como, $U_2 \cap A^* U_2 \neq \emptyset$, existem $x_3 \in U_2 \cap A^* U_2$ e $\frac{1}{4} > \varepsilon_3 > 0$, tais que $U_3 = \mathrm{B}(x_3, \varepsilon_3) \subset U_2 \cap A^* U_2$. Procedendo desta forma, obtemos uma sequência de conjuntos abertos $\{U_n\}$, tais que $U_{n+1} \subset U_n$ e $\mathrm{diam} U_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Como M é completo, temos que $\bigcap_n U_n = \{y\}$. Como $y \in U_n$ para todo n, temos que existem $a_n \in A$ e $x_n \in U_{n-1}$, tais que $a_n y = x_n$. Por construção, $x_n \in Ay$ e $x_n \to y$, e assim temos que $y \in \overline{Ay}$. Pela arbitrariedade de $A \in \mathcal{F}$, $y \in \omega(y, \mathcal{F})$. □

Para o próximo teorema, assumiremos que a ação é aberta.

Teorema 15. *Seja M um espaço métrico completo. Assuma que todo $x \in M$ é $\mathcal{F}$-não dispersivo e que a ação é aberta. Então o conjunto P dos pontos $\mathcal{F}$-regressivamente Poisson estáveis é denso em M.*

Demonstração: Fixe $A \in \mathcal{F}$ e sejam $x \in M$ e $\varepsilon > 0$. Acharemos $y \in \mathrm{B}(x, \varepsilon)$ tal que $y \in \omega^*(y, \mathcal{F})$. Tome $U = \mathrm{B}\,(x, \varepsilon)$. Desde que $U \cap AU \neq \emptyset$, existem $x_1 \in U \cap AU$ e $\frac{1}{2} > \varepsilon_1 > 0$, tais que $U_1 = \mathrm{B}\,(x_1, \varepsilon_1) \subset U \cap AU$. Como, $U_1 \cap AU_1 \neq \emptyset$, existem $x_2 \in U_1 \cap AU_1$ e $\frac{1}{3} > \varepsilon_2 > 0$, tais que $U_2 = \mathrm{B}\,(x_2, \varepsilon_2) \subset U_1 \cap AU_1$. Como, $U_2 \cap AU_2 \neq \emptyset$, existem $x_3 \in U_2 \cap AU_2$ e $\frac{1}{4} > \varepsilon_3 > 0$, tais que $U_3 = \mathrm{B}\,(x_3, \varepsilon_3) \subset U_2 \cap AU_2$. Procedendo desta forma, obtemos uma sequência de conjuntos abertos $\{U_n\}$, tais que $U_{n+1} \subset U_n$ e $\mathrm{diam} U_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Como M é completo, temos que $\bigcap_n U_n = \{y\}$. Como $y \in U_n$ para todo n, temos que existem $a_n \in A$ e $x_n \in U_{n-1}$, tais que $a_n x_n = y$. Como por construção, $x_n \in A^* y$ e $x_n \to y$, temos que $y \in \overline{A^* y}$. Pela arbitrariedade de $A \in \mathcal{F}$, $y \in \omega^*(y, \mathcal{F})$. $\square$

A seguir, assumiremos que a ação é aberta e sobrejetiva.

Corolário 3. *Seja M um espaço métrico completo. Assuma que todo $x \in M$ é $\mathcal{F}$-não dispersivo e a ação é aberta e sobrejetiva. Então o conjunto P dos pontos $\mathcal{F}$-Poisson estável é denso em M.*

Demonstração: Consequência imediata dos teoremas anteriores. $\square$

3.1.2 Dispersividade para ações de semigrupos

Nesta seção, apresentaremos os conceitos de dispersividade para ações de semigrupos e mostraremos algumas relações destes conceitos com os conjuntos limites prolongacionais e pontos quase periódicos. Sendo assim, assumiremos que M é um espaço admissível com família admissível $\mathcal{O}$.

Definição 21. *Dado $x \in M$, x é chamado de* ***$\mathcal{F}$-progressivamente Poisson instável*** *se $x \notin \omega(x, \mathcal{F})$. Se $x \notin \omega^*(x, \mathcal{F})$ então x é chamado de* ***$\mathcal{F}$-regressivamente Poisson instável****. Quando $x \notin \omega(x, \mathcal{F})$ e $x \notin \omega^*(x, \mathcal{F})$, então x é chamado de* ***$\mathcal{F}$-Poisson instável****. Se $x \notin J(x, \mathcal{F})$, então x é chamado de* ***$\mathcal{F}$-dispersivo****.*

Definição 22. *A ação de S sobre M é dita é:*

1. ***$\mathcal{F}$-progressivamente Poisson instável*** *se para cada $x \in M$, x é $\mathcal{F}$-progressivamente Poisson instável.*

2. ***$\mathcal{F}$-regressivamente Poisson instável*** *se para cada $x \in M$, x é $\mathcal{F}$-regressivamente Poisson instável.*

3. ***$\mathcal{F}$-Poisson instável****, se para cada $x \in M$, x é $\mathcal{F}$-Poisson instável.*

4. *$\mathcal{F}$-**completamente instável,** se para cada $x \in M$, x é $\mathcal{F}$-dispersivo.*

5. *$\mathcal{F}$-**dispersiva** se para cada $x, y \in M$, existem vizinhanças U_x de x e U_y de y, tal que U_x não é $\mathcal{F}$-progressivamente recursivo com respeito a U_y, ou seja, existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $U_x \cap AU_y = \emptyset$.*

Teorema 16. *Dada a ação de S em M, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A ação é $\mathcal{F}$-dispersiva.*

2. *Para dados $x, y \in M$, $y \notin J(x, \mathcal{F})$.*

3. *Dado $x \in M$, $J(x, \mathcal{F}) = \emptyset$.*

Demonstração: Assumindo (1), dados $x, y \in M$ temos que existem vizinhanças U_x de x, $U_y$de y e $A \in \mathcal{F}$ tais que $U_y \cap AU_x = \emptyset$. Como $\mathcal{O}$ é admissível, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathrm{B}(x, \mathcal{V}) \subset U_x$. Assim $A\mathrm{B}(x, \mathcal{V}) \subset AU_x$ e $U_y \cap A\mathrm{B}(x, \mathcal{V}) = \emptyset$. Com estas informações temos que $y \notin \overline{A\mathrm{B}(x, \mathcal{V})}$, ou seja, $y \notin J(x, \mathcal{F})$, o que mostra que (1) implica em (2). Para mostrar que (2) implica em (3), observe que se $J(x, \mathcal{F}) \neq \emptyset$ para algum $x \in M$, então existe $y \in M$ tal que $y \in J(x, \mathcal{F})$. Finalmente, para mostrar que (3) implica em (1) tome $x, y \in M$, e assuma que $J(y, \mathcal{F}) = \emptyset$. Então $x \notin \overline{A\mathrm{B}(y, \mathcal{V})}$ para algum $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ e $A \in \mathcal{F}$. Assim, existe uma vizinhança U_x de x tal que $U_x \cap A\mathrm{B}(y, \mathcal{V}) = \emptyset$. Fixadas as vizinhanças U_x de x, $\mathrm{B}(y, \mathcal{V})$ de y dadas acima, temos que U_x não é $\mathcal{F}$-progressivamente recursivo com respeito a $\mathrm{B}(y, \mathcal{V})$. Pela arbitrariedade de $x, y \in M$, temos que a ação é $\mathcal{F}$-dispersivo. $\square$

Exemplo 6. *Considere o sistema dinâmico em $\mathbb{R}^2$ definido pelas equações diferenciais*

$$x' = \sin y \ \text{ e } \ y' = \cos^2 y.$$

O sistema dinâmico contém em particular trajetórias μ_k dadas por

$$\mu_k = \{(x, y) : y = k\pi + \frac{\pi}{2}\}, \qquad k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots.$$

Essas linhas são paralelas ao eixo x. Entre quaisquer duas μ_k's consecutivas, as trajetórias são dadas por

$$\mu = \{(x, y) : x + c = \sec y\},$$

onde c é uma constante que depende da trajetória. O retrato de fase entre as linhas $y = -\frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{\pi}{2}$, é mostrada na figura abaixo. Esse sistema é completamente instável mas não é dispersivo. Isto segue do fato que para cada ponto $p \in \mu_{-1}$, $J^+(p) = \mu_0$ e para todos os pontos $p \notin \mu_k$, $J^+(p) = \emptyset$. Assim, $p \notin J^+(p)$ para todo $p \in \mathbb{R}^2$, mas existe $p \in \mu_{-1}$ tal que $J^+(p) \neq \emptyset$.

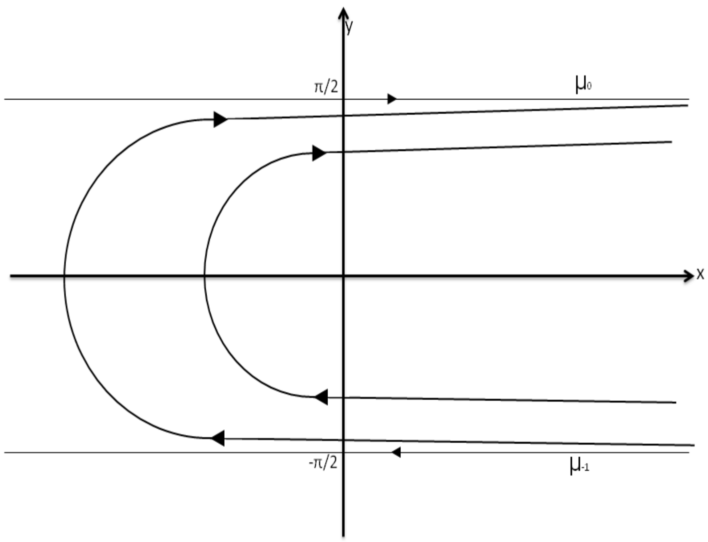


Figura 3.1:

Teorema 17. *Sejam S um semigrupo topológico, $\mathcal{F}$ um ideal à direita satisfazendo H_3 e suponha que para todo $A \in \mathcal{F}$, A^C é compacto em S. A ação é $\mathcal{F}$-dispersiva se, e somente se, $D(x, S) = Sx$ para todo $x \in M$ e não existe ponto quase periódico em M.*

Demonstração: Suponha que $J(x, \mathcal{F}) = \emptyset$ para todo $x \in M$. Pelo Teorema 9, $D(x, S) = Sx$ para todo $x \in M$. Se existe um ponto $x \in M$ quase periódico então pela Proposição 11, $\emptyset \neq \omega(x, \mathcal{F}) = \overline{Sx}$, ou seja, $\emptyset \neq \omega(x, \mathcal{F}) \subset J(x, \mathcal{F})$, o que é absurdo pois assumimos que $J(x, \mathcal{F}) = \emptyset$. Agora, suponha que $D(x, S) = Sx$ e que não existem pontos quase periódicos. Desde que $D(x, S)$ é fechado, temos que Sx é fechado para todo $x \in M$. Suponha por contradição que $J(x, \mathcal{F}) \neq \emptyset$, para algum $x \in M$. Assim, $J(x, \mathcal{F}) \subset Sx$. Dado $y \in J(x, \mathcal{F})$, então $y \in Sx$ e $x \in J^*(y, \mathcal{F})$. Como $\mathcal{F}$ satisfaz H_3, $J^*(y, \mathcal{F})$ é progressivamente invariante, logo, $Sx \subset J^*(y, \mathcal{F})$, e como $y \in Sx$ temos $y \in J^*(y, \mathcal{F})$, ou seja, $y \in J(y, \mathcal{F})$. Sabendo que $\mathcal{F}$ satisfaz H_1, temos que $J(y, \mathcal{F})$ é progressivamente invariante, o que implica, $Sy \subset J(y, \mathcal{F})$, e como por hipótese temos $J(y, \mathcal{F}) \subset Sy$, então $J(y, \mathcal{F}) = Sy$. Como $y \in J^*(y, \mathcal{F})$ e $J(y, \mathcal{F})$ é progressivamente invariante, $J(y, \mathcal{F}) \subset J^*(y, \mathcal{F})$. Tomando $z \in J(y, \mathcal{F})$ e seguindo os mesmos argumentos feitos acima, temos que $y \in J(z, \mathcal{F}) = Sz$. Assim $y \in Sz$ e, portanto, $J(y, \mathcal{F})$ é minimal, o que implica que y é um ponto quase periódico, o que é contradição. $\square$

Observe que mesmo não mencionando uma topologia em S, podemos considerar S munido da topologia discreta.

Sabemos que um espaço métrico M é um espaço admissível e que um fluxo em M define uma ação de $\mathbb{R}_+$ em M. Mostramos no Capitulo 2 que tomando o filtro de Frechet $\mathcal{F} = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$, os conceitos de conjuntos limites, prolongamentos e conjuntos limites prolongacionais para ações de semigrupos generalizam os conceitos para sistemas dinâmicos, e é claro que esta família satisfaz as hipóteses de translação da Definição 13. Sendo assim, se aplicarmos esta estrutura na teoria apresentada neste capítulo, os resultados coincidem com os resultados desenvolvidos para sistemas dinâmicos em [1].

No próximo exemplo, veremos que o conceito de dispersividade depende da família $\mathcal{F}$.

Exemplo 7. *Seja a ação de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}$, dada por $tx = t + x$. Note que tomando a família $\mathcal{F} = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$, temos que para todo $x \in \mathbb{R}$, $J(x, \mathcal{F}) = \emptyset$, ou seja, a ação é $\mathcal{F}-$dispersiva. Mas tomando a familia $\mathcal{F}' = \{\mathbb{R}\}$, temos que para todo $x \in \mathbb{R}$, $J(x, \mathcal{F}') = (x, \infty)$, ou seja, a ação não é $\mathcal{F}'-$dipersiva.*

Capítulo 4

Dispersividade e Recursividade para Sistemas de Controle

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos de conjuntos prolongacionais em sistemas de controle com finalidade de trabalhar os conceitos de dispersividade e recursividade. Os resultados apresentados neste capítulo são referentes ao artigo [19].

4.1 Conjuntos Limites Prolongacionais

Primeiro, apresentaremos os conceitos necessários para o estudo em sistema de controle conforme desenvolvido em [8]. Em seguida, iniciaremos os estudos de conjuntos limites para sistemas de controle de acordo com [6] e os conceitos de prolongamentos e conjuntos limites prolongacionais para sistemas de controle.

Para iniciarmos o assunto, seja M uma variedade diferenciável C^∞, conexa de dimensão n. Considere o sistema de controle

$$x'(t) = X_0(x(t)) + \textstyle\sum_{i=1}^{n} u_i X_i(x(t)), \tag{1}$$

onde $u \in \mathcal{U}_{cp} = \{u : \mathbb{R} \to U$, constante por partes $\}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ e $X_0, \dots, X_n$ são campos de vetores C^∞ de M. Assuma que para $u \in \mathcal{U}_{cp}$ e $x \in M$, o sistema tem única solução $\varphi(t, x, u)$, $t \in \mathbb{R}$ com $\varphi(0, x, u) = x$ e os campos de vetores X_u, $u \in U$ são completos. O sistema de controle é determinado pelo conjunto de campos de vetores $\mathcal{V} = \{X_u : u \in U\}$. O semigrupo do sistema é o semigrupo de difeomorfismos de M definido por

$$S = \{e^{t_n Y_n} e^{t_{n-1} Y_{n-1}} \dots e^{t_0 Y_0} : Y_j \in \mathcal{V}, t_j \geq 0, n \in \mathbb{N}\}.$$

As órbitas positiva e negativa a partir de $x \in M$ são respectivamente os conjuntos

$$Sx = \{y \in M : \text{existe } u \in \mathcal{U}_{cp} \text{ e } t \geq 0 \text{ com } y = \varphi(t, x, u)\},$$

$$S^*x = \{y \in M : \text{existe } u \in \mathcal{U}_{cp} \text{ e } t \geq 0 \text{ com } y = \varphi(-t, x, u)\}.$$

Dado $T > 0$, definimos os conjuntos:

$$S_{\leq T} = \{e^{t_n Y_n} e^{t_{n-1} Y_{n-1}} \ldots e^{t_0 Y_0} : Y_j \in \mathcal{V}, \sum_{j=0}^{n} t_j \leq T, n \in \mathbb{N}\},$$

$$S_{\geq T} = \{e^{t_n Y_n} e^{t_{n-1} Y_{n-1}} \ldots e^{t_0 Y_0} : Y_j \in \mathcal{V}, \sum_{j=0}^{n} t_j \geq T, n \in \mathbb{N}\}.$$

Note que, $Sx = \bigcup_{t>0} S_{\leq t}x$ e $S^*x = \bigcup_{t>0} S^*_{\leq t}x$, onde

$$S_{\leq T}x = \{y \in M : \text{existe } 0 \leq t \leq T \text{ e } u \in \mathcal{U}_{cp} \text{ com } y = \varphi(t, x, u)\} \text{ e}$$

$$S^*_{\leq T}x = \{y \in M : \text{existe } 0 \leq t \leq T \text{ e } u \in \mathcal{U}_{cp} \text{ com } y = \varphi(-t, x, u)\}.$$

A família $\mathcal{F}_c = \{S_{\geq T} : T \geq 0\}$ de subconjuntos de S é uma base de filtro de S, ou seja, $\emptyset \notin \mathcal{F}_c$ e para $t, s > 0$, $S_{\geq t+s} \subset S_{\geq t} \cap S_{\geq s}$. Observe também que a família $\mathcal{F}_c$ satisfaz as hipóteses H_1 e H_2. Na verdade, $\mathcal{F}_c$ é ideal à direita e à esquerda.

De acordo com o Capítulo 4 de [8], se o conjunto de controle $U \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e convexo, então $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}_{cp}}$ munido com a topologia "fraca"em $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ é um espaço compacto Hausdorff e a seguinte aplicação

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \times \mathcal{U} \to M, \qquad (t, x, u) \to \varphi(t, x, u)$$

é contínua. Sendo assim, assumiremos que o conjunto de controle $U \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e convexo. Neste caso, $\overline{S_{\leq T}x}$ e $\overline{S^*_{\leq T}x}$ são compactos para todo $T > 0$ e $x \in M$, pois

$$\overline{S_{\leq T}x} = \varphi([0, T] \times \{x\} \times \mathcal{U}) \text{ e}$$

$$\overline{S^*_{\leq T}x} = \varphi([-T, 0] \times \{x\} \times \mathcal{U}).$$

Definidos os conceitos iniciais, o que iremos trabalhar é praticamente a aplicação dos Capítulos 2 e 3, onde a ação é a ação do semigrupo do sistema em M, e a família de subconjuntos do semigrupo do sistema é a família $\mathcal{F}_c$. O desenvolvimento deste capítulo mostrará alguns resultados que são válidos para sistema de controle, mas não são válidos em geral. Apresentaremos alguns resultados já demonstrados para ações de semigrupos, mas com demonstrações distintas, específicas para sistemas de controle.

A seguir definiremos o conceito de conjuntos invariantes e conjuntos limites.

Definição 23. *Para um subconjunto X de M, dizemos que X é **positivamente invariante** se $Sx \subset X$ para todo $x \in X$, **negativamente invariante** se $S^*x \subset X$ para todo $x \in X$ e **invariante** se X é positivamente e negativamente invariante.*

Definição 24. *O **conjunto omega limite** de $x \in M$ é definido por*

$$\omega(x) = \bigcap_{t>0} \overline{S_{\geq t}x}$$

$$= \{y \in M : \text{existem sequências } t_n \to +\infty \text{ e } (u_n) \text{ em } \mathcal{U}_{cp} \text{ tais que } \varphi(t_n, x, u_n) \to y\}$$

*e o **conjunto omega* limite** de $x \in M$ é definido por*

$$\omega^*(x) = \bigcap_{t>0} \overline{S^*_{\geq t}x}$$

$$= \{y \in M : \text{existem sequências } t_n \to -\infty \text{ e } (u_n) \text{ em } \mathcal{U}_{cp} \text{ tais que } \varphi(t_n, x, u_n) \to y\}.$$

Os próximos resultados são sobre as relações dos conjuntos limites de um ponto com as suas respectivas orbitas.

Teorema 18. *Para todo $x \in M$, $\overline{Sx} = Sx \cup \omega(x)$ e $\overline{S^*x} = S^*x \cup \omega^*(x)$.*

Demonstração: Pela definição de $\omega(x)$, temos de imediato que $Sx \cup \omega(x) \subset \overline{Sx}$. Agora, para $y \in \overline{Sx}$, temos que existe uma sequência $(y_n) \subset Sx$, tal que $y_n \to y$. Note que $y_n = \varphi(t_n, x, u_n)$ para $t_n \in \mathbb{R}^+$ e $u_n \in \mathcal{U}_{cp}$. Assim, a sequência (t_n) pode possuir uma subsequência (t_{n_k}) que converge para algum $t \in \mathbb{R}^+$ ou $t_n \to +\infty$. Se $t_n \to +\infty$ então pela definição de conjunto omega limite, $y \in \omega(x)$. Se existe uma subsequência

(t_{n_k}) tal que $t_{n_k} \to t$, então $\varphi(t_{n_k}, x, u_n) \to \varphi(t, x, u)$ para algum $u \in \mathcal{U}_{cp}$. Pela unicidade do limite temos $y = \varphi(t, x, u) \in Sx$, concluíndo que $\overline{Sx} \subset Sx \cup \omega(x)$. Portanto $\overline{Sx} = Sx \cup \omega(x)$. Analogamente mostra-se que $\overline{S^*x} = S^*x \cup \omega^*(x)$. □

Teorema 19. *Dado $x \in M$, se $\omega(x)$ é não vazio e compacto então Sx é compacto.*

Demonstração: Seja K uma vizinhança compacta de $\omega(x)$, tal que $\partial K \cap \omega(x) = \emptyset$. Note que existe $t > 0$ tal que $S_{\geq t}x \subset K$. De fato, suponha que existem sequências (t_n) em $\mathbb{R}^+$ e (u_n) em $\mathcal{U}_{cp}$, com $t_n \to +\infty$ e $\varphi(t_n, x, u_n) \in \partial K$. Como ∂K é compacto, podemos assumir que $\varphi(t_n, x, u_n) \to y \in \partial K$. Assim, temos que $y \in \partial K \cap \omega(x)$, o que é absurdo. Sabendo que $Sx = \overline{S_{\leq t}x} \cup S_{\geq t}x$, então $\overline{Sx} = \overline{S_{\leq t}x} \cup \overline{S_{\geq t}x}$ é compacto, pois $\overline{S_{\leq t}x}$ é compacto e $\overline{S_{\geq t}x}$ é um subconjunto fechado do conjunto compacto K. Portanto $\overline{Sx}$ é compacto. □

Teorema 20. *Para todo $x \in M$, $\omega(x)$ é conexo sempre que $\omega(x)$ é compacto.*

Demonstração: Se $\omega(x) = \emptyset$ não a nada o que demonstrar. Se $\omega(x)$ é não vazio e desconexo então existem dois conjuntos compactos não vazios P e Q, tais que $\omega(x) = P \cup Q$ e $P \cap Q = \emptyset$. Sejam K_P e K_Q vizinhanças compactas e disjuntas de P e Q respectivamente. Agora, dados $y \in P$ e $z \in Q$, existem sequências (t_n) e (t'_n) em $\mathbb{R}^+$, (u_n) e (u'_n) em $\mathcal{U}_{cp}$, com $t_n \to +\infty$ e $t'_n \to +\infty$, tais que $\varphi(t_n, x, u_n) \to y$ e $\varphi(t'_n, x, u'_n) \to z$. Assumiremos sem perda de generalidade que $\varphi(t_n, x, u_n) \in K_P$, $\varphi(t'_n, x, u'_n) \in K_Q$ e $t'_n - t_n > 0$ para todo n. Desde que $\varphi([t'_n, t_n], x, u'_n)$ é compacto e conexo para todo n, temos claramente que estes segmentos interceptam ∂K_P e ∂K_Q. Assim, existe uma sequência (τ_n), com $t_n \leq \tau_n < t'_n$, tal que $\varphi(\tau_n, x, u_n) \in \partial K_P$. Como ∂K_P é compacto, podemos assumir que $\varphi(\tau_n, x, u_n) \to y' \in \partial K_P$ e $\tau_n \to +\infty$, ou seja, $y' \in \omega(x)$ com $y' \notin P \cup Q$ que é uma contradição. □

Proposição 20. *Seja $x \in M$. Para todo $s > 0$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$, temos que $\omega(\varphi(s,x,u)) \subset \omega(x)$ e $\omega(\varphi(-s,x,u)) \subset \omega^*(x)$.*

Demonstração: Dado $y \in \omega(\varphi(s,x,u))$, então existem seuqências (t_n) em $\mathbb{R}^+$ e (u_n) em $\mathcal{U}_{cp}$, com $t_n \to +\infty$ e $\varphi(t_n, \varphi(s,x,u), u_n) \to y$. Sabendo que para cada n, existe $v_n \in \mathcal{U}_{cp}$ tal que $\varphi(t_n, \varphi(s,x,u), u_n) = \varphi(t_n + s, x, v_n)$, temos $\varphi(t_n + s, x, v_n) \to y$ e $y \in \omega(x)$. Analogamente mostra que $\omega(\varphi(-s,x,u)) \subset \omega^*(x)$. $\square$

A seguir, introduziremos as noções de prolongamentos e conjuntos limites prolongacionais para sistemas de controle. Sendo assim, M esta munido da métrica Riemanniana.

Definição 25. *Dados $x \in M$ e $t \geq 0$, o* ***primeiro t-prolongamento positivo*** *e o* ***primeiro t-prolongamento negativo de*** *x são respectivamente os conjuntos:*

$$D^+(x,t) = \bigcap_{\epsilon>0} \overline{S_{\geq t}\mathrm{B}(x,\epsilon)} \quad e \quad D^-(x,t) = \bigcap_{\epsilon>0} \overline{S^*_{\geq t}\mathrm{B}(x,\epsilon)}.$$

Observe que $D^+(x,0) = \bigcap_{\epsilon>0} \overline{S\mathrm{B}(x,\epsilon)}$ e $D^-(x,0) = \bigcap_{\epsilon>0} \overline{S^*\mathrm{B}(x,\epsilon)}$. Para simplificar a notação, denotaremos por $D^+(x,0) = D^+(x)$ e $D^-(x,0) = D^-(x)$.

A seguir, forneceremos definições equivalentes sobre os prolongamentos.

Proposição 21. *Dados $x \in M$ e $t \geq 0$, então $D(x,t) = \{y \in M$; existem sequências $(t_n) \subset [t, +\infty)$, $(u_n) \subset \mathcal{U}_{cp}$ e $(x_n) \subset M$ tais que $x_n \to x$ e $\varphi(t_n, x_n, u_n) \to y\}$.*

Demonstração: Aplicando a Proposição 12, temos $D(x,t) = \{y \in M$; existem sequências $(\varphi(t_n, \cdot, u_n))$ em $S_{\geq t}$ e $(x_n) \subset M$ tais que $x_n \to x$ e $\varphi(t_n, x_n, u_n) \to y\}$, isto é, $D(x,t) = \{y \in M$; existem sequências $(t_n) \subset [t, +\infty)$, $(u_n) \subset \mathcal{U}_{cp}$ e $(x_n) \subset M$ tais que $x_n \to x$ e $\varphi(t_n, x_n, u_n) \to y\}$. $\square$

Proposição 22. *Dados $x \in M$ e $t \geq 0$, então $D^-(x,t) = \{y \in M$; existem sequências $(t_n) \subset [t, +\infty)$, $(u_n) \subset \mathcal{U}_{cp}$ e $(x_n) \subset M$ tais que $x_n \to x$ e $\varphi(-t_n, x_n, u_n) \to y\}$.*

Demonstração: Aplicando a Proposição 13, $D^{-}(x,t) = \{y \in M$; existem sequências $(\varphi(t_n, \cdot, u_n))$ em $S_{\geq t}$ e $(y_n) \subset M$ tais que $(\varphi(t_n, y_n, u_n)) \to x$ e $y_n \to y\}$, se e somente se, $D^{-}(x,t) = \{y \in M$; existem sequências $(t_n) \subset [t, +\infty)$, $(u_n) \subset \mathcal{U}_{cp}$ e $(x_n) \subset M$ tais que $x_n \to x$ e $\varphi(-t_n, x_n, u_n) \to y\}$, onde $x_n = \varphi(t_n, y_n, u_n)$. □

Para o próximo teorema a ser demonstrado, usaremos o seguinte resultado topológico.

Teorema 21. *Sejam M um espaço Hausdorff contínuo (um espaço compacto Haudorff conexo), U um subconjunto aberto de M e C uma componente de U. Então $\overline{U} - U$ contém um ponto limite de C.*

Teorema 22. *Para qualquer $x \in M$ e $t \geq 0$, $D^{+}(x,t)$ é conexo sempre que $D^{+}(x,t)$ é compacto. Se $D^{+}(x,t)$ não é compacto, então existe uma componente não compacta.*

Demonstração: Suponha que $D^{+}(x,t)$ é compacto e não conexo. Assim existem dois conjuntos compactos não vazios e disjuntos P e Q, tais que $P \cup Q = D^{+}(x,t)$. Como P e Q são compactos, existem vizinhanças compactas K_P e K_Q de P e Q respectivamente, tais que $K_P \cap K_Q = \emptyset$. Note que, $x \in Q$ ou $x \in P$. Vamos supor que $x \in P$. Então existem sequências (t_n) em $[t, +\infty)$, (u_n) em $\mathcal{U}_{cp}$ e (x_n) em M, tais que $x_n \to x$ e $\varphi(t_n, x_n, u_n) \to y \in Q$. Assumiremos que $x_n \in K_P$ e $\varphi(t_n, x_n, u_n) \in K_Q$. Observe que os segmentos $\varphi([t, t_n], x_n, u_n)$ interceptam ∂K_P para todo n. Assim, existe uma sequência (τ_n) com $t \leq \tau_n \leq t_n$, tal que $\varphi(\tau_n, x_n, u_n) \in \partial K_P$. Desde que ∂K_P é compacto temos que $\varphi(\tau_n, x_n, u_n) \to z \in \partial K_P$. Logo existe $z \in D^{+}(x,t)$, tal que $z \notin P \cup Q$, absurdo. Portanto $D^{+}(x,t)$ é conexo.

Agora, provaremos a segunda parte do teorema. Considere a compactificação de Alexandrov $M^{*} = M \cup \{\infty\}$ da variedade M. Para cada $x \in M$, defina o conjunto:

$D^{*}(x,t) = \{y \in M^{*}$; existem sequências$(t_n)$ em $[t, +\infty), (u_n)$ em $\mathcal{U}_{cp}$ e (x_n) em M, tais que $x_n \to x$ e $\varphi(t_n, x_n, u_n) \to y\}$.

O conjunto $D^{*}(x,t)$ é um subconjunto compacto de M^{*}, pois $D^{*}(x,t) =$

$D^+(x,t) \cup \{\infty\}$. Usando os mesmos argumentos da primeira parte da demonstração, vemos que $D^*(x,t)$ é conexo. Agora, se $D^+(x,t)$ não é compacto, temos que $D^+(x,t)$ é um subconjunto aberto de $D^*(x,t)$ (Estamos asumindo que $D^*(x,t)$ é um espaço topológico com a topologia induzida de M^*). Pelo resultado topológico apresentado anteriormente, cada componente de $D^+(x,t)$, tem um ponto limite em $D^*(x,t) - D^+(x,t) = \{\infty\}$. Assim nenhuma componente de $D^+(x,t)$ é compacta. $\square$

Agora, mostraremos que os primeiros t-prolongamentos positivos são positivamente invariante e os primeiros t-prolongamentos negativos são respectivamente negativamente invariantes.

Proposição 23. *Para $x \in M$ e $t \geq 0$, os conjuntos $D^+(x,t)$ e $D^-(x,t)$ são respectivamente, positivamente invariante e negativamente invariante.*

Demonstração: Faremos a demonstração para o caso do conjunto $D^+(x,t)$, pois para o caso $D^-(x,t)$ a demonstração é análoga. Para $x \in M$ e $t \geq 0$, fixe $y \in D^+(x,t)$ e tome $w \in Sy$. Assim, existem $u \in \mathcal{U}_{cp}$ e $t' > 0$ tais que $\varphi(t', y, u) = w$ e sequências $(t_n) \subset [t, +\infty)$, $(x_n) \subset M$ e $(u_n) \subset \mathcal{U}_{cp}$, tais que $x_n \to x$ e $\varphi(t_n, x_n, u_n) \to y$. Agora, para cada n, existe $v_n \in \mathcal{U}_{cp}$ tal que $\varphi(t', \varphi(t_n, x_n, u_n), u) = \varphi(t' + t_n, x_n, v_n)$. Então, tomando as sequências $(t' + t_n) \subset [t, +\infty)$, $(x_n) \subset M$ e $(v_n) \subset \mathcal{U}_{cp}$, temos $x_n \to x$ e $\varphi(t' + t_n, x_n, v_n) = \varphi(t', \varphi(t_n, x_n, u_n), u) = \varphi(t', y, u) = w$, ou seja, $w \in D^+(x,t)$, provando que $D^+(x,t)$ é positivamente invariante. $\square$

A seguir, definiremos conjuntos limites prolongacionais para um ponto qualquer do espaço.

Definição 26. *O **primeiro conjunto limite prolongacional positivo** de $x \in M$ é o conjunto*

$$J^+(x) = \bigcap_{t>0} D^+(x,t),$$

*e o **primeiro conjunto limite prolongacional negativo** é o conjunto*

$$J^-(x) = \bigcap_{t>0} D^-(x,t).$$

O seguinte resultado caracteriza os conjuntos limites prolongacionais para sistemas de controle.

Teorema 23. *Para $x \in M$,*

$$J^+(x) = \{y \in M : \textit{existem sequências } (t_n) \subset \mathbb{R}^+,\ (x_n) \subset M \textit{ e } (u_n) \subset \mathcal{U}_{cp} \textit{ onde}$$
$$t_n \to +\infty,\ x_n \to x \textit{ e } \varphi(t_n, x_n, u_n) \to y\} \textit{ e}$$
$$J^-(x) = \{y \in M : \textit{existem sequências } (t_n) \subset \mathbb{R}^-,\ (x_n) \subset M \textit{ e } (u_n) \subset \mathcal{U}_{cp} \textit{ onde}$$
$$t_n \to -\infty,\ x_n \to x \textit{ e } \varphi(t_n, x_n, u_n) \to y\}.$$

Demonstração: Aplicando o Teorema 7, obtemos a primeira igualdade. Para $y \in J^-(x)$ temos que para todo $t > 0$ existem sequências $(t_n^t) \subset \mathbb{R}^-$, $(x_n^t) \subset M$ e $(u_n^t) \subset \mathcal{U}_{cp}$ onde $x_n^t \to x$ e $\varphi(t_n^t, x_n^t, u_n^t) \to y$. Note que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um índice m_n tal que $x_{m_n}^n \in \mathrm{B}(x, \frac{1}{n})$ e $\varphi(t_{m_n}^n, x_{m_n}^n, u_{m_n}^n) \in \mathrm{B}(y, \frac{1}{n})$. Tomando as sequências $(x_{m_n}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(t_{m_n}^n)$ e usando o fato que $t_{m_n}^n \leq -n$, temos que $x_{m_n}^n \to x$, $t_{m_n}^n \to -\infty$ e $\varphi(t_{m_n}^n, x_{m_n}^n, u_{m_n}^n) \to y$, mostrando a primeira inclusão. Para a outra inclusão, suponha que para $y \in M$, existem sequências $(t_n) \subset \mathbb{R}^-$, $(x_n) \subset M$ e $(u_n) \subset \mathcal{U}_{cp}$ onde $t_n \to -\infty$ e $x_n \to x$ e $\varphi(t_n, x_n, u_n) \to y$. Fixado $t > 0$, existe um índice n_t tal que para $m > n_t$, $-t_m > t$. Assim, tomando as subsequências $(-t_m)_{m>n_t} \subset [t, +\infty)$, $(x_m)_{m>n_t} \subset M$ e $(u_m)_{m>n_t} \subset \mathcal{U}_{cp}$ temos que $x_m \to x$ e $\varphi(t_m, x_m, u_m) \to y$, provando que $y \in D^-(x,t)$. Como t é arbitrário, temos que $y \in J^-(x)$. $\square$

Definição 27. *Um sistema de controle satisfaz as **hipóteses de translação** se para todo $g \in S$ e $t > 0$, existe $s > 0$ tal que $S_{\geq s} \subset S_{\geq t}g$ e se para todo $g \in S$ e $t > 0$, existe $s > 0$ tal que $S_{\geq s} \subset gS_{\geq t}$.*

Teorema 24. *Suponha que o sistema de controle satisfaz as hipóteses de translação. Para $x \in M$, $J^+(x)$ e $J^-(x)$ são invariantes sempre que são não vazios.*

Demonstração: Suponha que $J^+(x)$ é não vazio. Como $\mathcal{F}_c$ satisfaz a hipóetse H_1, temos pelo Teorema 8 que $J^+(x)$ é positivamente invariante. Sejam $y \in J^+(x)$, $g \in S^{-1}$ e $\epsilon, t > 0$. Pela hipótese de translação, existe $s > 0$ tal que $S_{\geq s} \subset g^{-1}S_{\geq t}$. Dado U uma vizinhança de $g(y)$ em M, então $g^{-1}(U)$ é uma vizinhança de y e $g^{-1}(U) \cap S_{\geq s}\mathrm{B}(x, \epsilon) \neq \emptyset$. Então, temos $\emptyset \neq U \cap gS_{\geq s}\mathrm{B}(x, \epsilon) \subset U \cap S_{\geq t}\mathrm{B}(x, \epsilon)$. Assim $g(y) \in \overline{S_{\geq t}\mathrm{B}(x, \epsilon)}$ e portanto $J^+(x)$ é negativamente invariante. Agora, suponha que $J^-(x)$ é não vazio. Como $\mathcal{F}_c$ satisfaz a hipóetse H_2 e a ação de S em M é aberta, temos pelo Teorema 8 que $J^-(x)$ é negativamente invariante. Sejam $z \in J^-(x)$, $g \in S$ e $\epsilon, t > 0$. Pela hipótese de translação, existe $s > 0$ tal que $S_{\geq s} \subset S_{\geq t}g$. Dado V uma vizinhança de $g(z)$ em M, temos $g^{-1}(V)$ vizinhança de z e $g^{-1}(V) \cap S^*_{\geq s}\mathrm{B}(x, \epsilon) \neq \emptyset$. Então, $\emptyset \neq V \cap gS^*_{\geq s}\mathrm{B}(x, \epsilon) \subset V \cap S^*_{\geq t}\mathrm{B}(x, \epsilon)$. Assim, $g(z) \in \overline{S^*_{\geq t}\mathrm{B}(x, \epsilon)}$ e portanto $J^-(x)$ é positivamente invariante. □

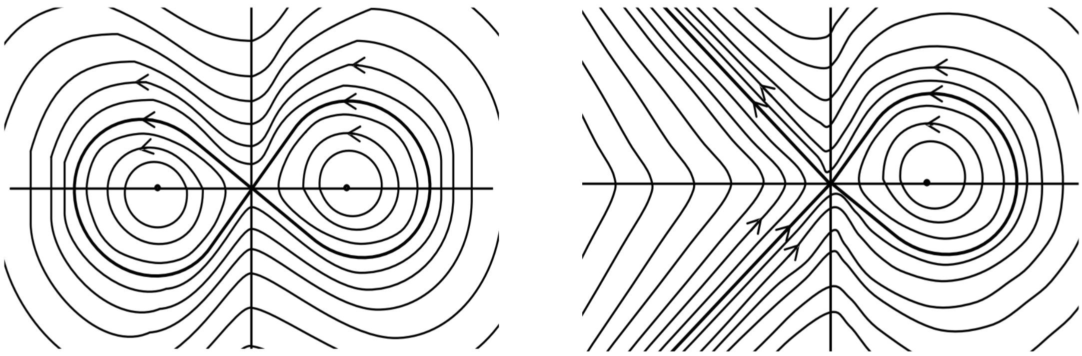
Teorema 25. *Para todo $x \in M$, temos que*

$$D^+(x) = Sx \cup J^+(x) = \overline{Sx} \cup J^+(x) \text{ e } D^-(x) = S^{-1}x \cup J^-(x) = \overline{S^{-1}x} \cup J^-(x).$$

Demonstração: É claro que $\overline{Sx} \cup J^+(x) \subset D^+(x)$. Por outro lado, dado $y \in D^+(x)$ existem sequências (t_n) em $\mathbb{R}^+$, (u_n) em $\mathcal{U}_{cp}$ e (x_n) em M, tais que $x_n \to x$ e $\varphi(t_n, x_n, u_n) \to y$. Suponha que $y \notin J^+(x)$. Assim, para qualquer sequência (s_n) em $\mathbb{R}^+$, (v_n) em $\mathcal{U}_{cp}$ e (y_n) em M, com $y_n \to x$ e $s_n \to +\infty$ então $\varphi(s_n, y_n, v_n) \not\to y$. Se $(t_n) \subseteq [0, a]$ para algum $a > 0$, então existe uma subsequência (t_{n_k}) que converge para algum $t \in [0, a]$ e uma subsequência (u_{n_k}) que converge para algum $u \in \mathcal{U}_{cp}$ e segue que $\varphi(t_{n_k}, x_{n_k}, u_{n_k}) \to \varphi(t, x, u)$. Assim, $y = \varphi(t, x, u) \in Sx$. Em outro caso, se $(t_n) \not\subseteq [0, a]$

para todo $a > 0$, existe uma subsequência $t_{n_k} \to +\infty$ e segue que $\varphi(t_{n_k}, x_{n_k}, u_{n_k}) \to y$ com $t_{n_k} \to +\infty$ e $x_{n_k} \to x$ que contradiz $y \notin J^+(x)$. Assim, $(t_n) \subseteq [0, a]$ para algum $a > 0$, o que implica que $y \in Sx$. Portanto $D^+(x) \subset Sx \cup J^+(x)$. Analogamente prova-se para $D^-(x)$. $\square$

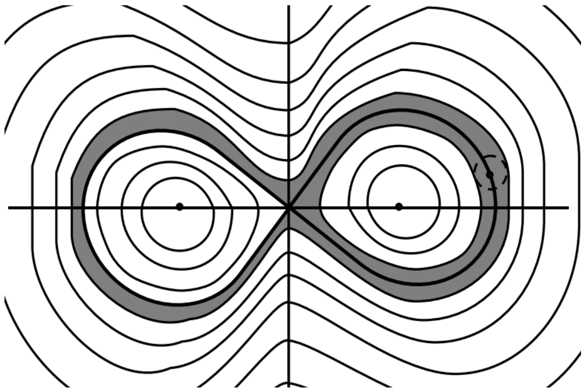
Exemplo 8. *Considere o sistema de controle em $M = \mathbb{R}^2$ determinado pelo conjunto de campo de vetores $F = \{X_1, X_2\}$ que tem trajetórias dadas pela Figura 4.1.*



Trajetória X_1 Trajetória X_2

Figura 4.1:

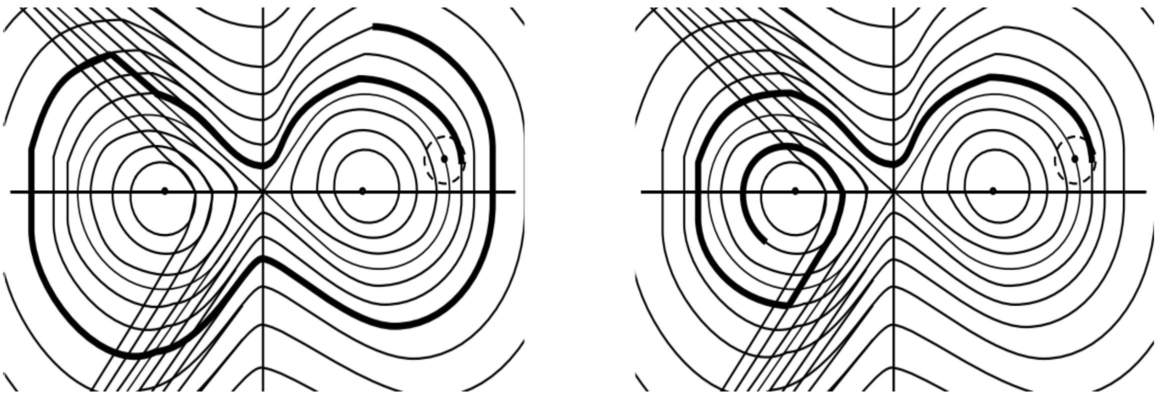
A origem 0 de $\mathbb{R}^2$ é um ponto hiperbólico singular em ambas as situações. O conjunto de trajetórias do campo de vetores X_1, contém duas gotas, que são conjuntos invariantes delimitados por órbitas homoclínicas de origem 0 e preenchido com soluções periódicas. O exterior do conjunto é formado pela união destas duas gotas e também preenchido com soluções periódicas. O conjunto de trajetórias do campo de vetores X_2 coincide com o de X_1 no subconjunto $\{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0\}$ de $\mathbb{R}^2$, mas não contém soluções periódicas fora da gota singular. Agora considere um ponto $x \neq 0$ no limite da gota à direita. Note que $\omega(x) = \{0\}$. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, o conjunto de trajetórias de X_1 para $\mathrm{B}(x, \epsilon)$ é ilustrado pela Figura 4.2.



Trajetória da gota à direita do campo X_1

Figura 4.2:

Juntando as trajetórias de X_1 e X_2, podemos construir trajetórias como ilustrado na Figura 4.3. As trajetórias resultantes feitas para os conjuntos $S_{\geq t}\mathrm{B}(x,\epsilon)$ (para todo $t>0$) formam a região em cinza da Figura 4.4. Assim, o primeiro conjunto limite prolongacional positivo $J^+(x)$ é a região fora da gota à direita juntamente com o seu limite. Em particular, $x \in J^+(x)$ e a inclusão $\omega(x) \subset J^+(x)$ é própria.



Trajetória dos campos X_1 e X_2.

Figura 4.3:

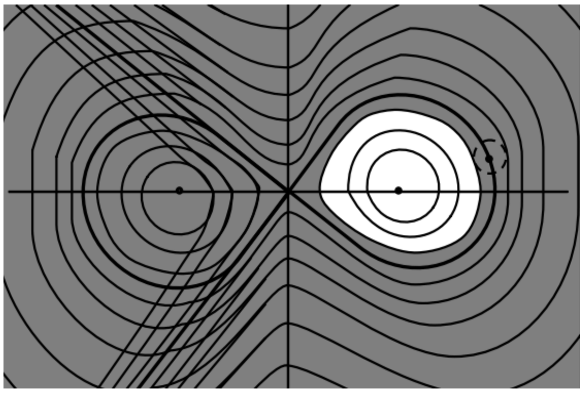


Figura 4.4:

Teorema 26. *Dado $x \in M$, então $\omega(x) \neq \emptyset$ sempre que $J^+(x)$ é compacto e não vazio. Analogamente, $\omega^*(x) \neq \emptyset$ sempre que $J^-(x)$ é compacto e não vazio.*

Demonstração: Se $J^+(x)$ é compacto e não vazio e $\omega(x) = \emptyset$, então temos que Sx é fechado e disjunto de $J^+(x)$. De fato, como $\omega(x) = \emptyset$, temos que $\overline{Sx} = Sx \cup \omega(x) = Sx$. Se $Sx \cap J^+(x) \neq \emptyset$, então existe $s > 0$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$ tal que $\varphi(s, x, u) \in J^+(x)$. Como $J^+(x)$ é compacto e positivamente invariante, temos que $\omega(\varphi(s, x, u)) \neq \emptyset$. Pela Proposição 20, segue que $\omega(x)$ é não vazio, contradizendo a condição de que $\omega(x) = \emptyset$. Assim, sabendo que Sx é fechado e disjunto de $J^+(x)$, então existe uma vizinhança compacta $K_{J^+(x)}$ de $J^+(x)$, tal que $K_{J^+(x)}$ é disjunta de Sx. Agora, dado $y \in J^+(x)$, existem sequências (t_n) em $\mathbb{R}^+$, (u_n) em $\mathcal{U}_{cp}$ e (x_n) em M, tais que $t_n \to +\infty$, $x_n \to x$ e $\varphi(t_n, x_n, u_n) \to y$. Assumiremos que $x \notin K_{J^+(x)}$ e $\varphi(t_n, x_n, u_n) \in K_{J^+(x)}$ para todo n. Como os segmentos $\varphi([0, t_n], x_n, u_n)$ interceptam $\partial K_{J^+(x)}$ para todo n, existe uma sequência (τ_n) com $0 \leq \tau_n \leq t_n$, tal que $\varphi(\tau_n, x_n, u_n) \in \partial K_{J^+(x)}$. Desde que $\partial K_{J^+(x)}$ é compacto temos que $\varphi(\tau_n, x_n, u_n) \to z \in \partial K_P$. Podemos tomar subsequência que $\tau_n \to t \in \mathbb{R}^+$ ou $\tau_n \to +\infty$. Se $\tau_n \to t \in \mathbb{R}^+$ então, pela continuidade, temos que $\varphi(\tau_n, x_n, u_n) \to \varphi(t, x, u) = z \in Sx$, para algum $u \in \mathcal{U}_{cp}$, contradizendo o fato de que $K_{J^+(x)}$ é disjunto de Sx. Se $\tau_n \to +\infty$, então $\varphi(\tau_n, x_n, u_n) \to z \in J^+(x)$, que contradiz o fato de que $z \in \partial K_{J^+(x)}$ e $\partial K_{J^+(x)} \cap J^+(x) = \emptyset$. Assim a hipótese de que $\omega(x) = \emptyset$ é insustentável. Para $\omega^*(x)$ a demonstração é análoga. □

Proposição 24. *Dado $x \in M$, $J^{+}(x)$ é não vazio e compacto se e somente se $D^{+}(x)$ é compacto. Analogamente, $J^{-}(x)$ é não vazio e compacto se e somente se $D^{-}(x)$ é compacto*

Demonstração: Se $J^{+}(x)$ é não vazio e compacto então, pelo teorema anterior, $\omega(x)$ é não vazio. Como $\omega(x)$ é fechado e $\omega(x) \subset J^{+}(x)$, temos que $\omega(x)$ é compacto. Uma vez que $\omega(x)$ é compacto, temos que $\overline{Sx}$ é compacto. Como $D^{+}(x) = \overline{Sx} \cup J^{+}(x)$ então $D^{+}(x)$ é compacto. Por outro lado, se $D^{+}(x)$ é compacto, segue do fato de que $Sx \subset D^{+}(x)$ que podemos tomar uma sequência $(\varphi(t_n, x, u_n))$, onde $(t_n) \subset \mathbb{R}^{+}$, $(u_n) \subset \mathcal{U}_{cp}$ e $t_n \to +\infty$, e obter uma subsequência de $(\varphi(t_{n_k}, x, u_{n_k}))$ de $(\varphi(t_n, x, u_n))$ tal que $\varphi(t_{n_k}, x, u_{n_k}) \to y$, ou seja, $y \in J^{+}(x)$, mostrando que $J^{+}(x)$ não é vazio. Por fim, sabendo que $J^{+}(x) \subset D^{+}(x)$, $J^{+}(x)$ é fechado e $D^{+}(x)$ é compacto, temos que $J^{+}(x)$ é compacto. Para $J^{-}(x)$ a demonstração é analoga. □

Teorema 27. *Dado $x \in M$, $J^{+}(x)$ é conexo sempre que $J^{+}(x)$ for compacto. Se $J^{+}(x)$ não é compacto, então $J^{+}(x)$ tem um componente não compacta. Analogamente, $J^{-}(x)$ é conexo sempre que $J^{-}(x)$ for compacto. Se $J^{-}(x)$ não é compacto, então $J^{-}(x)$ tem uma componente não compacta.*

Demonstração: Seja $J^{+}(x)$ compacto. Se $J^{+}(x) = \emptyset$, não a nada o que fazer. Assim tome $J^{+}(x) \neq \emptyset$. Se $J^{+}(x)$ é desconexo então existem dois conjuntos compactos não vazios P e Q, tais que $J^{+}(x) = P \cup Q$ e $P \cap Q = \emptyset$. Como $J^{+}(x) \neq \emptyset$, temos que $\omega(x)$ é não vazio, compacto e conexo. Assim temos $\omega(x) \subset P$ ou $\omega(x) \subset Q$. Suponha que $\omega(x) \subset P$. Então $P \cup Sx$ é compacto e disjunto de Q. De fato, como $\omega(x)$ é compacto e não vazio temos Sx compacto, que implica $P \cup Sx$ ser compacto. O fato de que $P \cup Sx$ é disjunto de Q segue de que se $Q \cap (P \cup Sx) \neq \emptyset$ então $Q \cap Sx \neq \emptyset$. Assim, dado $y \in Q \cap Sx$, temos $\omega(y) \neq \emptyset$, pois $Q \cap Sx$ é positivamente invariante e $\omega(y) \subset \omega(x)$, conluindo que $Q \cap \omega(x) \neq \emptyset$, absurdo. Finalmente, como $D^{+}(x) = (Sx \cup P) \cup Q$ e Q e $Sx \cup P$ são conjuntos compactos e disjuntos, então $D^{+}(x)$ é compacto e desconexo, absurdo. Agora, provaremos a segunda parte do teorema. Considere a compactificação de Alexandrov $M^* = M \cup \{\infty\}$, da variedade M. Para cada $x \in M$, defina o conjunto:

$$J^*(x) = \{y \in M^*;\text{ existem sequências } (t_n) \text{ em } \mathbb{R}^+ \text{ onde } t_n \to +\infty,\ (u_n) \text{ em } \mathcal{U}_{cp} \text{ e } (x_n) \\ \text{em } M, \text{ tais que } x_n \to x \text{ e } \varphi(t_n, x_n, u_n) \to y\}.$$

O conjunto $J^*(x)$ é um subconjunto compacto de M^*, pois $J^*(x) = J^+(x) \cup \{\infty\}$. Pelo parágrafo anterior, $J^*(x)$ é conexo. Agora, se $J^+(x)$ não é compacto, temos que $J^+(x)$ é um subconjunto aberto de $J^*(x)$ (Estamos asumindo que $J^*(x)$ é um espaço topológico com a topologia induzida de M^*). Pelo teorema 21, cada componente de $J^+(x)$, tem um ponto limite em $J^*(x) - J^+(x) = \{\infty\}$. Assim nenhuma componente de $J^+(x)$ é compacta. Para $J^-(x)$ a demonstração é análoga. □

4.2 Estabilidade de Poisson e Pontos Não Dispersivos

Agora, introduziremos a noção de pontos Poisson estáveis e pontos não dispersivos. Mostraremos algumas caracterizações de pontos Poisson estáveis em termos de conjuntos omegas limite e pontos não dispersivos em termos de conjuntos limites prolongacionais.

Definição 28. *Um subconjunto não vazio X de M é dito* ***positivamente recursivo*** *com respeito ao subconjunto não vazio Y de M se para todo $t > 0$, $S_{\geq t}Y \cap X \neq \emptyset$. O conjunto X é dito* ***negativamente recursivo*** *com respeito ao conjunto Y se para todo $t > 0$, $S_{\geq t}^{-1}Y \cap X \neq \emptyset$. Um ponto $x \in M$ é dito* ***positivamente Poisson estável*** *se para toda vizinhança U de x é positivamente recursiva com respeito ao conjunto $\{x\}$. O ponto x é dito* ***negativamente Poisson estável*** *se para toda vizinhança U de x é negativamente recursiva com respeito ao conjunto $\{x\}$. O ponto x é* ***Poisson estável*** *se x é positivamente e negativamente Poisson estável.*

A seguir, mostraremos uma caracterização dos pontos Poisson estáveis relacionada com conjuntos omegas limite.

Teorema 28. *Dado $x \in M$, x é positivamente Poisson estável se e somente se $x \in \omega(x)$. Analogamente, x é negativamente Poisson estável se, e somente se, $x \in \omega^*(x)$.*

Demonstração: Faremos a demonstração para x positivamente Poisson estável, pois para x negativamente Poisson estável a demonstração é análoga. Assim, se x é positivamente Poisson estável temos que para todo $t > 0$ e toda vizinhança U de x, $S_{\geq t}x \cap U \neq \emptyset$, ou seja, $x \in \overline{S_{\geq t}x}$ para todo $t > 0$, o que implica $x \in \omega(x)$. Por outro lado, se $x \in \omega(x)$, temos que $x \in \overline{S_{\geq t}x}$ para todo $t > 0$, ou seja, temos que para todo $t > 0$ e toda vizinhança U de x, $S_{\geq t}x \cap U \neq \emptyset$, o que implica que x é positivamente Poisson estável. $\square$

Observe que pelo resultado apresentado, x é Poisson estável se e somente se $x \in \omega(x) \cap \omega^*(x)$. A seguir apresentaremos o conceito de pontos não dispersivos.

Definição 29. *Um ponto $x \in M$ é **não-dispersivo** se toda vizinhança U de x é positivamente recursiva com respeito a ele mesmo, ou seja, $S_{\geq t}U \cap U \neq \emptyset$ para todo $t > 0$. Em outras palavras, x não é dispersivo se e somente se para todo $\epsilon, t > 0$ existe $y \in M$, $u \in \mathcal{U}_{cp}$ tal que $\varphi(t, y, u) \in B(x, \epsilon)$.*

O seguinte teorema descreve pontos não dispersivos por meio de conjuntos limites prolongacionais.

Teorema 29. *Um ponto $x \in M$ é não dispersivo se, e somente se, $x \in J^+(x)$.*

Demonstração: Suponha que x é não dispersivo. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existem $y_n \in M$, $u_n \in \mathcal{U}_{cp}$ e $t_n \geq n$ tais que $y_n, \varphi(t_n, y_n, u_n) \in B(x, \frac{1}{n})$. Como ambas as sequências (y_n) e $(\varphi(t_n, y_n, u_n))$ convergem para x com $t_n \to +\infty$, obtemos que $x \in J^+(x)$. Reciprocamente, se $x \in J^+(x)$, existem sequências (t_n) em $\mathbb{R}^+$, (u_n) em $\mathcal{U}_{cp}$ e (x_n) em M tais que $x_n \to x$, $t_n \to +\infty$ e $\varphi(t_n, x_n, u_n) \to x$. Dessa forma, para $\epsilon, T > 0$, existe $n_0 \geq T$ tal que $x_{n_0}, \varphi(t_{n_0}, x_{n_0}, u_{n_0}) \in \mathrm{B}(x, \epsilon)$, concluindo que x é não dispersivo. $\square$

Esta caracterização de pontos não dispersivos fornece uma definição alternativa para ponto não-dispersivo.

Proposição 25. *Dados $x, y \in M$, $y \in J^+(x)$ se, e somente se, $x \in J^-(y)$. Em particular, $x \in J^+(x)$ se e somente se $x \in J^-(x)$.*

Demonstração: Suponha que $y \in J^+(x)$. Então existem sequências $t_n \to +\infty$, $x_n \to x$ e (u_n) em $\mathcal{U}_{cp}$, tais que $\varphi(t_n, x_n, u_n) \to y$. Para cada n, defina $y_n = \varphi(t_n, x_n, u_n)$. Então $\varphi(-t_n, y_n, u_n \cdot t_n) = x_n$. Assim $-t_n \to -\infty$, $y_n \to y$ e $\varphi(-t_n, x_n, u_n \cdot t_n) \to x$, concluindo que $x \in J^-(x)$. A recíproca é análoga. $\square$

Observe que $x \in M$ é um ponto não dispersivo se e somente se para todo $\epsilon, T > 0$ existem $y \in M$, $u \in \mathcal{U}_{cp}$ e $t \geq T$ tais que $y, \varphi(-t, y, u) \in \mathrm{B}(x, \epsilon)$, ou seja, toda vizinhança U de x é negativamente recursiva com respeito a ele mesmo.

Como $\omega(x) \subset J^{+}(x)$ e $\omega^{*}(x) \subset J^{-}(x)$, temos que todo ponto positivamente ou negativamente Poisson estável é não dispersivo, ou seja, se $x \in \omega(x)$ ou $x \in \omega^{*}(x)$, então este ponto é não dispersivo.

O seguinte resultado mostra que os pontos pertencentes aos conjuntos omega limites são não dispersivos.

Teorema 30. *Seja $x \in M$ tal que $\omega(x)$ é não vazio. Para $y \in \omega(x)$, y é não dispersivo.*

Demonstração: Se $y \in \omega(x)$ então existem sequências $t_n \to +\infty$ e (u_n) em $\mathcal{U}_{cp}$, tal que $\varphi(t_n, x, u_n) \to y$. Tome uma subsequência (t_{n_k}) tal que $t_{n_{k+1}} - t_{n_k} \geq k$ para cada k. Defina $\tau_k = t_{n_{k+1}} - t_{n_k}$ e $x_k = \varphi(t_{n_k}, x, u_{n_k})$. Então $\tau_k \to +\infty$ e $x_k \to y$, além do mais,

$$\begin{aligned} \varphi(\tau_k, x_k, u_{n_{k+1}} \cdot t_{n_k}) &= \varphi(t_{n_{k+1}} - t_{n_k}, \varphi(t_{n_k}, x, u_{n_k}), u_{n_{k+1}} \cdot t_{n_k}) \\ = \varphi(t_{n_{k+1}}, \varphi(-t_{n_k}, \varphi(t_{n_k}, x, u_{n_k}), u_{n_{k+1}} \cdot t_{n_k}), u_{n_{k+1}}) &= \varphi(t_{n_{k+1}}, x, u_{n_{k+1}}) \end{aligned}$$

e assim $\varphi(\tau_k, x_k, u_{n_{k+1}} \cdot t_{n_k}) \to y$. Portanto $y \in J^{+}(y)$. □

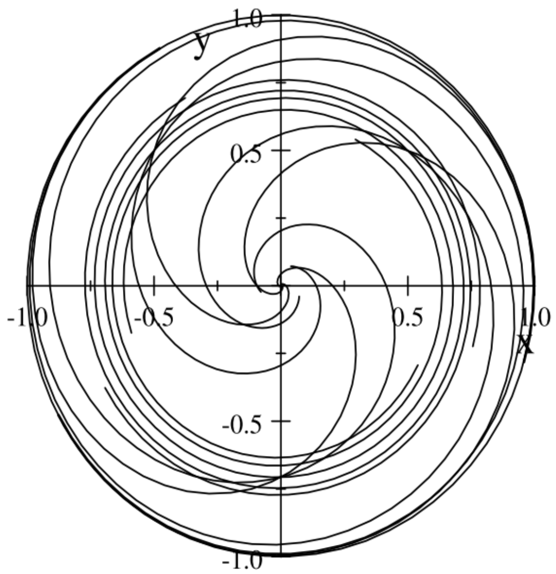
Existe um resultado análogo para conjuntos limites negativos. O seguinte exemplo ilustra uma situação onde $\omega(x) = J^{+}(x)$, ou seja, todos os pontos não dispersivos são Poisson estáveis.

Exemplo 9. *Considere o sistema de controle*

$$\dot{x}(t) = X_0(x(t)) + u(t)X_1(x(t)),$$

no disco unitário $M = \{x = (x_1, x_2) : \|x\| \leq 1\}$, onde $U = [\frac{1}{20}, 1]$ e X_0 e X_1 são campos de vetores dados por

$$X_0(x, y) = (y, -x) \ \text{e} \ X_1(x, y) = (x - xy^2 - x^3, y - yx^2 - y^3).$$



Exemplos de trajetótias através de $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\pi}{4})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\pi}{2})$ e $u \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{20}\}$.

Figura 4.5:

O plano de fase é dado pela Figura 4.5.

A origem 0 é um ponto singular e as trajetórias através dos pontos da esfera unitária $\mathbb{S}^1$ são periódicas e coincidem com $\mathbb{S}^1$. Assim, $\omega(0) = \omega^*(0) = \{0\}$ e $\omega(x) = \omega^*(x) = \mathbb{S}^1$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$. Assim, os pontos em $\mathbb{S}^1 \cup \{0\}$ são Poisson estáveis. Para $x \in M \backslash \mathbb{S}^1 \cup \{0\}$, temos $\omega(x) = \mathbb{S}^1$ e $\omega^*(x) = \{0\}$, concluindo que os pontos em $M \backslash \mathbb{S}^1 \cup \{0\}$ não são Poisson estáveis. Agora dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos $\overline{S_{\geq t}\mathrm{B}(0,\epsilon)} = M$ para todo $t > 0$. Assim, $J^+(0) = M$. Para $x \in \mathbb{S}^1$, temos $\overline{S^*_{\geq t}\mathrm{B}(x,\epsilon)} = M$ para todo $t > 0$, assim $J^*(x) = M$. Para $x \in M \backslash \mathbb{S}^1 \cup \{0\}$, temos $\overline{S_{\geq t}\mathrm{B}(x,\epsilon)} \subset M \backslash \{0\}$ e $\overline{S^*_{\geq t}\mathrm{B}(x,\epsilon)} \subset M \backslash \mathbb{S}^1$. Uma vez que somente os conjuntos $\mathbb{S}^1$ e $\{0\}$ são positivamente (e negativamente) invariante do sistema de controle, segue que $J^+(x) = \mathbb{S}^1$ e $J^-(x) = \{0\}$. Portanto os pontos em $\mathbb{S}^1 \cup \{0\}$ são pontos não dispersivos do sistema e para $x \in M \backslash \mathbb{S}^1 \cup \{0\}$, temos $\omega(x) = J^+(x) = \mathbb{S}^1$ e $\omega^*(x) = J^-(x) = \{0\}$.

4.3 Instabilidade e Sistema de Controle Dispersivo

Esta seção é dedicado aos conceitos dispersivos. Estes conceitos em sistema de controle são caracterizados pela ausência de recursividade. O objetivo é mostrar que os conjuntos limites prolongacionais são fundamentais para o estudo de dispersividade.

Definição 30. *Um ponto $x \in M$ é dito*

1. ***positivamente Poisson instável*** *sempre que $x \notin \omega(x)$,* ***negativamente Poisson instável*** *sempre que $x \notin \omega^*(x)$ e* ***Poisson instável*** *se é positivamente e negativamente Poisson instável.*

2. ***dispersivo*** *sempre que $x \notin J^+(x)$.*

Definição 31. *O sistema de controle é chamado*

1. ***positivamente Poisson instável*** *se todo $x \in M$ é positivamente Poisson instável.*

2. ***negativamente Poisson instável*** *se todo $x \in M$ é negativamente Poisson instável.*

3. ***Poisson instável*** *se todo $x \in M$ é Poisson instável.*

4. ***completamente instável*** *se todo $x \in M$ é dispersivo.*

5. ***dispersivo*** *se para todo par de pontos $x, y \in M$ existem vizinhanças U_x de x e U_y de y tal que U_x não é positivamente recursivo com respeito a U_y, ou seja, existe $t > 0$ tal que $U_x \cap S_{\geq t} U_y = \emptyset$.*

Note que um ponto $x \in M$ é dispersivo se e somente se existe uma vizinhança U de x e uma constante $T > 0$ tal que $U \cap \varphi(t, U, u) = \emptyset$ para todo t, u com $|t| \geq T$. Este fato será mostrado no seguinte teorema onde se mostra que os conjuntos limites prolongacionais são importantes para o estudo de sistema de controle dispersivo.

Teorema 31. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. O sistema de controle é dispersivo.

2. Para todo par de pontos $x, y \in M$ existem vizinhanças U_x de x e U_y de y e uma constante $T > 0$ tal que $U_x \cap \varphi(t, U_y, u) = \emptyset$ para todo t e u com $|t| \geq T$.

3. Para cada par de pontos $x, y \in M$, $y \notin J^+(x)$.

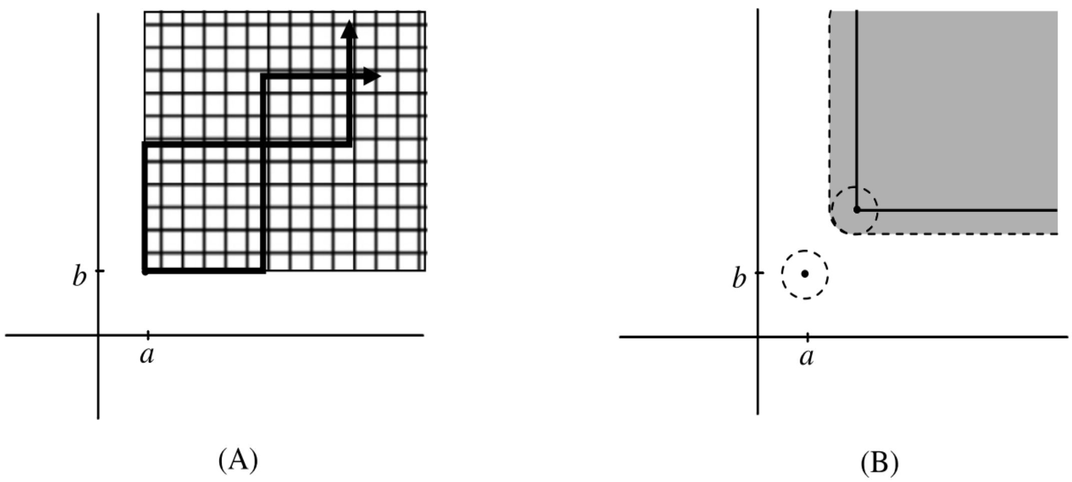
4. Para todo $x \in M$, $J^+(x) = \emptyset$.

Demonstração: É claro que (3) implica em (4). Primeiro iremos mostrar que (1) implica (2). Suponha que o sistema de controle é dispersivo e tome $x, y \in M$. Então existem vizinhanças U_x^1 de x, U_y^1 de y e $t_1 > 0$ tal que $U_x^1 \cap S_{\geq t_1} U_y^1 = \emptyset$. Disso resulta que $U_x^1 \cap \varphi(t, U_y^1, u) = \emptyset$ para todo t e u com $t \geq t_1$. Por outro lado, existem vizinhanças U_x^2 de x e U_y^2 de y e $t_2 > 0$ tal que $U_y^2 \cap S_{\geq t_2} U_x^2 = \emptyset$, isto segue que $U_y^2 \cap \varphi(t, U_x^2, u) = \emptyset$ para todo t e u com $t \geq t_2$. Assim, $U_x^2 \cap \varphi(t, U_y^2, u) = \emptyset$ para todo t e u com $t \leq -t_2$. Tomando $U_x = U_x^1 \cap U_x^2$, $U_y = U_y^1 \cap U_y^2$ e $T = \max\{t_1, t_2\}$, então $U_x \cap \varphi(t, U_y, u) = \emptyset$ para todo t e u com $|t| \geq T$. Agora mostraremos que (2) implica (3). Suponha que (2) é valido. Dados $x, y \in M$, existem $\epsilon, t > 0$ tal que $\mathrm{B}(y, \epsilon) \cap S_{\geq t} \mathrm{B}(x, \epsilon) = \emptyset$. Disto, temos que $y \notin \overline{S_{\geq t} \mathrm{B}(x, \epsilon)}$ e portanto $y \notin J^+(x)$. Finalmente, mostraremos que (4) implica (1). Suponha que $J^+(x) = \emptyset$ para todo $x \in M$. Dados $x, y \in M$, existem $\epsilon, t > 0$ tais que $x \notin \overline{S_{\geq t} \mathrm{B}(y, \epsilon)}$, porque $J^+(y) = \emptyset$. Assim existe uma vizinhança U_x de x tal que $U_x \cap S_{\geq t} \mathrm{B}(y, \epsilon) = \emptyset$. Portanto o sistema de controle é dispersivo. □

Usando o fato que $y \in J^+(x)$ se, e somente se, $x \in J^-(y)$, temos um resultado análogo do teorema anterior para primeiro conjuntos limites prolongacionais negativos. Assim, uma forte propriedade para um sistema de controle ser dispersivo é de que $J^+(x) = \emptyset$ para todo $x \in M$, ou seja, sistema de controle dispersivo ocorre somente em variedades não compactas. Veja alguns exemplos.

Exemplo 10. *Considere o sistema de controle em $M = \mathbb{R}^2$ determinado pelos campos de vetores $\frac{\partial}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial}{\partial x_2}$. Temos que $e^{t\frac{\partial}{\partial x_1}}(x_1, x_2) = (t + x_1, x_2)$ e $e^{\frac{\partial}{\partial x_2}}(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + t)$*

para $t \geq 0$ e $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Concatenando as trajetórias de $\frac{\partial}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial}{\partial x_2}$ podemos construir as trajetórias através de $x = (a, b)$ como ilustrado na Figura 4.6 (A). Então para $\epsilon, t > 0$ o conjunto $S_{\geq t}\mathrm{B}(x, \epsilon)$ é a região em cinza na Figura 4.6 (B). Assim o prolongamento $D^+(x, t) = \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{S_{\geq t}\mathrm{B}(x, \epsilon)}$, coincide com o cone $\overline{S_{\geq t}x}$ e portanto $J^+(x) = \bigcap_{t > 0} \overline{S_{\geq t}x} = \emptyset$. Assim o sistema é dispersivo.



(A) trajetórias atráves de $x = (a, b)$. (B) O conjunto $S_{\geq t}\mathrm{B}(x, \epsilon)$ é a região em cinza.

Figura 4.6:

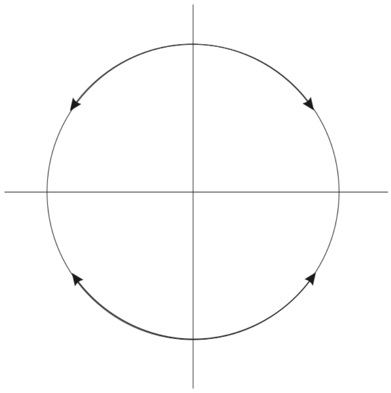
Exemplo 11. *Considere o sistema de controle*

$$\dot{x}(t) = u(t)A(x(t))$$

em $\mathbb{R}^2$ sem a origem, onde $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $U = [a, b]$ com $a > 0$. Projetando este sistema na esfera unitária $\mathbb{S}^1$, pela projeção $s(t) = \frac{x(t)}{\|x(t)\|}$. Temos que o sistema de controle induzido é

$$\dot{s}(t) = u(t)[A - s^T A s]s$$

em S^1. A figura 4.7 ilustra a trajetória deste sistema. Agora, considerando o sistema obtido acima, em $\mathbb{R}^2$ menos o conjunto $X = \{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$, temos claramente que o sistema é dispersivo.



Trajetória do sistema na esfera unitária

Figura 4.7:

A seguir apresentaremos uma última caracterização de sistemas de controle dispersivo.

Teorema 32. *Assuma que $J^+(x)$ é invariante para todo $x \in M$. O sistema de controle é dispersivo se, e somente se, para cada $x \in M$, $D^+(x) = Sx$ e não existem pontos singulares e trajetórias periódicas.*

Demonstração: Suponha que o sistema é dispersivo. Pelo Teorema 31, $J^+(x) = \emptyset$ para todo $x \in M$. Pelo Teorema 25, segue que $D^+(x) = Sx$ para todo $x \in M$. Desde que os pontos singulares e as trajetórias periódicas são encontradas nos conjuntos limites prolongacionais, então não existem pontos singulares e trajetórias periódicas. Para provar a recíproca, suponha que $D^+(x) = Sx$ e não existem pontos singulares e trajetórias periódicas. Pelo Teorema 25, temos $J^+(x) \subset Sx$. Se $J^+(x) \neq \emptyset$ então $J^+(x)$ é invariante e fechado e segue que $Sx \cup S^*x \subset J^+(x)$ e $Sx \cup S^*x = J^+(x) = Sx$. Para $T < 0$ e $u \in \mathcal{U}_{cp}$ existe $T' \geq 0$ e $v \in \mathcal{U}_{cp}$ tal que $\varphi(T, x, u) = \varphi(T', x, v)$, ou seja, $x = \varphi(-T, \varphi(T', x, v), u \cdot T)$. Assim, $-T > 0$ e $T' \geq 0$, existe $w \in \mathcal{U}_{cp}$ tal que $\varphi(-T, \varphi(T', x, v), u \cdot T) = \varphi(T' - T, x, w)$ e podemos concluir que $x = \varphi(T' - T, x, w)$. Como $w(s) = w_0$ para todo s em um intervalo (a, b) contendo $T' - T$, segue que a trajetória $\varphi(\tau, x, w_0)$ é τ-periódica com $\tau = T' - T$, que é uma contradição, e portanto, temos que $J^+(x) = \emptyset$ para todo $x \in M$. □

Capítulo 5

Ações de Semigrupos em Fibrados

Este capítulo é dedicado a ações de semigrupos em fibrados. Os resultados apresentados são referentes aos trabalhos [5], [12], [14], [17] e [21]. Iniciaremos com os conceitos básicos de espaço fibrado associado a um fibrado principal. Apresentaremos propriedades de estabilidade de Poisson e pontos não-dipersivos em fibrados. Encerraremos com um exemplo onde constroi-se ações de semigrupos em fibrados triviais através de aplicações contínuas que satisfazem a propriedade de cociclo.

5.1 Fibrados Principais

Sejam M um espaço admissível com família admissível $\mathcal{O}$, $\mu : S \times M \to M$ uma ação de semigrupo em M. Dado $\pi : M \to B$ uma aplicação sobrejetora contínua, chamaremos a tripla (M, π, B) de **fibrado**. Os espaços topológicos B e M são chamados respectivamente de **espaço base** e **espaço total** e a aplicação contínua $\pi : M \to B$ é chamada de **projeção**. Para cada $b \in B$, o conjunto $\pi^{-1}(b)$ é chamado de **fibra determinada por** $b \in B$. Dado G um grupo topológico, chamaremos de G**-espaço à direita em** M uma aplicação contínua $\gamma : M \times G \to M$, $\gamma((x, s)) = xs$, que satisfaz as seguintes condições:

1. Se $x \in M$ e $s, t \in G$ então $x(st) = (xs)t$.

2. Para cada $x \in M$ temos que $xe = x$, onde e é a identidade do grupo G.

Também existe uma definição análoga para G-espaço à esquerda.

Um fibrado (M, π, B) é chamado de G**-fibrado**, se existem um G-espaço em M e um homeomorfismo $f : M/G \to B$, ou seja, $\alpha(M) = (M, \pi', M/G)$ é isomorfo à (M, π, B) referente ao isomorfismo de fibrados $(Id, f) : \alpha(M) \to (M, \pi, B)$. (Ver seção 7.2 do Apêndice sobre isomorfismos de fibrados)

Um G-espaço M é chamado **livre**, se para algum $x \in M$, $xs = x$ implica em $s = e$. Denotaremos por M^* o espaço de todos os elementos $(x, xs) \in M \times M$ onde $x \in M$ e $s \in G$. Observe que existe uma função $\tau : M^* \to G$, tal que $x\tau(x, x') = x'$, para todo $(x, x') \in M^*$. A função $\tau : M^* \to G$ é chamada de **função translação**.

Referente a função translação $\tau : M^* \to G$ temos as seguintes propriedades:

1. $\tau(x, x) = e$
2. $\tau(x, x')\,\tau(x', x'') = \tau(x, x'')$
3. $\tau(x', x) = \tau(x, x')^{-1}$ para todo $x, x', x'' \in M$.

Um G-espaço M é chamado G**-espaço principal**, se é um G-espaço livre com a função translação $\tau : M^* \to G$ contínua. Um G**-fibrado principal** é um G-fibrado (M, p, B), onde M possui um G-espaço principal.

Seja (M, π, B) um G-fibrado principal e tome F com um G-espaço à esquerda. A relação $(x, y)\,s = (xs, s^{-1}y)$ define uma estrutura de G-espaço em $M \times F$. O espaço quociente $(M \times F)/G$ é usualmente denotado por E, $\pi_E : E \to B$ é a composição da factorização $M \times F \overset{pr_M}{\to} M \overset{\pi}{\to} B$ pela projeção $M \times F \to E$. Explicitamente temos $\pi_E((x, y)\,G) = \pi(x)$ para $(x, y)\,G \in E$.

Referente às anotações acima, o fibrado (E, π_E, B), é chamado de **espaço fibrado sobre** B **com fibra** F **associado ao fibrado principal** (M, π, B). O grupo G é chamado de **grupo estrutural do espaço fibrado**.

Definição 32. *Sejam (M, S, μ) e (N, S, ν) ações de semigrupos em espaços topológicos. Uma aplicação $p : M \to N$ é* ***equivariante*** *se $p(tx) = tp(x)$, para todo $t \in S$.*

Seja (M, π, B, G) um fibrado principal e (M, S) uma ação de semigrupo que satisfaz $t(qg) = (tq)g$ para todo $q \in M, g \in G$ e $t \in S$, ou seja, a ação de S comuta com a ação de G.

Temos que ação de S em M, induz uma ação em B. De fato, para $y \in B, t \in S$ e $y = \pi(q)$, define $ty = \pi(tq)$. Consequentemente, π é uma aplicação equivariante. A ação de S também induz uma ação em E dada por $t[q, v] = [tq, v]$.

Dado $q \in M$ defina

$$S_q = S(q) \cap \pi^{-1}(x)$$

onde $x = \pi(q)$. Através da identificação da fibra sobre x com G via $a \in G \mapsto qa \in \pi^{-1}(x)$, S_q pode ser visto como um subconjunto de G.

$$S_q = \{g \in G : \exists t \in S; tq = qg\}.$$

Segue que S_q é um subsemigrupo de G se $S_q \neq \emptyset$.

Seja $\mathcal{F} = \{A : A \subset S\}$ uma família de subconjuntos de S. A família $\mathcal{F}$ induz uma família $\mathcal{F}_q$ em S_q. De fato, para cada $A \in \mathcal{F}$, defina:

$$A_q = \{g \in G : \exists t \in A; tq = qg\}.$$

Assim, podemos definir a família induzida $\mathcal{F}_q = \{A_q; A \in \mathcal{F}\}$. Neste caso consideraremos somente q tais que $A_q \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{F}$.

Seja (E, π_E, B) um fibrado associado.

Proposição 26. *Sejam (M, π, B, G) um fibrado principal e $q \in M$. Se $\mathcal{F}$ satisfaz a hipótese H_3, então a família $\mathcal{F}_q$ satisfaz a a hipótese H_3.*

Demonstração: Para $g \in S_q$ existe $t \in S$ tal que $tq = qg$. Para $A \in \mathcal{F}$ tome $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset At$. Para $h \in B_q$ existe $t' \in B$ tal que $t'q = qh$. Desde que $t' = at$ para algum $a \in A$, nós temos que $qh = atq = aqg$ onde $aq = qhg^{-1}$. Assim $hg^{-1} \in A_q$ e $h \in A_q g$. Assim $B_q \subset A_q g$ o que conclui a prova. $\square$

Proposição 27. *Assuma que M é compacto e sejam $X \subset M$ e $\mathcal{F}$ uma base de filtro que satisfaz a a hipótese H_3. Então $\omega(X, \mathcal{F}) \subset t\omega(X, \mathcal{F})$ para todo $t \in S$.*

Demonstração: Tome $x \in \omega(X, \mathcal{F})$, $t \in S$ e $\mathcal{V}$ a família de todas as vizinhanças de x. Para $(V, f), (U, g) \in \mathcal{V} \times \mathcal{F}^{\mathcal{V}}$ defina $(V, f) \geq (U, g)$ se $V \subset U$ e $f(W) \subset g(W)$ para todo $W \in \mathcal{V}$. Agora para $A \in \mathcal{F}$ tome $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset At$. Para cada $V \in \mathcal{V}$, temos

$$\emptyset \neq BX \cap V \subset AtX \cap V.$$

Agora, escolha $tx_{(V,A)} \in AsX \cap V$, onde $x_{(V,A)} \in AX$. Para cada $(V, f) \in \mathcal{V} \times \mathcal{F}^{\mathcal{V}}$, usaremos a notação $x_{(V,f)}$ ao invés de $x_{(V,f(V))}$, onde $tx_{(V,f)} \in tf(V) \cap V$. Considere a rede $(x_{(V,f)})$ em M. Desde que M é compacto existe uma subrede $(x_{(V,f)})$ que converge a um ponto $y \in M$. Para uma vizinhança U de y existe (V_0, f_0), tal que $x_{(V,f)} \in U$ para todo $(V, f) \geq (V_0, f_0)$. Desde que $\mathcal{F}$ é uma base de filtro, para cada $A \in \mathcal{F}$ podemos definir $f_A : \mathcal{V} \to \mathcal{F}$ tal que $f_A(V) \subset A \cap f_0(V)$ para todo $V \in \mathcal{V}$. Para $(V, f) \geq (V_0, f_A)$ nós temos

$$x_{(V,f)} \in U \cap f(V)X \subset U \cap f_A(V)X \subset U \cap AX.$$

Assim $y \in \overline{AX}$ e $y \in \omega(X, \mathcal{F})$. Finalmente para uma vizinhança W de x, nós temos $tx_{(V,f)} \in tf(V)X \cap V \subset W$ para todo (V, f) com $V \subset W$. Assim $tx_{(V,f)} \to x$. Desde que $tx_{(V,f)} \to y$, nós temos que $x = ty$. Portanto $x \in t\omega(X, \mathcal{F})$ e concluímos a prova. □

Teorema 33. *Sejam S agindo nos espaços topológicos M e N, com M compacto, $p : M \to N$ equivariante e $\mathcal{F}$ uma base de filtro sobre os subconjuntos de S. Para um subconjunto X de M, temos que*

$$p(\omega(X, \mathcal{F})) = \omega(p(X), \mathcal{F}).$$

Demonstração: Primeiro observe que

$$p(\omega(X, \mathcal{F})) = p(\bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{AX}) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} p(\overline{AX}) \subset \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{Ap(X)} = \omega(p(X), \mathcal{F}).$$

Por outro lado, para $y \in \omega(p(X), \mathcal{F})$, nós temos $y = p(x_A)$, onde $x_A \in \overline{AX}$ para $A \in \mathcal{F}$. Desde que M é compacto e $\mathcal{F}$ é uma base de filtro, podemos tomar uma subrede $\{x_A\}$ tal que $x_A \to x$ em M. Dado V uma vizinhança aberta de x. Então existe $A_0 \in \mathcal{F}$ tal que $x_B \in V$ para todo $B \subset A_0$. Agora para todo $A \in \mathcal{F}$ tem se que $x_{A \cap A_0} \in V$, onde $(A \cap A_0)X \cap V \neq \emptyset$. Assim $x \in \overline{AX}$ e $y = p(x) \in p(\omega(X, \mathcal{F}))$. Portanto $\omega(p(X), \mathcal{F}) \subset p(\omega(X), \mathcal{F})$. □

Como consequência, temos o seguinte resultado sobre fibrados.

Corolário 4. *Dado (E, π_E, B) um fibrado associado com E compacto, então para $X \subset E$ temos $\pi_E(\omega(X), \mathcal{F}) = \omega(\pi_E(X), \mathcal{F})$.*

Teorema 34. *Suponha que (E, π_E, B) é um fibrado associado. Tome $q \in M$ tal que $\pi(q) = x$ e X um subconjunto não vazio de E. Dado $Y \subset F$ um subconjunto tal que $X \cap \pi^{-1}(x) = [q, Y]$, então*

$$[q, \omega(Y, \mathcal{F}_q)] = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{([Aq, Y] \cap \pi^{-1}(x))}.$$

Em particular

$$[q, \omega(Y, \mathcal{F}_q)] = \omega(X, \mathcal{F}) \cap \pi^{-1}(x).$$

Demonstração: Tome $[q, u] \in [q, \omega(Y, \mathcal{F}_q)]$ e $A \in \mathcal{F}$. Seja V uma vizinhança aberta de $[q, u]$ e tome U uma vizinhança aberta de u e $V \cap \pi^{-1}(x) = [q, U]$. Uma vez que $U \cap A_q Y \neq \emptyset$, tome $v = gy \in U \cap A_q Y$ onde $g \in A_q$ e $y \in Y$. Isso segue que $[q, v] = [tq, y]$, para algum $t \in A$. Portanto,

$$[q, v] \in V \cap [Aq, Y] \cap \pi^{-1}(x)$$

e

$$[q, u] \in \overline{[Aq, Y] \cap \pi^{-1}(x)}.$$

Temos

$$[q, \omega(y, \mathcal{F}_q)] \subset \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{[Aq, Y] \cap \pi^{-1}(x)}.$$

Por outro lado, tome

$$[q,w] \in \bigcap_{A\in\mathcal{F}} \overline{[Aq,Y]\cap\pi^{-1}(x)},$$

com $A_q \in \mathcal{F}_q$. Tome $U \subset F$ aberto tal que $V \cap \pi^{-1}(x) = [q,U]$. Então,

$$V \cap [Aq,Y] \cap \pi^{-1}(x).$$

Assim existe $t \in A$, $y \in Y$ e $[q,v] \in V$ tal que $[q,v] = [tq,y]$. Assim existe $g \in A_q$ tal que $v = gy$ onde $v \in U \cap A_qY$. Portanto $u \in \overline{A_qY}$, concluindo a prova. □

Corolário 5. *Seja (E,π_E,B) um fibrado associado. Se $[q,v] \in E$ é $\mathcal{F}$-progressivamente Poisson estável, então v é $\mathcal{F}_q$-progressivamente Poisson estável, ou seja, $v \in \omega(v,\mathcal{F}_q)$.*

Demonstração: Denotando por $X = \{[q,v]\}$ e $Y = \{v\}$, temos pelo teorema anterior,

$$[q,\omega(v,\mathcal{F}_q)] = \omega([q,v],\mathcal{F}).$$

Como $[q,v]$ é $\mathcal{F}$-progressivamente Poisson estável, temos que $[q,v] \in \omega([q,v],\mathcal{F}) = [q,\omega(v,\mathcal{F}_q)]$. Assim, $v \in \omega(v,\mathcal{F}_q)$, ou seja, v é $\mathcal{F}_q$-progressivamente Poisson estável.
□

Definição 33. *Sejam M e N espaços admissíveis, com $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ suas respectivas famílias admissíveis. Uma função $f: M \to N$ é dita* ***uniformemente contínua com respeito a*** *$\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$, se para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}'$, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $x,y \in V$ para algum $V \in \mathcal{V}$ implica em $f(x), f(y) \in U$ para algum $U \in \mathcal{U}$, ou seja, $y \in B(x,\mathcal{V})$ implica $f(y) \in B(f(x),\mathcal{U})$.*

Proposição 28. *Seja S agindo nos espaços admissíveis M e N. Se $p : M \to N$ é uma função equivariante e uniformente contínua, então*

$$p(J(x, \mathcal{O})) \subset J(p(x), \mathcal{O}'),$$

para todo $x \in M$.

Demonstração: É claro que

$$p(J(x, \mathcal{O})) \subset p(\bigcap_{A \in \mathcal{F}, \mathcal{U} \in \mathcal{O}} \overline{A\mathrm{B}(x, \mathcal{U})}) \subset$$

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}, \mathcal{U} \in \mathcal{O}} \overline{Ap(\mathrm{B}(x, \mathcal{U}))} \subset \bigcap_{A \in \mathcal{F}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}'} \overline{A\mathrm{B}(p(x), \mathcal{V})}.$$

□

Proposição 29. *Seja (M, π, B) um fibrado, onde M e B possuem respectivamente as famílias de coberturas abertas admissível $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$. Se $x \in M$ é não-dispersivo, então $\pi(x) \in B$ é não-dispersivo.*

Demonstração: Como $x \in M$ é não-dispersivo temos que para todo $A \in \mathcal{F}$, existem redes $(x_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V} \in \mathcal{O}}$ em M e $(t_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V} \in \mathcal{O}}$ em A tais que $x_{\mathcal{V}} \to x$ e $t_{\mathcal{V}} x_{\mathcal{V}} \to x$. Sabendo que π é continua e equivariante, temos $\pi(x_{\mathcal{V}}) \to \pi(x)$ e $t_{\mathcal{V}} \pi(x_{\mathcal{V}}) \to \pi(x)$. Note que para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}'$ existe um índice $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\pi(x_{\mathcal{V}}), t_{\mathcal{V}} \pi(x_{\mathcal{V}}) \in \mathrm{B}(\pi(x), \mathcal{U})$. Assim tomando as redes $(\pi(x_{\mathcal{U}})$, $(t_{\mathcal{U}} \pi(x_{\mathcal{U}}))$ satisfazendo as condições acima, temos $\pi(x_{\mathcal{U}}) \to \pi(x)$ e $t_{\mathcal{U}} \pi(x_{\mathcal{U}}) \to \pi(x)$, concluindo que $\pi(x) \in J(\pi(x), \mathcal{F})$, ou seja, $\pi(x)$ é não-dispersivo. □

Exemplo 12. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e TM seu fibrado tangente. Um referencial em $x \in M$ é um isomorfismo linear $\sigma_x : \mathbb{R}^n \to T_xM$. Denote por BM o conjunto de todas as bases em todos os pontos de M, ou seja,*

$$BM = \{\sigma_x : \mathbb{R}^n \to T_xM; \sigma_x \text{ é isomorfismo linear, } \forall x \in M\}.$$

Para cada $\sigma_x : \mathbb{R}^n \to T_xM$ onde $\sigma_x \in BM$ e $x \in M$, as operações que trabalharemos com σ_x são referentes à matriz que representa o isomorfismo linear σ_x. Note que $GL(n, \mathbb{R})$ age livremente e transitivamente à direita em BM:

$$(\sigma, g) \in BM \times GL(n, \mathbb{R}) \mapsto \sigma g := \sigma \circ g \in BM,$$

ou seja, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $(\sigma g)(v) = \sigma(gv)$. Existe uma projeção natural $\pi : BM \to M$ que associa a cada $\sigma_x : \mathbb{R}^n \to T_xM$ ao ponto $x \in M$. Note que $\pi(\sigma_1) = \pi(\sigma_2)$, então existe $g \in GL(n, \mathbb{R})$ tal que $\sigma_2 = \sigma_1 g$. Como BM tem estrutura de variedade diferenciável, BM é um fibrado principal com base M e grupo estrutural $GL(n, \mathbb{R})$.

Seja, $\mu : \mathbb{R}^+ \times BM \to BM$, definido por $\mu(t, \sigma_x) = e^{-t}\sigma_x$, onde

$$e^{-t}\sigma_x : \mathbb{R}^n \to T_xM$$

tem matriz representante $e^{-t}\sigma_x$, ou seja, a matriz representante de σ_x multiplicada pelo escalar e^{-t}. Note que μ define um sistema semi-dinâmico topológico em BM. De fato, para $s, t \in \mathbb{R}^+$ e $\sigma_x \in BM$, temos que:

$$\mu(s + t, \mu_x) = e^{-(s+t)}\sigma_x = e^{-s}e^{-t}\sigma_x = \mu(s, e^{-t}\sigma_x) = \mu(s, \mu(t, \sigma_x)).$$

Observe que a multiplicação escalar é uma aplicação contínua e

$$\mu(0, \sigma_x) = e^0\sigma_x = \sigma_x.$$

É claro que para $t \in \mathbb{R}^+$, $\sigma_x \in BM$ e $g \in GL(n, \mathbb{R})$, temos que $t(\sigma_x g) = e^{-t}(\sigma_x g) = (e^{-t}\sigma_x)g = (t\sigma_x)g$. Como $e^{-t}\sigma_x = (e^{-t}I_{n\times n})\sigma_x = \sigma_x(e^{-t}I_{n\times n})$, então para $\sigma_x \in BM$,

$$\mathbb{R}^+_{\sigma_x} = \{e^{-t} I_{n\times n} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}^+\}.$$

Observe que para $\sigma_x \in BM$ $J(\sigma_x) = \emptyset$. De fato, seja y tal que existem redes $\sigma_x^\lambda \to \sigma_x$ e $e^{-t_\lambda}\sigma_x^\lambda \to y$ com $t_\lambda \to \infty$. Como $\sigma_x^\lambda \to \sigma_x$, temos que a rede (σ_x^λ) é limitada e $e^{-t} \to 0$ quando $t_\lambda \to \infty$, assim $e^{-t_\lambda}\sigma_x^\lambda \to 0_{n\times n} \notin BM$. Como $J(\sigma_x) = \emptyset$ então $J^*(\sigma_x) = \emptyset$, $\omega(\sigma_x) = \emptyset$ e $\omega^*(\sigma_x) = \emptyset$. Com estas informações temos que o sistema semi-dinâmico é dispersivo e para todo $\sigma_x \in BM$, σ_x é Poisson instável.

O sistema semi-dinâmico em M induzido por (BM, μ) é definido por $tx = \pi(t\sigma_x) = \pi(e^{-t}\sigma_x) = x$, para todo $x \in M$ e $t \in \mathbb{R}^+$. Assim temos $J(x) = J^*(x) = \omega(x) = \omega^*(x) = \{x\}$ para todo $x \in M$. Assim, o sistema semi-dinâmico na base é não-dispersivo e, para todo $x \in M$, x é Poisson estável. Portanto, temos que no espaço total o sistema semi-dinâmico é dispersivo e induz um sistema semi-dinâmico não dispersivo no espaço base, concluindo que a recíproca da proposição anterior não vale.

Definição 34. *Sejam $\mu : S \times M \to M$ uma ação em M e T um semigrupo topológico. Uma aplicação contínua $\varphi : S \times M \to T$ é um **cociclo** de M em T se para todo $s, t \in S$ e $x \in M$,*

$$\varphi(st, x) = \varphi(s, \mu(t, x))\varphi(t, x).$$

Exemplo 13. *Seja G um grupo topológico e M um espaço topológico. Primeiramente, é claro que a aplicação $\pi : M \times G \to M$ definido por $\pi(x, g) = x$ é uma aplicação sobrejetora e contínua. Assim a tripla $(M \times G, \pi, M)$ é um fibrado. A aplicação*

$$\gamma : (M \times G) \times G \to M \times G,$$

definida por $\gamma((x, g), h) = (x, gh)$ torna o fibrado $(M \times G, \pi, M)$ um G-fibrado principal. De fato, é claro que γ é contínua, pois G é um grupo topológico. Para $s, t \in G$ e $(x, g) \in M \times G$ temos

$$\gamma[(x, g), st] = (x, gst) = (x, (gs)t) = \gamma[(x, gs), t] = \gamma[\gamma[(x, g), s], t]$$

e $\gamma[(x, g), e] = (x, ge) = (x, g)$.

Note que, se $(x, gs) = (x, g)$ *então* $gs = g$ *o que implica* $s = e$. *A função translação* $\tau : (M \times G)^* \to G$ *definida por* $\tau((x, g), (x, gs)) = s$ *para* $(x, g) \in M \times G$ *e* $s \in G$ *é contínua, pois* τ *é a composição das aplicações contínuas*

$$\rho : (M \times G)^* \to M \times G \times G, \text{ definido por } \rho((x, g), (x, gs)) = (x, g, s) \text{ com}$$

$$\pi' : M \times G \times G \to G, \text{ definido por } \pi'(x, g, s) = s.$$

Seja $(M \times G, \mu)$ *uma ação do semigrupo* S *no* G*-fibrado principal* $(M \times G, \pi, M)$ *tal que* $\mu(t, (x, gh)) = \mu(t, (x, g))h$ *para* $t \in S$, $(x, g) \in M \times G$ *e* $h \in G$. *Denotaremos* $\mu(t, (x, g)) = (\mu_1(t, (x, g)), \mu_2(t, (x, g)))$, *onde*

$$\mu_1 : S \times (M \times G) \to M \text{ e } \mu_2 : S \times (M \times G) \to G.$$

Sabendo que $\mu(t, (x, gh)) = \mu(t, (x, g))h$, *temos*

$$(\mu_1(t, (x, gh)), \mu_2(t, (x, gh))) = (\mu_1(t, (x, g)), \mu_2(t, (x, g)))h = (\mu_1(t, (x, g)), \mu_2(t, (x, g))h),$$

ou seja, $\mu_1(t, (x, gh)) = \mu_1(t, (x, g))$ *e* $\mu_2(t, (x, gh)) = \mu_2(t, (x, g))h$ *para todo* $t \in S$, $(x, g) \in M \times G$ *e* $h \in G$. *Em particular, temos que* $\mu_1(t, (x, e)) = \mu_1(t, (x, g))$ *para todo* $g \in G$. *Por abuso de linguagem, denotaremos a aplicação*

$$\mu_1(t, (x, e)) = \mu_1(t, x).$$

Como μ *define uma ação, temos que para* $t, s \in S$ *e* $(x, e) \in M \times G$,

$$\mu(ts, (x, e)) = \mu(t, \mu(s, (x, e))),$$

$$(\mu_1(ts, x), \mu_2(ts, (x, e))) = (\mu_1(t, \mu(s, (x, e))), \mu_2(t, \mu(s, (x, e)))),$$

$$(\mu_1(ts, x), \mu_2(ts, (x, e))) = (\mu_1(t, (\mu_1(s, x), \mu_2(s, (x, e)))), \mu_2(t, (\mu_1(s, x), \mu_2(s, (x, e))))),$$

$$(\mu_1(ts, x), \mu_2(ts, (x, e))) = (\mu_1(t, \mu_1(s, x)), \mu_2(t, (\mu_1(s, x), \mu_2(s, (x, e))))),$$

ou seja, $\mu_1(ts, x) = \mu_1(t, \mu_1(s, x))$ *e*

$$\mu_2(ts, (x, e)) = \mu_2(t, (\mu_1(s, x), \mu_2(s, (x, e)))) = \mu_2(t, (\mu_1(s, x), e))\mu_2(s, (x, e)).$$

Com as conclusões acima, temos que a aplicação $\mu_1(\cdot, e) : S \times M \to M$, *definida por* $\mu_1(x, e)$ *é uma ação em* M *e* $\mu_2(\cdot, e) : S \times M \to G$ *definida por* $\mu_2(x, e)$ *é um coclico de* M *em* G.

Reciprocamente, se $\mu_1 : S \times M \to M$ *é uma ação em* M *e* $\mu_2 : S \times M \to G$ *um coclico de* M *em* G, *temos que a aplicação*

$$\mu : S \times (M \times G) \to M \times G$$

definida por $\mu(t, (x, g)) = (\mu_1(t, x), \mu_2(t, x)g)$ *é uma ação no espaço topológico* $M \times G$. *De fato, por construção,* μ *é uma aplicação contínua. Para* $s, t \in S$,

$$\mu(ts, (x, g)) = (\mu_1(ts, x), \mu_2(ts, x)g) = (\mu_1(t, \mu(s, x)), \mu_2(t, \mu_1(s, x))\mu_2(s, x)g) \text{ e}$$

$$\mu(t, \mu(s, (x, g))) = \mu(t, (\mu_1(s, x), \mu_2(s, x)g)) = (\mu_1(t, \mu_1(s, x)), \mu_2(t, \mu_1(s, x))\mu_2(s, x)g).$$

Provando o desejado.

Capítulo 6

Sistemas Semi-Dinâmicos

Neste capítulo, trabalharemos os conceitos de dispersividade e recursividade para sistemas semi-dinâmicos e sistema semi-dinâmicos em fibrados, referente ao trabalho [21]. Para o desenvolvimento do estudo, considere M um espaço admissível e $\mathcal{O}$ sua família admissível.

Definição 35. *Dizemos que o par (M, μ) é um **sistema semi-dinâmico** se a aplicação $\mu : \mathbb{R}^+ \times M \to M$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *$\mu(0, x) = x$ para todo $x \in M$,*

2. *$\mu(s + t, x) = \mu(s, \mu(t, x))$ para todo $s, t \in \mathbb{R}^+$ e $x \in M$*

3. *μ é contínua em $\mathbb{R}^+ \times M$*

A seguir definiremos órbita de um sistema semi-dinâmico.

Definição 36. *Dado (M, μ) um sistema semi-dinâmico e $x \in M$, define-se respectivamente **órbita positiva** e **órbita regressiva** como os seguintes conjuntos:*

$$\mu(x) = \{\mu(t, x), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}^+\},$$

$$\mu^*(x) = \{y \in M\colon \mu(t, y) = x \text{ para algum } t \in \mathbb{R}^+\}.$$

Analogamente define-se para $A \subset M$,

$$\mu(A) = \bigcup_{x \in A} \mu(x), \ e \ \mu^*(A) = \bigcup_{x \in A} \mu^*(x).$$

Por abuso de linguagem denotaremos $\mu(t, x) = tx$.

Nas próximas definições, veremos as condições para que um ponto seja crítico ou periódico para o sistema semi-dinâmico.

Definição 37. *Um ponto $x \in M$ é chamado de* ***ponto crítico*** *se $\mu(t, x) = x$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$.*

Definição 38. *Um ponto $x \in M$ é chamado de* ***ponto periódico*** *se existe $T > 0$, tal que $\mu(T, x) = x$.*

Sabemos que um sistema semi-dinâmico é uma ação de $\mathbb{R}^+$ em M e que o filtro de Frechet $\mathcal{F} = \{(a, +\infty), a \in \mathbb{R}^+\}$ é uma base de filtro que satisfaz as hipóteses H_1, H_2, H_3 e é um ideal a direita. Como $\mathbb{R}^+ \backslash (a, +\infty) = [0, a]$ é compacto para todo $a \in \mathbb{R}^+$, temos que os resultados mostrados nos Capítulos 2, 3 e 5 são validos para esta estrutura no sistema semi-dinâmico. Assim, os conjuntos limites, prolongamentos e conjuntos limites prolongacionais para $x \in M$ são:

$$\omega(x) = \{y \in M; \text{existe uma rede } (t_\lambda) \subset \mathbb{R}^+ \text{ tal que } t_\lambda \to \infty \text{ e } t_\lambda x \to y\},$$

Para $T > 0$,

$$D(x, T) = \{y \in M; \text{existem redes } (t_\mathcal{V}) \subset (T, \infty) \text{ e } (x_\mathcal{V}) \subset M \text{ tais que } x_\mathcal{V} \to x \text{ e } t_\mathcal{V} x_\mathcal{V} \to y\},$$

$$D^*(x, T) = \{y \in M; \text{existem redes } (t_\mathcal{V}) \subset (T, \infty) \text{ e } (x_\mathcal{V}) \subset M \text{ tais que } t_\mathcal{V} x_\mathcal{V} \to x \text{ e } x_\mathcal{V} \to y\},$$

$$J(x) = \{y \in M; \text{existem redes } t_\lambda \to \infty \text{ e } x_\lambda \to x \text{ tais que } t_\lambda x_\lambda \to y\},$$

$$J^*(x) = \{y \in M; \text{existem redes } t_\lambda \to \infty \text{ e } t_\lambda x_\lambda \to x \text{ tais que } x_\lambda \to y\}.$$

6.1 Sistema Semi-Dinâmico em Espaços Fibrados

Nesta seção apresentaremos resultados e exemplos sobre o estudo de sistema semi-dinâmicos em espaços fibrados. A teoria de fibrados apresentada nesta seção se refere ao Apêndice e Capítulo 5.

Seja (M, π, B, G) um fibrado principal onde $\pi : M \to B$ é uma aplicação aberta e sobrejetora tal que $\pi(qg) = \pi(q)$ para todo $q \in M$ e $g \in G$. Assuma que o espaço topológico F é um G-espaço à esquerda e E o fibrado associado ao fibrado principal (M, π, B, G), indicado por (E, π, B, F, M). Denotaremos os elementos de E por $[q, v]$ e por π a projeção $\pi : E \to B$, definida por $\pi([q, v]) = \pi(q)$. Um fibrado principal (M, π, B, G) é **localmente trivial**, existe uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ do espaço base B tal que para todo $i \in I$, existe um homeomorfismo $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times G$, $\psi_i = (\pi, v_i)$ onde $v_i : \pi^{-1}(U_i) \to G$ é uma aplicação contínua satisfazendo $v_i(qg) = v_i(q)g$ para todo $q \in \pi^{-1}(U_i)$ e $g \in G$. A família $\Psi = \{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ é chamada de **mapa** de M. Para cada $i \in I$ a aplicação $v_i^E : \pi_E^{-1}(U_i) \to F$ dada por $v_i^E([q, u]) = v_i(q)u$ é aberta e $\psi_i^E : \pi_E^{-1}(U_i) \to U_i \times F$ dada por $\psi_i^E = (\pi_E, v_i^E)$ é um homeomorfismo. Assim o fibrado associado é localmente trivial e a família $\Psi^E = \{(U_i, \psi_i^E)\}_{i \in I}$ é um mapa de E.

Tome $\mu : \mathbb{R}^+ \times M \to M$ um sistema semi-dinâmico no espaço total M do fibrado principal (M, π, B, G) que comuta com a ação à direita de G, ou seja, $\mu_t(qg) = \mu_t(q)g$ para todo $q \in M$, $t \in \mathbb{R}^+$ e $g \in G$. Então μ é um sistema semi-dinâmico invariante à direita e cada aplicação $\mu_t : M \to M$ é chamado de **endomorfismo** de M. O sistema semi-dinâmico μ induz o sistema semi-dinâmico $\mu_B : \mathbb{R}^+ \times B \to B$ no espaço base definido por $\mu_B(t, \pi(q)) = \pi(\mu(t, q))$ e $\mu_E : \mathbb{R}^+ \times E \to E$ no fibrado associado definido por $\mu_E(t, [q, v]) = [\mu(t, q), v]$. Em particular, a projeção π é uma conjugação contínua entre os sistema semi-dinâmicos μ_E e μ_B. O sistema semi-dinâmico μ induz um semigrupo agindo na fibra F do fibrado associado E. Para $q \in M$ defina o conjunto

$$\mathbb{R}_q^+ = \{g \in G : \text{existe } t \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \mu(t, q) = qg\},$$

que é um semigrupo de G. Iremos denotar por g_t o elemento de $\mathbb{R}_q^+$ tal que $\mu(t, q) = qg_t$.

Então $g_0 = 1 \in \mathbb{R}_q^+$, onde 1 é o elemento identidade de G. Além do mais $g_t g_s = g_{t+s}$ para todo $g_t, g_s \in \mathbb{R}_q^+$.

Existem situações onde $\mathbb{R}_q^+$ é um subgrupo a um parâmetro de G. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 14. *Sejam G um grupo topológico e $H \subset G$ um subgrupo fechado de G. A aplicação quociente $\pi : G \to G/H$ de G no espaço homogêneo G/H é um fibrado principal com grupo estrutural H. Seja $\gamma : \mathbb{R} \to H$ um subgrupo a um parâmetro de H, ou seja, um homomorfismo de $\mathbb{R}$ em H. Defina $\mu : \mathbb{R} \times G \to G$ por $\mu(t, g) = \gamma(t)g$. Então μ é um fluxo invariante à direita no fibrado principal $(G, \pi, G/H, H)$. Se 1 é a identidade de G então $\mathbb{R}_1 = \{\gamma(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Para cada $h \in H$, $\mathbb{R}_h$ é a conjugação de $\mathbb{R}_1$ por h. Se H é um subgrupo normal de G então $\mathbb{R}_q = g^{-1}\mathbb{R}_1 g$ para cada $g \in G$.*

Exemplo 15. *Seja $\pi : V \to B$ um fibrado vetorial n-dimensional real. Para $x \in B$, um frame σ_x em x é uma aplicação linear invertível $\sigma_x : \mathbb{R}^n \to V_x$, onde V_x é a fibra de V em x. O conjunto de todos os frames é denotado por BV. O fibrados dos frames de V é o fibrado $p : BV \to B$ definido por $\pi(\sigma_x) = x$. O grupo estrutural de BV é $G = GL(n, \mathbb{R})$ que age a direita me BV por $\sigma g = \sigma \circ g$, $\sigma \in BV$ e $g \in GL(n, \mathbb{R})$. Seja $\mu : \mathbb{R}^+ \times V \to V$ um sistema semi-dinâmico invariante à direita que é linear e inversível na fibra. Então μ é o levantamento do sistema semi-dinâmico em BV dado por $\mu_t(\sigma) = \mu_t \circ \sigma$. É fácil ver que $\mu_t(\sigma g) = \mu_t(\sigma)g$, para todo $\sigma \in BV$ e $g \in GL(n, \mathbb{R})$. Suponha que a fibra V_x é invariante por μ. Então μ_t é um automorfismo em V_x para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Assim, dado um frame σ_x de x, existe $g_t \in GL(n, \mathbb{R})$ tal que $\mu_t \circ \sigma_x = \sigma_x \circ g_t$, ou seja, $g_t = \sigma_x^{-1} \circ \mu_t \circ \sigma_x$. Assim nós temos que ${\mathbb{R}^+}_{\sigma_x} = \{\sigma_x^{-1} \circ \mu_t \circ \sigma_x\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, que pode ser extendida a um subgrupo a um parâmetro $\{\sigma_x^{-1} \circ \mu_t \circ \sigma_x\}_{t\in\mathbb{R}}$ em $GL(n, \mathbb{R})$.*

Exemplo 16. *Seja (M, π, B, G) um fibrado principal, onde G é um grupo de Lie conexo com algebra de Lie $\mathfrak{g}$. Considere a aplicação $f : M \times G \to Aut(\mathfrak{g})$ tal que $f(qg) = Ad(g^{-1}) \circ f(q)$ para todo $q \in M$ e $g \in G$. (Por exemplo se $\pi : B \times G \to B$ é um fibrado trivial, defina f por $f(b, g) = Ad(g^{-1})$). Tome o campo de vetores X no centro de $\mathfrak{g}$ e* *defina a aplicação* $A : M \to \mathfrak{g}$ *por* $A(q) = f(q)(X)$. *Então* A *satisfaz*

$$A(qg) = Ad(g^{-1})A(q),$$

para todo $q \in M$ *e* $g \in G$. *Defina o campo de vetores* X *em* M *por*

$$X(q) = \widetilde{A(q)}(q) = \frac{d}{dt}(q exp(tA(q)))|_{t=0}.$$

A solução da equação diferencial $x' = X(x)$ *com valor inicial* $x(0) = q$ *é* $X_t(q) = q exp(tA(q))$. *O fluxo* $\mu : \mathbb{R} \times M \to M$ *definido por* $\mu(t,q) = X_t(q)$ *é um fluxo invariante à direita em* M. *De fato, para* $q \in M$ *e* $g \in G$ *nós temos*

$$\mu(t, qg) = X_t(qg) = qg exp(tA(qg)) = qg exp(Ad(g^{-1})tA(q))$$

$$= q exp(tA(q))g = \mu(t,q)g.$$

O fluxo induzido no espaço base B *é trivial, pois as fibras são invariantes por* μ. *Para* $q \in M$, $\mathbb{R}_q$ *é o subgrupo a um parâmetro* $\{exp(tA(q))\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Exemplo 17. *Seja* G *um grupo de Lie com algebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *identificada com conjuntos dos campos de vetores invariantes à direita em* G *e considere uma métrica Riemmaniana invariante à direita em* G. *Tome* $A : \mathbb{R} \to \mathfrak{g}$ *uma aplicação uniformemente contínua e limitada. Denotaremos por* $\widetilde{A}$ *a extensão contínua* $\widetilde{A} : H(A) \to \mathfrak{g}$, $\widetilde{A}(\xi) = \xi(0)$, *onde* $H(A)$ *é o* hull *de* A, *e considere a família de equações diferenciais em* G

$$\dot{g} = \widetilde{A}(\xi \cdot t)g \qquad\qquad (t \in \mathbb{R}, \xi \in H(A), g \in G).$$

Denote por $\varphi(t, g, \xi)$ *a solução do problema de valor inicial* $\dot{g} = \widetilde{A}(\xi \cdot t)g$, $g(0) = g$. *Então* φ *satisfaz a propriedade do cociclo*

$$\varphi(t + s, g, \xi) = \varphi(t, 1, \xi \cdot s)\varphi(s, g, \xi).$$

Esse cociclo induz o fluxo produto cruzado $\sigma : \mathbb{R} \times H(A) \times G \to H(A) \times G$ *dada por* $\sigma(t, \xi, g) = (\xi \cdot t, \varphi(t, g, \xi))$ *para* $t \in \mathbb{R}$, $\xi \in H(A)$ *e* $g \in G$, *onde* $\varphi(t, g, \xi) =$

$(\sigma \cdot t, \varphi(t,1,\xi)g)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $\xi \in H(A)$ e $g \in G$. Assim segue que σ é um fluxo invariante à direita no fibrado trivial $H(A) \times G \to H(A)$. Seja G/P a variedade homogênea de G com projeção $p : G \to G/P$. Denote por $\alpha : G \times G/P \to G/P$ a ação natural à esquerda de G em G/P. Então temos a coleção da família de equações diferenciais em G/P

$$\dot{x} = d(\alpha_x)_1(\widetilde{A}(\xi \cdot t)) \qquad\qquad (\xi \in H(A))$$

que são denotados por $\dot{x} = \widetilde{A}(\xi \cdot t)x$. Note que a função $\varphi(t,1,\xi)x$ é a solução do problema de valor inicial $\dot{x} = \widetilde{A}(\xi \cdot t)x$, $x(0) = x$. Então temos que o fluxo produto cruzado $\mu : \mathbb{R} \times H(A) \times G/P \to H(A) \times G/P$ é dado por

$$\mu(t,\xi,x) = (\xi \cdot t, \varphi(t,1,\xi)x) \qquad\qquad t \in \mathbb{R},\ \xi \in H(A),\ x \in G/P.$$

Esse fluxo é isomorfo ao fluxo induzido por σ no fibrado associado $E = (H(A) \times G) \times_G G/P$. De fato, a aplicação

$$\psi : H(A) \times G/P \to (H(A) \times G) \times_G G/P,$$

definida por $\psi(\xi,x) = [\xi,1,x]$ é um homeomorfismo de $H(A) \times G/P$ em $(H(A) \times G) \times_G G/P$ e

$$\psi(\mu(t,\xi,x)) = \psi(\xi \cdot t, \varphi(t,1,\xi)x) = [\xi \cdot t, 1, \varphi(t,1,\xi)x]$$

$$= [\xi \cdot \xi, \varphi(t,1,\xi), x] = \sigma(t,[\xi,1,x]) = \sigma(t,\psi(\xi,x)).$$

Agora, se $A_\infty = \lim_{t\to\infty} A(t)$ existe, então A_∞ é uma função constante em $H(A)$. Assim, $\sigma(t, A_\infty, g) = (A_\infty, \varphi(t,g,A_\infty)) = (A_\infty, exp(tA_\infty)g)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $g \in G$. Então $\sigma(t,A_\infty,g) = (A_\infty,g)g^{-1}exp(tA_\infty)g$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $g \in G$. Portanto $\mathbb{R}_{(A_\infty,g)}$ coincide com o subgrupo a um parâmetro $\{g^{-1}exp(tA_\infty)g\}_{t\in\mathbb{R}}$ de G.

Existem casos onde que o semigrupo $\mathbb{R}_q^+$ é o subgrupo trivial $\{1\}$. No exemplo 18, $\mathbb{R}_{(\xi,g)} = \{1\}$ onde ξ não é constante. Em outros casos, se $q \in M$ é um ponto crítico então $\mathbb{R}_q^+ = \{1\}$ com $g_{n\tau} = 1$ para algum $\tau > 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Para estudar o comportamento do limite da ação de $\mathbb{R}_q^+$ em F, assumiremos que existe $g_t \in \mathbb{R}_q^+$ com $t > 0$. Então $g_{nt} = g_t^n \in \mathbb{R}_q^+$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $nt \to +\infty$. Dado um conjunto $K \subset F$, o ω-limite e o ω^*-limite de K são definidos por

$$\omega(K) = \{v \in F : \text{existem redes } (t_\lambda) \text{ em } \mathbb{R}^+ \text{ e } (x_\lambda) \text{ em } K \text{ tal que } t_\lambda \to +\infty \text{ e } g_{t_\lambda} x_{t_\lambda} \to v\},$$

$$\omega^*(K) = \{v \in F : \text{existem redes } (t_\lambda) \text{ em } \mathbb{R}^+ \text{ e } (x_\lambda) \text{ em } K \text{ tal que } t_\lambda \to +\infty \text{ e } g_{t_\lambda}^{-1} x_{t_\lambda} \to v\}.$$

Para $v \in F$, o conjunto limite prolongacional progressivo e regressivo de v são definidos por

$$J(v) = \{u \in F : \text{existem redes } t_\lambda \to +\infty \text{ e } v_\lambda \to v \text{ tal que } g_{t_\lambda} v_\lambda \to u\},$$

$$J^*(v) = \{u \in F : \text{existem redes } t_\lambda \to +\infty \text{ e } u_\lambda \to u \text{ tal que } g_{t_\lambda} u_\lambda \to v\}.$$

Desde que $\mathbb{R}_q^+$ é um subsemigrupo de um grupo, nós temos

$$J^*(v) = \{u \in F : \text{existem redes } t_\lambda \to +\infty \text{ e } v_\lambda \to v \text{ tal que } g_{t_\lambda}^{-1} v_\lambda \to u\}.$$

Proposição 30. *Seja $\mu : \mathbb{R}^+ \times M \to M$ um sistema semi-dinâmico invariante à direita no espaço total M do fibrado principal (M, π, B, G). Então $\omega(q)g = \omega(qg)$, $\omega^*(q)g = \omega^*(qg)$, $J(q)g = J(qg)$ e $J^*(q)g = J^*(qg)$ para todo $q \in M$ e $g \in G$.*

Demonstração: Se $p \in \omega(q)$, então existe $t_\lambda \to +\infty$ tal que $\mu(t_\lambda, q) \to p$. Para $g \in G$, segue que $\mu(t_\lambda, qg) \to pg$ e portanto $pg \in \omega(qg)$. Assim, $\omega(q)g \subset \omega(qg)$. Por outro lado, $\omega(qg) = \omega(qg)g^{-1}g \subset \omega(q)g$ e portanto $\omega(q)g = \omega(qg)$. Se $p \in \omega^*(q)$ e $g \in G$, tome uma vizinhança aberta U de pg. Então Ug^{-1} é uma vizinhança aberta de p. Para $t > 0$, nós temos $Ug^{-1} \cap \mu_t^-(q) \neq \emptyset$, que implica $U \cap \mu_t^-(qg) \neq \emptyset$. Assim, $pg \in \overline{\mu_t^-(qg)}$. Disto segue que $pg \in \omega^*(qg)$ e portanto $\omega^*(q)g \subset \omega^*(qg)$. A inclusão $\omega^*(qg) \subset \omega^*(q)g$, segue de $\omega^*(qg) = \omega^*(qg)g^{-1}g \subset \omega^*(q)g$. Agora tome $p \in J(q)$ e $g \in G$, então existem redes

$t_\lambda \to +\infty$ e $q_\lambda \to q$ tal que $\mu(t_\lambda, q_\lambda) \to p$. Assim $q_\lambda g \to qg$ e $\mu(t_\lambda, q_\lambda g) \to pg$ e portanto $pg \in J(qg)$. A outra inclusão segue análogo ao feito para os conjuntos ω-limites. Assim $J(q)g = J(qg)$. Finalmente, se $p \in J^*(q)$ então $q \in J(p)$. Assim $qg \in J(pg)$ e portanto $pg \in J^*(qg)$. Disto segue que $J^*(q)g = J^*(qg)$. □

A proposição anterior mostra que a coleção dos conjuntos limites e conjuntos limites prolongacionais são invariantes por G. Essa propriedade implica os seguintes resultados.

Corolário 6. *Seja $\mu : \mathbb{R}^+ \times M \to M$ um sistema semi-dinâmico invariante à direita no espaço total M do fibrado principal (M, π, B, G). As seguintes afirmações são validas:*

1. *Se $q \in M$ é progressivamente (regressivamente) Poisson estável então todos os pontos na fibra qG são progressivamente (regressivamente) Poisson estável.*
2. *Se $q \in M$ é não-dispersivo então todos os pontos na fibra qG são não-dispersivos.*

Corolário 7. *Assuma que G age transitivamente à direita em M, onde M é um espaço homogêneo de G, e que $\mu : \mathbb{R}^+ \times M \to M$ um sistema semi-dinâmico invariante à direita.*

1. *Se existe um ponto progressivamente (regressivamente) Poisson estável em M então todos os pontos em M são progressivamente (regressivamente) Poisson estáveis.*
2. *Se existe um ponto não-dispersivo em M então todos os pontos em M são não-dispersivos.*
3. *Se M é compacto então todos os pontos em M são Poisson estáveis.*
4. *Se existe um ponto progressivamente (regressivamente) Poisson instável em M então o sistema semi-dinâmico é progressivamente (regressivamente) Poisson instável.*
5. *Se existe um ponto dispersivo em M então o sistema semi-dinâmico é completamente instável.*

6. Se $J(q) = \emptyset$ para algum $q \in M$ então o sistema semi-dinâmico é dispersivo.

Exemplo 18. *Considere a equação diferencial $g' = Ag$ em $GL(2, \mathbb{R})$ onde A é uma matriz anti-simétrica. O fluxo associado a essa equação é dado por $\mu(t, g) = exp(tA)g$ onde $exp(tA) \in SO(2, \mathbb{R})$. Assim as trajetórias dos fluxos são periódicas e portanto todos os pontos em G são Poisson estáveis.*

Exemplo 19. *Considere a equação diferencial $g' = Ag$ em $GL(2, \mathbb{R})$ onde A é uma matriz diagonalizável com autovalores não negativos. O fluxo associado a essa equação é dado por $\mu(t, g) = exp(tA)g$, onde $exp(tA) \to 0$ para $t \to -\infty$. Seja 1 a matriz identidade. Se $x \in J^*(1)$ então existem sequências $t_n \to -\infty$ e $x_n \to 1$ tal que $exp(t_nA)x_n \to x$. Como $exp(t_nA)x_n \to 0$, segue que $x = 0$. Assim $J^*(1) = \emptyset$ e portanto $J^*(g) = \emptyset$ para todo $g \in G$, concluindo que o fluxo é dispersivo.*

O próximo teorema é retirado do artigo [18].

Teorema 35. *Suponha que (E, π, B, F, M) é um fibrado associado. Fixe $q \in M$ e considere a ação de $\mathbb{R}^+_q$ em F. Para $[q, v] \in E$ as seguintes afirmações são válidas:*

1. $[q, \omega(v)] \subset \omega([q, v])$,

2. $[q, J(v)] \subset J([q, v])$,

3. $[q, J^*(v)] \subset J^*([q, v])$.

Demonstração: (1) Assuma que $\omega(v) \neq \emptyset$ e tome $[q, u] \in [q, \omega(v)]$. Então existe $t_\lambda \to +\infty$ tal que $g_{t_\lambda}v \to u$. Assim $[q, g_{t_\lambda}v] \to [q, u]$. Como

$$[q, g_{t_\lambda}v] = [qg_{t_\lambda}, v] = [\mu(t_\lambda, q), v] = \mu(t_\lambda, [q, v]),$$

temos que $\mu(t_\lambda, [q, v]) \to [q, u]$ com $t_\lambda \to +\infty$ e portanto $[q, u] \in \omega([q, v])$.

(2) Suponha que $[q, u] \in [q, J(v)]$. Então existem redes $t_\lambda \to +\infty$ e $v_\lambda \to v$ tais que $g_{t_\lambda}v_\lambda \to u$. Como $[q, g_{t_\lambda}v_\lambda] = \mu(t_\lambda, [q, v_\lambda])$, temos que $\mu(t_\lambda, [q, v_\lambda]) \to [q, u]$ com $t_\lambda \to +\infty$ e $[q, v_\lambda] \to [q, v]$ e portanto $[q, u] \in J([q, v])$.

(3) Análogo ao (2). $\square$

Corolário 8. *Suponha que (E, π, B, F, M) é um fibrado associado. Fixe $q \in M$ e considere a ação de $\mathbb{R}_q^+$ na fibra F. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Se $v \in F$ é progressivamente Poisson estável então $[q, v] \in E$ é progressivamente Poisson estável.*

2. *Se $v \in F$ é não-dispersivo então $[q, v] \in E$ é não-dispersivo.*

3. *Se $[q, v] \in E$ é progressivamente Poisson instável então v é progressivamente Poisson instável.*

4. *Se $[q, v] \in E$ é dispersivo então v é dispersivo.*

5. *Se o sistema semi-dinâmico em E é completamente instável então o semigrupo agindo em F é completamente instável.*

6. *Se o sistema semi-dinâmico em E é dispersivo então a ação do semigrupo em F é dispersivo.*

7. *Se a fibra F é compacta então existe um ponto progressivamente Poisson estável em E. Em particular o sistema semi-dinâmico é não-dispersivo.*

Demonstração: Os itens de (1) à (6) são consequências imediatas do teorema anterior. Para o item (7), existe um conjunto $N \subset F$ que é $\mathbb{R}_q^+$-minimal pois F é compacto. Assim todos os pontos em N são progressivamente Poisson estáveis. Assim todos os pontos em $[q, N] \subset E$ são progressivamente Poisson estáveis. $\square$

A próxima proposição está provada no artigo [18].

Proposição 31. *Seja $\sigma : \mathbb{R}^+ \times N \to N$ um sistema semi-dinâmico no espaço admissível N. Assuma que $f : M \to N$ uma semiconjugação contínua entre μ e σ, ou seja,*

$f(\mu(t,x)) = \sigma(t, f(x))$ para todo $x \in M$ e $t > 0$. Para $X \subset M$, temos que as seguintes inclusões são verdadeiras:

1. *$f(\omega(X)) \subset \omega(f(X))$;*

2. *$f(D(X,t)) \subset D(f(X),t)$;*

3. *$f(J(X)) \subset J(f(X))$.*

Demonstração: (1) Para $y \in \omega(X)$, existem redes $t_\lambda \to +\infty$ e (x_λ) em X tais que $\mu(t_\lambda, x_\lambda) \to y$. Assim $f(\mu(t_\lambda, x_\lambda)) \to f(y)$. Como $f(\mu(t_\lambda, x_\lambda)) = \sigma(t_\lambda, f(x_\lambda))$, então $\sigma(t_\lambda, f(x_\lambda)) \to f(y)$ com $t_\lambda \to +\infty$ e $(f(x_\lambda)) \subset f(X)$. Portanto $f(y) \in \omega(f(X))$.

(2) Se $y \in D^+(X)$ então $y \in D^+(x)$ para algum $x \in X$. Assim existem redes (t_λ) em $\mathbb{R}^+$ e $x_\lambda \to x$ tais que $\mu(t_\lambda, x_\lambda) \to y$. Como $f(x_\lambda) \to f(x)$, $f(\mu(t_\lambda, x_\lambda)) \to f(y)$ e $f(\mu(t_\lambda, x_\lambda)) = \sigma(t_\lambda, f(x_\lambda))$ então $\sigma(t_\lambda, f(x_\lambda)) \to f(y)$ com (t_λ) em $\mathbb{R}^+$ e $f(x_\lambda) \to f(x)$. Portanto $f(y) \in D^+(f(x)) \subset D^+(f(X))$.

(3) Se $y \in J(X)$ então $y \in J(x)$ para algum $x \in X$. Assim existem redes $t_\lambda \to +\infty$ e $x_\lambda \to x$ tais que $\mu(t_\lambda, x_\lambda) \to y$. Como $f(x_\lambda) \to f(x)$, $f(\mu(t_\lambda, x_\lambda)) \to f(y)$ e $f(\mu(t_\lambda, x_\lambda)) = \sigma(t_\lambda, f(x_\lambda))$ então $\sigma(t_\lambda, f(x_\lambda)) \to f(y)$ com $t_\lambda \to +\infty$ e $f(x_\lambda) \to f(x)$. Portanto $f(y) \in J(f(x)) \subset J(f(X))$. □

Proposição 32. *Suponha que (E, π, B, F, M) é um fibrado associado. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Se $[q,v] \in E$ é progressivamente Poisson estável então $\pi(q) \in B$ é progressivamente Poisson estável.*

2. *Se $[q,v] \in E$ é não-dispersivo então $\pi(q) \in B$ é não-dispersivo.*

Demonstração: Desde que π é uma conjugação contínua entre os sistema semi-dinâmicos μ_E e μ_B, o resultado segue da proposição anterior. □

Os seguintes resultados são consequências do Teorema 36 e Proposição 31.

Corolário 9. *Suponha que (E, π, B, F, M) é um fibrado associado.*

1. *Se o sistema semi-dinâmico no espaço B é progressivamente Poisson instável então o sistema semi-dinâmico em E e a ação do semigrupo em F são progressivamente Poisson instáveis.*

2. *Se o sistema semi-dinâmico no espaço base B é completamente instável então o sistema semi-dinâmico em E e ação do semigrupo em F são completamente instáveis.*

3. *Se o sistema semi-dinâmico no espaço base B é dispersivo então o sistema semi-dinâmico em E e ação do semigrupo em F são dispersivos.*

Corolário 10. *Seja $\mu : \mathbb{R}^+ \times V \to V$ um sistema semi-dinâmico invariante à direita no fibrado vetorial n-dimensional $\pi : V \to B$ que é linear e inversível na fibra. Se a fibra é μ-invariante então todos os pontos na seção $\{[\sigma, 0]\}_{\sigma \in BV}$ são progressivamente Poisson estável.*

Demonstração: Considerando a notação do Exemplo 16, para cada $\sigma \in BV$ temos o subgrupo a um parâmetro $\mathbb{R}^+_\sigma = \{\sigma^{-1} \circ \mu_t \circ \sigma\}_{t \in \mathbb{R}}$ de $GL(n, \mathbb{R})$. Assim $\omega(0) = \{0\}$. Pelo Teorema 36 segue que $[\sigma, 0] \in \omega([\sigma, 0])$. □

Exemplo 20. *Considere o fibrado trivial $\pi : B \times GL(n, \mathbb{R}) \to B$ e tome a matriz identidade $X = 1$ de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Então o fluxo $\mu : \mathbb{R} \times B \times GL(n, \mathbb{R}) \to B \times GL(n, \mathbb{R})$ definida por $\mu(t, (x, g)) = (x, e^t g)$ é dispersivo. De fato, se $(y, h) \in J^*(x, g)$ então existem redes $t_\lambda \to -\infty$ e $(x_\lambda, g_\lambda) \to (x, g)$ tais que $(x_\lambda, e^{t_\lambda} g_\lambda) \to (y, 0)$, ou seja, $y = x$ e $h = 0$. Como $(x, 0) \notin B \times GL(n, \mathbb{R})$, temos que o fluxo é dispersivo. Além do mais, desde que o fluxo induzido no espaço base B é trivial então ele é Poisson estável em B e concluimos que a recíproca da Proposição 31 não é valida.*

Exemplo 21. *Sejam M uma variedade n-dimensional e TM o fibrado tangente. Então a projeção $\pi : TM \to M$ é um fibrado vetorial n-dimensional. Denote por BM o* *fibrado das bases de TM. Seja $\mu : \mathbb{R} \times BM \to BM$ um fluxo invariante à direita dado por $\mu(t,\sigma) = e^t\sigma$. Esse fluxo induz o fluxo $\mu_t([\sigma, v]) = [e^t\sigma, v] = [\sigma, e^t v]$ em $TM = BM \times_{GL(n,\mathbb{R})} \mathbb{R}^n$ que é linear nas fibras. Assim pelo exemplo anterior, esse fluxo é dispersivo em BM. Mesmo assim, o fluxo é não-dispersivo no fibrado tangente. De fato, para $\sigma \in BV$, $\mathbb{R}_\sigma$ é o subgrupo a um parâmetro $\{e^t 1\}_{t\in\mathbb{R}}$. É facil ver que $\omega^*(0) = \omega(0) = \{0\}$. Assim 0 é Poisson estável. Tomando $u, v \in \mathbb{R}^n$ tal que $u \in J^*(v)$, então existem redes $t_\lambda \to -\infty$ e $v_\lambda \to v$ tal que $e^{t_\lambda} v_\lambda \to u$. Como $e^{t_\lambda} v_\lambda \to 0$ temos que $u = 0$, ou seja, $J^*(v) = \{0\}$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Note também que $e^{t_\lambda} v \to 0$ para $t_\lambda \to -\infty$, assim $\omega^*(0) = J^*(v) = \{0\}$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Agora suponha que $J(v) \neq \emptyset$ e tome $u \in J(v)$, então $v \in J^*(u) = \{0\}$. Assim, $J(v) \neq \emptyset$ se e somente se $v = 0$. Além do mais, $J(0) = \mathbb{R}^n$. De fato, para $u \in \mathbb{R}^n$ temos que $e^n e^{-n} u = u \to u$ e $e^{-n} u \to 0$ com $n \to +\infty$. Aplicando o Teorema 36, temos que $[\sigma, 0] \in \omega([\sigma, 0])$ e $[\sigma, \mathbb{R}^n] \subset J([\sigma, 0])$. Assim os pontos da seção $\{[\sigma, 0]\}_{\sigma\in BM}$ são Poisson estáveis. Além do mais $J(\{[\sigma, 0]\}) = TM$.*

Agora, discutiremos a situação em que um sistema semi-dinâmico dispersivo no fibrado associado induz um sistema semi-dinâmico dispersivo no espaço base do espaço fibrado. Assuma que G age à esquerda no espaço métrico compacto (F, d) e $\pi_E : E \to B$ o fibrado associado de π onde $E = M \times_G F$. Considere a cobertura trivializante $\{U_i\}_{i\in I}$ de M e tome o mapa $\psi^E = \{(U_i, \psi_i^E)\}_{i\in I}$ de E. O espaço total E é localmente compacto, uma vez que é localmente trivial e que F é compacto. Dados $\epsilon > 0$ e $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de M, uma cobertura Ψ-adaptada de E é definido por $\mathcal{U}_\epsilon = (\mathcal{U}, \epsilon) = \{\psi^{-1}((U \cap U_i) \times \mathrm{B}(v, \epsilon)) : U \in \mathcal{U}, i \in I \text{ e } v \in F\}$. Pela Proposição 5.3 de [12] temos que a família $\mathcal{O}_\psi(E)$ de todas as coberturas abertas adaptadas é admissível. Seja $\mathcal{O}$ a família de todas as coberturas abertas de B, onde este é paracompacto. Assim, temos que $\mathcal{O}$ é admissível. Tome a família de todas as coberturas ψ-adaptadas. Para os próximos resultados, fixaremos um sistema semi-dinâmico invariante à direita $\mu : \mathbb{R}^+ \times M \to M$.

Lema 5. *Para quaisquer $q \in M$ e $\mathcal{U}_\epsilon \in \mathcal{O}_\psi(E)$, vale a inclusão*

$$\pi_E^{-1}(B(\pi(q), \mathcal{V})) \subset B(E_{\pi(q)}, \mathcal{U}_\epsilon) \subset \pi_E^{-1}(B(\pi(q), \mathcal{U})),$$

onde $\mathcal{V}$ refina $\mathcal{U}$ e $\{U_i\}_{i\in I}$.

Demonstração: Se $[p,u] \in \pi_E^{-1}(\mathrm{B}(\pi(q),\mathcal{V}))$ então $\pi(p) \in \mathrm{B}(\pi(q),\mathcal{V})$. Assim existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $\pi(p),\pi(q) \in V$. Como $\mathcal{V}$ refina $\mathcal{U}$ e $\{U_i\}_{i\in I}$, existem $U \in \mathcal{U}$ e $i \in I$ tal que $V \subset U \cap U_i$, ou seja, $\pi(p),\pi(q) \in U \cap U_i$. Tome $w = v_i(p)u$ e $v = v_i(q)^{-1}w$, então $\psi_i^E([p,u]) = (\pi(p),w)$ e $\psi_i^E([q,v]) = (\pi(q),w)$. Assim $[p,u],[q,v] \in (\psi_i^E)^{-1}((U \cap U_i) \cap \mathrm{B}_\epsilon(w))$ e portanto $[p,u] \in \mathrm{B}(E_{\pi(q)},\mathcal{U}_\epsilon)$. Concluindo que $\pi_E^{-1}(\mathrm{B}(\pi(q),\mathcal{V})) \subset \mathrm{B}(E_{\pi(q)},\mathcal{U}_\epsilon)$. Agora tome $[p,u] \in \mathrm{B}(E_{\pi(q)},\mathcal{U}_\epsilon)$. Então existem $U \in \mathcal{U}$, $i \in I$, $w \in F$ e $[q,v] \in E$ tais que $[p,u],[q,v] \in (\psi_i^E)^{-1}((U \cap U_i) \cap \mathrm{B}_\epsilon(w))$. Assim, $\pi_E([p,u]),\pi_E([q,v]) \in U \cap U_i$, ou seja, $\pi_E([p,u]) \in \mathrm{B}(\pi(q),\mathcal{U})$. Portanto $\mathrm{B}(E_{\pi(q)},\mathcal{U}_\epsilon) \subset \pi_E^{-1}(\mathrm{B}(\pi(q),\mathcal{U}))$. □

Teorema 36. *Assumindo as hipóteses do parágrafo acima, para cada $q \in M$ temos*

$$\pi_E^{-1}(D(\pi(q))) = \bigcap_{\mathcal{U}_\epsilon \in \mathcal{O}_\psi(E)} \overline{\mu(B(E_{\pi(q)},\mathcal{U}_\epsilon))}.$$

Demonstração: É facil ver que

$$\pi_E^{-1}(D(\pi(q))) = \pi_E^{-1}\Big(\bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}} \overline{\mu(\mathrm{B}(\pi(q),\mathcal{U}))}\Big) = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}} \pi_E^{-1}\big(\overline{\mu(\mathrm{B}(\pi(q),\mathcal{U}))}\big).$$

Como π_E é uma aplicação aberta,

$$\pi_E^{-1}(D(\pi(q))) = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}} \overline{\pi_E^{-1}(\mu(\mathrm{B}(\pi(q),\mathcal{U})))}.$$

Agora tome $[p,u] \in \pi_E^{-1}(\mu(\mathrm{B}(\pi(q),\mathcal{U})))$. Então $\pi(p) \in \mu(\mathrm{B}(\pi(q),\mathcal{U}))$, ou seja, existe $t \in \mathbb{R}^+$ e $\pi(r) \in \mathrm{B}(\pi(q),\mathcal{U})$ tal que $\pi(p) = \pi(\mu_t(r))$. Assim existe $g \in G$ tal que $p = \mu_t(rg)$. Isto segue que $[p,u] = \mu_t([rg,u])$ com $\pi_E([rg,u]) = \pi(r) \in \mathrm{B}(\pi(q),\mathcal{U})$, ou seja, $[p,u] \in \mu_t(\pi_E^{-1}(\mathrm{B}(\pi(q),\mathcal{U})))$. Portanto $\pi_E^{-1}(\mu(\mathrm{B}(\pi(q),\mathcal{U}))) \subset \mu(\pi_E^{-1}(\mathrm{B}(\pi(q),\mathcal{U})))$. Por outro lado, como π_E é uma conjugação, nós temos

$$\pi_E(\mu(\pi_E^{-1}(\mathrm{B}(\pi(q),\mathcal{U})))) = \mu(\mathrm{B}(\pi(q),\mathcal{U})).$$

Assim, $\mu(\pi_E^{-1}(\mathrm{B}(\pi(q),\mathcal{U}))) \subset \pi_E^{-1}(\mu(\mathrm{B}(\pi(q),\mathcal{U})))$ e portanto

$$\pi_E^{-1}(\mu(\mathrm{B}(\pi(q),\mathcal{U}))) = \mu(\pi_E^{-1}(\mathrm{B}(\pi(q),\mathcal{U})))$$

e obtemos

$$\pi_E^{-1}(D(\pi(q))) = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{O}} \overline{\mu(\pi_E^{-1}(\mathrm{B}(\pi(q),\mathcal{U})))},$$

e o resultado segue aplicando o Lema 5. $\square$

Teorema 37. *Para cada $x \in B$, $\pi_E^{-1}(D(x)) = D(E_x)$.*

Demonstração: Tome $x = \pi(q)$. Como a fibra $E_{\pi(q)}$ é compacta então o prolongamento $D(E_{\pi(q)})$ é fechado. Pela Proposição 30, nós temos $\pi_E(D(E_{\pi(q)})) \subset D(\pi(q))$. Assim, $D(E_{\pi(q)}) \subset \pi_E^{-1}(D(\pi(q)))$. Por outro lado, tome $[p,u] \in \pi_E^{-1}(D(\pi(q)))$ e uma vizinhança N de $[p,u]$. Desde E é localmente compacto, existe uma vizinhança V de $[p,u]$ tal que $\overline{V}$ é compacto e $\overline{V} \subset N$. Pelo teorema anterior, para $\mathcal{U}_\epsilon \in \mathcal{O}_\psi(E)$, existem $t_{\mathcal{U}_\epsilon} \in \mathbb{R}^+$ e $[q_{\mathcal{U}_\epsilon}, v_{\mathcal{U}_\epsilon}] \in \mathrm{B}(E_{\pi(q)},\mathcal{U}_\epsilon)$ tal que $\mu(t_{\mathcal{U}_\epsilon}, [q_{\mathcal{U}_\epsilon}, v_{\mathcal{U}_\epsilon}]) \in V \cap \mu(\mathrm{B}(E_{\pi(q)},\mathcal{U}_\epsilon))$. Como $\overline{V}$ e a fibra $E_{\pi(q)}$ são compactos, podemos assumir que a rede $([q_{\mathcal{U}_\epsilon}, v_{\mathcal{U}_\epsilon}])$ converge para algum $[q,v] \in E_{\pi(q)}$ e $(\mu(t_{\mathcal{U}_\epsilon}, [q_{\mathcal{U}_\epsilon}, v_{\mathcal{U}_\epsilon}]))$ converge para algum $x \in \overline{V}$. Assim $x \in D([q,v]) \cap N$ e portanto $[p,u] \in \overline{D(E_{\pi(q)})} = D(E_{\pi(q)})$. $\square$

O seguinte teorema apresenta uma condição necessária e suficiente para a dispersividade no espaço base.

Teorema 38. *O sistema semi-dinâmico no espaço base B é dispersivo se, e somente se, não existem pontos quase periódicos e o sistema semi-dinâmico no fibrado associado E é dispersivo.*

Demonstração: Se o sistema semi-dinâmico em B é dispersivo então não existem pontos quase periódicos pois os conjuntos limites são vazios. Além do mais, pelo Corolário 10 temos que o sistema semi-dinâmico em E é dispersivo. Reciprocamente, suponha que não existem pontos quase periódicos e o sistema semi-dinâmico em E é dispersivo. Então, pelo Teorema 17, $D([q,u]) = \mu([q,u])$ para todo $[q,v] \in E$. Assim, $D(E_x) = \mu(E_x)$ para todo $x \in B$. Pelo teorema anterior segue que $D(x) = \mu(x)$ para todo $x \in B$. Novamente pelo Teorema 17, como não existe ponto quase periódico, o sistema semi-dinâmico em B é dispersivo. $\square$

Capítulo 7

Apêndice: Teoria Geral de Espaços Fibrados

Neste apêndice, será exposto de forma resumida a teoria geral de espaços fibrados, seguindo o livro [9]. Mostraremos algumas relações entre conjuntos controláveis e fibrados.

7.1 Fibrados e Seções Transversais

Definição 39. *Dados E e B espaços topológicos e $p : E \to B$ uma aplicação sobrejetora contínua, chamaremos a tripla (E, p, B) de **fibrado**. Os espaços topológicos B e E serão chamados respectivamente de **espaço base** e **espaço total** e a aplicação contínua $p : E \to B$ será chamada de **projeção**. Para cada $b \in B$, o conjunto $p^{-1}(b)$ será chamado de **fibra determinada por** $b \in B$.*

Intuitivamente um fibrado é a união das fibras $p^{-1}(b)$ com $b \in B$ e munido da topologia induzida do espaço topológico E. Usaremos as letras gregas $(\xi, \eta, \zeta, \lambda, ...)$ para denotar o fibrado. Assim dado um fibrado ξ, denotaremos $E(\xi)$ como espaço total de ξ e $B(\xi)$ como espaço base de ξ.

Definição 40. *Dados B e F espaço topológicos, chamaremos de **produto fibrado** sobre B com fibra F, o fibrado $(B \times F, p_1, B)$, onde p_1 é a projeção da primeira coordenada e $B \times F$ é o produto cartesiano entre os espaços topológicos, munido da topologia produto.*

Definição 41. *Um fibrado* (E', p', B') *é um* ***subfibrado*** *de* (E, p, B)*, se* E' *e* B' *são subespaços topológicos de* E *e* B *respectivamente e* $p' : p \mid E' \to B'$.

Definição 42. *Uma* ***seção transversal*** *de um fibrado* (E, p, B) *é uma aplicação contínua* $s : B \to E$*, tal que* $p \circ s = Id_B$*, ou seja, uma seção transversal do fibrado* (E, p, B) *é uma aplicação contínua* $s : B \to E$*, tal que* $s\,(b) \in p^{-1}\,(b)$ *para todo* $b \in B$.

Proposição 33. *Seja* (E', p', B) *um subfibrado de* (E, p, B)*. Se* s *é uma seção transversal de* (E, p, B)*, então* s *é uma seção transversal de* (E', p', B) *se e somente se* $s(b) \in E'$ *para todo* $b \in B$.

Demonstração: Seja s uma seção transversal de (E, p, B) e (E', p', B) um subfibrado de (E, p, B). Se s é uma seção transversal de (E', p', B), então $s\,(b) \in p'^{-1}\,(b) \subset E'$ para todo $b \in B$. Como s é uma seção transversal de (E, p, B), temos que $s\,(b) \in p^{-1}\,(b)$. Sabendo que $p' : p \mid E' \to B$ e usando o fato que $s(b) \in E'$ para todo $b \in B$, então temos que $p^{-1}\,(b) = p'^{-1}\,(b)$, concluindo que $s\,(b) \in p'^{-1}\,(b)$ para todo $b \in B$. □

Proposição 34. *Se* s *é uma seção transversal de um produto fibrado* $(B \times F, p_1, B)$*, então* $s\,(b) = (b, f\,(b))$ *para todo* $b \in B$*, onde* $f : B \to F$ *é unicamente determinado por* s.

Demonstração: Toda aplicação $s : B \to B \times F$ tem a forma $s\,(b) = (s'\,(b)\,, f\,(b))$, onde $s' : B \to B$ e $f : B \to F$ são unicamente determinados por s. Como s é uma seção transversal de $(B \times F, p_1, B)$, temos que $b = p_1 \circ s\,(b) = s'\,(b)$ para todo $b \in B$, ou seja, $s\,(b) = (b, f\,(b))$ para todo $b \in B$. □

Observe que a proposição anterior mostra que a função que é atribuida a seção transversal s do produto fibrado $(B \times F, p_1, B)$, na aplicação $p_2 \circ s : B \to F$ onde $p_2 : B \times F \to F$ é a projeção da segunda coordenada, é uma bijeção entre o conjunto de todas as seções transversais de $(B \times F, p_1, B)$ no conjunto de todas as aplicações contínuas de B em F.

Sobre as duas ultimas proposições, se (E,p,B) é um subfibrado do produto fibrado $(B\times F,p_1,B)$, a seção transversal de s de (E,p,B) tem a forma, $s(b)=(b,f(b))$, onde $f:B\to F$ é uma aplicação contínua tal que $(b,f(b))\in E$ para todo $b\in B$.

7.2 Morfismos sobre fibrados

Definição 43. *Sejam (E,p,B) e (E',p',B') dois fibrados. Um **morfismo fibrado** $(u,f):(E,p,B)\to(E',p',B')$ é um par de aplicações contínuas $u:E\to E'$ e $f:B\to B'$ tais que $p'\circ u=f\circ p$.*

Note que a relação $p'\circ u=f\circ p$ é exigir que o diagrama abaixo seja comutativo.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & E' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

A condição, $p'\circ u=f\circ p$ pode ser expressa pela relação, $u\left(p^{-1}(b)\right)\subset(p')^{-1}(f(b))$ para cada $b\in B$, isto é, a fibra determinada por $b\in B$ é transportada na fibra determinada por $f(b)$ por u.

Definição 44. *Sejam (E,p,B) e (E',p',B) dois fibrados sobre B. Um **morfismo fibrado sobre** B (ou B-**morfismo**) $u:(E,p,B)\to(E',p',B)$ é uma aplicação contínua $u:E\to E'$ tal que $p'\circ u=p$, ou seja, $(u,Id_B):(E,p,B)\to(E',p',B)$ é um morfismo fibrado.*

Exemplo 22. *Se (E',p',B') é um subfibrado de (E,p,B), $f:B'\to B$ e $u:E'\to E$ são aplicações inclusão, então $(u,f):(E',p',B')\to(E,p,B)$ é um morfismo fibrado. De fato, dado $x\in E'$, temos que $(f\circ p')(x)=f(p'(x))=p'(x)=p(x)=p(u(x))=(p\circ u)(x)$, ou seja, o diagrama abaixo é comutativo.*

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{u} & E \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Exemplo 23. *Seja s uma seção transversal de (E,p,B), temos que a aplicação (s, Id_B) : $(B, Id_B, B) \to (E,p,B)$ é um B-morfismo. De fato, como s é uma seção transversal, temos que $p \circ s = Id_B$, ou seja, o diagrama abaixo é comutativo.*

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{s} & E \\ {\scriptstyle Id_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \xrightarrow{Id_B} & B \end{array}$$

Relacionando com a definição de morfismo fibrado, é obvio que (Id_E, Id_B) : $(E,p,B) \to (E,p,B)$ é um morfismo fibrado. Observe que, se $(u,f) : (E,p,B) \to (E',p',B')$ e $(u',f') : (E',p',B') \to (E'',p'',B'')$ são morfismos fibrados, ou seja, o diagrama abaixo é comutativo,

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{u} & E' & \xrightarrow{u'} & E'' \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p''} \\ B & \xrightarrow{f} & B' & \xrightarrow{f'} & B'' \end{array}$$

podemos definir o morfismo fibrado $(u'u, f'f) : (E,p,B) \to (E'',p'',B'')$, como sendo o par de aplicações, $u' \circ u : E \to E''$ e $f' \circ f : B \to B''$.

Definição 45. *A **categoria dos fibrados**, denotado por* **Bun** *tem como objeto todos os fibrados (E,p,B) e o conjunto de todos os morfismos fibrados. Para cada espaço B, a **subcategoria de fibrados sobre** B, denotado por $\mathbf{Bun}_B$, tem como objeto todos os fibrados com espaço base B e o conjunto de todos os B-morfismos.*

Definição 46. *Um morfismo fibrado $(u,f) : (E,p,B) \to (E',p',B')$ é dito um **isomorfismo fibrado** se e somente se existe um morfismo fibrado $(u',f') : (E',p',B')$ $\to (E,p,B)$ tal que $f \circ f' = Id_B$, $f \circ f' = Id_{B'}$, $u' \circ u = Id_E$ e $u \circ u' = Id_{E'}$.*

Definição 47. *Um espaço topológico F é a **fibra** do fibrado (E,p,B), se para todo $b \in B$, a fibra $p^{-1}(b)$ é homeomorfo a F. Se F é uma fibra do fibrado (E,p,B), então o fibrado (E,p,B) é um fibrado **trivial** com respeito a fibra F, se e somente se, existe um B-isomorfismo entre os fibrados (E,p,B) e $(B \times F, p, B)$.*

7.3 Produtos e Produto Fibrado

Definição 48. *O **produto de dois fibrados**, (E, p, B) e (E', p', B') é o fibrado*

$$(E \times E', p \times p', B \times B').$$

Definição 49. *O **produto fibrado** $\xi_1 \oplus \xi_2$ de dois fibrados $\xi_1 = (E_1, p_1, B_1)$ e $\xi_2 = (E_2, p_2, B_2)$ sobre B é $(E_1 \oplus E_2, q, B)$ onde $E_1 \oplus E_2$ é o subespaço de todos os pares $(x, x') \in E_1 \times E_2$, com $p_1(x) = p_2(x')$ e $q(x, x') = p_1(x) = p_2(x')$.*

O produto fibrado é também conhecido como **soma de Whitney**. A fibra $q^{-1}(b)$ de $(E_1 \oplus E_2, q, B)$ sobre $b \in B$ é $p_1^{-1}(b) \times p_2^{-1}(b) \subset E_1 \times E_2$. Esta é a razão para o termo produto fibrado.

A aplicação produto fibrado $\oplus : \mathbf{Bun}_B \times \mathbf{Bun}_B \to \mathbf{Bun}_B$ é um functor. De fato, dado $u_1 : (E_1, p_1, B) \to (E_1', p_1', B)$ e $u_2 : (E_2, p_2, B) \to (E_2', p_2', B)$ são dois B-morfismos. Então definindo o B-morfismo $u_1 \oplus u_2 : (E_1 \oplus E_2, q, B) \to (E_1' \oplus E_2', q', B)$ pela relação $(u_1 \oplus u_2)(x_1, x_2) = (u_1(x_1), u_2(x_2))$. Desde que $p_1' \circ u_1(x_1) = p_1(x_1) = p_2(x_2) = p_2' \circ u_2(x_2)$, o morfismo $u_1 \oplus u_2$ está bem definido. Claramente a relação $Id_{E_1} \oplus Id_{E_2} = Id_{E_1 \oplus E_2}$ é valida. Se $v_1 : (E_1', p_1', B) \to (E_1'', p_1'', B)$ e $v_2 : (E_2', p_2', B) \to (E_2'', p_2'', B)$ são ambos B-morfismos, então nós temos $(v_1 \oplus v_2)(u_1 \oplus u_2) = (v_1 \circ u_1 \oplus v_2 \circ u_2)$, concluíndo que $\oplus$ é um functor. O produto fibrado é o produto na categoria $\mathbf{Bun}_B$ no sentido na teoria de categoria. O mapa $u : B \times F_1 \times F_2 \to (B \times F_1) \times (B \times F_2)$ definido pela relação $u(b, y_1, y_2) = (b, y_1, b, y_2)$ é um homeomorfismo e define um B-isomorfismo no produto fibrado $u : (B \times F_1 \times F_2, q_1, B) \to (B \times F_1, p_1, B) \oplus (B \times F_2, p_2, B)$. Usando este isomorfismo e as propriedades de functorial de $\oplus$, temos a seguinte proposição.

Proposição 35. *Se (E_1, p_1, B) é um fibrado trivial com fibra F_1 e se (E_2, p_2, B) é um fibrado trivial com fibra F_2 então $(E_1, p_1, B) \oplus (E_2, p_2, B)$ é um fibrado trivial com fibra $F_1 \times F_2$.*

Proposição 36. *A seção transversal s de um produto fibrado $(E_1 \oplus E_2, q, B)$ tem a forma $s(b) = (s_1(b), s_2(b))$, onde s_1 é uma seção transversal de (E_1, p_1, B) e s_2 é uma seção transversal de (E_2, p_2, B), unicamente definidos por s.*

Demonstração: Cada seção transversal s é um mapa $s : B \to E_1 \oplus E_2 \subset E_1 \times E_2$ tem a forma $s(b) = (s_1(b), s_2(b))$, onde $s_1 : B \to E_1$ e $s_2 : B \to E_2$. Como s é uma seção transversal temos que $b = q \circ s(b) = p_1 \circ s_1(b) = p_2 \circ s_2(b)$ para cada $b \in B$, ou seja, s_1 e s_2 são seções transversais, unicamente definidas por s. $\square$

7.4 Fibrados Restritos e Fibrados Induzidos

Definição 50. *Sejam $\xi = (E, p, B)$ um fibrado e A um subconjunto de B. Então o* ***fibrado restrito*** *de ξ em A, denotado por $\xi|A$ é o fibrado (E', p', A) onde $E' = p^{-1}(A)$ e $p' = p|E'$.*

Se ξ é o produto fibrado sobre B com fibra F e se A é um subconjunto de B então $\xi|A$ é um produto fibrado sobre A com fibra F.

A restrição de fibrados satisfaz a seguinte propriedade transitiva. Se $A_1 \subset A \subset B$ e ξ é um fibrado sobre B, então $\xi|A_1 = (\xi|A)|A_1$ e $\xi|B = \xi$. Se $u : \xi \to \eta$ é um B-morfismo e se $A \subset B$ então $u_A = u|E(\xi|A) : \xi|A \to \eta|A$ é um A-morfismo. Se $v : \eta \to \xi$ é um segundo B-morfismo, temos que $(v \circ u)_A = v_A \circ u_A$ e $(Id_\xi)_A = Id_{\xi|A}$. Consequentemente, as funções $\xi \mapsto \xi|A$ e $u \mapsto u_A$ definem um functor $\mathbf{Bun}_B \to \mathbf{Bun}_A$.

Definição 51. *Sejam $\xi = (E, p, B)$ um fibrado e $f : B_1 \to B$ uma aplicação contínua. O* ***fibrado induzido de*** *ξ* ***por*** *f, denotado por $f^*(\xi)$, tem como espaço base B_1, espaço total E_1 de todos os pares $(b_1, x) \in B_1 \times E$ com $f(b_1) = p(x)$ e a aplicação projeção $p_1 : B_1 \times E \to B_1$ definida por $p_1((b_1, x)) = b_1$.*

Exemplo 24. *Dado $\xi = (E, p, B)$ um fibrado sobre B e A um subespaço de B. Seja $f : A \to B$ a aplicação inclusão, então $\xi|A$ e $f^*(\xi)$ são A-isomorfos. De fato, seja a aplicação $u : \xi|A \to f^*(\xi)$ dada por $u(x) = (p(x), x)$, note que está bem definida, pois $f(p(x)) = p(x)$ e $p(x) \in A$. Como $p_{\xi|A}(x) = p(x)$ e $\left(p_{f^*(\xi)} \circ u\right)(x) = p_{f^*(\xi)}(u(x)) = p_{f^*(\xi)}((p(x), x)) = p(x)$, para todo $x \in E(\xi|A) = p^{-1}(A)$, temos que u é um A-morfismo. Agora tomando $v : f^*(\xi) \to \xi|A$ dado por $v((a, x)) = x$, temos que v é um A-morfismo pois $p_{f^*(\xi)}((a, x)) = a = p(x)$ e $\left(p_{\xi|A} \circ v\right)((a, x)) = p_{\xi|A}(x) = p(x)$. Sabendo que $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v((p(x), x)) = x$ para $x \in E(\xi|A)$ e $(u \circ v)((a, x)) = u(v((a, x))) = u(x) = (p(x), x) = (a, x)$ para $(a, x) \in E(f^*(\xi))$, concluindo que $\xi|A$ e $f^*(\xi)$ são A-isomorfos.*

Exemplo 25. *Sejam $\xi = (E, p, B)$ um fibrado sobre B e $f^*(\xi)$ o fibrado induzido de ξ referente a aplicação $f : B_1 \to B$. Tomando a aplicação $f_\xi : E(f^*(\xi)) \to E$ definido por $f_\xi((b_1, x)) = x$ juntamente com f, temos que a aplicação $(f_\xi, f) : f^*(\xi) \to \xi$ define um morfismo, de fato, dado $(b_1, x) \in E(f^*(\xi))$, temos que $(p \circ f_\xi)((b_1, x)) = p(x)$ e $\left(f \circ p_{f^*(\xi)}\right)((b_1, x)) = f(b_1) = p(x)$. O morfismo definido é chamado de* ***morfismo canônico induzido pelo fibrado****.*

Proposição 37. *Se $(f_\xi, f) : f^*(\xi) \to \xi$ é o morfismo canônico induzido pelo fibrado ξ referente a aplicação $f : B_1 \to B$ então para cada $b_1 \in B_1$ a restrição $f_\xi : p^{-1}(b_1) \to p^{-1}(f(b_1))$ é um homeomorfismo. Além do mais, se $(v, f) : \eta \to \xi$ é um morfismo fibrado então existe um B_1-morfismo $w : \eta \to f^*(\xi)$ tal que $f_\xi \circ w = v$. O morfismo w é único com respeito a estas propriedades.*

Demonstração: A fibra $p^{-1}(b) \subset \{b_1\} \times E$ é o subespaço com elementos $(b_1, x) \in \{b_1\} \times E$ tais que $p(x) = f(b_1)$. Consequentemente, $f_\xi : \{b_1\} \times p^{-1}_{f^*(\xi)}(b_1) \to p^{-1}(f(b_1))$ defindo por $f_\xi((b_1, x)) = x$ está bem definido e é um homeomorfismo. Para segunda instrução, tome $w : \eta \to f^*(\xi)$ definido por $w(y) = (p_\eta(y), v(y))$, para $y \in E(\eta)$. Desde que (v, f) é um morfismo, temos que $f(p_\eta(y)) = p(v(y))$, mostrando que a aplicação está bem definida. Como, $p_{f^*(\xi)}(w(y)) = p_{f^*(\xi)}((p_\eta(y), v(y))) = p_\eta(y)$, temos que $w : E(\eta) \to E(f^*(\xi))$ é um B_1-morfismo. Claramente temos $f_\xi \circ w = v$. Sabendo que

$p_{f^*(\xi)}(w(y)) = p_\eta(y)$ vale para todo B_1-morfismo e w e usando a relação $f_\xi \circ w = v$, temos que $w(y) = (p_\eta(y), v(y))$ para $y \in E(\eta)$, provando a unicidade do morfismo w. $\square$

Observe que se $u : \xi \to \eta$ é um B-morfismo e $f : B_1 \to B$ uma aplicação, então $f^*(u) : f^*(\xi) \to f^*(\eta)$ definido pela relação $f^*(u)((b_1, x)) = (b_1, u(x))$ é um B_1-morfismo. De fato, dado $(b_1, x) \in E(f^*(\xi))$, temos que $f(b_1) = p_\xi(x) = p_\eta(u(x))$, mostrando que $f^*(u)$ está bem definido. Como $p_{f^*(\xi)}((b_1, x)) = b_1$ e $p_{f^*(\eta)}(f^*(u)((b_1, x))) = p_{f^*(\eta)}((b_1, u(x))) = b_1$, mostra que $f^*(u)$ é um B_1-morfismo. Claramente que $f^*(Id_\xi) = Id_{f^*(\xi)}$ e se $v : \eta \to \xi$ é um B-morfismo então $f^*(v \circ u) = (b_1, x) = (b_1, v(u(x))) = f^*(v)(b_1, u(x)) = (f^*(v) \circ f^*(u))(b_1, x)$. Portanto temos a seguinte proposição.

Proposição 38. *Para cada mapa $f : B_1 \to B$, a família de funções $f^* : \mathbf{Bun}_B \to \mathbf{Bun}_{B_1}$ define um functor. Além do mais, para um B-morfismo $u : \xi \to \eta$ o seguinte diagrama é comutativo.*

$$\begin{tikzcd}
 & E(f^*(\eta)) \arrow[rr, "f_\eta"] \arrow[dd] & & E_\eta \\
E(f^*(\xi)) \arrow[ur, "f^*(u)"] \arrow[dr, "p_{f^*(\xi)}"'] \arrow[rr, "f_\xi"] & & E(\xi) \arrow[ur, "u"] \arrow[dr] & \\
 & B_1 \arrow[rr, "f"] & & B
\end{tikzcd}$$

Demonstração: Devemos verificar a ultima afirmação. Dado $(b_1, x) \in E(f^*(\xi))$ e calculando

$$u(f_\xi(b_1, x)) = u(x) = f_\eta(b_1, u(x)) = f_\eta(f^*(u))(b_1, x),$$

temos que $u \circ f_\xi = f_\eta \circ f^*(u)$. $\square$

Proposição 39. *Dados $g : B_1 \to B_2$ e $f : B_1 \to B$ aplicações contínuas e ξ um fibrado sobre B. Então $Id^*(\xi)$ e ξ são B-isomorfos e $g^*(f^*(\xi))$ e $(f \circ g)^*(\xi)$ são B_2-isomorfos.*

Demonstração: Seja $u : \xi \to Id^*(\xi)$ definido pela relação $u(x) = (p(x), x)$, temos claramente que u é um B-isomorfismo. Dado $v : (f \circ g)^*(\xi) \to g^*(f^*(\xi))$ definido por

$v(b_2, x) = (b_2, (g(b_2), x))$, temos claramente que v é um isomorfismo. $\square$

Corolário 11. *Dado* $f : (B_1, A_1) \to (B, A)$ *um par de aplicações contínuas, seja* $g = f|A_1 : A_1 \to A$ *e* ξ *um fibrado sobre* B*. Então* $g^*(\xi|A)$ *e* $f^*(\xi)|A_1$ *são* A_1*-isomorfos.*

Demonstração: Sejam $j : A \to B$ e $j_1 : A_1 \to B_1$ aplicações inclusão. Então, $f \circ j_1 = f \circ g$ e pelas ultimas três proposições temos a seguinte sequência de A_1-isomorfismos

$$f^*(\xi)|A_1 \simeq j_1^* \circ f^*(\xi) \simeq (f \circ j_1)^*(\xi) \simeq (j \circ g)^*(\xi) \simeq g^*(j^*(\xi)) \simeq g^*(\xi|A).$$

$\square$

Proposição 40. *Sejam* $\xi = (E, p, B)$ *um fibrado,* $f : B_1 \to B$ *uma aplicação contínua e* $f^*(\xi) = (E_1, p_1, B_1)$ *o fibrado induzido de* ξ *referente a aplicação* f*. Se* p *é uma aplicação aberta então* p_1 *é uma aplicação aberta.*

Demonstração: Dado W uma vizinhança aberta de $(b_1, x) \in E_1$, onde $E_1 \subset B_1 \times E$. Para provarmos a proposição, temos que achar uma vizinhança V de $b_1 = p(b_1, x)$, com $V \subset p_1(W)$. A partir da definição de topologia de E_1, existem vizinhanças V_1 de $b_1 \in B$ e U de $x \in E$, com $(V_1 \times U) \cap E_1 \subset W$. Dado $V = V_1 \cap f^{-1}(p(U))$, então para cada $b_1 \in V$ existe $x \in U$ tal que $p(x) = f(b_1)$, ou seja, $(b_1, x) \in W$ e $b_1 = p_1(b_1, x) \in V$. Portanto temos $V \subset p_1(W)$. $\square$

Proposição 41. *Sejam* $\xi = (E, p, B)$ *um fibrado,* $f : B_1 \to B$ *uma aplicação contínua e* $(f_\xi, f) : f^*(\xi) \to \xi$ *o morfismo canônico do fibrado induzido. Se* s *é uma seção transversal de* ξ *então* $\sigma : B_1 \to E(f^*(\xi))$ *definido por* $\sigma(b_1) = (b_1, (s \circ f)(b_1))$ *é uma seção transversal com* $f_\xi \circ \sigma = s \circ f$*. Se* f *é a aplicação identidade e* σ *é uma seção transversal de* $f^*(\xi)$*, tal que* $f_\xi \circ \sigma$ *é constante para todo conjunto* $f^{-1}(b)$ *onde* $b \in B$*, então existe uma seção transversal* s *de* ξ *tal que* $s \circ f = f_\xi \circ \sigma$*.*

Demonstração: Note que $p_1 \circ \sigma(b_1) = p_1(b_1, s \circ f(b_1)) = b_1$ e $f(b_1) = p \circ s \circ f(b_1)$. Assim, σ é uma seção transversal de $f^*(\xi)$. A relação $f_\xi \circ \sigma(b_1) = f_\xi(b_1, s \circ f(b_1)) = s \circ f(b_1)$ vale. Para a segunda inclusão, nós temos a fatoração de $f_\xi \circ \sigma$ por f, dando uma aplicação contínua $s : B \to E$ com $s \circ f = f_\xi \circ \sigma$. Além do mais, $p \circ s \circ f = p \circ f_\xi \circ \sigma = f \circ p_1 \circ \sigma = f$ e $p \circ s = Id_B$. Desde que f é uma aplicação sobrejetiva então temos s a seção transversal desejada. □

7.5 Propriedades locais de fibrados

Definição 52. *Sejam ξ e η dois fibrados sobre B. Dizemos que estes dois fibrados são* ***localmente isomorfos no ponto*** $b \in B$ *se existe uma vizinhança aberta U de b, tal que $\xi|U$ e $\eta|U$ são U-isomorfos.*

Definição 53. *Um fibrado ξ sobre B é* ***localmente trivial com fibra*** F, *se é localmente isomorfo com o fibrado produto $(B \times F, p, B)$.*

Proposição 42. *A relação de ser localmente isomorfo é uma relação de equivalência à classe de todos os fibrados sobre B.*

Demonstração: As propriedades reflexiva e simetrica são imediatas. Para a propriedade de transitividade, observe que dados U e V vizinhanças abertas de $b \in B$, tais que $\xi|U$ e $\eta|U$ são U-isomorfos e $\eta|V$ e $\zeta|V$ são V-isomorfos. Aplicando a proposição 46, temos que os fibrados $\xi|(U \cap V)$, $\eta|(U \cap V)$ e $\zeta|(U \cap V)$ são $(U \cap V)$-isomorfos. □

Corolário 12. *Se ξ é localmente isomorfo a um fibrado localmente trivial então ξ é localmente trivial.*

Demonstração: Imediato da definição. □

Proposição 43. *Sejam ξ e η dois fibrados sobre B e $f : B_1 \to B$. Se ξ e η são localmente isomorfos então $f^*(\xi)$ e $f^*(\eta)$ são localmente isomorfos sobre B_1.*

Demonstração: Pelo corolário 10, temos que $f^*(\xi|U) \cong f^*(\xi)\,|f^{-1}(U)$ para cada conjunto aberto U de B. Se $\xi|U$ e $\eta|U$ são U-isomorfos então $f^*(\xi)\,|f^{-1}(U)$ e $f^*(\eta)\,|f^{-1}(U)$ são $f^{-1}(U)$-isomorfos. □

Corolário 13. *Sejam ξ e η dois fibrados sobre B e A um subconjunto de B. Então $\xi|A$ e $\eta|A$ são localmente isomorfos.*

Demonstração: Aplicar o corolário anterior com a aplicação inclusão $i : A \to B$. □

Corolário 14. *Sejam ξ um fibrado localmente trivial sobre B com fibra F, $f : B_1 \to B$ e $A \subset B$. Então $f^*(\xi)$ e $\xi|A$ são localmente triviais com a fibra F.*

7.6 Espaços Fibrados

Um espaço fibrado é um fibrado munido com uma estrutura adicional da ação de um grupo topológico sobre a fibra.

Definição 54. *Um **grupo topológico** G é um espaço topológico munido de uma estrutura de grupo tal que a aplicação $(s,t) \to st^{-1}$ é contínua em $G \times G \to G$.*

A continuidade da aplicação $(s,t) \to st^{-1}$ é equivalente a dizer que as aplicações $(s,t) \to st$ é contínua em $G \times G \to G$ e $s \to s^{-1}$ é contínua em $G \to G$.

Definição 55. *Seja G um grupo topológico. Um G-**espaço à direita** é um espaço topológico X munido de uma aplicação contínua de $\mu : X \times G \to X$. Para $(x, s) \in X \times G$, denotaremos $\mu((x, s)) = xs$. Assumiremos os seguintes axiomas.*

1- Sejam $x \in X$ e $s, t \in G$ então $x(st) = (xs)t$.

2- Para cada $x \in X$ temos que $xe = x$, onde e é a identidade do grupo G.

Definição 56. *Seja G um grupo topológico. Um G-**espaço à esquerda** é um espaço topológico X munido de uma aplicação contínua de $\phi : G \times X \to X$. Para $(s, x) \in G \times X$, denotaremos $\phi((s, x)) = sx$. Assumiremos os seguintes axiomas.*

1- Sejam $x \in X$ e $s, t \in G$ então $(st)x = s(tx)$.

2- Para cada $x \in X$ temos que $ex = x$, onde e é a identidade do grupo G.

Observe que se X é um G-espaço à esquerda, então a aplicação $xs = s^{-1}x$ define uma estrutura de G-espaço a direita em X, mostrando que existe uma correspondência biunívoca entre as estruturas de G-espaço à esquerda e G-espaço a direita. Com isso estudaremos somente com as estruturas de G-espaço a direita. Para melhor notação chamaremos de G-espaço

Definição 57. *Uma aplicação contínua $h : X \to Y$ entre G-espaços é chamado de G-**morfismo** se $h(xs) = h(x)s$ para todo $x \in X$ e $s \in G$.*

Denotaremos por $M_G(X, Y)$ o subespaço dos G-morfismos entre X e Y. Uma vez que a composição de G-morfismos é um G-morfismo, a classe dos G-espaços e G-morfismos forma uma categoria denotada por $\mathbf{sp}_G$.

Dados dois elementos $x, y \in X$, dizemos que x é G-**equivalente a** y se existe $s \in G$ tal que $xs = y$. Essa relação é uma relação de equivalência e o conjunto de todos os elementos xs com $s \in G$ será denotado por xG, que é a classe de equivalência determinada por $x \in X$. Denotaremos por X/G o conjunto de todos os xG com $x \in X$, munido da topologia quociente, ou seja, a maior topologia tal que a projeção $\pi : X \to X/G$ é contínua.

Proposição 44. *Seja X um G-espaço. A aplicação $\mu_s : X \to X$ dada por $\mu_s(x) = xs$ onde $s \in G$ é um homeomorfismo e a projeção $\pi : X \to X/G$ é uma aplicação aberta.*

Demonstração: Seja $\mu_s : X \to X$ dada por $\mu_s(x) = xs$ onde $s \in G$, note que μ_s é injetiva, de fato: Dados $x, y \in X$ tais que $\mu_s(x) = \mu_s(y)$ então temos $xs = ys$. Aplicando s^{-1} à direita em ambos os lados, temos $x = y$. Para cada $x \in X$, tome $y = xs^{-1}$ então $\mu_s(y) = x$, mostrando que μ_s é sobrejetiva. Note que a inversa da aplicação μ_s é a aplicação $\mu_{s^{-1}}$ que é contínua, provando que μ_s é um homeomorfismo para todo $s \in G$. Para a outra afirmação, seja W um conjunto aberto de X. Note que $\pi^{-1}(\pi(W)) = \cup_{s\in G} Ws$. De fato, dado $x \in \pi^{-1}(\pi(W))$ então existe $w \in W$ tal que $\pi(x) = wG$. Como $\pi(x) = xG = wG$ então existe $s \in G$ tal que $x = ws$, assim $x \in \cup_{s\in G} Ws$, provando que $\pi^{-1}(\pi(W)) \subset \cup_{s\in G} Ws$. Para outra inclusão, dado $y \in \cup_{s\in G} Ws$ então $y \in Ws$ para algum $s \in G$, ou seja, existe $w \in W$ e $s \in G$ tal que $y = ws$. Assim $\pi(y) = \pi(ws) = \pi(w)$ para $w \in W$, ou seja, $y \in \pi^{-1}(\pi(W))$. Como $\pi^{-1}(\pi(W)) = \cup_{s\in G} Ws$ e Ws é aberto, então temos que $\pi^{-1}(\pi(W))$ é aberto, pois $\pi^{-1}(\pi(W))$ é união de conjuntos abertos. Portanto π é uma aplicação aberta. □

A partir do que foi apresentado, temos que todo G-espaço X determina um fibrado $\alpha(X) = (X, \pi, X/G)$. Seja $h : X \to Y$ é um G-morfismo entre os G-espaços X e Y então a aplicação $f : X/G \to Y/G$ definida por $f(xG) = h(x)G$ é chamada de aplicação quociente de h. Denotaremos por $\alpha(h)$ o fibrado morfismo $(h, f) : \alpha(X) \to \alpha(Y)$.

Proposição 45. *A coleção de funções $\alpha : \mathbf{sp}_G \to \mathbf{Bun}$ é um functor.*

Demonstração: Claramente, temos que $\alpha(Id_X) = \left(Id_X, Id_{X/G}\right)$ e se $h : X \to Y$ e $k : Y \to Z$ são dois G-morfismos então $\alpha(k \circ h) = \alpha(k) \circ \alpha(h)$. □

Definição 58. *Um fibrado* (X, p, B) *é chamado de* G-***fibrado***, *se* X *é um* G*-espaço e existe* $f : X/G \to B$ *é um homeomorfismo, ou seja,* $\alpha(X)$ *é isomorfo à* (X, p, B) *referente ao isomorfismo de fibrado* $(Id, f) : \alpha(X) \to (X, p, B)$.

7.7 Fibrados Principais

Dizemos que um G-espaço X possui a propriedade, $xs = x$ para $x \in X$ e $s \in G$ apenas para $s = e$, se e somente se, $xs = xt$ apenas para $s = t$, onde $x \in X$ e $s, t \in G$.

Definição 59. *Um* G*-espaço* X *é chamado* ***livre***, *se para algum* $x \in X$, $xs = x$ *implica* $s = e$. *Dado* X *um* G*-espaço livre, denotaremos por* X^* *o espaço de todos os elementos* $(x, xs) \in X \times X$ *onde* $x \in X$ *e* $s \in G$. *Observe que existe uma função* $\tau : X^* \to G$, *tal que* $x = \tau(x, x') = x'$, *para todo* $(x, x') \in X^*$. *A função* $\tau : X^* \to G$ *é chamada de função translação.*

Referente a definição de função translação $\tau : X^* \to G$ temos as seguintes propriedades:

1) $\tau(x, x) = e$

2) $\tau(x, x')\,\tau(x', x'') = \tau(x, x'')$

3) $\tau(x', x) = \tau(x, x')^{-1}$ para todo $x, x', x'' \in X$.

Definição 60. *Um* G*-espaço* X *é chamado* G-***espaço principal***, *se* X *é um* G*-espaço livre com a função translação* $\tau : X^* \to G$ *contínua. Um* G*-fibrado principal é um* G-***fibrado*** (X, p, B), *onde* X *é um* G*-espaço principal.*

Exemplo 26. *O produto* G*-espaço* $B \times G$, *onde a ação de* G *é dada pela relação,* $(b, t)\,s = (b, ts)$ *é principal. Observe que* $((b, t), (b', t')) \in (B \times G)^*$ *se e somente se* $b = b'$ *e a função translação tem a forma* $\tau((b, t), (b, t')) = t^{-1}t'$. *O* G*-fibrado principal correspondente é o produto fibrado* $(B \times G, p, B)$. *Esse é chamado de* G*-produto fibrado principal.*

Proposição 46. *Seja $\xi = (X, p, B)$ um G-fibrado principal. Então ξ é um fibrado com fibra G.*

Demonstração: Para $x \in p^{-1}(b)$, define a aplicação bijetiva $u : G \to p^{-1}(b)$ pela relação $u(s) = xs$. A inversa da função u é $x' \to \tau(x, x')$ que é contínua. Assim u é um homemomorfismo. $\square$

7.8 Categorias de Fibrados Principais

Definição 61. *Um morfismo $(u, f) : (X, p, B) \to (X', p', B')$ entre dois G-espaço principais é um* ***morfismo principal*** *se $u : X \to X'$ é um morfismo entre G-espaços. Se $B = B'$ e $f = Id_B$ então u é chamado de um* ***B-morfismo principal.***

Desde que a composição de morfismo principal ou B-morfismo é um morfismo principal ou B-morfismo respectivamente, podemos dizer que a categoria $\mathbf{Bun}(G)$ que consiste dos G-fibrados principais e morfismo e a subcategoria $\mathbf{Bun}_B(G)$ que consiste de G-fibrados principais e morfismos sobre B. Nós temos duas estruturas naturais entre os functores $\mathbf{Bun}(G) \to \mathbf{Bun}$ e $\mathbf{Bun}_B(G) \to \mathbf{Bun}_B$.

Teorema 39. *Todo morfismo em $\mathbf{Bun}_B(G)$ é um isomorfismo.*

Demonstração: Dado $u : (X, p, B) \to (X', p', B)$ um B-morfismo de G-fibrados principais. Primeiro mostraremos que u é injetiva. Para esta prova, seja $u(x) = u(y)$. Assim, $p(x) = p'(u(x)) = p'(u(y)) = p(y)$. Usando o fato de que (X, p, B) é um G-fibrado, temos $xG = yG$, assim temos que $(x, y) \in X^*$ e $xs = y$ para algum $s \in G$. Como $u(x) = u(y) = u(xs) = u(x)s$, nós temos $s = e$ e consequentemente $x = y$. Agora mostraremos que u é sobrejetora. Para cada $x' \in X'$, existe $x \in X$, tal que $p(x) = p'(x')$. Então, $p'(x') = p(x) = p'(u(x))$, ou seja, $u(x)G = x'G$. Assim, $u(x)s = x'$ para algum $s \in G$, tomando $xs \in X$, temos $u(xs) = u(x)s = x'$, mostrando que u é sobrejetora. Para provar que u^{-1} é contínua, dado $u(a) = a' \in X'$, V uma vizinhança aberta de a

em X. Pela contínuidade da ação de G em X, existe uma vizinhança aberta V_1 de a e X e N de e em G, tal que $V_1N \subset V$. Também existe uma vizinhança W de a' em X' tal que $\tau'\left((W \times W) \cap X'^{*}\right) \subset N$, onde τ' é a função translação de X'. Usando a continuidade de u, podemos substituir V_1 por $V_1 \cap u^{-1}(W)$, tal que $u(V_1) \subset W$. Agora $p(V_1) = U$ é uma vizinhança aberta de $b = p(a) = p'(u(a)) = p'(a')$ em B. Trocando W por $W \cap (p')^{-1}(U)$ temos que $p'(W) = U = p(V_1)$. Para cada $x' \in W$, escolha $x \in V_1$ tal que $p(x) = p'(x')$. Então nós temos $u(x), x' \in W$ e $u(x)s = x'$ para algum $s \in N$ e $x' = u(x)s = u(xs)$, onde $xs \in V_1N \subset V$. Portanto para cada $x' \in W$, temos $u^{-1}(x') \in V$ e $u^{-1}(W) \subset V$. Isso prova que u^{-1} é contínua para cada $a' \in X'$. □

7.9 Fibrados Induzidos de Fibrados Principais

Proposição 47. *Sejam X um G-espaço associado ao fibrado $\xi = (X, p, B)$ e $f : B_1 \to B$. Então o espaço total do fibrado $f^*(\xi) = (X_1, p_1, B_1)$ tem uma estrutura natural de G-espaço e existe um homeomorfismo $g : X_1/G \to B_1$ tornando o seguinte diagrama comutaivo.*

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & X_1 & \xrightarrow{f_\xi} & X \\
 & \swarrow^{\pi} & \downarrow^{p_1} & & \downarrow^{p} \\
X_1/G & \xrightarrow{g} & B_1 & \xrightarrow{f} & B
\end{array}
$$

Além disso, a estrutura de G-espaço em X_1, pode ser escolhida exatamente de tal forma que f_ξ é um G-morfismo. Finalmente, se (X, p, B) é um G-fibrado principal então (X_1, p_1, B_1) é um G-fibrado principal.

Demonstração: Definiremos a ação de G em X_1 pela relação $(b_1, x)s = (b_1, xs)$, onde $p(xs) = p(x) = f(b_1)$. Então $f_\xi((b_1, x)s) = f_\xi(b_1, xs) = xs = f_\xi(b_1, x)s$, ou seja, f_ξ é um G-morfismo. Se f_ξ é um G-morfismo então G age em X_1 pela relação $(b_1, x)s = (b_1, xs)$. Agora, seja $g((b_1, x)G) = b_1$. Desde que X_1/G tem a topologia quociente, a função g é contínua. Sabendo que p é sobrejetora, também temos g sobrejetora. Pela proriedade $p(x) = p(x')$ se e somente se $x' = xs$ para algum $s \in G$, temos que o mapa g é injetivo. Se W é um subconjunto aberto de X_1/G, então $\pi^{-1}(W)$ é um subconjunto aberto de X e $g(W) = p_1(\pi^{-1}(W))$, que é um aberto em B_1. Portanto, g é um homeomorfismo. Finalmente se $\tau : X^* \to G$ é a aplicação translação do G-espaço principal X, então $\tau_1 : X_1^* \to G$ definido por $\tau_1((b_1, x), (b_1, x')) = \tau(x, x')$ é a aplicação translação de X_1. Observe que $((b_1, x), (b_1', x')) \in X_1^*$ se e somente se $b_1 = b_1'$ e $(x, x') \in X^*$. $\square$

Proposição 48. *Sejam $(v, f) : \eta \to \xi$ um morfismo em G-fibrados principais e $\eta \overset{g}{\to} f^*(\xi) \overset{f_\xi}{\to} \xi$ a factorização canônica. Então g é um isomorfismo sobre o fibrado principal $B(\eta)$ e portanto η e $f^*(\xi)$ são G-fibrados principais isomorfos. Finalmente $f^* : \mathbf{Bun}_B(G) \to \mathbf{Bun}_{B'}(G)$ é um functor.*

Demonstração: Recordando que $g : X(\eta) \to X(f^*(\xi))$ é dado por $g(x) = (p_\eta(x), v(x))$. Então temos que $g(xs) = (p_\eta(x), v(x)s) = g(x)s$. Desde que $f^*(\xi)$ é um G-fibrado principal então g é um $B(\eta)$-isomorfismo. $\square$

7.10 Espaços Fibrados

Seja $\xi = (X, p, B)$ um G-fibrado principal e tome F um G-espaço a esquerda. A relação $(x, y)s = (xs, s^{-1}y)$ define uma estrutura de G-espaço a direita em $X \times F$. O espaço quociente $(X \times F)/G$ será denotado por X_F, $p_F : X_F \to B$ é a composição da factorização $X \times F \overset{pr_X}{\to} X \overset{p}{\to} B$ pela projeção $X \times F \to X_F$. Explicitamente temos $p_F((x, y)G) = p(x)$ para $(x, y)G \in X_F$.

Definição 62. *Com as notações acima, o fibrado (X_F, p_F, B), denotado por $\xi[F]$ é chamado de **espaço fibrado sobre** B **com fibra** F ou **associado do fibrado principal** ξ. O grupo G é chamado de **grupo estrutural** do espaço fibrado $\xi[F]$.*

Grosseiramente falando, um G-fibrado principal $\xi = (X, p, B)$ consiste em uma cópia de G para cada ponto $b \in B$ e todos "colados"pela topologia de X. O espaço fibrado $\xi[F]$ consiste na cópia de F para cada ponto $b \in B$ e colada na forma pescrita pela topologia do espaço total X.

Proposição 49. *Seja $\xi[F] = (X_F, p_F, B)$ o espaço fibrado, associado com o G-fibrado principal $\xi = (X, p, B)$ e fibra F. Para cada $b \in B$, a fibra F é homeomorfa a $p_F^{-1}(b)$.*

Demonstração: Sejam $p(x') = b$ para algum $x' \in X$ e $f : F \to X_F$ definido por $f(y) = (x', y)G$. Desde que $p_F((x', y)G) = p(x') = b$, temos que $f : F \to p_F^{-1}(b)$ é a restrição de X_F para $p_F^{-1}(b)$. Provaremos que f tem uma inversa contínua, basta considerar $g' : p^{-1}(b) \times F \to F$ dado por $g'(x, y) = \tau(x', x)\, y$, onde $\tau : X^* \to G$ é a função translação do G-espaço principal X. Claramente temos $g'(xs, s^{-1}y) = g'(x, y)$. Assim compondo g' com a factorização do mapa quociente $X \times F \to X_F$, obtém a aplicação $g : p_F^{-1}(b) \to F$. Por construção f e g são inversas uma da outra. $\square$

7.11 Propriedades de Functorial em Espaços Fibrados

Sejam $(u, f) : \xi = (X, p, B) \to \xi' = (X', p', B')$ um morfismo entre fibrados principais e tome F um G-espaço à esquerda. O morfismo (u, f) definde um G-morfismo $u \times Id_F : X \times F \to X' \times F$ e passando o quociente, nós temos a aplicação $u_F : X_F \to X'_F$ e $(u_F, f) : \xi[F] \to \xi'[F]$.

Definição 63. *Um **morfismo entre os espaço fibrados** $\xi[F]$ e $\xi'[F]$ é um morfismo fibrado com a forma $(u_F, f) : \xi[F] \to \xi'[F]$, onde $(u, f) : \xi = (X, p, B) \to \xi' = (X', p', B')$ é um morfismo entre fibrados principais. Se $B = B'$ e $f = Id_B$ então $u_F : \xi[F] \to \xi'[F]$ é chamado de **morfismo entre espaços fibrados sobre** B.*

O resto da subseção é dedicado a estudar as categorias do G-fibrados principais e a categoria dos espaços fibrados com fibra F e grupo estrutural G.

Proposição 50. *As funções* $\xi \mapsto \xi[F]$ *e* $(u,f) \mapsto (u_F, f)$ *define um functor entre a categoria dos* G*-fibrados principais para a categoria dos fibrados que admitem a estrutura de espaço fibrado com fibra* F *e grupo estrutural* G.

Demonstração: Dados $(u,f) : \xi \to \xi'$ e $(u',f') : \xi' \to \xi''$ morfismos de G-fibrados principais. Aplicando o espaço quociente functor e $(u'u) \times Id_F = (u' \times Id_F)(u \times Id_F)$ nós temos $(u'u)_F = u'_F u_F$. Similarmente, $(Id_X)_F$ é a identidade. $\square$

Um morfismo de espaço fibrados $(u_F, f) : \xi[F] \to \xi'[F]$ é um isomorfismo de espaços fibrados se e somente se $(u,f) : \xi \to \xi'$ é um isomorfismo de fibrados principais.

Proposição 51. *Sejam* $\xi = (X,p,B)$ *um* G*-fibrado principal e* $\xi[F]$ *o espaço fibrado associado à* ξ. *Dado* $f : B_1 \to B$ *existe um isomorfismo canônico* $g : f^*(\xi[F]) \to f^*(\xi)[F]$ *dos fibrados sobre* B_1 *tal que o morfismo natural* $f_{\xi[F]} : f^*(\xi[F]) \to \xi[F]$ *é factorado por*

$$f^*(\xi[F]) \xrightarrow{g} f^*(\xi)[F] \xrightarrow{(f_\xi)_F} \xi[F].$$

Demonstração: O espaço total X_1 de $f^*(\xi[F])$ consite nos pares $(b_1, (x,y)G)$ onde $f(b_1) = p_F((x,y)G) = p(x)$ e $f_{\xi[F]}$ é dada pela relação $f_{\xi[F]}(b_1,(x,y)G) = (x,y)G$. O espaço total X_2 de $f^*(\xi)[F]$ consiste nos pares $((b_1,x),y)G$ onde $f(b_1) = p(x)$ e $(f_\xi)_F$ é dado pela relação $(f_\xi)_F(((b_1,x),y)G) = (x,y)G$. Definindo o isomorfismo g pela relação $g(b_1,(x,y)G) = ((b_1,x),y)G$. Esse isomorfismo é o resultado da aplicação do functor espaço quociente o G-isomorfismo canônico $B \times (X \times F) \to (B \times X) \times F$ e observe que $(b_1, xs, s^{-1}y) = (b_1,x,y)$ para $b_1 \in B_1$, $x \in X$, $y \in F$ e $s \in G$. $\square$

Corolário 15. *Seja* $\xi[F]$ *um espaço fibrado sobre* B *e tome* $A \subset B$. *Então* $\xi[F]|A$ *e* $(\xi|A)[F]$ *são fibrados canônicos* A*-isomorfos.*

Demonstração: Aplicando o teorema anterior com a plicação inclusão de A em B, temos o resultado. $\square$

7.11.1 Espaços fibrados triviais e localmente triviais

Dado ξ o G-fibrado produto principal $(B \times G, p, B)$. Para cada G espaço à esquerda F, o espaço fibrado $\xi[F] = (Y, q, B)$ é B-isomorfo sobre B para o espaço fibrado $(B \times F, p, B)$. Dado $g : Y \to B \times F$ definido por $g((b, s, y) G) = (b, sy)$. Então g é um B-isomorfismo.

Definição 64. *Sejam η e ξ, G fibrados principais sobre B. Dizemos que são* ***localmente isomorfos*** *se para cada $b \in B$, existe uma vizinhança aberta U de b, tal que $\xi|U$ e $\eta|U$ são $U-$ isomorfos (como fibrados principais). Dados espaços fibrados $\xi[F]$ e $\eta[F]$, dizemos que estes são* ***localmente isomorfos*** *se ξ e η são localmente isomorfos.*

Definição 65. *Um G fibrado principal ξ sobre B é* ***trivial ou localmente trivial*** *se ξ é um $G-$ fibrado principal isomorfo ou localmente isomorfo ao $G-$ fibrado produto principal. Um espaço $\xi[F]$ é trivial ou localmente trivial respectivamente.*

7.12 Descrição de seção transversal de um espaço fibrado

O seguinte teorema é de grande importância para classificação de fibrados principais e espaços fibrados, porque ele produz um critério para trivialização de um fibrado principal em meio a construção por morfismo de fibrados principais.

Teorema 40. *Seja $\xi = (X, p, B)$ um $G-$ fibrado principal e tome $\xi[F] = (X_F, p_F, B)$ o espaços fibrado associado, onde F é um G-espaço à esquerda. As seções transversais s do fibrado $\xi[F]$ tem uma correspondência bijetiva com os mapas $X \to F$ tal que $\phi(xt) = t^{-1}\phi(x)$ para $x \in X$ e $t \in G$. A seção transversal correspondente a ϕ é $s_\phi(xG) = (x, \phi(x)) G$ em X_F para cada $xG \in B$.*

Demonstração: Desde que $(xt, \phi(xt)) G = (xt, t^{-1}\phi(x)) G = (x, \phi(x)) tG = (x, \phi(x)) G$ em X_F a função s_ϕ está bem definida. Desde que s_ϕ é a factorização de $x \to (x, \phi(x)) G$

pelo mapa quociente p, a função s_ϕ é contínua. Claramente a relação

$$p_F\left(s_\phi\left(xG\right)\right) = p_F\left(\left(x, \phi\left(x\right)\right)G\right) = p\left(x\right) = xG$$

vale e concluindo que o mapa s_ϕ é uma seção transversal. Reciprocamente, dado s uma seção transversal de $\xi\left[F\right]$ e tome $\phi_s : X \rightarrow F$ definido pela relação $s\left(xG\right) = \left(x, \phi_s\left(x\right)\right)G$ para cada $x \in X$. Desde que $\left(x, \phi_s\left(x\right)\right)G = \left(xt, t^{-1}\phi_s\left(x\right)\right)G = \left(xt, \phi_s\left(xt\right)\right)G$ e desde que s é uma seção transversal, a função ϕ_s satisfaz a relação $\phi_s\left(xt\right) = t^{-1}\phi_s\left(x\right)$ para cada $x \in X$ e $t \in G$. Finalmente, resta provar que ϕ_s é contínua, porque $\phi \rightarrow s_\phi$ e $s \rightarrow \phi_s$, é uma inversa da outra. Dado $x \in X$, $y = \phi_s\left(x\right)$, $b = p\left(x\right)$ e $s\left(b\right) = \left(x, y\right)G$. Tome W uma vizinhança aberta de y. Pela contínuidade da ação de G em F, existe uma vizinhança aberta W' de y e N de $e \in G$ tal que $NW' \subset W$. Tome V uma vizinhana aberta de x em X, tal que $\tau\left(\left(V \times V\right) \cap X^*\right) \subset N$, onde τ é a função translação de ξ. Desde que s é uma aplicação contínua, existe uma vizinhança aberta de b tal que $s\left(U\right) \subset \left(V \times W'\right)/G$. Trocando V por $p^{-1}\left(U\right) \cap V$ a relação $s\left(U\right) \subset \left(V \times W'\right)/G$ é preservado e trocar $p\left(V\right) = U$. Agora provaremos que $\phi_s\left(V\right) \subset W$, tome $x \in V$ e $b = p\left(x\right) \in U$. Então $s\left(b\right) = \left(x', y'\right)G$, onde $x' \in V$ e $y' \in W'$. Desde $\left(x', y'\right)G = \left(x\tau\left(x, x'\right), y'\right)G = \left(x, \tau\left(x', x\right)y'\right)G$, nós temos $\phi_s\left(x\right) = \tau\left(x, x'\right)y' \in NW' \subset W$ e $\phi_s\left(V\right) \subset W$, o que prova o teorema. □

Corolário 16. *Sejam $\xi = \left(X, p, B\right)$ e $\xi' = \left(X', p', B'\right)$ dois $G-$ fibrados principais. Todos os morfimos entre $G-$fibrado principal $\xi \rightarrow \xi'$ tem a forma $\left(\phi_s, f\right)$, onde s é uma seção transversal de $\xi\left[X'\right]$. Além do mais, usando a igualdade $X_{X'} = X'_X$ nós temos $f = \left(p'_X\right)s$.*

Demonstração: O seguinte diagrama ilustra a situação deste corolário.

$$\begin{array}{ccc} X_{X'} = & \left(X \times X'\right)/G & = X'_X \\ p'_X \downarrow & & \downarrow p'_X \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

Pelo teorema anterior, o conjunto das seções transversais de $\xi\left[X'\right]$ é bijetiva com os $G-$morfismos $\phi_s : X \longrightarrow X'$ tal que a aplicação contínua $\phi_s : X \longrightarrow X'$ com $\phi_s\left(xt\right) =$

$t^{-1}\phi_s(x) = \phi_s(x)\,t$. Para a relação $f = (p'_X)\,s$, observe que $s(xG) = (x, \phi_s(x))\,G$ e $p'_X(s(xG)) = p'_X((x, \phi_s(x))\,G) = p'_X(\phi_s(x))$ para $x \in X$. Desde que $f(xG) = p'_X(\phi_s(x))$, nós temos que a relação $f = (p'_X)\,s$. $\square$

Corolário 17. *As seguintes relações são equivalentes com respeito a um $G-$fibrado principal $\xi = (X, p, B)$.*

1. *O fibrado ξ tem uma seção transversal.*
2. *O fibrado ξ é isomorfo a $f^*(\eta)$, onde η é um produto fibrado sobre um ponto e f é um mapa constante.*
3. *O fibrado ξ é trivial.*

Demonstração: Desde que $\xi \cong \xi[G]$, usaremos o teorema para provar $(1) \longrightarrow (2)$. O conjunto das seções transversais ξ é bijetiva com os mapas $\phi : X \longrightarrow G$ tal que $\phi(xt) = t^{-1}\phi(x) = \phi(x)\,t$. Se $f : B \longrightarrow *$ é um mapa constante, o induzido por ϕ e os fibrados principais ξ e $f^*(\eta)$ são isomorfos. Obvio que, $(3) \longrightarrow (1)$. $(2) \longrightarrow (3)$ porque um fibrado induzido por um fibrado trivial é trivial. $\square$

7.12.1 Fibrado Reduzido

Definição 66. *Sejam $p : X \longrightarrow B$ e $\pi : X' \longrightarrow B'$ fibrados principais com respectivos grupos estruturais G e G'. Um **homomorfismo** entre fibrados consiste de uma aplicação $f : X \longrightarrow X'$ e um homomorfismno de grupo $h : G \longrightarrow G'$ tal que $f(xg) = f(x)\,h(g)$ para todo $x \in X$ e $g \in G$.*

Definição 67. *Um homomorfismo $f : X \longrightarrow X'$ é chamado de **injeção** ou **mergulho** se f é um mergulho e $h : G \longrightarrow G'$ é um monomorfismo.*

(Lembrete: Um função é um mergulho entre espaço topológicos, se esta aplicação é um homeomorfismo sobre sua imagem.)

Como $B = X/G$ e $B' = X'/G'$ podemos definir a aplicação $\overline{f} : B \longrightarrow B'$ tal que $\overline{f}(xG) = \overline{f} \circ p(x) = \pi \circ f(x) = f(x)G$, ou seja, f faz a diagrama abaixo comutar.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ p\downarrow & & \downarrow\pi \\ X/G & \xrightarrow{\overline{f}} & X'/G' \end{array}$$

Se além disso $B = B'$ e $\overline{f} : B \longrightarrow B'$ é a aplicação identidade de B', $f : X \longrightarrow X'$ é chamado **redução** do grupo G de $p : X \longrightarrow B$ para G. O subfibrado de $p : X \longrightarrow B$ é chamado **fibrado reduzido**.

Seja $X(B, G)$ um fibrado principal e H um subgrupo fechado de G. Então G age naturalmente em G/H à esquerda.

Seja $E(B, G/H, G, X)$ o espaço fibrado com fibra G/H.

Proposição 52. *O fibrado E associado com X pode ser identificado com X/H como segue. Um elemento de E representado por $(x, gH) \in X \times G/H$ é aplicado no elemento de X/H representado por $xg \in X$. Consequentemente $X(E, H)$ é um fibrado principal sobre a base $E = X/H$ com grupo estrutural H. A projeção $X \longrightarrow E$ aplica $u \in X$ em $uH \in E$, onde u é considerado como uma aplicação de G/H na fibra de E.*

Demonstração: $\phi : E \longrightarrow X/H$, $\phi\left(\overline{(u, gH)}\right) = ugH$. ϕ está bem definida: Se $\overline{(u, gH)} = \overline{(v, hH)}$, então existe $t \in G$ com $(ut, t^{-1}gH) = (v, hH)$, onde $v = ut$ e $hH = t^{-1}gH$, logo $\phi\left(\overline{(u, gH)}\right) = ugH = utt^{-1}gH = vhH = \phi\left(\overline{(v, hH)}\right)$. ϕ é injetiva. Se $\phi\left(\overline{(u, gH)}\right) = \phi\left(\overline{(v, hH)}\right)$ então $ugH = vhH$, o que implica

$$ugh_1 = vhh_2 \Rightarrow v = ugh_1h_2^{-1}h^{-1} \text{ e } \left(gh_1h_2^{-1}h^{-1}\right)^{-1} g = hh_2h_1^{-1}.$$

Daí $t = gh_1h_2^{-1}h^{-1}$ é tal que $v = ut$ e $t^{-1}g = hh_2h_1^{-1}$, com $h_2h_1^{-1} \in H$, donde $t^{-1}g = hh_2h_1^{-1}H = hH$. Logo $\overline{(u, gH)} = \overline{(v, hH)}$. ϕ é sobrejetora. $\phi\overline{(x, H)} = xH$ para todo $xH \in X/H$. □

Proposição 53. *O grupo estrutural G de $X(B,G)$ é redutível a um subgrupo fechado H se e somente se o fibrado associado $E(B,G/H,G,X)$ admite uma seção transversal $\sigma : B \longrightarrow E = X/H$.*

Demonstração: Suponha que G é redutível a um subgrupo fechado H e seja $Y(B,H)$ um fibrado reduzido com mergulho $f : Y \longrightarrow X$. Seja $\mu : X \longrightarrow E = X/H$ a projeção canônica. Se u e v estão em uma mesma fibra de Y então $v = ua$ para algum $a \in H$, daí $\mu(f(v)) = \mu(f(ua)) = \mu(f(u)\,i(a)) = \mu(f(u))$. Dessa forma $\mu \circ f$ é constante em cada fibra de Y e induz uma aplicação $\sigma : B = Y/G \longrightarrow X/H$ dado por $\sigma(uG) = \mu \circ f(u)$ onde $uG = \pi(f(u))$ e $\pi : X \longrightarrow B = X/G$. Daí $\pi_E \circ \sigma(uG) = \pi_E(f(u)H) = \pi_E\left(\overline{(f(u),H)}\right)$. (pela proposição anterior) Logo σ é uma seção de E. Reciprocamente dado uma seção transversal $\sigma : B \longrightarrow E$, seja Y o conjunto dos pontos $u \in X$ tais que $\mu(u) = \sigma(\pi(u))$, onde $\mu : X \longrightarrow X/H$ e $\pi : X \longrightarrow B$ são as projeções canônicas. Observe que para todo $u \in X$ temos que $\pi(u) = \pi_E \circ \sigma(\pi(u)) = \pi_E(vH) = \pi_E\left(\overline{(v,H)}\right) = \pi(v)$, o que implica $\sigma(\pi(v)) = wH$ $\Rightarrow \pi_E(wH) = \pi_E \circ \sigma(\pi(v)) \Rightarrow \pi(w) = \pi(v)$. Assim $\sigma(\pi(w)) = wH = \mu(w)$. Poratnto $Y \neq \emptyset$. $\sigma(\pi(v)) = \sigma(\pi_E(vH)) = vH = \mu(v)$, ou seja, $Y \neq \emptyset$. Ora se $u \in Y$ então $u \in \mu^{-1}(\sigma(B))$ onde $Y \subset \mu^{-1}(\sigma(B))$. Por outro lado, se $v \in \mu^{-1}(\sigma(B))$ então $\mu(v) = \sigma(\pi(x))$ para algum $x \in X$ que implica $\pi_E(\mu(v)) = \pi(x)$, onde $\pi(v) = \pi(x)$. Logo $\mu(v) = \sigma(\pi(v))$. Portanto $Y = \mu^{-1}(\sigma(B))$. Para cada $b \in B$, existe $x \in X$ tal que $\mu(x) = \sigma(b)$, pois μ é sobrejetor. Daí

$$\begin{aligned} x &\in \mu^{-1}(\sigma(b)) \subset \mu^{-1}(\sigma(B)) = Y \Rightarrow \\ \mu(x) &= \sigma(\pi(x)) \Rightarrow \sigma(b) = \sigma(\pi(x)) \Rightarrow \\ \pi_E(\sigma(b)) &= \pi_E(\sigma(\pi(x))) \text{ onde } b = \pi(x) \text{ com } x \in Y. \end{aligned}$$

Assim a restrição $\pi|_Y : Y \longrightarrow B$ é sobrejetora. Dados u e v pertencentes a mesma fibra de X. Se $u \in Y$ então $v \in Y$ se se somente se $v = ua$ para algum $a \in H$. Isto segue do fato de $\mu(u) = \mu(v)$ se e somente se $v = ua$ para algum $a \in H$. Logo Y é invariante por

H. Considere a induzida $\overline{\pi_Y} : Y/H \longrightarrow Y/G$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\pi} & Y/G \\ p\searrow & & \nearrow \overline{\pi_Y} \\ & Y/H & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{p} & Y/H \\ \pi\searrow & & \nearrow \overline{p} \\ & Y/G & \end{array}$$

Então $\overline{\pi_Y}$ é sobrejetora. Além disso, se $\overline{\pi_Y}(yH) = \overline{\pi_Y}(zH)$ então $\pi(y) = \pi(z) \Rightarrow \sigma(\pi(y)) = \sigma(\pi(z))$, o que implica $\mu(y) = \mu(z) \Rightarrow yH = zH$. Logo $\overline{\pi_Y}$ é injetora. Temos que $\overline{\pi_Y} \circ \overline{p}(yG) = \overline{\pi_Y}(p(y)) = \overline{\pi_Y}(yH) = yG$ e $\overline{p} \circ \overline{\pi_Y}(yH) = \overline{p}(yG) = yH$. Portanto $\overline{\pi_Y}$ é um homeomorfismo. $\square$

7.13 Conjunto Controlável

Seja S um semigrupo agindo em um espaço topológico M.

Definição 68. *Um **conjunto controlável** de S em M é um subconjunto $D \subset M$ satisfazendo.*

1. *$intD \neq \emptyset$.*
2. *$D \subset \overline{Sx}$ para todo $x \in D$.*
3. *D é maximal satisfazendo essas duas propriedades.*

Um conjunto controlável D é dito **conjunto controlável invariante** se satisfaz $\overline{Sx} = D$ para todo $x \in D$.

No entanto, trabalharemos com a hipótese de que S satisfaz a propriedade de acessibilidade, ou seja, $int(Sx) \neq \emptyset$ para todo $x \in M$ e os conjuntos controláves são de fato $S-$invariantes e subconjuntos fechados.

Suponha que S e $S^{-1} = \{g^{-1} : g \in S\}$ satisfazem a propriedade de acessibilidade. Dado D um conjunto controlável de S, defina o conjunto

$$D_0 = \left\{x \in D : x \in int(Sx) \cap int\left(S^{-1}x\right)\right\}.$$

Temos o seguinte resultado.

Proposição 54. *Suponha que* $D_0 \neq \emptyset$*. Então*

1. $D \subset int\,(S^{-1}x)$ *para todo* $x \in D_0$.

2. $D_0 = int\,(S^{-1}x) \cap int\,(Sx)$ *para todo* $x \in D_0$.

3. *Para todo* $x, y \in D_0$ *existe* $g \in S$ *que* $gx = y$.

4. D_0 *é denso em* D.

5. D_0 *é* $S-$ *invariante em* D*, no sentido de que* $hx \in D_0$ *se* $h \in S$*,* $x \in D_0$ *e* $hx \in D$.

Demonstração:

1. Dado $y \in D$ e $x \in D_0$. Como $x \in int\,(S^{-1}x) \cap D$ então existe $g \in S$ tal que $gy \in int\,(S^{-1}x)$. (Por D ser $S-$invariante $SD = D$ e $S^{-1}D \subset D$ temos que existe $h \in S$ tal que $gy = x \in int\,(S^{-1}x) \cap D$) Então $y \in g^{-1}int\,(S^{-1}x) \subset int\,(S^{-1}x)$.

2. Suponha que $x \in D_0$ e $y \in int\,(Sx) \cap int\,(S^{-1}x)$. Temos que $int\,(Sx) = int\,(Sy)$ e $int\,(S^{-1}x) = int\,(S^{-1}y)$. De fato, dado $z \in int\,(Sy)$ então $z = sy$ para algum $s \in S$, mas como $y = gx$ para algum $g \in S$ temos $z = sgx$, ou seja, $z \in int\,(Sx)$. Agora dado $w \in int\,(Sx)$ temos $w = sx$ para algum $s \in S$, mas como $y = g^{-1}x$ para algum $g \in S$ temos $gy = x$, assim $w = sgy$, mostrando que $w \in int\,(Sx)$. Analogamente mostra que $intS^{-1}x = intS^{-1}y$. Portanto $y \in D_0$. Por outro lado, se $x, y \in D_0$ nós temos de 1 que $y \in int\,(S^{-1}x)$ e $x \in int\,(S^{-1}y)$. Assim existe $g \in S$ tal que $gx = y$. Desde que $x \in int\,(Sx)$ nós temos que $y = gx \in gint\,(Sx) \subset int\,(Sx)$. Portanto $y \in int\,(Sx) \cap int\,(S^{-1}x)$.

3. Segue imediatamente de

$$D_0 = int\,(Sx) \cap int\left(S^{-1}x\right) \text{ para todo } x \in D_0.$$

4. Seja $x \in D_0$, então $D \subset \overline{Sx} \cap int\,(S^{-1}x) \subset \overline{D_0}$. Como $D_0 = int\,(Sx) \cap int\,(S^{-1}x)$, então $\overline{D_0} \subset \overline{int\,(Sx)} \cap \overline{int\,(S^{-1}x)}$. Assim, seja $y \in D$ então existe um aberto V de

X, tal que $y \in V$ e $y \in V \cap int\,(S^{-1}x) = U$, ou seja, $U \cap Sx \neq \emptyset$ o que implica $V \cap int\,(Sx) \cap int\,(S^{-1}x) = V \cap D_0 \neq \emptyset$, portanto $y \in \overline{D_0}$.

5. Tome $h \in S$ e $x \in D_0$ e suponha que $hx \in D$. Desde que $x \in int\,(Sx)$ nós temos que $hx \in int\,(Sx)$ e por 1 temos $hx \in int\,(S^{-1})$ e portanto $hx \in D_0$.

□

Dizemos que D_0 é o **conjunto transitivo** de D e D é chamado de **conjunto controlável efetivo** se $D_0 \neq \emptyset$. Nesse caso D_0 é chamado **conjunto de transitividade** de D.

Proposição 55. *Seja $x \in M$ tal que $x \in int\,(Sx) \cap int\,(S^{-1}x)$. Então existe um único conjunto controlável tal que $x \in D_0$, que é efetivo.*

Demonstração: O subconjunto $int\,(Sx) \cap int\,(S^{-1}x)$ satisfaz as propriedades 1 e 2 da definição de conjunto controlável. Portanto, se aplica o principio de maximalidade de Hausdorff de subconjuntos satisfazendo estas propriedades que contém x, temos um conjunto maximal, digamos D que é um conjunto controlável. Esse conjunto controlável claramente contém x e é efetivo. A unicidade decorre do fato de que conjunto controláveis diferentes não se sobrepõem. □

Definição 69. *Seja D um conjunto controlável efetivo de S_M. O semigrupo S_Q é dito **acessivel** sobre D se para algum, e portanto para todo, $q \in \pi^{-1}(D_0)$, $int\,(S_Q q) \cap \pi^{-1}(D) \neq \emptyset$. Similarmente S_E é **acessivel** sobre D se $int\,(S_E) \cap \pi^{-1}(D) \neq \emptyset$.*

Dado $q \in Q$, a interseção $S_Q(q) \cap Q_x$, onde $x = \pi(q)$, pode ser vista como subconjunto de G, pondo

$$S_q = \{a \in G : \text{ existe } \phi \in S_Q; \phi(q) = qa\}.$$

É facilmente visto que S_q é um subsemigrupo de G, se $S_q \neq \emptyset$. O subconjunto

$$T_q = \{a \in G : \text{ existe } \phi \in S_Q; \phi(q) = qa \in int\,(S_Q q)\},$$

que é identificado por $int\,(S_Q q) \cap Q_x$ é também um semigrupo de G.

O seguinte lema assegura a presença de acessibilidade, se T_q é não vazio.

Lema 1. *Dado $D \subset M$ um conjunto controlável efetivo de S_M e suponha que S_Q é acessivel sobre D. Dado $q \in \pi^{-1}(D_0)$. Então $T_q \neq \emptyset$ de modo que $S_q \neq \emptyset$.*

Demonstração: Seja $\phi \in S_Q$, tal que $\phi(q) \in int\,(S_Q q) \cap \pi^{-1}(D)$, existe ϕ pois S_Q é acessivel sobre D. Desde que $x = \pi(q) \in D_0$, existe $\psi \in S_Q$, tal que $\psi \circ \phi(q)$ pertence a mesma fibra de q (Pois como $D \subset int\,(S^{-1}x)$ para todo $x \in D_0$, existe $\psi_M^{-1} \in S_M^{-1}$ tal que $\pi(\phi(q)) = \psi_M^{-1}(x)$, assim $\pi(\psi \circ \phi(q)) = x$) Pela escolha de ϕ, nós temos que $\psi\phi(q) \in int\,(S_Q q)$, mostrando que T_q tem ponto interior. □

Uma consequência imediata deste lemma é que a acessibilidade de S_Q sobre D implica que S_Q^{-1} é também acessivel sobre D. De fato, $T_q^{-1} = \{a^{-1} : a \in T_q\}$, identificado com $int\left(S_Q^{-1}q\right) \cap Q_x$ de modo que $S_Q^{-1}q$ é não vazio se $T_q \neq \emptyset$. Antes de prosseguirmos, mencionaremos que se q e $q' = qa$ estão no mesmo fibrado então os semigrupos $S_{q'}$ e S_q estão relacionados por $S_q = a^{-1}S_q a$.

De fato, seja $c \in S_{q'}$ tome $\phi \in S_Q$ tal que $\phi(q') = q'c$. Então $\phi(q)\,a = \phi(qa) = qac$, que é $\phi(q) = qaca^{-1}$. Isso mostra que $aca^{-1} \in S_q$ e portanto $S_{q'} \subset a^{-1}S_q a$. A outra inclusão é mostrado de forma análoga, escrevendo $q = q'a^{-1}$. Com o mesmo argumento, prova que $T_{q'} = a^{-1}T_q a$.

Dado o espaço fibrado $E(M, F, G, Q)$ associado com Q, nós temos que S_Q induz um semigrupo S_E de homeomorfismo de E. Vamos assumir que a ação de G na fibra típica é transitiva.

Estamos interessado em conjunto controláveis de S_E. Para isso note que dado $q \in Q$, o semigrupo S_q age em F. Assim a ideia de estudar conjunto de controle em E

é por quebra a ação de S_E para ação de S_M no espaço base e a ação de S_q em F com q percorrendo diferentes fibras de Q.

Proposição 56. *Seja E o espaço fibrado acima com projeção $\pi : E \longrightarrow M$ e S_Q, S_E e S_M os semigrupos acima. Dado $D \subset E$ um conjunto controlável de S_E, então*

1. existe um único conjunto controlável $C \subset M$ de S_M tal que $\pi(D) \subset C$.

2. Se D é efetivo então C é efetivo e $\pi(D_0) \subset C$.

Demonstração:

1. Dado $x, y \in \pi(D)$, tome $u, v \in D$ tal que $\pi(u) = x$ e $\pi(v) = y$. Pela definição existe uma sequência $\phi_n \in S_E$ tal que $\phi_n(u) \longrightarrow v$. Portanto $\pi(\phi_n(u)) = \phi(\pi(u)) \longrightarrow \pi(v) = y$. Assim $y \in \overline{S_M x}$. Desde que x e y são arbitrários, isso mostra que $\pi(D)$ satisfaz a segunda condição de conjunto controlável. Além do mais, π é aberto e por isso $\pi(D)$ tem interior não vazio de modo que contém um conjunto controle C de S_M. A unicidade de C segue do fato de que a interseção de conjunto controláveis diferentes é vazio.

2. Dado $v \in D_0$, então $v \in int(S_E v) \cap int\left(S_E^{-1} v\right)$. Isso implica que $\pi(v) \in int(S_M \pi(v)) \cap int\left(S_M^{-1} \pi(v)\right)$ mostrando que $\pi(v) \in C_0$. Assim C_0 é não vazio e concluíndo que C é efetivo.

□

Essa proposição define um mapa $D \longrightarrow C$ dos conjuntos controláveis em E nos conjuntos controláveis em M.

Bibliografia

[1] Bhatia, N. P. and Szegö, G. P. : *Stability Theory of Dynamical Systems*, Springer - Verlag Berlin, Heildelberg, New York (1970)

[2] Barros, Carlos J. Braga; Tozatti, H. V. M. e Souza, J. A..: *Examples of Morse decompositions for semigroup actions.* Proyecciones J. Math., vol. 30, n. 1, p. 63-73, (2011)

[3] Barros, Carlos J. Braga e San Martin, Luiz A. B.: *Chain Control Sets for Semigroup Actions.* Computational and Applied Mathematics vol. 15 (1996), 257-276

[4] Barros, Carlos J. Braga e Souza, Josiney A. : *Attractor and chain recurrence for semigroup actions.* Journal of Dynamics and differential Equations. vol. 22. 723-740 (2010)

[5] Barros,Carlos J. Braga e Souza, Josiney A. : *Finest Morse Decompositions for Semigroup on Fiber Bundles.* Journal of Dynamics and differential Equations. vol. 22. 741-760 (2010)

[6] Braga Barros, C. J.; Souza, J. A. e Reis, R. A.: *Dynamic Morse Decompositions for Semigroups of Homeomorphisms and Control Systems.* J. Dyn. Cont. Systems, vol. 18, p. 1-19, (2012)

[7] Braga Barros, C. J.; Rocha, V. H. L. e Souza, J. A.: *Lyapunov stability for semigroup actions.* Semigroup Forum, n. 88, p. 227–249, (2014)

[8] Colonius, Fritz e Kliemann, Wolfgang : *The dynamics of control/ Fritz, Colonius; Wolfgang, Kliemann.*(2000) 1st edition, Publisher Birkhäuser Boston, New York.

[9] Husemoller, Dale : *Graduate Texts in Mathematics - Fiber Blundles - Third Edition / Dale Husemoller* (1993) 3st edition, Publisher Springer-Velarg, New York.

[10] Kelley, J. L.: *General Topology*, D. Van Nostrand Company Inc. New Jersey (1955)

[11] Patrão, M. M. A. e San Martin, L. A. B.: *Semiflows on topological spaces: chain transitivity an semigroup.* Journal Dynamics and Differential Equations, 19, 155-180 (2007)

[12] Patrão, Mauro M. A.:: *Semifluxos em Fibrados Flag e seus Semigrupos de Sombreamento* Tese de Doutorado na Universidade Estadual de Campinas - Campinas SP (2006)

[13] Souza, Josiney A.: *Lebesgue Covering Lemma on Nonmetric Spaces* International Journal of Mathematics, 24, 1350018, p. 1-12, (2013).

[14] Souza, J. A.:: *Ações de semigrupos: recorrência por cadeias em fibrados e compactificações de Ellis.* Tese de doutorado.

[15] Souza, J. A.:: *Recurrence theorem for semigroup actions.* Semigroup Forum, vol 83, n. 3, p. 351-370, (2011)

[16] Souza, J. A.:: *On limit behavior of semigroup actions on noncompact spaces.* Proc. Am. Math. Soc., 140, p. 3959-3972, (2012)

[17] Souza, J. A.:: *Chain transitivity for semigroup actions on flag bundles.* Annali di Matematica Pura ed Applicata, v. 193, n. 3, p. 817-836, (2014)

[18] Souza, J. A.:: *Global attractors in fiber bundles and right invariant systems.* Journal of Differential Equations, v. 257, n. 1, p. 167–184. (2014)

[19] Souza, J. A. e Tozatti, H. V. M.: *Prolongational limit sets of control systems.* Journal of Differential Equations, vol. 254, p. 2183-2195, (2013)

[20] Souza, J. A. e Tozatti, H. V. M.: *Some aspects of stability for semigroup actions and control systems.* Journal of Dynamics and Differential Equations (2014)

[21] Souza, J. A.. e Tozatti, H. V. M.:: *Dispersive semiflows on fiber bundles.* Submetido

[22] Raminelli, S. A. e Souza, J. A.: *Global attractors for semigroup actions.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 407, n. 2, p. 316–327, (2013).

[23] Victor Hugo Lourenço da Rocha: *Estabilidade de Liapunov para Ações de Semigrupos em Espaços Topológicos* Tese de Mestrado na Universidade Estadual de Maringá - Maringá Pr (2011)

[24] Willard, Stephen: *General Topology,* 1st edition, Publisher Dover publications, Mineola, New York (2004)