



JOSÉ HENRIQUE RODRIGUES

**Equação de KdV-Burgers com Damping
Indefinido e Análise Numérica de uma Equação
de Onda com Dissipação Não Linear**

Maringá
Março - 2014

**Equação de KdV-Burgers com Damping
Indefinido e Análise Numérica de uma Equação
de Onda com Dissipação Não Linear**

José Henrique Rodrigues

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em matemática.

Orientadora: Valéria Neves Domingos Cavalcanti

Coorientadora: Carole Rosier

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO JOSÉ HENRIQUE RODRIGUES, APROVADO PELA BANCA, E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. VALÉRIA NEVES DOMINGOS CAVALCANTI, E COORIENTAÇÃO DE PROFA. DRA. ROSIER CAROLE.

Assinatura do Orientador

Assinatura do Coorientador

Maringá
Março - 2014

Resumo

Neste trabalho consideramos o estudo existência, unicidade, dependência contínua e do comportamento assintótico de soluções de uma equação de KdV-Burgers sujeita a um mecanismo de dissipação localizado e com sinal indefinido. Técnicas de semigrupos de operadores lineares, juntamente com argumentos de ponto fixo, foram utilizados e um critério fornecendo condições suficientes para o decaimento exponencial das soluções foi estabelecido. Consideramos também, sob o aspecto analítico, numérico e computacional, uma equação de onda sujeita a um mecanismo de dissipação não linear e localizado. Técnicas de semigrupos de operadores não lineares e recentes resultados nos garantem a existência de soluções, bem como taxas para a estabilização da energia. Além disso, o método espectral juntamente com aproximações de Fourier–Galerkin nos permitiram concluir a convergência e a estabilização do problema discretizado, ilustrados com a implementação computacional baseados em tais resultados numéricos.

Palavras-chave: Equação de KdV-Burgers, Decaimento Exponencial, Damping Indefinido, Equação de Onda, Análise Numérica, Método Espectral.

Abstract

In this work, we study the well-posedness and the asymptotic behavior of solutions of a KdV-Burgers equation subject to a localized dissipation mechanism with indefinite sign. Linear semigroup techniques together with a fixed point argument have been used, and a sufficient condition criteria for the exponential decay has been established. We consider also, under analytical, numerical and computing aspects, a wave equation subject to a nonlinear, localized dissipation mechanism. The theory of nonlinear operator semigroups and recent results provide us the existence of solutions, as well as rates for the energy decay. Furthermore, a spectral method together with Fourier–Galerkin approximations allows us to conclude the existence and the stabilization of solutions for the discretized problem, as illustrated by the computational implementation of the results.

Palavras-chave: KdV-Burgers Equation, Exponential Decay, Indefinite Damping, Wave Equation, Numerical Analysis, Spectral Method.

Agradecimentos

Eu gostaria de expressar meus sentimentos de agradecimento a:

- Minha orientadora, pela confiança e dedicação nos trabalhos realizados;
- Minha coorientadora, pela oportunidade do trabalho realizado;
- Aos demais pesquisadores e colegas de trabalho que direta ou indiretamente contribuíram para a elaboração deste trabalho;
- Minha família e amigos pelo apoio e suporte durante os anos de dedicação.

Dedicatória

Dedico esta tese a todos aqueles que acreditaram e confiaram na realização deste sonho.

‘Imagination is more important than knowledge.’

Albert Einstein

Sumário

Resumo	i
Agradecimentos	iii
1 Introdução	1
1.1 Motivação e Objetivos	6
1.2 Contribuições	7
1.3 Publicações	7
2 Preliminares	8
2.1 Espaços L^p e de Sobolev	8
2.2 Funções a Valores Vetoriais	12
2.3 Semigrupos Lineares em Espaços de Banach	16
2.4 Semigrupos Não Lineares em Espaços de Banach	18
3 Equação de KdV-Burgers com Damping Indefinido	25
3.1 Introdução	25
3.2 O Caso Linear. Considerações e Resultados.	26

3.3	Existência, Unicidade e Dependência Contínua de Soluções	42
3.4	Decaimento Exponencial e Taxas	66
4	Análise Numérica para Equação de Onda com Dissipação Não Linear	81
4.1	Introdução	81
4.2	Revisão Sobre o Método Espectral	81
4.3	Equação de Onda com Dissipação Não Linear	88
4.4	Descrição do Método de Aproximação	96
4.5	Estabilidade e Convergência do Método	98
4.5.1	Lemas de Estabilidade	99
4.5.2	O Teorema de Convergência	107
4.6	Simulações Numéricas	112
4.6.1	Aproximações de Fourier–Galerkin	112
4.6.2	Metodo Espectral de Chebyshev	117
5	Conclusão	121
5.1	Resumo dos Resultados Obtidos	121
5.2	Trabalhos Futuros	121
	Bibliografia	122

Lista de Figuras

3.1	Gráfico de λ .	41
4.1	Função aproximação $u_{N,M}$	108
4.2	Função aproximação $\tilde{u}_{N,M}$	108
4.3	Evolução da solução u para $u_1 = 0$, $a \equiv \text{cst}$ e $p = 3$.	114
4.4	Evolução de $r(t)$ para $u_1 = 0$, $a \equiv \text{cst}$ e $p = 3$.	114
4.5	Evolução da solução u para $u_1 \neq 0$, $a \equiv \text{cst}$ e $p = 3$.	115
4.6	Evolução de $r(t)$ para $u_1 \neq 0$, $a \equiv \text{cst}$ e $p = 3$.	115
4.7	Evolução da solução u para $u_1 \neq 0$, $a(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ e $p = 3$.	116
4.8	Evolução de $r(t)$ para $u_1 \neq 0$, $a(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ e $p = 3$.	116
4.9	Evolução da solução u para $u_1 = 0$, $a \equiv \text{cst}$ e $p = 3$.	118
4.10	Evolução de $r(t)$ para $u_1 = 0$, $a \equiv \text{cst}$ e $p = 3$.	118
4.11	Evolução da solução u para $u_1 = 0$, $a(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ e $p = 3$.	119
4.12	Evolução de $r(t)$ com $N = 32$ e para $u_1 = 0$, $a(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ e $p = 3$.	119
4.13	Evolução de $r(t)$ com $N = 64$ e para $u_1 = 0$, $a(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ e $p = 3$.	120

Introdução

O estudo de equações de evolução vem sendo tema bastante abordado e fonte de pesquisa a muito explorada por matemáticos de diversas áreas da análise. Dentre estas, as equações de onda e KdV-Burgers, também conhecida na literatura como versão dissipativa da ainda mais conhecida equação de KdV, são tidas como referência de modelos hiperbólicos e dispersivos, respectivamente, e bastante estudadas.

Como primeira parte deste projeto, consideramos uma equação de KdV-Burgers, definida em \mathbb{R} e sujeita a um mecanismo de dissipação linear e localmente distribuído e com sinal indefinido, ou seja,

$$u_t + u_{xxx} - u_{xx} + uu_x + \lambda(x)u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1.0.1)$$

onde $\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Para a segunda parte do projeto consideramos, sob os aspectos numérico e analítico, uma equação de onda definida em um domínio limitado Ω de \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, e sujeita a um mecanismo de dissipação não linear, a dizer

$$u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1.0.2)$$

onde $a \in C^1(\bar{\Omega})$ e $g \in C(\mathbb{R})$.

A escolha de problemas diferentes, do ponto de vista de grupos de pesquisa, e os aspectos estudados em cada uma deles reflete o desejo, por parte dos orientadores e orientando, de uma formação de caráter teórico e de pesquisador amplos. Desta forma, diferentes técnicas e ferramentas passam a ser de conhecimento e permitem aplicações e diferentes abordagens sobre variadas equações.

Diversos são os autores, e ainda mais os trabalhos, que podem ser relacionados na literatura com o estudo destas equações. Dentre estes, no que diz respeito ao estudo de equações de KdV e KdV-Burgers, gostaríamos de citar os trabalhos iniciais de [57, 5, 8], e mais recentemente [23, 10, 41], bem como referências dentro destas.

A presença destes mecanismos dissipativos nos permite estudar o comportamento assintótico das soluções, no que diz respeito a estabilização da energia considerada e, em muitos casos, a explicitação de taxas para esta estabilização.

Um dos principais objetivos daqueles que estudam o comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais, em especial a estabilização de sistemas dissipativos, é a explicitação de taxas que descrevam essa estabilização. Embora a obtenção de taxas para a estabilização possa se revelar um problema difícil, diversas técnicas vem sendo elaboradas a fim de fornecer possíveis taxas. Além disso, dentre as possíveis taxas, a obtenção de taxas exponenciais é, certamente, a de maior interesse.

Com relação a equação de KdV-Burgers (1.0.1), a presença do termo dissipativo λu se faz necessário para obtenção de taxas exponenciais para o decaimento. Com efeito, é possível mostrar que a energia em $L^2(\mathbb{R})$ das soluções de (1.0.1) e do problema linear homogêneo associado

$$u_t + u_{xxx} - u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1.0.3)$$

são equivalentes, e decrescentes. Entretanto, foi provado por [6] que a energia em $L^2(\mathbb{R})$ das soluções de (1.0.3) decai com taxa polinomial, ou seja, para cada $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R})$ a

respectiva solução de (1.0.3) satisfaz a seguinte estimativa

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq Ct^{-1/4}, \quad t > 0,$$

onde $C > 0$ é uma constante positiva. Além disso, este resultado é ótimo posto que o dado inicial satisfaz $\int_{\mathbf{R}} u_0(x)dx \neq 0$.

Considerando o comportamento assintótico para soluções de equações de KdV, gostaríamos de mencionar aqui o trabalho de [18], onde os autores forneceram nova contribuição quanto ao decaimento da energia de soluções fracas da equação de KdV sujeita a um mecanismo de dissipação localmente distribuído

$$u_t + u_{xxx} + bu_x + uu_x + a(x)u = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \quad (1.0.4)$$

onde $b \geq 0$ e $a : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$ é uma função não negativa. Nesta direção, citamos ainda o trabalho de [36], onde os autores consideraram a equação de KdV posta no semi-eixo positivo da reta real, com condição de Dirichlet, e sujeita a um mecanismo de dissipação linear localizado

$$u_t + u_{xxx} + u_x + uu_x + a(x)u = 0, \quad x \in \mathbf{R}^+, \quad t > 0, \quad (1.0.5)$$

onde a função a é não negativa e satisfaz $a(x) \geq a_0 > 0$ em $]0, \delta[\cup]R, \infty[$, onde $a_0, R > 0$ e $0 < \delta < R$, e provaram o decaimento exponencial da energia das soluções. Posteriormente, verificou-se em [45] que poderia se retirar a exigência acerca do intervalo $]0, \delta[$ e estabeleceu-se também o decaimento exponencial em espaços com peso. Também estabeleceu-se o decaimento de derivadas intermediárias, com relação a variável espacial, das soluções. Já em [9] os autores também consideraram o problema de KdV (1.0.4), com $a(x) \geq a_0 > 0$ e $b \equiv 0$, sem restrições quanto ao decrescimento do dado de fronteira, e provaram o decaimento exponencial em nível de $H^k(\mathbf{R}^+)$, $k = 1, 3$ ou 4 , e sem restrições quanto ao tamanho do dado inicial.

Considerando equações de KdV em intervalos de dimensão finita e com mecanismos de dissipação localmente distribuídos, gostaríamos de mencionar os trabalhos de [40, 44], e também [36, 48] para extensão dos resultados a equações de KdV com não linearidades mais gerais. Para

problemas de KdV em domínios periódicos, veja, por exemplo, [30, 49, 29, 35].

A despeito da existência na literatura de muitos trabalhos relacionados ao estudo da equação de KdV, pouco se pode obter acerca da equação de KdV-Burgers, e menos ainda quanto se trata do comportamento assintótico de suas soluções. Neste contexto, citamos aqui o recente trabalho de [24], onde o autor faz uso da teoria de atratores a fim de estudar o comportamento assintótico da energia em $H^2(\mathbb{R})$ das soluções dadas pelo semigrupo associado a seguinte equação de KdV-Burgers generalizada

$$u_t + (\delta u_{xx} + g(u))_x - \nu u_{xx} + \gamma u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

onde $\delta, \nu > 0$, $\gamma \geq 0$ são constantes, $f \in H^2(\mathbb{R})$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^2(\mathbb{R})$.

No que concerne o estudo da equação de onda (1.0.2), existem diversos resultados na literatura acerca do comportamento assintótico para as soluções do problema (1.0.2) para os mais variados casos de g e da função a . No caso em que a dissipação g é linear e o mecanismo de dissipação é suposto efetivo em todo domínio, ou seja, quando a função a possui limitante inferior positivo em todo o domínio Ω , estimativas exponenciais para o decaimento são facilmente verificadas. Entretanto, quando a é suposta efetiva sobre apenas uma parte do domínio Ω , torna-se mais difícil obter estimativas para o decaimento, veja por exemplo o trabalho pioneiro de [59] e posteriormente [54]. Ainda mais trabalhos podem ser encontrados se considerando o mecanismo de dissipação com crescimento do tipo linear próximo da origem e atuando na fronteira do domínio, veja por exemplo [31, 32, 60, 4, 34]. Problemas com mecanismos dissipativos que não possuem tal comportamento próximo da origem se mostram ainda mais difíceis e taxas algébricas ou logarítmicas podem ser obtidas utilizando-se um método introduzido por [33]. Por fim, veja também os trabalhos de [39, 19, 2] onde são apresentadas mais taxas explícitas para o decaimento da energia quando a função g não possui crescimento linear próximo da origem.

Como segunda parte deste texto, estudamos a eficiência e precisão do método espectral para resolvermos uma equação de onda em 2D, sujeita a um mecanismo de amortecimento (em

inglês *damping*) friccional não linear (veja equação (1.0.2)). Em particular, buscamos verificar numericamente o decaimento polinomial da energia das soluções de (1.0.2) quando o tempo tende ao infinito e o mecanismo de amortecimento é suposto agir sobre uma região apropriada do domínio.

Quando utilizamos o método de diferenças finitas para a discretização espacial do problema, a correspondente energia semidiscreta não decai a taxas exponenciais e uniformemente, com respeito a largura do grid h , com exceção do caso em que o amortecimento é tido sobre todo o domínio, veja por exemplo [26, 28]. Em [53], os autores adicionaram a equação da onda uma viscosidade artificial a fim de amenizar as altas frequências numéricas de ondas espúricas e, portanto, obter a estabilização exponencial e uniforme, com relação à largura do grid h , da energia. Este resultado foi obtido para o problema em 1-D e para 2-D (quando considerando o domínio como sendo o quadrado), e considerando o termo de damping do tipo linear.

Nos parece então natural questionar a respeito do comportamento assintótico da energia discretizada, quando considerando aproximações via o método espectral, à medida que a largura do grid h tende a zero e na presença ou ausência de uma viscosidade artificial. Além do mais, é também bem conhecido que se os dados iniciais são regulares e o domínio é simples, o método espectral é tido como uma das melhores ferramentas com alta precisão dos resultados. A precisão do esquema pendenderá essencialmente da regularidade dos dados e da solução, enquanto que para os métodos de diferenças finitas ou elementos finitos, essa a dependência estará na ordem do esquema. Finalmente, do ponto de vista computacional, mostra-se uma tarefa fácil estendermos os resultados de 1D para 2D (e para 3D) quando consideramos o método espectral, uma vez que trabalhamos essencialmente com os coeficientes de Fourier.

Por estas razões, propusemos aqui a utilização do método espectral juntamente com uma discretização explícita da variável temporal a fim de resolvermos, localmente, a equação de onda (1.0.2). Enfatizamos ainda que o termo de amortecimento friccional é do tipo não linear, e embora uniformemente distribuído, o método se estende também a mecanismos localmente distribuídos (veja Observação 4.6). Logo, estudamos a completa discretização do problema (1.0.2) em ambas as variáveis temporal e espacial. Como esperado, a discretização de problemas

de evolução em ambas as variáveis pode levar a resultados de instabilidade ou estabilidade condicionada. Fornecemos, via o método de energia, condições suficientes para a estabilização e provamos também a convergência do método. É claro que a prova aqui apresentada é também válida para o problema em 1D, e pode ainda ser estendida para o problema em 3D, considerando para isso restrições para o efeito estabilizante (devido às imersões de Sobolev). Por fim, também ilustramos numericamente o decaimento uniforme (com respeito à largura do grid) da energia das soluções associadas ao problema (1.0.2) para o caso em que o mecanismo de amortecimento é uniformemente distribuído.

O texto está organizado da maneira como segue. No capítulo 2, trazemos alguns dos conceitos básicos, bem como dos principais resultados referentes às teorias aqui utilizadas. No capítulo 3 consideramos um problema de KdV-Burgers, definido em toda a reta e sujeito a um mecanismo de dissipação linear localizado e com sinal indefinido. No capítulo 4 estudamos, sob o ponto de vista numérico, uma equação de onda, definida em um domínio limitado e sujeita a uma dissipação não linear. Por fim, o capítulo 5 traz um resumo dos resultados estabelecidos e das questões por responder acerca dos problemas estudados.

1.1 Motivação e Objetivos

Tendo em vista na literatura que o problema de KdV-Burgers, posto em toda a \mathbb{R} , é dissipativo mas que suas soluções não decaem exponencialmente, chegamos a conclusão de que um mecanismo extra de dissipação é necessário. Porém, diferentemente da maioria dos trabalhos que vem sendo realizados na área de estabilização de problemas de evolução, optamos por considerar um mecanismo que não possui sinal definido, também tido na literatura como *damping indefinido*.

Para o segundo trabalho, buscamos nossa motivação na aplicabilidade e apreciação dos métodos numéricos de modo a aplicar os métodos de análise numérica, bem como o novo método espectral, aos problema de controle e estabilização de ondas sujeitas a dissipação não linear.

Em suma, nossos objetivos aqui são, portanto, estabelecer que o problema de KdV-Burgers aqui considerado (veja Capítulo 3) esta bem posto, segundo Hadamard, em H^s , $s \in [0, 3]$, e também estabelecer condições suficientes para o decaimento exponencial da energia de tais soluções. Na segunda parte deste trabalho (veja Capítulo 4), nosso objetivo será provar a convergência do modelo discretizado da equação de onda não linear proposta, bem como da estabilização da energia de suas soluções.

1.2 Contribuições

Neste trabalho obtivemos um critério que fornece condições suficientes para o decaimento das soluções de uma equação de KdV-Burgers, definida em toda a reta e sujeita a uma dissipação linear localizada e com sinal indefinido. Taxas explícitas para o decaimento são obtidas para as soluções em H^s , $s \in [0, 3]$.

Com relação a segunda parte do trabalho, fornecemos uma análise numérica de um problema de onda, definida em um domínio limitado e sujeita a uma dissipação não linear. Esta análise permitiu a implementação computacional do problema ilustrando assim a aplicação do método espectral para o estudo sob o ponto de vista numérico das soluções do mesmo.

1.3 Publicações

Listamos aqui as publicações que compõem esta tese.

1. Cavalcanti, M. M., Domingos Cavalcanti, V. N., Komornik, V, Rodrigues, J. H., *Global well-posedness and exponential decay rates for a KdV–Burgers equation with indefinite damping*, Annales de l’Institut Henri Poincaré (C), Non Linear Analysis, aceito para publicação;
2. Domingos Cavalcanti, V. N., Rosier, C., Rodrigues, J. H., *Numerical analysis for the wave equation with locally nonlinear distributed damping*, a ser submetido.

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns dos resultados e teorias utilizados durante a elaboração dos resultados obtidos e apresentados nos demais capítulos. Primeiramente, iremos trazer alguns dos principais resultados utilizados na Teoria dos Espaços de Sobolev (veja Seção 2.1) e análise funcional. A Seção 2.2 traz ao leitor um pouco sobre funções vetoriais e seus principais resultados. Faremos também uma breve abordagem da teoria de semigrupos de operadores lineares (veja Seção 2.3) e de operadores não lineares (veja Seção 2.4), bem como alguns dos principais resultados aqui utilizados.

2.1 Espaços L^p e de Sobolev

Para o que segue, denotaremos por Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$. Desta forma, para cada $p \in [1, \infty[$ denotaremos por $L^p(\Omega)$ o espaço de todas as classes de funções definidas em Ω e tomando valores em \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}) cujo valor absoluto é p -Lebesgue integrável, ou seja,

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}; \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Além disso, a aplicação $u \in L^p(\Omega) \mapsto \|u\|_{L^p(\Omega)} := \left\{ \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}$ é uma norma em $L^p(\Omega)$, de modo que $L^p(\Omega)$, munido desta norma, é um espaço de Banach (veja Teorema IV.8 Fischer–Riesz, página 57 em [12]).

Observação 2.1. O caso $p = \infty$ corresponde ao espaço $L^\infty(\Omega)$ das classes de todas as funções que são essencialmente limitadas e, neste caso, temos que $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \sup_{\text{ess}}\{u\}$, $u \in L^\infty(\Omega)$, é uma norma em $L^\infty(\Omega)$.

Diversos são os resultados concernentes aos espaços L^p podendo em sua maioria serem encontrados, por exemplo, no Capítulo IV em [12]. Gostaríamos de destacar aqui alguns dos resultados que podem ser encontrados na citação anterior.

Proposição 2.1 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, onde $1 \leq p, q \leq \infty$ são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ e ainda*

$$\int_{\Omega} |f \cdot g| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Veja Teorema IV.6, página 56 em [12]. □

Decorre desta última proposição (veja Observação 2, página 57 em [12]) que se $k \in \mathbb{N}$ e f_1, f_2, \dots, f_k funções tais que

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega), \quad 1 \leq i \leq k \quad \text{com} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1,$$

então, o produto $f = f_1 f_2 \dots f_k$ pertence a $L^p(\Omega)$ e

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Em particular, se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q$, então $f \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ e é válida a seguinte *desigualdade de interpolação*

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha} \quad \text{onde} \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

Lembramos ainda que os espaços $L^p(\Omega)$ são reflexivos (caso $1 < p < \infty$) e separáveis (caso $1 \leq p < \infty$). Além disso, temos que o dual de $L^p(\Omega)$, para o caso em que $1 < p < \infty$ é $L^q(\Omega)$, onde p e q satisfazem $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Esta última afirmação faz uso do Teorema da Representação

de Riesz e resultados de densidade (veja Teoremas IV.11 e IV.12, página 61 em [12]).

Desigualdades integrais desempenham um papel importante em diversas áreas da análise. Dentre elas temos a conhecida Desigualdade de Gronwall (veja [25], páginas 708 e 709) em suas formas divergente e integral. Temos ainda a seguinte desigualdade.

Proposição 2.2 (Gronwall-Bellman). *Sejam $T > 0$ e $m \in L^1(]0, T[)$ tais que $m(t) \geq 0$ para quase todo $t \in [0, T]$, e $a \geq 0$ uma constante não negativa. Se $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e verifica*

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s)\phi(s)ds, \quad \text{para todo } t \in [0, T],$$

então

$$\phi(t) \leq ae^{\int_0^t m(s)ds}, \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

Demonstração. Veja Lema A.4, página 156 em [11]. □

A principal aplicação dos espaços L^p está na formulação dos espaços de Sobolev, que passamos a definir agora. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, \infty]$ definimos o espaço de Banach

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}, \quad p \in [1, \infty],$$

onde D^α , $\alpha \in \mathbb{N}^n$, denota as derivadas, no sentido distribucional, de ordem até m , e munido da norma

$$\|u\|_{m,p} = \begin{cases} \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right\}^{1/p}, & p \in [1, \infty]; \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = \infty. \end{cases}$$

Observação 2.2. O Teorema de Meyers e Serrin (veja Teorema 3.17, página 67 em [1]) permite a formulação de $W^{m,p}(\Omega)$ como o completamento de $\{\phi \in C^m(\Omega) : \|\phi\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$ com respeito a norma $\|\cdot\|_{m,p}$.

Assim como os espaços L^p , temos que, para cada $m \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, \infty]$, $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach e separável (exceto para $p = \infty$). No caso particular de $p = 2$, temos

que $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert e denotaremos $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$. Ainda, para cada $m \in \mathbb{N}$, denotamos por $W_0^{m,p}(\Omega)$ o completamento de $C_0^m(\Omega)$ com relação a norma $\|\cdot\|_{m,p}$. Em particular, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$. Claramente, temos as seguintes imersões contínuas

$$W_0^m(\Omega) \subset W_p^m(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Estas e outras propriedades podem ser encontradas, por exemplo, em [1].

Dentre as principais propriedades dos espaços de Sobolev, destacamos as chamadas *imersões de Sobolev* (veja Teorema 4.12, página 85 em [1]). Em particular, em dimensão 1, e denotando $\Omega = I$, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.3. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ intervalo. Então existe uma constante $C > 0$ (dependendo somente de $|I| \leq \infty$) tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)}, \quad u \in W^{1,p}(I), \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

ou seja, $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ com imersão contínua para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração. Veja Teorema VIII.7, página 129 em [12]. □

Proposição 2.4. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo não limitado e $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p < \infty$. Então temos*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

Demonstração. Veja Corolário VIII.8, página 130 em [12]. □

No caso em $\Omega = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, temos a seguinte formulação equivalente para o espaço $H^m(\mathbb{R}^n)$

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'; (1 + |x|^2)^{m/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

onde \mathcal{S}' denota o espaço vetorial constituído pelos funcionais lineares e contínuos sobre o espaço de Schwartz \mathcal{S} , e \hat{u} denota a transformada de Fourier de um elemento $u \in \mathcal{S}$ (veja Proposição 2.1, página 242 em [17]). De maneira geral, podemos definir $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$ e $s \geq 0$.

2.2 Funções a Valores Vetoriais

Nesta seção iremos determinar os espaços em que são levados em conta as variáveis temporal e espacial, o qual é necessário para dar sentido a problemas de evolução.

Seja X um espaço de Banach, $a, b \in \mathbb{R}$. O espaço $L^p(a, b; X)$, $1 \leq p < \infty$, consiste das classes de funções mensuráveis sobre $[a, b]$ com imagem em X , ou seja, as funções $u :]a, b[\rightarrow X$, tais que

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} := \left\{ \int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

O espaço $L^\infty(a, b; X)$ consiste das classes de funções mensuráveis sobre $[a, b]$ com imagem em X e quase sempre limitadas em $]a, b[$. A norma neste espaço é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} := \sup_{ess} \|u(t)\|_X.$$

O espaço $C^m([a, b]; X)$, $m \in \mathbb{N}$, consiste de todas as funções contínuas $u : [a, b] \rightarrow X$ que possuem derivadas contínuas até a ordem m sobre $[a, b]$. A norma é dada por

$$\|u\|_{C^m([a,b];X)} := \sum_{i=0}^m \max_{t \in [a,b]} \left\| \frac{d^i}{dt^i} u(t) \right\|_X.$$

Destacamos agora, algumas das principais propriedades desses espaços.

Proposição 2.5. *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$, X e Y espaços de Banach, sobre um corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .*

- (a) $C^m([a, b]; X)$ é um espaço de Banach sobre \mathbb{K} ;
- (b) $L^p(a, b; X)$, $1 \leq p \leq \infty$ são espaços de Banach sobre \mathbb{K} ;
- (c) O conjunto de todos os polinômios

$$w(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m, \quad m \in \mathbb{N},$$

onde $a_i \in X$, $i = 0, 1, \dots, m$, é denso em $C([a, b]; X)$ e $L^p(a, b; X)$;

- (d) $C([a, b]; X)$ é denso em $L^p(a, b; X)$ e a imersão $C([a, b]; X) \subset L^p(a, b; X)$ é contínua;
- (e) Se X é um espaço de Hilbert com produto escalar $(\cdot, \cdot)_X$, então $L^2(a, b; X)$ é também um espaço de Hilbert com produto escalar

$$(u, v)_{L^2(a, b; X)} := \int_a^b (u(t), v(t))_X dt;$$

- (f) $L^p(a, b; X)$ é separável, se X for separável e $1 \leq p < \infty$;
- (g) Se $X \subset Y$, então $L^r(a, b; X) \subset L^q(a, b; Y)$, para $1 \leq q \leq r \leq \infty$.

Demonstração. Veja Proposição 23.2, página 407 em [58]. □

Denotaremos por $\mathcal{D}(a, b; X)$ o espaço localmente convexo das funções vetoriais φ definidas de $]a, b[$ em X , infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em $]a, b[$. Além disso, uma sequência $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(a, b; X)$ converge para $\varphi \in \mathcal{D}(a, b; X)$ se:

- (i) Existe $K \subset]a, b[$, compacto, contendo os suportes de φ_ν e φ , para todo $\nu \in \mathbf{N}$;
- (ii) Para cada $k \in \mathbf{N}$, $\varphi_\nu^{(k)}(t) \rightarrow \varphi^{(k)}(t)$ em X uniformemente em $t \in]a, b[$.

Observação 2.3. Prova-se ainda que o conjunto $\{\theta\xi, \theta \in \mathcal{D}(]a, b[), \xi \in X\}$ é total em $\mathcal{D}(a, b; X)$.

Lembremos que se U e V são dois espaços vetoriais topológicos, temos que $\mathcal{L}(U, V)$ denota o espaço das funções lineares e contínuas de U em V . Desta forma, o espaço das distribuições sobre $]a, b[$ com imagem em X , será denotado por $\mathcal{D}'(a, b; X)$. Logo, $\mathcal{D}'(a, b; X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(a, b; X), X)$, ou seja, é o conjunto de todas as aplicações lineares e limitadas de $\mathcal{D}(]a, b[)$ em X . Diremos que $S_\nu \rightarrow S$ em $\mathcal{D}'(a, b; X)$ se $\langle S_\nu, \theta \rangle \rightarrow \langle S, \theta \rangle$ em X , para qualquer $\theta \in \mathcal{D}(]a, b[)$. Cada elemento desse conjunto é uma distribuição sobre (a, b) com valores no espaço de Banach X .

A derivada $\frac{d}{dt}S$ de um elemento $S \in \mathcal{D}'(a, b; X)$, é definida com um único elemento deste espaço a qual satisfaz,

$$\left\langle \frac{dS}{dt}, \varphi \right\rangle = - \left\langle S, \frac{d}{dt}\varphi \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]a, b[).$$

Além disso, a função $S \mapsto \frac{d}{dt}S$ é uma função contínua de $\mathcal{D}'(a, b; X)$ sobre ele mesmo.

Agora se $f \in L^2(a, b; X)$ fica bem determinado o elemento $\tilde{f} \in \mathcal{D}'(a, b; X)$ definido por

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \int_a^b f(t)\varphi(t)dt. \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]a, b[).$$

A função $f \mapsto \tilde{f}$ de $L^2(a, b; X) \rightarrow \mathcal{D}'(a, b; X)$ é linear e contínua, e ainda é injetora e desta forma identificamos \tilde{f} com f e obtemos $L^2(a, b; X) \subset \mathcal{D}'(a, b; X)$. O espaço $L^1_{loc}(a, b; X)$ é o espaço das funções u tal que para todo compacto $K \subset (a, b)$, $\chi_K u$ pertence à $L^1(a, b; X)$, onde χ_K denota a função característica de K .

O espaço dual de $L^p(a, b; X)$. Consideremos $Y = L^p(a, b; X)$. Temos a seguinte relação de dualidade $Y' = L^q(a, b; X')$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ devido ao teorema seguinte.

Proposição 2.6. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

(a) *Cada função $v \in L^q(a, b; X')$ corresponde a um único funcional $\bar{v} \in Y'$ dada por*

$$\langle \bar{v}, u \rangle_{Y', Y} = \int_a^b \langle v(t), u(t) \rangle_{X', X} dt, \quad \forall u \in Y. \quad (2.2.1)$$

Reciprocamente, para cada $\bar{v} \in Y'$ corresponde a exatamente uma função $v \in L^q(a, b; X')$ dada por (2.2.1). Além disso

$$\|\bar{v}\|_{Y'} = \|v\|_{L^q(a, b; X')}$$

(b) *O espaço de Banach $L^p(a, b; X)$ é reflexivo e separável.*

Demonstração. Veja Proposição 23.7, página 411 em [58]. □

Assim podemos identificar Y' com $L^q(a, b; X')$, pois pela proposição acima existe um isomorfismo isométrico. Onde

$$\langle v, u \rangle_{Y', Y} = \int_a^b \langle v(t), u(t) \rangle_{X', X} dt; \quad \|v\|_X = \left\{ \int_a^b \|v(t)\|_{X'}^q dt \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad \forall u \in Y, \quad \forall v \in Y'.$$

Sejam a e b dois números reais finitos ou não, $a < b$, X e Y espaços de Banach com X denso em Y e $m \geq 1$ inteiro, definamos

$$W(a, b) := \left\{ u \in L^2(a, b; X); \frac{d^m}{dt^m} u = u^{(m)} \in L^2(a, b; Y) \right\},$$

onde $u^{(m)}$ é uma distribuição em $\mathcal{D}'(a, b; X)$, e a norma é dada por

$$\|u\|_{W(a,b)} = \left[\|u\|_{L^2(a,b;X)}^2 + \|u^{(m)}\|_{L^2(a,b;Y)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

segue daí que $W(a, b)$ é um espaço de Banach.

Proposição 2.7 (Aubin–Lions). *Sejam B_0 , B e B_1 espaços de Banach com $B_0 \subset B \subset B_1$, sendo estas imersões contínuas. Assuma também que a imersão $B_0 \subset B$ é compacta. Suponha ainda que $1 < p, q < \infty$, que B_0 e B_1 sejam reflexivos e defina*

$$W = \left\{ u \in L^p(0, T; B_0) : \frac{d}{dt} u \in L^q(0, T; B_1) \right\}.$$

Então a inclusão $W \subset L^p(0, T; B)$ é compacta.

Demonstração. Veja Proposição 1.3, página 106 em [50]. □

Funções Escalarmente Contínuas. Seja X um espaço de Banach. Definimos o espaço das funções escalarmente contínuas (ou fracamente contínuas) como o conjunto das funções $f \in L^\infty(0, T; X)$ tais que a aplicação $t \mapsto \langle x, f(t) \rangle_{X', X}$ é contínua sobre $[0, T]$, $\forall x \in X'$, onde X' é dual de X . Denotaremos tal espaço por $C_s(0, T; X)$. Note que se $u \in L^\infty(0, T; X) \cap C([0, T]; X)$ então $u \in C_s(0, T; X)$. Mais geralmente, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.8. *Sejam X e Y dois espaços de Banach, $X \subset Y$, sendo esta imersão contínua, e X um espaço reflexivo. Então*

$$L^\infty(0, T; X) \cap C_s(0, T; Y) = C_s(0, T; X).$$

Demonstração. Veja [38]. □

2.3 Semigrupos Lineares em Espaços de Banach

Definição 2.1. *Seja X um espaço de Banach. Uma família a um parâmetro $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares e limitados de X é chamada **semigrupo de operadores lineares e limitados** em X (ou simplesmente **semigrupo** em X) se*

(i) $S(0) = I$, (I é o operador identidade em X).

(ii) $S(t + s) = S(t)S(s)$ para quaisquer $t, s \geq 0$ (propriedade de semigrupo).

Definição 2.2. *Uma família de operadores lineares e limitados $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ em um espaço de Banach X é dita ser **uniformemente contínua** se*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t) - I\|_X = 0.$$

Diremos também que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é **fortemente contínuo** (ou de classe C_0) se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)x = x, \text{ para todo } x \in X.$$

Se X é um espaço de Banach e $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo fortemente contínuo em X então podemos definir o operador linear A por

$$D(A) = \left\{ x \in X : \exists \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \right\} \text{ e } Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ S(t)x}{dt} \right|_{t=0}, \quad x \in D(A),$$

e neste caso diremos que A é o **gerador infinitesimal** de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Definição 2.3. *Seja X um espaço de Banach. Diremos que um operador linear A é **dissipativo** se para todo $x \in D(A)$ existe $x^* \in F(x) = \{x^* \in X' : \langle x^*, x \rangle_{X', X} = \|x\|_X^2 = \|x^*\|_{X'}\}$ tal que $\operatorname{Re} \langle x^*, Ax \rangle_{X', X} \leq 0$.*

Teorema 2.4 (Lumer–Phillips). *Sejam X um espaço de Banach e A um operador linear com domínio $D(A)$ denso em X .*

- (a) Se A é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem $R(\lambda_0 I - A)$ de $(\lambda_0 I - A)$ é X , então A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X .
- (b) Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X então $R(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo. Mais ainda, para todo $x \in D(A)$ e todo $x^* \in F(x)$, tem-se $\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.

Demonstração. Veja Teorema 4.3, página 14 em [46]. □

Proposição 2.9. *Seja A um operador linear densamente definido em X . Se ambos A e A^* forem dissipativos, então A é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações.*

Demonstração. Veja Corolário 4.4, página 15 em [46]. □

Proposição 2.10 (Stone). *Um operador A é gerador infinitesimal de um C_0 -grupo de operadores unitários em um espaço de Hilbert H se, e somente se, iA é autoadjunto.*

Proposição 2.11. *Sejam X um espaço de Banach e A um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ em X , satisfazendo $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$. Se B é um operador linear limitado em X então $A + B$ é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ em X satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{(\omega + M\|B\|)t}$, $t \geq 0$.*

Demonstração. Veja Teorema 1.1, página 76 em [46]. □

Sejam X um espaço de Banach, $x \in X$ e $T > 0$. Consideremos o seguinte problema não homogêneo de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t), & t > 0, \\ u(0) = x, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

onde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear e $f : [0, T[\rightarrow X$. Para as definições que seguem, suporemos que A é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ em X .

Definição 2.4. *Uma função $u : [0, T[\rightarrow X$ é uma **solução regular** de (2.3.1) em $[0, T[$ se u é contínua em $[0, T[$, continuamente diferenciável em $]0, T[$, $u(t) \in D(A)$ para $0 < t < T$ e satisfaz a equação (2.3.1) para todo $t \in [0, T[$.*

Definição 2.5. Uma função u diferenciável quase sempre em $[0, T]$ tal que $u_t \in L^1(0, T; X)$ é chamada **solução forte** do problema (2.3.1) se $u(0) = u_0$ e $u_t(t) = Au(t) + f(t)$, quase sempre em $[0, T]$.

Definição 2.6. Seja $f \in L^1(0, T; X)$. A função $u \in C([0, T]; X)$ dada por

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0, T], \quad (2.3.2)$$

é chamada **solução mild** do problema (2.3.1).

Observação 2.5. Toda solução regular de (2.3.1) é uma solução forte e, ainda, toda solução forte é também uma solução mild.

Note que, dados A um gerador infinitesimal e $f \in L^1(0, T; X)$ então, para cada $x \in X$, o problema (2.3.1) admite uma única solução mild u em $[0, T]$. A existência de solução regulares para o problema (2.3.1) requer, pois, restrições para a não homogeneidade f e diversos resultados podem ser encontrados, dentre a considerável literatura sobre o assunto, em [46]. Dentre estes, destacamos o seguinte

Proposição 2.12. *Seja A gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Se $f \in W^1(0, T; L^2(\mathbb{R}))$ então para cada $x \in D(A)$ o problema de valor inicial (2.3.1) admite uma única solução forte em $[0, T]$.*

Demonstração. Veja Corolário 2.10, página 109 em [46]. □

Proposição 2.13. *Sejam $f \in L^1(0, T; X)$. Se u é uma solução mild de (2.3.1) então para todo $T' < T$, u é limite uniforme em $[0, T']$ de soluções regulares de (2.3.1).*

Demonstração. Veja Teorema 2.7, página 108 em [46]. □

2.4 Semigrupos Não Lineares em Espaços de Banach

Apresentaremos nesta seção as noções básicas de operadores (multivaluados) não lineares, semigrupos não lineares e equações diferenciais em espaços de Banach, bem como os principais

resultados. Para maiores detalhes, sugerimos os textos de [11], [3] e [50].

Se X e Y são espaços vetoriais sobre \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}), então um operador multivaluado de X em Y é um subconjunto $A \subset X \times Y$. Neste caso, o domínio $D(A)$ e a imagem $R(A)$ são dados por

$$\begin{aligned} Ax &= \{y \in Y : (x, y) \in A\}; & D(A) &= \{x \in X : Ax \neq \emptyset\}; \\ R(A) &= \bigcup_{x \in D(A)} Ax; & A^{-1} &= \{(y, x) \in Y \times X; (x, y) \in A\}. \end{aligned}$$

Sejam X espaço de Banach, com norma $\|\cdot\|_X$, e X^* seu dual topológico. Se $x^* \in X^*$ então denotaremos o valor de x^* em x por $\langle x^*, x \rangle$. Seja também $F : X \rightarrow X^*$ a aplicação dual que a cada $x \in X$ associa $F(x) = \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle_{X, X^*} = \|x\|_X^2 = \|x^*\|_{X^*}^2\}$.

Definição 2.7. Um conjunto $A \subset X \times X^*$ é dito **monótono** se

$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0,$$

para quaisquer $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$. Diremos também que um conjunto monótono $A \subset X \times X^*$ é **maximal monótono** se não estiver contido propriamente em nenhum outro subconjunto monótono de $X \times X^*$.

Definição 2.8. Um subconjunto $A \subset X \times X^*$ é dito **limitado** se A leva subconjuntos limitados de X em subconjuntos limitados de X^* .

Definição 2.9. Seja $A : X \rightarrow X^*$ u operador univalente tal que $D(A) = X$.

(i) Diremos que A é **hemicontínuo** em X se

$$w\text{-}\lim_{t \rightarrow 0} A(x + ty) = Ax,$$

para quaisquer $x, y \in X$;

(ii) Diremos que A é **demicontínuo** em X se

$$w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax,$$

para qualquer sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset X$ fortemente convergente para $x \in X$.

Proposição 2.14. *Suponha que X e X^* são reflexivos e estritamente convexos. Um subconjunto monótono $A \subset X \times X^*$ é maximal monótono se, e somente se, para cada $\lambda > 0$ (equivalentemente para algum $\lambda > 0$), temos $R(A + \lambda F) = X^*$.*

Demonstração. Veja Teorema 1.2, página 39 em [3]. □

Proposição 2.15. *Suponha que X seja reflexivo. Seja $B : X \rightarrow X^*$ operador monótono, hemicontínuo e limitado. Seja também $A \subset X \times X^*$ operador maximal monótono. Então $A + B$ é maximal monótono.*

Demonstração. Veja Corolário 1.1, página 39 em [3]. □

Definição 2.10. *Um subconjunto $A \subset X \times X$ é chamado **dissipativo** se para qualquer $(x_i, y_i) \in A$, $i = 1, 2$, existe $f \in F(x_1 - x_2)$ tal que*

$$\langle y_1 - y_2, f \rangle \leq 0. \tag{2.4.1}$$

*Neste caso, diremos que A é **maximal dissipativo** se não está propriamente contido em nenhum subconjunto dissipativo de $X \times X$, e diremos ainda que A é **m-dissipativo** se $R(I - A) = X$.*

Observação 2.6. Diremos que $A \subset X \times X$ é **acretivo** (resp. **maximal acretivo** e **m-acretivo**) se $-A$ for dissipativo (resp. maximal dissipativo e m-dissipativo). Em particular, se X for um espaço de Hilbert então as noções de subconjuntos acretivos e monótonos coincidem.

Definição 2.11. *Seja C um subconjunto fechado de X . Um **semigrupo de contrações** em C é uma função $S : [0, \infty[\times C \rightarrow C$ satisfazendo as seguintes condições:*

- (i) $S(t + s, x) = S(t, S(s, x))$, para quaisquer $x \in C$ e $t, s \geq 0$;
- (ii) $S(0, x) = x$, para todo $x \in C$;
- (iii) Para todo $x \in C$, $S(t, x)$ é contínua em $[0, \infty[$;
- (iv) $\|S(t, x) - S(t, y)\|_X \leq \|x - y\|_X$, para quaisquer $t > 0$ e $x, y \in C$.

Além disso, o operador A_s definido por

$$D(A_s) = \left\{ x \in C : \text{existe } \lim_{h \downarrow 0} \frac{S(h, x) - x}{h} \right\} \quad \text{e} \quad A_s x = \lim_{h \downarrow 0} \frac{S(h, x) - x}{h}, \quad x \in D(A_s),$$

onde consideramos o limite forte em X , é chamado **gerador forte** de S . De maneira análoga definimos o **gerador fraco** A_w de S considerando o limite fraco em X .

Observação 2.7. Se X é uniformemente convexo, então os geradores forte A_s e fraco A_w de S coincidem e, neste caso, denotamos $A_0 = A_s = A_w$ e dizemos que simplesmente que A_0 é o **gerador** de S .

O resultado a seguir fornece condições suficientes para que um subconjunto $A \subset X \times X$ seja um gerador de um semigrupo de contrações S em $\overline{D(A)}$.

Proposição 2.16. *Suponhamos que $A \subset X \times X$ seja dissipativo e tal que $\overline{D(A)} \subset R(I - \lambda A)$, para algum $\lambda > 0$ suficientemente pequeno. Então, o limite*

$$S(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-n} x \tag{2.4.2}$$

existe para todo $x \in \overline{D(A)}$, uniformemente em t em qualquer subconjunto compacto de $[0, \infty[$. Além disso, $S(t, \cdot)$ assim definido é um semigrupo de contrações em $\overline{D(A)}$.

Demonstração. Veja Teorema 1.3, página 104 em [3]. □

Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u(t) \in Au(t), & t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.4.3}$$

onde $u_0 \in X$ e A é um subconjunto de $X \times X$ (ou operador multivalente X).

Definição 2.12. Uma função $u : [0, \infty[\rightarrow X$ é chamada **solução regular** do problema de Cauchy (2.4.3) se $u(t)$ é contínua em $[0, \infty[$ e Lipschitz em todo conjunto compacto de $]0, \infty[$, além disso, $u(0) = u_0$ e para quase todo $t \in]0, \infty[$ temos $u(t) \in D(A)$ é diferenciável e $\frac{d}{dt}u(t) \in Au(t)$ para quase todo $t \in [0, \infty[$.

Observe que se $u(t)$, $t \geq 0$ é uma solução de (2.4.3), com $u_0 \in D(A)$, então definindo $S(t, u_0) = u(t)$, $t \geq 0$, a extensão $S(t, \cdot)$ ao conjunto $\overline{D(A)}$ é um semigrupo em $\overline{D(A)}$ (veja Proposição 1.3, página 110 em [3]). Para a recíproca desta afirmação, suponhamos que A satisfaz

$$\overline{\text{conv}D(A)} \subset \bigcap_{\lambda > 0} R(I - \lambda A), \quad (2.4.4)$$

onde $\text{conv}D(A)$ denota a envoltória convexa de $D(A)$. Consideremos também o problema aproximado

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u_\lambda(t) = A_\lambda u_\lambda(t), & t \geq 0, \\ u_\lambda(0) = u_0, \end{cases} \quad (2.4.5)$$

onde $u_0 \in X$, $A_\lambda = \lambda^{-1}(J_\lambda - I)$ e $J_\lambda = (I - \lambda A)^{-1}$, $\lambda > 0$.

Proposição 2.17. Seja X espaço de Banach real e A um subconjunto dissipativo de $X \times X$ satisfazendo (2.4.4). Então, para cada $u_0 \in \overline{D(A)}$, são válidas as afirmações:

- (i) Para cada $\lambda > 0$ o problema de valor inicial aproximado (2.4.5) possui uma única solução $u_\lambda \in C^1(0, \infty; X)$;
- (ii) $\lim_{\lambda \downarrow 0} u_\lambda(t) = S(t, u_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-n} u_0$, sendo o limite uniforme em subconjuntos limitados de $]0, \infty[$;
- (iii) Se $u_0 \in D(A)$ e $u(t)$ é uma solução de (2.4.3), então

$$u(t) = \lim_{\lambda \downarrow 0} u_\lambda(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-n} u_0, \quad t \geq 0.$$

Demonstração. Veja Teorema 1.4, página 115 em [3]. □

A Proposição 1.6 acima mostra que soluções de (2.4.3) pode ser aproximadas por soluções do problema aproximado (2.4.5). Além disso, temos que se o subconjunto dissipativo A de $X \times X$ satisfaz (2.4.4) então segue do Teorema 2.16 que, para cada $u_0 \in \overline{D(A)}$, a função $u(t) = S(t, u_0)$, $t \geq 0$, esta bem definida, porém, não é necessariamente uma solução de (2.4.3).

Consideremos a função $\langle \cdot, \cdot \rangle_s : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle y, x \rangle_s = \sup \left\{ \langle y, x^* \rangle_{X, X^*} : x^* \in F(x) \right\}, \quad (y, x) \in X \times X.$$

Definição 2.13. Uma função $u : [0, \infty[\rightarrow X$ é chamada **solução integral** do problema de valor inicial (2.4.3) se $u(t)$ for contínua em $[0, \infty[$, $u(0) = u_0$ e, além disso, a seguinte desigualdade se verifica

$$\frac{1}{2} \|u(t) - x\|_X^2 \leq \frac{1}{2} \|u(s) - x\|_X^2 + \int_s^t \langle u(r) - x, y \rangle_s dr, \quad (2.4.6)$$

para cada $(x, y) \in A$ e $0 \leq s \leq t < \infty$.

Observamos que toda solução regular de (2.4.3) é também uma solução integral. Além disso, se A é um subconjunto fechado e dissipativo de $X \times X$ então, segue da Proposição 2.17 que o problema (2.4.3) admite uma única solução integral dada pela fórmula exponencial (2.4.2).

As Proposições 2.16 e 2.17 asseguram que se $u(t)$, $t \geq 0$ é uma solução regular de (2.4.3) então está bem definido um semigrupo associado $S(t, \cdot)$, $t \geq 0$, em $\overline{D(A)}$, e ainda esta solução é dada pela fórmula exponencial (2.4.2) e pode ser aproximada por soluções em $C^1(0, \infty; X)$ do problema aproximado (2.4.5). Entretanto, propriedades extras para o espaço X são necessárias para a garantirmos a recíproca desta afirmação, ou seja, a existência de soluções regulares.

Proposição 2.18. Suponhamos que X seja reflexivo e que $A \subset X \times X$ seja dissipativo e satisfaz (2.4.4). Então, para cada $u_0 \in D(A)$, o problema de valor inicial (2.4.3) admite uma única solução $u : [0, \infty[\rightarrow X$ dada pela fórmula exponencial

$$u(t) = S(t, u_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-n} u_0, \quad t \geq 0.$$

Demonstração. Veja Corolário 1.1, página 118 em [3]. □

Observação 2.8. Se A é um conjunto m -dissipativo então a propriedade (2.4.4) é satisfeita.

As Proposições 2.17 e 2.18 garantem a existência de soluções (regular e integral) para o problema (2.4.3), no caso em que o operador $A \subset X \times X$ é dissipativo e satisfaz (2.4.4) (ou m -dissipativo). Entretanto, em muitas aplicações ocorre que $X = H$ é um espaço de Hilbert e, portanto, tendo em vista a Observação 2.6, os resultados acima se aplicam para operadores monótonos.

Equação de KdV-Burgers com Damping

Indefinido

3.1 Introdução

Este capítulo é dedicado ao estudo da existência, unicidade, dependência contínua e do comportamento assintótico das soluções de uma equação de Korteweg-de Vries-Burgers, ou simplesmente KdV-Burgers, posta em toda a reta real e sujeita a um mecanismo de dissipação localizado, como apresentada a seguir

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} - u_{xx} + uu_x + \lambda u = 0 & , x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) & , x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

onde $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função parâmetro dada. Equação esta que deriva do seguinte modelo de KdV-Burgers

$$u_t + u_{xxx} - u_{xx} + uu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (3.1.2)$$

que descreve a propagação de pequenas amplitudes de ondas em um meio dispersivo não linear e na presença de efeitos dissipativos, sujeito ainda à uma segunda dissipação dada por λu .

3.2 O Caso Linear. Considerações e Resultados.

Como parte da estratégia adotada para o estudo do problema não linear (3.1.1), esta seção é dedicada ao estudo do problema linear não homogêneo associado descrito a seguir

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} - u_{xx} + \lambda u = f & , x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) & , x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

onde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ e $\lambda, u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Provaremos a existência, unicidade e dependência contínua das soluções mild e fortes de (3.2.1). Ao final da seção, iremos estabelecer um resultado que fornecerá condições suficientes para o decaimento exponencial da energia em $L^2(\mathbb{R})$ destas soluções.

Para o que segue, exceto quando mencionado, consideraremos que $\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$. Então, definindo os operadores lineares $A : D(A) \subset L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ e $B : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ por

$$\begin{aligned} Au &= -u_{xxx} + u_{xx}, \quad u \in D(A) \quad \text{onde} \quad D(A) = H^3(\mathbb{R}), \\ Bu &= -\lambda u, \quad u \in L^2(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

podemos reescrever o problema (3.2.1) na seguinte forma equivalente:

$$\begin{cases} u_t(t) = \mathcal{A}_\lambda u(t) + f(t), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.2.2)$$

onde $\mathcal{A}_\lambda = A + B$.

O operador \mathcal{A}_λ definido como acima é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo, ou seja, um C_0 -semigrupo, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. Com efeito, primeiramente observamos que o operador B é limitado e ainda $\|B\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))} \leq \|\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. Logo, tendo em vista a Proposição 2.11, é suficiente provarmos que o operador A é o gerador infini-

tesimal de um C_0 -semigrupo, e neste caso temos ainda a seguinte estimativa

$$\|S(t)v\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq \|v\|_{L^2(\mathbf{R})} e^{t\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}}, \quad t \geq 0. \quad (3.2.3)$$

Inicialmente, observamos que A é densamente definido. Além disso, utilizando integração por partes e tendo em vista a Proposição 2.4 temos

$$\begin{aligned} (Au, u)_{L^2(\mathbf{R})} &= \int_{\mathbf{R}} -u_{xxx}u + u_{xx}u dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} u_{xx}u_x - u_x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \frac{d}{dx} u_x^2 dx - \int_{\mathbf{R}} u_x^2 dx \\ &= - \int_{\mathbf{R}} u_x^2 dx \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

para todo $u \in D(A)$, provando assim que o operador A é dissipativo. A conclusão de que A é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo em $L^2(\mathbf{R})$ segue, pois, do teorema de Lumer–Phillips (veja Teorema 2.4) bastando para isso provarmos que $R(I - A) = L^2(\mathbf{R})$, ou seja, devemos mostrar que para todo $f \in L^2(\mathbf{R})$ existe $u \in H^3(\mathbf{R})$ tal que seguinte equação se verifica

$$u + u_{xxx} - u_{xx} = f.$$

Com efeito, tomando a transformada de Fourier em ambos os membros desta equações obtemos a seguinte relação equivalente

$$\hat{u}(\xi)(1 + (i\xi)^3 - (i\xi)^2) = \hat{f}(\xi) \quad \iff \quad \hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + (i\xi)^3 - (i\xi)^2}.$$

Observe que utilizamos o fato que o denominador $h(\xi) = 1 + (i\xi)^3 - (i\xi)^2$, $\xi \in \mathbf{R}$, nunca se anula. Além disso, temos ainda que $h(\xi)$ é uma função contínua satisfazendo $|h(\xi)| \rightarrow \infty$ quando $|\xi| \rightarrow \infty$, donde segue que $1/h$ é limitada e, portanto, a última identidade possui uma

única solução $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$. Finalmente, como

$$\frac{1 + |\xi| + |\xi|^2 + |\xi|^3}{|1 + (i\xi)^3 - (i\xi)^2|} \rightarrow 1, \quad \text{quando } |\xi| \rightarrow \infty,$$

segue que existe $M \geq 0$ tal que

$$|(i\xi)^j \hat{u}(\xi)| \leq M |\hat{f}(\xi)|, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Decorre desta última desigualdade e do fato que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, que $u \in H^3(\mathbb{R})$. Isto conclui a prova de que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo em $L^2(\mathbb{R})$ e, portanto, que \mathcal{A}_λ também o é.

Contudo, para cada $T > 0$, concluímos que dados $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}))$, o problema (3.2.1) admite uma única solução mild (veja Definição 2.6), isto é $u \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$ e é dada por

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.2.4)$$

Entretanto, temos que a solução u possui regularidade adicional, ou seja, $u \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}))$. Com efeito, é suficiente verificarmos que $u_x \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}))$. Para isto, decorre da Proposição 2.13 que u é limite de uma sequência de soluções regulares de (3.2.2) (veja Definição 2.4), ou seja, existem sequências $\{u_{0,n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H^3(\mathbb{R})$ e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W^{1,1}(0, T; L^2(\mathbb{R}))$ satisfazendo

$$u_{0,n} \rightarrow u_0 \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad f_n \rightarrow f \quad \text{em } L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}))$$

de modo que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em } C([0, T]; L^2(\mathbb{R})),$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, u_n é solução regular de

$$\begin{cases} u_{nt}(t) = \mathcal{A}_\lambda u_n(t) + f_n(t), & t \in]0, T[, \\ u_n(0) = u_{0,n}. \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Logo, u_n satisfaz a equação (3.2.5) para todo $t \in]0, T[$. Desta forma, podemos “multiplicar” a equação (3.2.5) por u_n e tomar o produto interno em $L^2(\mathbf{R})$ a fim de obtermos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|u_n(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 &= (u_{nt}(t), u_n(t))_{L^2(\mathbf{R})} \\ &= (\mathcal{A}_\lambda u_n(t), u_n(t))_{L^2(\mathbf{R})} + (f_n(t), u_n(t))_{L^2(\mathbf{R})} \\ &= (A u_n(t), u_n(t))_{L^2(\mathbf{R})} + (B u_n(t), u_n(t))_{L^2(\mathbf{R})} + (f_n(t), u_n(t))_{L^2(\mathbf{R})} \\ &= - \int_{\mathbf{R}} |u_{nx}(t, x)|^2 dx - \int_{\mathbf{R}} \lambda(x) |u_n(t, x)|^2 dx + \int_{\mathbf{R}} f(t, x) u_n(t, x) dx, \end{aligned}$$

para $t \in [0, T[$.

Segue daí que u_n satisfaz a identidade

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_n(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} |u_{nx}(s, x)|^2 dx ds & \tag{3.2.6} \\ &= \frac{1}{2} \|u_{0,n}\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 - \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \lambda(x) |u_n(s, x)|^2 dx ds + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} f_n(s, x) u_n(s, x) dx ds, \end{aligned}$$

para $t \in [0, T[$.

Da mesma forma, dados $m, n \in \mathbf{N}$, decorre da linearidade dos problemas (3.2.5) que podemos reescrever a identidade acima para a diferença $u_n - u_m$ como segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_n(t) - u_m(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} |u_{nx}(s, x) - u_{mx}(s, x)|^2 dx ds \\ &= \frac{1}{2} \|u_{0,n} - u_{0,m}\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 - \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \lambda(x) |u_n(s, x) - u_m(s, x)|^2 dx ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} (f_n(s, x) - f_m(s, x))(u_n(s, x) - u_m(s, x)) dx ds, \end{aligned}$$

para $t \in [0, T[$.

Agora, segue das convergências de $\{u_{0,n}\}$, $\{f_n\}$ e $\{u_n\}$ mencionadas antes e também da identidade acima que a sequência $\{u_{nx}\}_{n \in \mathbf{N}}$ é de Cauchy em $L^2(0, T; L^2(\mathbf{R}))$ e, portanto, converge à um elemento $\chi \in L^2(0, T; L^2(\mathbf{R}))$. Entretanto, decorre da convergência de u_n para u em $C([0, T]; L^2(\mathbf{R}))$ que u_{nx} converge a u_x no sentido distribucional. Logo, concluímos assim que $\chi = u_x$ e, portanto, que $u_x \in L^2(0, T; L^2(\mathbf{R}))$. Portanto, concluímos que u pertence a classe

$C([0, T]; L^2(\mathbf{R})) \cap L^2(0, T; H^1(\mathbf{R}))$. Além disso, tomando o limite em (3.2.6), tendo em vista as convergências acima, concluímos que u satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} |u_x(s, x)|^2 dx ds + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \lambda(x) |u(s, x)|^2 dx ds \\ = \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} f(s, x) u(s, x) dx ds, \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

para quase todo $t \in [0, T]$. Por outro lado, decorre da estimativa (3.2.7) e da expressão (3.2.4) que a solução u satisfaz

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq e^{\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} t} \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} + e^{\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} t} \int_0^t e^{-\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} s} \|f(s)\|_{L^2(\mathbf{R})} ds, \quad t \in [0, T],$$

donde segue que

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq e^{\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} T} \left\{ \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\mathbf{R}))} \right\}. \quad (3.2.8)$$

Ainda, da identidade (3.2.7) temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} |u_x(s, x)|^2 dx ds \\ \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + 2 \|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \int_0^t \frac{1}{2} \|u(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 ds + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} f(s, x) u(s, x) dx ds, \end{aligned}$$

para quase todo $t \in [0, T]$. Calculamos a última integral na desigualdade acima utilizando Cauchy-Schwarz, Young e (3.2.8) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbf{R}} f(s, x) u(s, x) dx ds &\leq \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\mathbf{R})} \|u(s)\|_{L^2(\mathbf{R})} ds \\ &\leq \sup_{s \in [0, T]} \|u(s)\|_{L^2(\mathbf{R})} \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\mathbf{R})} ds \\ &\leq \frac{1}{2} \left\{ \sup_{t \in [0, T]} \|u(s)\|_{L^2(\mathbf{R})} \right\}^2 + \frac{1}{2} \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\mathbf{R}))}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} e^{2\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} T} \left\{ \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\mathbf{R}))} \right\}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\mathbf{R}))}^2, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Com isto obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} |u_x(s, x)|^2 dx ds \\ \leq \frac{1}{2} \left[1 + e^{2\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}T} \right] \left\{ \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\mathbf{R}))} \right\}^2 \\ + 2\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \int_0^t \frac{1}{2} \|u(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 ds, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Definindo

$$F(t) = \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} |u_x(s, x)|^2 dx ds, \quad t \in [0, T],$$

segue da desigualdade anteriormente obtida que F satisfaz

$$F(t) \leq \frac{1}{2} \left[1 + e^{2\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}T} \right] \left\{ \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\mathbf{R}))} \right\}^2 + 2\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \int_0^t F(s) ds,$$

para $t \in [0, T]$. Aplicando então a desigualdade de Gronwall-Bellman (veja Proposição 2.2) vem que

$$F(t) \leq \frac{1}{2} \left[1 + e^{2\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}T} \right] \left\{ \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\mathbf{R}))} \right\}^2 e^{2\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}t}, \quad t \in [0, T],$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + 2 \int_0^t \int_{\mathbf{R}} |u_x(s, x)|^2 dx ds \\ \leq \left[1 + e^{2\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}T} \right] e^{2\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}t} \left\{ \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\mathbf{R}))} \right\}^2, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Portanto, temos a seguinte estimativa para a solução u do problema linear não homogêneo (3.2.1)

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \left\{ \int_0^T \int_{\mathbf{R}} |u_x(t, x)|^2 dx dt \right\}^{1/2} \\ \leq \left[2 + 2e^{2\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}T} \right]^{1/2} e^{\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}T} \left\{ \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\mathbf{R}))} \right\}. \end{aligned}$$

Temos, então, concluído o seguinte resultado acerca das soluções mild do problema (3.2.1).

Proposição 3.1. *Sejam $T > 0$ e $\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$. Para cada $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}))$, o problema (3.2.1) admite uma única solução mild u na classe $C([0, T]; L^2(\mathbb{R})) \cap L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}))$. Além disso, u satisfaz a seguinte identidade de energia*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |u_x(s, x)|^2 dx ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \lambda(x) |u(s, x)|^2 dx ds \\ = \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(s, x) u(s, x) dx ds, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Além disso, a solução u depende continuamente dos dados, ou seja, vale a seguinte desigualdade

$$\|u\|_{C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))} + \|u_x\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}))} \leq c_T \left\{ \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}))} \right\}, \quad (3.2.10)$$

onde $c_T := e^{\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R})} T} (2 + 2e^{2\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R})} T})^{1/2}$.

A Proposição 3.1 assegura-nos que o problema linear não homogêneo (3.2.1) é bem posto, no que diz respeito a soluções mild. Entretanto, soluções mais regulares podem ser obtidas, como mostra o próximo resultado.

Proposição 3.2. *Sejam $T > 0$ e $\lambda \in H^1(\mathbb{R})$. Para cada $u_0 \in H^3(\mathbb{R})$ e $f \in W^{1,1}(0, T; L^2(\mathbb{R}))$ tal que $f_x \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}))$, o problema (3.2.1) admite uma única solução regular u na classe $C([0, T]; H^3(\mathbb{R})) \cap L^2(0, T; H^4(\mathbb{R}))$ para a qual se verifica a seguinte desigualdade*

$$\begin{aligned} \|u\|_{C(0, T; H^3(\mathbb{R}))} + \|u_{xxxx}\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}))} \\ \leq c_{3, T} \left\{ \|u_0\|_{H^3(\mathbb{R})} + \|f\|_{W^{1,1}(0, T; L^2(\mathbb{R}))} + \|f_x\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}))} \right\}, \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

onde $c_{3, T} > 0$ é uma constante positiva. Mais ainda, $u_t \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R})) \cap L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}))$ e vale a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \|u_t\|_{C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))} + \|u_{tx}\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}))} \\ \leq c_{0, T} \left\{ \|u_0\|_{H^3(\mathbb{R})} + \|f(0)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|f_t\|_{L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}))} \right\}, \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

onde $c_{0, T} > 0$ é uma constante positiva.

Demonstração. Nas condições do enunciado, segue da teoria de semigrupos lineares que o problema (3.2.1) admite uma única solução regular u na classe $C([0, T]; H^3(\mathbb{R}))$. Assim, denotando $v = u_t$ temos que v é solução do problema

$$\begin{cases} v_t + v_{xxx} - v_{xx} + \lambda v = f_t & , x \in \mathbb{R}, t > 0; \\ v(x, 0) = v_0(x) & , x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde $v_0 = -u_{0xxx} + u_{0xx} - \lambda u_0 + f(\cdot, 0)$, na classe $C([0, T]; L^2(\mathbb{R})) \cap L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}))$. Logo, a equação (3.2.1) é satisfeita para todo $t \in [0, T]$. Desta forma, obtemos

$$u_{xxxx} = -u_{tx} + u_{xxx} - (\lambda u)_x + f_x, \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (3.2.13)$$

Note que de $u_t \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R})) \cap L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}))$ segue que $u_{tx} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}))$. Além disso, observamos que $\lambda \in H^1(\mathbb{R})$ temos $\lambda u(t) \in H^1(\mathbb{R})$ para todo $t \in [0, T]$ e ainda

$$\begin{aligned} \int_0^T \|(\lambda u(t))_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt &\leq 2 \int_0^T \|\lambda_x u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt + 2 \int_0^T \|\lambda u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \\ &\leq 2 \|\lambda_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \int_0^T \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 dt + 2 \|\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \int_0^T \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \\ &\leq 4c_1^2 \|\lambda\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 (T+2) \left[\|u\|_{C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))} + \|u_x\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}))} \right], \end{aligned}$$

onde $c_1 > 0$ é uma constante provinda da imersão $H^1(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$, donde concluímos

$$\|(\lambda u)_x\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}))} \leq 2c_1 \|\lambda\|_{H^1(\mathbb{R})} (T+2)^{1/2} \left[\|u\|_{C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))} + \|u_x\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}))} \right]. \quad (3.2.14)$$

Assim, segue da regularidade das funções que aparecem no lado direito de (3.2.13) que $u_{xxxx} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}))$, ou seja, $u \in L^2(0, T; H^4(\mathbb{R}))$. Resta-nos obter as estimativas (3.2.11) e (3.2.12). Primeiramente, observamos que de (3.2.1) vem que

$$\|u_{xxx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|u_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|u_{xx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\lambda u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|f(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad t \in [0, T].$$

A fim de obtermos uma estimativa para $\|u_{xxx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$, iremos estimar cada um dos termos a

direita de (3.2.14)

Estimativa de $\|u_t(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}$. Como $u_t \in C([0, T]; L^2(\mathbf{R})) \cap L^2(0, T; H^1(\mathbf{R}))$ aplicamos a estimativa (3.2.10) de modo a obter

$$\begin{aligned} \|u_t(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} &\leq c_T \left\{ \|u_{0xxx} + \lambda u_0 - u_{0xx} - f(0)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|f_t\|_{L^1(0, T; L^2(\mathbf{R}))} \right\} \\ &\leq c_T \max\{2, c_2 + 1\} \left(\|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})} + \|f\|_{W^{1,1}(0, T; L^2(\mathbf{R}))} \right), \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

onde $c_2 > 0$ é a constante provinda da imersão $W^{1,1}(0, T; L^2(\mathbf{R})) \subset L^\infty(0, T; L^2(\mathbf{R}))$.

Estimativa de $\|\lambda u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}$. Das hipóteses temos

$$\begin{aligned} \|\lambda u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} &\leq \|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \\ &\leq \|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \left[\|u\|_{C([0, T]; L^2(\mathbf{R}))} + \|u_x\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbf{R}))} \right] \\ &\leq c_T \|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \left\{ \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})} + \|f\|_{W^{1,1}(0, T; L^2(\mathbf{R}))} \right\}. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Estimativa de $\|f(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}$. Claramente, temos

$$\|f(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq c_2 \|f\|_{W^{1,1}(0, T; L^2(\mathbf{R}))}. \quad (3.2.17)$$

Estimativa de $\|u_{xx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}$. Multiplicando a equação (3.2.1) por $u_{xxx}(t)$ e integrando em \mathbf{R} obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|u_{xx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \|u_{xxx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 &\leq \left\{ \|f_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|(\lambda u(t))_x\|_{L^2(\mathbf{R})} \right\} \|u_{xxx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \\ &\leq \frac{\gamma}{2} \left\{ \|f_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|(\lambda u(t))_x\|_{L^2(\mathbf{R})} \right\}^2 + \frac{1}{2\gamma} \|u_{xxx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2, \end{aligned}$$

donde concluimos

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|u_{xx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \left(1 - \frac{1}{2\gamma}\right) \|u_{xxx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 \leq \frac{\gamma}{2} \left\{ \|f_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|(\lambda u(t))_x\|_{L^2(\mathbf{R})} \right\}^2.$$

Escolhendo $\gamma = 1$ e integrando de 0 a $t < T$ chegamos à

$$\begin{aligned}
& \|u_{xx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \int_0^t \|u_{xxx}(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 ds \\
& \leq 2 \int_0^t \|f_x(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 ds + 2 \int_0^t \|(\lambda u(s))_x\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 ds \\
& \leq 2 \left\{ \|f_x\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbf{R}))} + \|(\lambda u)_x\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbf{R}))} \right\}^2 \\
& \leq 2 \left\{ \|f_x\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbf{R}))} + 2c_1 \|\lambda\|_{H^1(\mathbf{R})} c_T \left(\|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})} + \|f\|_{W^{1,1}(0,T;L^2(\mathbf{R}))} \right) \right\}^2. \quad (3.2.18)
\end{aligned}$$

Combinando então (3.2.15), (3.2.16), (3.2.17) e (3.2.18) concluímos

$$\|u_{xxx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq c_{1,3} \left\{ \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})} + \|f\|_{W^{1,1}(0,T;L^2(\mathbf{R}))} + \|f_x\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbf{R}))} \right\},$$

onde $c_{1,3} = c_{1,3}(T, \lambda) > 0$ é uma constante.

Contudo, a fim de fornecermos uma estimativa para u_{xxxx} devemos estimar u_x .

Estimativa para $\|u_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}$. Multiplicamos a equação (3.2.1) por u_{xx} e integramos em \mathbb{R} de modo que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \|u_{xx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 & \leq \left(\|\lambda u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|f(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \right) \|u_{xx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \\
& \leq \frac{\gamma}{2} \left(\|\lambda u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|f(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \right)^2 + \frac{1}{2\gamma} \|u_{xx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2,
\end{aligned}$$

donde concluímos que

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \left(1 - \frac{1}{2\gamma}\right) \|u_{xx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 \leq \frac{\gamma}{2} \left(\|\lambda u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|f(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \right)^2.$$

Integrando de 0 a $t < T$ cada um dos membros desta última desigualdade obtemos

$$\|u_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \int_0^t \|u_{xx}(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 ds \leq T \max\{1, c_T(1 + c_2)\} \left\{ \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})} + \|f\|_{W^{1,1}(0,T;L^2(\mathbf{R}))} \right\}^2,$$

para todo $t \in [0, T]$.

Segue das estimativas obtidas até aqui as seguintes limitações

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq c_T \left\{ \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})} + \|f\|_{W^{1,1}(0, T; L^2(\mathbf{R}))} \right\}; \\ \sup_{t \in [0, T]} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq c_{1,1} \left\{ \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})} + \|f\|_{W^{1,1}(0, T; L^2(\mathbf{R}))} \right\}; \\ \sup_{t \in [0, T]} \|u_{xx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq c_{1,2} \left\{ \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})} + \|f\|_{W^{1,1}(0, T; L^2(\mathbf{R}))} + \|f_x\|_{L^2(0, T; L(\mathbf{R}))} \right\}; \\ \sup_{t \in [0, T]} \|u_{xxx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq c_{1,3} \left\{ \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})} + \|f\|_{W^{1,1}(0, T; L^2(\mathbf{R}))} + \|f_x\|_{L^2(0, T; L(\mathbf{R}))} \right\}, \end{array} \right. \quad (3.2.19)$$

onde $c_{1,i} > 0$, $i = 1, 2, 3$ são constantes que dependem de T e λ . Disto segue que

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{H^3(\mathbf{R})} \leq \tilde{c}_{1,1} \left\{ \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})} + \|f\|_{W^{1,1}(0, T; L^2(\mathbf{R}))} + \|f_x\|_{L^2(0, T; L(\mathbf{R}))} \right\}, \quad (3.2.20)$$

onde $\tilde{c}_{1,1} = \tilde{c}_{1,1}(T, \lambda) = c_T + \sum_{i=1}^3 c_{1,i}$.

Resta-nos estimar a norma de u_{xxxx} em $L^2(0, T; L^2(\mathbf{R}))$. Para isso, partimos de (3.2.13) de modo a obter

$$\|u_{xxxx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 \leq 2^3 \left\{ \|u_{tx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \|u_{xxx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \|(\lambda u(t))_x\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \|f_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 \right\},$$

donde segue que

$$\begin{aligned} & \|u_{xxxx}\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbf{R}))}^2 \\ & \leq 2^3 \left\{ \|u_{tx}\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbf{R}))}^2 + \int_0^T \|u_{xxx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 dt + \|(\lambda u)_x\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbf{R}))}^2 + \int_0^T \|f_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 dt \right\}. \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Estimaremos cada um dos termos que aparecem a direita de (3.2.21).

Estimativa de $\|u_{tx}\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbf{R}))}$. Segue de (3.2.15) que

$$\|u_{tx}\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbf{R}))}^2 \leq \left[c_T \max\{2, c_2 + 1\} \left(\|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})} + \|f\|_{W^{1,1}(0, T; L^2(\mathbf{R}))} \right) \right]^2. \quad (3.2.22)$$

Estimativa de $\int_0^T \|u_{xxx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 dt$. Observe que de (3.2.19) temos

$$\int_0^T \|u_{xxx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 dt \leq c_{1,3}^2 T \left\{ \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})} + \|f\|_{W^{1,1}(0,T;L^2(\mathbf{R}))} + \|f_x\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbf{R}))} \right\}^2. \quad (3.2.23)$$

Estimativa de $\|(\lambda u)_x\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbf{R}))}^2$. De (3.2.14) e (3.2.10) temos

$$\begin{aligned} \|(\lambda u)_x\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbf{R}))}^2 &\leq 4c_1^2 \|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^2 (T+2) \left[\|u\|_{C([0,T];L^2(\mathbf{R}))} + \|u_x\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbf{R}))} \right]^2 \\ &\leq \left[4c_1 \|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} (T+2) c_T \left(\|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})} + \|f\|_{W^{1,1}(0,T;L^2(\mathbf{R}))} \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

Combinando (3.2.21), (3.2.22), (3.2.23) e (3.2.24) concluimos

$$\|u_{xxxx}\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbf{R}))} \leq \tilde{c}_{1,2} \left\{ \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})} + \|f\|_{W^{1,1}(0,T;L^2(\mathbf{R}))} + \|f_x\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbf{R}))} \right\}, \quad (3.2.25)$$

onde $\tilde{c}_{1,2} = \tilde{c}_{1,2}(T, \lambda) > 0$ é uma constante.

De (3.2.20) e (3.2.25) chegamos à

$$\begin{aligned} &\|u\|_{C([0,T];H^3(\mathbf{R}))} + \|u\|_{L^2(0,T;H^3(\mathbf{R}))} \\ &\leq T^{1/2} \sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_{H^3(\mathbf{R})} + \|u_{xxxx}\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbf{R}))} \\ &\leq [T^{1/2} \tilde{c}_{1,1} + \tilde{c}_{1,2}] \left\{ \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})} + \|f\|_{W^{1,1}(0,T;L^2(\mathbf{R}))} + \|f_x\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbf{R}))} \right\}, \end{aligned}$$

donde segue (3.2.11) bastando para isso tomar $c_{3,T} = T^{1/2} \tilde{c}_{1,1} + \tilde{c}_{1,2}$.

A desigualdade (3.2.12) segue pois aplicando diretamente a Proposição 3.1. \square

Observação 3.1. Segue da teoria de semigrupos lineares que para $f \in W_{loc}^{1,1}(\mathbf{R}_+; L^2(\mathbf{R}))$ e $u_0 \in H^3(\mathbf{R})$, a respectiva solução mild de u será uma solução forte. A regularidade necessária para f a fim de se obter soluções clássicas é $C^1([0, T]; L^2(\mathbf{R}))$.

No que concerne o comportamento assintótico das soluções do problema linear homogêneo, vimos na seção introdutória que as soluções do problema (3.1.1) não decaem exponencialmente. Logo, o termo “dissipativo” localmente distribuído λu se faz necessário caso desejamos obter

taxas exponenciais. Entretanto, no caso de $\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$ ser da forma $\lambda(x) \geq \lambda_0 > 0$ para quase todo $x \in \mathbb{R}$, o decaimento exponencial pode ser obtido sem muita dificuldade. Com efeito, segue da identidade (3.2.9) que

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |u_x(s, x)|^2 dx ds \leq -\lambda_0 \int_0^t \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 ds,$$

donde concluimos

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})} e^{-\lambda_0 t}, \quad t \geq 0.$$

Neste caso, dizemos que o termo dissipativo localmente distribuído λu é um termo de “full damping”, ou seja, é suposto agir em todo o domínio do problema. Isto nos leva a considerar o problema de obter taxas do tipo exponencial para o problema com termo dissipativo localmente distribuído, ou seja, não agindo em todo o domínio do problema. Este tem sido um problema de bastante interesse e, dentre os mais recentes resultados acerca deste tipo de problema, mencionamos aqui o trabalho de [20].

A maioria dos trabalhos que tratam problemas com dissipação ou termo de damping do tipo localmente distribuído, consideram funções não negativas ou seja, $\lambda(x) \geq 0$ para quase todo x no domínio. Entretanto, mostraremos a seguir que, para o problema de KdV-Burgers considerado aqui, esta exigência não se faz necessária, ou seja, será permitido à função λ assumir valores negativos em subconjuntos de medida positiva de \mathbb{R} . Neste caso, diremos que o termo dissipativo ou de damping é *indefinido*. Não existem muitos trabalhos na literatura que tratam problemas de evolução com termo de damping (ou dissipação) do tipo indefinido, e dentre eles, gostaríamos de citar [51] para um sistema de Bresse, [42] para um sistema viscoelástico com memória e [43] para um sistema de Timoshenko.

Consideremos então o problema linear homogêneo

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} - u_{xx} + \lambda u = 0 & , \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) & , \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.2.26)$$

com $\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$. Seja u uma solução forte, referente ao dado inicial u_0 . Observamos que o

mesmo pode ser obtido para soluções mild utilizando argumentos de densidade. Composto então a equação (3.2.26) com u e integrando por partes em x obtemos

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 = - \int_{\mathbf{R}} \lambda(x) |u(t, x)|^2 dx, \quad t \geq 0. \quad (3.2.27)$$

Suponhamos então que existam $\lambda_0 > 0$ constante positiva e $\lambda_1 \in L^p(\mathbf{R})$, para algum $1 \leq p < \infty$, tais que

$$\lambda(x) \geq \lambda_0 + \lambda_1(x), \quad \text{para quase todo } x \in \mathbf{R}.$$

Logo, estimamos a integral do lado direito de (3.2.27) como segue

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbf{R}} \lambda(x) |u(t, x)|^2 dx &\leq -\lambda_0 \int_{\mathbf{R}} |u(t, x)|^2 dx - \int_{\mathbf{R}} \lambda_1(x) |u(t, x)|^2 dx \\ &\leq -\lambda_0 \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \|\lambda_1\|_{L^p(\mathbf{R})} \|u(t)\|_{L^{2q}(\mathbf{R})}^2 \\ &\leq -\lambda_0 \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \|\lambda_1\|_{L^p(\mathbf{R})} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{2/q} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R})}^{2/p}, \end{aligned}$$

onde q verifica $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Com isso, aplicamos as desigualdades de Hölder e Young, a fim de obter

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbf{R}} \lambda(x) |u(t, x)|^2 dx &\leq -\lambda_0 \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + 2^{1/p} \|\lambda_1\|_{L^p(\mathbf{R})} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{\frac{2p-1}{p}} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{1/p} \\ &\leq -\lambda_0 \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \frac{2p-1}{2p} \left[\frac{1}{\varepsilon} \|\lambda_1\|_{L^p(\mathbf{R})} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{\frac{2p-1}{p}} \right]^{\frac{2p}{2p-1}} \\ &\quad + \frac{1}{2p} \left[\varepsilon 2^{1/p} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{1/p} \right]^{2p}, \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

onde $\varepsilon > 0$ é um número a ser escolhido.

Combinando então (3.2.27) e (3.2.28), e escolhendo $\varepsilon > 0$ tal que $2\varepsilon^{2p} = p$, concluímos

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 \leq \left[-\lambda_0 + \frac{2p-1}{2p} \left(\frac{2}{p} \right)^{\frac{1}{2p-1}} \|\lambda_1\|_{L^p(\mathbf{R})}^{\frac{2p}{2p-1}} \right] \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2.$$

Assim, supondo então que λ_0 e λ_1 satisfazem a relação

$$\lambda' := \lambda_0 - c_p \|\lambda_1\|_{L^p(\mathbf{R})}^{\frac{2p}{2p-1}},$$

onde $c_p := \frac{2p-1}{2p} \left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{2p-1}}$, concluímos

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 \leq -2\lambda' \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2, \quad t \geq 0.$$

Decorre desta última estimativa que a solução u satisfaz

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} e^{-\lambda' t}, \quad t \geq 0,$$

provando assim o decaimento exponencial. Resumiremos este resultado na seguinte proposição.

Proposição 3.3. *Seja $\lambda \in L^\infty(\mathbf{R})$. Suponhamos que existam $\lambda_0 > 0$ e $\lambda_1 \in L^p(\mathbf{R})$, para algum $1 \leq p < \infty$, tais que as seguintes relações se verificam*

$$(i) \quad \lambda(x) \geq \lambda_0 + \lambda_1(x), \text{ para quase todo } x \in \mathbf{R};$$

$$(ii) \quad \lambda_0 > c_p \|\lambda_1\|_{L^p(\mathbf{R})}^{\frac{2p}{2p-1}},$$

onde $c_p := \frac{2p-1}{2p} \left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{2p-1}}$. Então, para cada $u_0 \in L^2(\mathbf{R})$, a respectiva solução mild u de (3.2.26) satisfaz

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} e^{-\lambda' t}, \quad t \geq 0, \quad (3.2.29)$$

onde $\lambda' := \lambda_0 - c_p \|\lambda_1\|_{L^p(\mathbf{R})}^{\frac{2p}{2p-1}} > 0$.

O resultado anterior mostra que a função localizadora λ no termo dissipativo λu do problema linear homogênea (3.2.26) não precisa ter sinal, ou seja, λ pode assumir valores negativos, caracterizando-se assim λu como um damping do tipo indefinido.

Exemplo 3.2. Consideremos $\lambda_0, R > 0$ e $\lambda \in L^\infty(\mathbf{R})$ dada por

$$\lambda(x) = \begin{cases} \lambda_0 & , |x| \geq R, \\ -\lambda_0 & , |x| < R, \end{cases}$$

como mostra a Figura 3.1. A fim de aplicarmos a Proposição 3.3, consideremos $\lambda_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

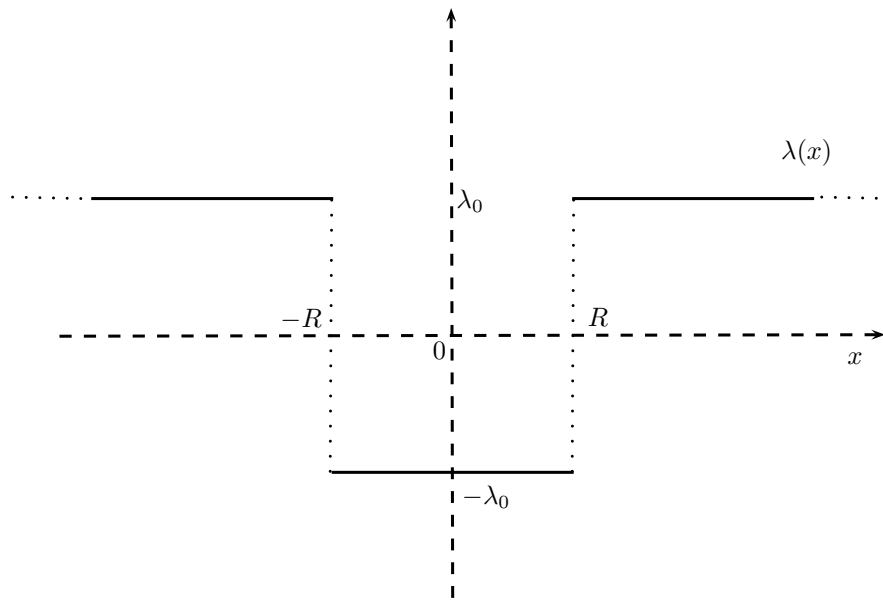


Figura 3.1: Gráfico de λ .

dada por

$$\lambda_1(x) = \begin{cases} 0 & , |x| \geq R, \\ -\alpha & , |x| < R, \end{cases}$$

onde $\alpha > 0$ é um número positivo a ser determinado. Observe que, neste caso, temos $\lambda_1 \in L^p(\mathbb{R})$, com $\|\lambda_1\|_{L^p(\mathbb{R})} = \alpha(2R)^{1/p}$, para $p \in [1, \infty[$. Assim, temos

$$\lambda(x) \geq \lambda_0 + \lambda_1(x), \text{ quase sempre em } \mathbb{R} \iff 2\lambda_0 \leq \alpha.$$

e também

$$\|\lambda_1\|_{L^p(\mathbb{R})} < \left(\frac{\lambda_0}{c_p}\right)^{1-\frac{1}{2p}} \iff \alpha^p < \frac{1}{2R} \left(\frac{\lambda_0}{c_p}\right)^{p-1/2}.$$

Logo, podemos aplicar a Proposição 3.3 bastando para isso escolhermos, por exemplo, $\alpha = 2\lambda_0$ de modo que a seguinte relação se verifique

$$2^{p+1} c_p^{p-1/2} \lambda_0^{1/2} R < 1.$$

Observação 3.3. O exemplo acima, e mais especificamente a última desigualdade, mostra que o mecanismo de dissipação, ou *damping*, pode ser inativo em subconjuntos arbitrariamente

grandes do domínio. De outra forma, podemos considerar funções localizadoras para o termo dissipativo, que podem assumir valores negativos em subconjuntos arbitrariamente grandes de \mathbb{R} .

Na seção seguinte veremos como os resultados de existência, unicidade e dependência contínua para o problema linear não homogêneo (3.2.1) juntamente com um argumento de ponto fixo resultam numa importante e eficiente ferramenta para a obtenção de soluções do problema não linear (3.1.1). Mais a frente, estabeleceremos também resultados que garantam o decaimento exponencial das soluções do problema não linear (3.1.1).

3.3 Existência, Unicidade e Dependência Contínua de Soluções

Nesta seção, voltamos nossa atenção ao seguinte problema de KdV-Burgers

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} - u_{xx} + uu_x + \lambda u = 0, & (t, x) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.3.1)$$

onde $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada.

Inspirados pelo caso linear, estudado na seção anterior, para cada $T > 0$, definimos o espaço de Banach

$$\mathcal{B}_{0,T} := C([0, T]; L^2(\mathbb{R})) \cap L^2(0, T; H^1(\mathbb{R})),$$

munido da norma

$$\|u\|_{\mathcal{B}_{0,T}} := \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\{ \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |u_x(t, x)|^2 dx dt \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad u \in \mathcal{B}_{0,T}.$$

Observação 3.4. Decorre da Proposição 3.1 que se u é uma solução do problema linear não

homogêneo (3.2.1) então temos

$$\|u\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \leq c_T \left\{ \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\mathbb{R}))} \right\}, \quad (3.3.2)$$

onde $c_T := e^{\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R})}T} (2 + 2e^{2\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R})}T})^{1/2}$.

Considerando a notação da seção anterior, para $\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$, seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ o semigrupo fortemente contínuo em $L^2(\mathbb{R})$ gerado pelo operador \mathcal{A}_λ .

Definição 3.1. Dado $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, diremos que uma função $u \in \mathcal{B}_{0,T}$ é uma **solução mild local** de (3.3.1) se u satisfaz a seguinte identidade

$$u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s)uu_x(s)ds, \quad t \in [0, T]. \quad (3.3.3)$$

Diremos ainda que uma função $u : [0, \infty[\rightarrow L^2(\mathbb{R})$ é uma **solução mild global** de (3.3.1) se, para cada $T > 0$, a restrição de u ao intervalo $[0, T]$ é uma solução mild local de (3.3.1).

É importante observar aqui que pela Proposição 2.3 temos $H^1(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$ sendo esta imersão contínua. Além disso, temos

$$\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|w\|_{H^1(\mathbb{R})}, \quad w \in H^1(\mathbb{R}).$$

Logo, para cada $u \in \mathcal{B}_{0,T}$ temos $uu_x(t) \in L^2(\mathbb{R})$, para quase todo $t \in [0, T]$. Em verdade, temos o seguinte resultado.

Lema 3.1. Para cada $u \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}))$ temos que $\mathcal{M}u := uu_x \in L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}))$. Mais ainda, o operador $\mathcal{M} : L^2(0, T; H^1(\mathbb{R})) \rightarrow L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}))$ assim definido satisfaz

$$\|\mathcal{M}u\|_{L^1(0,T;L^2(\mathbb{R}))} \leq \|u\|_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}))}^2, \quad u \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R})). \quad (3.3.4)$$

Além disso, se $u, v \in \mathcal{B}_{0,T}$ então

$$\|\mathcal{M}u - \mathcal{M}v\|_{L^1(0,T;L^2(\mathbb{R}))} \leq \sqrt{2}T^{1/4}(\|u\|_{\mathcal{B}_{0,T}} + \|v\|_{\mathcal{B}_{0,T}}) \|u - v\|_{\mathcal{B}_{0,T}}. \quad (3.3.5)$$

Demonstração. Seja $u \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}))$. Segue da imersão contínua $H^1(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$ que

$$\begin{aligned} \|uu_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

para quase todo $t \in [0, T]$. Logo, integrando (3.3.6) concluímos que $\mathcal{M}u = uu_x \in L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}))$ e vale a desigualdade (3.3.4). Agora, para quaisquer $u, v \in \mathcal{B}_{0,T}$ temos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}u(t) - \mathcal{M}v(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \|uu_x(t) - vv_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \|u(u_x - v_x)(t) + (u - v)v_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|u_x(t) - v_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|u(t) - v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|v_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \sqrt{2} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \|u_x(t) - v_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\quad + \sqrt{2} \|u(t) - v(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \|u_x(t) - v_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \|v_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

para quase todo $t \in [0, T]$. Integrando de 0 a T esta última desigualdade obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^T \|\mathcal{M}u(t) - \mathcal{M}v(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} dt \\ &\leq \sqrt{2} \int_0^T \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \|u_x(t) - v_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} dt \\ &\quad + \sqrt{2} \int_0^T \|u(t) - v(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \|u_x(t) - v_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \|v_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} dt \\ &\leq \sqrt{2} \left\{ \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \right\}^{1/2} \int_0^T \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \|u_x(t) - v_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} dt \\ &\quad + \sqrt{2} \left\{ \sup_{t \in [0, T]} \|u(t) - v(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \right\}^{1/2} \int_0^T \|u_x(t) - v_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2} \|v_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} dt. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Agora, utilizando a desigualdade de Hölder (veja Seção 2.1) temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{1/2} \|u_x(t) - v_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} dt \\ \leq T^{1/4} \left\{ \int_0^T \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 dt \right\}^{1/4} \left\{ \int_0^T \|u_x(t) - v_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 dt \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

De maneira análoga obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u_x(t) - v_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{1/2} \|v_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} dt \\ \leq T^{1/4} \left\{ \int_0^T \|u_x(t) - v_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 dt \right\}^{1/4} \left\{ \int_0^T \|v_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 dt \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Combinando então (3.3.7), (3.3.8) e (3.3.9) concluímos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}u - \mathcal{M}v\|_{L^1(0,T;L^2(\mathbf{R}))} \\ \leq \sqrt{2}T^{1/4} \|u\|_{C([0,T];L^2(\mathbf{R}))}^{1/2} \|u_x\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbf{R}))}^{1/2} \|u_x - v_x\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbf{R}))} \\ + \sqrt{2}T^{1/4} \|u - v\|_{C([0,T];L^2(\mathbf{R}))}^{1/2} \|u_x - v_x\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbf{R}))}^{1/2} \|v_x\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbf{R}))}, \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

e o desejado em (3.3.5) segue de (3.3.10) apenas comparando cada termo a direita desta com a expressão da norma em $\mathcal{B}_{0,T}$. \square

Este resultado nos permite concluir que, para cada $T > 0$, a restrição do operador \mathcal{M} ao conjunto $\mathcal{B}_{0,T}$ é localmente Lipschitz. Com isto, seguindo as ideias contidas em [47], estabeleceremos o seguinte resultado de existência local de soluções para o problema não linear (3.3.1).

Teorema 3.5. *Dados $u_0 \in L^2(\mathbf{R})$ e $\lambda \in L^\infty(\mathbf{R})$, existe $T > 0$ suficientemente pequeno para o qual o problema não linear (3.3.1) admite uma única solução mild u no intervalo $[0, T]$. Além, disso u satisfaz a identidade*

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} |u_x(s, x)|^2 dx ds + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \lambda(x) |u(s, x)|^2 dx ds = \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}^2, \quad (3.3.11)$$

para $t \in [0, T]$.

Demonstração. Sejam $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, $\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $T > 0$. Vimos que para cada $u \in \mathcal{B}_{0,T}$ temos $\mathcal{M}u = uu_x \in L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}))$. Logo, pela Proposição 3.1 temos que para cada $u \in \mathcal{B}_{0,T}$ o problema linear

$$\begin{cases} v_t(t) = \mathcal{A}v(t) - \mathcal{M}u(t), & t > 0, \\ v(0) = u_0, \end{cases} \quad (3.3.12)$$

admite uma única solução mild v na classe $\mathcal{B}_{0,T}$ e dada pela expressão

$$v(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s)\mathcal{M}u(s)ds, \quad t \in [0, T].$$

Sendo assim, fica bem definido o operador $\Gamma : \mathcal{B}_{0,T} \rightarrow \mathcal{B}_{0,T}$ que a cada $u \in \mathcal{B}_{0,T}$ associa $\Gamma u = v$, a respectiva solução do problema linear acima. Além disso, utilizando a estimativa (3.3.2) juntamente com (3.3.5) no Lema 3.1 temos

$$\|\Gamma u\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \leq c_T \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})} + \sqrt{2}T^{1/4}c_T \|u\|_{\mathcal{B}_{0,T}}^2.$$

Por outro lado, pela linearidade do problema (3.3.12) que define a aplicação Γ segue que se $u, v \in \mathcal{B}_{0,T}$, então $\Gamma u - \Gamma v$ é solução do problema linear não homogêneo (3.2.1) com dado inicial nulo e $f = \mathcal{M}u - \mathcal{M}v$. Logo, aplicando a estimativa (3.3.2) juntamente com o Lema 3.1 concluímos

$$\|\Gamma u - \Gamma v\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \leq \sqrt{2}T^{1/4}c_T \left(\|u\|_{\mathcal{B}_{0,T}} + \|v\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \right) \|u - v\|_{\mathcal{B}_{0,T}}. \quad (3.3.13)$$

Escolhendo então $R = 2 \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$ e $T > 0$ suficientemente pequeno de modo que

$$\frac{1}{2}c_T + \sqrt{2}T^{1/4}c_T R \leq 1,$$

concluímos de (3.3.13) que $\Gamma(B_R(0)) \subset B_R(0)$, onde $B_R(0) = \{u \in \mathcal{B}_{0,T}; \|u\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \leq R\}$ denota

a bola em $\mathcal{B}_{0,T}$ de centro 0 e raio R . Ainda, se escolhermos $T > 0$ de modo que

$$2\sqrt{2}T^{1/4}c_T R < \frac{1}{2},$$

então segue de (3.3.13) que

$$\|\Gamma u - \Gamma v\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \leq \frac{1}{2} \|u - v\|_{\mathcal{B}_{0,T}},$$

para quaisquer $u, v \in B_R(0)$, ou seja, a aplicação Γ é uma contração de $B_R(0)$ em $B_R(0)$. Logo, aplicando o teorema do Ponto Fixo de Banach-Cacciopoli concluímos que existe um único elemento $u \in \mathcal{B}_{0,T}$ tal que $\Gamma u = u$, ou seja, u satisfaz a expressão (3.3.3), provando assim que u é a única solução mild local de (3.3.1) no intervalo $[0, T]$. Resta-nos portanto estabelecer a identidade (3.3.11). Para isso, seja $v_0 \in B_R(0)$ e definamos $v_n = \Gamma v_{n-1}$, para $n \geq 1$. Sendo Γ uma contração de $B_R(0)$ em $B_R(0)$ segue que a sequência $\{v_n\}_{n \geq 1}$ é convergente e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = u, \quad \text{em } \mathcal{B}_{0,T}.$$

Por outro lado, aplicando a identidade (3.2.9) para cada v_n temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|v_n(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \int_0^t \|v_{nx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 ds + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \lambda(x) |v_n(s, x)|^2 dx ds \\ = \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 - \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \mathcal{M} v_{n-1} v_n(s, x) dx ds, \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

para todo $t \in [0, T]$.

Tomando então o limite quando $n \rightarrow \infty$ em (3.3.14), tendo em vista que \mathcal{M} é contínuo, vem que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \int_0^t \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 ds + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \lambda(x) |u(s, x)|^2 dx ds \\ = \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 - \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \mathcal{M} u(s, x) u(s, x) dx ds, \end{aligned}$$

para $t \in [0, T]$. A identidade (3.3.11) segue então bastando para isso provarmos que a última

integral na equação (3.3.14) seja nula. Para isto, utilizamos integração por partes e a Proposição 2.4 de modo que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} \mathcal{M}u(s, x)u(s, x)dx &= \int_{\mathbf{R}} u_x(s, x)u(s, x)^2dx \\ &= \frac{1}{3} \int_{\mathbf{R}} (u(s, x)^3)_x dx \\ &= \frac{1}{3} \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(s, x)^3 \\ &= 0, \end{aligned}$$

ficando assim provado o resultado. \square

Como mencionado antes, as soluções do problema não linear (3.3.1) dadas pelo Teorema 3.5 são locais, ou seja, existem para intervalos de tempo suficientemente pequenos. Veremos, a seguir, que soluções locais podem ser extendidas à soluções globais. Primeiramente, observamos que se $u_1 \in \mathcal{B}_{0, T_1}$ e $u_2 \in \mathcal{B}_{0, T_2}$, $T_1, T_2 > 0$, são soluções mild locais de (3.3.1) com $u_1(T_1) = u_2(0)$ então a função $u : [0, T] \rightarrow L^2(\mathbf{R})$, onde $T = T_1 + T_2$, dada por

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & t \in]0, T_1[, \\ u_2(t - T_1), & t \in]T_1, T[, \end{cases}$$

é também uma solução local de (3.3.1) no intervalo $[0, T]$ com dado inicial $u_1(0)$. Com efeito, não é difícil ver que $u \in \mathcal{B}_{0, T}$ e, para $t \in [0, T_1]$, $u(t)$ é dada pela expressão integral (3.3.3). Portanto, resta-nos provar que u satisfaz a equação integral para $t \in [T_1, T]$. De fato, seja $t \in [T_1, T]$. Fazendo a mudança $\tilde{t} := t - T_1$ temos $\tilde{t} \in [0, T_2]$ e $t = \tilde{t} + T_1$. Logo, utilizando as propriedades do semigrupo obtemos

$$\begin{aligned} S(t)u(0) &- \int_0^t S(t-s)uu_x(s)ds \\ &= S(\tilde{t} + T_1)u_1(0) - \int_0^{\tilde{t}+T_1} S(\tilde{t} + T_1 - s)uu_x(s)ds \\ &= S(\tilde{t}) \left(S(T_1)u_1(0) - \int_0^{T_1} S(T-s)u_1u_{1x}(s)ds \right) - \int_{T_1}^{T_1+\tilde{t}} S(\tilde{t} + T_1 - s)uu_x(s)ds. \end{aligned}$$

A segunda integral no lado direito desta última identidade é calculada fazendo-se a mudança de variáveis $r := s - T_1$ temos modo que $r \in [0, \tilde{t}]$ e então

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{T_1+\tilde{t}} S(\tilde{t} + T_1 - s)u(s)u_x(s)ds &= \int_0^{\tilde{t}} S(\tilde{t} - r)uu_x(r + T_1)dr \\ &= \int_0^{\tilde{t}} S(\tilde{t} - r)u_2u_{2x}(r)dr. \end{aligned}$$

Desta forma temos

$$\begin{aligned} S(t)u(0) - \int_0^t S(t-s)uu_x(s)ds \\ &= S(\tilde{t})u_2(0) - \int_0^{\tilde{t}} S(\tilde{t}-r)u_2u_{2x}(r)dr \\ &= u_2(\tilde{t}), \end{aligned}$$

onde usamos a expressão integral para u_2 e a hipótese de que

$$\begin{aligned} u_2(0) &= u_1(T_1) \\ &= S(T_1)u_1(0) - \int_0^{T_1} S(T_1-s)u_1u_{1x}(s)ds. \end{aligned}$$

Por fim, concluimos o desejado apenas lembrando que $\tilde{t} = t - T_1$ e a definição de u no intervalo $[T_1, T]$.

Este argumento nos permite estender uma solução local até um intervalo maximal. Com efeito, sejam $\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. Aplicando o Teorema 3.5 obtemos uma solução $u_1 \in \mathcal{B}_{0, T_1}$, para algum $T_1 > 0$. Agora, como $u_1(T_1) \in L^2(\mathbb{R})$, aplicamos novamente o Teorema 3.5 de modo a obter uma solução $\tilde{u}_1 \in \mathcal{B}_{0, \tilde{T}_1}$, para algum $\tilde{T}_1 > 0$, do problema (3.3.1) com dado inicial $u_1(T_1)$. Logo, do provado antes temos que $u_2 \in \mathcal{B}_{T_2}$, $T_2 := T_1 + \tilde{T}_1$, dada por

$$u_2(t) = \begin{cases} u_1(t), & t \in [0, T_1] \\ \tilde{u}_1(t - T_1), & t \in [T_1, T_2] \end{cases},$$

é solução do problema não linear (3.3.1) no intervalo $[0, T_2]$ com dado inicial u_0 . Prosseguindo

com o raciocínio, obteremos uma solução $u \in \mathcal{B}_{0,T}$, para todo $T < T_{max} \leq \infty$, do problema (3.3.1) e dado inicial u_0 . Portanto, a fim de concluirmos que a solução u é global devemos provar que $T_{max} = \infty$. Para isto, precisaremos do seguinte resultado de *alternativa de blow-up*.

Proposição 3.4. *Sejam $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ e $u \in \mathcal{B}_T$, para todo $T < T_{max}$, a respectiva solução do problema (3.3.1) em seu intervalo maximal de definição. Então uma, e apenas uma, das alternativas é válida:*

(i) $T_{max} = \infty$;

(ii) $T_{max} < \infty$ e, neste caso, $\lim_{t \uparrow T_{max}} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \infty$.

Demonstração. Suponhamos que $T_{max} < \infty$ e que $\lim_{t \uparrow T_{max}} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$, ou seja, existe $M > 0$ tal que

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq M, \quad \text{para todo } t \in [0, T_{max}[.$$

Seja $\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset [0, T_{max}[$ tal que $t_j \rightarrow T_{max}$, quando $j \rightarrow \infty$. Note que, em particular, $\|u(t_j)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq M$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Levando em consideração a demonstração do Teorema 3.5, segue que escolhendo $T > 0$ tal que as seguintes desigualdades se verifiquem

$$\frac{1}{2}c_T + \sqrt{2}T^{1/4}c_TM \leq 1, \quad 2\sqrt{2}T^{1/4}c_TM < \frac{1}{2},$$

segue, que para cada $j \in \mathbb{N}$, existe uma solução $v_j \in \mathcal{B}_T$ do problema não linear (3.3.1) com dado inicial $u(t_j)$. Assim, temos que para cada $j \in \mathbb{N}$, a função $\tilde{u}_j \in \mathcal{B}_{t_j+T}$ dada por

$$\tilde{u}_j(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0, t_j], \\ v_j(t - t_j), & t \in [t_j, t_j + T], \end{cases}$$

é solução do problema não linear (3.3.1) no intervalo $[0, t_j + T]$ e dado inicial u_0 . Observe que $\tilde{u}_j = u$ sempre que $t_j + T < T_{max}$. Logo, para j suficientemente grande tal que $T_{max} - t_j < T$ segue que a solução \tilde{u}_j de (3.3.1) e dado inicial u_0 esta definida em $[0, t_j + T]$, com $T_{max} < t_j + T$, o que contradiz a definição de T_{max} . Assim sendo, concluímos se $T_{max} < \infty$ então $\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow \infty$ quando $t \uparrow T_{max}$. \square

Decorre do resultado acima que, para provarmos que as soluções de (3.3.1), definidas em intervalos maximais, são globais é suficiente provarmos que estas “não explodem em tempo finito”, em outras palavras, se $u \in \mathcal{B}_{0,T}$, para todo $T < T_{max}$, é solução de (3.3.1) com dado inicial u_0 , então para todo $T > 0$ existe $M > 0$, podendo depender de T e u_0 , tal que $\|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq M$, para todo $t \in [0, \min\{T_{max}, T\}]$.

Tendo em vista o exposto antes, a existência, unicidade e a dependência contínua com relação aos dados iniciais de soluções mild globais, para o problema não linear (3.3.1) são apresentados no seguinte resultado.

Teorema 3.6. *Seja $\lambda \in L^\infty(\mathbf{R})$. Para cada $u_0 \in L^2(\mathbf{R})$, o problema (3.3.1) admite uma única solução mild global u . Além disso, a seguinte identidade é satisfeita*

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \int_0^t \|u_x(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 ds + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \lambda(x) |u(s,x)|^2 dx ds = \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}^2, \quad t \geq 0. \quad (3.3.15)$$

Mais ainda, para cada $T > 0$, existe uma função contínua $\beta_{0,T} : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ contínua e não decrescente tal que o operador solução $\mathcal{A}_0 : L^2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{B}_{0,T}$, que a cada elemento de $L^2(\mathbf{R})$ associa a respectiva solução mild de (3.3.1), satisfaz

$$\|\mathcal{A}_0 u_0 - \mathcal{A}_0 v_0\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \leq \beta_{0,T} (\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|v_0\|_{L^2(\mathbf{R})}) \|u_0 - v_0\|_{L^2(\mathbf{R})},$$

para quaisquer $u_0, v_0 \in L^2(\mathbf{R})$.

Demonstração. De acordo com o Teorema 3.5, para cada $u_0 \in L^2(\mathbf{R})$, o problema (3.3.1) admite uma única solução mild u na classe $\mathcal{B}_{0,T}$, para todo $T < T_{max} \leq \infty$. Além disso, esta solução satisfaz (3.3.15) para todo $t \in [0, T_{max}[$. Assim, para cada $t < T_{max}$, partimos da identidade (3.3.15) e procedemos como para o caso linear não homogêneo (veja Seção 3.2) a fim de obtermos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \int_0^t \|u_x(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 ds \\ \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + 2 \|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \int_0^t \frac{1}{2} \|u(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \int_0^s \|u_x(r)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 dr ds. \end{aligned}$$

Logo, aplicando a desigualdade de Gronwall–Bellman (veja Proposição 2.2) concluimos

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \int_0^t \|u_x(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 ds \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 e^{2\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}t},$$

donde segue, em particular, que

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} e^{\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}t}, \quad t \in [0, T_{max}]. \quad (3.3.16)$$

A desigualdade acima, juntamente com a Proposição 3.4 implicam que $T_{max} = \infty$, ou seja, a solução mild u é global. Além disso, temos

$$\|u\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \leq \sqrt{2} e^{\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}T} \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}, \quad T > 0 \quad (3.3.17)$$

Para a segunda parte, sejam $T > 0$, $u_0, v_0 \in L^2(\mathbf{R})$ e $u = \mathcal{A}_0 u_0$ e $v = \mathcal{A}_0 v_0$ as respectivas soluções de (3.3.1). Definamos $n = \lfloor T/\theta \rfloor$, ou seja, o maior inteiro menor que T/θ , com $\theta > 0$ suficientemente pequeno a ser determinado mais a frente. Segue de (3.3.17) que

$$\|u\|_{[0,\theta]} \leq c_\theta \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} \quad (\text{resp. } \|v\|_{[0,\theta]} \leq c_\theta \|v_0\|_{L^2(\mathbf{R})}), \quad (3.3.18)$$

onde $c_\theta = \sqrt{2} e^{\theta\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}}$ e $\|\cdot\|_{[0,\theta]}$ denota a norma no espaço $\mathcal{B}_{0,\theta}$.

Como argumentamos na demonstração da Teorema 3.5, a diferença $u - v$ é solução do problema linear (3.2.1) com dado inicial $u_0 - v_0$ e não homogeneidade $\mathcal{M}u - \mathcal{M}v$. Assim, aplicando a desigualdade (3.3.2) à diferença $u - v$ obtemos

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{[0,\theta]} &\leq c_\theta \left\{ \|u_0 - v_0\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|\mathcal{M}u - \mathcal{M}v\|_{L^1(0,\theta;L^2(\mathbf{R}))} \right\} \\ &\leq c_\theta \|u_0 - v_0\|_{L^2(\mathbf{R})} + \sqrt{2}\theta^{1/4} c_\theta^2 \left\{ \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|v_0\|_{L^2(\mathbf{R})} \right\} \|u - v\|_{[0,\theta]}, \end{aligned}$$

onde $c_\theta = e^{\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\theta} (2 + 2e^{2\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\theta})^{1/2}$, e na última desigualdade utilizamos (3.3.5) juntamente

com as estimativas (3.3.18). Logo, se θ verifica

$$\sqrt{2}\theta^{1/4}c_\theta^2 \left\{ \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|v_0\|_{L^2(\mathbf{R})} \right\} \leq \frac{1}{2},$$

então concluímos

$$\|u - v\|_{[0,\theta]} \leq 2c_\theta \|u_0 - v_0\|_{L^2(\mathbf{R})}.$$

De maneira análoga, temos

$$\|u\|_{[k\theta,(k+1)\theta]} \leq c_\theta \|u(k\theta)\|_{L^2(\mathbf{R})}, \quad (\text{resp. } \|v\|_{[k\theta,(k+1)\theta]} \leq c_\theta \|v(k\theta)\|_{L^2(\mathbf{R})}), \quad t \in [0, T], \quad (3.3.19)$$

onde $\|\cdot\|_{[k\theta,(k+1)\theta]}$ denota a norma em

$$\mathcal{B}_{0,[k\theta,(k+1)\theta]} = C([k\theta, (k+1)\theta]; L^2(\mathbf{R})) \cap L^2(k\theta, (k+1)\theta; H^1(\mathbf{R})), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Logo, tendo em vista as estimativas (3.3.19), vem que para cada $k = 0, 1, \dots, n-1$ temos

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{[k\theta,(k+1)\theta]} &\leq c_\theta \|u(k\theta) - v(k\theta)\|_{L^2(\mathbf{R})} \\ &\quad + \sqrt{2}\theta^{1/4}c_\theta^2 \left\{ \|u(k\theta)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|v(k\theta)\|_{L^2(\mathbf{R})} \right\} \|u - v\|_{[k\theta,(k+1)\theta]} \\ &\leq c_\theta \|u(k\theta) - v(k\theta)\|_{L^2(\mathbf{R})} \\ &\quad + \sqrt{2}\theta^{1/4}c_\theta^2 e^{\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}T} \left\{ \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|v_0\|_{L^2(\mathbf{R})} \right\} \|u - v\|_{[k\theta,(k+1)\theta]}, \end{aligned}$$

onde utilizamos (3.3.16) para a última desigualdade. Como $c_\theta < c_T$, segue que para θ verificando

$$\sqrt{2}\theta^{1/4}c_T^2 e^{\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}T} \left\{ \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|v_0\|_{L^2(\mathbf{R})} \right\} \leq \frac{1}{2}, \quad (3.3.20)$$

concluímos

$$\|u - v\|_{[k\theta,(k+1)\theta]} \leq 2c_\theta \|u(k\theta) - v(k\theta)\|_{L^2(\mathbf{R})}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

A desigualdade (3.3.20) é satisfeita escolhendo, por exemplo, θ da forma

$$\theta := \left\{ \frac{1/4}{\sqrt{2}c_T^2 e^{\|\lambda\|_{L^\infty} T} \left\{ \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|v_0\|_{L^2(\mathbf{R})} \right\}} \right\}^4.$$

Observe que a escolha de θ depende pois, dentre outros, $\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|v_0\|_{L^2(\mathbf{R})}$. Logo escreveremos $\theta = \theta(\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|v_0\|_{L^2(\mathbf{R})}) \geq 0$. Mais geralmente, podemos escrever $\theta = \theta(s)$, $s \geq 0$, $\theta(s) = \left\{ \frac{1/4}{\sqrt{2}c_T^2 e^{\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} T} s} \right\}^4$. Além disso, vemos que se $\lim_{s \rightarrow \infty} \theta(s) = 0$. Desta forma, temos

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{[0,T]} &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \|u - v\|_{[k\theta, (k+1)\theta]} \\ &\leq 2nc_\theta \|u_0 - v_0\|_{L^2(\mathbf{R})} \\ &\leq \frac{2Tc_T}{\theta} \|u_0 - v_0\|_{L^2(\mathbf{R})}. \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

A conclusão do resultado segue da desigualdade (3.3.21) apenas definindo $\beta_{0,T} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ por

$$\beta_{0,T}(s) = \frac{2Tc_T}{\theta(s)}, \quad s \geq 0.$$

Isto encerra a demonstração do teorema. □

Assim como no caso linear, soluções mais regulares para o problema não linear (3.3.1) podem ser obtidas. Nosso próximo objetivo será estabelecer a existência, unicidade e dependência contínua de soluções globais com mais regularidade. Assim sendo, para cada $T > 0$, definimos o espaço de Banach

$$\mathcal{B}_{3,T} := C([0, T]; H^3(\mathbf{R})) \cap L^2(0, T; H^4(\mathbf{R})),$$

munido da norma

$$\|u\|_{\mathcal{B}_{3,T}} := \|u\|_{C([0,T]; H^3(\mathbf{R}))} + \|u_{xxxx}\|_{L^2(0,T; L^2(\mathbf{R}))}, \quad u \in \mathcal{B}_{3,T}.$$

Definição 3.2. *Sejam $\lambda \in L^\infty(\mathbf{R})$, $u_0 \in H^3(\mathbf{R})$ e u a respectiva solução mild global de (3.3.1). Diremos que u é uma **solução regular** de (3.3.1) se, para cada $T > 0$, a restrição de u ao*

intervalo $[0, T]$ pertence a $\mathcal{B}_{3,T}$.

Antes de estabelecermos a existência de soluções regulares de (3.3.1), observamos que se u é uma solução regular então, derivando a equação (3.3.1) com relação a variável t vemos que $v = u_t$ é solução do seguinte problema

$$\begin{cases} v_t + v_{xxx} - v_{xx} + \lambda v = -(\frac{1}{2}u^2)_{xt} & , x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ v(0, x) = v_0(x) & , x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.3.22)$$

onde $v_0 := -u_{0xxx} + u_{0xx} - \lambda u_0 - u_0 u_{0x} \in L^2(\mathbb{R})$. Desta forma, ao buscarmos soluções regulares do problema não linear de (3.3.1), concluiremos também que a derivada temporal destas são soluções do problema linear não homogêneo (3.3.22). Tendo em vista a não homogeneidade que aparece no problema (3.3.22) temos o seguinte resultado

Lema 3.2. *Seja $T > 0$. Para quaisquer $u, v \in \mathcal{B}_{3,T}$ tais que $u_t, v_t \in \mathcal{B}_{0,T}$ temos*

$$\frac{1}{2}(uv)_x \in W^{1,1}(0, T; L^2(\mathbb{R})) \quad e \quad \frac{1}{2}(uv)_{xx} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R})).$$

Além disso, as seguintes estimativas se verificam

$$\left\| \frac{1}{2}(uv)_x \right\|_{W^{1,1}(0, T; L^2(\mathbb{R}))} \leq \sqrt{2}T^{1/4} \left\{ \|u\|_{\mathcal{B}_{3,T}} \|v\|_{\mathcal{B}_{3,T}} + \|u\|_{\mathcal{B}_{3,T}} \|v_t\|_{\mathcal{B}_{0,T}} + \|u_t\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \|v\|_{\mathcal{B}_{3,T}} \right\}, \quad (3.3.23)$$

$$\left\| \frac{1}{2}(uv)_{xx} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}))} \leq 2^{3/2}T^{1/2} \|u\|_{\mathcal{B}_{3,T}} \|v\|_{\mathcal{B}_{3,T}}. \quad (3.3.24)$$

Demonstração. Para cada $T > 0$ fixo, sejam $u, v \in \mathcal{B}_{3,T}$ tais que $u_t, v_t \in \mathcal{B}_{0,T}$. Então, para cada

$t \in [0, T]$ temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2}(uv)_x(t) \right\|_{L^2(\mathbf{R})} &\leq \frac{1}{2} \left\{ \|(u_x v)(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|(uv_x)(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \right\} \\ &\leq \frac{1}{2} \left\{ \|v(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \|v_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \right\} \\ &\leq 2^{-1/2} \left\{ \|v(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{1/2} \|v_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{1/2} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \right. \\ &\quad \left. + \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{1/2} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{1/2} \|v_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \right\}. \end{aligned}$$

Integrando em $[0, T]$ obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left\| \frac{1}{2}(uv)_x(t) \right\|_{L^2(\mathbf{R})} dt \\ &\leq 2^{-1/2} \left\{ \int_0^T \|v(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{1/2} \|v_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{1/2} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{1/2} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{1/2} \|v_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} dt \right\} \\ &\leq 2^{-1/2} T^{1/4} \left[\left(\sup_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^T \|v_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 dt \right\}^{\frac{1}{4}} \left\{ \int_0^T \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^T \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 dt \right\}^{\frac{1}{4}} \left\{ \int_0^T \|v_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

donde segue que

$$\left\| \frac{1}{2}(uv)_x \right\|_{L^1(0, T; L^2(\mathbf{R}))} \leq 2^{1/2} T^{1/4} \|u\|_{\mathcal{B}_{3, T}} \|v\|_{\mathcal{B}_{3, T}} \quad (3.3.25)$$

Agora, como

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2}(uv)_x = \frac{1}{2}(u_t v)_x + \frac{1}{2}(uv_t)_x,$$

segue que procedendo como antes de modo a concluir

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2}(uv)_{tx} \right\|_{L^1(0, T; L^2(\mathbf{R}))} &\leq \left\| \frac{1}{2}(u_t v)_x \right\|_{L^1(0, T; L^2(\mathbf{R}))} + \left\| \frac{1}{2}(uv_t)_x \right\|_{L^1(0, T; L^2(\mathbf{R}))} \\ &\leq 2^{1/2} T^{1/4} \left\{ \|u_t\|_{\mathcal{B}_{0, T}} \|v\|_{\mathcal{B}_{3, T}} + \|u\|_{\mathcal{B}_{3, T}} \|v_t\|_{\mathcal{B}_{0, T}} \right\} \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

Concluimos, portanto, que $\frac{1}{2}(uv)_x \in W^{1,1}(0, T; L^2(\mathbb{R}))$ e a desigualdade (3.3.23) segue da combinação de (3.3.25) e (3.3.26).

Resta-nos provar que $\frac{1}{2}(uv)_{xx} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}))$ e a estimativa (3.3.24). Primeiramente, observemos que

$$\frac{1}{2}(uv)_{xx} = \frac{1}{2}[u_{xx}v + uv_{xx} + 2u_xv_x]. \quad (3.3.27)$$

Por outro lado, como $u, v \in C([0, T]; H^3(\mathbb{R}))$ segue que $u, v \in C([0, T]; H^i(\mathbb{R}))$ para $i = 0, 1, 2, 3$. Logo, temos $\frac{1}{2}(uv)_{xx} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}))$. Para obter (3.3.24), calcularemos a norma em $L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}))$ de cada termo em (3.3.27). Primeiramente, temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2}(u_{xx}v)(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\leq \frac{1}{4} \|v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|u_{xx}(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|v_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u(t)\|_{H^3(\mathbb{R})}^2 \end{aligned}$$

Integrando esta última desigualdade em $[0, T]$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\| \frac{1}{2}(u_{xx}v)(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt &\leq \frac{1}{2} \int_0^T \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|v_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u(t)\|_{H^3(\mathbb{R})}^2 dt \\ &\leq \frac{1}{2} T \left\{ \sup_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{H^3(\mathbb{R})} \right\}^2 \left\{ \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{H^3(\mathbb{R})} \right\}^2 \end{aligned}$$

donde concluimos

$$\left\| \frac{1}{2}(u_{xx}v) \right\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}))} \leq 2^{-1/2} T^{1/2} \|u\|_{\mathcal{B}_{3, T}} \|v\|_{\mathcal{B}_{3, T}} \quad (3.3.28)$$

De maneira análoga temos

$$\left\| \frac{1}{2}(uv_{xx}) \right\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}))} \leq 2^{-1/2} T^{1/2} \|v\|_{\mathcal{B}_{3, T}} \|u\|_{\mathcal{B}_{3, T}} \quad (3.3.29)$$

Por último, temos

$$\begin{aligned} \|(u_xv_x)(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\leq \|u_x(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|v_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &\leq 2 \left\{ \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{H^3(\mathbb{R})} \right\}^2 \left\{ \sup_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{H^3(\mathbb{R})} \right\}^2 \end{aligned}$$

donde segue por integração em $[0, T]$ que

$$\|u_x v_x\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbf{R}))} \leq 2^{1/2} T^{1/2} \|u\|_{\mathcal{B}_{3,T}} \|v\|_{\mathcal{B}_{3,T}} \quad (3.3.30)$$

A desigualdade (3.3.24) segue, pois, combinando (3.3.28), (3.3.29) e (3.3.30). \square

Estamos aptos a estabelecer o seguinte resultado de existência, e unicidade local de soluções regulares de (3.3.1).

Teorema 3.7. *Seja $T > 0$ e $\lambda \in H^1(\mathbf{R})$. Para cada $u_0 \in H^3(\mathbf{R})$ existe uma única solução regular $u \in \mathcal{B}_{3,T}$ do problema (3.3.1) tal que $u_t \in \mathcal{B}_{0,T}$. Além disso, existe uma função contínua e não decrescente $\beta_{3,T} : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ tal que*

$$\|u\|_{\mathcal{B}_{3,T}} \leq \beta_{3,T}(\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}) \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})}. \quad (3.3.31)$$

Demonstração. Sejam $T > 0$ fixo, $\lambda \in H^1(\mathbf{R})$ e $u_0 \in H^3(\mathbf{R})$. Para $0 < \theta < T$ e $R > 0$ definimos o conjunto

$$S_{\theta,R} := \left\{ u \in \mathcal{B}_{3,\theta}; u_t \in \mathcal{B}_{0,\theta} \text{ e } \|u\|_{\mathcal{B}_{3,\theta}} + \|u_t\|_{\mathcal{B}_{0,\theta}} < R \right\}.$$

Definimos também $\mathcal{Y}_{3,\theta} := \mathcal{B}_{3,\theta} \times \mathcal{B}_{0,\theta}$ munido da topologia

$$\|(u, v)\|_{\mathcal{Y}_{3,\theta}} = \|u\|_{\mathcal{B}_{3,\theta}} + \|v\|_{\mathcal{B}_{0,\theta}}, \quad (u, v) \in \mathcal{Y}_{3,\theta}.$$

Podemos considerar $S_{\theta,R}$ como subconjunto de $\mathcal{Y}_{3,\theta}$ fazendo uso da seguinte aplicação

$$u \in S_{\theta,R} \mapsto \vec{u} := (u, u_t) \in \mathcal{Y}_{3,\theta}.$$

Além disso, podemos ver que $\vec{S}_{\theta,R} := \{\vec{u}; u \in S_{\theta,R}\} \subset \bar{B}_R(0)$, onde $\bar{B}_R(0)$ denota a bola fechada de centro zero e raio R em $\mathcal{Y}_{3,\theta}$. Temos ainda que $\vec{S}_{\theta,R}$ é fechado. Com efeito, seja $(u, v) \in \mathcal{Y}_{3,\theta}$ tal que existe $\{\vec{u}_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \vec{S}_{\theta,R}$ de modo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{u}_n = (u, v), \quad \text{em } \mathcal{Y}_{3,\theta}. \quad (3.3.32)$$

Pondo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\vec{u}_n = (u_n, u_{nt})$ com $u_n \in \mathcal{B}_{3,\theta}$ e $u_{nt} \in \mathcal{B}_{0,\theta}$. Ainda,

$$\|u_n\|_{\mathcal{B}_{3,\theta}} + \|u_{nt}\|_{\mathcal{B}_{0,\theta}} \leq R. \quad (3.3.33)$$

Segue da convergência (3.3.32) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(u, v) - \vec{u}_n\|_{\mathcal{Y}_{3,\theta}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_{\mathcal{B}_{3,\theta}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \|v - u_{nt}\|_{\mathcal{B}_{0,\theta}},$$

ou seja,

$$u_n \rightarrow u, \text{ em } \mathcal{B}_{3,\theta} \quad e \quad u_{nt} \rightarrow v, \text{ em } \mathcal{B}_{0,\theta} \quad (3.3.34)$$

Segue de (3.3.33) e (3.3.34) que $\|(u, v)\|_{\mathcal{Y}_{3,\theta}} \leq R$. Logo, resta provarmos que $v = u_t$. Segue imediatamente das convergências em (3.3.34) que $u_t = \lim_{n \in \mathbb{N}} u_{nt}$ no sentido distribucional. Portanto, devemos ter $v = u_t$, provando que $\vec{S}_{\theta,R}$ é fechado.

Agora, decorre do Lema 3.2 que, para cada $u \in S_{\theta,R}$, temos $\vec{u} = (u, u_t) \in \vec{S}_{\theta,R}$ com $\frac{1}{2}(u^2)_x \in W^{1,1}(0, \theta; L^2(\mathbb{R}))$ e $\frac{1}{2}(u^2)_{xx} \in L^2(0, \theta; L^2(\mathbb{R}))$. Portanto, segue da Proposição 3.2 que existe um único elemento $v \in \mathcal{B}_{3,\theta}$, com $v_t \in \mathcal{B}_{0,\theta}$, para os quais v e $w = v_t$ são soluções dos respectivos problema

$$\begin{cases} v_t = \mathcal{A}_\lambda v + f \\ v(0) = u_0. \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} w_t = \mathcal{A}_\lambda w + f_t, \\ w(0) = w_0, \end{cases} \quad (3.3.35)$$

onde $f = -\frac{1}{2}(u^2)_x$ e $w_0 := -u_{0xxx} + u_{0xx} - \lambda u_0 + f(0)$.

Assim, fica bem definida a aplicação

$$u \in S_{\theta,R} \mapsto \Gamma u := \vec{v} = (v, v_t) \in \mathcal{Y}_{3,\theta}$$

que a cada $u \in S_{\theta,R}$ associa o par $(v, v_t) \in \mathcal{Y}_{3,\theta}$, onde v e v_t são as respectivas soluções dos problemas lineares em (3.3.35).

Nosso objetivo é provar que, para valores apropriados de R e θ , a aplicação Γ é uma contração de $S_{\theta,R}$ em si mesma. Para isso, primeiramente observemos que se $u \in S_{\theta,R}$ então, segue da

Proposição 3.2 que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u\|_{\mathcal{Y}_{3,\theta}} &= \|v\|_{\mathcal{B}_{3,\theta}} + \|v_t\|_{\mathcal{B}_{0,\theta}} \\
&\leq c_{3,\theta} \left\{ \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})} + \left\| \frac{1}{2}(u^2)_x \right\|_{W^{1,1}(L^2(0,\theta;L^2(\mathbf{R})))} + \left\| \frac{1}{2}(u^2)_{xx} \right\|_{L^2(0,\theta;L^2(\mathbf{R}))} \right\} \\
&\quad + c_{0,\theta} \left\{ \left\| u_{0xxx} - u_{0xx} + \lambda u_0 + \frac{1}{2}(u(0)^2)_x \right\|_{L^2(\mathbf{R})} + \left\| \frac{1}{2}(u^2)_{tx} \right\|_{L^1(0,\theta;L^2(\mathbf{R}))} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.3.36}$$

Agora, tendo em vista a estimativa

$$\left\| u_{0xxx} - u_{0xx} + \lambda u_0 + \frac{1}{2}(u(0)^2)_x \right\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq (1 + \|\lambda\|_{H^1(\mathbf{R})}) \|u_0\|_{H^3} + \left\| \frac{1}{2}(u^2)_x \right\|_{W^{1,1}(0,\theta;L^2(\mathbf{R}))}$$

e utilizando as estimativas do Lema 3.2, concluimos de (3.3.36) que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u\|_{\mathcal{Y}_{3,\theta}} &\leq (c_{3,\theta} + [1 + \|\lambda\|_{H^1(\mathbf{R})}]c_{0,\theta}) \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})} + (c_{3,\theta} + 2c_{0,\theta}) \left\| \frac{1}{2}(u^2)_x \right\|_{W^{1,1}(L^2(0,\theta;L^2(\mathbf{R})))} \\
&\quad + c_{3,\theta} \left\| \frac{1}{2}(u^2)_{xx} \right\|_{L^2(0,\theta;L^2(\mathbf{R}))} \\
&\leq c(T, \lambda) \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})} + \sqrt{2}\theta^{1/4}(c_{3,\theta} + 2c_{0,\theta}) \left\{ \|u\|_{\mathcal{B}_{3,\theta}}^2 + 2 \|u\|_{\mathcal{B}_{3,\theta}} \|u_t\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \right\} \\
&\quad + 2^{3/2}\theta^{1/2}c_{3,\theta} \|u\|_{\mathcal{B}_{3,\theta}} \|u_t\|_{\mathcal{B}_{0,\theta}} \\
&\leq c(T, \lambda) \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})} + \sqrt{2}\theta^{1/4}(c_{3,\theta} + 2c_{0,\theta}) \left\{ \|u\|_{\mathcal{B}_{3,\theta}} + \|u_t\|_{\mathcal{B}_{0,\theta}} \right\}^2 \\
&\quad + \sqrt{2}\theta^{1/2}c_{3,\theta} \left\{ \|u\|_{\mathcal{B}_{3,\theta}} + \|u_t\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \right\}^2 \\
&\leq c(T, \lambda) \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})} + 2^{3/2}(c_{3,\theta} + c_{0,\theta})(\theta^{1/4} + \theta^{1/2}) \left\{ \|u\|_{\mathcal{B}_{3,\theta}} + \|u_t\|_{\mathcal{B}_{0,\theta}} \right\}^2.
\end{aligned} \tag{3.3.37}$$

Observe que utilizamos o fato que $c_{3,\theta} \leq c_{3,T}$ (respectivamente, $c_{0,\theta} \leq c_{0,T}$), posto que $\theta \leq T$.

Também denotamos $c(T, \lambda) := c_{3,T} + [1 + \|\lambda\|_{H^1(\mathbf{R})}]c_{0,T} \geq 0$. Decorre de (3.3.37) e do fato que $u \in S_{\theta,R}$ a seguinte desigualdade

$$\|\Gamma u\|_{\mathcal{Y}_{3,\theta}} \leq c(T, \lambda) \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})} + 2^{3/2}(c_{3,T} + c_{0,T})(\theta^{1/4} + \theta^{1/2})R^2. \tag{3.3.38}$$

Definindo então $R = 2c(T, \lambda) \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})}$ e escolhendo $0 < \theta \leq T$ tal que

$$2^{3/2}(c_{3,T} + c_{0,T})(\theta^{1/4} + \theta^{1/2})R \leq \frac{1}{2} \quad (3.3.39)$$

concluimos de (3.3.38) que $\|\Gamma u\|_{\mathcal{Y}_{3,\theta}} \leq R$, provando assim que $\Gamma u \in \vec{S}_{\theta,R}$, sempre que $u \in S_{\theta,R}$, ou seja, $\Gamma(S_{\theta,R}) \subset \vec{S}_{\theta,R}$. Resta-nos, portanto, provar que Γ é uma contração. Para isso, sejam $u_1, u_2 \in S_{\theta,R}$ e denotemos $\Gamma u_i = \vec{v}_i := (v_i, v_{it})$, $i = 1, 2$. Segue da linearidade dos problema em (3.3.35) que $\vec{v} := \Gamma u_1 - \Gamma u_2$, dado por $\vec{v} = (v, v_t)$, onde $v = v_1 - v_2$ e $w = v_t$ são as respectivas soluções dos seguintes problema lineares não homogêneos (3.3.35) onde $f = \frac{1}{2}[(u_1 - u_2)(u_1 + u_2)]_x$. Assim, procedendo como antes, segue da Proposição 3.2 que

$$\begin{aligned} \|\Gamma u_1 - \Gamma u_2\|_{\mathcal{Y}_{3,\theta}} &\leq (c_{3,T} + 2c_{0,T}) \left\| \frac{1}{2}[(u_1 - u_2)(u_1 + u_2)]_x \right\|_{W^{1,1}(0,\theta;L^2(\mathbf{R}))} \\ &\quad + c_{3,T} \left\| \frac{1}{2}[(u_1 - u_2)(u_1 + u_2)]_{xx} \right\|_{L^2(0,\theta;L^2(\mathbf{R}))}. \end{aligned} \quad (3.3.40)$$

Agora, utilizando as estimativas provadas no Lema 3.2, temos

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{2}[(u_1 - u_2)(u_1 + u_2)]_x \right\|_{W^{1,1}(0,\theta;L^2(\mathbf{R}))} \\ &\leq \sqrt{2}\theta^{1/4} \left[\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}_{3,\theta}} \|u_1 + u_2\|_{\mathcal{B}_{3,\theta}} + \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}_{3,\theta}} \|u_{1t} + u_{2t}\|_{\mathcal{B}_{0,\theta}} \right. \\ &\quad \left. + \|u_{1t} - u_{2t}\|_{\mathcal{B}_{3,\theta}} \|u_1 + u_2\|_{\mathcal{B}_{3,\theta}} \right] \\ &\leq \sqrt{2}\theta^{1/4} \left[\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}_{3,\theta}} + \|u_{1t} - u_{2t}\|_{\mathcal{B}_{0,\theta}} \right] \left[\|u_1 + u_2\|_{\mathcal{B}_{3,\theta}} + \|u_{1t} + u_{2t}\|_{\mathcal{B}_{0,\theta}} \right] \\ &\leq \sqrt{2}\theta^{1/4} \|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|_{\mathcal{Y}_{3,\theta}} \left[\|\vec{u}_1\|_{\mathcal{Y}_{3,\theta}} + \|\vec{u}_2\|_{\mathcal{Y}_{3,\theta}} \right] \end{aligned} \quad (3.3.41)$$

e também

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2}[(u_1 - u_2)(u_1 + u_2)]_{xx} \right\|_{L^2(0,\theta;L^2(\mathbf{R}))} &\leq 2^{3/2}\theta^{1/2} \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}_{3,\theta}} \|u_1 + u_2\|_{\mathcal{B}_{3,\theta}} \\ &\leq 2^{3/2}\theta^{1/2} \|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|_{\mathcal{Y}_{3,\theta}} \left[\|\vec{u}_1\|_{\mathcal{Y}_{3,\theta}} + \|\vec{u}_2\|_{\mathcal{Y}_{3,\theta}} \right]. \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

Combinando então (3.3.40), (3.3.41) e (3.3.42), segue do fato que $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \vec{S}_{\theta, R}$ que

$$\begin{aligned} \|\Gamma u_1 - \Gamma u_2\|_{\mathcal{Y}_{3, \theta}} &\leq [2^{3/2}(c_{3, T} + 2c_{0, T})\theta^{1/4}R + 2^{5/2}c_{3, T}\theta^{1/2}R] \|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|_{\mathcal{Y}_{3, \theta}} \\ &\leq 2^{5/2}(c_{3, T} + c_{0, T})(\theta^{1/4} + \theta^{1/2})R \|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|_{\mathcal{Y}_{3, \theta}}. \end{aligned}$$

Logo, supondo ainda que θ satisfaz

$$2^{5/2}(c_{3, T} + c_{0, T})(\theta^{1/4} + \theta^{1/2})R \leq \frac{1}{2} \quad (3.3.43)$$

Contudo, se $0 < \theta \leq T$ satisfaz (3.3.39) então (3.3.43) também será satisfeita e, neste caso, concluímos que Γ é uma contração de $S_{\theta, R}$ em si mesma. Portanto, a aplicação Γ admite um único ponto fixo u em $S_{\theta, R}$, ou seja, $u \in \mathcal{B}_{3, \theta}$ é solução regular de (3.3.1), com $u_t \in \mathcal{B}_{0, \theta}$. Além disso, é válida a seguinte estimativa

$$\|u\|_{\mathcal{B}_{3, \theta}} + \|u_t\|_{\mathcal{B}_{0, \theta}} \leq 2c(T, \lambda) \|u_0\|_{H^3(\mathbb{R})}. \quad (3.3.44)$$

Embora a solução obtida acima exista em $[0, \theta]$, com θ suficientemente pequeno, a desigualdade (3.3.44) acima nos permite estendê-las ao intervalo $[0, T]$, bastando para isso proceder como na demonstração do Teorema 3.6 para soluções mild.

Por fim, a desigualdade (3.3.31) segue, pois, definindo $\beta_{3, T}(s) = 2c(T, \lambda)$, para todo $s \geq 0$. Isto conclui a demonstração do resultado. \square

Finalizaremos esta seção utilizando resultados de interpolação, bem como os Teoremas 3.6 e 3.7, a fim de obtermos soluções cuja regularidade quanto a variável espacial x esteja em espaços intermediários (ou interpolados) de $L^2(\mathbb{R})$ e $H^3(\mathbb{R})$. Para isso, estabeleceremos a seguinte notação. Para cada $T > 0$ e $0 \leq s \leq 3$, definimos os espaços de Banach

$$\mathcal{B}_{s, T} := C([0, T]; H^s(\mathbb{R})) \cap L^2(0, T; H^{s+1}(\mathbb{R})),$$

munido da seguinte topologia

$$\|u\|_{\mathcal{B}_{s,T}} := \|u\|_{C([0,T];H^s(\mathbb{R}))} + \|u\|_{L^2(0,T;H^{s+1}(\mathbb{R}))}, \quad u \in \mathcal{B}_{s,T}.$$

O resultado a ser provado é o seguinte.

Teorema 3.8. *Sejam $0 \leq s \leq 3$ e $\lambda \in H^1(\mathbb{R})$. Para cada $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, a respectiva solução mild u de (3.3.1) pertence a classe $\mathcal{B}_{s,T}$, para cada $T > 0$. Além disso, existe uma função contínua e não decrescente $\beta_{s,T} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que*

$$\|u\|_{\mathcal{B}_{s,T}} \leq \beta_{s,T}(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}) \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}. \quad (3.3.45)$$

Observe que os casos $s = 0, 3$ são precisamente o conteúdo dos Teoremas 3.6 e 3.7. Logo, é suficiente provarmos o resultado acima quando $0 < s < 3$. Além disso, quando $s = 0$ é suficiente considerarmos $\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$.

A demonstração do resultado acima para $0 < s < 3$ requer a caracterização dos espaços $H^s(\mathbb{R})$ através da interpolação dos espaços $L^2(\mathbb{R})$ e $H^3(\mathbb{R})$, e utiliza um método de interpolação primeiramente introduzido em [52] e posteriormente adaptado em [7].

Primeiramente, sejam B_0 e B_1 espaços de Banach, com $B_1 \subset B_0$ sendo esta imersão contínua. A interpolação dos espaços B_0 e B_1 é feita utilizando o chamado K-method (ou método real) (veja [13]) como descrito a seguir. Para cada $f \in B_0$, definamos

$$K(f, t) = \inf_{g \in B_1} \{ \|f - g\|_{B_0} + t \|g\|_{B_1} \},$$

onde $t > 0$ e $\|\cdot\|_{B_i}$ é a norma em B_i , $i = 0, 1$. Para $0 < \theta < 1$ e $1 \leq p \leq \infty$ definimos

$$\begin{aligned} [B_0, B_1]_\theta &= B_{\theta,p} \\ &= \left\{ f \in B_0 : \|f\|_{B_{\theta,p}} = \left(\int_0^\infty K(f, t)^p t^{-\theta p - 1} dt \right)^{1/p} < \infty \right\}, \end{aligned} \quad (3.3.46)$$

com a modificação usual para o caso $p = \infty$. Temos que $B_{\theta,p}$ é um espaço de Banach com norma

$\|\cdot\|_{B_{\theta,p}}$, dada como em (3.3.46), e serão chamados *espaços intermediários*. Agora, dados dois pares de índices (θ_1, p_1) e (θ_2, p_2) como antes, então a seguinte relação de ordem é estabelecida

$$(\theta_1, p_1) < (\theta_2, p_2) \iff \begin{cases} \theta_1 < \theta_2 & \text{ou} \\ \theta_1 = \theta_2 & \text{e } p_1 > p_2. \end{cases}$$

Desta forma, temos que se $(\theta_1, p_1) < (\theta_2, p_2)$ então $B_{\theta_2, p_2} \subset B_{\theta_1, p_1}$, sendo esta imersão contínua. Com esta notação, temos o seguinte resultado acerca da limitação das aplicações nos espaços intermediários.

Teorema 3.9 (Bona & Scott [7]). *Sejam B_0^j e B_1^j espaços de Banach tais que $B_1^j \subset B_0^j$, sendo estas imersões contínuas, $j = 1, 2$. Sejam λ e q tais que $0 < \lambda < 1$ e $1 \leq q \leq \infty$. Suponha que Λ seja uma aplicação tal que*

(i) $\Lambda : B_{\lambda,q}^1 \rightarrow B_0^2$ e para $f, g \in B_{\lambda,q}^1$ temos

$$\|\Lambda f - \Lambda g\|_{B_0^2} \leq \beta_0(\|f\|_{B_{\lambda,q}^1} + \|g\|_{B_{\lambda,q}^1}) \|f - g\|_{B_0^1};$$

(ii) $\Lambda : B_1^1 \rightarrow B_1^2$ e para $h \in B_1^1$ temos

$$\|\Lambda h\|_{B_1^2} \leq \beta_2(\|h\|_{B_{\lambda,q}^1}) \|h\|_{B_1^2},$$

onde $\beta_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ são funções contínuas e não decrescentes, $i = 0, 1$. Então, se $(\lambda, q) < (\theta, p)$, Λ é uma aplicação de $B_{\theta,p}^1$ em $B_{\theta,p}^2$, e ainda, para $f \in B_{\theta,p}^1$ temos

$$\|\Lambda f\|_{B_{\theta,p}^2} \leq \beta(\|f\|_{\lambda,q}^1) \|f\|_{B_{\theta,p}^1},$$

onde $\beta(r) = 4\beta_0(4r)^{1-\theta}\beta_1(3r)^\theta$, $r > 0$.

Demonstração. Veja o Teorema 1, página 89 em [7]. □

A demonstração do Teorema 3.8 segue, pois, como uma aplicação do Teorema 3.9. Com

efeito, sejam $T > 0$ e $\lambda \in H^1(\mathbb{R})$. Definimos,

$$B_0^1 = L^2(\mathbb{R}), \quad B_0^2 = \mathcal{B}_{0,T}, \quad B_1^1 = H^3(\mathbb{R}), \quad B_1^2 = \mathcal{B}_{3,T},$$

e Λ é o operador solução \mathcal{A}_0 para o problema (3.3.1). Com isto, temos que a exigência (i) no Teorema 3.9 é assegurada pelo Teorema 3.6, onde $\beta_0 = \beta_{0,T}$. Temos ainda que a exigência (ii) é assegurada pelo Teorema 3.7, onde $\beta_1 = \beta_{3,T}$. Logo, pondo $p = 2$ e $\theta = s/3$, com $0 < s < 3$, e aplicando o Teorema 3.9 concluímos que, para cada $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, a respectiva solução mild u do problema (3.3.1) pertence a classe $\mathcal{B}_{s,T}$. Além disso, a desigualdade (3.3.45) é satisfeita, onde $\beta_{s,T}(r) = 4\beta_{0,T}(4r)^{1-s/3}\beta_{3,T}(3r)^{s/3}$, $r > 0$. Isto conclui a prova do Teorema 3.8.

O seguinte resultado é uma consequência do Teorema 3.8 e estabelece que soluções mild de (3.3.1) são, em verdade, regulares quando consideradas fora de qualquer vizinhança do dado inicial.

Corolário 3.1. *Nas condições do Teorema 3.8, para cada $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, a correspondente solução mild u de (3.3.1) pertence a classe $\mathcal{B}_{3,[\varepsilon,T]} = C([\varepsilon,T]; H^3(\mathbb{R})) \cap L^2(\varepsilon,T; H^4(\mathbb{R}))$, para todo $T > 0$ e $0 < \varepsilon < T$.*

Demonstração. Seja $T > 0$ e $0 < \varepsilon < T$. Logo, para $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, segue do Teorema 3.6 que o problema (3.3.1) admite uma única solução u na classe $\mathcal{B}_{0,T}$. Em particular, temos $u(t) \in H^1(\mathbb{R})$ para quaset todo $t \in [0, T]$. Seja $t_0 \in]0, \varepsilon[$ tal que $u(t_0) \in H^1(\mathbb{R})$. Aplicando novamente o Teorema 3.8 concluímos que a restrição de u ao intervalo $[t_0, T]$ é solução mild de (3.3.1) na classe $\mathcal{B}_{1,[t_0,T]}$. Em particular, temos $u(t) \in H^2(\mathbb{R})$, para quase todo $t \in [t_0, T]$. Seja $t_1 \in]t_0, \varepsilon[$ tal que $u(t_1) \in H^2(\mathbb{R})$. Aplicando novamente o Teorema 3.8, segue que a restrição de u ao intervalo $[t_1, T]$ é solução mild de (3.3.1) na classe $\mathcal{B}_{2,[t_1,T]}$. Em particular, temos $u(t) \in H^3(\mathbb{R})$ para quase todo $t \in [t_1, T]$. Seja $t_2 \in]t_1, \varepsilon[$ tal que $u(t_2) \in H^3(\mathbb{R})$. Aplicando uma última vez o Teorema 3.8 concluímos que a restrição de u ao intervalo $[t_2, T]$ é solução mild de (3.3.1) na classe $\mathcal{B}_{3,[t_2,T]}$. A conclusão segue, pois, observando que $[\varepsilon, T] \subset [t_2, T]$ e considerando a restrição de u ao intervalo $[\varepsilon, T]$. \square

3.4 Decaimento Exponencial e Taxas

Nesta seção iremos fornecer resultados que assegurem o decaimento exponencial das soluções de (3.3.1) obtidas na seção anterior, bem como exibir taxas para o decaimento.

Consideremos novamente o problema (3.1.1), reescrito abaixo

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} - u_{xx} + \lambda u + uu_x = 0 & , x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x) & , x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.4.1)$$

onde $\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$.

Se u é uma solução regular de (3.4.1), e neste caso estamos considerando $\lambda \in H^1(\mathbb{R})$ e $u_0 \in H^3(\mathbb{R})$, então multiplicando a equação (3.4.1) por u e integrando em \mathbb{R} obtemos

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2 \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = -2 \int_{\mathbb{R}} \lambda(x) |u(t, x)|^2 dt$$

Assim, procedendo como no caso linear (veja Seção 3.2), temos que se existirem $\lambda_0 > 0$ e $\lambda_1 \in L^p(\mathbb{R})$, para algum $1 \leq p < \infty$, tais que

$$\lambda(x) \geq \lambda_0 + \lambda_1(x), \quad \text{para quase todo } x \in \mathbb{R},$$

e também

$$\|\lambda_1\|_{L^p(\mathbb{R})} < \left(\frac{\lambda_0}{c_p}\right)^{1-\frac{1}{2p}}$$

onde $c_p := \left(1 - \frac{1}{2p}\right) \left(\frac{2}{p}\right)^{1/(2p-1)}$, então a seguinte desigualdade se verifica

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})} e^{-\lambda' t}, \quad t \geq 0,$$

onde $\lambda' := \lambda_0 - c_p \|\lambda_1\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{2p}{2p-1}}$. A desigualdade acima fornece o decaimento exponencial, bem como taxas para este decaimento, de soluções regulares de (3.4.1). Este resultado pode ser estendido a soluções mild fazendo uso da propriedade de dependência contínua das soluções,

propriedade esta descrita no Teorema 3.6. Desta forma, temos provado o seguinte resultado acerca do decaimento exponencial da energia de soluções mild do problema (3.4.1).

Teorema 3.10. *Seja $\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$. Se existirem $\lambda_0 > 0$ e $\lambda_1 \in L^p(\mathbb{R})$, para algum $1 \leq p < \infty$, tais que as seguintes afirmações se verificam*

(i) $\lambda(x) \geq \lambda_0 + \lambda_1(x)$, para quase todo $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $\|\lambda_1\|_{L^p(\mathbb{R})} < \left(\frac{\lambda_0}{c_p}\right)^{1-\frac{1}{2p}}$,

então, para cada $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, a respectiva solução mild u de (3.4.1) satisfaz a seguinte desigualdade

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})} e^{-\lambda' t}, \quad t \geq 0, \quad (3.4.2)$$

onde $\lambda' := \lambda_0 - c_p \|\lambda_1\|_{L^p(\mathbb{R})}^{\frac{2p}{2p-1}}$.

Observação 3.11. O resultado acima também pode ser verificada para o caso $p = \infty$, com as devidas adaptações. Neste caso, a taxa para o decaimento será $\lambda' := \lambda_0 - \|\lambda_1\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$, sobre a hipótese de que λ' assim definido seja positivo.

Tendo em vista a notação utilizada na Seção 3.3, denotaremos, para cada $t \geq 0$, o espaço de Banach

$$\mathcal{B}_{0,[t,t+T]} = C([t, t+T]; L^2(\mathbb{R})) \cap L^2(t, t+T; H^1(\mathbb{R})),$$

com norma

$$\|u\|_{\mathcal{B}_{0,[t,t+T]}} = \sup_{s \in [t, t+T]} \|u(s)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\{ \int_t^{t+T} \|u_x(s)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt \right\}^{1/2}, \quad u \in \mathcal{B}_{0,[t,t+T]}.$$

Com esta notação, decorre do resultado anterior a seguinte estimativa exponencial para as soluções mild.

Corolário 3.2. *Sejam $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ e $\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$, tal que as exigências (i) e (ii) no Teorema 3.10 se verificam. Então, para cada $T > 0$, existe uma função contínua $\alpha_{0,T} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal*

que a correspondente solução mild u de (3.4.1) satisfaz

$$\|u\|_{\mathcal{B}_{0,[t,t+T]}} \leq \alpha_{0,T}(\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})})e^{-\lambda't}, \quad (3.4.3)$$

para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Sejam $T > 0$, $u_0 \in L^2(\mathbf{R})$ e λ nas condições do enunciado. Observamos que, para cada $t \geq 0$, a restrição da respectiva solução mild u do problema (3.4.1), dada pelo Teorema 3.6, ao intervalo $[t, t+T]$, a dizer $v = u|_{[t,t+T]}$, é solução mild do problema

$$\begin{cases} v_t + v_{xxx} - v_{xx} + \lambda v + vv_x = 0, & x \in \mathbf{R}, s \in]0, T[, \\ v(0, x) = u(t, x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

e ainda $\|v\|_{\mathcal{B}_{0,T}} = \|u\|_{\mathcal{B}_{0,[t,t+T]}}$. Logo, aplicando os Teoremas 3.6 e 3.10, temos a estimativa

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{B}_{0,[t,t+T]}} &\leq \beta_{0,T}(\|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}) \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \\ &\leq \beta_{0,T}(\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}) \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} e^{-\lambda't}, \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

onde usamos a propriedade de que $\beta_{0,T}$ é contínua e não decrescente. A estimativa (3.4.3) segue de (3.4.4), definindo $\alpha_{0,T}(r) = \beta_{0,T}(r)r$, $r \geq 0$. \square

O Teorema 3.10 fornece condições suficientes acerca da função λ , para o decaimento exponencial da energia em $L^2(\mathbf{R})$ de soluções mild. Entretanto, vimos na Seção 3.3 que, para dados mais regulares, as respectivas soluções mild de (3.4.1) possuem mais regularidade, com relação a variável espacial. Logo, buscaremos provar que o decaimento exponencial em $L^2(\mathbf{R})$ implica em estimativas exponenciais para o decaimento de soluções mais regulares.

A estratégia aqui utilizada foi inspirada nas idéias contida em [48], e consiste em utilizar o resultado já provado para soluções mild (veja Teorema 3.10) a fim de estabelecer o decaimento para soluções regulares e, portanto, concluir o decaimento para soluções nos espaços intermediários, utilizando desigualdades de interpolação. Estes resultados e, portanto, o decaimento exponencial para soluções mais regulares de (3.4.1), são dados a seguir.

Teorema 3.12. *Sejam $s \in [0, 3]$ e $\lambda \in H^1(\mathbb{R})$ satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.10. Então existe $T_0 > 0$, uma constante positiva $\nu > 0$ e uma função contínua e não decrescente $\beta_s : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tais que, para cada $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, a respectiva solução mild u de (3.4.1) satisfaz*

$$\|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \beta_s(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}) e^{-\nu t} \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}, \quad t \geq T_0. \quad (3.4.5)$$

Antes de passarmos a demonstração do teorema anterior, consideremos o seguinte problema linear homogêneo auxiliar

$$\begin{cases} v_t + v_{xxx} - v_{xx} + \lambda v + (vu)_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ v(0, x) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.4.6)$$

onde $\lambda, v_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas. Para este problema temos o seguinte resultado.

Proposição 3.5. *Sejam $T > 0$ e $\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$. Para cada $u \in \mathcal{B}_{0,T}$ e $v_0 \in L^2(\mathbb{R})$, o problema linear (3.4.6) admite uma única solução v na classe $\mathcal{B}_{0,T}$. Além disso, existe uma função contínua e não decrescente $\sigma_T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que a seguinte estimativa é satisfeita*

$$\|v\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \leq \sigma_T(\|u\|_{\mathcal{B}_{0,T}}) \|v_0\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (3.4.7)$$

Demonstração. A prova da existência segue os passos do Teorema 3.6, ou seja, faz uso de um argumento de ponto fixo. Logo, passaremos a prova da desigualdade (3.4.7) e, por último provaremos a existência. Assim sendo, consideremos inicialmente v solução regular de (3.4.6). Omitiremos as variáveis x e t quando necessário a fim de simplificar a notação. Logo, multiplicando a equação (3.4.6) por v e integrando em \mathbb{R} temos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|v_x(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= - \int_{\mathbb{R}} \lambda(x) |v(t, x)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}} (uv)_x v dx \\ &\leq \|\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \int_{\mathbb{R}} u \left(\frac{1}{2} v^2 \right)_x dx \\ &\leq \|\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\| \frac{1}{2} (v(t))^2 \right\|_{L^2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

para quase todo $t \in [0, T]$. Integrando em $[0, t]$, $t \leq T$, cada um dos termos na desigualdade acima vem que

$$\begin{aligned} & \|v(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + 2 \int_0^t \|v_x(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 ds - \|v_0\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 \\ & \leq 2 \|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \int_0^t \|v(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 ds + 2 \|u\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \int_0^t \left\| \frac{1}{2} (v^2(t))_x \right\|_{L^2(\mathbf{R})} ds. \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Agora, observe que usando a imersão $H^1(\mathbf{R}) \subset L^\infty(\mathbf{R})$ bem como a Proposição 2.4 temos

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left\| \frac{1}{2} (v^2(s))_x \right\|_{L^2(\mathbf{R})} ds = \int_0^t \|v v_x(s)\|_{L^2(\mathbf{R})} ds \\ & \leq \int_0^t \|v(s)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \|v_x(s)\|_{L^2(\mathbf{R})} ds \\ & \leq 2^{1/2} \int_0^t \|v(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{1/2} \|v_x(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{3/2} ds \\ & \leq 2^{1/2} \left\{ \int_0^t \|v(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 ds \right\}^{1/4} \left\{ \int_0^t \|v_x(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 ds \right\}^{3/4} \\ & \leq \frac{2^{1/2}}{4\gamma^4} \int_0^t \|v(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 ds + \frac{2^{1/2} 3\gamma^{4/3}}{4} \int_0^t \|v_x(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 ds, \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

onde $\gamma > 0$ é um número a ser determinado mais a frente. Logo, combinando (3.4.8) e (3.4.9) obtemos

$$\begin{aligned} & \|v(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \left(1 - 2^{-3/2} 3\gamma^{4/3} \|u\|_{\mathcal{B}_{0,T}}\right) 2 \int_0^t \|v_x(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 ds \\ & \leq \left(2 \|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} + \frac{2^{-1/2} \|u\|_{\mathcal{B}_{0,T}}}{\gamma^4}\right) \int_0^t \|v(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 ds + \|v_0\|_{L^2(\mathbf{R})}^2. \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Pondo $r_\gamma := 1 - 2^{-3/2} 3\gamma^{4/3} \|u\|_{\mathcal{B}_{0,T}}$ e escolhendo $\gamma > 0$ tal que $r_\gamma \geq \frac{1}{2}$, digamos

$$\gamma \leq \left(\frac{2^{1/2}}{3 \|u\|_{\mathcal{B}_{0,T}}} \right)^{4/3}, \quad (3.4.11)$$

segue de (3.4.10), aplicando a Desigualdade de Gronwall–Bellman (veja Proposição 2.2) que

$$\|v(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + \int_0^t \|v_x(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 ds \leq \|v_0\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 e^{\theta_\gamma t}, \quad t \in [0, T],$$

onde $\theta_\gamma := 2 \|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} + \frac{2^{-1/2}}{\gamma^4} \|u\|_{\mathcal{B}_{0,T}}$.

Observe que, trocando $\|u\|_{\mathcal{B}_{0,T}}$ por $s \geq 0$ na desigualdade (3.4.11), a escolha de γ depende, pois, de $s \geq 0$ e portanto r_γ e θ_γ podem ser consideradas funções que dependem de s . Desta forma, temos

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \left\{ \int_0^T \|v_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 dt \right\}^{1/2} \\ \leq \|v_0\|_{L^2(\mathbf{R})} \frac{e^{\frac{\theta_\gamma T}{2}}}{2} \\ = \sigma_T(\|u\|_{\mathcal{B}_{0,T}}) \|v_0\|_{L^2(\mathbf{R})} \end{aligned}$$

onde $\sigma_T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é dada por

$$\sigma_T(s) = \frac{e^{\theta_\gamma(s)T}}{2}.$$

A conclusão de que σ_T é uma função não decrescente decorre do fato que θ_γ é uma função não decrescente. Isto pode ser verificado através da relação (3.4.11). \square

Outro resultado necessário para a demonstração do Teorema 3.12 é o seguinte lema, que fornece uma estimativa da norma de um elemento $f \in H^3(\mathbf{R})$ em termos das normas em $L^2(\mathbf{R})$ de f e f_{xxx} .

Lema 3.3. *Existe uma constante positiva c tal que*

$$\frac{1}{c} \|f\|_{H^3(\mathbf{R})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|f_{xxx}\|_{L^2(\mathbf{R})}, \quad f \in H^3(\mathbf{R}). \quad (3.4.12)$$

Demonstração. Seja $f \in H^3(\mathbf{R})$. Utilizando a desigualdade de Gagliardo–Nirenberg (veja [37]) temos que existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$\|f_x\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq c_1 \|f_{xxx}\|_{L^2(\mathbf{R})}^{1/3} \|f\|_{L^2(\mathbf{R})}^{2/3} \quad \text{e} \quad \|f_{xx}\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq c_2 \|f_{xxx}\|_{L^2(\mathbf{R})}^{2/3} \|f\|_{L^2(\mathbf{R})}^{1/3}.$$

Aplicando então a desigualdade de Young concluímos

$$\|f_x\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq \frac{2c_1}{3} \|f\|_{L^2(\mathbf{R})} + \frac{c_1}{3} \|f_{xxx}\|_{L^2(\mathbf{R})} \quad \text{e} \quad \|f_{xx}\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq \frac{c_2}{3} \|f\|_{L^2(\mathbf{R})} + \frac{2c_2}{3} \|f_{xxx}\|_{L^2(\mathbf{R})}$$

A desigualdade (3.4.12) segue destas últimas estimativas tomando c em função de c_1 e c_2 de maneira apropriada. De fato, da estimativa acima temos

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^3(\mathbf{R})} &\leq \|f\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|f_x\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|f_{xx}\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|f_{xxx}\|_{L^2(\mathbf{R})} \\ &\leq \left\{1 + \frac{2c_1 + c_2}{3}\right\} \|f\|_{L^2(\mathbf{R})} + \left\{1 + \frac{2c_2 + c_1}{3}\right\} \|f_{xxx}\|_{L^2(\mathbf{R})} \\ &\leq (2 + c_1 + c_2) \left\{\|f\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|f_{xxx}\|_{L^2(\mathbf{R})}\right\} \end{aligned}$$

donde segue o resultado pondo $c := 2 + c_1 + c_2$. □

Encerraremos esta seção, e portanto o capítulo, com a demonstração do Teorema 3.12 assegurando assim o decaimento exponencial, bem como taxas para o decaimento, de soluções que pertencem a $H^s(\mathbf{R})$.

Demonstração do Teorema 3.12. Observamos que o caso $s = 0$ é precisamente o conteúdo do Teorema 3.10. Assumamos o resultado para o caso $s = 3$, ou seja, suponhamos que exista $T_0 > 0$, uma constante positiva $\lambda'' > 0$ e uma função contínua e não decrescente $\beta_3 : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ tal que

$$\|u(t)\|_{H^3(\mathbf{R})} \leq \beta_3(\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}) e^{-\lambda'' t} \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})}, \quad t \geq T_0. \quad (3.4.13)$$

Portanto, para $T > 0$, $0 < s < 3$ e $u_0 \in H^s(\mathbf{R})$, segue do Teorema 3.8 que a respectiva solução mild u de (3.4.1) pertence a classe $\mathcal{B}_{s,T}$. Além disso, segue do Corolário 3.1 que $u \in \mathcal{B}_{3, [\varepsilon, T]}$, para todo $0 < \varepsilon < T$. Por outro lado, utilizando desigualdades de interpolação (veja [38], eq. (2.43), p. 19) temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u(t)\|_{H^s(\mathbf{R})} \leq C \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{1-s/3} \|u(t)\|_{H^3(\mathbf{R})}^{s/3}, \quad t \geq \varepsilon. \quad (3.4.14)$$

Combinando (3.4.2) e (3.4.13) com (3.4.14) concluímos

$$\|u(t)\|_{H^s(\mathbf{R})} \leq \beta_s(\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}) e^{-\nu t} \|u_0\|_{H^s(\mathbf{R})},$$

onde $\beta_s : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é dada por

$$\beta_s(r) = C\beta_3(\|u(\varepsilon)\|_{H^3(\mathbf{R})})^{s/3} r^{-s/3} \|u(\varepsilon)\|_{H^3(\mathbf{R})}^{s/3}, \quad r \geq 0,$$

$\nu := \lambda'(1 - s/3) + \lambda''s/3$ e $0 < \varepsilon < T$ é um número fixo, porém arbitrário.

Logo, é suficiente estabelecermos o resultado para $s = 3$, ou seja, devemos provar (3.4.13). Dessa forma, consideremos $u_0 \in H^3(\mathbb{R})$ e $u \in \mathcal{B}_{0,T}$ a correspondente solução regular do problema (3.4.1). Aplicando o Lema 3.3 e Teorema 3.10 concluímos

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \|u(t)\|_{H^3(\mathbf{R})} &\leq \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|u_{xxx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \\ &\leq e^{-\lambda t} \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|u_{xxx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

A desigualdade acima mostra-nos que é suficiente estabelecermos estimativas exponenciais para a norma da terceira derivada espacial. A fim de obtermos tais estimativas, consideramos a equação (3.4.1) e escrevemos

$$u_{xxx} = -u_t + u_{xx} + -\lambda u - uu_x,$$

donde segue que

$$\|u_{xxx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq \|u_t(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|u_{xx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|\lambda u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \left\| \frac{1}{2}(u^2)_x \right\|_{L^2(\mathbf{R})}, \quad t \geq 0. \quad (3.4.16)$$

Logo, iremos obter estimativas exponenciais para cada um dos termos à direita da desigualdade (3.4.16). Primeiramente, observemos que

$$\|\lambda u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq \|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}, \quad t \geq 0. \quad (3.4.17)$$

O termo não linear é estimado usando a imersão $H^1(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$ e também a desigualdade

de Young como segue

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{2} (u(t)^2)_x \right\|_{L^2(\mathbf{R})} &\leq \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \\
&\leq 2^{1/2} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{1/2} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{1/2} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \\
&\leq 2^{-1/2} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} + 2^{-1/2} \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 \\
&\leq 2^{-3/2} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + (2^{-3/2} + 2^{-1/2}) \|u_x(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2, \quad t \geq 0. \tag{3.4.18}
\end{aligned}$$

Combinando então (3.4.17) e (3.4.18) com (3.4.16), e tendo em vista as estimativas na demonstração do Lema 3.3 obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_{xxx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} &\leq \|u_t(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \left(\|\lambda\|_{L^\infty} + \frac{c_2}{3\gamma^3} \right) \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \frac{c_1^2}{3\gamma^3} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^4 \\
&\quad + \left[\frac{(2^{-1/2} + 2^{1/2})c_1^2 + 2c_2}{3} \right] \gamma^{3/2} \|u_{xxx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^4
\end{aligned}$$

donde segue que

$$c(\gamma) \|u_{xxx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq \|u_t(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \left(\|\lambda\|_{L^\infty} + \frac{c_2}{3\gamma^3} \right) \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \frac{c_1^2}{3\gamma^3} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^4$$

onde $c(\gamma) = 1 - \gamma^{3/2} \frac{(2^{-1/2} + 2^{1/2})c_1^2 + 2c_2}{3}$. Escolhendo então $\gamma = \left(\frac{3}{(2^{-1/2} + 2^{1/2})c_1^2 + 2c_2} \right)^{2/3}$ temos $c(\gamma) = \frac{1}{2}$ e então

$$\|u_{xxx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq 2 \|u_t(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \left(2 \|\lambda\|_{L^\infty} + \frac{2c_2}{3\gamma^3} \right) \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} + \frac{2c_1^2}{3\gamma^3} \|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^4, \tag{3.4.19}$$

para $t \geq 0$.

Tendo em vista a estimativa exponencial para a solução em $L^2(\mathbf{R})$ dada no Teorema 3.10, inferimos da desigualdade (3.4.19) acima que uma estimativa exponencial para u_t em $L^2(\mathbf{R})$ é suficiente para concluirmos o desejado. Desta forma, voltamos nossa atenção para u_t e, inspirados pelas idéias contidas em [48], procederemos da maneira como segue.

Seja $T > 0$ fixo. Como a solução u é dada pelo Teorema 3.8 segue que $v = u_t$ é solução mild

do problema (3.4.6) com dado inicial $v_0 = -u_{0xxx} + u_{0xx} - \lambda u_0 - u_0 u_{0x} \in L^2(\mathbb{R})$. Além disso, para cada $t \geq 0$, segue da propriedade de semigrupo que $v^t(s) = v(t+s)$ é também solução de (3.4.6) com dado inicial $v^t(0) = v(t)$. Logo, observando que

$$\begin{aligned} \|v^t\|_{\mathcal{B}_{0,T}} &= \sup_{s \in [0,T]} \left\| v^t(s) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\{ \int_0^T \|v_x^t(s)\|_{L^2(\mathbb{R})} ds \right\}^{1/2} \\ &= \sup_{s \in [0,T]} \|v(t+s)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\{ \int_0^T \|v_x(t+s)\|_{L^2(\mathbb{R})} ds \right\}^{1/2} \\ &= \sup_{r \in [t,t+T]} \|v(r)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\{ \int_t^{t+T} \|v_x(r)\|_{L^2(\mathbb{R})} dr \right\}^{1/2} \\ &= \|v\|_{\mathcal{B}_{0,[t,t+T]}}, \end{aligned}$$

para cada $t \geq 0$.

Por outro lado, aplicando a Proposição 3.5 temos

$$\|v^t\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \leq \sigma_T(\|u\|_{\mathcal{B}_{0,[t,t+T]}}) \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad t \geq 0, \quad (3.4.20)$$

onde $\sigma_T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função contínua e não decrescente.

Agora, pondo $v_1(t) = S(t)v_0$, $t \geq 0$, onde $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é o semigrupo de classe fortemente contínuo gerado pelo operador associado ao problema linear (veja Seção 3.2). Então v_1 é solução do problema linear

$$\begin{cases} v_{1t} + v_{1xxx} - v_{1xx} + \lambda v_1 = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ v_1(0) = v_0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aplicamos então a Proposição 3.3 a fim de obter a seguinte estimativa exponencial para v_1

$$\|v_1(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|v_0\|_{L^2(\mathbb{R})} e^{-\lambda' t}, \quad t \geq 0. \quad (3.4.21)$$

Em seguida, definimos $v_2(t) = \int_0^t S(t-s)(v(s)u(s))_x ds$, $t \geq 0$. Logo, utilizando as estimati-

vas para o semigrupo (veja desigualdade (3.2.3)) temos

$$\begin{aligned} \|v_2(T)\|_{L^2(\mathbf{R})} &\leq e^{T\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}} \int_0^T \|(v(s)u(s))_x\|_{L^2(\mathbf{R})} ds \\ &\leq e^{T\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}} \left\{ \int_0^T \|v_x(s)u(s)\|_{L^2(\mathbf{R})} ds + \int_0^T \|v(s)u_x(s)\|_{L^2(\mathbf{R})} ds \right\}. \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

Cada uma das integrais acima são calculadas utilizando a imersão $H^1(\mathbf{R}) \subset L^\infty(\mathbf{R})$ e procedendo como na demonstração do Lema 3.1 como segue

$$\begin{aligned} &\int_0^T \|v_x(s)u(s)\|_{L^2(\mathbf{R})} ds \\ &\leq \int_0^T \|v_x(s)\|_{L^2(\mathbf{R})} \|u(s)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} ds \\ &\leq 2^{1/2} \int_0^T \|v_x(s)\|_{L^2(\mathbf{R})} \|u(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{1/2} \|u_x(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^{1/2} ds \\ &\leq 2^{1/2} \left\{ \int_0^T \|v_x(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 ds \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^T \|u(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 ds \right\}^{1/4} \left\{ \int_0^T \|u_x(s)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 ds \right\}^{1/4} \\ &\leq 2^{1/2} T^{1/4} \|v\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \|u\|_{\mathcal{B}_{0,T}}. \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

Analogamente, temos

$$\int_0^T \|v(s)u_x(s)\|_{L^2(\mathbf{R})} ds \leq 2^{1/2} T^{1/4} \|v\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \|u\|_{\mathcal{B}_{0,T}}. \quad (3.4.24)$$

Combinando então (3.4.23) e (3.4.24) com (3.4.22) chegamos a

$$\|v_2(T)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq 2^{3/2} e^{T\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}} T^{1/4} \|v\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \|u\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \quad (3.4.25)$$

Assim sendo, e tendo em vista a expressão

$$v(t) = S(t)v_0 - \int_0^T S(t-s)[v(s)u(s)]_x ds, \quad t \geq 0,$$

segue das estimativas (3.4.21) e (3.4.25) que

$$\begin{aligned}
\|v(T)\|_{L^2(\mathbf{R})} &\leq \|v_0\|_{L^2(\mathbf{R})} e^{-\lambda'T} + 2^{3/2} e^{T\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}} T^{1/4} \|v\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \|u\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \\
&\leq \|v_0\|_{L^2(\mathbf{R})} e^{-\lambda'T} + 2^{3/2} e^{T\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}} T^{1/4} \sigma_T(\|u\|_{\mathcal{B}_{0,T}}) \|u\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \|v_0\|_{L^2(\mathbf{R})} \\
&= \left[e^{-\lambda'T} + 2^{3/2} T^{1/4} e^{T\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}} \sigma_T(\|u\|_{\mathcal{B}_{0,T}}) \|u\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \right] \|v_0\|_{L^2(\mathbf{R})}, \tag{3.4.26}
\end{aligned}$$

onde utilizamos a estimativa (3.4.20) com $t = 0$.

Agora, para cada $n \in \mathbf{N}$ definamos $y_n = v(nT) \in L^2(\mathbf{R})$. Se w_n é a solução do problema

$$\begin{cases} w_{nt} + w_{nxxx} - w_{nxx} + \lambda w_n + [u^{nT} w_n]_x = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ w_n(0) = y_n, & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

onde $u^{nT}(t, x) = u(t+nT, x)$, para todo $t \geq 0$ e $x \in \mathbf{R}$, então temos $w_n(t) = v^{nT}(t) = v(t+nT)$, para todo $t \geq 0$, e $n \in \mathbf{N}$. Em particular, temos $w_n(T) = y_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$, e procedendo como antes calculamos

$$\begin{aligned}
\|y_{n+1}\|_{L^2(\mathbf{R})} &= \|w_n(T)\|_{L^2(\mathbf{R})} \\
&\leq \|S(T)y_n\|_{L^2(\mathbf{R})} + \left\| \int_0^T S(t-s)[w_n(s)u^{nT}(s)]_x ds \right\|_{L^2(\mathbf{R})} \\
&\leq e^{-\lambda'T} \|y_n\|_{L^2(\mathbf{R})} + 2^{3/2} e^{T\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}} T^{1/4} \|u^{nT}\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \|v^{nT}\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \\
&\leq e^{-\lambda'T} \|y_n\|_{L^2(\mathbf{R})} + 2^{3/2} T^{1/4} e^{T\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}} \|u\|_{\mathcal{B}_{0,[nT,(n+1)T]}} \|v\|_{\mathcal{B}_{0,[nT,(n+1)T]}} \\
&\leq \left[e^{-\lambda'T} + 2^{3/2} T^{1/4} e^{T\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}} \|u\|_{\mathcal{B}_{0,[nT,(n+1)T]}} \sigma_T(\|u\|_{0,[nT,(n+1)T]}) \right] \|y_n\|_{L^2(\mathbf{R})},
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbf{N}$ e $T > 0$.

Escolhendo $T > 0$ tal que $e^{-\lambda'T} < 1$, segue do limite

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} r \sigma_T(r) = 0,$$

que podemos determinar $r > 0$, suficientemente pequeno, tal que

$$0 < \beta := e^{-\lambda' T} + 2^{3/2} T^{1/4} e^{T \|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}} r \sigma_T(r) < 1.$$

Observe ainda que r depende, pois, da escolha de T .

Por outro lado, utilizando o Corolário 3.2, podemos determinar $N > 0$, suficientemente grande, de modo que

$$\|u\|_{\mathcal{B}_{0, [nT, (n+1)T]}} \leq \alpha_{0,T}(\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}) e^{-\lambda' NT} < r,$$

para todo $n \geq N$, onde $\alpha_{0,T} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função contínua e decrescente.

Contudo, para tais valores de T e N , assim determinados, concluimos

$$\|y_{n+1}\| \leq \beta \|y_{n+1}\|_{L^2(\mathbf{R})}, \quad (3.4.27)$$

para todo $n \geq N$, com $0 < \beta < 1$.

Por fim, utilizando (3.4.20) e (3.4.27) chegamos a

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathcal{B}_{0, [(N+k)T, (N+k+1)T]}} &= \|v^{(N+K)T}\|_{\mathcal{B}_{0,T}} \\ &\leq \sigma_T(\|u\|_{\mathcal{B}_{0, [(N+k)T, (N+k+1)T]}}) \|v((N+k)T)\|_{L^2(\mathbf{R})} \\ &\leq \sigma_T(\alpha_{0,T}(\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}) e^{-\lambda' NT}) \beta^k \|v(NT)\|_{L^2(\mathbf{R})}, \end{aligned}$$

e pondo $T_0 := NT$, vem que, se $t \geq T_0$ então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $t = (N+k)T + \theta$, com $0 \leq \theta < T$. Logo, escrevendo $k = \frac{t - T_0 - \theta}{T}$, concluimos

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} &\leq \|v\|_{\mathcal{B}_{[(N+k)T, (N+k+1)T]}} \\ &\leq \sigma_T(\alpha_{0,T}(\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}) e^{-\lambda' T_0}) \|v(T_0)\|_{L^2(\mathbf{R})} \beta^k, \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

para $t \geq T$. Agora, como $0 \leq \theta < T$ e $0 < \beta < 1$ temos

$$\beta^k = \beta^{\frac{t-T_0-\theta}{T}} \leq \left(\frac{1}{\beta}\right)^{-t/T} \beta^{-(N+1)}.$$

Isto juntamente com a desigualdade (3.4.28) implicam

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} &\leq \sigma_T \left(\alpha_{0,T} (\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}) e^{-\lambda' T_0} \right) \|v(T_0)\|_{L^2(\mathbf{R})} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{-t/T} \beta^{-(N+1)} \\ &\leq \sigma_T \left(\alpha_{0,T} (\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}) e^{-\lambda' T_0} \right) e^{-\nu^* t} \|v(T_0)\|_{L^2(\mathbf{R})}, \end{aligned} \quad (3.4.29)$$

onde $\nu^* := T^{-1} \ln(1/\beta)$. Aplicando então a Proposição 3.5, tendo em vista a estimativa para u dada pelo Corolário (3.2), temos

$$\begin{aligned} \|v(T_0)\|_{L^2(\mathbf{R})} &\leq \sigma_{T_0} (\|u\|_{\mathcal{B}_{0,T_0}}) \|v(0)\|_{L^2(\mathbf{R})} \\ &\leq \sigma_{T_0} (\alpha_{0,T_0} (\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})})) \|v_0\|_{L^2(\mathbf{R})}. \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

Logo, resta-nos estimar a norma de v_0 em $L^2(\mathbf{R})$. Para isso, usaremos a imersão $H^1(\mathbf{R}) \subset L^\infty(\mathbf{R})$ procedendo da maneira como segue

$$\begin{aligned} \|v_0\|_{L^2(\mathbf{R})} &\leq \|u_{0xxx}\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|u_{0xx}\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|\lambda u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|u_0 u_{0x}\|_{L^2(\mathbf{R})} \\ &\leq \|u_{0xxx}\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|u_{0xx}\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|u_0\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \|u_{0x}\|_{L^2(\mathbf{R})} \\ &\leq (2 + \|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}) [\|u_{0xxx}\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|u_{0xx}\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}] \\ &\quad + 2^{-1/2} \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}^3 + 2^{-1/2} \|u_{0x}\|_{L^2(\mathbf{R})} \\ &\leq (2 + \|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} + 2^{-1/2}) \left[\|u_{0xxx}\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|u_{0xx}\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|u_{0x}\|_{L^2(\mathbf{R})} + \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} \right] \\ &\quad + 2^{-1/2} \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}^3 \\ &\leq \left[4(2 + \|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} + 2^{-1/2}) + 2^{-1/2} \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 \right] \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})}. \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

Logo, combinando (3.4.30) e (3.4.31) concluimos de (3.4.29), tendo em vista que $v = u_t$, que

$$\|u_t(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq \alpha_{1,T_0} \left(\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} \right) e^{-\nu^* t} \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})}, \quad (3.4.32)$$

onde

$$\alpha_{1,T_0}(\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}) = \sigma_{T_0} \left(\alpha_{0,T_0}(\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}) \right) \left[4(2 + \|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} + 2^{-1/2}) + 2^{-1/2} \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 \right].$$

Enfim, retornamos a (3.4.19) e utilizamos as estimativas exponenciais (3.4.2) e (3.4.32) para u e u_t em $L^2(\mathbf{R})$ a fim de concluirmos

$$\begin{aligned} \|u_{xxx}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} &\leq 2\alpha_{1,T_0}(\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})})e^{-\nu^*t} \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})} + (2\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})} + \frac{2c_2}{3\gamma^2})e^{-\lambda't} \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} \\ &\quad + \frac{2c_1^2}{3\gamma^3}e^{-4\lambda't} \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}^4 \\ &\leq \alpha_{2,T_0} \left(\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} \right) e^{-\lambda''t} \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})}, \end{aligned} \quad (3.4.33)$$

onde

$$\alpha_{2,T_0} \left(\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} \right) = 2\alpha_{1,T_0}(\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}) + \frac{2c_1^2}{3\gamma^3} \left(1 + \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}^3 \right) + 2\|\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R})}$$

e $\lambda'' := \min\{\nu^*, \lambda'\}$.

Por último, retornamos a (3.4.15) utilizando (3.4.33) de modo a concluir

$$\frac{1}{c} \|u(t)\|_{H^3(\mathbf{R})} \leq e^{-\lambda't} \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} + \alpha_{2,T_0} \left(\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})} \right) e^{-\lambda''t} \|u_0\|_{H^3(\mathbf{R})}$$

donde segue o desejado em (3.4.13), bastando para isso tomarmos

$$\beta_3(r) = c[1 + \alpha_{2,T_0}(r)], \quad r \geq 0.$$

□

Observação 3.13. O mesmo exemplo apresentado na Seção 3.2 para o problema linear, pode ser considerado aqui para a equação de KdV-Burgers considerada.

Análise Numérica para Equação de Onda com Dissipação Não Linear

4.1 Introdução

Este capítulo é dedicado ao estudo e análise numérica de uma equação de onda com dissipação não linear, mais precisamente,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 & , x \in \Omega, t > 0, \\ u(t, x) = 0 & , x \in \Gamma, t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), u_t(0, x) = u_1(x) & , x \in \Omega, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, é um conjunto aberto e limitado com fronteira $\partial\Omega = \Gamma$ bem regular, e $a, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas.

4.2 Revisão Sobre o Método Espectral

Consideremos o intervalo $\Omega =]0, 2\pi[$. Desta forma, a família de funções

$$V = \{ \phi_k(x) = e^{ikx} : x \in \Omega, k \in \mathbb{Z} \}$$

é um sistema ortogonal para o espaço $L^2(\Omega)$, munido de sua norma usual. Logo, os coeficientes de Fourier de uma dada função $u \in L^2(\Omega)$ são dados por

$$\hat{u}_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, a série de Fourier, referente ao sistema V , de uma função $u \in L^1(\Omega)$ é expressa por

$$\mathcal{F}u := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k \phi_k. \quad (4.2.1)$$

Além disso, assim como no caso contínuo, a sequência de polinômios trigonométricos $\{P_N u\}_{N \in 2\mathbb{N}}$ dada por

$$P_N u(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_k e^{ikx}, \quad N \in 2\mathbb{N}.$$

aproxima a função u , ou seja, $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N u = u$. Logo, se para cada $N \in 2\mathbb{N}$ denotarmos S_N o espaço dos polinômios trigonométricos de grau até $N/2$, isto é

$$S_N := \text{span} \{e^{ikx} : -N/2 \leq k \leq N/2\},$$

então não é difícil ver que, para cada $u \in L^2(\Omega)$ temos

$$(P_N u, v)_{L^2(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)}, \quad \text{para todo } v \in S_N.$$

Proposição 4.1. *Se $u : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ é um função infinitamente diferenciável e periódica em $[0, 2\pi]$, então $\hat{u}_k = O(k^{-m})$, para todo $m \geq 0$, quando $k \rightarrow \infty$.*

O Método de Fourier–Galerkin. Para $\Omega =]0, 2\pi[$, consideremos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - Mu(x, t) = 0 & , x \in \Omega, t > 0, \\ u(0, t) = u(2\pi, t) & , t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & , x \in \Omega, \end{cases}$$

onde M denota o operador de derivação com respeito a variável espacial, isto é, $Mu = \frac{\partial^j u}{\partial x^j}$,

$j \in \mathbb{N}$.

Denotemos

$$U_N(x, t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \alpha_k(t) \phi_k(x), \quad N \in 2\mathbb{N}.$$

Neste caso, para cada $N \in 2\mathbb{N}$, a condição

$$\left(\frac{\partial U_N}{\partial t}(\cdot, t) - MU_N(\cdot, t), \phi_l \right)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad l = -N/2, \dots, N/2,$$

juntamente com a condição de ortonormalidade $\frac{1}{2\pi}(\phi_k, \phi_l)_{L^2(\Omega)} = \delta_{kl}$, $k, l = -N/2, \dots, N/2$, onde δ_{kj} denota a função Delta de Kronecker, implicam no seguinte sistema de equações ordinárias

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \alpha_k(t) - (ik)^j \alpha_k(t) = 0, \\ \alpha_k(0) = \int_0^{2\pi} u_0(x) \phi_k(x) dx, \end{cases}$$

para $k = -N/2, \dots, N/2$.

O Método de Colocação de Chebyshev. Aqui, denotamos $\Omega =]-1, 1[$ e consideremos o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - Mu = 0 & , x \in]-1, 1[, t > 0, \\ u(1, t) = 0, u(-1, t) = 0 & , t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & , x \in]-1, 1[, \end{cases}$$

onde $Mu = \frac{\partial^j u}{\partial x^j}$, $j \in \mathbb{N}$. Neste caso, é conveniente escolhermos o sistema ortogonal $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, dado por

$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x)), \quad x \in]-1, 1[, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Logo, a solução aproximada possui a representação

$$U_N(x, t) = \sum_{k=0}^N \alpha_k(t) T_k(x), \quad N \in \mathbb{N}.$$

Ainda, as funções testes são dadas por $\psi_j(x) = \delta(x - x_j)$, $j = 1, \dots, N - 1$, onde os pontos

x_j são pontos distintos em $] - 1, 1[$. Neste caso, a afirmação

$$\left(\frac{\partial U_N}{\partial t}(\cdot, t) - MU_N(\cdot, t), \psi_j \right)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad j = 1, \dots, N-1,$$

se reduz ao problema

$$\begin{cases} \frac{\partial U_N}{\partial t}(x_j, t) - M(U_N)(x_j, t) = 0 & , t > 0, \\ U_N(-1, t) = u_N(1, t) = 0 & , t > 0 \\ U_N(x_j, 0) = u_0(x_j), \end{cases}$$

para $j = 0, 1, \dots, N$.

Uma escolha apropriada para os pontos de alocação $\{x_j\}_{j=0,1,\dots,N}$ são $x_j = \cos(\frac{j\pi}{N})$, precisamente os zeros de T_N .

A Expansão Discreta de Fourier. Em muitas aplicações, métodos numéricos baseados em séries de Fourier não podem ser implementados exatamente da maneira como sugerido pelo tratamento padrão destas séries. Dentre as dificuldades, temos que os coeficientes de Fourier de uma função arbitrária dada podem não ser conhecidos em sua forma fechada e devem, portanto, ser aproximados de alguma forma.

A chave para superarmos esta dificuldade encontra-se no uso da chamada *transformada discreta de Fourier*, que passamos a descrever a seguir.

Para um dado inteiro N , consideremos o conjunto dos pontos

$$x_j = \frac{2\pi j}{N}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Estes pontos são também chamados “nós”. Desta forma, os coeficientes discretos de Fourier de uma função a valores complexos u , definida em $[0, 2\pi]$, com respeito a estes pontos, são dados por

$$\tilde{u}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) e^{-ikx_j}, \quad -N/2 \leq k \leq N/2 - 1. \quad (4.2.2)$$

Devido a relação de ortogonalidade

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{ipx_j} = \begin{cases} 1, & p = Nm, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

temos ainda a seguinte fórmula inversa que fornece os valores da função u nos pontos de “nós” escolhidos

$$u(x_j) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \tilde{u}_k e^{ikx_j}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.2.3)$$

Consequentemente, o polinômio trigonométrico

$$I_N u(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \tilde{u}_k e^{ikx},$$

possui grau $N/2$, e interpola u nos pontos (ou nós) x_j , $j = 0, 1, \dots, N-1$, ou seja,

$$I_N u(x_j) = u(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

O polinômio $I_N u$ é também chamado de *série discreta de Fourier* de u .

Em análise numérica é comum utilizarmos o biblioteca *FFT* (*Fast Fourier Transform*) que nos permite calcular (4.2.2), e inversamente (4.2.3), com erro de aproximação de ordem $\mathcal{O}(N \log N)$ utilizando adição e multiplicação, ao invés da ordem $\mathcal{O}(N^2)$.

Os coeficientes \tilde{u}_k são, portanto, uma aproximação para os coeficiente de Fourier \hat{u}_k de u utilizando para isso a regra do trapézio.

Introduziremos ainda o produto interno discreto por

$$(u, v)_N = \frac{2\pi}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) \bar{v}(x_j),$$

onde u, v são polinômios de grau $N/2$. A forma bilinear $(\cdot, \cdot)_N$ definida acima é portanto uma aproximação para o produto usual de $L^2(\Omega)$, definida para polinômios de grau até $N/2$. Desta

forma, denotando por S_N o espaço dos polinômios de grau até $N/2$ temos a seguinte relação entre os produtos internos discreto e usual de $L^2(\Omega)$

$$(u, v)_N = (u, v)_{L^2(\Omega)}, \quad \text{para quaisquer } u, v \in S_N.$$

Além disso, se $u \in L^2(\Omega)$, então temos

$$(I_N u, v)_N = (u, v)_N, \quad \text{para todo } v \in S_N.$$

O operador I_N é também chamado *projeção ortogonal* sobre o espaço S_N com respeito ao produto interno $(\cdot, \cdot)_N$.

Contudo, combinando (4.2.1), (4.2.2) e (4.2.3) obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{u}_k &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) e^{-ikx_j} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{u}_m e^{imx_j} e^{-ikx_j} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i(m-k)x_j} \hat{u}_m \\ &= \hat{u}_k + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \hat{u}_{k+Nm}, \quad k = -N/2, N/2 - 1, \end{aligned}$$

donde segue que

$$I_N u = P_N u + R_N u, \tag{4.2.4}$$

onde

$$R_N u := \sum_{k=-N/2, N/2-1} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \hat{u}_{k+Nm} \phi_k. \tag{4.2.5}$$

A expressão (4.2.5) acima, também chamado *aliasing error*, fornece o erro cometido pela interpolação polinomial e a serie de Fourier truncada. Esta é ortogonal ao *erro de truncamento*

$u - P_N u$ de modo que

$$\|u - I_N u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u - P_N u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|R_N u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Estimativas para o erro de truncamento. Seja $u \in H_p^m(\Omega)$ onde $\Omega =]0, 2\pi[$ e, para cada $m \in \mathbb{N}$, $H_p^m(\Omega)$ denota o subespaço de $H^m(\Omega)$ das funções periódicas. Temos

$$\|u - P_N u\|_{L^2(\Omega)} \leq N^{-m} \left\| \frac{d^m}{dx^m} u \right\|_{L^2(\Omega)}, \quad m \geq 0. \quad (4.2.6)$$

Mais ainda, podemos estimar o erro de truncamento em espaços de Sobolev de ordem fracionária como segue

$$\|u - P_N u\|_{H^l} \leq C N^{l-m} \left\| \frac{d^m}{dx^m} u \right\|_{L^2(\Omega)}, \quad m \geq 0, \quad 0 \leq l \leq m. \quad (4.2.7)$$

Estimativas para o erro de interpolação. Dado $u \in L^2(0, 2\pi)$ temos $I_N u \in S_N$ e ainda $I_N u(x_j) = u(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, 2N - 1$. Logo,

$$\|u - I_N u\|_{L^2(\Omega)} \leq C N^{-m} \left\| \frac{d^m}{dx^m} u \right\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_p^m(\Omega). \quad (4.2.8)$$

Nota-se que o erro de interpolação comporta-se de maneira assintótica ao erro de truncamento. Uma avaliação do erro de interpolação é dada pela estimativas

$$\|u - I_N u\|_{H^l(\Omega)} \leq C N^{l-m} \left\| \frac{d^m}{dx^m} u \right\|_{L^2(\Omega)}, \quad (4.2.9)$$

onde $m \geq 1$, $0 \leq l \leq m$ e $u \in H_p^m(\Omega)$.

O erro devido a interpolação é, na verdade, sempre maior que o erro provido do truncamento da Série de Fourier. Entretanto, temos verificado que a influência do *aliasing* (ou serrilhamento) na precisão do método espectral é assintoticamente de mesma ordem que o erro de truncamento. De fato, as estimativas dos erros (4.2.6)-(4.2.9) mostram que os erros de trun-

camento e interpolação decaem na mesma taxa. Isto implica num comportamento similar dos erros de aproximação para os métodos de Galerkin e de colocação de Chebyshev.

Observação 4.1. As estimativas para o erro em na norma de $L^2(\Omega)$ nos permitem estimar o erro de *aliasing* $R_N u = I_N u - P_N u$ como segue

$$\begin{aligned} \|R_N u\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u - I_N u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq CN^{-m} \left\| \frac{d^m}{dx^m} u \right\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_p^m(\Omega). \end{aligned}$$

Estimativas em $L^\infty(\Omega)$ são dadas pela expressão

$$\|u - I_N u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq CN^{-m} \|u_m\|_{L^2(\Omega)}.$$

Uma importante implicação do fato acima observado é que o erro de *aliasing* não é, assintoticamente falando, pior que o erro de interpolação na norma de $L^2(\Omega)$.

Para mais detalhes sobre método espectral veja [14, 15, 56].

4.3 Equação de Onda com Dissipação Não Linear

Nesta seção iremos apresentar os resultados de existência e unicidade de soluções, bem como quanto ao comportamento assintótico de soluções do problema (4.1.1).

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, aberto e limitado com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ bem regular, e consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 & , x \in \Omega, t > 0, \\ u = 0 & , x \in \Gamma, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x) & , x \in \Omega, \end{cases} \quad (4.3.1)$$

onde $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções satisfazendo as seguintes hipóteses:

H.1. $a \in C^1(\overline{\Omega})$ é não negativa e $a(x) \geq a_0 > 0$, para quase todo $x \in \omega$, onde ω é um subconjunto aberto de $\overline{\Omega}$ contendo $\Gamma(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - x_0) \cdot \nu > 0\}$, onde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\nu = \nu(x)$ é o vetor normal exterior de Γ .

H.2. g é uma função contínua e monótona crescente satisfazendo:

(i) $g(s)s > 0$, para $s \neq 0$;

(ii) $ms^2 \leq g(s)s \leq Ms^2$, para $|s| \geq 1$, onde $0 < m \leq M$.

A fim de estabelecermos os resultados de existência e unicidade de soluções para o problema (4.3.1), utilizaremos a teoria de semigrupos não lineares (veja Seção 2.4). Para isso, consideremos o espaço de Hilbert $H := H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ munido da topologia

$$\|(u, v)\|_H^2 = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (u, v) \in H.$$

Em seguida, definimos os operadores $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ e $B : D(B) \subset H \rightarrow H$ por

$$\begin{aligned} D(A) &= [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times H_0^1(\Omega) & D(B) &= \{(u, v) \in H : ag(v) \in L^2(\Omega)\} \\ A(u, v) &= (v, \Delta u), \text{ para } (u, v) \in D(A) & B(u, v) &= (0, -ag(v)), \text{ para } (u, v) \in D(B) \end{aligned}$$

de modo a reescrever o problema (4.3.1) da seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U(t), \quad t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (4.3.2)$$

onde $U(t) = (u(t), u_t(t))$, $t \geq 0$, $U_0 = (u_0, u_1)$ e $\mathcal{A} = A + B$, com $D(\mathcal{A}) = D(A) \cap D(B) = \{(u, v) \in D(A) : ag(v) \in L^2(\Omega)\}$.

Com esta notação e tendo em vista os resultados da Seção 2.4, a existência e unicidade de soluções para o problema (4.3.2) é assegurada provando-se que o operador \mathcal{A} é m-dissipativo ou, equivalentemente, que $-\mathcal{A}$ é m-acretivo. Entretanto, tendo em vista a Proposição 2.14 e a Observação 2.6, é suficiente provarmos que $-\mathcal{A}$ é maximal monótono. Com efeito, provaremos que $-A$ é maximal monótono e que $-B$ é monótono, hemicontínuo e limitado, donde segue o

resultado tendo em vista a Proposição 2.15.

Prova de que $-A$ é maximal monótono. Primeiramente, observemos que se $U_1 = (u_1, v_1), U_2 = (u_2, v_2) \in D(A)$ então então, segue das Fórmulas de Green que

$$(-AU_1, U_2)_H = - \int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla u_2 + v_2 \Delta u_1 dx = \int_{\Omega} \nabla u_1 \nabla v_2 + v_1 \Delta u_2 dx = (U_1, AU_2)_H,$$

donde concluímos que $(-A)^* = A$, ou seja, o operador adjunto de $-A$ é A . Logo, segue do Teorema de Stone (veja Proposição 2.10) que $-A$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de Classe C_0 e, pelo Teorema de Lumer-Phillips (veja Proposição 2.4), portanto, temos que $-A$ é monótono e ainda $R(-A + \lambda I) = H$, para todo $\lambda > 0$. Sendo assim, segue da Proposição 2.14 que $-A$ é maximal monótono.

Prova de que $-B$ é monótono, hemicontínuo e limitado. Sejam $U_1 = (u_1, v_1), U_2 = (u_2, v_2) \in D(B)$. Temos

$$\begin{aligned} (U_1 - U_2, -BU_1 + BU_2)_H &= \int_{\Omega} a(x)(v_1 - v_2)(g(v_2) - g(v_1)) dx \\ &= - \int_{\Omega} a(x)(v_1 - v_2)(g(v_1) - g(v_2)) dx \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

onde a desigualdade segue do fato de g ser monótona (veja hipótese H.2). Portanto, $-B$ é monótono. Agora, sejam $U_i \in D(B)$, $i = 1, 2$. A hemicontinuidade de $-B$ segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja por exemplo Teorema IV.2, página 54 em [12]), ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow 0} (-B(U_1 + tU_2), U)_H = (-BU_1, U)_H, \text{ para todo } U \in H.$$

Por fim, seja $U = (u, v) \in D(B)$. Utilizando novamente as hipóteses H.1 e H.2 de modo que

$$\begin{aligned} \| -BU \|_H &= \left\{ \int_{\Omega} |a(x)g(v)|^2 dx \right\}^{1/2} \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \left\{ \int_{\{x \in \Omega: |v(x)| \leq 1\}} |g(v)|^2 dx + \int_{\{x \in \Omega: |v(x)| > 1\}} |g(v)|^2 dx \right\}^{1/2} \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \left\{ \sup_{t \in [-1, 1]} |g(t)| + \max\{m, M\} \left[\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right]^{1/2} \right\}, \end{aligned}$$

provando assim que $-B$ leva subconjuntos limitados de $D(B)$ em subconjuntos limitados de H .

Do exposto acima, temos provado que o operador $-\mathcal{A}$ é maximal monótono e, portanto, para cada $U_0 \in \overline{D(\mathcal{A})} = H$, o problema (4.3.2) admite uma única solução $U(t)$ na classe $C([0, \infty[; H)$. Em verdade, temos provado o seguinte resultado.

Teorema 4.2. *Suponha que as hipóteses H.1 e H.2 sejam satisfeitas. Então, para cada $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ e $u_1 \in L^2(\Omega)$, o problema (4.3.1) admite uma única solução u na classe*

$$u \in C([0, \infty[; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, \infty[; L^2(\Omega)).$$

Observação 4.3. Segue ainda dos resultados da Seção 2.4 que a solução obtida no Teorema 4.2 podem ser aproximada pelas soluções $\{U_\lambda(t) = (u_\lambda(t), u_{t\lambda}(t))\}_{\lambda > 0} \subset C^1(0, \infty; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$, dos problemas

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U_\lambda(t) = \mathcal{A}_\lambda U_\lambda(t), & t > 0, \\ U_\lambda(0) = U_0, \end{cases}$$

onde $\lambda > 0$, $\mathcal{A}_\lambda = \lambda^{-1}(J_\lambda - I)$ e $J_\lambda = (I - \lambda\mathcal{A})^{-1}$.

Acerca do comportamento assintótico das soluções providas pelo Teorema 4.2, observamos que se $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ o funcional de energia $E_u : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ associado a solução u , dado portanto

$$E_u(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 + |u_t(t)|^2 dx, \quad t \geq 0, \quad (4.3.3)$$

é decrescente. Com efeito, procedendo formalmente, multiplicamos a equação (4.3.1) por $u_t(t)$

e integrando por partes em Ω obtemos

$$\frac{d}{dt}E_u(t) = - \int_{\Omega} a(x)g(u_t(t))u_t(t)dx \leq 0, \quad (4.3.4)$$

onde usamos a parte (i) da hipótese H.2.

De acordo com os trabalhos de [22] e [21], estimativas para o decaimento da energia das soluções do problema (4.3.1) podem ser obtidas sem qualquer imposição para o crescimento próximo ao infinito da função dissipação g (veja hipótese H.2 (ii)), ainda sob a hipótese de arbitrariamente localizada no domínio Ω (veja hipótese H.1), e posto que os dados iniciais tomados em um espaço de mais regularidade. Mais precisamente, provou-se que as soluções do problema não linear (4.3.1) satisfazem a estimativa de observabilidade

$$E_u(0) \leq (\psi \circ h) \left(\int_0^T \int_{\Omega} a(x)g(u_t)u_t dx dx \right),$$

onde $\psi(s) = \Phi((\ln((s^{-1}) + 1))^{-2+\delta})$, $\delta > 0$, $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função côncava, contínua, monótono crescente tal que $h(0) = 0$ estabelecida a partir do comportamento de g próximo a origem e Φ é uma função contínua, crescente tal que $\Phi(0) = 0$ e dependendo do comportamento de g próximo ao infinito. Neste caso, as taxas para o decaimento são obtidas em função da solução S da seguinte equação diferencial ordinária

$$S_t + K^{-1}h^{-1} \circ \psi^{-1}(S) = 0, \quad S(0) = KE_u(0),$$

onde K é uma constante obtida em função de h e dos dados iniciais.

Além disso, quando a dissipação g possui limitação linear no infinito (veja hipótese H.1), provaremos que as soluções de (4.3.1) satisfazem a seguinte desigualdade de observabilidade:

Lema 4.1. *Existem $T > 0$ e uma função côncava, contínua e monótona crescente $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, satisfazendo $h(0) = 0$, tais que toda solução u de (4.3.1), cuja energia inicial é limitada*

$E_u(0) \leq r$, $r > 0$, satisfaz

$$E_u(0) \leq h \left(\int_0^T \int_{\Omega} a(x) g(u_t) u_t dx dt \right). \quad (4.3.5)$$

Demonstração. De acordo com o trabalho de [33], existe $h_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ côncava, estritamente crescente e tal que $h_0(0) = 0$, para a qual temos

$$h_0(g(s)s) \geq g(s)^2 + s^2, \quad |s| < 1. \quad (4.3.6)$$

Agora, quando $|s| \geq 1$ segue da hipótese H.2 (i) que

$$|g(s)|^2 + |s|^2 \leq h_1(g(s)s), \quad |s| \geq 1, \quad (4.3.7)$$

onde $h_1(s) = \frac{M^2+1}{m}s$, $s \in \mathbb{R}$.

Logo, a função h é então definida por

$$h = h_1 + h_0 \circ \frac{I}{\text{meas}(\omega)},$$

onde $\text{meas}(\omega)$ denota a medida da região ω e I a função identidade. Sendo assim, decorre das propriedades de h que é suficiente mostrarmos a desigualdade

$$E_u(0) \leq C \int_0^T \int_{\omega} a(x) [g(u_t)^2 + u_t^2] dx dt. \quad (4.3.8)$$

A desigualdade (4.3.8) acima é obtida utilizando-se técnicas de multiplicadores somado a um princípio de continuação única para o problema conservativo. \square

Inspirados pelas técnicas introduzidas por [33], consideramos a equação diferencial ordinária

$$S_t + q(S) = 0, \quad t > 0, \quad S(0) = s_0, \quad (4.3.9)$$

onde $s_0 = E_u(0)$ e $q(s) = s - (I + p)^{-1}(s)$, $s \in \mathbb{R}$, com $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função contínua,

positiva e estritamente crescente, definida a partir de h . Antes de estabelecermos o resultado principal, consideremos o seguinte lema.

Proposição 4.2. *Seja p uma função positiva, crescente e tal que $p(0) = 0$. Como p é crescente, podemos definir uma função crescente q , $q(x) = x - (I + p)^{-1}(x)$. Considere uma sequência $\{s_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de números positivos tais que*

$$s_{m+1} + p(s_{m+1}) \leq s_m.$$

Então $s_m \leq S(m)$, onde $S(t)$ é a solução do problema (4.3.9). Mais ainda, se $p(x) > 0$ para $x > 0$ então temos $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$.

Demonstração. Veja Lema 3.3 em [33]. □

Estabeleceremos o seguinte resultado acerca do comportamento assintótico das soluções de (4.3.1).

Proposição 4.3. *Suponha que as hipóteses H.1 e H.2 são válidas. Então existe uma constante $T > 0$ tal que para todo $r > 0$, se u é uma solução de (4.3.1) para a qual $E_u(0) \leq r$, então u satisfaz*

$$E_u(t) \leq S\left(\frac{t}{T} - 1\right), \quad t > T, \quad (4.3.10)$$

com $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$, onde S é a solução da equação diferencial ordinária (4.3.9).

Demonstração. Para a prova deste resultado, procederemos como em [33] (veja Lemas 3.2 e 3.3) adaptado para o nosso contexto. Denotemos os seguintes conjuntos

$$\omega_\alpha = \{(t, x) \in (0, T) \times \omega : |u_t(t, x)| > 1\}, \quad \omega_\beta = [(0, T) \times \omega] \setminus \omega_\alpha.$$

Segue da hipótese H.1(ii) obtemos

$$\int_{\omega_\alpha} |g(u_t)|^2 + |u_t|^2 dt dx \leq \frac{m^{-1} + M}{a_0} \int_{\omega_\alpha} a(x) g(u_t) u_t dt dx.$$

Por outro lado, utilizando então o Lema 4.1 temos

$$\int_{\omega_\beta} |g(u_t)|^2 + |u_t|^2 dt dx \leq \int_{\omega_\beta} h(g(u_t)u_t) dt dx$$

Em seguida, utilizando a desigualdade de Jensen obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\omega_\beta} h(g(u_t)u_t) dt dx &\leq \text{meas}(\omega_T) h \left(\frac{1}{a_0 \text{meas}(\omega_T)} \int_0^T \int_\omega a(x) g(u_t) u_t dx dt \right) \\ &= \text{meas}(\omega_T) r \left(\int_0^T \int_\omega a(x) g(u_t) u_t dx dt \right), \end{aligned}$$

onde $r(s) = h(s/N_0)$, $s \geq 0$ e $N_0 = a_0 \text{meas}(\omega_T)$. Logo, concluímos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\omega |g(u_t)|^2 + |u_t|^2 dx dt &\leq \frac{m^{-1} + M}{a_0} \int_{\omega_\alpha} a(x) g(u_t) u_t dt dx \\ &\quad + \text{meas}(\omega_T) r \left(\int_0^T \int_\omega a(x) g(u_t) u_t dx dt \right). \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

Tendo em vista que a energia é decrescente, segue de (4.3.11), juntamente com a hipótese H.2 e as desigualdades (4.3.6) e (4.3.7), que

$$\begin{aligned} E_u(T) &\leq E_u(0) \\ &\leq M_0 \int_0^T \int_\omega a(x) g(u_t) u_t dx dt + N_0 r \left(\int_0^T \int_\omega a(x) g(u_t) u_t dx dt \right) \\ &\leq [M_0 I + N_0 r] \left(\int_0^T \int_\Omega a(x) g(u_t) u_t dx dt \right), \end{aligned}$$

onde $M_0 = \frac{m^{-1} + M}{a_0}$. Portanto, observando (4.3.4) concluímos

$$p(E_u(T)) \leq E_u(0) - E_u(T),$$

onde $p(s) = [M_0 I + N_0 r]^{-1}(s)$, $s \geq 0$. Substituindo então T (respectivamente 0) por $(m+1)T$ (respectivamente por mT) obtemos

$$E((m+1)T) + p(E((m+1)T)) \leq E(mT), \quad \text{para } m = 0, 1, \dots$$

O resultado segue então aplicando-se a Proposição 4.2. \square

4.4 Descrição do Método de Aproximação

Para o que segue, estaremos considerando Ω um domínio limitado de \mathbb{R}^2 . Entretanto, domínios ilimitados podem ser considerados tendo em vista o princípio de velocidade finita para ondas. Estaremos também aqui que $a(x) \geq a_0 > 0$, para todo $x \in \Omega$, e para algum $a_0 > 0$, entretanto, podemos considerar exemplos de funções a menos restritivas, veja Observação 4.6.

Por conveniência, escreveremos $\Omega =]-\pi, \pi[$ e denotaremos $H_p^1(\Omega)$ e $L_p^2(\Omega)$ os seguintes espaços

$$H_p^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u \text{ é } 2\pi\text{-periódica}\}, \quad L_p^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : u \text{ é } 2\pi\text{-periódica}\},$$

munidos das topologias usuais de $H^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$, respectivamente. Denotaremos ainda por S_N o espaço dos polinômios trigonométricos de grau $N/2$ definido por

$$S_N = \text{span} \{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}^2, x \in \Omega, |k| = N/2, \dots, N/2 - 1\}.$$

Assim como descrito na Seção 4.2, se $N \in 2\mathbb{N}$ então a série truncada de Fourier de ordem $N/2$ um elemento $u \in L^2(\Omega)$ é dada por

$$P_N u = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_k e^{ikx},$$

e tendo em vista a relação de ortogonalidade entre os geradores de S_N vemos que

$$(P_N u, v)_{L^2(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)}, \text{ para todo } v \in S_N,$$

ou seja, $P_N u$ é também a projeção ortogonal de u sobre o subespaço S_N dos polinômios

trigonométricos de grau até $N/2$. Convém lembrar aqui também que

$$\|P_N u\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2\pi \sum_{|k| \leq N/2} |\hat{u}_k|^2,$$

e que existe $S(N) > 0$, satisfazendo $S(N) = \mathcal{O}(N^2)$, tal que

$$\|P_N u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq S(N) \|P_N u\|_{L^2(\Omega)}^2, \text{ para todo } u \in L^2(\Omega). \quad (4.4.1)$$

Seja $T > 0$. Particionaremos os intervalos $[0, T]$ e $[0, 2\pi]$ em subintervalos de igual comprimento a dizer $\Delta t = T/(M + 1)$ e $\Delta x = 2\pi/N$, respectivamente, onde $M, N > 0$ são inteiros positivos. Iniciamos o processo de iteração definindo U_N^0 como sendo a projeção ortogonal de u_0 sobre S_N em $L^2(\Omega)$. Em seguida, definimos U_N^1 tal que $\frac{U_N^1 - U_N^0}{\Delta t} = P_N u_1$, onde $P_N u_1$ é a projeção ortogonal de u_1 sobre S_N em $L^2(\Omega)$. Assim, dados $M, N > 0$ inteiros positivos e supondo conhecidos U_N^{n-1} e U_N^n , para cada $n \in \{1, \dots, M + 1\}$, obtemos U_N^{n+1} através do esquema semi-implícito dado pela equação (4.3.1):

$$\frac{1}{(\Delta t)^2} (U_N^{n+1} - 2U_N^n + U_N^{n-1}) + AU_N^{n+1} + P_N(a(\cdot)g(\frac{U_N^n - U_N^{n-1}}{\Delta t})) = 0, \quad (4.4.2)$$

onde A denota o operador de derivação de segunda ordem com relação a variável espacial com as devidas condições de fronteira, isto é, $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ (ou o operador laplaciano, quando se tratando de dimensões maiores que 1). Além disso, as funções a e g são supostas satisfazerem as hipóteses H.1 e H.2, respectivamente.

A expressão (4.4.2) é pois a discretização do problema (4.1.1). Observe ainda que podemos reescrever a equação (4.4.2) da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\Delta t)^2} (U_N^{n+1} - 2U_N^n + U_N^{n-1}, v_N)_{L^2(\Omega)} + (U_N^{n+1}, v_N)_{H^1(\Omega)} + \left(P_N(a(\cdot)g(\frac{U_N^n - U_N^{n-1}}{\Delta t})), v_N \right)_{L^2(\Omega)} \\ & = 0, \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

para todo $v_N \in S_N$.

Assim sendo, decorre da expressão (4.4.3) que o termo U_N^{n+1} é portanto definido pela expressão

$$a(U_N^{n+1}, v_N) = L_N(v_N), \text{ para todo } v_N \in S_N,$$

onde $a(\cdot, \cdot)$ é uma forma bilinear definida sobre S_N contínua e coerciva, ou seja, $a(v_N, v_N) \geq \|v_N\|_{H^1(\Omega)}^2$, para todo $v_N \in S_N$. A existência e unicidade de tal elemento segue pois do Teorema de Lax–Milgram (veja Corolário V.8, página 84 em [12]).

Na próxima seção veremos como o método descrito aqui converge para as soluções (4.1.1), para uma típica não linearidade g satisfazendo a hipótese H.2.

4.5 Estabilidade e Convergência do Método

Estabeleceremos aqui as desigualdades necessárias que nos permitam concluir a convergência das soluções aproximadas do problema (4.1.1). Estaremos considerando a notação utilizada nas seções anteriores.

Assim como descrito em [27], introduzimos as discretizações para a derivada temporal e para a energia, aqui adaptadas ao nosso esquema:

$$V_N^{n-1} := \frac{U_N^n - U_N^{n-1}}{\Delta t} \text{ (discretização para derivada temporal);}$$

$$F_N^n = (AU_N^n, U_N^n)_{L^2(\Omega)} + (V_N^{n-1}, V_N^{n-1})_{L^2(\Omega)} \text{ (discretização para a energia).}$$

Denotaremos ainda a energia referente aos dados iniciais por $E_0 := \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_1\|_2^{H^1(\Omega)}$.

Antes de estabelecermos o resultado de convergência, estabeleceremos alguns resultados de estabilidade.

4.5.1 Lemas de Estabilidade

Fazendo $v_N = U_N^{n+1} - U_N^n$ no problema discretizado (4.4.3) obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{U_N^{n+1} - 2U_N^n + U_N^{n-1}}{(\Delta t)^2} + AU_N^n + P_N(ag(\frac{U_N^n - U_N^{n-1}}{\Delta t})), U_N^{n+1} - U_N^n \right)_{L^2(\Omega)} \\ &= I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &:= \left(\frac{U_N^{n+1} - 2U_N^n + U_N^{n-1}}{(\Delta t)^2}, U_N^{n+1} - U_N^n \right)_{L^2(\Omega)}; \\ I_2 &:= (AU_N^n, U_N^{n+1} - U_N^n)_{L^2(\Omega)}; \\ I_3 &:= \left(P_N(ag(\frac{U_N^n - U_N^{n-1}}{\Delta t})), U_N^{n+1} - U_N^n \right)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Calculemos cada um dos termos acima separadamente.

Cálculo de I_1 .

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2(\Delta t)^2} \left\{ 2 (U_N^{n+1} - 2U_N^n + U_N^{n-1}, U_N^{n+1} - U_N^n)_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad + (U_N^{n+1} - 2U_N^n + U_N^{n-1}, U_N^{n+1} - U_N^n)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad \left. - (U_N^{n+1} - 2U_N^n + U_N^{n-1}, U_N^{n+1} - U_N^n)_{L^2(\Omega)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \|V_N^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|V_N^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{(\Delta t)^2} \|U_N^{n+1} - 2U_N^n + U_N^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Cálculo de I_2 .

$$\begin{aligned} 2I_2 &= 2 (AU_N^{n+1}, U_N^{n+1} - U_N^n)_{L^2(\Omega)} \\ &= (AU_N^{n+1}, U_N^{n+1})_{L^2(\Omega)} - (A(U_N^{n+1} - U_N^n), U_N^n)_{L^2(\Omega)} - (AU_N^n, U_N^n)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + (A(U_N^{n+1} - U_N^n), U_N^{n+1})_{L^2(\Omega)} \\ &= (AU_N^{n+1}, U_N^{n+1})_{L^2(\Omega)} + (A(U_N^{n+1} - U_N^n), U_N^{n+1} - U_N^n)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + (AU_N^n, U_N^n)_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

donde segue que

$$I_2 = \frac{1}{2} \left\{ (AU_N^{n+1}, U_N^{n+1})_{L^2(\Omega)} + (\Delta t)^2 (AV_N^n, V_N^n)_{L^2(\Omega)} - (AU_N^n, U_N^n)_{L^2(\Omega)} \right\}. \quad (4.5.3)$$

Combinando então (4.5.2) e (4.5.3) concluimos

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{2} \left\{ F_N^n - F_N^{n-1} + (\Delta t)^2 (AV_N^n, V_N^n)_{L^2(\Omega)} + \|V_N^n - V_N^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \quad (4.5.4)$$

Cálculo de I_3 .

$$\begin{aligned} I_3 &= \Delta t \int_{\Omega} P_N(a(x)g(V_N^{n-1}))V_N^n dx \\ &= \Delta t \int_{\Omega} a(x)[V_N^{n-1}]^3[V_N^n - V_N^{n-1}]dx + \Delta t \int_{\Omega} a(x)|V_N^{n-1}|^4 dx, \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

onde usamos o fato de que $U_N^n - P_N U_N^n$ é ortogonal a todo elemento de S_N .

Combinando então (4.5.4) e (4.5.5) obtemos

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + I_3 &= \frac{1}{2} \left\{ F_N^{n+1} - F_N^n + (\Delta t)^2 (AV_N^n, V_N^n)_{L^2(\Omega)} + \|V_N^n - V_N^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \\ &\quad + \Delta t \int_{\Omega} a(x)[V_N^{n-1}]^3[V_N^n - V_N^{n-1}]dx + \Delta t \int_{\Omega} a(x)|V_N^{n-1}|^4 dx. \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

Utilizando a Desigualdade de Gagliardo–Nirenberg (veja [37]) temos

$$\begin{aligned} &\left| \Delta t \int_{\Omega} a(x)[V_N^{n-1}]^3[V_N^n - V_N^{n-1}]dx \right| \\ &\leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} |V_N^n - V_N^{n-1}|^2 dx + (\Delta t)^2 \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |V_N^{n-1}|^6 dx \\ &\leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} |V_N^n - V_N^{n-1}|^2 dx + C_{\text{GN}} \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 (\Delta t)^2 \left[\|V_N^{n-1}\|_{H^1(\Omega)}^{2/6} \left(\int_{\Omega} |V_N^{n-1}|^4 dx \right)^{1/6} \right]^6 \\ &\leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} |V_N^n - V_N^{n-1}|^2 dx + C_{\text{GN}} \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 (\Delta t)^2 \|V_N^{n-1}\|_{H^1(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |V_N^{n-1}|^4 dx \\ &\leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} |V_N^n - V_N^{n-1}|^2 dx + C_{\text{GN}} \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 (\Delta t)^2 S(N) \|V_N^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |V_N^{n-1}|^4 dx, \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

onde utilizamos a estimativa (4.4.1) e $C_{\text{GN}} > 0$ denota a constante provinda da desigualdade de Gagliardo–Nirenberg.

Seja $n_0 \in \{0, 1, \dots, M+1\}$ tal que $\|V_N^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|V_N^{n_0}\|_{L^2(\Omega)}^2$, para todo $n \in \{0, 1, \dots, M+1\}$.

Combinando então (4.5.6) e (4.5.7) chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[F_N^n - F_N^{n-1}] + \frac{1}{2} \|V_N^n - V_N^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{(\Delta t)^2}{2} (AV_N^n, V_N^n)_{L^2(\Omega)} + a_0 \Delta t \int_{\Omega} |V_N^{n-1}|^4 dx \\ \leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} |V_N^n - V_N^{n-1}|^2 dx + C_{\text{GN}} \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 (\Delta t)^2 S(N) \|V_N^{n_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |V_N^{n-1}|^4 dx, \end{aligned}$$

para todo $n \in \{0, 1, \dots, M+1\}$. Logo, somando em n de 1 a M obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F_N^M + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^M \|V_N^n - V_N^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \sum_{n=1}^M \|V_N^n\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ + \left[a_0 \Delta t - C_{\text{GN}} \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 (\Delta t)^2 S(N) \|V_N^{n_0}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \sum_{n=1}^M \int_{\Omega} |V_N^{n-1}|^4 dx \leq \frac{1}{2} \|F_N^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

Finalmente, escolhendo M e N tais que

$$S(N) \Delta t < \frac{a_0}{2C_{\text{GN}} \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 E_0}, \quad (4.5.9)$$

concluimos de (4.5.8) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F_N^M + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^M \|V_N^n - V_N^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \sum_{n=1}^M \|V_N^n\|_{H^1(\Omega)}^2 + \delta_0 \Delta t \sum_{n=1}^M \int_{\Omega} |V_N^{n-1}|^4 dx \\ \leq \frac{1}{2} F_N^0, \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

onde $\delta_0 := a_0 - 2C_{\text{GN}} S(N) \Delta t \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 E_0 > 0$.

Com isto temos provado o seguinte resultado.

Lema 4.2. *Para M e N satisfazendo a condição de compatibilidade (4.5.9) temos válida a*

seguinte estimativa para a energia aproximada

$$F_N^n \leq F_N^0 \leq E_0, \text{ para todo } n \in \{0, 1, \dots, M\}. \quad (4.5.11)$$

O Lema 4.2 anterior mostra, em particular, que as sequências $\{U_N^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ e $\{V_N^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ são uniformemente limitadas em $H^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$. Também temos a seguinte estimativa.

Lema 4.3. *Suponha que N e M satisfazem a estimativa de compatibilidade (4.5.9). Então temos*

$$\sum_{n=0}^M \|U_N^{n+1} - U_N^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_1 \Delta t; \quad (4.5.12)$$

$$\sum_{n=0}^M \|V_N^{n+1} - V_N^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_2, \quad (4.5.13)$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas.

Demonstração. Primeiramente, observemos que segue do Lema 4.2 que

$$\|U_N^{n+1} - U_N^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (\Delta t)^2 \|V_N^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (\Delta t)^2 E_0,$$

para todo $n \in \{0, 1, \dots, M\}$. Logo, somando em n de 0 a M concluímos hipótese

$$\sum_{n=0}^M \|U_N^{n+1} - U_N^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (\Delta t)^2 (M+1) E_0 = T E_0 \Delta t,$$

donde segue a estimativa (4.5.12) bastando para isso definir $C_1 := T E_0$.

Para a segunda estimativa, compomos o problema aproximado (4.4.2) com V_N^n de modo a obter

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\Delta t} (V_N^{n+1} - V_N^n, V_N^n)_{L^2(\Omega)} + (A U_N^{n+1}, V_N^n)_{L^2(\Omega)} + (P_N(\text{ag}(V_N^{n-1})), V_N^n)_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \|V_N^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|V_N^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_N^n - V_N^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} + \Delta t (A U_N^{n+1}, V_N^n)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + (P_N(\text{ag}(V_N^{n-1})), \Delta t V_N^n)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

Por outro lado, utilizando o fato de que A e $A^{1/2}$ são autoadjuntos e também a desigualdade de Young temos

$$\Delta t (AU_N^{n+1}, V_N^n)_{L^2(\Omega)} = (AU_N^{n+1}, U_N^{n+1})_{L^2(\Omega)} - (AU_N^{n+1}, U_N^n)_{L^2(\Omega)}, \quad (4.5.15)$$

e

$$\begin{aligned} \left| (AU_N^{n+1}, U_N^n)_{L^2(\Omega)} \right| &\leq \sqrt{(AU_N^{n+1}, U_N^{n+1})_{L^2(\Omega)}} \sqrt{(AU_N^n, U_N^n)_{L^2(\Omega)}} \\ &\leq \frac{1}{2} (AU_N^{n+1}, U_N^{n+1})_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} (AU_N^n, U_N^n)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

Além disso, procedemos como na demonstração do Lema 4.2 de modo que

$$\begin{aligned} &\Delta t (P_N(ag(V_N^{n-1})), \Delta t V_N^n)_{L^2(\Omega)} \\ &= \Delta t \int_{\Omega} a(x) g(V_N^{n-1}) V_N^n dx \\ &= \Delta t \left\{ \int_{\Omega} a(x) |V_N^{n-1}|^4 dx + \int_{\Omega} a(x) g(V_N^{n-1}) [V_N^n - V_N^{n-1}] dx \right\} \\ &\geq \Delta t \left[a_0 - 2C \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \Delta t S(N)^2 E_0 \right] \int_{\Omega} |V_N^{n-1}|^4 dx - \frac{1}{4} \|V_N^n - V_N^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Logo, escolhendo M e N tais que a condição

$$a_0 - 2C_{GN} \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \Delta t S(N)^2 E_0 \geq 0, \quad (4.5.17)$$

se verifique obtemos a estimativa

$$\Delta t (P_N(ag(V_N^{n-1})), V_N^n)_{L^2(\Omega)} \geq -\frac{1}{4} \|V_N^n - V_N^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (4.5.18)$$

Contudo, combinando (4.5.15), (4.5.16) e (4.5.18) em (4.5.14) concluímos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left\{ \|V_N^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|V_N^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} + \frac{1}{4} \|V_N^n - V_N^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} (AU_N^{n+1}, U_N^{n+1})_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{2} (AU_N^n, U_N^n)_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

donde segue somando em n de 1 a M e também utilizando o Lema 4.2

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|V_N^{M+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^M \|V_N^{n+1} - V_N^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M \|U_N^{n+1}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ \leq \frac{1}{2} \|V_N^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} M E_0. \end{aligned}$$

A desigualdade (4.5.13) segue pois desta última escolhendo $C_2 := \frac{1}{2}(M+1)E_0$. \square

Lema 4.4. *Suponha que N e M satisfazem a estimativa $S(N)^2 \Delta t < \alpha$ para algum $\alpha > 0$ suficientemente pequeno. Então, existe $C = C(\|a\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}) > 0$ tal que*

$$\|V_N^n\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C, \quad N \geq 1, \quad n = 0, 1, \dots, M. \quad (4.5.19)$$

Demonstração. Compomos a equação (4.4.2) com $A(U_N^{n+1} - U_N^n)$ de modo a obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\Delta t)^2} (U_N^{n+1} - 2U_N^n + U_N^{n-1}, U_N^{n+1} - U_N^n)_{H^1(\Omega)} + (AU_N^{n+1}, A(U_N^{n+1} - U_N^n))_{L^2(\Omega)} \\ + \left(P_N \left(ag \left(\frac{U_N^n - U_N^{n-1}}{\Delta t} \right) \right), A(U_N^{n+1} - U_N^n) \right)_{L^2(\Omega)} = 0. \end{aligned} \quad (4.5.20)$$

Calculamos cada um dos termos na identidade acima como segue. Primeiramente, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\Delta t)^2} (U_{n+1} - 2U_N^n + U_N^{n-1}, U_N^{n+1} - U_N^n)_{H^1(\Omega)} \\ = (V_N^n - V_N^{n-1}, V_N^n)_{H^1(\Omega)} \\ = \frac{1}{2} \left\{ \|V_N^n\|_{H^1(\Omega)}^2 - \|V_N^{n-1}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|V_N^n - V_N^{n-1}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.5.21)$$

Além disso, calculamos o segundo termo como segue

$$\begin{aligned} 2 (AU_N^{n+1}, A(U_N^{n+1} - U_N^n))_{L^2(\Omega)} \\ = \|AU_N^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|AU_N^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|A(U_N^{n+1} - U_N^n)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (4.5.22)$$

Por fim, calculamos o último termo em (4.5.20) como segue

$$\begin{aligned}
& \left(P_N \left(ag \left(\frac{U_N^n - U_N^{n-1}}{\Delta t} \right) \right), A(U_N^{n+1} - U_N^n) \right)_{L^2(\Omega)} \\
&= \Delta t \int_{\Omega} P_N(ag(V_N^{n-1})) A V_N^{n-1} dx + \Delta t \int_{\Omega} P_N(ag(V_N^{n-1})) A(V_N^n - V_N^{n-1}) dx \\
&= K_1 + K_2,
\end{aligned} \tag{4.5.23}$$

onde

$$\begin{aligned}
K_1 &:= \Delta t \int_{\Omega} a(x) [V_N^{n-1}]^3 A V_N^{n-1} dx; \\
K_2 &:= \Delta t \int_{\Omega} P_N(a(x) [V_N^{n-1}]^3) A(V_N^n - V_N^{n-1}) dx.
\end{aligned}$$

Agora, temos

$$K_1 = 3\Delta t \int_{\Omega} a(x) [V_N^{n-1}]^2 |\nabla V_N^{n-1}|^2 dx + \Delta t \int_{\Omega} [V_N^{n-1}]^3 \nabla a \cdot \nabla V_N^{n-1} dx. \tag{4.5.24}$$

Mas, por outro lado, usando a limitação inferior de a temos

$$3\Delta t \int_{\Omega} a(x) [V_N^{n-1}]^2 |\nabla V_N^{n-1}|^2 dx \geq 3a_0 \Delta t \int_{\Omega} [V_N^{n-1}]^2 |\nabla V_N^{n-1}|^2 dx, \tag{4.5.25}$$

e

$$\begin{aligned}
& \left| \Delta t \int_{\Omega} [V_N^{n-1}]^3 \nabla a \cdot \nabla V_N^{n-1} dx \right| \\
& \leq \Delta t \|a\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} |V_N^{n-1}|^2 |\nabla V_N^{n-1}|^2 dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\Omega} |V_N^{n-1}|^4 dx \right\}^{1/2} \\
& \leq \frac{a_0 \Delta t}{2} \int_{\Omega} |V_N^{n-1}|^2 |\nabla V_N^{n-1}|^2 dx + \frac{\Delta t \|a\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}^2}{2a_0} \int_{\Omega} |V_N^{n-1}|^4 dx
\end{aligned} \tag{4.5.26}$$

Combinando então (4.5.25) e (4.5.26) com (4.5.24) resulta que

$$K_1 \geq \frac{5a_0 \Delta t}{2} \int_{\Omega} |V_N^{n-1}|^2 |\nabla V_N^{n-1}|^2 dx - \frac{\Delta t \|a\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}^2}{2a_0} \int_{\Omega} |V_N^{n-1}|^4 dx. \tag{4.5.27}$$

Calculamos K_2 utilizando a desigualdade de Young e também a estimativa (4.4.1) como segue

$$\begin{aligned}
|K_2| &= \left| \Delta t \int_{\Omega} P_N(a(x)[V_N^{n-1}]^3) A(V_N^n - V_N^{n-1}) dx \right| \\
&\leq \Delta t \|V_N^n - V_N^{n-1}\|_{H^1(\Omega)} \|P_N(a[V_N^{n-1}]^3)\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq \Delta t \sqrt{S(N)} \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|V_N^n - V_N^{n-1}\|_{H^1(\Omega)} \|[V_N^{n-1}]^3\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{1}{3} \|V_N^n - V_N^{n-1}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{3}{4} (\Delta t)^2 S(N)^2 C_{GN} \|a\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}^2 \|V_N^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |V_N^{n-1}|^4 dx,
\end{aligned}$$

donde segue que

$$K_2 \geq -\frac{1}{3} \|V_N^n - V_N^{n-1}\|_{H^1(\Omega)}^2 - \frac{3}{4} (\Delta t)^2 S(N)^2 C_{GN} \|a\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}^2 \|V_N^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |V_N^{n-1}|^4 dx, \quad (4.5.28)$$

Contudo, combinamos as estimativas (4.5.27) e (4.5.28) com (4.5.23) de modo a concluir

$$\begin{aligned}
&\left(P_N\left(ag\left(\frac{U_N^n - U_N^{n-1}}{\Delta t} \right) \right), A(U_N^{n+1} - U_N^n) \right)_{L^2(\Omega)} \\
&\geq \frac{5}{2} a_0 \Delta t \int_{\Omega} |V_N^{n-1}|^2 |\nabla V_N^{n-1}|^2 dx - \frac{1}{3} \|A(V_N^n - V_N^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad - \left[\frac{3}{2} C_{GN} S(N)^2 \Delta t \|V_N^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{a_0} \right] \frac{\Delta t \|a\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}^2}{2} \int_{\Omega} |V_N^{n-1}|^4 dx. \quad (4.5.29)
\end{aligned}$$

Agora, reunimos (4.5.21), (4.5.22) e (4.5.29) a fim de concluir a partir de (4.5.20) o seguinte

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \left\{ \|V_N^n\|_{H^1(\Omega)}^2 - \|V_N^{n-1}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right\} + \frac{1}{6} \|A(V_N^n - V_N^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left\{ \|AU_N^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|AU_N^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \\
&\quad + \frac{5a_0 \Delta t}{2} \int_{\Omega} |V_N^{n-1}|^2 |\nabla V_N^{n-1}|^2 dx + \frac{1}{2} \|A(U_N^{n+1} - U_N^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \tilde{C} \Delta t \int_{\Omega} |V_N^{n-1}|^4 dx, \quad (4.5.30)
\end{aligned}$$

onde $\tilde{C} > 0$ satisfaz

$$\tilde{C} > \left[\frac{3}{2} S(N)^2 \Delta t E_0 C_{GN} + \frac{1}{a_0} \right] \frac{\|a\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}^2}{2} \geq 0, \quad \forall N, M.$$

Somando (4.5.30) em n de 1 a M' , onde $M' \in \{1, \dots, M\}$, e tendo em vista a estimativa (4.5.10) obtemos

$$\begin{aligned} & \left\| V_N^{M'} \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{M'} \left\| V_N^n - V_N^{n-1} \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\| AU_N^{M'+1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^{M'} \left\| A(U_N^{n+1} - U_N^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \left\| V_N^0 \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\| AU_N^0 \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\tilde{C}\Delta t \sum_{n=1}^{M'} \int_{\Omega} |V_N^{n-1}|^4 dx \\ & \leq \left\| V_N^0 \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + E_0(1 + E_0\tilde{C}/\delta_0), \text{ para todo } M' \in \{1, \dots, M\}, \end{aligned}$$

donde segue o resultado. □

4.5.2 O Teorema de Convergência

A fim de estabelecermos os resultados de convergências, introduziremos as funções que aproximarão a solução. Com efeito, sejam $M > 0$ e $N > 0$ inteiros positivos dado como acima. Assim como em [55], introduzimos as funções

$$\begin{aligned} u_{N,M}(x, t) &= \sum_{n=0}^M \chi_{[t_n, t_{n+1}[}(t) U_N^n(x), \\ \tilde{u}_{N,M}(x, t) &= \sum_{n=0}^M \chi_{[t_n, t_{n+1}[}(t) \left([U_N^{n+1}(x) - U_N^n(x)] \frac{t - t_n}{\Delta t} + U_N^n(x) \right), \end{aligned}$$

para $x \in \Omega$, $t \in [0, T]$, onde $t_n := n\Delta t$, $n = 0, 1, \dots, M + 1$ (veja também Figuras 4.1 e 4.2).

Da mesma forma, introduzimos as funções

$$\begin{aligned} v_{N,M}(x, t) &= \sum_{n=0}^M \chi_{[t_n, t_{n+1}[}(t) V_N^n(x), \\ \tilde{v}_{N,M}(x, t) &= \sum_{n=0}^M \chi_{[t_n, t_{n+1}[}(t) \left([V_N^{n+1}(x) - V_N^n(x)] \frac{t - t_n}{\Delta t} + V_N^n(x) \right), \end{aligned}$$

para $x \in \Omega$, $t \in [0, T]$, onde $t_n := n\Delta t$, $n = 0, \dots, M + 1$.

Observe que as funções $\tilde{u}_{N,M}$ e $\tilde{v}_{N,M}$ são contínuas e deriváveis quase sempre. Além disso,

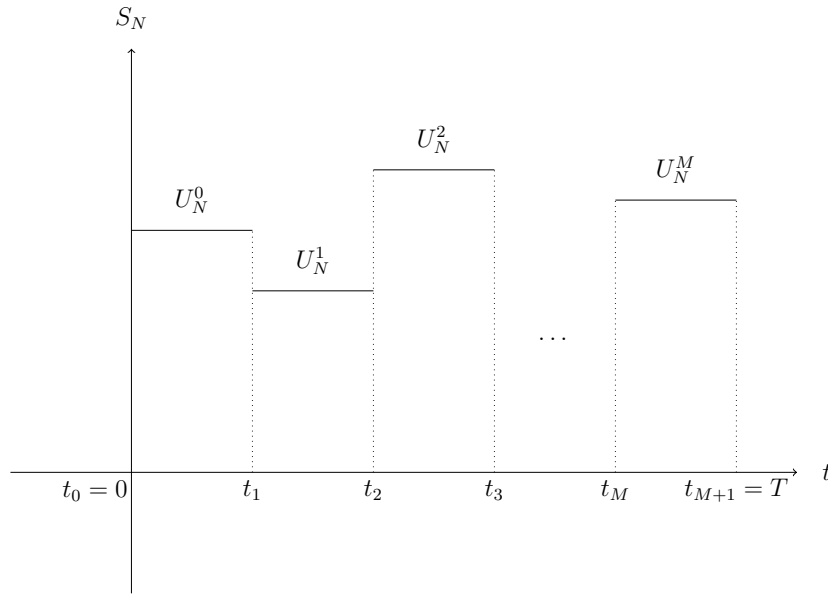


Figura 4.1: Função aproximação $u_{N,M}$

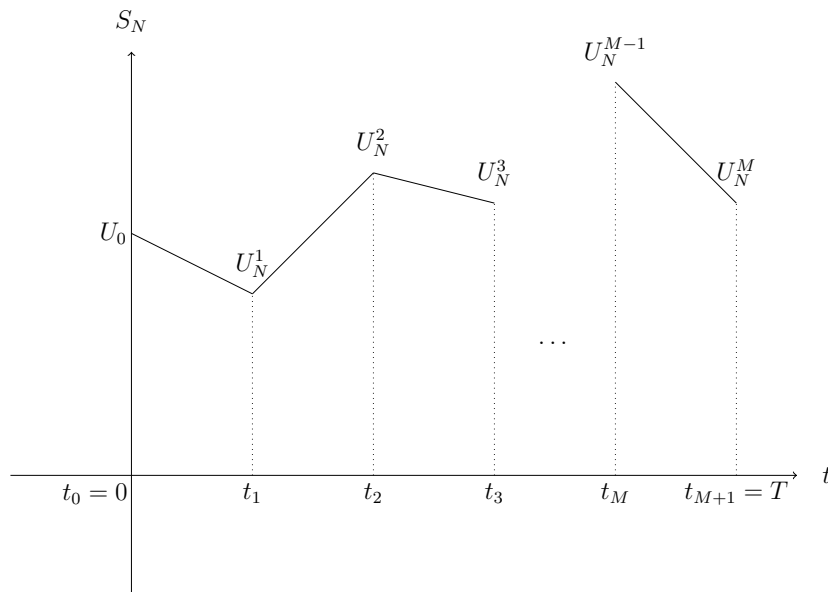


Figura 4.2: Função aproximação $\tilde{u}_{N,M}$

Observação 4.4. Gráficos semelhantes podem ser elaborados para as funções $v_{N,M}$ e $\tilde{v}_{N,M}$.

calculando as derivadas temporais de $\tilde{u}_{N,M}$ e $\tilde{v}_{N,M}$ vemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{u}_{N,M} &= \frac{U_N^{n+1} - U_N^n}{\Delta t}, \text{ para quase todo } t \in]t_n, t_{n+1}[, \text{ em } L^2(\Omega), \\ \frac{d}{dt} \tilde{v}_{N,M} &= \frac{V_N^{n+1} - V_N^n}{\Delta t}, \text{ para quase todo } t \in]t_n, t_{n+1}[, \text{ em } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

A introdução destas funções se deve ao fato de podermos reescrever o sistema (4.4.3) da seguinte forma equivalente:

$$\left(\frac{d}{dt} \tilde{v}_{N,M}(\cdot, t) + Au_{N,M}(\cdot, t + \Delta t) + P_N(ag(\tilde{v}_{N,M}(\cdot, t))), w_N \right)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad t \in]0, T[, \quad w_N \in S_N.$$

Também temos o sistema:

$$\left(v_{N,M}(\cdot, t) - \frac{d}{dt} \tilde{u}_{N,M}(\cdot, t), w_N \right)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad t \in]0, T[, \quad w_N \in S_N.$$

Com as notações estabelecidas aqui, provaremos o seguinte resultado de convergência.

Teorema 4.5 (Convergence Theorem). *Sejam $T > 0$, $g(s) = s^3$, $s \in \mathbb{R}$ e $a \in W^{1,\infty}(\Omega)$ tal que $a(x) \geq a_0 > 0$, para quase todo $x \in \Omega$. Suponha ainda que N e M satisfazem as condições de compatibilidade $S(N)^2 \Delta t < \alpha$, para algum $0 < \alpha < 1$. Então, as sequências $\{u_{N,M}\}$ e $\{\tilde{u}_{N,M}\}$ são limitadas em $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Além disso, quando $N, M \rightarrow \infty$, temos que $u_{N,M}$ e $\tilde{u}_{N,M}$ convergem para a solução u de (4.1.1) em $C([0, T]; H^s(\Omega))$ para $0 < s < 1$.*

Demonstração. Decorre dos Lemas 4.2 e 4.4 as seguintes limitações

$$\left\{ \begin{array}{l} \{u_{N,M}\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)); \\ \{\tilde{u}_{N,M}\} \text{ é limitada em } W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)); \\ \{v_{N,M}\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)); \\ \{\tilde{v}_{N,M}\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)). \end{array} \right. \quad (4.5.31)$$

Além disso, como $\{v_{N,M}\}$ é limitada em $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ temos que é também limitada em $L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$, para $1 \leq p < \infty$, donde segue em particular que $[v_{N,M}]^3$ é limitada em

$L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ e, portanto, $\left\{ \frac{d}{dt} \tilde{v}_{N,M} \right\}$ é limitada em $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Destas limitações e de (4.5.31) vem que, recorrendo a uma subsequência se necessário, existem funções u , \tilde{u} , v e \tilde{v} tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{N,M} \rightarrow u, \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)); \\ \tilde{u}_{N,M} \rightarrow \tilde{u}, \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(\Omega)); \\ \frac{d}{dt} \tilde{u}_{N,M} \rightarrow \frac{d}{dt} \tilde{u}, \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)); \\ v_{N,M} \rightarrow v, \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)); \\ \tilde{v}_{N,M} \rightarrow \tilde{v}, \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(\Omega)); \\ \frac{d}{dt} \tilde{v}_{N,M} \rightarrow \frac{d}{dt} \tilde{v}, \text{ fraco estrela em } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \end{array} \right. \quad (4.5.32)$$

Utilizando a estimativa (4.5.12) no Lema 4.3 temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega |\tilde{u}_{N,M} - u_{N,M}|^2 dx dt &= \sum_{n=0}^M \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_\Omega |U_N^{n+1} - U_N^n|^2 \frac{|t - t_n|^2}{(\Delta t)^2} dx dt \\ &= \frac{\Delta t}{3} \sum_{n=0}^M \|U_N^{n+1} - U_N^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C_1 \frac{(\Delta t)^2}{3} \rightarrow 0, \text{ quando } N, M \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Disto segue que $\tilde{u} = u$ em $L^2(\Omega \times]0, T[)$, ou seja, $\tilde{u} = u$ quase sempre em $\Omega \times]0, T[$. De maneira análoga, utilizando a estimativa (4.5.13) no Lema 4.3 temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega |\tilde{v}_{N,M} - v_{N,M}|^2 dx dt &= \sum_{n=0}^M \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_\Omega |V_N^{n+1} - V_N^n|^2 \frac{(t - t_n)^2}{\Delta t^2} dx dt \\ &\leq \frac{\Delta t}{3} \sum_{n=0}^M \|V_N^{n+1} - V_N^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C_2 \frac{\Delta t}{3} \rightarrow 0, \text{ quando } N, M \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

donde segue que $\tilde{v} = v$, quase sempre em $\Omega \times]0, T[$.

A fim de verificarmos que u é solução do problema (4.1.1), consideramos $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times]0, T[)$.

Multiplicando (4.4.2) por φ , tendo em vista as identidades e integrando em $\Omega \times]0, T[$ obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \left(\varphi, \frac{d}{dt} \tilde{v}_{N,M}(t) + Au_{N,M}(t + \Delta t) + P_N(ag(v_{N,M}(t))) \right)_{L^2(\Omega)} dt \\ &= - \int_0^T (\varphi_t(t), \tilde{v}_{N,M}(t))_{L^2(\Omega)} dt + \int_{\Delta t}^T (\varphi(t - \Delta t), u_{N,M}(t))_{H^1(\Omega)} dt \\ &\quad + \int_0^T (P_N(\varphi(t)), ag(v_{N,M}(t)))_{L^2(\Omega)} dt, \end{aligned} \quad (4.5.33)$$

onde usamos o fato que P_N é auto adjunto. Logo, observando que $ag(v_{N,M}) \rightarrow ag(v)$ fraco estrela em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, segue que passando o limite quando $N, M \rightarrow \infty$ em (4.5.33) e tendo em vista as convergências (4.5.32), juntamente com o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Teorema IV.2, página 54 em [12]) e o fato que $P_N(\varphi(t)) \rightarrow \varphi(t)$ concluímos

$$\int_0^T \left\langle \varphi(t), \frac{d}{dt} v(t) + Au(t) + ag(v(t)) \right\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} dt = 0. \quad (4.5.34)$$

Da mesma forma, tomando o limite quando $N, M \rightarrow \infty$ em

$$\int_0^T \left(v_{N,M}(t) - \frac{d}{dt} \tilde{u}_{N,M}(t), \varphi(t) \right)_{L^2(\Omega)} dt = 0,$$

vem que $v = \frac{d}{dt} u$ em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Disto e de (4.5.34) concluímos que u satisfaz a equação

$$u_{tt} - \Delta u + ag(u_t) = 0, \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega \times]0, T[).$$

Finalizaremos este resultado provando as condições iniciais. Com efeito, observando as convergências (4.5.32), segue do Teorema de Aubin–Lions que $u_{N,M} \rightarrow u$ em $C([0, T]; H^s(\Omega))$, para $0 < s < 1$. Logo, $\tilde{u}_{N,M}(\cdot, 0) \rightarrow u(\cdot, 0)$ em $H^s(\Omega)$, $0 < s < 1$, quando $N, M \rightarrow \infty$. Por outro lado, temos $u_{N,M}(\cdot, 0) = U_N^0 = P_N(u_0) \rightarrow u_0$ em $L^2(\Omega)$ quando $N \rightarrow \infty$. Logo, $u(\cdot, 0) = u_0$ em $L^2(\Omega)$. De maneira análoga, segue das convergências em (4.5.32) e do Teorema de Aubin–Lions que $\tilde{v}_{N,M} \rightarrow v = u_t$ em $C([0, T]; H^s(\Omega))$, para $0 < s < 1$. Logo, temos $\tilde{v}_{N,M}(\cdot, 0) \rightarrow u_t(\cdot, 0)$. Por outro lado, temos $\tilde{v}_{N,M}(\cdot, 0) = \frac{U_N^1 - U_N^0}{\Delta t} = P_N(u_1) \rightarrow u_1$ em $L^2(\Omega)$ quando $N \rightarrow \infty$. Portanto, por unicidade do limite concluímos $u_t(\cdot, 0) = u_1$ em $L^2(\Omega)$. \square

Observação 4.6. Destacamos aqui algumas das observações que podem ser feitas a respeito dos resultados obtidos:

1. Como a solução do problema (4.1.1) é única, um argumento de contradição mostra que qualquer subsequência de $\{u_{N,M}\}$ e de $\{\tilde{u}_{N,M}\}$ convergem para a solução.
2. A prova do resultado anterior pode ser adaptada para o caso mais geral em que $a \equiv \chi_\omega$, onde $\omega \subset \Omega$ é uma vizinhança de $\Gamma = \partial\Omega$.
3. A dificuldade do resultado torna-se menor quando considerando o problema em 1-D. Tal fato se deve a imersão contínua $H_0^1(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$.
4. O resultado pode ainda ser provado utilizando-se aproximações via método de elementos finitos, ainda para domínios mais gerais.

4.6 Simulações Numéricas

Finalizaremos este capítulo apresentando algumas simulações numéricas com o objetivo de ilustrar o método utilizado. Em verdade, simulações numéricas fornecem, em um primeiro esforço, indícios da convergência ou não do método escolhido. Apresentamos aqui algumas das simulações numéricas obtidas para o método de Fourier–Galerkin, bem como para o método de Chebyshev.

4.6.1 Aproximações de Fourier–Galerkin

Aplicamos o método de aproximação de Fourier–Galerkin descrito nas seções anteriores a fim de ilustrar o decaimento uniforme para as soluções do problema (4.1.1). Assim como foi mostrado nas seções 4.2 e 4.4, resolvemos o problema de Cauchy (4.1.1) no quadrado $\Omega =]-\pi, \pi[^2$ e partimos de dados iniciais com suporte inteiramente contidos em Ω a fim de evitarmos problemas com reflexão da onda na fronteira de Ω .

Para as simulações que apresentaremos, exibimos a solução de (4.1.1) em diferentes instantes de tempo e também a evolução da razão $r(t) = \frac{E_u(t)}{f(E_u(0),t)}$, onde $E_u(\cdot)$ denota a energia associada ao sistema (4.1.1) e f é uma função que depende de a e de g . É esperado que a razão $r(t)$ seja limitada por uma constante que depende somente da energia inicial $E_u(0)$. Para os testes numéricos a serem exibidos, consideramos $g(s) = s^p$, $p > 1$ e $f(E_u(0), t) = \left\{ E_u(0)^{\frac{1-p}{2}} + t(p-1) \right\}^{\frac{2}{1-p}}$ (veja exemplos 3 e 4 em [16]).

Consideramos inicialmente um mecanismo de damping não linear uniformemente distribuído sobre o domínio Ω ($a \equiv \text{cst}$) e $p = 3$. Resolvemos a equação de onda numérica utilizando o esquema do “pulo do sapo” (em inglês *leap frog*) para a discretização temporal, juntamente com aproximações de Fourier–Galerkin para a discretização espacial. Para o método de diferenças finitas, precisamos dos valores de u nos instantes $t = 0$ e $t = -\Delta t$; os valores de u em instantes anteriores a estes serão determinados por $u(x, 0) = u_0(x)$ e $u_t(x, 0) = u_1(x)$. Consideraremos dois subcasos: $u_1 = 0$ para as figuras 4.3 e 4.4 e u_1 correspondendo a um pulso *left-moving Gaussian* para as figuras 4.5 e 4.6.

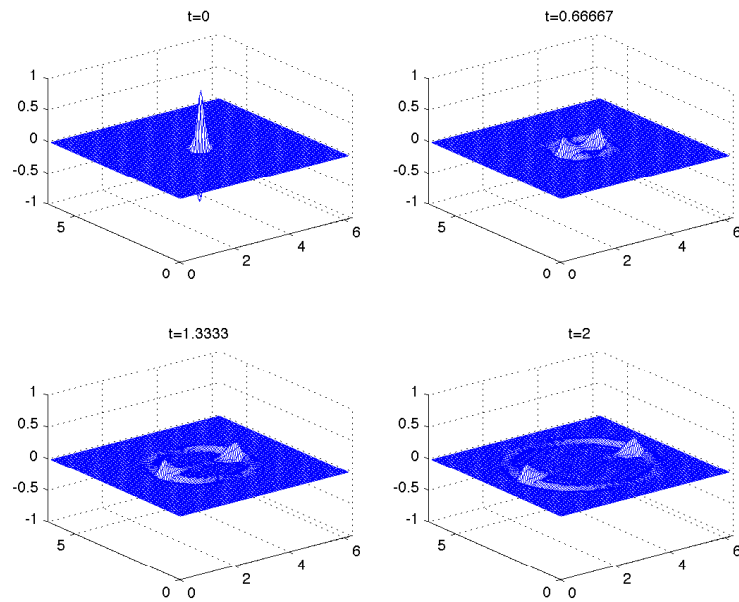


Figura 4.3: Evolução da solução u para $u_1 = 0$, $a \equiv \text{cst}$ e $p = 3$.

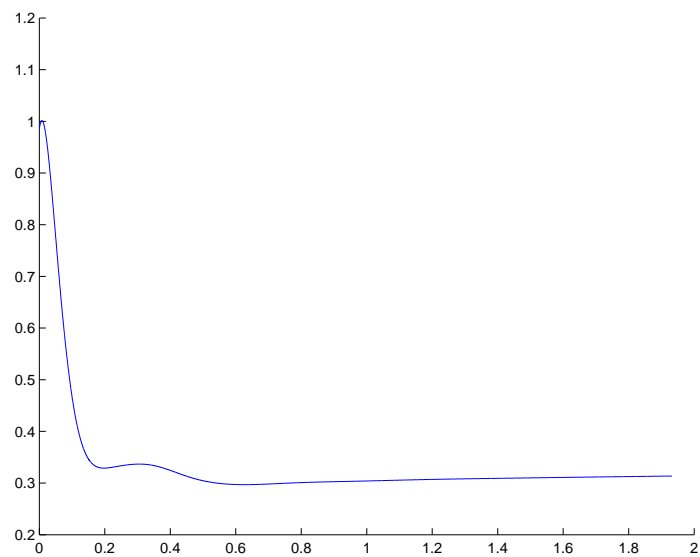


Figura 4.4: Evolução de $r(t)$ para $u_1 = 0$, $a \equiv \text{cst}$ e $p = 3$.

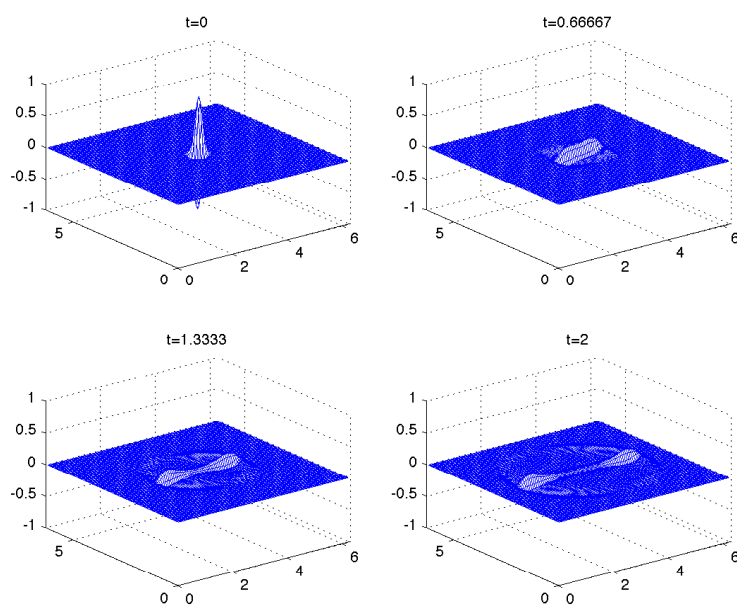


Figura 4.5: Evolução da solução u para $u_1 \neq 0$, $a \equiv \text{cst}$ e $p = 3$.

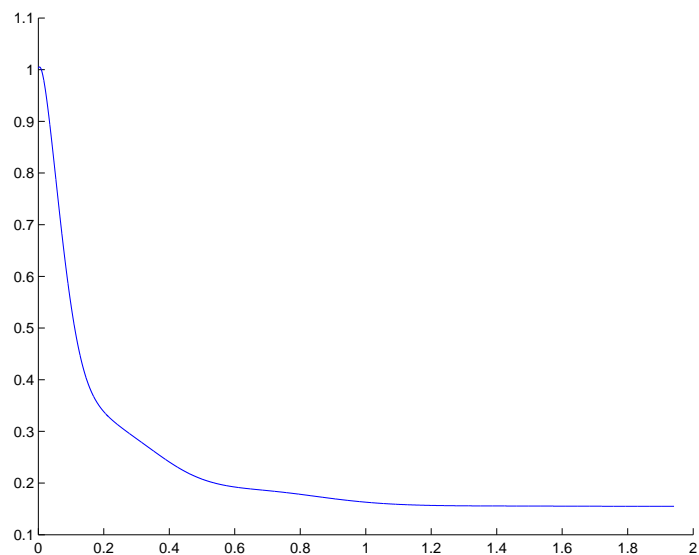


Figura 4.6: Evolução de $r(t)$ para $u_1 \neq 0$, $a \equiv \text{cst}$ e $p = 3$.

Para os exemplos a seguir, consideramos a mesma função g , porém, consideramos $a(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$, $(x, y) \in \Omega$ (veja Figuras 4.7 e 4.8).

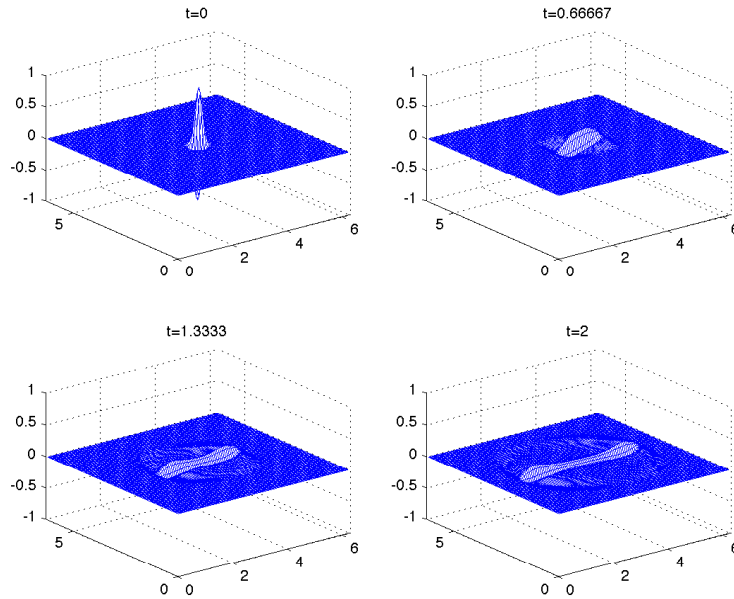


Figura 4.7: Evolução da solução u para $u_1 \neq 0$, $a(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ e $p = 3$.

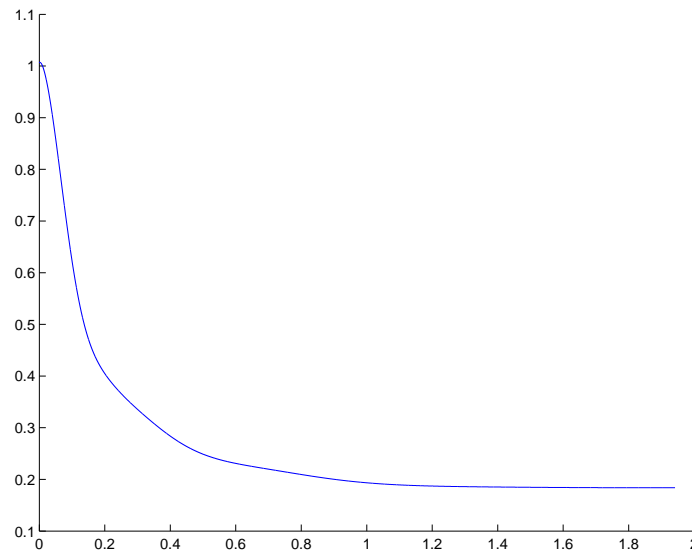


Figura 4.8: Evolução de $r(t)$ para $u_1 \neq 0$, $a(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ e $p = 3$.

Neste último exemplo, vemos que a condição periódica de fronteira altera o efeito dissipativo do mecanismo de damping e, portanto, o decaimento da energia da solução. Por esta razão,

consideramos na seção um método de aproximação espectral que leva em conta condições de fronteira do tipo Dirichlet.

4.6.2 Método Espectral de Chebyshev

A maneira natural de tratarmos, do ponto de vista numérico, problemas de valores de fronteira homogêneos do tipo Dirichlet é utilizando o método espectral de Chebyshev (ou método de colocação de Chebyshev). Neste caso, a solução aproximada é representada por seus valores nos pontos “nós” do *grid* considerado, a dizer $x_j = \cos(\frac{2\pi j}{N})$, onde $j \in \{0, 1, \dots, N\}$. Consideramos os mesmos casos da seção anterior. Finalmente, propomos também simulações para $g(s) = \text{sign}(s)s^2$. Na Figura 4.12, observamos instabilidades numéricas provavelmente devidos ao *aliasing error* (veja expressão (4.2.5)) causado pelo termo não linear, isto leva a um pequeno crescimento da razão $r(t)$. A fim de evitarmos este problema, o termo não linear pode ser *de-aliased* por um método clássico de truncamento: tomamos um grid mais fino para a discretização espacial e especificamos como zero os coeficientes discretos de Fourier para $k \geq N/3$ (veja figura 4.13). Como a incrementação no tempo esta relacionada com N pela relação de compatibilidade, torna-se perceptível o tempo de computação dos resultados.

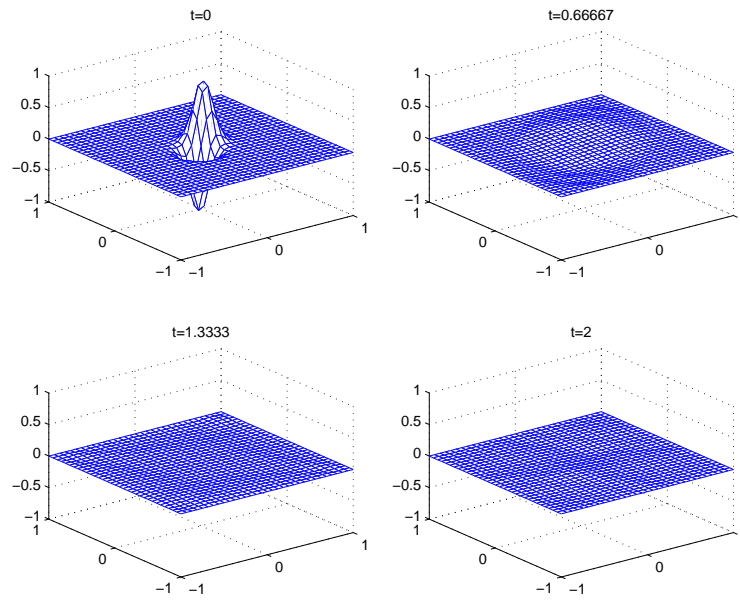


Figura 4.9: Evolução da solução u para $u_1 = 0$, $a \equiv \text{cst}$ e $p = 3$.

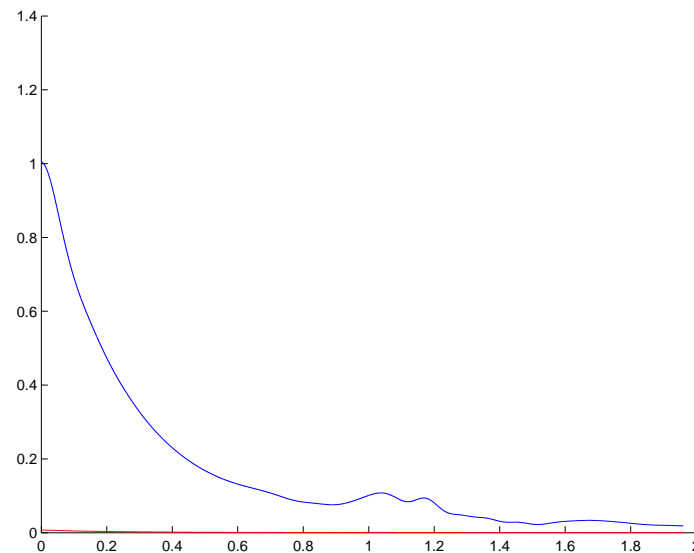


Figura 4.10: Evolução de $r(t)$ para $u_1 = 0$, $a \equiv \text{cst}$ e $p = 3$.

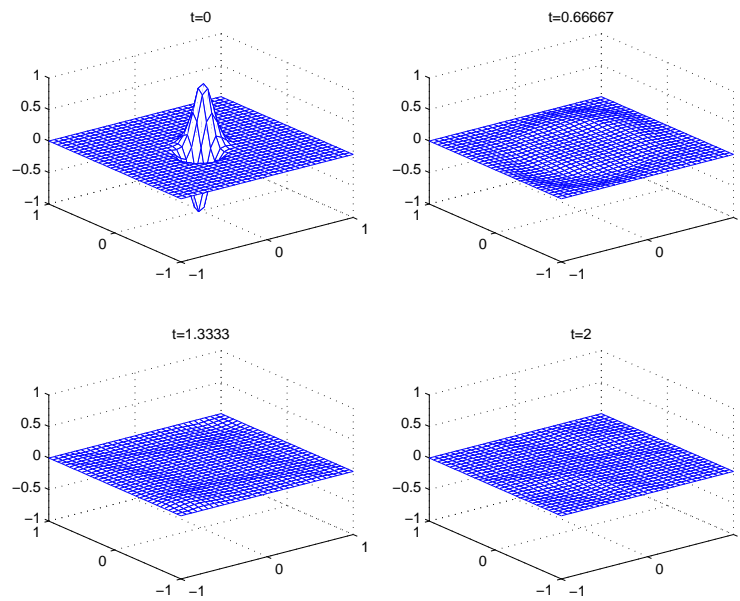


Figura 4.11: Evolução da solução u para $u_1 = 0$, $a(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ e $p = 3$.

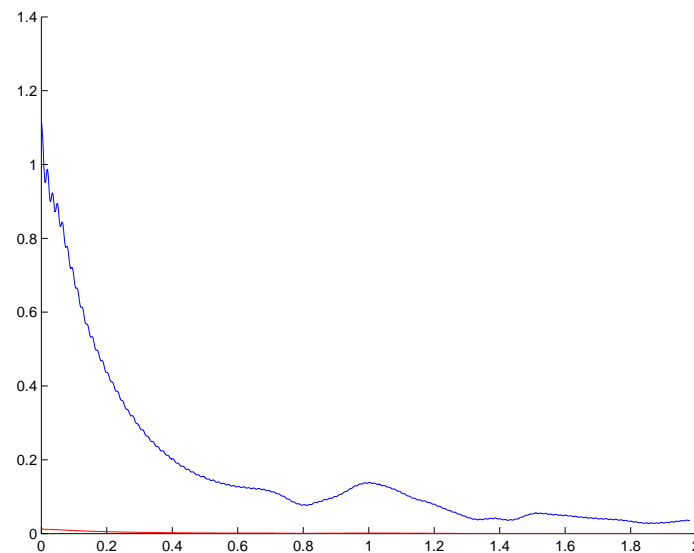


Figura 4.12: Evolução de $r(t)$ com $N = 32$ e para $u_1 = 0$, $a(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ e $p = 3$.

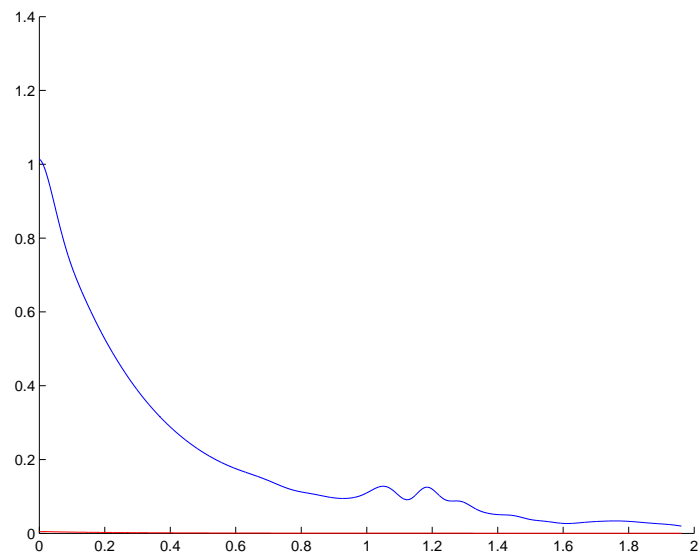


Figura 4.13: Evolução de $r(t)$ com $N = 64$ e para $u_1 = 0$, $a(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ e $p = 3$.

Conclusão

Concluimos a elaboração deste texto fazendo um breve resumo dos resultados obtidos e apresentados algumas das questões a serem respondidas e que podem levar a novos trabalhos.

5.1 Resumo dos Resultados Obtidos

Obtivemos no Capítulo 3, mais precisamente no Teorema 3.8, que o problema de KdV-Burgers, definido em \mathbb{R} e sujeito a um mecanismo de dissipação linear localizado e com sinal indefinido, é bem posto segundo Hadamard nos espaços $H^s(\mathbb{R})$, $s \in [0, 3]$. Estabelecemos ainda um critério que fornece condições suficientes para que as soluções deste problema possuam decaimento exponencial da energia nestes espaços. Na segunda parte do trabalho (veja Capítulo 4), provamos a convergência numérica das soluções do problema discretizado de onda, sujeito a dissipação não linear, bem como da energia associada a tais soluções.

5.2 Trabalhos Futuros

Diversas são as perguntas que podemos fazer acerca dos problemas aqui abordados. Listamos aqui algumas das quais surgiram durante o estudo realizado e elaboração deste texto.

- Tendo em vista que a equação de KdV-Burgers, definida em \mathbb{R} e sem mecanismo de dissipação localizado, é bem posto em $H^s(\mathbb{R})$, com $s > -3/4$, como mostram os trabalhos de Molinet & Ribaud [41] e Bona & Smith [8], é natural questionar a extensão dos resultados aqui obtidos para demais valores de s ;
- O estudo do problema de KdV-Burgers aqui considerado agora posto sobre um domínio limitado;
- É também de bastante interesse o estudo da equação de KdV sob o mesmo aspecto considerado para KdV-Burgers no Capítulo 3;
- Esta sob investigação o estudo do problema do tipo KdV-Burgers, agora considerado no domínio limitado $[0, 1]$, sujeito a dissipação linear localizada e com sinal indefinido;
- Estudo numérico da equação de onda mas com dissipação não linear e localizada, bem como dos modelos de KdV e KdV-Burgers aqui relacionados;
- Utilização do método de elementos finitos a fim de estudar o mesmo problema em domínios mais gerais;
- Aplicação do método para não linearidades mais gerais, por exemplo $g(s) = |s| s$, $s \in \mathbb{R}$.

Bibliografia

- [1] R. A. ADAMS AND J. J. F. FOURNIER, *Sobolev spaces. Second edition*, Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), 140, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [2] F. ALABAU-BOUSSOUIRA, *Convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems*, Appl. Math. Optim., 51 (2005), pp. 61–105.
- [3] V. BARBU, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucharest; Noordhoff International Publishing, Leiden, 1976.
- [4] C. BARDOS, G. LEBEAU, AND J. RAUCH, *Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary*, SIAM J. Control Optim., 30 (1992), pp. 1024–1065.
- [5] T. B. BENJAMIN, J. L. BONA, AND J. J. MAHONY, *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, 272 (1972), pp. 47–78.
- [6] J. L. BONA, C. J. AMICK, AND M. E. SCHONBEK, *Decay of solutions of some nonlinear wave equations*, J. Differential Equations, 81 (1989), pp. 1–49.
- [7] J. L. BONA AND R. SCOTT, *Solutions of the Korteweg-de Vries equation in fractional order Sobolev spaces*, Duke Math. J., 43 (1976), pp. 87–99.

- [8] J. L. BONA AND R. B. SMITH, *The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, 278 (1975), pp. 555–601.
- [9] J. L. BONA, S.-M. SUN, AND B.-Y. ZHANG, *Non-homogeneous boundary value problems for the Korteweg-de Vries and the Korteweg-de Vries-Burgers equations in a quarter plane*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 25 (2008), pp. 1145–1185.
- [10] J. BOURGAIN, *Periodic Korteweg de Vries equation with measures as initial data*, Selecta Math. (N.S.), 3 (1997), pp. 115–159.
- [11] H. BREZIS, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Notas de Matemática (50), North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973.
- [12] —, *Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson, Paris, 1983.
- [13] P. L. BUTZER AND H. BERENS, *Semi-groups of operators and approximation*, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1967.
- [14] C. CANUTO, M. Y. HUSSAINI, A. QUARTERONI, AND T. A. ZANG, *Spectral methods in fluid dynamics*, Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [15] —, *Spectral methods. Fundamentals in single domains.*, Scientific Computation., Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [16] M. M. CAVALCANTI, F. R. DIAS SILVA, AND V. N. DOMINGOS CAVALCANTI, *Uniform Decay Rates for the Wave Equation with Nonlinear Damping Locally Distributed in Unbounded Domains with Finite Measure*, SIAM J. Control Optim., 52 (2014), pp. 545–580.
- [17] M. M. CAVALCANTI AND V. N. DOMINGOS CAVALCANTI, *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*, EDUEM, Maringá, PR, Brazil, 2009.

- [18] M. M. CAVALCANTI, V. N. DOMINGOS CAVALCANTI, A. V. FAMINSKII, AND F. M. A. NATALI, *Decay of solutions to damped Korteweg-de Vries type equation*, Appl. Math. Optim., 65 (2012), pp. 221–251.
- [19] M. M. CAVALCANTI, V. N. DOMINGOS CAVALCANTI, AND P. MARTINEZ, *Existence and decay rate estimates for the wave equation with nonlinear boundary damping and source term*, J. Differential Equations, 203 (2004), pp. 119–158.
- [20] W. CHARLES, J. A. SORIANO, F. A. FALCÃO NASCIMENTO, AND J. H. RODRIGUES, *Decay rates for Bresse system with arbitrary nonlinear localized damping*, J. Differential Equations, 255 (2013), pp. 2267–2279.
- [21] M. DAOULATLI, *Rate of decay of solutions of the wave equation with arbitrary localized nonlinear damping*, Nonlinear Anal., 73 (2010), pp. 987–1003.
- [22] M. DAOULATLI, I. LASIECKA, AND D. TOUNDYKOV, *Uniform energy decay for a wave equation with partially supported nonlinear boundary dissipation without growth restrictions*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, 2 (2009), pp. 67–94.
- [23] D. B. DIX, *The dissipation of nonlinear dispersive waves: the case of asymptotically weak nonlinearity*, Comm. Partial Differential Equations, 17 (1992), pp. 1565–1593.
- [24] T. DŁOTKO, *The generalized Korteweg-de Vries-Burgers equation in $H^2(\mathbb{R})$* , Nonlinear Anal., 74 (2011), pp. 721–732.
- [25] L. C. EVANS, *Partial differential equations. Second Edition*, (2010), pp. xxii+749 pp.
- [26] R. GLOWINSKI, *Ensuring well-posedness by analogy: Stokes problem and boundary control for the wave equation*, J. Comput. Phys., 103 (1992), pp. 189–221.
- [27] J. HUBBARD AND F. HUBERT, *CALCUL SCIENTIFIQUE - De la théorie à la pratique - Illustrations avec Maple et Matlab. Volume 2 : Equations différentielles ordinaires, équations aux dérivées partielles*, Vuibert, 2006.
- [28] J.-A. INFANTE AND E. ZUAZUA, *Boundary observability for the space-discretizations of the 1-d wave equation*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 326 (1998), pp. 713–718.

- [29] V. KOMORNIK, *On the stabilization of the Korteweg-de Vries equation*, Bol. Soc. Parana. Mat. (3), 28 (2010), pp. 33–48.
- [30] V. KOMORNIK, D. L. RUSSELL, AND B.-Y. ZHANG, *Stabilisation de l'équation de Korteweg-de Vries*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 312 (1991), pp. 841–843.
- [31] J. E. LAGNESE, *Decay of solutions of wave equations in a bounded region with boundary dissipation*, J. Differential Equations, 50 (1983), pp. 163–182.
- [32] I. LASIECKA, *Stabilization of wave and plate-like equations with nonlinear dissipation on the boundary*, J. Differential Equations, 79 (1989), pp. 340–381.
- [33] I. LASIECKA AND D. TATARU, *Uniform decay rates for semilinear wave equations with nonlinear and nonmonotone boundary feedback, without geometric conditions*, Differential equations in Banach spaces (Bologna, 1991). Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 148 (1993), pp. 129–139.
- [34] I. LASIECKA AND D. TOUNDYKOV, *Energy decay rates for the semilinear wave equation with nonlinear localized damping and source terms*, Nonlinear Anal., 64 (2006), pp. 1757–1797.
- [35] C. LAURENT, L. ROSIER, AND B.-Y. ZHANG, *Control and stabilization of the Korteweg-de Vries equation on a periodic domain*, Comm. Partial Differential Equations, 35 (2010), pp. 707–744.
- [36] F. LINARES AND A. F. PAZOTO, *On the exponential decay of the critical generalized Korteweg-de Vries equation with localized damping*, Amer. Math. Soc., 135 (2007), pp. 1515–1522.
- [37] F. LINARES AND G. PONCE, *Introduction to nonlinear dispersive equations*, Universitext, Springer, New York, 2009.
- [38] J.-L. LIONS AND E. MAGENES, *Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. I.*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972.

- [39] P. MARTINEZ, *A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 4 (1999), pp. 419–444.
- [40] G. A. P. MENZALA, C. F. VASCONCELLOS, AND E. ZUAZUA, *Stabilization of the Korteweg-de Vries equation with localized damping*, Quart. Appl. Math., 60 (2002), pp. 111–129.
- [41] L. MOLINET AND F. RIBAUD, *The Cauchy problem for dissipative Korteweg de Vries equations in Sobolev spaces of negative order*, Indiana Univ. Math. J., 50 (2001), pp. 1745–1776.
- [42] J. E. MUÑOZ RIVERA AND M. G. NASO, *On the decay of the energy for systems with memory and indefinite dissipation*, Asymptot. Anal, 49 (2006), pp. 189–204.
- [43] J. E. MUÑOZ RIVERA AND R. RACKE, *Timoshenko systems with indefinite damping*, J. Math. Anal. Appl., 341 (2008), pp. 1068–1083.
- [44] A. F. PAZOTO, *Unique continuation and decay for the Korteweg-de Vries equation with localized damping*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 11 (2005), pp. 473–486.
- [45] A. F. PAZOTO AND L. ROSIER, *Uniform stabilization in weighted Sobolev spaces for the KdV equation posed on the half-line*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, 14 (2010), pp. 1511–1535.
- [46] A. PAZY, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, vol. 44 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York Inc., 1983.
- [47] L. ROSIER AND A. F. PAZOTO, *Uniform stabilization in weighted Sobolev spaces for the KdV equation posed on the half-line*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, (2010), pp. 1511–1535.
- [48] L. ROSIER AND B.-Y. ZHANG, *Global stabilization of the generalized Korteweg-de Vries equation posed on a finite domain*, SIAM J. Control Optim., 45 (2006), pp. 927–956.
- [49] D. L. RUSSELL AND B.-Y. ZHANG, *Exact controllability and stabilizability of the Korteweg-de Vries equation*, Trans. Amer. Math. Soc., 348 (1996), pp. 3643–3672.

- [50] R. E. SHOWALTER, *Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*, vol. 49 of Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [51] J. A. SORIANO, J. E. MUÑOZ RIVERA, AND L. H. FATORI, *Bresse system with indefinite damping*, *J. Math. Anal. Appl.*, 387 (2012), pp. 284–290.
- [52] L. TARTAR, *Interpolation non linéaire et régularité*, *J. Func. Anal.*, 9 (1972), pp. 469–489.
- [53] L. R. TCHEUGOUÉ TÉBOU AND E. ZUAZUA, *Uniform exponential long time decay for the space semi-discretization of a locally damped wave equation via an artificial numerical viscosity*, *Numer. Math.*, 95 (2003), pp. 563–598.
- [54] L. TEBOU, *Stabilization of the wave equation with localized nonlinear damping*, *J. Differential Equations*, 145 (1998), pp. 502–524.
- [55] R. TEMAN, *Navier–Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1983.
- [56] L. N. TREFETHEN, *Spectral methods in MATLAB*, Software, Environments, and Tools, 10, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000.
- [57] M. TSUTSUMI AND T. MUKASA, *Parabolic regularizations for the generalized Korteweg-de Vries equation*, *Funkcial. Ekvac.*, 14 (1971), pp. 89–110.
- [58] E. ZEIDLER, *Nonlinear functional analysis and its applications. Linear monotone operators.*, vol. II.A, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [59] E. ZUAZUA, *Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping*, *Comm. Partial Differential Equations*, 15 (1990), pp. 205–235.
- [60] ———, *Uniform stabilization of the wave equation by nonlinear boundary feedback*, *SIAM J. Control Optim.*, 28 (1990), pp. 466–477.