



Universidade Estadual de Maringá
Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
(Doutorado)

TESE

**Sistemas de Bresse com dissipação localizada e
não-linear**

por

Wenden Charles de Souza Rodrigues

abril - 2014



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Pós-graduação em Matemática

Sistemas de Bresse com dissipação localizada e não-linear

por

Wenden Charles de Souza Rodrigues

Tese de Doutorado submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática, vinculado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como quesito necessário à obtenção do título acadêmico de DOUTOR em MATEMÁTICA.

Área de concentração: Análise

Orientador: Prof. Dr. Juan A. Soriano Palomino

Agência Financiadora:



Maringá-PR, abril - 2014



Wenden Charles de Souza Rodrigues.

Licenciado em matemática pela Universidade Federal do Acre(Ufac).

Mestre em geometria diferencial pela Universidade de Brasília(UnB).

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá – PR., Brasil)

R696s Rodrigues, Wenden Charles de Souza
Sistemas de Bresse com dissipação localizada e
não-linear/ . -- Maringá, 2014.
86 f. : il. , figs.

Orientador: Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano
Palomino.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-
Graduação em Matemática, 2014.

1. Sistemas de Bresse. 2. Observabilidade. 3.
Estabilização. 4. Semigrupos não-lineares. I.
Palomino, Juan Amadeu Soriano, orient. II.
Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências
Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática. IV.
Título.

CDD 22. ED.515.353
JLM-001630

Título em inglês (Title): Bresse systems with nonlinear localized damping.

Palavras-chaves em inglês (Keywords): 1.Bresse systems. 2.Observability. 3.Stabilization. 4.Nonlinear semigroups.

Sistemas de Bresse com dissipação localizada e não-linear

por

Wenden Charles de Souza Rodrigues

Tese de doutorado defendida publicamente perante a Banca Examinadora designada pelo colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PMA), da Universidade Estadual de Maringá (UEM), como exigência parcial para obtenção do título de DOUTOR em MATEMÁTICA.

Aprovada pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino, UEM
(orientador)

Prof^a. Dr^a. Valéria Neves Domingos Cavalcanti, UEM
(membro)

Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti, UEM
(membro)

Prof. Dr. Jaime Edilberto Muñoz Rivera, UFRJ
(membro convidado)

Prof. Ph.D. Waldemar Donizete Bastos, Ibilce/Unesp
(membro convidado)

Local: Auditório do Dep. de Matemática, no bloco F-67, do campus sede da UEM.

Prof^a. Dr^a. Rosali Brusamarello
Coordenadora do PMA-UEM

Maringá - PR, 14 de abril de 2014.

DEDICATÓRIA

*Ao meu Deus, que sempre esteve
abençoando-me ad corpus. Christe eleison.
E a minha linda Maria por tudo!*

AGRADECIMENTOS

Mormente agradeço a minha mãe, aos meus familiares e amigos, devido ao amoroso incentivo e constante apoio.

Ao Prof. Dr. Juan Soriano agradeço pelo: acesso, companheirismo, disponibilidade e motivação. Sua postura enquanto orientador foi *sui generis*, portandose como um verdadeiro *gentleman* no ensino, e na pesquisa!

Aos professores e servidores da UEM, em especial do PMA, que tenham contribuído para a feitura deste trabalho.

Registro meus agradecimentos aos docentes do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Acre, por terem aprovado o meu pedido de liberação para realizar o doutoramento. Com tal aprovação e postura combateu-se o [avanço dos erros]¹, balizado no *animus dolandi* e no preceito da perseguição política que procrastina(va) a administração da universidade.

De forma muito especial, registro também, meus agradecimentos à Geirto de Souza pela presteza com a burocracia inerente aos processos de âmbito administrativo emanados do [avanço dos erros], e à Andréa Dantas pela presteza na condução sindical dos processos judiciais em desfavor do [avanço dos erros].

A todos os colegas do curso, *ab initio* aos integrantes da primeira turma de doutoramento, que colaboram matematicamente ou simplesmente para a amigável urbanidade.

Não posso deixar de registrar agradecimentos aos professores Dr. Mauro Rabelo(UnB) e Dr. Luquésio Jorge(UFC) pelas cartas de recomendação.

À guisa de leitura dos integrantes da Banca Examinadora, que com mais preparo e saber fizeram-me melhor enfrentar as questões.

Agradeço ao CNPq por alocar bolsa de estudos e taxa de bancada, por meio do Programa de Expansão da Pós-Graduação em Áreas Estratégicas. E por fim, a Fundação de Tecnologia do Acre por um ínfimo aporte inicial de recursos.

Wenden Charles.

¹em analogia a *Comédia dos erros* de Shakespeare.

Jesus, graças e louvores sejam
dadas a todo momento.
Quero te louvar na dor, na
alegria e no sofrimento.
E se em meio à tribulação, eu
me esquecer de ti Cristo, ilumina
minhas trevas com Tua luz.

Sacramento da Comunhão †

RESUMO

Rodrigues, Wenden Charles de Souza, Sistemas de Bresse com dissipação localizada e não-linear. 2014. 98f. Tese(Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá, Maringá-PR, 2014.

Nesta tese consideramos um sistema de vibração do tipo Bresse em um domínio limitado unidimensional. Na primeira parte do trabalho, o sistema tem uma dissipação total e não-linear na equação do ângulo de deslocamento do cisalhamento, e dissipação localizada e não-linear sobre as outras equações. Neste caso, mostramos a estabilidade assintótica sem impor condições sobre a igualdade de velocidade da propagação de ondas. Na segunda parte do trabalho, o sistema tem dissipação localizada e não-linear atuando em todas as três equações de onda. Neste caso, obtemos algumas taxas de decaimento para suas soluções sem restrições em torno dos coeficientes, bem como sobre a igualdade de velocidade da propagação de ondas. Um novo resultado sobre uma observabilidade interna para o sistema conservativo também foi obtido, a fim de alcançarmos o comportamento assintótico acima.

Palavras-chaves: sistemas de Bresse, observabilidade, estabilização, semigrupos não-lineares.

ABSTRACT

Rodrigues, Wenden Charles de Souza, Bresse systems with nonlinear localized damping. 2014. 98f. Tese(Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá, Maringá-PR, 2014.

In this thesis we consider a vibrating system of Bresse type in a one-dimensional bounded domain. In the first part of the work, the system has an nonlinear full damping acting in the equation of the shear angle displacement, and a nonlinear localized damping on the others equations. For this case, we proved the asymptotic stability without imposing any conditions on the equal-speed wave propagation. In the second part, the system has nonlinear localized damping mechanisms acting in all the three equations. In this case, we obtain some decay rates for its solutions with no restrictions on the coefficients as well as the condition of equal-speed wave propagation. A new result concerning an internal observability for the conservative system was also proved in order to reach the asymptotic stability above.

Keywords: Bresse systems, observability, stabilization, nonlinear semigroups.

PUBLICAÇÕES

Relação de trabalhos que foram publicados e comunicações apresentadas em congressos, baseados nos resultados da pesquisa até a data da defesa:

[doi>](#) CHARLES, WENDEN; SORIANO, J. A.; NASCIMENTO, F. A. F; RODRIGUES, J. H. Decay rates for Bresse system with arbitrary nonlinear localized damping, **Journal of Differential Equations**², 255(8), 2267-2290, 2013, ISSN 0022-0396.

———. Taxas de decaimento para sistemas de Bresse com dissipação localizada não-linear. In: VII Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações, UNIRIO, Rio de Janeiro, Novembro, 2013.

———. Decay rates for Bresse system with arbitrary nonlinear localized damping. In: XII Workshop on Partial Differential Equations, LNCC/UFRJ, Petrópolis, Setembro, 2013.

[doi>](#) SORIANO, J.A.; CHARLES, WENDEN; SCHULZ, R. A. Asymptotic stability for Bresse systems, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**³, 412(1), 369-380, 2014, ISSN 0022-247X.

———. Estabilidade assintótica para sistemas de Bresse. In: VI Encontro Nacional de Análise Matemática e Aplicações, UFS, Aracaju, Novembro, 2012.

———. On the stabilization for a Bresse System with infinite history. In: XI Workshop on Partial Differential Equations, UFRJ/CBPF, Rio de Janeiro, Agosto, 2012.

²Revista científica com qualis A1, segundo avaliação da CAPES.

³Revista científica com qualis A2, segundo avaliação da CAPES.

SUMÁRIO

Dedicatória	iv
Resumo	vii
Publicações	ix
1 Introdução	1
2 Preliminares	5
2.1 Espaços Funcionais	5
2.1.1 Distribuições	5
2.1.2 Espaços $L^p(\Omega)$	7
2.1.3 Espaços de Sobolev	10
2.2 Espaços de Funcionais à Valores Vetoriais	11
2.3 Topologias Fracas, Espaços Reflexivos e Separáveis	12

SUMÁRIO

2.3.1	Topologia Fraca	12
2.3.2	Topologia Fraca*	13
2.3.3	Espaços Reflexivos e Espaços Separáveis	14
2.4	O Espaço $W(0, T; X, Y)$	16
2.5	Alguns Resultados	16
2.5.1	Teorema de Carathéodory	16
2.5.2	Teorema de Holmgren	17
2.5.3	Resultados usuais	18
2.6	Semigrupos Não Lineares	21
2.6.1	Operadores Monótonos	22
2.6.2	Operadores Maximais Monótonos	24
3	Dissipação com localização mista	26
3.1	Introdução	26
3.2	Boa colocação e Regularidade	28
3.3	Desigualdade de Observabilidade	33
3.4	Estabilidade assintótica	41
4	Dissipações Localizadas	52
4.1	Introdução	52
4.2	Hipóteses, Resultados Preliminares e Existência	53

SUMÁRIO

4.3	Desigualdade de observabilidade	59
4.4	Comportamento Assintótico	67
	Índice remissivo	80
	Bibliografia	83

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Inicialmente gostaríamos de destacar que esse trabalho trata-se de uma tese oriunda da primeira turma de doutorado do Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá.

O presente trabalho tem como objeto de estudo o sistema proposto originalmente por Bresse. O engenheiro civil Jacques Antoine Charles Bresse (1822-1883) dedicou grande parte de seus estudos ao problema de vibrações em estruturas elásticas. Pelas suas enormes contribuições em mecânica aplicada é um dos 72 nomes na Torre Eiffel. Os resultados obtidos nesta tese são decorrentes do chamado sistema de Bresse para vigas curvas:

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l[w_x - l\varphi] = 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw) = 0 \\ \rho_1 w_{tt} - \kappa_0[w_x - l\varphi]_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + lw) = 0 \end{cases}$$

em $(0, L) \times \mathbb{R}_+$, onde $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, que é um sistema de equações diferenciais parciais hiperbólicas e acopladas, e ainda é um sistema conservativo.

As constantes positivas $\rho_1, \rho_2, b, l, \kappa_0, \kappa$ estão relacionadas com a composição do material. Por w, φ , and ψ vamos denotar, respectivamente, o deslocamento tangencial/longitudinal, o deslocamento vertical/normal e o deslocamento da seção transversal/cisalhante.

O sistema de Bresse para vigas curvas também é conhecido como o problema do arco circular:

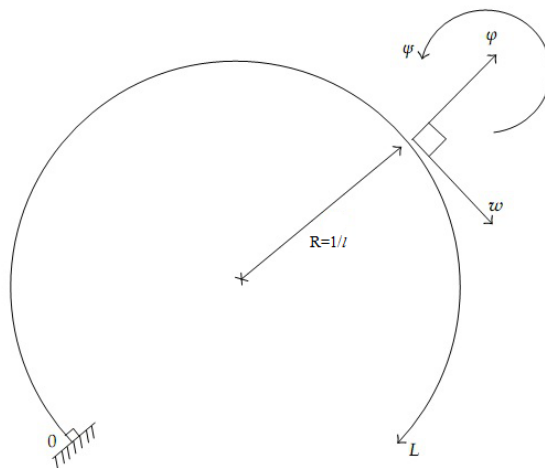


Figura 1.1: o problema do arco circular.

Destacamos que se $l \rightarrow 0$, o modelo acima reduz-se ao notório sistema de Timoshenko para vigas planas. Em seu livro História de Resistência de Materiais, Stephen Prokofievich Timoshenko(1878-1972), aborda a teoria do estiramento de vigas. No meio acadêmico Timoshenko é considerado o pai da engenharia mecânica atual.

Existem alguns poucos resultados sobre o comportamento assintótico dos sistemas de Bresse, onde os autores consideram diferentes tipos de mecanismos de dissipação. Por exemplo, em Liu e Rao [31], considera-se o sistema de Bresse com dois diferentes tipos de mecanismos de dissipação, dados por duas equações do calor, não-dissipativas e acopladas ao sistema. Em [17] os autores consideraram o sistema de Bresse com uma dissipação térmica efetiva em uma equação. Contemporaneamente em [40], provou-se que o mecanismo de dissipação dado por $\mathbf{a}(x)\psi_t$, onde $\mathbf{a} \in L^\infty(0, L)$ pode mudar de sinal, mas satisfazendo

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{1}{L} \int_0^L \mathbf{a}(x) dx > 0,$$

ainda deixa o sistema exponencialmente estável. Em relação ao caso não-dissipativo com \mathbf{a} indefinido podemos mencionar os trabalhos de Chen et al. [13], Freitas [19], Freitas e Zuazua [20], Benaddi e Rao [4], Menz [34], Rivera e Racke [36], Liu, Rao, e Zhang em [30], entre outros.

A hipótese de igualdade entre as velocidades de propagações de ondas:

$$(1.1) \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\kappa}{b}, \quad \text{e } \kappa = \kappa_0,$$

tem sido usada em muitos trabalhos que estabelecem taxas de decaimento exponencial, veja por exemplo [40, 5, 18, 16]. Entretanto, no caso de velocidades de propagação diferentes, ou seja, quando (1.1) falha, os mesmos trabalhos acima mencionados apresentam apenas taxas de decaimento polinomial. Esta hipótese, por outro lado, é uma hipótese matemática que não é realística do ponto de vista físico. De fato, isto nunca acontece desde que sendo ν o raio de Poisson, temos $\nu \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Vale mencionar que em todos os trabalhos citados foram considerados mecanismos de dissipação lineares.

Os resultados obtidos nesta tese foram publicados em [41] e [12]. Em ambos os trabalhos tratamos com modelos dissipativos, ou seja, modelos que liberam energia. Precipuamente destacamos que nossas dissipações são não-lineares. Em [41], tratamos do sistema de Bresse com dissipação total na equação de rotação das seções transversais e dissipação localizada nas outras equações:

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l[w_x - l\varphi] + \alpha(x)g_1(\varphi_t) = 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw) + g_2(\psi_t) = 0 \\ \rho_1 w_{tt} - \kappa_0[w_x - l\varphi]_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma(x)g_3(w_t) = 0 \end{cases}$$

e em [12] tratamos de dissipações localizadas em todas as equações:

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l[w_x - l\varphi] + \alpha_1(x)g_1(\varphi_t) = 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw) + \alpha_2(x)g_2(\psi_t) = 0 \\ \rho_1 w_{tt} - \kappa_0[w_x - l\varphi]_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + lw) + \alpha_3(x)g_3(w_t) = 0 \end{cases}$$

em $(0, L) \times \mathbb{R}_+$, onde $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, com condições de fronteira do tipo Dirichlet,

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

ou seja, condições de contorno para o modelo de vigas curvas do tipo fixa-fixa. E condições iniciais

$$\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \quad \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \quad \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1, \quad w(\cdot, 0) = w_0, \quad w_t(\cdot, 0) = w_1.$$

Assumiremos que as funções de localização $\alpha, \gamma, \alpha_i \in L^\infty(0, L)$, e as funções g_1, g_2 , e g_3 são contínuas e monótonas.

Nosso objetivo é obter taxas de decaimento para os sistemas propostos, sem nenhuma restrição ou relação entre os seus coeficientes. Além disso, particularmente em [12] uma importante desigualdade de observabilidade interna para o sistema conservativo também é provada a fim de atingirmos nosso objetivo. Cumpre destacar que este é o primeiro trabalho que estabelece esta observabilidade interna, e a técnica de multiplicadores foi utilizada para este fim.

O escopo do problema está direcionado às propriedades assintóticas das soluções dos respectivos sistemas dissipativos, ou seja, verificar se a dissipação induzida por algum dos mecanismos é forte o bastante para estabilizar o sistema e qual o tipo de taxa de decaimento que podemos obter. Neste intuito, o comportamento assintótico das soluções é estudado a fim de se obter um controle do tipo exponencial ou polinomial. A estabilização que nos inspirou tem lastro no trabalho de Lasiecka e Tataru [25], com o aporte da teoria de existência para semigrupos não-lineares tratada nos trabalhos de Barbu [1] e Brézis [3]. Concernente ao nosso resultado de estabilidade, mencionamos os trabalhos de Cavalcanti *et al.* [10, 9, 6] onde os autores fazem uso de um método a princípio introduzido por Lasiecka e Tataru em [25], e bastante utilizado posteriormente. Destes trabalhos, destacamos o trabalho [6] em que os cálculos foram bem adaptados para provar a taxa de decaimento desejada para nosso problema. Este método fornece taxas de decaimento que dependem da solução de uma EDO.

Vênia concedida, visando uma melhor exposição didática a Tese foi dividida da seguinte maneira:

✎ No capítulo 2 apresentamos laconicamente definições, notações e resultados que serão utilizados no desenrolar do texto;

✎ No capítulo 3, abordamos o comportamento assintótico dos sistemas de Bresse tratados em [41].

✎ Para finalizar, no capítulo 4, estabelecemos uma importante desigualdade de observabilidade para o sistema conservativo e ainda apresentamos algumas taxas de decaimento para o sistema de Bresse tratado em [12].

2.1 Espaços Funcionais

2.1.1 Distribuições

Sejam $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e o multíndice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Denotaremos o operador derivação em \mathbb{R}^n por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

onde $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

Seja Ω um aberto do \mathbb{R}^n e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos o *suporte* da função φ em Ω , denotado por $\text{supp}(\varphi)$, como o fecho em Ω do conjunto dos pontos x pertencentes à Ω em que φ não se anula, ou seja,

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^\Omega.$$

Particularmente quando $\text{supp}(\varphi)$ é compacto, dizemos que a função φ tem suporte compacto em Ω .

Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que são infini-

tamente diferenciáveis em Ω , e que possuem suporte compacto.

O *espaço das funções testes* de Ω , que denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$, é o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido da seguinte noção de convergência:

Dada uma sucessão $\{\varphi_\nu\}$ de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ dizemos que

$$(2.1) \quad \varphi_\nu \rightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{D}(\Omega)$$

se, e somente se, existe um subconjunto compacto \mathcal{K} de Ω tal que

- i) $\text{supp}(\varphi_\nu) \subset \mathcal{K}$, $\forall \nu$ e $\text{supp}(\varphi) \subset \mathcal{K}$;
- ii) $D^\alpha \varphi_\nu \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente sobre \mathcal{K} , $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Uma *distribuição* sobre Ω é uma forma linear sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência dada em (2.1).

Chamaremos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o *espaço vetorial das distribuições* sobre Ω . Diremos que a sucessão $\{T_\nu\}$ de elementos de $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, e escreveremos

$$T_\nu \rightarrow T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega),$$

quando

$$\langle T_\nu, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dados uma distribuição T sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a derivada distribucional de ordem α da distribuição T , denotada por $D^\alpha T$, será dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com essa definição, uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ possui derivada distribucional de todas as ordens e $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Além disso, a aplicação

$$\begin{aligned} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) &\rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\mapsto D^\alpha T \end{aligned}$$

é linear e contínua.

2.1.2 Espaços $L^p(\Omega)$

Sejam Ω um subconjunto do \mathbb{R}^n e p um número real tal que $1 \leq p < \infty$. Denotaremos por $L^p(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é Lebesgue integrável sobre Ω , ou seja,

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável ; } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

é um espaço de Banach.

Se define por $L^\infty(\Omega)$ o conjunto das (classes de) funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que u é mensurável e essencialmente limitada (ou limitada quase sempre (q.s)) em Ω , isto é,

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável ; } \exists C > 0, |u(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega \right\}.$$

Neste caso, dizemos que o número C é um *majorante essencial* de u . Uma norma em $L^\infty(\Omega)$ é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)| = \inf \left\{ C ; |u(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega \right\},$$

a qual o torna um espaço de Banach.

Em particular, o espaço $L^2(\Omega)$ com o produto interno

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx,$$

e a norma $|u|^2 = (u, u)$, é um espaço de Hilbert.

Seja $1 \leq p \leq \infty$. Diz-se que p' é o *índice conjugado* de p se $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Proposição 2.1 (Desigualdade de Young) *Se a e b são números reais não negativos,*

então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'},$$

sempre que $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Demonstração: Ver [2].

□

Proposição 2.2 (Desigualdade de Hölder) Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [2].

□

Quando $p = 2$ a desigualdade de Hölder é conhecida como **Desigualdade de Cauchy-Schwarz**, que representamos como

$$|(u, v)| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Proposição 2.3 (Desigualdade de Minkowski) Sejam $u, v \in L^p(\Omega)$ e $1 \leq p < \infty$, então

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [33].

□

Proposição 2.4 (Desigualdade de Jensen) Seja B um hipercubo do \mathbb{R}^n , então para toda função côncava F e toda função integrável $g \in L^1(B)$ temos

$$F\left(\frac{1}{me(B)} \int_B g(x) dx\right) \geq \frac{1}{med(B)} \int_B F(g(x)) dx.$$

Demonstração: Ver [35].

□

Teorema 2.5 (Convergência Dominada de Lebesgue) *Se uma sequência $\{f_k\}$ de funções integráveis a Lebesgue num conjunto Ω converge quase sempre em Ω para um função f , e se $|f_k| \leq \psi$ quase sempre em Ω , $\forall k \in \mathbb{N}$, para um certa função $\psi \in L^1(\Omega)$, então a integral $\int_{\Omega} f$ existe e*

$$\int_{\Omega} f \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k \, dx.$$

Demonstração: Ver [33].

□

Denota-se por $L^p_{loc}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é Lebesgue integrável sobre cada subconjunto compacto \mathcal{K} de Ω , ou seja,

$$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável ; } u \in L^p(\mathcal{K}) \text{ para cada } \mathcal{K} \subset\subset \Omega \right\}.$$

Proposição 2.6 (Du Bois Raymond) *Sejam $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x) \, dx = 0, \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega),$$

então $u = 0$ quase sempre em Ω .

Demonstração: Ver [7].

□

2.1.3 Espaços de Sobolev

Sejam Ω um aberto do \mathbb{R}^n , com $1 \leq p \leq \infty$ e $m \geq 1$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é o espaço vetorial de todas as funções u pertencentes à $L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u$ pertence à $L^p(\Omega)$, para todo $|\alpha| \leq m$. Simbolicamente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m \right\}.$$

Uma norma em $W^{m,p}(\Omega)$ é dada por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|, \text{ se } p = \infty,$$

a qual o torna um espaço de Banach para o concernente p .

No caso $p = 2$ escreve-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, e munindo-o com o produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx,$$

temos um espaço de Hilbert.

Define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, ou seja,

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Quando Ω é limitado em alguma direção x_i de \mathbb{R}^n e $1 \leq p < \infty$, então a norma em $W_0^{m,p}(\Omega)$ dada por

$$\|u\|^p = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx$$

é equivalente a norma induzida por $W^{m,p}(\Omega)$.

Representa-se por $W^{-m,p'}(\Omega)$ o dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$, onde

$1 \leq p < \infty$ e p' é o índice conjugado de p . Por $H^{-m}(\Omega)$ denota-se o dual topológico do espaço $H_0^m(\Omega)$.

2.2 Espaços de Funcionais à Valores Vetoriais

Seja X um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{D}(0, T; X)$ o espaço localmente convexo completo das funções vetoriais $\varphi : (0, T) \rightarrow X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em $(0, T)$. Dizemos que uma sucessão

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{D}(0, T; X)$$

se:

- i) Existe um compacto K de $(0, T)$ tal que $\text{supp}(\varphi_\nu)$ e $\text{supp}(\varphi)$ estão contidos em K , para todo ν ;
- ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\frac{d^k}{dt^k} \varphi_\nu(t) \rightarrow \frac{d^k}{dt^k} \varphi$ em X , uniformemente em $t \in (0, T)$.

O espaço das aplicações lineares contínuas de $\mathcal{D}(0, T) = \mathcal{D}(0, T; \mathbb{R})$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(0, T; X)$, ou seja, $S \in \mathcal{D}'(0, T; X)$ se $S : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow X$ é linear e se $\theta_\nu \rightarrow \theta$ em $\mathcal{D}(0, T)$ implicar que $\langle S, \theta_\nu \rangle \rightarrow \langle S, \theta \rangle$ em X . Diremos que

$$S_\nu \longrightarrow S \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; X)$$

se

$$\langle S_\nu, \theta \rangle \rightarrow \langle S, \theta \rangle \text{ em } X, \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T).$$

O espaço $\mathcal{D}(0, T; X)$ equipado com a convergência acima é denominado espaço das *distribuições vetoriais*¹ de $(0, T)$ com valores em X .

Denota-se por $L^2(0, T; X)$ o espaço das (classes de) funções vetoriais $u : (0, T) \rightarrow X$ mensuráveis em $(0, T)$, com $(0, T)$ dotado da medida de Lebesgue, tais que

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^2 dt < \infty.$$

¹Para mais detalhes sobre distribuições vetoriais veja [42]

O espaço $L^2(0, T, X)$ munido do produto interno

$$(u, v)_{L^2(0, T, X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt$$

é um espaço de Hilbert.

2.3 Topologias Fracas, Espaços Reflexivos e Separáveis

Nesta seção temos algumas propriedades das topologias fraca e fraca*, assim como resultados de convergência nestas topologias envolvendo a reflexividade e a separabilidade dos espaços envolvidos.

2.3.1 Topologia Fraca

Considerando E um espaço de Banach, a *topologia fraca* $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E que torna contínuas todas as aplicações $f \in E'$.

Seja $\{x_n\}$ uma sucessão convergente para x na topologia fraca $\sigma(E, E')$. Quando não houver possibilidade de confusão diremos apenas que $\{x_n\}$ converge fraco para x , e denotaremos por

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Proposição 2.7 *Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em E , então*

- i) $x_n \rightharpoonup x$ em E se, e somente se, $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$, $\forall f \in E'$;*
- ii) Se $x_n \rightarrow x$ em E , então $x_n \rightharpoonup x$ em E ;*
- iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E , então $\|x\|_E$ é limitada e $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|_E$;*
- iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E e $f_n \rightarrow f$ em E' , então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.*

Demonstração: Ver [8].

□

Considere $F : M \subset E \rightarrow [-\infty, \infty]$ e E um espaço de Banach. O funcional F é dito ser *fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente* num ponto $u \in M$ se, e somente se,

$$F(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n)$$

para cada sequência $\{u_n\}$ em M tal que $u_n \rightharpoonup u$.

2.3.2 Topologia Fraca*

Sejam E um espaço de Banach e $x \in E$ fixo. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} J_x : E' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \langle J_x, f \rangle = \langle f, x \rangle \end{aligned}$$

que é linear e contínua, portanto

$$J_x \in E'', \quad \forall x \in E.$$

Deste modo, definimos a aplicação $J : E \rightarrow E''$ tal que $J(x) = J_x$, a qual é chamada de *injeção canônica* de E em E'' .

A *topologia fraca**, ou $\sigma(E', E)$, é a topologia menos fina sobre E' que faz contínuas todas as aplicações J_x .

Seja $\{f_n\}$ uma sucessão convergente para f na topologia fraca*, ou seja, na topologia $\sigma(E', E')$. Com vistas a simplificação das notações escreveremos apenas que $\{f_n\}$ converge fraco* para f , ou simbolicamente,

$$f_n \xrightarrow{*} f \text{ em } E'$$

quando não houver possibilidade de confusão.

Proposição 2.8 *Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão em E' , então*

- i) $f_n \xrightarrow{*} f$ em E' se, e somente se, $\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad \forall x \in E$;
- ii) Se $f_n \rightarrow f$ forte, então $f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(E', E'')$;
- iii) Se $f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(E', E'')$, então $f_n \xrightarrow{*} f$ em E' ;
- iv) Se $f_n \xrightarrow{*} f$ em E' , então $\|f_n\|_{E'}$ está limitada e $\|f\|_{E'} \leq \liminf \|f_n\|_{E'}$;

v) Se $f_n \xrightarrow{*} f$ em E' e $x_n \rightarrow x$ em E , então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Demonstração: Ver [8].

□

2.3.3 Espaços Reflexivos e Espaços Separáveis

Dizemos que um espaço de Banach é *reflexivo* quando a injeção canônica $J : E \rightarrow E''$ é sobrejetora.

Um funcional $F : M \subset E \rightarrow [-\infty, \infty]$ é *coercivo* se $F(u) \rightarrow \infty$ sempre que $\|u\|_E \rightarrow \infty$, para $u \in M$.

Teorema 2.9 *Seja E um espaço de Banach reflexivo, $M \subset E$ um convexo fechado não vazio e $F : M \rightarrow (-\infty, \infty]$ uma função convexa, semicontínua inferiormente, coerciva e $F \neq \infty$. Então F alcança seu mínimo sobre M , isto é, existe $u_0 \in M$ tal que $F(u_0) = \min_{u \in M} F(u)$.*

Demonstração: Ver [2].

□

Para a unicidade do mínimo no teorema anterior precisamos que F seja estritamente convexo, como exarado pelo:

Teorema 2.10 *O funcional $F : M \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ tem quando muito um mínimo sobre M no caso que*

- i) M é um subconjunto convexo de um espaço linear E ;
- ii) F é estritamente convexo, isto é,

$$F((1-t)u + tv) < (1-t)F(u) + tF(v)$$

para todo $u, v \in M$, $u \neq v$, e para todo $t \in (0, 1)$.

Demonstração: Ver [42].

□

Teorema 2.11 *Seja um funcional $F : M \subset E \rightarrow [-\infty, \infty]$ sobre um convexo, fechado e M um subconjunto não vazio de um espaço de Banach reflexivo real. Se F é fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente e coercivo, então F possui um mínimo em M .*

Demonstração: Ver [42].

□

Um espaço métrico E é dito *separável* quando existe um subconjunto $M \subset E$ enumerável e denso em E .

Teorema 2.12 *Seja E um espaço de Banach tal que E' é separável. Então E é separável.*

Demonstração: Ver [2].

□

Teorema 2.13 *Seja E um espaço de Banach separável e seja $\{f_n\}$ uma sequência limitada em E' . Então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ que converge na topologia fraca* $(\sigma(E', E))$.*

Demonstração: Ver [2].

□

Teorema 2.14 *Seja E um espaço de Banach reflexivo e seja $\{x_n\}$ um sequência limitada em E . Então existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ que converge na topologia fraca $(\sigma(E, E'))$.*

Demonstração: Ver [2].

□

2.4 O Espaço $W(0, T; X, Y)$

Sejam X e Y dois espaços de Hilbert separáveis, $X \subset Y$ com imersão contínua e densa. Definimos um novo espaço de Hilbert

$$W(0, T; X, Y) = \{u \in L^2(0, T; X); u_t \in L^2(0, T; Y)\},$$

com a norma

$$\|u\|_{W(0, T; X, Y)}^2 = \|u\|_{L^2(0, T; X)}^2 + \|u_t\|_{L^2(0, T; Y)}^2.$$

Para mais detalhes sugerimos uma leitura de Dautray e Lions [15].

Considere o espaço $C([0, T]; E)$ como sendo o conjunto das funções contínuas de $[0, T]$ em E , munido da norma

$$\|u\|_{C([0, T]; E)} = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_E.$$

Com as notações supracitadas, temos o

Teorema 2.15 *Se $u \in W(0, T; X, Y)$ então $u \in C([0, T]; [X, Y]_{\frac{1}{2}})$, onde $[X, Y]_{\theta}$ denota a interpolação² entre os espaços X e Y .*

Demonstração: Ver [29].

□

2.5 Alguns Resultados

2.5.1 Teorema de Carathéodory

O teorema de Carathéodory é uma ferramenta indispensável, por isso o enunciamos aqui e uma demonstração pode ser encontrada em Coddington e Levinson [14].

Considere $Q = (0, T) \times \Omega$ um aberto do \mathbb{R}^{n+1} , $(t, x) \in Q$ tal que $t \in (0, T)$

²Para mais detalhes sobre espaços interpolados veja Lions e Magenes [29].

e $x \in \Omega$, a função $f : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ e o problema de valor inicial

$$(2.2) \quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Diz-se que a função f satisfaz as condições de Carathéodory se

- i) $f(x, t)$ é mensurável em t para cada x fixado;
- ii) $f(x, t)$ é contínua em x para todo t fixo; e
- iii) para todo compacto $\mathcal{K} \subset Q$ existe uma função real integrável $m_{\mathcal{K}}(t)$, de modo que $\|f(t, x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq m_{\mathcal{K}}(t)$, para todo par $(t, x) \in \mathcal{K}$.

Teorema 2.16 (de Carathéodory) *Seja $f : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory. Então o problema (2.2) tem uma solução $x(t)$ em algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$, com $\beta > 0$.*

Corolário 2.17 *Sejam $Q = [0, T[\times B$ com $T > 0$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$, onde $b > 0$ e $f : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ nas condições de Carathéodory. Suponhamos que $x(t)$ é uma solução de (2.2) tal que $|x_0| \leq b$ e que em qualquer intervalo I , onde $x(t)$ está definida, se tenha $|x(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então $x(t)$ possui um prolongamento à todo $[0, T]$.*

2.5.2 Teorema de Holmgren

Consideremos o plano

$$\Lambda = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \sum_{i=1}^n a_i x_i + bt = c \right\}$$

onde a_i, b , e c são constantes arbitrárias. O polinômio característico $P(a_1, \dots, a_n, b)$ associado ao operador diferencial $P(x, D) = D_t^2 - \Delta$ é definido por

$$P(a_1, \dots, a_n, b) = b^2 - \sum_{i=1}^n |a_i|^2,$$

e portanto, Λ é característico de $P(x, D)$ se, e somente se, $\sum_{i=1}^n |a_i|^2 = b^2$.

Teorema 2.18 (de Holmgren) *Sejam \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 dois abertos convexos do \mathbb{R}^m tais que $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, e seja $P(D)$ um operador diferencial com coeficientes constantes, tal que todo plano Λ característico de $P(D)$ que verifica $\Lambda \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$ satisfaz também $\Lambda \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset$. Então, qualquer solução $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}_2)$ da equação $P(D)u = 0$ tal que $u = 0$ em \mathcal{O}_1 , verifica $u = 0$ em \mathcal{O}_2 .*

Demonstração: Ver [28]

□

2.5.3 Resultados usuais

Devido a dimensão do trabalho, enunciamos nesta seção mais alguns resultados reiteradamente utilizados no texto.

Teorema 2.19 (do Valor Médio) *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em todos os pontos do segmento de reta $(a, a + v)$ e seja contínua sua restrição ao segmento fechado $[a, a + v] \subset U \subset \mathbb{R}^n$. Existe $\theta \in (0, 1)$ tal que*

$$f(a + v) - f(a) = df(a + \theta v) \cdot v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f(a + \theta v) \cdot \alpha_i,$$

onde $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Demonstração: Ver [26].

□

Proposição 2.20 (Desigualdade de Poincaré) *Suponha que $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado. Então existe uma constante C (dependendo de Ω e p) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: Ver [2]

□

Proposição 2.21 (Lema de Gronwall) *Sejam $z \in L^\infty(0, T)$ e $\varphi \in L^1(0, T)$ tais que $z(x) \geq 0$, $\varphi(t) \geq 0$ e seja $c \geq 0$ uma constante. Se*

$$\varphi(t) \leq c + \int_0^t z(s)\varphi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

então

$$\varphi(t) \leq c.e^{\int_0^t z(s)ds}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Demonstração: Ver [32].

□

Teorema 2.22 (da Representação de Riesz-Fréchet) *Seja H um espaço de Hilbert. Dada $\varphi \in H'$, existe $f \in H$ único tal que*

$$\langle \varphi, u \rangle = (f, u), \quad \forall u \in H.$$

Além disso,

$$\|f\|_H = \|\varphi\|_{H'}.$$

Demonstração: Ver [2].

□

Seja H um espaço de Hilbert. Uma forma bilinear $a(u, v) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ é

i) *contínua* se existe uma constante C tal que

$$|a(u, v)| \leq C|u||v|, \quad \forall u, v \in H \text{ e}$$

ii) *coerciva* se existe uma constante $K > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq K|v|^2, \quad \forall v \in H.$$

Teorema 2.23 (de Lax-Milgram) *Seja $a(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então para toda $\varphi \in H'$ existe único $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Além disso, se a é simétrica então u se caracteriza pela propriedade

$$u \in H \text{ e } \frac{1}{2}a(u, v) - \langle \varphi, v \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

Demonstração: Ver [2]

□

Se chama base um espaço de Hilbert H , ou simplesmente *base hilbertiana*, a toda sucessão $\{e_n\}$ de elementos de H tais que

- i) $\|e_n\|_H = 1 \forall n \in \mathbb{N}$, e ainda $(e_m, e_n)_H = 0$, $\forall m, n$ com $m \neq n$.
- ii) O espaço vetorial gerado pelos $\{e_n\}$ é denso em H .

Com essa definição temos o seguinte resultado:

Teorema 2.24 *Todo espaço de Hilbert separável admite uma base hilbertiana.*

Demonstração: Ver [2].

□

Teorema 2.25 (da Regularidade Elítica) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de classe C^2 com fronteira Γ limitada. Seja $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo*

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}$, onde c é uma constante que só depende de Ω . Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e $f \in H^m(\Omega)$ então

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \text{ com } \|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c \|f\|_{H^m(\Omega)}.$$

Em particular, se $m > \frac{n}{2}$ temos $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Se Ω é de classe C^∞ e $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, temos $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Demonstração: Ver [2]

□

Teorema 2.26 (da compacidade de Aubin-Lions) *Sejam B_0 , B e B_1 espaços de Banach tais que $B_0 \xrightarrow{comp} B \xrightarrow{cont} B_1$, onde B_0 e B_1 são reflexivos. Definamos*

$$W = \{u \in L^{p_0}(0, T; B_0); u_t \in L^{p_1}(0, T; B_1)\},$$

onde $1 < p_0, p_1 < \infty$. Consideremos W munido da norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|u_t\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)},$$

a qual o torna um espaço de Banach. Então a imersão de W em $L^{p_0}(0, T; B)$ é compacta.

Demonstração: Ver [27]

□

2.6 Semigrupos Não Lineares

Seja X um espaço de Banach e X' o seu espaço dual. Denote também por $F : X \rightarrow X'$ a aplicação dualidade de X .

Um operador $A : X \rightarrow X$ é dito dissipativo se

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A, \exists f \in F(x_1 - x_2); (y_1 - y_2, f) \leq 0.$$

Seja $\mathcal{C} \subset X$. Diz-se que uma função S de $[0, \infty)$ na família das aplicações de \mathcal{C} em \mathcal{C} é um semigrupo sobre \mathcal{C} se:

- i) $S(0) = I$, onde I é o operador identidade em X ;
- ii) $S(t + s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \geq 0$ (propriedade de semigrupo).

Diz-se que o semigrupo S é contínuo se

- iii) $\lim_{t \rightarrow 0_+} S(t)x = x$, $\forall x \in \mathcal{C}$.

E diz-se que S contínuo é do tipo ω , com $\omega \in \mathbb{R}$, se

$$\text{iv) } \|S(t)x - S(t)y\| \leq e^{\omega t} \|x - y\|.$$

Quando $\omega \leq 0$, diz-se que S é um semigrupo de contrações.

Teorema 2.27 (da fórmula exponencial) *Seja X um espaço de Banach e o operador $A : X \rightarrow X$ dissipativo tal que*

$$\overline{D(A)} \subset R(I - \lambda A),$$

para todo $\lambda > 0$ suficientemente pequeno. Então existe o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-n} x,$$

para $x \in D(A)$ uniformemente em t sobre todo intervalo compacto de $[0, \infty[$. Definindo,

$$(2.3) \quad S(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-n} x,$$

temos que, $S(t)$ definido pela fórmula (2.3), é um semigrupo de contrações sobre $\overline{D(A)}$.

Demonstração: Ver Teorema 1.3, no capítulo 3 de [1].

□

O semigrupo associado ao operador A citado no teorema anterior será dito semigrupo gerado por $-A$, e $-A$ é o gerador exponencial de S .

2.6.1 Operadores Monótonos

Estudaremos nessa seção os operadores monótonos que são uma generalização das funções monótonas, conforme apresentado em [21].

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona não decrescente, ou seja, se

$$x, y \in D(f) \text{ e } x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y),$$

ou equivalentemente,

$$(x - y)(f(x) - f(y)) \geq 0; \forall x, y \in D(f).$$

Seja H um espaço de Hilbert. Um operador linear T de H é dito positivo se

$$(x, Tx)_H \geq 0; \forall x \in H,$$

e um operador A de H é dito monotónico se

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2)_H \geq 0; \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A.$$

Assim a definição de operador monotónico em um espaço de Hilbert é uma generalização natural da definição de função monotónica crescente. Em geral temos:

Definição 2.28 *Seja \mathcal{X} um espaço vetorial topológico real, \mathcal{X}' o seu dual e $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ um operador. Dizemos que A é monotónico se*

$$\langle x - y, x' - y' \rangle \geq 0, \forall (x, x'), (y, y') \in A.$$

Observamos que se A é um operador unívoco e linear de um espaço de Hilbert então A é monotónico se, e somente se, A é positivo.

Para generalizar ainda mais a noção de função monotónica não decrescente, observemos que se H é um espaço de Hilbert, então seu dual H' pode ser a ele identificado e, assim, os operadores monotónicos de H podem ser considerados como operadores $A : H \rightarrow H'$. Sendo assim, o produto interno pode ser encarado como dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H', H}$. Neste caso a monotonia é caracterizada pela norma, como vemos a seguir.

Proposição 2.29 *A é um operador monotónico de H se, e somente se,*

$$\|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\| \geq \|x_1 - x_2\|,$$

para todo $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ e para todo $\lambda > 0$.

Demonstração: Ver Proposição 2.1 em [3].

□

2.6.2 Operadores Maximais Monótonos

Dizemos que um operador monótono A é maximal monótono se não admitir extensão monótona própria, em outras palavras, se ele não está propriamente contido em algum outro subconjunto monótono.

Teorema 2.30 *Seja A um operador monótono de H . São equivalentes as seguintes afirmações:*

- (i) A é maximal monótono;
- (ii) A é monótono e $R(I + A) = H$;
- (iii) Para todo $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1} : H \rightarrow H$ é uma contração.

Demonstração: Ver Proposição 2.2 em [3].

□

Quando A é linear, conhecemos o teorema a seguir como Teorema de Hille-Yosida(veja [38]).

Teorema 2.31 *Seja A um operador maximal monótono de H . Para todo $u_0 \in D(A)$, existe uma única função $u(t) : [0, \infty[\rightarrow H$, tal que*

- (i) $u(t) \in D(A)$, $\forall t > 0$;
- (ii) $u(t)$ é lipschitziana em $[0, \infty[$, isto é, $\frac{du}{dt} \in L^\infty(0, \infty, H)$;
- (iii) $u(t)$ satisfaz o seguinte problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au \ni 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Demonstração: Ver Teorema 3.1 em [3].

□

Para todo $t \geq 0$ definamos

$$S(t)x := u_x(t),$$

e denotemos novamente por $S(t)$ a extensão de $S(t)$ sobre $\overline{D(A)}$. Pelo teorema anterior, verifica-se que $S(t)$ é um semigrupo de contrações não-lineares sobre $\overline{D(A)}$. Portanto, $S(t)$ é o semigrupo gerado por $-A$.

Considerando o Teorema (2.31), estamos aptos a definir solução forte. Seja X um espaço de Banach e $A : X \rightarrow X$. Diremos que uma função $u(t) : [0, \infty[\rightarrow X$ é uma solução forte do problema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au \ni 0 \\ u(0) = x \in D(A) \end{cases}$$

se satisfizer:

- (i) $u(t) \in D(A)$ para $t \in (0, \infty)$;
- (ii) $u(t)$ é lipschitziana em $[0, \infty)$;
- (iii) $-\frac{du}{dt} \in Au$ quase sempre, para $t \in (0, \infty)$.

Necessitaremos ainda do seguinte conceito. Um operador $B : X \rightarrow X'$ será dito hemicontínuo se for unívoco, e além disso

$$\forall x, y \in X, B(x + ty) \rightharpoonup Bx$$

em X' quando $t \rightarrow 0$.

Corolário 2.32 *Seja X reflexivo, e seja B um operador monótono, hemicotínuo e limitado de X em X^* . Seja A um operador maximal monótono em $X \times X^*$. Então $A + B$ é maximal monótono.*

Demonstração: Ver Corolário 1.1, no capítulo 2 de [1].

□

Em particular, segue que qualquer operador monótono, hemicotínuo, e ainda, limitado de X em X^* é maximal monótono em $X \times X^*$.

CAPÍTULO 3

DISSIPACÃO COM LOCALIZAÇÃO MISTA

Este capítulo foi publicado em [41].

3.1 Introdução

Vamos considerar o sistema de Bresse dissipativo:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l[w_x - l\varphi] + \alpha(x)g_1(\varphi_t) = 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw) + g_2(\psi_t) = 0 \\ \rho_1 w_{tt} - \kappa_0[w_x - l\varphi]_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma(x)g_3(w_t) = 0 \end{cases}$$

em $(0, L) \times \mathbb{R}_+$, onde $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. As constantes $\rho_1, \rho_2, b, l, \kappa_0, \kappa$ são positivas e, estão relacionadas a composição do material. Por w, φ , e ψ denotamos o deslocamento longitudinal, vertical e de cisalhamento e, (φ, ψ, w) é a solução procurada do sistema (3.1).

Seguindo as leis sobre deformação de estruturas elásticas, consideramos o sistema de Bresse com dissipação dada pelas equações de movimento:

$$\begin{aligned} \rho_1 \varphi_{tt} &= Q_x + lN + F_1, \\ \rho_2 \psi_{tt} &= M_x - Q + F_2, \\ \rho_1 w_{tt} &= N_x - lQ + F_3, \end{aligned}$$

onde usamos N , Q e M para denotar a força axial, a força de cisalhamento, e o momento de curvatura, respectivamente. Estas forças são as relações de tensão-estiramento para o comportamento elástico e são dadas por:

$$N = \kappa_0(w_x - l\varphi), \quad Q = \kappa(\varphi_x + lw + \psi), \quad \text{and} \quad M = b\psi_x.$$

Finalmente, os termos F_i denotam forças externas, sobre as quais imporemos condições na seção 3.3. Como veremos as funções de localização $\alpha, \gamma \in L^\infty(0, L)$, e as funções g_1, g_2 , e g_3 são contínuas e monótonas.

Para o sistema (3.1) consideramos as seguintes condições iniciais:

$$(3.2) \quad \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \quad \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \quad \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1, \quad w(\cdot, 0) = w_0, \quad w_t(\cdot, 0) = w_1,$$

e as condições de Dirichlet na fronteira:

$$(3.3) \quad \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad \text{em } \mathbb{R}_+.$$

Observamos que condições de Dirichlet na fronteira (em todas as equações) trazem complicações devido aos termos de fronteira, mas usando os resultados de observabilidade poderemos estimar estes termos.

Nosso intuito é provar a estabilidade assintótica sem a condição técnica de igualdade entre as velocidades de propagações de ondas, isto é,

$$(3.4) \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\kappa}{b}, \quad \text{e} \quad \kappa = \kappa_0,$$

bem como no caso contrário. Existem muitos trabalhos com esta condição, e citamos por exemplo [5]. Mas aqui, queremos trabalhar com sistemas concretos principalmente do ponto de vista físico, e portanto, como em nosso sistema temos dissipação na três equações não iremos usar a condição (3.4).

Um outro diferencial é relativo ao método. Ele é baseado na seguinte taxa de decaimento para a energia $E(t)$: Para algum $T_0 > 0$,

$$(3.5) \quad E(t) \leq S \left(\frac{t}{T_0} - 1 \right) E(0) \searrow 0, \quad \text{para todo } t \geq T_0, \quad t \rightarrow \infty,$$

onde a função escalar $S(t)$ (contração não-linear) é a solução da seguinte EDO:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0 \\ S(0) = E(0) \end{cases}$$

onde a função q é definida em Lasiecka e Tataru [25].

Conforme argumentado em [24], ressaltamos que a taxa (3.5) é uma generalização natural de um critério de estabilização linear creditado a Datko e Pazy [38]. Além disso, fornece taxa de decaimento exponencial para a dissipação que é limitada inferiormente por uma função linear, e taxa de decaimento algébrica para dissipação com comportamento polinomial na origem.

3.2 Boa colocação e Regularidade

Nesta seção, discutiremos a existência, unicidade e regularidade da solução do sistema (3.1). Abordaremos tais pontos fazendo uso da teoria de semigrupos não-lineares amplamente tratada em Barbu [1] e Brézis [3].

Indicaremos por \mathcal{T} a transposta. Reescrevemos o problema de valor inicial (3.1) - (3.3), como um sistema de primeira ordem para $V(t) = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t)^\mathcal{T}$, então V satisfaz formalmente

$$(3.6) \quad \begin{cases} V_t + \mathcal{A}V = 0 \\ V(0) = V_0 = 0 \end{cases}$$

com $\mathcal{A} = -(A + B)$, onde os operadores (ainda formalmente) são:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{\rho_1} \partial_x^2 - \frac{\kappa_0 l^2}{\rho_1} I & 0 & \frac{\kappa}{\rho_1} \partial_x & 0 & \frac{(\kappa + \kappa_0)l}{\rho_1} \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{\rho_2} \partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2} \partial_x^2 - \frac{\kappa}{\rho_2} I & 0 & -\frac{\kappa l}{\rho_2} I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(\kappa + \kappa_0)l}{\rho_1} \partial_x & 0 & -\frac{\kappa l}{\rho_1} I & 0 & \frac{\kappa_0}{\rho_1} \partial_x^2 - \frac{\kappa l^2}{\rho_1} I & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha(x)}{\rho_1}g_1(\cdot) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_2}g_2(\cdot) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma(x)}{\rho_1}g_3(\cdot) \end{pmatrix}.$$

Consideremos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} := H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$$

e a norma dada por

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &:= \|(\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)^T\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\equiv \int_0^L \rho_1 |\Phi|^2 + \rho_2 |\Psi|^2 + \rho_1 |W|^2 + b |\psi_x|^2 + k_0 |w_x - l\varphi|^2 + k |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \end{aligned}$$

Como temos

$$D(A) = (H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times H_0^1(0, L))^3,$$

e $D(B) = \mathcal{H}$, por conseguinte o domínio $D(\mathcal{A}) = D(A)$.

Vamos tecer as seguintes hipóteses:

Hipótese

3.2.1 A função g_i , para cada $i = 1, 2, 3$, é contínua e monótona crescente, e ainda satisfaz as seguintes condições:

- (i) $g_i(s)s > 0$ para $s \neq 0$,
- (ii) $k_i s \leq g_i(s) \leq K_i s$ para $|s| > 1$,

onde k_i e K_i são constantes positivas, com $k_i \leq K_i$.

Hipótese

3.2.2 Assumiremos que $\alpha, \gamma \in L^\infty(0, L)$ são funções não-negativas tais que

$$(3.7) \quad \alpha(x) \geq \alpha_0 > 0, \text{ and } \gamma(x) \geq \gamma_0 > 0 \quad q. s. \text{ em } I_\varepsilon := (L - \varepsilon, L),$$

onde $\varepsilon > 0$ é um número positivo arbitrário.

Teorema 3.1 Assumindo as hipóteses (3.2.1) e (3.2.2), temos para cada $U_0 \in D(\mathcal{A})$ uma única solução forte para (3.6). Além disso, se $U_0 \in \mathcal{H}$ então (3.6), tem uma única solução fraca.

Observação 3.2.1

☞ Segundo a definição de solução forte sua regularidade é $C([0, \infty[; \mathcal{H})$. Logo a energia está bem definida para este tipo de solução.

Desejamos provar que o operador \mathcal{A} é maximal monótono, e assim usar o teorema (2.31), para mostrar a primeira parte do teorema acima. Observamos ainda que a segunda parte segue do teorema 3.1, do capítulo 3 de [1].

Demonstração:

Precisamos mostrar que o operador $\mathcal{A} = -(A + B)$ é maximal monótono de \mathcal{H} . Faremos a prova em duas partes, já que queremos usar o corolário (2.32), onde requer-se duas afirmações:

① **O operador $-A$ é maximal monótono.**

Para mostrarmos a afirmação ①, iremos provar que o operador $-A$ é monótono e $\mathcal{R}(I - A) = \mathcal{H}$, assim pelo teorema (2.30) o resultado segue. Com efeito, como

$$(-AU, U)_{\mathcal{H}} = 0,$$

temos a monotonicidade de $-A$.

Agora considerando $(F_1, \dots, F_6) \in \mathcal{H}$, obtemos

$$(3.8) \quad \varphi - \Phi = F_1 \in H_0^1(0, L),$$

$$(3.9) \quad \rho_1 \Phi - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l[w_x - l\varphi] = \rho_1 F_2 \in L^2(0, L),$$

$$(3.10) \quad \psi - \Psi = F_3 \in H_0^1(0, L),$$

$$(3.11) \quad \rho_2 \Psi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw) = \rho_2 F_4 \in L^2(0, L),$$

$$(3.12) \quad w - W = F_5 \in H_0^1(0, L),$$

$$(3.13) \quad \rho_1 W - \kappa_0[w_x - l\varphi]_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + lw) = \rho_1 F_6 \in L^2(0, L).$$

Substituindo Φ, Ψ, W dados por (3.8), (3.10), (3.12) em (3.9), (3.11) e (3.13), respectivamente adquirimos

$$\rho_1 \varphi - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l[w_x - l\varphi] = f_1,$$

$$\rho_2 \psi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw) = f_2,$$

$$\rho_1 w - \kappa_0[w_x - l\varphi]_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + lw) = f_3,$$

onde

$$f_1 = \rho_1(F_1 + F_2), \quad f_2 = \rho_2(F_3 + F_4), \quad f_3 = \rho_1(F_5 + F_6).$$

Com isto, vislumbramos que

$$a : (H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L))^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\int_0^L \rho_1 \varphi u + \rho_2 \psi v + \rho_1 w z + \kappa(\varphi_x + \psi + lw)(u_x + v + lz) + \kappa_0[w_x - l\varphi][z_x - lu] \, dxdt$$

onde temos

$$(\varphi, \psi, w), (u, v, z) \in (H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L))$$

é uma forma bilinear, contínua e coerciva. Usando o teorema (2.23) de Lax-Milgram, obtemos a sobrejetividade desejada.

Portanto, o operador $-A$ é maximal monótono pelo teorema (2.30), e a afirmação ① está provada. A segunda afirmação é a seguinte:

② **$-B$ é um operador monótono, hemicontínuo, e limitado.**

Para prova desta afirmação, inicialmente pela admissibilidade das hipóteses (3.2.1) e (3.2.2), o operador $-B$ satisfaz

$$(-BU, U)_{\mathcal{H}} \geq 0,$$

logo ele é monótono.

Para hemicontinuidade consideremos

$$U_i = (\varphi_i, \Phi_i, \psi_i, \Psi_i, w_i, W_i)^T \in \mathcal{H},$$

para $i = 1, 2$, e consideremos ainda a seguinte expressão

$$\begin{aligned} (-B(U_1 + tU_2), U)_{\mathcal{H}} &= (\alpha(x)g_1(\Phi_1 + t\Phi_2), \Phi)_{L^2} \\ &+ (g_2(\Psi_1 + t\Psi_2), \Psi)_{L^2} \\ &+ (\gamma(x)g_3(W_1 + tW_2), W)_{L^2}, \end{aligned}$$

com $t > 0$.

Como almejamos mostrar que

$$(3.14) \quad \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} (\alpha(x)g_1(\Phi_1 + t\Phi_2), \Phi)_{L^2} = (\alpha(x)g_1(\Phi_1), \Phi)_{L^2} \\ \lim_{t \rightarrow 0} (g_2(\Psi_1 + t\Psi_2), \Psi)_{L^2} = (g_2(\Psi_1), \Psi)_{L^2} \\ \lim_{t \rightarrow 0} (\gamma(x)g_3(W_1 + tW_2), W)_{L^2} = (\gamma(x)g_3(W_1), W)_{L^2} \end{cases}$$

mostraremos somente a primeira igualdade, já que as outras decorrem de maneira inteiramente análoga.

Para este fim, consideremos a função $f \in L^1(0, L)$ definida por

$$f(x) = \alpha(x)g_1(\Phi_1(x))\Phi(x),$$

e definamos a sequência $\{f_n\} \subset L^1(0, L)$, expressa por

$$f_n(x) = \alpha(x)g_1(\Phi_1(x) + \frac{1}{n}\Phi_2(x))\Phi(x).$$

Assim temos,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \text{ q.s. em } (0, L).$$

Definindo o conjunto

$$X_n = \left\{ x \in [0, L]; \left| \Phi_1(x) + \frac{1}{n} \Phi_2(x) \right| < 1 \right\},$$

obtemos a limitação da sequência $\{f_n\}$. Então, usando o teorema (2.5) da convergência dominada de Lebesgue, concluímos o limite da primeira igualdade de (3.14). Portanto, diante do exposto $-B$ é hemicontínuo.

É patente que o operador $-B$ transforma subconjuntos limitados em subconjuntos limitados, concluindo-se a prova da afirmação ②.

Com as afirmações ① e ②, o operador \mathcal{A} é maximal monótono, e assim pelo teorema (2.31) concluímos a prova. □

3.3 Desigualdade de Observabilidade

Deliberadamente vamos considerar o sistema (3.1) com $F_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Destarte, temos que o sistema considerado nesta seção é conservativo.

Estabeleceremos uma desigualdade de observabilidade. Assim, multiplicando a primeira equação do sistema conservativo por φ_t , a segunda equação por ψ_t , a terceira equação por w_t e, integrando-as por partes, resulta:

$$(3.15) \quad \int_0^L \frac{1}{2} (\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |w_t|^2 + b |\psi_x|^2 + \kappa_0 |w_x - l\varphi|^2 + \kappa |\varphi_x + \psi + lw|^2) (x, t) dx,$$

definindo-se como a energia $E(t)$ do sistema conservativo, e também do sistema (3.1).

A expressão (3.15) define também uma norma, e ela é equivalente à norma usual em \mathcal{H} (veja seção 3.4). Inferimos que

$$E(t) = E(0), \forall t \geq 0.$$

Multiplicando a primeira equação do sistema conservativo por $(\varphi_x + \psi + lw)x$

temos:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^T \int_0^L \{ \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l[w_x - l\varphi] \} (\varphi_x + \psi + lw) x \, dx dt \\
(3.16) &= \int_0^T \int_0^L \rho_1 \varphi_{tt} (\varphi_x + \psi + lw) x \, dx dt - \int_0^T \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x (\varphi_x + \psi + lw) x \, dx dt \\
&\quad - \int_0^T \int_0^L \kappa_0 l[w_x - l\varphi] (\varphi_x + \psi + lw) x \, dx dt.
\end{aligned}$$

Vamos estimar algumas integrais da última igualdade.

Estimativa para $I_1 := \int_0^T \int_0^L \rho_1 \varphi_{tt} (\varphi_x + \psi + lw) x \, dx dt$. Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left[\rho_1 \int_0^L \varphi_t (\varphi_x + \psi + lw) x \, dx \right]_0^T - \rho_1 \int_0^T \int_0^L \varphi_t (\varphi_x + \psi + lw)_t x \, dx dt \\
(3.17) &= \left[\rho_1 \int_0^L \varphi_t (\varphi_x + \psi + lw) x \, dx \right]_0^T - \underbrace{\frac{\rho_1}{2} \int_0^T (\varphi_t^2 x) \Big|_0^L dt}_{=0} \\
&\quad + \frac{\rho_1}{2} \int_0^T \int_0^L \varphi_t^2 \, dx dt - \rho_1 \int_0^T \int_0^L \varphi_t (\psi + lw)_t x \, dx dt.
\end{aligned}$$

Estimativa para $I_2 := \int_0^T \int_0^L -\kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x (\varphi_x + \psi + lw) x \, dx dt$. Temos

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\frac{\kappa}{2} \int_0^T (\varphi_x + \psi + lw)^2 x \Big|_0^L dt + \frac{\kappa}{2} \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)^2 \, dx dt \\
(3.18) &= -\frac{\kappa L}{2} \int_0^T \varphi_x^2(L) \, dt + \frac{\kappa}{2} \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)^2 \, dx dt.
\end{aligned}$$

E combinando (3.16), (3.17) e (3.18), gera-se

$$\begin{aligned}
0 &= \left[\rho_1 \int_0^L \varphi_t (\varphi_x + \psi + lw) x \, dx \right]_0^T + \frac{\rho_1}{2} \int_0^T \int_0^L \varphi_t^2 \, dx dt \\
(3.19) &\quad - \rho_1 \int_0^T \int_0^L \varphi_t (\psi + lw)_t x \, dx dt - \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \varphi_x^2(L) \, dt \\
&\quad + \int_0^T \int_0^L \frac{\kappa}{2} (\varphi_x + \psi + lw)^2 - \kappa_0 l (\varphi_x + \psi + lw) [w_x - l\varphi] x \, dx dt.
\end{aligned}$$

Multiplicando a segunda equação do sistema conservativo por $\psi_x x$, podemos

escrever

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^T \int_0^L \{\rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw)\} \psi_x x \, dx dt \\
 (3.20) \quad &= \int_0^T \int_0^L \rho_2 \psi_{tt} \psi_x x \, dx dt - \int_0^T \int_0^L b \psi_{xx} \psi_x x \, dx dt \\
 &+ \int_0^T \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi + lw) \psi_x x \, dx dt.
 \end{aligned}$$

Estimativa para $I_3 := \int_0^T \int_0^L \rho_2 \psi_{tt} \psi_x x \, dx dt$. Procedendo analogamente ao feito em (3.17), tem-se

$$(3.21) \quad I_3 = \left[\rho_2 \int_0^L \psi_t \psi_x x \, dx \right]_0^T - \underbrace{\frac{\rho_2}{2} \int_0^T (\psi_t^2 x) \Big|_0^L dt}_{=0} + \frac{\rho_2}{2} \int_0^T \int_0^L \psi_t^2 \, dx dt.$$

Estimativa para $I_4 := -b \int_0^T \int_0^L \psi_{xx} \psi_x x \, dx dt$. Temos

$$\begin{aligned}
 I_4 &= -b \int_0^T \int_0^L \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\psi_x^2) x \, dx dt = -\frac{b}{2} \int_0^T (\psi_x^2 x) \Big|_0^L dt + \frac{b}{2} \int_0^T \int_0^L \psi_x^2 \, dx dt \\
 (3.22) \quad &= -\frac{bL}{2} \int_0^T \psi_x^2(L) \, dt + \frac{b}{2} \int_0^T \int_0^L \psi_x^2 \, dx dt.
 \end{aligned}$$

Acomodando-se (3.20), (3.21) e (3.22), induz-se que

$$\begin{aligned}
 0 &= \left[\rho_2 \int_0^L \psi_t \psi_x x \, dx \right]_0^T + \frac{\rho_2}{2} \int_0^T \int_0^L \psi_t^2 \, dx dt - \frac{bL}{2} \int_0^T \psi_x^2(L) \, dt \\
 (3.23) \quad &+ \frac{b}{2} \int_0^T \int_0^L \psi_x^2 \, dx dt + \int_0^T \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi + lw) \psi_x x \, dx dt.
 \end{aligned}$$

Enfim, procedendo a multiplicação da terceira equação do sistema conservativo pelo termo $[w_x - l\varphi] x$, obteremos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^T \int_0^L \{\rho_1 w_{tt} - \kappa_0 [w_x - l\varphi]_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + lw)\} [w_x - l\varphi] x \, dx dt \\
 (3.24) \quad &= \int_0^T \int_0^L \rho_1 w_{tt} [w_x - l\varphi] x \, dx dt - \int_0^T \int_0^L \kappa_0 [w_x - l\varphi]_x [w_x - l\varphi] x \, dx dt \\
 &+ \int_0^T \int_0^L \kappa l(\varphi_x + \psi + lw) [w_x - l\varphi] x \, dx dt.
 \end{aligned}$$

Estimativa para $I_5 := \int_0^T \int_0^L \rho_1 w_{tt} [w_x - l\varphi] x \, dx dt$. Temos

$$\begin{aligned}
 (3.25) \quad I_5 &= \left[\rho_1 \int_0^L w_t [w_x - l\varphi] x \, dx \right]_0^T - \rho_1 \int_0^T \int_0^L w_t [w_x - l\varphi]_t x \, dx dt \\
 &= \left[\rho_1 \int_0^L w_t [w_x - l\varphi] x \, dx \right]_0^T - \underbrace{\frac{\rho_1}{2} \int_0^T (w_t^2 x) \Big|_0^L dt}_{=0} \\
 &\quad + \frac{\rho_1}{2} \int_0^T \int_0^L w_t^2 \, dx dt + \rho_1 l \int_0^T \int_0^L w_t \varphi_t x \, dx dt.
 \end{aligned}$$

Estimativa para $I_6 := \int_0^T \int_0^L -\kappa_0 [w_x - l\varphi]_x [w_x - l\varphi] x \, dx dt$. Temos

$$\begin{aligned}
 (3.26) \quad I_6 &= -\frac{\kappa_0}{2} \int_0^T [w_x - l\varphi]^2 x \Big|_0^L dt + \frac{\kappa_0}{2} \int_0^T \int_0^L [w_x - l\varphi]^2 \, dx dt \\
 &= -\frac{\kappa_0 L}{2} \int_0^T w_x^2(L) dt + \frac{\kappa_0}{2} \int_0^T \int_0^L [w_x - l\varphi]^2 \, dx dt.
 \end{aligned}$$

Conciliando (3.24), (3.25) e (3.26), vale que

$$\begin{aligned}
 (3.27) \quad 0 &= \left[\rho_1 \int_0^L w_t [w_x - l\varphi] x \, dx \right]_0^T + \frac{\rho_1}{2} \int_0^T \int_0^L w_t^2 \, dx dt \\
 &\quad + \rho_1 l \int_0^T \int_0^L w_t \varphi_t x \, dx dt - \frac{\kappa_0 L}{2} \int_0^T w_x^2(L) dt \\
 &\quad + \int_0^T \int_0^L \frac{\kappa_0}{2} [w_x - l\varphi]^2 + \kappa l (\varphi_x + \psi + lw) [w_x - l\varphi] x \, dx dt.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, note que multiplicando a segunda equação do sistema conservativo por ψ obteremos que:

$$\begin{aligned}
 (3.28) \quad 0 &= \int_0^T \int_0^L (\rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi + lw)) \psi \, dx dt \\
 &= \int_0^T \int_0^L \rho_2 \psi_{tt} \psi \, dx dt - \int_0^T \int_0^L b \psi_{xx} \psi \, dx dt + \int_0^T \int_0^L \kappa (\varphi_x + \psi + lw) \psi \, dx dt \\
 &= \left[\rho_2 \int_0^L \psi_t \psi \, dx \right]_0^T - \rho_2 \int_0^T \int_0^L \psi_t^2 \, dx dt - \underbrace{\int_0^T b \psi_x \psi \Big|_0^L dt}_{=0} \\
 &\quad + b \int_0^T \int_0^L \psi_x^2 \, dx dt + \int_0^T \int_0^L \kappa (\varphi_x + \psi + lw) \psi \, dx dt,
 \end{aligned}$$

e multiplicando a primeira equação do sistema conservativo por ψx , temos

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^T \int_0^L \{ \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l[w_x - l\varphi] \} \psi x \, dx dt \\
 (3.29) \quad &= \left[\rho_1 \int_0^L \varphi_t \psi x \, dx \right]_0^T - \rho_1 \int_0^T \int_0^L \varphi_t \psi_t x \, dx dt - \underbrace{\int_0^T \kappa(\varphi_x + \psi + lw) \psi x \Big|_0^L dt}_{=0} \\
 &+ \int_0^T \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi + lw)(\psi_{xx} + \psi) x \, dx dt - \int_0^T \int_0^L \kappa_0 l[w_x - l\varphi] \psi x \, dx dt.
 \end{aligned}$$

Assim, adicionando (3.19),(3.23),(3.27), (3.28), e (3.29) decorre que

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^T \int_0^L (\kappa - \kappa_0) l(\varphi_x + \psi + lw)[w_x - l\varphi] x + \kappa_0 l[w_x - l\varphi] \psi x \, dx dt \\
 &- \frac{L}{2} \int_0^T \kappa \varphi_x^2(L) + b \psi_x^2(L) + \kappa_0 w_x^2(L) dt \\
 &+ \int_0^T \int_0^L \frac{\kappa}{2} (\varphi_x + \psi + lw)^2 + \frac{\kappa_0}{2} [w_x - l\varphi]^2 \, dx dt \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L \rho_1 \varphi_t^2 - \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + 3b \psi_x^2 \, dx dt \\
 &+ \left[\int_0^L \{ \rho_1 \varphi_t(\varphi_x + \psi + lw) + \rho_2 \psi_t \psi_x + \rho_2 \psi_t \psi + \rho_1 w_t [w_x - l\varphi] - \rho_1 \varphi_t \psi \} x \, dx \right]_0^T,
 \end{aligned}$$

ou melhor,

$$\begin{aligned}
 \int_0^T E(t) dt + \int_0^T \int_0^L b \psi_x^2 \, dx dt &= - \int_0^T \int_0^L (\kappa - \kappa_0) l(\varphi_x + \psi + lw)[w_x - l\varphi] x + \kappa_0 l[w_x - l\varphi] \psi x \, dx dt \\
 (3.30) \quad &+ \int_0^T \int_0^L \rho_2 \psi_t^2 \, dx dt + \frac{L}{2} \int_0^T \kappa \varphi_x^2(L) + b \psi_x^2(L) + \kappa_0 w_x^2(L) dt \\
 &- \left[\int_0^L \{ \rho_1 \varphi_t(\varphi_x + \psi + lw) + \rho_2 \psi_t \psi_x + \rho_2 \psi_t \psi + \rho_1 w_t [w_x - l\varphi] - \rho_1 \varphi_t \psi \} x \, dx \right]_0^T.
 \end{aligned}$$

É de fácil verificação que existe um constante positiva C tal que

$$\left| \left[\int_0^L \{ \rho_1 \varphi_t(\varphi_x + \psi + lw) + \rho_2 \psi_t \psi_x + \rho_2 \psi_t \psi + \rho_1 w_t [w_x - l\varphi] - \rho_1 \varphi_t \psi \} x \, dx \right]_0^T \right| \leq C[E(T) + E(0)],$$

onde C depende das constantes do sistema e da constante de Poincaré.

Agora aplicando a desigualdade de Young (2.1) na primeira integral do lado

direito de (3.30), e coadunando com a desigualdade acima e com a energia definida em (3.15), obtemos a desigualdade cerne relacionada à observabilidade, a saber:

$$(3.31) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T E(t) dt + b \int_0^T \int_0^L \psi_x^2 dx dt &\leq C E(T) + \frac{L}{2} \int_0^T \kappa \varphi_x^2(L) + b \psi_x^2(L) + \kappa_0 w_x^2(L) dt \\ &+ \int_0^T \int_0^L C_0 \psi^2 + \rho_2 \psi_t^2 dx dt, \end{aligned}$$

onde C_0 depende de L e de algumas constantes do sistema. De (3.31), e considerando que

$$E(T) = E(0), \quad \forall T > 0,$$

induzimos que

$$(3.32) \quad \begin{aligned} \left(\frac{T}{2} - C\right) E(T) + b \int_0^T \int_0^L \psi_x^2 dx dt &\leq \frac{L}{2} \int_0^T \kappa \varphi_x^2(L) + b \psi_x^2(L) + \kappa_0 w_x^2(L) dt \\ &+ \int_0^T \int_0^L C_0 \psi^2 + \rho_2 \psi_t^2 dx dt. \end{aligned}$$

A desigualdade (3.32) fornece-nos a desigualdade de observabilidade para T suficientemente grande, isto é, para $T_0 > 2C$ a rigor temos:

$$E(0) \leq C \left(\frac{L}{2} \int_0^{T_0} \kappa \varphi_x^2(L) + b \psi_x^2(L) + \kappa_0 w_x^2(L) dt + \int_0^{T_0} \int_0^L C_0 \psi^2 + C_1 \psi_t^2 dx dt \right).$$

Ato contínuo faz-se necessário considerarmos a função $\beta \in C^2[0, T]$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que

$$\begin{cases} 0 \leq \beta(t) \leq 1, \forall t \in (0, T) \\ \beta(t) = 1, \text{ em } [0, \varepsilon] \cup [T - \varepsilon, T] \\ \beta(t) = 0 \text{ em } [2\varepsilon, T - 2\varepsilon] \end{cases}$$

Destarte, multiplicando a segunda equação do sistema (3.1) por $\psi_x x \beta$ podemos escrever

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_0^L \{\rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw)\} \psi_x x \beta dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^L \rho_2 \psi_{tt} \psi_x x \beta dx dt - \int_0^T \int_0^L b \psi_{xx} \psi_x x \beta dx dt \\ &+ \int_0^T \int_0^L \kappa(\varphi_x + \psi + lw) \psi_x x \beta dx dt, \end{aligned}$$

e integrando por partes a equação acima torna-se

$$\begin{aligned}
(3.33) \quad \frac{bL}{2} \int_0^T \psi_x^2(L) \beta \, dt &= \left[\rho_2 \int_0^L \psi_t \psi_x x \beta \, dx \right]_0^T + \frac{\rho_2}{2} \int_0^T \int_0^L \psi_t^2 \beta \, dx dt \\
&+ \int_0^T \int_0^L \frac{b}{2} \psi_x^2 \beta + \kappa(\varphi_x + \psi + lw) \psi_x x \beta \, dx dt \\
&- \rho_2 \int_0^T \int_0^L \psi_t \psi_x x \beta' \, dx dt.
\end{aligned}$$

Por outro lado, pela definição de β segue que

$$\begin{aligned}
\frac{bL}{2} \int_0^\varepsilon \psi_x^2(L) \, dt + \frac{bL}{2} \int_{T-\varepsilon}^T \psi_x^2(L) \, dt &= \frac{b}{2} \int_0^\varepsilon \psi_x^2(L) L \beta \, dt + \frac{b}{2} \int_{T-\varepsilon}^T \psi_x^2(L) L \beta \, dt \\
&\leq \frac{b}{2} \int_0^{2\varepsilon} \psi_x^2(L) L \beta \, dt + \frac{b}{2} \int_{T-2\varepsilon}^T \psi_x^2(L) L \beta \, dt \\
&= \frac{bL}{2} \int_0^T \psi_x^2(L) \beta \, dt,
\end{aligned}$$

e usando (3.33) na última igualdade, findamos em

$$(3.34) \quad \frac{bL}{2} \int_0^\varepsilon \psi_x^2(L) \, dt + \frac{bL}{2} \int_{T-\varepsilon}^T \psi_x^2(L) \, dt \leq 2\varepsilon C_2 [E(0) + E(T)] + C_3 [E(0) + E(T)].$$

Analogamente, procedendo a multiplicação da primeira equação do sistema (3.1) por $(\varphi_x + \psi + lw) x \beta$, decorre que

$$\begin{aligned}
(3.35) \quad \frac{\kappa L}{2} \int_0^\varepsilon \varphi_x^2(L) \, dt + \frac{\kappa L}{2} \int_{T-\varepsilon}^T \varphi_x^2(L) \, dt &\leq \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \varphi_x^2(L) \beta \, dt \\
&\leq 2\varepsilon C_4 [E(0) + E(T)] + C_5 [E(0) + E(T)].
\end{aligned}$$

Novamente de maneira análoga, multiplicando a terceira equação de (3.1) por $[w_x - l\varphi] x \beta$ perfazemos

$$\begin{aligned}
(3.36) \quad \frac{\kappa_0 L}{2} \int_0^\varepsilon w_x^2(L) \, dt + \frac{\kappa_0 L}{2} \int_{T-\varepsilon}^T w_x^2(L) \, dt &\leq \frac{\kappa_0 L}{2} \int_0^T w_x^2(L) \beta \, dt \\
&\leq 2\varepsilon C_6 [E(0) + E(T)] + C_7 [E(0) + E(T)],
\end{aligned}$$

onde destacamos que as C_i' s são constantes positivas que não dependem de T .

Por fim, notamos que

$$\begin{aligned} \frac{bL}{2} \int_0^T \psi_x^2(L) dt &= \frac{bL}{2} \left(\int_0^\varepsilon \psi_x^2(L) dt + \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \psi_x^2(L) dt + \int_{T-\varepsilon}^T \psi_x^2(L) dt \right) \\ &\leq \frac{bL}{2} (2\varepsilon C_2[E(0) + E(T)] + C_3[E(0) + E(T)]) + \frac{bL}{2} \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \psi_x^2(L) dt. \end{aligned}$$

E analogamente, preponderam desigualdades similares para $\varphi_x^2(L)$ e $w_x^2(L)$. Com essas desigualdades, e de (3.32), (3.34), (3.35), (3.36), além da lei de conservação de energia, deduzimos para um T suficientemente grande (e para um ε fixado), a almejada desigualdade de observabilidade em rigor:

$$E(0) \leq C_\varepsilon \left(\int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \int_0^L \psi^2 + \psi_t^2 dx dt + \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \varphi_x^2(L) + \psi_x^2(L) + w_x^2(L) dt \right).$$

Observação 3.3.1

☞ Como já expusemos a constante positiva C_ε não depende das soluções do sistema conservativo.

☞ Se temos um sistema não-homogêneo:

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l[w_x - l\varphi] = f_1 \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw) = f_2 \\ \rho_1 w_{tt} - \kappa_0[w_x - l\varphi]_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + lw) = f_3 \end{cases}$$

em $(0, L) \times \mathbb{R}_+$, com condições iniciais

$$\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1, w(\cdot, 0) = w_0, w_t(\cdot, 0) = w_1,$$

e condições de fronteira do tipo Dirichlet

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = w(0, t) = w(L, t) = 0,$$

onde

$$f_1, f_2, f_3 \in L^2(0, T, L^2(0, L)),$$

acreditamos ser importante observar, como feito acima, que considerando a desigualdade

$$ab \leq \frac{1}{4\varepsilon} a^2 + \varepsilon b^2$$

(onde ε é um número positivo arbitrário) e explorando a identidade da energia

$$E(T) = E(0) + \int_0^T \int_0^L f_1 \varphi_t + f_2 \psi_t + f_3 w_t \, dx dt$$

em (3.32), a seguinte desigualdade vale para T suficientemente grande:

$$(3.37) \quad \begin{aligned} E(0) \leq & C_\varepsilon \left(\int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \int_0^L \psi^2 + \psi_t^2 \, dx dt + \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \varphi_x^2(L) + \psi_x^2(L) + w_x^2(L) dt \right) \\ & + C_\varepsilon \int_0^T \int_0^L (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) \, dx dt. \end{aligned}$$

Ou seja, temos a observabilidade para o sistema não-homogêneo.

3.4 Estabilidade assintótica

O objetivo desta seção é determinar a estabilidade assintótica para o sistema de Bresse dissipativo (3.1).

No que segue, iremos provar algumas identidades técnicas que serão fundamentais na prova da estabilidade assintótica. A fim de prová-las vamos trabalhar com soluções regulares, entretanto elas permanecem válidas para soluções fracas usando argumentos de densidade.

Vamos considerar $\theta \in C_0^\infty(0, T)$ uma função *cut-off*, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que

$$\begin{cases} 0 \leq \theta(t) \leq 1, \forall t \in (0, T) \\ \theta(t) = 1, \text{ em } [\varepsilon, T - \varepsilon] \\ \theta(0) = \theta(T) = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação de (3.1) por $\psi\theta$ e integrando por partes, deduzimos

$$(3.38) \quad 0 = - \int_0^T \int_0^L \rho_2 (\psi_t^2 \theta + \psi_t \psi \theta') - b \psi_x^2 \theta - \{ \kappa (\varphi_x + \psi + lw) + g_2(\psi_t) \} \psi \theta \, dx dt.$$

Além disso, multiplicando a segunda equação de (3.1) por $\psi_x x \theta$ e integrando por partes, adqui-

rimos

$$\begin{aligned}
(3.39) \quad 0 &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (\rho_2 \psi_t^2 + b \psi_x^2) \theta \, dx dt \\
&- \int_0^T \int_0^L \rho_2 \psi_t \psi_x x \theta' \, dx dt - \frac{b}{2} \int_0^T \psi_x^2(L) L \theta \, dt \\
&+ \int_0^T \int_0^L \{ \kappa(\varphi_x + \psi + lw) + g_2(\psi_t) \} \psi_x x \theta \, dx dt.
\end{aligned}$$

Consideremos também $\eta \in C^\infty(0, L)$ uma função *cut-off*, tal que

$$\begin{cases} 0 \leq \eta(x) \leq 1, \forall t \in (0, L) \\ \eta(x) = 1, \text{ em } \left[L - \frac{\varepsilon}{2}, L \right] \\ \eta(x) = 0 \text{ em } [0, L - \varepsilon] \end{cases}$$

onde ε é um número positivo arbitrário e suficientemente pequeno.

Multiplicando a primeira equação de (3.1) por $\varphi \theta \eta$ e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
(3.40) \quad 0 &= - \int_0^T \int_0^L \rho_1 (\varphi_t^2 \theta + \varphi \varphi_t \theta') \eta - \kappa(\varphi_x + \psi + lw) (\varphi_x \eta + \varphi \eta_x) \theta \, dx dt \\
&- \int_0^T \int_0^L \{ \kappa_0 l [w_x - l \varphi] - \alpha(x) g_1(\varphi_t) \} \varphi \eta \theta \, dx dt.
\end{aligned}$$

E ainda, multiplicando a primeira equação de (3.1) por $\varphi_x x \eta \theta$, chegamos em

$$\begin{aligned}
(3.41) \quad 0 &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (\rho_1 \varphi_t^2 + \kappa \varphi_x^2) \theta (\eta + x \eta_x) \, dx dt \\
&- \int_0^T \int_0^L \{ \rho_1 \varphi_t \varphi_x \theta' + \kappa (\psi + lw)_x \varphi_x \theta \} x \eta \, dx dt - \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \varphi_x^2(L) \theta \, dt \\
&+ \int_0^T \int_0^L \{ -\kappa_0 l [w_x - l \varphi] + \alpha(x) g_1(\varphi_t) \} \varphi_x x \eta \theta \, dx dt.
\end{aligned}$$

Multiplicando a terceira equação de (3.1) por $w \theta \eta$ e integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}
(3.42) \quad 0 &= - \int_0^T \int_0^L \rho_1 (w_t^2 \theta + w w_t \theta') \eta - \kappa_0 [w_x - l \varphi] (w_x \eta + w \eta_x) \theta \, dx dt \\
&- \int_0^T \int_0^L \{ \kappa l (\varphi_x + \psi + lw) - \gamma(x) g_3(w_t) \} w \eta \theta \, dx dt.
\end{aligned}$$

Por fim, multiplicando a terceira equação de (3.1) por $w_x x \eta \theta$, conseguimos

$$(3.43) \quad \begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (\rho_1 w_t^2 + \kappa_0 w_x^2) \theta (\eta + x \eta_x) dx dt \\ &- \int_0^T \int_0^L \rho_1 w_t w_x x \eta \theta' + \kappa_0 l \varphi_x w_x x \eta \theta dx dt - \frac{\kappa_0 L}{2} \int_0^T w_x^2(L) \theta dt \\ &+ \int_0^T \int_0^L \{ \kappa l (\varphi_x + \psi + l w) + \gamma(x) g_3(w_t) \} w_x x \eta \theta dx dt. \end{aligned}$$

Nosso desiderato é provar que a desigualdade:

$$(3.44) \quad E(T) \leq C \int_0^T \int_0^L \alpha(x) (\varphi_t^2 + g_1(\varphi_t)^2) + \psi_t^2 + g_2(\psi_t)^2 + \gamma(x) (w_t^2 + g_3(w_t)^2) dx dt,$$

para algum $C = (T, E(0)) > 0$ e para T suficientemente grande, vale para toda solução fraca do sistema dissipativo (3.1).

Assumindo que (3.44) é satisfeita, e procedendo literalmente como em Lasiecka e Tataru [25], a solução do sistema (3.1) satisfaz a taxa de decaimento (3.5).

Agora, estamos em condições de asseverar o principal resultado deste capítulo:

Teorema 3.2 *Assuma as hipóteses (3.2.1) e (3.2.2). Então o sistema (3.1) possui uma única solução (fraca) que satisfaz a taxa de decaimento dada em (3.5), se $0 < E(0) < M$.*

Demonstração:

A fim de provarmos o teorema (3.2) é suficiente provarmos a desigualdade (3.44).

Sendo,

$$(3.45) \quad E(t) \leq E(0), \forall t > 0$$

é suficiente provar que dados quaisquer $T, M > 0$, com T suficientemente grande, existe uma constante $C = C(T, M) > 0$ tal que a desigualdade

$$(3.46) \quad E(0) \leq C \int_0^T \int_0^L \alpha(x) (\varphi_t^2 + g_1(\varphi_t)^2) + \psi_t^2 + g_2(\psi_t)^2 + \gamma(x) (w_t^2 + g_3(w_t)^2) dx dt$$

vale para toda solução forte $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t)$ do sistema (3.1), satisfazendo

$$0 < E(0) < M.$$

Por simplicidade denotaremos $u' := u_t$. Suponhamos que (3.46) não se verifica, e seja

$$U_{0n} = \{\varphi_{0n}, \varphi_{1n}, \psi_{0n}, \psi_{1n}, w_{0n}, w_{1n}\}$$

uma seqüência de dados iniciais limitados no espaço $(H_0^1(0, L) \times L^2(0, L))^3$, para a correspondente solução

$$U_n(t) = \{\varphi_n, \varphi'_n, \psi_n, \psi'_n, w_n, w'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

do sistema (3.1).

Temos

$$(3.47) \quad E_n(0) < M,$$

ou seja, uniformemente limitada em n e ainda:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(0)}{\int_0^T \int_0^L \alpha(x)(\varphi_n'^2 + g_1(\varphi_n')^2) + \psi_n'^2 + g_2(\psi_n')^2 + \gamma(x)(w_n'^2 + g_3(w_n')^2) dx dt} = \infty,$$

ou equivalentemente,

$$(3.48) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T \int_0^L \alpha(x)(\varphi_n'^2 + g_1(\varphi_n')^2) + \psi_n'^2 + g_2(\psi_n')^2 + \gamma(x)(w_n'^2 + g_3(w_n')^2) dx dt}{E_n(0)} = 0.$$

Por (3.47) concluímos que a seqüência $\{E_n(0)\}$ é uniformemente limitada em n , e então

$$(3.49) \quad \varphi_n' \xrightarrow{*} \varphi' \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)),$$

$$(3.50) \quad \psi_n' \xrightarrow{*} \psi' \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)),$$

$$(3.51) \quad w_n' \xrightarrow{*} w' \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)),$$

$$(3.52) \quad \psi_{n,x} \xrightarrow{*} \psi_x \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)),$$

$$(3.53) \quad w_{n,x} - l\varphi_n \xrightarrow{*} w_x - l\varphi \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)),$$

$$(3.54) \quad \varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n \xrightarrow{*} \varphi_x + \psi + lw \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)).$$

De (3.52), pela desigualdade (2.20) de Poincaré , obtemos

$$(3.55) \quad \psi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \psi \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)),$$

e portanto pelo teorema (2.26) de Aubin-Lions, segue que

$$(3.56) \quad \psi_n \rightarrow \psi \text{ em } L^2(0, T; L^2(0, L)).$$

Por outro lado, desde que os dados iniciais são limitados, reescrevemos

$$(3.57) \quad \varphi_n(x, t) = \int_0^t \varphi'_n(x, s) ds + \varphi_n(0),$$

e assim a sequência $\{\varphi_n\}$ é limitada em $L^2(0, T; L^2(0, L))$. Então de (3.53), resulta que $\{w_{n,x}\}$ também é limitada em $L^2(0, T; L^2(0, L))$. Novamente, pela desigualdade de Poincaré e pelo teorema de Aubin-Lions, temos

$$(3.58) \quad w_n \rightarrow w \text{ em } L^2(0, T; L^2(0, L)).$$

Analogamente, por (3.54),(3.56), e (3.58), deduzimos que

$$(3.59) \quad \varphi_{n,x} \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi_x \text{ em } L^2(0, T; L^2(0, L)).$$

E ainda, da desigualdade de Poincaré e do teorema de Aubin-Lions também deduzimos

$$(3.60) \quad \varphi_n \rightarrow \varphi \text{ em } L^2(0, T; L^2(0, L)).$$

Neste momento vamos dividir nossa prova em dois casos:

$$\bullet \quad \boxed{U = (\varphi, \varphi', \psi, \psi', w, w')^T \neq 0.}$$

Considere o sistema

$$(3.61) \quad \begin{cases} \rho_1 \varphi_n'' - \kappa(\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n)_x - \kappa_0 l[w_{n,x} - l\varphi_n] + \alpha(x)g_1(\varphi_n') = 0 \\ \rho_2 \psi_n'' - b\psi_{n,xx} + \kappa(\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n) + g_2(\psi_n') = 0 \\ \rho_1 w_n'' - \kappa_0[w_{n,x} - l\varphi_n]_x - \kappa l(\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n) + \gamma(x)g_3(w_n') = 0 \end{cases}$$

em $(0, L) \times (0, T)$.

Desde que a sequência $\{E_n(0)\}$ é limitada, a desigualdade (3.48) fornece-nos

$$(3.62) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^L \alpha(x)(\varphi_n'^2 + g_1(\varphi_n')^2) dx dt = 0,$$

$$(3.63) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^L (\psi_n'^2 + g_2(\psi_n')^2) dx dt = 0,$$

$$(3.64) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^L \gamma(x)(w_n'^2 + g_3(w_n')^2) dx dt = 0,$$

e aqui usando a hipótese (3.2.2), obtemos

$$(3.65) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{I_\varepsilon} \varphi_n'^2 dx dt = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{I_\varepsilon} w_n'^2 dx dt.$$

Pelas convergências acima e aplicando o limite em (4.49), chegamos em

$$(3.66) \quad \begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l[w_x - l\varphi] = 0 & \text{em } Q := (0, L) \times (0, T) \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw) = 0 & \text{em } Q \\ \rho_1 w_{tt} - \kappa_0[w_x - l\varphi]_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + lw) = 0 & \text{em } Q \\ \varphi_t = 0 = w_t & \text{em } Q_\varepsilon := I_\varepsilon \times (0, T) \\ \psi_t = 0 & \text{em } Q. \end{cases}$$

Tomando a derivada de (3.66) em t no sentido distribucional e fazendo $\varphi_t = z$, $\psi_t = u$, e $w_t = v$, inferimos:

$$\begin{cases} \rho_1 z_{tt} - \kappa(z_x + u + lv)_x - \kappa_0 l[v_x - lz] = 0 & \text{em } Q \\ \rho_2 u_{tt} - bu_{xx} + \kappa(z_x + u + lv) = 0 & \text{em } Q \\ \rho_1 v_{tt} - \kappa_0[v_x - lz] + \kappa l(z_x + u + lv) = 0 & \text{em } Q \\ z = 0 = v & \text{em } Q_\varepsilon \\ u = 0 & \text{em } Q. \end{cases}$$

Usando o teorema (2.18) de Holmgren somos levados a afirmar que

$$z = u = v = 0 \text{ em } Q,$$

e conseqüentemente,

$$(3.67) \quad \varphi_t = \psi_t = w_t = 0 \text{ em } Q.$$

Retornando ao sistema (3.66), obtemos em Q :

$$(3.68) \quad \begin{cases} -\kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l[w_x - l\varphi] = 0 \\ -b\psi_{xx} + \kappa[w_x - l\varphi] = 0 \\ -\kappa_0[w_x - l\varphi]_x + \kappa l[w_x - l\varphi] = 0. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação de (3.68) por φ , a segunda por ψ , a terceira equação por w e somando-se resultado obtido, conseguimos que

$$\int_Q \kappa(\varphi_x + \psi + lw)^2 + b\psi_x^2 + \kappa_0[w_x - l\varphi]^2 dxdt = 0$$

donde, usando a desigualdade de Poincaré, obtemos $\psi = 0$. Prosseguindo, como temos (3.67) resultante da diferenciação com relação ao tempo, obtemos o sistema de EDO's:

$$(3.69) \quad \begin{cases} \varphi_x + lw = 0 \\ w_x - l\varphi = 0 \\ \varphi, w \in H_0^1(0, L) \end{cases}$$

que fornece-nos $\varphi = w = 0$, ou seja, chegamos em uma incompatibilidade diante de nosso pressuposto inicial. E assim, a prova do caso ❶ está encerrada.

$$\text{❷ } \boxed{U = (\varphi, \varphi', \psi, \psi', w, w')^T = 0.}$$

Neste caso, inicialmente conceituamos

$$(3.70) \quad \nu_n := \sqrt{E_n(0)}, \quad \bar{\varphi}_n := \frac{\varphi_n}{\nu_n}, \quad \bar{\psi}_n := \frac{\psi_n}{\nu_n}, \quad \text{e} \quad \bar{w}_n := \frac{w_n}{\nu_n}.$$

Por (3.48) obtemos

$$(3.71) \quad \begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q \alpha(x) \left(\bar{\varphi}_n'^2 + \frac{g_1(\nu_n \bar{\varphi}_n')^2}{\nu_n^2} \right) dxdt \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q \left(\bar{\psi}_n'^2 + \frac{g_2(\nu_n \bar{\psi}_n')^2}{\nu_n^2} \right) dxdt \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q \gamma(x) \left(\bar{w}_n'^2 + \frac{g_3(\nu_n \bar{w}_n')^2}{\nu_n^2} \right) dxdt. \end{aligned}$$

Além disso definindo, para cada n , a energia $\bar{E}_n(t)$ do sistema normalizado como

$$\frac{1}{2} \int_0^L \rho_1 \bar{\varphi}_n'^2 + \rho_2 \bar{\psi}_n'^2 + \rho_1 \bar{w}_n'^2 + b \bar{\psi}_{n,x}^2 + \kappa_0 [\bar{w}_{n,x} - l \bar{\varphi}]^2 + \kappa (\bar{\varphi}_{n,x} + \bar{\psi}_n + \bar{w}_n)^2 dx,$$

então,

$$(3.72) \quad \bar{E}_n(0) = \frac{E_n(0)}{\nu_n^2} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, fazendo uso da desigualdade de Poincaré e do teorema de Aubin-Lions, logramos nas convergências:

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_n \rightarrow \bar{\varphi} & \text{em } L^2(0, T; L^2(0, L)), \\ \bar{\psi}_n \rightarrow \bar{\psi} & \text{em } L^2(0, T; L^2(0, L)), \\ \bar{w}_n \rightarrow \bar{w} & \text{em } L^2(0, T; L^2(0, L)). \end{cases}$$

Considerando as convergências prévias e aplicando o limite no sistema normalizado

$$(3.73) \quad \begin{cases} \rho_1 \bar{\varphi}_n'' - \kappa (\bar{\varphi}_{n,x} + \bar{\psi}_n + l \bar{w}_n)_x - \kappa_0 l [\bar{w}_{n,x} - l \bar{\varphi}_n] + \alpha(x) \frac{g_1(\nu_n \bar{\varphi}_n')}{\nu_n} = 0 \\ \rho_2 \bar{\psi}_n'' - b \bar{\psi}_{n,xx} + \kappa (\bar{\varphi}_{n,x} + \bar{\psi}_n + l \bar{w}_n) + \frac{g_2(\nu_n \bar{\psi}_n')}{\nu_n} = 0 \\ \rho_1 \bar{w}_n'' - \kappa_0 [\bar{w}_{n,x} - l \bar{\varphi}_n]_x + \kappa l (\bar{\varphi}_{n,x} + \bar{\psi}_n + l \bar{w}_n) + \gamma(x) \frac{g_3(\nu_n \bar{w}_n')}{\nu_n} = 0 \end{cases}$$

em Q , concluímos

$$\begin{cases} \rho_1 \bar{\varphi}'' - \kappa (\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l \bar{w})_x - \kappa_0 l [\bar{w}_x - l \bar{\varphi}] = 0 & \text{em } Q \\ \rho_2 \bar{\psi}'' - b \bar{\psi}_{xx} + \kappa (\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l \bar{w}) = 0 & \text{em } Q \\ \rho_1 \bar{w}'' - \kappa_0 [\bar{w}_x - l \bar{\varphi}]_x + \kappa l (\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l \bar{w}) = 0 & \text{em } Q \\ \bar{\varphi}_t = 0 = \bar{w}_t & \text{em } Q_\varepsilon \\ \bar{\psi}_t = 0 & \text{em } Q. \end{cases}$$

Analogamente ao caso **1** deduzimos que

$$\bar{\varphi} = \bar{\psi} = \bar{w} = 0.$$

Para a almejada contradição faremos uso das identidades provadas no começo desta seção, levando em consideração as equações do sistema (3.73). De fato, pela identidade

(3.38) podemos escrever:

$$(3.74) \quad 0 = - \int_Q \rho_2 (\bar{\psi}'_n \theta + \bar{\psi}'_n \bar{\psi}_n \theta') - b \bar{\psi}_{n,x}^2 \theta \, dxdt \\ + \int_Q \left\{ \kappa (\bar{\varphi}_{n,x} + \bar{\psi}_n + l \bar{w}_n) + \frac{g_2 (\nu_n \bar{\psi}'_n)}{\nu_n} \right\} \bar{\psi}_n \theta \, dxdt.$$

Aplicando a convergência fraca e forte, e sendo $\bar{\varphi} = \bar{\psi} = \bar{w} = 0$, de (3.74) decorre que

$$(3.75) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b \int_0^T \int_0^L \bar{\psi}_{n,x}^2 \theta \, dxdt = 0.$$

Agora vamos considerar a identidade (3.39), logo

$$(3.76) \quad 0 = \frac{1}{2} \int_Q (\rho_2 \bar{\psi}'_n{}^2 + b \bar{\psi}_{n,x}^2) \theta \, dxdt \\ - \int_Q \rho_2 \bar{\psi}'_n \bar{\psi}_{n,x} x \theta' \, dxdt - \frac{bL}{2} \int_0^T \bar{\psi}_{n,x}^2(L) \theta \, dt \\ + \int_Q \left\{ \kappa (\bar{\varphi}_{n,x} + \bar{\psi}_n + l \bar{w}_n) + \frac{g_2 (\nu_n \bar{\psi}'_n)}{\nu_n} \right\} \bar{\psi}_{n,x} x \theta \, dxdt.$$

Em (3.76), aplicando as convergências (fracas e fortes) com (3.71) e (3.75), deduzimos que

$$(3.77) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bL}{2} \int_0^T \bar{\psi}_{n,x}^2(L) \theta \, dt = 0.$$

Retornando a identidade (3.40), temos

$$(3.78) \quad 0 = - \int_Q \rho_1 (\bar{\varphi}'_n \theta + \bar{\varphi}'_n \varphi'_n \theta') \eta \, dxdt \\ + \int_Q \kappa (\bar{\varphi}_{n,x} + \bar{\psi}_n + l \bar{w}_n) (\bar{\varphi}_{n,x} \eta + \bar{\varphi}_n \eta_x) \theta \, dxdt \\ - \int_Q \left\{ \kappa_0 l [\bar{w}_{n,x} - l \bar{\varphi}_n] - \alpha(x) \frac{g_1 (\nu_n \bar{\varphi}'_n)}{\nu_n} \right\} \bar{\varphi}_n \eta \theta \, dxdt.$$

Novamente, utilizando as convergências postas, de (3.78) depreende-se

$$(3.79) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa \int_0^T \int_0^L \bar{\varphi}_{n,x}^2 \eta \theta \, dxdt = 0.$$

Pela identidade (3.41), segue-se que

$$(3.80) \quad 0 = \frac{1}{2} \int_Q (\rho_1 \bar{\varphi}_n'^2 + \kappa \bar{\varphi}_{n,x}^2) (\eta + x \eta_x) \theta \, dx dt \\ - \int_Q \bar{\varphi}_n' \bar{\varphi}_{n,x} x \eta \theta' \, dx dt - \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \bar{\varphi}_{n,x}^2(L) \theta \, dt \\ + \int_Q \left\{ -\kappa (\bar{\psi}_n + l \bar{w}_n)_x - \kappa_0 l [\bar{w}_{n,x} - l \bar{\varphi}_n] + \alpha(x) \frac{g_1(\nu_n \bar{\varphi}_n')}{\nu_n} \right\} \bar{\varphi}_{n,x} x \eta \theta \, dx dt.$$

Portanto, empregando as convergências supra mencionadas e (3.79) em (3.80), vemos que

$$(3.81) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \bar{\varphi}_{n,x}^2(L) \theta \, dt = 0.$$

Finalmente, regressando a identidade (3.42) temos

$$(3.82) \quad 0 = - \int_Q \rho_1 (\bar{w}_n'^2 \theta + \bar{w}_n \varphi_n' \theta') \eta \, dx dt \\ + \int_Q \kappa_0 [\bar{w}_{n,x} - l \bar{\varphi}_n] (\bar{w}_{n,x} \eta - \bar{w}_n \eta_x) \theta \, dx dt \\ + \int_Q \left\{ \kappa l (\bar{\varphi}_{n,x} + \bar{\psi}_n + l \bar{w}_n) + \gamma(x) \frac{g_3(\nu_n \bar{w}_n')}{\nu_n} \right\} \bar{w}_n \eta \theta \, dx dt.$$

Mais uma vez, dispoendo em (3.82) as convergências citadas, encontramos

$$(3.83) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_0 \int_0^T \int_0^L \bar{w}_{n,x}^2 \eta \theta \, dt = 0.$$

Pela identidade (3.43) adquirimos

$$(3.84) \quad 0 = \frac{1}{2} \int_Q (\rho_1 \bar{w}_n'^2 + \kappa_0 \bar{w}_{n,x}^2) (\eta + x \eta_x) \theta \, dx dt \\ - \int_Q \bar{w}_n' \bar{w}_{n,x} x \eta \theta' \, dx dt - \frac{\kappa_0 L}{2} \int_0^T \bar{w}_{n,x}^2(L) \theta \, dt \\ + \int_Q \left\{ -\kappa_0 l \bar{\varphi}_{n,x} + \kappa l (\bar{\varphi}_{n,x} + \bar{\psi}_n + l \bar{w}_n) + \gamma(x) \frac{g_3(\nu_n \bar{w}_n')}{\nu_n} \right\} \bar{w}_{n,x} x \eta \theta \, dx dt.$$

Por força das convergências mencionadas e (3.83), segue da última igualdade que

$$(3.85) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\kappa_0 L}{2} \int_0^T \bar{w}_{n,x}^2(L) \theta \, dt = 0.$$

Pelo exposto, vamos reescrever a desigualdade (3.37) em termos do problema (3.73), ou seja,

$$\begin{aligned}
 \bar{E}_n(0) &\leq C_\varepsilon \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \int_0^L \bar{\psi}_n^2 + \bar{\psi}_n'^2 dxdt + C_\varepsilon \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \bar{\varphi}_{n,x}^2(L) + \bar{\psi}_{n,x}^2(L) + \bar{w}_{n,x}^2(L) dt \\
 (3.86) \quad &+ C_\varepsilon \int_0^T \int_0^L \alpha(x) \frac{g_1(\nu_n \bar{\varphi}_n')^2}{\nu_n^2} + \frac{g_2(\nu_n \bar{\psi}_n')^2}{\nu_n^2} + \gamma(x) \frac{g_1(\nu_n \bar{\varphi}_n')^2}{\nu_n^2} dxdt.
 \end{aligned}$$

Combinando (3.71), (3.72), (3.77), (3.81), (3.85) em (3.86) chegamos na desigualdade $1 \leq 0$, que é paradoxal. Concluindo-se a prova do caso **2**.

Diante do exposto, corrobora-se a veracidade da desigualdade (3.46).

□

CAPÍTULO 4

DISSIPAÇÕES LOCALIZADAS

Este capítulo foi publicado em [12].

4.1 Introdução

Seja $L > 0$ dado. Neste capítulo, vamos considerar o sistema Bresse, com mecanismos dissipativos como segue:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l[w_x - l\varphi] + \alpha_1(x)g_1(\varphi_t) = 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw) + \alpha_2(x)g_2(\psi_t) = 0 \\ \rho_1 w_{tt} - \kappa_0[w_x - l\varphi]_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + lw) + \alpha_3(x)g_3(w_t) = 0 \end{cases}$$

em $(0, L) \times \mathbb{R}_+$, onde $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, com condições de fronteira do tipo Dirichlet:

$$(4.2) \quad \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

e condições iniciais:

$$(4.3) \quad \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1, w(\cdot, 0) = w_0, w_t(\cdot, 0) = w_1.$$

As constantes positivas $\rho_1, \rho_2, b, l, \kappa_0, \kappa$ estão relacionadas a composição do material. Por w, φ , and ψ denotamos respectivamente o deslocamento longitudinal, vertical e de

cisalhamento, e a terna (φ, ψ, w) é a solução procurada de (4.1)-(4.3). Imporemos que as funções de localização $\alpha_i \in L^\infty(0, L)$, enquanto as funções g_i serão contínuas e monótonas, com $i = 1, 2, 3$.

Estruturas elásticas do tipo arco são objetos de estudo em muitas áreas da matemática, física e engenharia. Para mais detalhes, sugerimos uma visita aos trabalhos [31, 40] e suas referências.

Com relação a obtenção de taxas de decaimento, encontramos poucos trabalhos na literatura. Novamente mencionamos os trabalhos de Liu e Rao em [31], onde eles estudaram o comportamento assintótico do sistema de Bresse no contexto da termoelasticidade e provaram que o decaimento exponencial da solução ocorre se, e somente se, a seguinte hipótese de igualdade entre as velocidades de propagações de ondas vale:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\kappa}{b}, \quad \text{e } \kappa = \kappa_0.$$

Este capítulo está estruturado como segue. A seção 4.2 é dedicada as hipóteses, resultados preliminares e a existência de solução do sistema (4.1)-(4.3), usando a teoria de semi-grupos não-lineares. A seção 4.3 apresenta um novo e importante resultado de observabilidade relativo ao sistema conservativo. Finalmente, a seção 4.4 é dedicada a apresentar os resultados relativos as taxas de decaimento para as soluções do problema dissipativo não-linear.

4.2 Hipóteses, Resultados Preliminares e Existência

Vamos considerar o sistema de Bresse (4.1)-(4.3). As seguintes hipóteses com relação aos parâmetros do problema são feitas:

Hipótese

4.2.1 A função g_i , para cada $i = 1, 2, 3$, é contínua e monótona crescente, e satisfaz as seguintes condições:

- (i) $g_i(s)s > 0$ para $s \neq 0$,
- (ii) $k_i s \leq g_i(s) \leq K_i s$ para $|s| > 1$,

onde k_i e K_i são constantes positivas, e $k_i \leq K_i$.

Hipótese

4.2.2 Assuma que $\alpha_i \in L^\infty(0, L)$ são funções não-negativas tais que

$$(4.4) \quad \alpha_i(x) \geq \alpha_i > 0 \text{ em } I_i \subset (0, L), \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{e } \tilde{I} := \bigcap_{i=1}^3 I_i \neq \emptyset, \text{ com } \mu(\tilde{I}) > 0.$$

Observação 4.2.1

☞ Como podemos observar, as funções de localização permitem-nos considerar mecanismos de dissipação agindo em uma pequena região da viga.

Se (φ, ψ, w) é uma solução de (4.1)-(4.3), então a energia do sistema relacionada a esta solução será denotada por $E(t)$ e dada por

$$(4.5) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |w_t|^2 + b |\psi_x|^2 + \kappa_0 |w_x - l\varphi|^2 + \kappa |\varphi_x + \psi + lw|^2 \right) (x, t) dx,$$

com t não-negativo.

Podemos provar que o sistema (4.1)-(4.3) é dissipativo como afirmamos abaixo:

Lema 4.1 *O funcional energia E definido por (4.5), satisfaz:*

$$(4.6) \quad \frac{dE(t)}{dt} = - \int_0^L \{ \alpha_1(x) g_1(\varphi_t) \varphi_t + \alpha_2(x) g_2(\psi_t) \psi_t + \alpha_3(x) g_3(w_t) w_t \} dx \leq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração:

Multiplicando a primeira equação de (4.1) por φ_t , a segunda por ψ_t , a terceira por w_t , e integrando em $(0, L)$ fazemos uso das condições de fronteira (4.2) e das hipóteses (4.2.1) e (4.2.2) para chegarmos em (4.6).

□

Agora, vamos discutir a existência, unicidade e regularidade das soluções de (4.1)-(4.3). Para isto, iremos mais uma vez fazer uso da teoria de semigrupos não-lineares tratada por Barbu em [1], e também por Brézis em [3].

Primeiramente, vamos considerar o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} := H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$$

dotado da norma

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &:= \|\{\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W\}\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\equiv \int_0^L \rho_1 |\Phi|^2 + \rho_2 |\Psi|^2 + \rho_1 |W|^2 + b |\psi_x|^2 + k_0 |w_x - l\varphi|^2 + k |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx, \end{aligned}$$

que é equivalente a norma usual de \mathcal{H} .

Se denotamos por $V(t) = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t)$ então o problema de valor inicial (4.1)-(4.3) pode ser reescrito como um problema de primeira ordem, como segue:

$$(4.7) \quad \begin{cases} \frac{dV}{dt}(t) + \mathcal{A}V(t) = 0 \\ V(0) = V_0 \end{cases}$$

onde $V_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1)$, e o operador $\mathcal{A} = D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ que é dado por $\mathcal{A} = -(A_1 + A_2)$, tem os operadores A_i definidos por:

$$D(A_1) = (H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times H_0^1(0, L))^3 \text{ e } D(A_2) = \mathcal{H}$$

com

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{\rho_1} \partial_x^2 - \frac{\kappa_0 l^2}{\rho_1} I & 0 & \frac{\kappa}{\rho_1} \partial_x & 0 & \frac{(\kappa + \kappa_0)l}{\rho_1} \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{\rho_2} \partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2} \partial_x^2 - \frac{\kappa}{\rho_2} I & 0 & -\frac{\kappa l}{\rho_2} I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(\kappa + \kappa_0)l}{\rho_1} \partial_x & 0 & -\frac{\kappa l}{\rho_1} I & 0 & \frac{\kappa_0}{\rho_1} \partial_x^2 - \frac{\kappa l^2}{\rho_1} I & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_1(x)}{\rho_1} g_1(\cdot) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_2(x)}{\rho_2} g_2(\cdot) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_3(x)}{\rho_1} g_3(\cdot) \end{pmatrix}.$$

Note que, neste caso temos $D(\mathcal{A}) = D(A_1)$.

Teorema 4.2 *Suponha que as hipóteses (4.2.1) e (4.2.2) são satisfeitas. Dado $U_0 \in D(\mathcal{A})$ existe uma única solução forte para o sistema (4.7). Além disso, se $U_0 \in \mathcal{H}$ então o sistema (4.7) admitirá uma única solução fraca.*

Demonstração:

Desejamos demonstrar que $\mathcal{A} = -(A_1 + A_2)$ é um operador maximal monótono de \mathcal{H} , para usarmos o teorema (2.31). Para isto, dividiremos a prova em duas partes:

(a) O operador $-A_1$ é maximal monótono;

(b) $-A_2$ é monótono, hemicontínuo, e limitado,

com o propósito de usarmos o teorema (2.32), para concluirmos a propriedade desejada sobre o operador \mathcal{A} .

Prova de (a):

Nossa estratégia é mostrar que $-A_1$ é monótono e $\mathcal{R}(I - A_1) = \mathcal{H}$. Assim, usando o teorema (2.30) obtemos o resultado.

Com efeito, a monotonicidade segue do fato de que

$$(-A_1U, U)_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall U \in D(\mathcal{A}).$$

Agora, suponhamos que $F = (F_1, \dots, F_6) \in \mathcal{H}$. É suficiente resolver o problema espectral:

$$U - A_1U = F,$$

para algum $U \in D(\mathcal{A})$. Se denotamos $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$, a equação acima torna-se equivalente a

$$(4.8) \quad \varphi - \Phi = F_1 \in H_0^1(0, L),$$

$$(4.9) \quad \rho_1\Phi - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0l[w_x - l\varphi] = \rho_1F_2 \in L^2(0, L),$$

$$(4.10) \quad \psi - \Psi = F_3 \in H_0^1(0, L),$$

$$(4.11) \quad \rho_2\Psi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw) = \rho_2F_4 \in L^2(0, L),$$

$$(4.12) \quad w - W = F_5 \in H_0^1(0, L),$$

$$(4.13) \quad \rho_1W - \kappa_0[w_x - l\varphi]_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + lw) = \rho_1F_6 \in L^2(0, L).$$

Isolando Φ, Ψ, W em (4.8), (4.10) e (4.12) e substituindo em (4.9), (4.11) e (4.13) respectivamente, teremos que resolver o seguinte problema:

$$\begin{cases} \rho_1\varphi - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0l[w_x - l\varphi] = f_1, \\ \rho_2\psi - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw) = f_2, \\ \rho_1w - \kappa_0[w_x - l\varphi]_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + lw) = f_3, \end{cases}$$

onde

$$f_1 = \rho_1(F_1 + F_2), \quad f_2 = \rho_2(F_3 + F_4), \quad f_3 = \rho_1(F_5 + F_6).$$

Deste modo, definimos a forma bilinear

$$\mathbf{a} : [H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\mathbf{a}(X, Y) = \int_0^L \rho_1 \varphi u + \rho_2 \psi v + \rho_1 w z + \kappa(\varphi_x + \psi + lw)(u_x + v + lz) + \kappa_0[w_x - l\varphi][z_x - lu] \, dxdt,$$

para $X = (\varphi, \psi, w), Y = (u, v, z) \in H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$.

Não é árduo provar que \mathbf{a} é contínua e coerciva. Assim, a conclusão segue do teorema (2.23) de Lax-Milgram e encerramos a prova.

Prova de (b):

Das hipóteses (4.2.1) e (4.2.2) o operador $-A_2$ satisfaz

$$(-A_2 U, U)_{\mathcal{H}} \geq 0,$$

que prova a monotonicidade de $-A_2$.

Agora, seja $U_i = (\varphi_i, \Phi_i, \psi_i, \Psi_i, w_i, W_i) \in \mathcal{H}$ com $i = 1, 2$. Consideremos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} (-A_2(U_1 + tU_2), U)_{\mathcal{H}} &= (\alpha_1(x)g_1(\Phi_1 + t\Phi_2), \Phi)_{L^2} \\ &+ (\alpha_2(x)g_2(\Psi_1 + t\Psi_2), \Psi)_{L^2} \\ &+ (\alpha_3(x)g_3(W_1 + tW_2), W)_{L^2}, \end{aligned}$$

para $t > 0$. Como o anseio é mostrarmos que

$$(4.14) \quad \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} (\alpha_1(x)g_1(\Phi_1 + t\Phi_2), \Phi)_{L^2} = (\alpha_1(x)g_1(\Phi_1), \Phi)_{L^2} \\ \lim_{t \rightarrow 0} (\alpha_2(x)g_2(\Psi_1 + t\Psi_2), \Psi)_{L^2} = (\alpha_2(x)g_2(\Psi_1), \Psi)_{L^2} \\ \lim_{t \rightarrow 0} (\alpha_3(x)g_3(W_1 + tW_2), W)_{L^2} = (\alpha_3(x)g_3(W_1), W)_{L^2}, \end{cases}$$

é suficiente provarmos o primeiro limite de (4.14), pois os outros são análogos. Para isto, considere a função $f \in L^1(0, L)$ dada por

$$f(x) = \alpha(x)g_1(\Phi_1(x))\Phi(x),$$

e defina a sequência $\{f_n\} \subset L^1(0, L)$ dada por

$$f_n(x) = \alpha(x)g_1\left(\Phi_1(x) + \frac{1}{n}\Phi_2(x)\right)\Phi(x).$$

Temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \text{ q.s. em } (0, L).$$

Definindo o conjunto

$$\Sigma_n = \left\{ x \in [0, L]; \left| \Phi_1(x) + \frac{1}{n}\Phi_2(x) \right| < 1 \right\},$$

não é trabalhoso provar que

$$|f_n(x)| \leq c_1|\Phi(x)|,$$

para quase todo $x \in \Sigma_n$, onde c_1 é uma constante positiva.

Por outro lado, usando (4.2.1) e (4.2.2) concluímos também que

$$|f_n(x)| \leq c_2(|\Phi_1(x)| + |\Phi_2(x)|)|\Phi(x)|$$

quase sempre em $[0, L] \setminus \Sigma_n$. Ambos os casos permitem-nos concluir que $\{f_n\}$ é limitada por uma função integrável em $[0, L]$.

Portanto, pelo teorema (2.5) da convergência dominada de Lebesgue obtemos o limite desejado. Assim, $-A_2$ é hemicontínuo.

Finalmente, depois de alguns cálculos, usando as hipóteses (4.2.1) e (4.2.2) novamente concluímos que o operador $-A_2$ transforma subconjuntos limitados em subconjuntos limitados, encerrando a prova.

As afirmações **(a)** e **(b)** implicam que operador \mathcal{A} é maximal monótono, logo a conclusão da demonstração segue do teorema (2.31).

□

4.3 Desigualdade de observabilidade

Nesta seção, consideramos o sistema (4.1) sem forças externas:

$$(4.15) \quad \begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l[w_x - l\varphi] = 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw) = 0 \\ \rho_1 w_{tt} - \kappa_0[w_x - l\varphi]_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + lw) = 0 \end{cases}$$

em $(0, L) \times \mathbb{R}_+$, com condições de Dirichlet (4.2).

Nestas circunstâncias, observamos que a energia do sistema conservativo (4.15) é a mesma energia do sistema dissipativo (4.1).

Na literatura, o sistema (4.15) consiste das equações para o problema do arco circular:

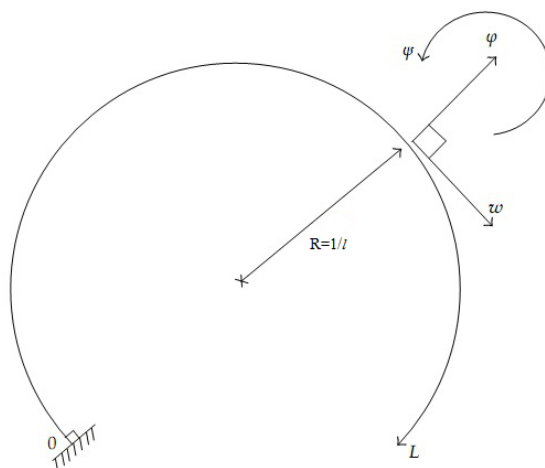


Figura 4.1: O arco circular.

Inicialmente consideremos o resultado:

Teorema 4.3 *Seja $\Gamma := (a_1, a_2)$ um intervalo aberto contido em $(0, L)$. Para $T > 0$ suficientemente grande, existe uma constante positiva C_0 tal que qualquer solução (φ, ψ, w) do sistema (4.15) satisfaz*

$$(4.16) \quad E_0 \leq C_0 \int_0^T \int_{\Gamma} \rho_1 |\varphi_t(x, t)|^2 + \rho_2 |\psi_t(x, t)|^2 + \rho_1 |w_t(x, t)|^2 dx dt,$$

onde $E_0 := E(0)$ é a energia inicial relacionada a solução (φ, ψ, w) .

Demonstração:

Enfatizamos que usando argumentos de densidade é suficiente provarmos este resultado para soluções fortes (φ, ψ, w) do sistema (4.15).

Seja $|\Gamma| := a_2 - a_1$, e considere ε_0 suficientemente pequeno tal que

$$0 < \varepsilon_0 < \frac{|\Gamma|}{2}.$$

Definimos a seguinte função contínua e C^1 por partes:

$$g_\lambda(x) = \begin{cases} (\lambda - 1)x, & \text{se } x \in [0, a_1 + \varepsilon_0), \\ \lambda(x - a_1 - \varepsilon_0) + \frac{a_1 - a_2 + 2\varepsilon_0}{L}(a_1 + \varepsilon_0), & \text{se } x \in [a_1 + \varepsilon_0, a_2 - \varepsilon_0], \\ (\lambda - 1)(x - L), & \text{se } x \in (a_2 - \varepsilon_0, L]. \end{cases}$$

com

$$\lambda := \frac{L - (a_2 - a_1 - 2\varepsilon_0)}{L} \in [0, 1[\text{ e } 0 \leq a_1 < a_2 \leq L,$$

introduzida primeiramente em [22].

Multiplicando a primeira, segunda e terceira equações do sistema (4.15) pelos multiplicadores $\varphi_x g_\lambda$, $\psi_x g_\lambda$, $w_x g_\lambda$ respectivamente, e integrando por partes, obtemos:

$$(4.17) \quad 0 = \left[\int_0^L \left(\rho_1 \varphi_t \varphi_x + \rho_2 \psi_t \psi_x + \rho_1 w_t w_x \right) g_\lambda dx \right]_0^T + \int_0^T \int_0^L \kappa_0 l [w_x - l\varphi] \varphi g'_\lambda dx dt \\ + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L \left(\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |w_t|^2 + b |\psi_x|^2 + \kappa_0 |w_x - l\varphi|^2 + \kappa |\varphi_x + \psi + lw|^2 \right) g'_\lambda dx dt \\ - \int_0^T \int_0^L \kappa (\varphi_x + \psi + lw) \psi g'_\lambda dx dt - \int_0^T \int_0^L \kappa l (\varphi_x + \psi + lw) w g'_\lambda dx dt$$

Como,

$$g'_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda, & \text{se } x \in [a_1 + \varepsilon_0, a_2 - \varepsilon_0] \\ (\lambda - 1), & \text{se } x \in [0, a_1 + \varepsilon_0) \cup (a_2 - \varepsilon_0, L] \end{cases}$$

temos da igualdade (4.17) que

$$\begin{aligned}
(4.18) \quad & (1 - \lambda) \int_0^T E(t) dt = - \left[\int_0^L (\rho_1 \varphi_t \varphi_x + \rho_2 \psi_t \psi_x + \rho_1 w_t w_x) g_\lambda dx \right]_0^T \\
& + \int_0^T \int_0^L \kappa_0 l [w_x - l\varphi] \varphi g'_\lambda dx dt - \int_0^T \int_0^L \kappa (\varphi_x + \psi + lw) \psi g'_\lambda dx dt \\
& - \int_0^T \int_0^L \kappa l (\varphi_x + \psi + lw) w g'_\lambda dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{a_1 + \varepsilon_0}^{a_2 - \varepsilon_0} \rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |w_t|^2 dx dt \\
& + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{a_1 + \varepsilon_0}^{a_2 - \varepsilon_0} \left(b |\psi_x|^2 + \kappa_0 |w_x - l\varphi|^2 + \kappa |\varphi_x + \psi + lw|^2 \right) dx dt
\end{aligned}$$

Vamos estimar o lado direito de (4.18). Usando a equivalência entre a norma da energia e a norma usual em \mathcal{H} , obtemos primeiramente que

$$(4.19) \quad - \left[\int_0^L (\rho_1 \varphi_t \varphi_x + \rho_2 \psi_t \psi_x + \rho_1 w_t w_x) g_\lambda dx \right]_0^T \leq C E_0.$$

Em seguida, fazendo uso da desigualdade (2.1) de Young com o fato de que $|g'_\lambda| \leq 1$, obtemos

$$(4.20) \quad \int_0^T \int_0^L \kappa_0 l [w_x - l\varphi] \varphi g'_\lambda dx dt \leq \varepsilon T E_0 + C_\varepsilon \int_0^T \int_0^L |\varphi|^2 dx dt$$

$$(4.21) \quad - \int_0^T \int_0^L \kappa (\varphi_x + \psi + lw) \psi g'_\lambda dx dt \leq \varepsilon T E_0 + C_\varepsilon \int_0^T \int_0^L |\psi|^2 dx dt$$

$$(4.22) \quad - \int_0^T \int_0^L \kappa l (\varphi_x + \psi + lw) w g'_\lambda dx dt \leq \varepsilon T E_0 + C_\varepsilon \int_0^T \int_0^L |w|^2 dx dt$$

onde a constante positiva ε é suficientemente pequena e tomada convenientemente.

Finalmente, vamos estimar a última parcela do lado direito de (4.18). Com este objetivo, consideramos a seguinte função $\zeta \in C_0^\infty(0, L)$ definida por:

$$\left| \begin{array}{l} 0 \leq \zeta(x) \leq 1, \forall x \in (0, L) \\ \zeta(x) = 0, \text{ em } (0, a_1) \cup (a_2, L) \\ \zeta(x) = 1, \text{ em } (a_1 + \varepsilon_0, a_2 - \varepsilon_0) \end{array} \right.$$

Multiplicando as equações do sistema (4.15) por $\zeta\varphi$, $\zeta\psi$, e ζw , respectivamente e

integrando por partes em $(0, T) \times (0, L)$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_0^T \int_0^L (b|\psi_x|^2 + \kappa_0|w_x - l\varphi|^2 + \kappa|\varphi_x + \psi + lw|^2)\zeta \, dxdt \\ &\quad - \left[\int_0^L (\rho_1\varphi_t\varphi + \rho_2\psi_t\psi + \rho_1w_t w)\zeta \, dx \right]_0^T - \int_0^T \int_0^L (\kappa\varphi\psi + \kappa lw\varphi - \kappa_0l\varphi w)\zeta_x \, dxdt. \\ &\quad + \int_0^T \int_0^L (\rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \rho_1|w_t|^2)\zeta \, dxdt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (\kappa|\varphi|^2 + b|\psi|^2 + \kappa_0|w|^2)\zeta_{xx} \, dxdt. \end{aligned}$$

Consequentemente, por cálculos análogos aos feitos anteriormente, inferimos

$$(4.23) \quad \begin{aligned} &\int_0^T \int_0^L (b|\psi_x|^2 + \kappa_0|w_x - l\varphi|^2 + \kappa|\varphi_x + \psi + lw|^2)\zeta \, dxdt \leq CE_0 \\ &+ C \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} (\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_1w_t^2) \, dxdt + C \int_0^T \int_0^L (\varphi^2 + \psi^2 + w^2) \, dxdt, \end{aligned}$$

onde a constante positiva C não depende da solução do sistema (4.15).

De (4.18)-(4.23) obtemos:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda - 3\varepsilon)TE_0 &\leq CE_0 + C \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} (\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_1w_t^2) \, dxdt \\ &\quad + C_\varepsilon \int_0^T \int_0^L (\varphi^2 + \psi^2 + w^2) \, dxdt. \end{aligned}$$

Portanto, para $\varepsilon < \frac{1-\lambda}{3}$, temos

$$\begin{aligned} TE_0 &\leq CE_0 + C \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} (\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_1w_t^2) \, dxdt \\ &\quad + C_\varepsilon \int_0^T \int_0^L (\varphi^2 + \psi^2 + w^2) \, dxdt, \end{aligned}$$

e finalmente tomando $T > C$, podemos concluir que

$$(4.24) \quad E_0 \leq C \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} (\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_1w_t^2) \, dxdt + C \int_0^T \int_0^L (\varphi^2 + \psi^2 + w^2) \, dxdt,$$

onde reincidentemente a constante positiva C não depende da solução do sistema (4.15).

Desejamos estimar a segunda integral do lado direito de (4.24) em termos da energia cinética, ou seja, em termos de φ_t , ψ_t , e w_t .

Para isto é suficiente provarmos que existe uma constante positiva C , que não

depende da solução do sistema (4.15), tal que a desigualdade:

$$(4.25) \quad \int_0^T \int_0^L \varphi^2 + \psi^2 + w^2 dxdt \leq C \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 dxdt,$$

vale para toda solução de (4.15).

Para provarmos esta afirmação iremos argumentar por contradição. Sendo assim, vamos supor que a desigualdade (4.25) não é verdadeira.

Logo, podemos encontrar uma sequência não-nula $\{\varphi_\nu, \psi_\nu, w_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ de soluções de (4.15), satisfazendo

$$\int_0^T \int_0^L (\varphi_\nu^2 + \psi_\nu^2 + w_\nu^2) dxdt > \nu \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 \varphi_{\nu t}^2 + \rho_2 \psi_{\nu t}^2 + \rho_1 w_{\nu t}^2 dxdt, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

que implica em

$$\frac{\int_0^T \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 \varphi_{\nu t}^2 + \rho_2 \psi_{\nu t}^2 + \rho_1 w_{\nu t}^2 dxdt}{\int_0^T \int_0^L (\varphi_\nu^2 + \psi_\nu^2 + w_\nu^2) dxdt} \rightarrow 0,$$

quando $\nu \rightarrow \infty$.

Agora, denotando

$$\tilde{\varphi}_\nu := \frac{\varphi_\nu}{\sqrt{\int_0^T \int_0^L (\varphi_\nu^2 + \psi_\nu^2 + w_\nu^2) dxdt}},$$

$$\tilde{\psi}_\nu := \frac{\psi_\nu}{\sqrt{\int_0^T \int_0^L (\varphi_\nu^2 + \psi_\nu^2 + w_\nu^2) dxdt}},$$

$$\tilde{w}_\nu := \frac{w_\nu}{\sqrt{\int_0^T \int_0^L (\varphi_\nu^2 + \psi_\nu^2 + w_\nu^2) dxdt}},$$

vemos facilmente que

$$\frac{1}{\nu} > \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 \tilde{\varphi}_{\nu t}^2 + \rho_2 \tilde{\psi}_{\nu t}^2 + \rho_1 \tilde{w}_{\nu t}^2 dxdt,$$

logo

$$\int_0^T \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 \tilde{\varphi}_{\nu t}^2 + \rho_2 \tilde{\psi}_{\nu t}^2 + \rho_1 \tilde{w}_{\nu t}^2 dxdt \rightarrow 0,$$

quando $\nu \rightarrow \infty$ e também

$$(4.26) \quad \int_0^T \int_0^L (\tilde{\varphi}_\nu^2 + \tilde{\psi}_\nu^2 + \tilde{w}_\nu^2) dx dt = 1, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Destes resultados temos que as sequências

$$(4.27) \quad \begin{cases} \{\tilde{\varphi}_{\nu t}\}, \{\tilde{\psi}_{\nu t}\}, \{\tilde{w}_{\nu t}\} & \text{são limitadas em } L^2(0, T; L^2(\Gamma)), \\ \{\tilde{\varphi}_\nu\}, \{\tilde{\psi}_\nu\}, \{\tilde{w}_\nu\} & \text{são limitadas em } L^2(0, T; L^2(0, L)). \end{cases}$$

Empregando a desigualdade provada em (4.24) para as soluções $(\tilde{\varphi}_\nu, \tilde{\psi}_\nu, \tilde{w}_\nu)$ de (4.15), obtemos

$$\begin{aligned} E_\nu(t) = E_\nu(0) &\leq C \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 \tilde{\varphi}_{\nu t}^2 + \rho_2 \tilde{\psi}_{\nu t}^2 + \rho_1 \tilde{w}_{\nu t}^2 dx dt \\ &+ C \int_0^T \int_0^L \tilde{\varphi}_\nu^2 + \tilde{\psi}_\nu^2 + \tilde{w}_\nu^2 dx dt \end{aligned}$$

e usando as limitações em (4.27), e a desigualdade (2.20) de Poincaré, podemos concluir que as sequências:

$$(4.28) \quad \begin{cases} \{\tilde{\varphi}_{\nu t}\}, \{\tilde{\psi}_{\nu t}\}, \{\tilde{w}_{\nu t}\} & \text{são limitadas em } L^2(0, T; L^2(0, L)), \\ \{\tilde{\psi}_\nu\} & \text{são limitadas em } L^2(0, T; H_0^1(0, L)), \\ \{\tilde{\varphi}_{\nu x} + \tilde{\psi}_\nu + l\tilde{w}_\nu\}, \{\tilde{w}_{\nu x} - l\tilde{\varphi}_\nu\} & \text{são limitadas em } L^2(0, T; L^2(0, L)). \end{cases}$$

Neste ponto, procedemos como feito no capítulo 3 em (3.57). Sendo os dados iniciais limitados, reescrevemos

$$\tilde{\varphi}_\nu(x, t) = \int_0^t \tilde{\varphi}'_\nu(x, s) ds + \tilde{\varphi}_\nu(0),$$

e assim a sequência $\{\tilde{\varphi}_\nu\}$ é limitada em $L^2(0, T; L^2(0, L))$. Então, de (4.28) segue que a sequência $\{\tilde{w}_{\nu, x}\}$ também é limitada em $L^2(0, T; L^2(0, L))$. Pela desigualdade de Poincaré, concluímos que a sequência

$$(4.29) \quad \{\tilde{w}_\nu\} \text{ é limitada em } L^2(0, T; H_0^1(0, L)).$$

Consequentemente de (4.28), (4.29) e fazendo uso da desigualdade de Poincaré, obtemos que a sequência

$$\{\tilde{\varphi}_\nu\} \text{ é limitada em } L^2(0, T; H_0^1(0, L)).$$

Empregando o teorema (2.26) de Aubin-Lions, também deduzimos que

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_\nu \rightarrow \tilde{\varphi} \text{ strong in } L^2(0, T; L^2(0, L)), \\ \tilde{\psi}_\nu \rightarrow \tilde{\psi} \text{ strong in } L^2(0, T; L^2(0, L)), \\ \tilde{w}_\nu \rightarrow \tilde{w} \text{ strong in } L^2(0, T; L^2(0, L)). \end{cases}$$

E essas convergências fortes aplicadas em (4.26), ocasionam nos limites:

$$(4.30) \quad \begin{aligned} 1 &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^L (\tilde{\varphi}_\nu^2 + \tilde{\psi}_\nu^2 + \tilde{w}_\nu^2) dx dt \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^L (\tilde{\varphi}^2 + \tilde{\psi}^2 + \tilde{w}^2) dx dt. \end{aligned}$$

Por outro lado, as convergências fracas para as derivadas em (4.28) suscitam

$$\int_0^T \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 \tilde{\varphi}_t^2 + \rho_2 \tilde{\psi}_t^2 + \rho_1 \tilde{w}_t^2 dx dt \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 \tilde{\varphi}_{\nu t}^2 + \rho_2 \tilde{\psi}_{\nu t}^2 + \rho_1 \tilde{w}_{\nu t}^2 dx dt = 0,$$

o que nos leva a deduzir que

$$\tilde{\varphi}_t = \tilde{\psi}_t = \tilde{w}_t = 0,$$

em $(a_1, a_2) \times (0, T)$.

Entretanto, notamos que $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{w})$ é uma solução de

$$(4.31) \quad \begin{cases} \rho_1 \tilde{\varphi}_{tt} - \kappa(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{w})_x - \kappa_0 l[\tilde{w}_x - l\tilde{\varphi}] = 0, & \text{em } Q \\ \rho_2 \tilde{\psi}_{tt} - b\tilde{\psi}_{xx} + \kappa(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{w}) = 0, & \text{em } Q \\ \rho_1 \tilde{w}_{tt} - \kappa_0[\tilde{w}_x - l\tilde{\varphi}]_x + \kappa l(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{w})_x = 0, & \text{em } Q \\ \tilde{\varphi}_t = \tilde{\psi}_t = \tilde{w}_t = 0, & \text{em } (a_1, a_2) \times (0, T) \end{cases}$$

onde $Q := (0, T) \times (0, L)$. Tomando a derivada de (4.31) com relação a variável t no sentido distribucional e denotando $z = \tilde{\varphi}_t$, $u = \tilde{\psi}_t$ e $\tilde{w}_t = v$, inferimos que (z, u, v) é uma solução de

$$\begin{cases} \rho_1 z_{tt} - \kappa(z_x + u + lv)_x - \kappa_0 l[v_x - lz] = 0, & \text{em } Q \\ \rho_2 u_{tt} - bu_{xx} + \kappa(z_x + u + lv) = 0, & \text{em } Q \\ \rho_1 v_{tt} - \kappa_0[v_x - lz] + \kappa l(z_x + u + lv) = 0, & \text{em } Q \\ z = u = v = 0, & \text{em } (a_1, a_2) \times (0, T) \end{cases}$$

Logo, usando o teorema (2.18) de Holmgren deduzimos que

$$z = u = v = 0,$$

ou equivalentemente,

$$(4.32) \quad \tilde{\varphi}_t = \tilde{\psi}_t = \tilde{w}_t = 0, \quad \text{q.s. em } Q.$$

Agora, retornando ao sistema (4.31) obtemos em Q :

$$(4.33) \quad \begin{cases} -\kappa(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{w})_x - \kappa_0 l[\tilde{w}_x - l\tilde{\varphi}] = 0, \\ -b\tilde{\psi}_{xx} + \kappa(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{w}) = 0, \\ -\kappa_0[\tilde{w}_x - l\tilde{\varphi}]_x + \kappa l(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{w}) = 0. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira, a segunda, e a terceira equação de (4.33) por $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$, e \tilde{w} respectivamente, e integrando por partes temos

$$0 = \int_Q \kappa(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{w})^2 + b\tilde{\psi}_x^2 + \kappa_0[\tilde{w}_x - l\tilde{\varphi}]^2 dxdt.$$

Da igualdade acima, decorre pelo uso da desigualdade de Poincaré que $\tilde{\psi} = 0$ em Q . Como temos (4.32), chegamos no sistema de EDO's:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_x + l\tilde{w} = 0 \\ \tilde{w}_x - l\tilde{\varphi} = 0 \\ \tilde{\varphi}, \tilde{w} \in H_0^1(0, L) \end{cases}$$

que fornece-nos $\tilde{\varphi} = \tilde{w} = 0$, contradizendo (4.30). Portanto, devemos concluir que a afirmação feita em (4.25) é absolutamente verdadeira.

Combinando (4.25) em (4.24) deduzimos, para T suficientemente grande, a desejada desigualdade

$$E_0 \leq C \int_0^T \int_{a_1}^{a_2} \rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 dxdt.$$

□

Observação 4.3.1

☞ *Enfatizamos que a constante positiva C não depende das soluções do sistema conserva-*

tivo (4.15).

Este é o melhor resultado de observabilidade que obtivemos neste trabalho, e vamos relacioná-lo ao sistema dissipativo (4.1), a fim de permitir-nos tomar uma região arbitrariamente pequena para os mecanismos de dissipação.

4.4 Comportamento Assintótico

O principal objetivo da presente seção é obter algumas taxas de decaimento para as soluções do sistema de Bresse dissipativo (4.1).

Antes de afirmar nosso resultado de estabilidade, iremos definir algumas funções com este nexu. Para isto, seguiremos as idéias primeiramente introduzidas por Lasiecka e Tataru em [25], e adaptadas por Cavalcanti *et al* em [6]. Aqui faremos a adaptação deste último trabalho.

Seja h definida por

$$h(x) = h_1(x) + h_2(x) + h_3(x)$$

com $h_i(0) = 0, i = 1, 2, 3$, onde as h_i são funções côncavas e estritamente crescentes, tais que

$$(4.34) \quad h_i(sg_i(s)) \geq s^2 + g_i^2(s), \text{ para } |s| \leq 1.$$

Note que tal função pode ser construída dadas as hipóteses sobre as funções g_i em (4.2.1).

Com estas funções definimos

$$(4.35) \quad r(\cdot) = h\left(\frac{\cdot}{|Q|}\right),$$

onde $Q := (0, T) \times (0, L)$ e $|Q| := \text{meas}(Q)$. Como r é monótona crescente, então a função $cI + r$ é inversível para todo $c \geq 0$.

Para uma constante positiva M definimos

$$(4.36) \quad p(x) = (cI + r)^{-1}(Mx).$$

As constantes M e c serão explicitadas na demonstração do resultado principal. Como vemos facilmente a função p é positiva, contínua e estritamente crescente, com $p(0) = 0$. Por fim, seja

$$(4.37) \quad q(x) = x - (I + p)^{-1}(x).$$

O próximo lema é de autoria de Lasiecka e Tataru, e pode ser encontrado na referência [25].

Lema 4.4 *Sejam as funções p, q definidas acima. Consideremos a sequência $\{s_n\}$ de números positivos satisfazendo*

$$s_{m+1} + p(s_{m+1}) \leq s_m.$$

Então $s_m \leq S(m)$, onde $S(t)$ é uma solução da equação diferencial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0 \\ S(0) = s_0 \end{cases}$$

Além disso,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0,$$

se $p(x) > 0$ para $x > 0$.

Agora, estamos em condições de afirmar nosso principal resultado:

Teorema 4.5 *Assuma as hipóteses (4.2.1) e (4.2.2). Então existe um tempo $T_0 > 0$ tal que se (φ, ψ, w) é uma solução do sistema (4.1)-(4.2), com energia inicial satisfazendo $E_0 \leq K$, esta solução satisfaz*

$$(4.38) \quad E(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right), \quad \forall t > T_0,$$

com $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$, onde $S(t)$ é uma solução da equação diferencial

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0 \\ S(0) = E_0 \end{cases}$$

e a função q é dada em (4.37).

Observação 4.4.1

☞ *Se as funções g_i são lineares (por exemplo $g_i(s) = s$), então sobre as mesmas hipóteses do teorema acima temos que a energia do sistema (4.1) decai exponencialmente com relação*

a energia inicial, ou seja, existem duas constantes positivas $C > 0$ e $\mu > 0$ que podem depender do dado inicial E_0 tais que

$$E(t) \leq Ce^{-\mu t} E_0, \quad t > 0,$$

para toda solução satisfazendo $E_0 < K$.

Para provarmos o Teorema (4.5), necessitamos do seguinte lema essencial:

Lema 4.6 *Vamos assumir as hipóteses (4.2.1) e (4.2.2). Assim para um tempo $T > 0$ suficientemente grande e $K > 0$ existe uma constante positiva \bar{C} , que depende de T e K , tal que a desigualdade*

$$(4.39) \quad E(T) \leq \bar{C} \int_Q \alpha_1(x)(\varphi_t^2 + g_1(\varphi_t)^2) + \alpha_2(x)(\psi_t^2 + g_2(\psi_t)^2) + \alpha_3(x)(w_t^2 + g_3(w_t)^2) dxdt,$$

para qualquer solução forte (φ, ψ, w) de (4.1)-(4.2) satisfazendo $E_0 \leq K$.

Demonstração:

Prova do Teorema 4.5. Definimos os conjuntos

$$\begin{aligned} \Pi_\varphi &= \{(x, t) \in Q; |\varphi_t(x, t)| > 1\} \text{ e } \Xi_\varphi = Q \setminus \Gamma_\varphi, \\ \Pi_\psi &= \{(x, t) \in Q; |\psi_t(x, t)| > 1\} \text{ e } \Xi_\psi = Q \setminus \Gamma_\psi, \\ \Pi_w &= \{(x, t) \in Q; |w_t(x, t)| > 1\} \text{ e } \Xi_w = Q \setminus \Gamma_w. \end{aligned}$$

Pelo lema essencial (4.6) temos a desigualdade (4.39) e pretendemos estimar cada parcela desta desigualdade. Inicialmente, note que

$$\begin{aligned} \int_Q \alpha_1(x)(\varphi_t^2 + g_1(\varphi_t)^2) dxdt &= \int_{\Pi_\varphi} \alpha_1(x)(\varphi_t^2 + g_1(\varphi_t)^2) dxdt \\ &+ \int_{\Xi_\varphi} \alpha_1(x)(\varphi_t^2 + g_1(\varphi_t)^2) dxdt. \end{aligned}$$

Vamos analisar cada integral do lado direito da igualdade acima. Pela hipótese (4.2.1) vislumbramos que

$$(4.40) \quad \int_{\Pi_\varphi} \alpha_1(x)(\varphi_t^2 + g_1(\varphi_t)^2) dxdt \leq (k_1^{-1} + K_1) \int_{\Pi_\varphi} \alpha_1(x)g_1(\varphi_t)\varphi_t dxdt$$

Agora de (4.34), temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Xi_\varphi} \alpha_1(x)(\varphi_t^2 + g_1(\varphi_t)^2) dxdt &\leq \int_{\Xi_\varphi} \alpha_1(x) h_1\left(g_1(\varphi_t)\varphi_t\right) dxdt \\
&\leq \int_{\Xi_\varphi} (1 + \|\alpha_1\|_\infty) h_1\left(\frac{\alpha_1}{1 + \|\alpha_1\|_\infty} g_1(\varphi_t)\varphi_t\right) dxdt \\
&\leq (1 + \|\alpha_1\|_\infty) \int_{\Xi_\varphi} h_1\left(\alpha_1(x) g_1(\varphi_t)\varphi_t\right) dxdt \\
(4.41) \qquad \qquad \qquad &\leq (1 + \|\alpha_1\|_\infty) |Q| h_1\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \alpha_1(x) g_1(\varphi_t)\varphi_t dxdt\right)
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade é proveniente da desigualdade (2.4) de Jensen.

Então usando (4.40) e (4.41), segue que

$$\begin{aligned}
\int_Q \alpha_1(x)(\varphi_t^2 + g_1(\varphi_t)^2) dxdt &\leq (k_1^{-1} + K_1) \int_Q \alpha_1(x) g_1(\varphi_t)\varphi_t dxdt \\
(4.42) \qquad \qquad \qquad &+ (1 + \|\alpha_1\|_\infty) |Q| h_1\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \alpha_1(x) g_1(\varphi_t)\varphi_t dxdt\right).
\end{aligned}$$

Analogamente podemos obter

$$\begin{aligned}
\int_Q \alpha_2(x)(\psi_t^2 + g_1(\psi_t)^2) dxdt &\leq (k_2^{-1} + K_2) \int_Q \alpha_2(x) g_2(\psi_t)\psi_t dxdt \\
(4.43) \qquad \qquad \qquad &+ (1 + \|\alpha_2\|_\infty) |Q| h_2\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \alpha_2(x) g_2(\psi_t)\psi_t dxdt\right),
\end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
\int_Q \alpha_3(x)(w_t^2 + g_3(w_t)^2) dxdt &\leq (k_3^{-1} + K_3) \int_Q \alpha_3(x) g_3(w_t)w_t dxdt \\
(4.44) \qquad \qquad \qquad &+ (1 + \|\alpha_3\|_\infty) |Q| h_3\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \alpha_3(x) g_3(w_t)w_t dxdt\right).
\end{aligned}$$

Usando (4.39), (4.42), (4.43) e (4.44), além do fato de que as funções h_i são estritamente crescentes temos

$$\begin{aligned}
E(T) &\leq \bar{C} \sum_{i=1}^3 (k_i^{-1} + K_i) \int_Q \alpha_i(x) g_i(\varphi_t)\varphi_t + \alpha_2(x) g_2(\psi_t)\psi_t + \alpha_3(x) g_3(w_t)w_t dxdt \\
&+ \bar{C} |Q| \sum_{i=1}^3 (1 + \|\alpha_i\|_\infty) r \left(\int_Q \alpha_i(x) g_i(\varphi_t)\varphi_t + \alpha_2(x) g_2(\psi_t)\psi_t + \alpha_3(x) g_3(w_t)w_t dxdt \right),
\end{aligned}$$

onde a função r está definida em (4.35).

Conceituando a constante

$$M = \frac{1}{\overline{C}|Q| \sum_{i=1}^3 (1 + \|\alpha_i\|_\infty)},$$

bem como

$$c = \frac{\sum_{i=1}^3 (k_i^{-1} + K_i)}{\overline{C}|Q| \sum_{i=1}^3 (1 + \|\alpha_i\|_\infty)}$$

chegamos em

$$\begin{aligned} ME(T) &\leq c \int_Q \alpha_1(x) g_1(\varphi_t) \varphi_t + \alpha_2(x) g_2(\psi_t) \psi_t + \alpha_3(x) g_3(w_t) w_t dx dt \\ &\quad + r \left(\int_Q \alpha_1(x) g_1(\varphi_t) \varphi_t + \alpha_2(x) g_2(\psi_t) \psi_t + \alpha_3(x) g_3(w_t) w_t dx dt \right) \\ &= (cI + r) \left(E_0 - E(T) \right), \end{aligned}$$

onde usamos a dissipação do sistema (4.6) na igualdade acima. Por outro lado, quanto a desigualdade acima podemos reescrevê-la como

$$(4.45) \quad p(E(T)) \leq E_0 - E(T).$$

Para finalizar a prova, substituímos T (respectivamente, 0) em (4.45) por $(m+1)T$ (respectivamente, mT), alcançando

$$E((m+1)T) + p(E((m+1)T)) \leq E(mT), \text{ para } m = 0, 1, \dots$$

Usando o lema (4.4) com $s_m = E(mT)$, resulta em

$$E(mT) \leq S(m), m = 0, 1, \dots$$

E finalmente do lema (4.6) temos para $t = mT + \tau$, com $\tau \in [0, T]$, que

$$E(t) \leq E(mT) \leq S(m) \leq S\left(\frac{t-\tau}{T}\right) \leq S\left(\frac{t}{T} - 1\right),$$

para $t > T$, onde foi utilizado acima o fato de que $S(\cdot)$ é dissipativo. A prova do teorema agora está completa.

□

Enfim, alocamos a prova do Lema essencial (4.6).

Demonstração:

Prova do Lema 4.6. Seja $T > 0$ suficientemente grande como na seção anterior e $K > 0$. Sendo

$$E(t) \leq E_0, \forall t > 0,$$

é suficiente provarmos a desigualdade (4.39) para E_0 no lugar de $E(T)$.

Procedemos literalmente como no capítulo 3. Vamos supor que para todo $\bar{C} > 0$ existe uma solução forte (φ, ψ, w) , que depende de \bar{C} , satisfazendo $E_0 \leq K$ mas que não satisfaz a desigualdade (4.39), ou seja,

$$E_0 > \bar{C} \int_Q \alpha_1(x)(\varphi_t^2 + g_1(\varphi_t)^2) + \alpha_2(x)(\psi_t^2 + g_2(\psi_t)^2) + \alpha_3(x)(w_t^2 + g_3(w_t)^2) dx dt.$$

onde $Q := (0, T) \times (0, L)$.

Por simplicidade iremos denotar $u' := u_t$. Escolhendo $\bar{C} = n$, com $n \in \mathbb{N}$, iremos obter para cada $n \in \mathbb{N}$, uma sequência não-nula de soluções fortes $\{\varphi_n, \psi_n, w_n\}$ satisfazendo:

$$0 < E_n(0) \leq K,$$

e ainda

$$E_n(0) > n \int_Q \alpha_1(x)(\varphi_n'^2 + g_1(\varphi_n')^2) + \alpha_2(x)(\psi_n'^2 + g_2(\psi_n')^2) + \alpha_3(x)(w_n'^2 + g_3(w_n')^2) dx dt,$$

ou equivalentemente,

$$(4.46) \quad \frac{\int_Q \alpha_1(x)(\varphi_n'^2 + g_1(\varphi_n')^2) + \alpha_2(x)(\psi_n'^2 + g_2(\psi_n')^2) + \alpha_3(x)(w_n'^2 + g_3(w_n')^2) dx dt}{E_n(0)} \leq \frac{1}{n}.$$

Sendo a sequência $\{E_n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ limitada, a desigualdade (4.46) fornece-nos

$$(4.47) \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q \alpha_1(x)(\varphi_n'^2 + g_1(\varphi_n')^2) dx dt = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q \alpha_2(x)(\psi_n'^2 + g_2(\psi_n')^2) dx dt = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q \alpha_3(x)(w_n'^2 + g_3(w_n')^2) dx dt = 0. \end{cases}$$

E aqui, usando a hipótese (4.2.2), obtemos

$$\begin{aligned}
 (4.48) \quad 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{I_1} \varphi_n'^2 dx dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{I_2} \psi_n'^2 dx dt \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{I_3} w_n'^2 dx dt
 \end{aligned}$$

Também, a sequência de funcionais energia $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $(0, T)$. Assim, as seguintes convergências valem

$$\begin{aligned}
 \varphi_n' &\overset{*}{\rightharpoonup} \varphi' \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \\
 \psi_n' &\overset{*}{\rightharpoonup} \psi' \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \\
 w_n' &\overset{*}{\rightharpoonup} w' \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \\
 \psi_{n,x} &\overset{*}{\rightharpoonup} \psi_x \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \\
 w_{n,x} - l\varphi_n &\overset{*}{\rightharpoonup} w_x - l\varphi \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \\
 \varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n &\overset{*}{\rightharpoonup} \varphi_x + \psi + lw \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)).
 \end{aligned}$$

Procedendo como na seção anterior, empregando-se a notória desigualdade de Poincaré, resultados de compacidade, e sendo os dados iniciais limitados, também deduzimos que

$$\begin{cases} \varphi_n \rightarrow \varphi & \text{em } L^2(0, T; L^2(0, L)), \\ \psi_n \rightarrow \psi & \text{em } L^2(0, T; L^2(0, L)), \\ w_n \rightarrow w & \text{em } L^2(0, T; L^2(0, L)). \end{cases}$$

Neste momento, iremos dividir a prova em dois casos:

(i) $\boxed{U = (\varphi, \varphi', \psi, \psi', w, w') \neq 0.}$

Consideremos o sistema

$$(4.49) \quad \begin{cases} \rho_1 \varphi_n'' - \kappa(\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n)_x - \kappa_0 l[w_{n,x} - l\varphi_n] + \alpha_1(x)g_1(\varphi_n') = 0 \\ \rho_2 \psi_n'' - b\psi_{n,xx} + \kappa(\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n) + \alpha_2(x)g_2(\psi_n') = 0 \\ \rho_1 w_n'' - \kappa_0[w_{n,x} - l\varphi_n]_x - \kappa l(\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n) + \alpha_3(x)g_3(w_n') = 0 \end{cases}$$

em Q . Pelas convergências mencionadas, passando o limite em (4.49), usando (4.47) e (4.48),

chegamos em

$$(4.50) \quad \begin{cases} \rho_1 \varphi'' - \kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l[w_x - l\varphi] = 0 & \text{em } Q \\ \rho_2 \psi'' - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + lw) = 0 & \text{em } Q \\ \rho_1 w'' - \kappa_0[w_x - l\varphi]_x + \kappa l(\varphi_x + \psi + lw) = 0 & \text{em } Q \\ \varphi_t = 0 \text{ em } Q_1, \psi_t = 0 \text{ em } Q_2, w_t = 0 \text{ em } Q_3 \end{cases}$$

onde $Q_i := I_i \times (0, T)$.

Tomando a derivada de (4.50) em t no sentido distribucional, e substituindo $\varphi_t = z$, $\psi_t = u$, e $w_t = v$, depreendemos que

$$\begin{cases} \rho_1 z'' - \kappa(z_x + u + lv)_x - \kappa_0 l[v_x - lz] = 0 & \text{em } Q \\ \rho_2 u'' - bu_{xx} + \kappa(z_x + u + lv) = 0 & \text{em } Q \\ \rho_1 v'' - \kappa_0[v_x - lz] + \kappa l(z_x + u + lv) = 0 & \text{em } Q \\ z = u = v = 0 \text{ em } \tilde{I} \times (0, T) \end{cases}$$

onde $\tilde{I} := \bigcap_{i=1}^3 I_i \neq \emptyset$.

Empregando o teorema de Holmgren, deduzimos que

$$z = u = v = 0 \text{ em } Q,$$

e conseqüentemente,

$$(4.51) \quad \varphi_t = \psi_t = w_t = 0, \text{ em } Q.$$

Retornando ao sistema (4.50), obtemos em Q :

$$(4.52) \quad \begin{cases} -\kappa(\varphi_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l[w_x - l\varphi] = 0 \\ -b\psi_{xx} + \kappa[w_x - l\varphi] = 0 \\ -\kappa_0[w_x - l\varphi]_x + \kappa l[w_x - l\varphi] = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação de (4.52) por φ , a segunda por ψ , e a terceira equação por w , e adicionando, o resultado obtido fornece-nos

$$\int_Q \kappa(\varphi_x + \psi + lw)^2 + b\psi_x^2 + \kappa_0[w_x - l\varphi]^2 dxdt = 0.$$

Segue da desigualdade de Poincaré, que $\psi = 0$. Como temos resultante da diferenciação com

relação ao tempo (4.51), chegamos no sistema de EDO's:

$$\begin{cases} \varphi_x + l w = 0 \\ w_x - l \varphi = 0 \\ \varphi, w \in H_0^1(0, L) \end{cases}$$

que por sua vez, produz $\varphi = w = 0$.

Mas isto é uma verdadeira contradição, o que finaliza a prova do caso (i).

(ii) $U = (\varphi, \varphi', \psi, \psi', w, w') = 0.$

Neste caso, primeiramente definamos

$$\nu_n := \sqrt{E_n(0)}, \quad \bar{\varphi}_n := \frac{\varphi_n}{\nu_n}, \quad \bar{\psi}_n := \frac{\psi_n}{\nu_n}, \quad \text{e} \quad \bar{w}_n := \frac{w_n}{\nu_n}$$

De (4.46), obtemos

$$(4.53) \quad \begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q \alpha_1(x) \left(\bar{\varphi}_n'^2 + \frac{g_1(\nu_n \bar{\varphi}_n')^2}{\nu_n^2} \right) dx dt \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q \alpha_2(x) \left(\bar{\psi}_n'^2 + \frac{g_2(\nu_n \bar{\psi}_n')^2}{\nu_n^2} \right) dx dt \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q \alpha_3(x) \left(\bar{w}_n'^2 + \frac{g_3(\nu_n \bar{w}_n')^2}{\nu_n^2} \right) dx dt. \end{aligned}$$

Além disso, definindo para cada n , a energia $\bar{E}_n(t)$ do problema normalizado como

$$\bar{E}_n(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_1 \bar{\varphi}_n'^2 + \rho_2 \bar{\psi}_n'^2 + \rho_1 \bar{w}_n'^2 + b \bar{\psi}_{n,x}^2 + \kappa_0 [\bar{w}_{n,x} - l \bar{\varphi}]^2 + \kappa (\bar{\varphi}_{n,x} + \bar{\psi}_n + \bar{w}_n)^2 dx,$$

então,

$$\bar{E}_n(0) = \frac{E_n(0)}{\nu_n^2} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esta limitação implica nas seguintes convergências

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}'_n &\overset{*}{\rightharpoonup} \bar{\varphi}' \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \\ \bar{\psi}'_n &\overset{*}{\rightharpoonup} \bar{\psi}' \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \\ \bar{w}'_n &\overset{*}{\rightharpoonup} \bar{w}' \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \\ \bar{\psi}_{n,x} &\overset{*}{\rightharpoonup} \bar{\psi}_x \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \\ \bar{w}_{n,x} - l\bar{\varphi}'_n &\overset{*}{\rightharpoonup} \bar{w}_x - l\bar{\varphi}' \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \\ \bar{\varphi}_{n,x} + \bar{\psi}_n + l\bar{w}_n &\overset{*}{\rightharpoonup} \bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{w} \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)). \end{aligned}$$

Consequentemente, utilizando a desigualdade de Poincaré e o teorema de Aubin-Lions, temos

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_n \rightarrow \bar{\varphi} \text{ em } L^2(0, T; L^2(0, L)), \\ \bar{\psi}_n \rightarrow \bar{\psi} \text{ em } L^2(0, T; L^2(0, L)), \\ \bar{w}_n \rightarrow \bar{w} \text{ em } L^2(0, T; L^2(0, L)). \end{cases}$$

Considerando as convergências acima, e passando o limite no sistema

$$\begin{cases} \rho_1 \bar{\varphi}''_n - \kappa(\bar{\varphi}_{n,x} + \bar{\psi}_n + l\bar{w}_n)_x - \kappa_0 l[\bar{w}_{n,x} - l\bar{\varphi}'_n] + \alpha_1(x) \frac{g_1(\nu_n \bar{\varphi}'_n)}{\nu_n} = 0 \\ \rho_2 \bar{\psi}''_n - b\bar{\psi}_{n,xx} + \kappa(\bar{\varphi}_{n,x} + \bar{\psi}_n + l\bar{w}_n) + \alpha_2(x) \frac{g_2(\nu_n \bar{\psi}'_n)}{\nu_n} = 0 \\ \rho_1 \bar{w}''_n - \kappa_0[\bar{w}_{n,x} - l\bar{\varphi}'_n]_x + \kappa l(\bar{\varphi}_{n,x} + \bar{\psi}_n + l\bar{w}_n) + \alpha_3(x) \frac{g_3(\nu_n \bar{w}'_n)}{\nu_n} = 0 \end{cases}$$

em Q , concluímos

$$\begin{cases} \rho_1 \bar{\varphi}'' - \kappa(\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{w})_x - \kappa_0 l[\bar{w}_x - l\bar{\varphi}'] = 0, & \text{em } Q \\ \rho_2 \bar{\psi}'' - b\bar{\psi}_{xx} + \kappa(\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{w}) = 0, & \text{em } Q \\ \rho_1 \bar{w}'' - \kappa_0[\bar{w}_x - l\bar{\varphi}']_x + \kappa l(\bar{\varphi}_x + \bar{\psi} + l\bar{w}) = 0, & \text{em } Q \\ \bar{\varphi}' = \bar{\psi}' = \bar{w}' = 0, & \text{em } \tilde{I} \times (0, T) \end{cases}$$

onde $\tilde{I} := \bigcap_{i=1}^3 I_i \neq \emptyset$. Analogamente ao caso (i), deduzimos que

$$\bar{\varphi} = \bar{\psi} = \bar{w} = 0.$$

Para alcançarmos uma contradição, considere $(\bar{z}, \bar{u}, \bar{v})$ solução do seguinte sistema

de Bresse homogêneo:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_1 \bar{z}_n'' - \kappa(\bar{z}_{n,x} + \bar{u}_n + l\bar{v}_n)_x - \kappa_0 l[\bar{v}_{n,x} - l\bar{z}_n] = 0, & \text{em } Q \\ \rho_2 \bar{u}_n'' - b\bar{u}_{n,xx} + \kappa(\bar{z}_{n,x} + \bar{u}_n + l\bar{v}_n) = 0, & \text{em } Q \\ \rho_1 \bar{v}_n'' - \kappa_0[\bar{v}_{n,x} - l\bar{z}_n]_x + \kappa l(\bar{z}_{n,x} + \bar{u}_n + l\bar{v}_n) = 0, & \text{em } Q \\ \bar{z}_n(L, t) = \bar{z}_n(0, t) = \bar{u}_n(L, t) = \bar{u}_n(0, t) = \bar{v}_n(L, t) = \bar{v}_n(0, t) = 0, & \text{em } (0, T) \\ \bar{z}_n(x, 0) = \bar{\varphi}_n(x, 0), \bar{z}_n'(x, 0) = \bar{\varphi}_n'(x, 0), & \text{em } (0, L) \\ \bar{u}_n(x, 0) = \bar{\psi}_n(x, 0), \bar{u}_n'(x, 0) = \bar{\psi}_n'(x, 0), & \text{em } (0, L) \\ \bar{v}_n(x, 0) = \bar{w}_n(x, 0), \bar{v}_n'(x, 0) = \bar{w}_n'(x, 0), & \text{em } (0, L) \end{array} \right.$$

com energia denotada por $\mathcal{E}(t)$.

Agora, defina

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi}_n = \bar{\varphi}_n - \bar{z}_n, \\ \tilde{\psi}_n = \bar{\psi}_n - \bar{u}_n, \\ \tilde{w}_n = \bar{w}_n - \bar{v}_n. \end{array} \right.$$

Neste caso, não é difícil ver que $(\tilde{\varphi}_n, \tilde{\psi}_n, \tilde{w}_n)$ é uma solução para o sistema de Bresse não-homogêneo:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_1 \tilde{\varphi}_n'' - \kappa(\tilde{\varphi}_{n,x} + \tilde{\psi}_n + l\tilde{w}_n)_x - \kappa_0 l[\tilde{w}_{n,x} - l\tilde{\varphi}_n] = \alpha_1(x) \frac{g_1(\nu_n \tilde{\varphi}_n')}{\nu_n}, & \text{em } Q \\ \rho_2 \tilde{\psi}_n'' - b\tilde{\psi}_{n,xx} + \kappa(\tilde{\varphi}_{n,x} + \tilde{\psi}_n + l\tilde{w}_n) = \alpha_2(x) \frac{g_2(\nu_n \tilde{\psi}_n')}{\nu_n}, & \text{em } Q \\ \rho_1 \tilde{w}_n'' - \kappa_0[\tilde{w}_{n,x} - l\tilde{\varphi}_n]_x + \kappa l(\tilde{\varphi}_{n,x} + \tilde{\psi}_n + l\tilde{w}_n) = \alpha_3(x) \frac{g_3(\nu_n \tilde{w}_n')}{\nu_n}, & \text{em } Q \\ \tilde{\varphi}_n(L, t) = \tilde{\varphi}_n(0, t) = \tilde{\psi}_n(L, t) = \tilde{\psi}_n(0, t) = \tilde{w}_n(L, t) = \tilde{w}_n(0, t) = 0, & \text{em } (0, T) \\ \tilde{\varphi}_n(x, 0) = \tilde{\varphi}_n'(x, 0) = \tilde{\psi}_n(x, 0) = \tilde{\psi}_n'(x, 0) = \tilde{w}_n(x, 0) = \tilde{w}_n'(x, 0) = 0, & \text{em } (0, L) \end{array} \right.$$

cuja expressão para energia $\tilde{E}_n(t)$, relacionada a solução $(\tilde{\varphi}_n, \tilde{\psi}_n, \tilde{w}_n)$ deste sistema, é a mesma definida em (4.5).

Então, segue que

$$\begin{aligned} 2\tilde{E}_n(t) &\geq \int_0^L \rho_1 \tilde{\varphi}_n'^2 + \rho_2 \tilde{\psi}_n'^2 + \rho_1 \tilde{w}_n'^2 dx \\ (4.54) \quad &\geq \int_{\bar{I}} \rho_1 \bar{\varphi}_n'^2 + \rho_2 \bar{\psi}_n'^2 + \rho_1 \bar{w}_n'^2 + \rho_1 \bar{z}_n'^2 + \rho_2 \bar{u}_n'^2 + \rho_1 \bar{v}_n'^2 dx \\ &\quad - 2 \int_{\bar{I}} \rho_1 \bar{\varphi}_n' \bar{z}_n' + \rho_2 \bar{\psi}_n' \bar{u}_n' + \rho_1 \bar{w}_n' \bar{v}_n' dx, \end{aligned}$$

para $t \in [0, T]$.

Estimando a segunda integral em (4.54), por meio da desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue

$$\begin{aligned} \int_{\bar{I}} \rho_1 \bar{\varphi}'_n \bar{z}'_n + \rho_2 \bar{\psi}'_n \bar{u}'_n + \rho_1 \bar{w}'_n \bar{v}'_n dx &\leq \left\{ \int_{\bar{I}} \rho_1 \bar{\varphi}'^2_n dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\bar{I}} \rho_1 \bar{z}'^2_n dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left\{ \int_{\bar{I}} \rho_2 \bar{\psi}'^2_n dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\bar{I}} \rho_2 \bar{u}'^2_n dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left\{ \int_{\bar{I}} \rho_1 \bar{w}'^2_n dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\bar{I}} \rho_1 \bar{v}'^2_n dx \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Por outro lado, sendo

$$(4.55) \quad \mathcal{E}(t) = \bar{E}(0) = 1, \quad t \in [0, T],$$

obtemos

$$\left\{ \int_{\bar{I}} \rho_1 \bar{z}'^2_n dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \{2\mathcal{E}(0)\}^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}},$$

bem como

$$\left\{ \int_{\bar{I}} \rho_2 \bar{u}'^2_n dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \left\{ \int_{\bar{I}} \rho_1 \bar{v}'^2_n dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{1}{2}}.$$

Retornando a desigualdade (4.54), e levando em consideração estas três estimativas, concluímos

$$\begin{aligned} 2\tilde{E}(t) &\geq \int_{\bar{I}} \rho_1 \bar{z}'^2_n + \rho_2 \bar{u}'^2_n + \rho_1 \bar{v}'^2_n dx \\ &- 2^{\frac{3}{2}} \left(\left\{ \int_{\bar{I}} \rho_1 \bar{\varphi}'^2_n dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\bar{I}} \rho_2 \bar{\psi}'^2_n dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\bar{I}} \rho_2 \bar{w}'^2_n dx \right\}^{\frac{1}{2}} \right), \end{aligned}$$

e assim

$$(4.56) \quad \begin{aligned} \int_{\bar{I}} \rho_1 \bar{z}'^2_n + \rho_2 \bar{u}'^2_n + \rho_1 \bar{v}'^2_n dx &\leq 2 \sup_{t \in [0, T]} \tilde{E}_n(t) \\ &+ 2^{\frac{3}{2}} \left(\left\{ \int_{\bar{I}} \rho_1 \bar{\varphi}'^2_n dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\bar{I}} \rho_2 \bar{\psi}'^2_n dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\bar{I}} \rho_2 \bar{w}'^2_n dx \right\}^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Integrando ambos os lados de (4.56) em

$(\varepsilon, T - \varepsilon)$ e empregando a desigualdade de Young, chegamos em

$$\begin{aligned} & 2^{\frac{3}{2}}(T - 2\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \left(\left\{ \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\tilde{I}} \rho_1 \bar{\varphi}'_n{}^2 dx dt \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\tilde{I}} \rho_2 \bar{\psi}'_n{}^2 dx dt \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\tilde{I}} \rho_2 \bar{w}'_n{}^2 dx dt \right\}^{\frac{1}{2}} \right) \\ & + 2(T - 2\varepsilon) \sup_{t \in [0, T]} \tilde{E}_n(t) \\ & \geq \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\tilde{I}} \rho_1 \bar{z}'_n{}^2 + \rho_2 \bar{u}'_n{}^2 + \rho_1 \bar{v}'_n{}^2 dx dt. \end{aligned}$$

Em princípio, usando o limite (4.53) observamos que cada integral na primeira parcela do lado esquerdo desta desigualdade converge para zero quando n tende ao infinito. Por outro lado, o funcional energia \tilde{E}_n também satisfaz

$$\tilde{E}_n(t) = - \int_0^t \int_0^L \alpha_1(x) \frac{g_1(\nu_n \bar{\varphi}'_n(x, s)) \bar{\varphi}'_n}{\nu_n} + \alpha_2(x) \frac{g_2(\nu_n \bar{\psi}'_n(x, s)) \bar{\psi}'_n}{\nu_n} + \alpha_3(x) \frac{g_3(\nu_n \bar{w}'_n(x, s)) \bar{w}'_n}{\nu_n} dx ds,$$

para $t \in [0, T]$, que cede-nos

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \tilde{E}_n(t) & \leq M \int_0^T \left(\int_0^L \alpha_1(x) \frac{g_1^2(\nu_n \bar{\varphi}'_n(x, s))}{\nu_n^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} ds \\ & + M \int_0^T \left(\int_0^L \alpha_2(x) \frac{g_2^2(\nu_n \bar{\psi}'_n(x, s))}{\nu_n^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} ds \\ & + M \int_0^T \left(\int_0^L \alpha_3(x) \frac{g_3^2(\nu_n \bar{w}'_n(x, s))}{\nu_n^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} ds, \end{aligned}$$

onde a constante $M > 0$ provêm da limitação de $\{\bar{\varphi}'_n\}$, $\{\bar{\psi}'_n\}$ e $\{\bar{w}'_n\}$ em $L^\infty(0, T; L^2(0, L))$. Novamente, usando o limite (4.53) cada termo do lado direito desta desigualdade converge para zero quando n tende ao infinito. Portanto,

$$(4.57) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\tilde{I}} \rho_1 \bar{z}'_n{}^2 + \rho_2 \bar{u}'_n{}^2 + \rho_1 \bar{v}'_n{}^2 dx dt = 0$$

Fazendo uso de (4.55), e do resultado de observabilidade (4.16), temos

$$\begin{aligned} 1 & = \mathcal{E}_n(t) = \mathcal{E}_n(0) \\ & \leq C_1 \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\tilde{I}} \rho_1 \bar{z}'_n{}^2 + \rho_2 \bar{u}'_n{}^2 + \rho_1 \bar{v}'_n{}^2 dx dt, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $C_1 = C_1(\varepsilon, C_0)$. Aplicando o limite quando n tende ao infinito na desigualdade anterior, e considerando (4.57), chegamos em uma contradição.

Isto finaliza a prova do caso **(ii)**, e por tudo que foi exposto o lema está provado. \square

Observação 4.4.2

☞ *Para alguns exemplos de taxas explícitas de decaimento recomendamos inicialmente a leitura de [37] e/ou [39], onde são apresentados exemplos concretos.*

- base hilbertiana, 20
- Bresse, 1
- Derivada distribucional, 6
- Desigualdade
 - Cauchy-Schwarz, 8
 - Gronwall, 19
 - Hölder, 8
 - Jensen, 8
 - Minkowski, 8
 - observabilidade, 40
 - Poincaré, 18
 - Young, 7
- Distribuição, 6
- Distribuições vetoriais, 11
- Espaço
 - $C([0, T]; E)$, 16
 - $L^2(0, T; X)$, 11
 - $W(0, T; X, Y)$, 16
 - $\mathcal{D}'(0, T; X)$, 11
 - $\mathcal{D}(0, T; X)$, 11
 - $L^p(\Omega)$, 7
 - distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$, 6
 - funções teste, 6
 - reflexivo, 14
 - Sobolev, 10
 - vetorial topológico, 23
 - separável, 15
- Essencialmente limitada, 7
- Função
 - monótona, 22
 - estritamente convexa, 14
 - teste, 6
- Funcional
 - coercivo, 14
 - fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente, 13
- Gerador exponencial, 22
- Índice conjugado, 7
- Injeção canônica, 13

- Lema
- Du Bois Raymond, 9
 - Gronwall, 19
- Majorante essencial, 7
- monótono, 23
- Operador
- diferencial, 17
 - dissipativo, 21
 - hemicontínuo, 25
 - maximal monótono, 24
 - monótono, 23
 - positivo, 23
- Polinômio característico, 17
- Problema do arco circular, 2
- Semigrupo, 21
- contínuo, 21
 - contrações, 22
 - do tipo ω , 21
- Sistema
- Bresse, 1
 - conservativo, 1
 - dissipativo, 26
 - Timoshenko, 2
- Solução forte, 25
- Suporte de uma função, 5
- Teorema
- Aubin-Lions, 21
 - Carathédory, 16
 - convergência dominada de Lebesgue, 9
 - fórmula exponencial, 22
 - Holmgren, 18
 - Lax-Milgram, 19
 - regularidade elítica, 20
 - representação de Riesz, 19
 - valor médio, 18
- Topologia
- fraca, 12
 - fraca*, 13
- Transposta, 28

BIBLIOGRAFIA

- [1] BARBU, V. **Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces**, Editura Academici Române, Bucuresti, 1974. 1, 2.6, 2.6.2, 3.2, 3.2, 4.2
- [2] BRÉZIS, H. **Functional Analysis. Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**, Universitext, Springer, 600p, XIV, 2011. 2.1.2, 2.1.2, 2.3.3, 2.3.3, 2.3.3, 2.3.3, 2.5.3, 2.5.3, 2.5.3, 2.5.3
- [3] ——. **Operateurs Maximaux Monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert**, North-Holland Mathematics Studies, N° 5. Notas de Matemática (50). North-Holland Publishing Co./American Elsevier Publishing Co., Inc., Amsterdam-London/New York, 1973. 1, 2.6.1, 2.6.2, 2.6.2, 3.2, 4.2
- [4] BENADDI, A.; RAO, B. Energy decay rate of wave equations with indefinite damping. **Journal Differential Equations**, 161, 337-357, 2000. 1
- [5] BOUSSOUIRA, F. A.; MUÑOZ RIVERA, J. E.; ALMEIDA Jr, D. Stability to weak dissipative Bresse system. **Journal of Math. Anal. and Appl.**, 374, 481-498, 2011. 1, 3.1
- [6] CAVALCANTI, M. M.; KHEMMOUDJ, A.; MEDJDEN, M. Uniform stabilization of the damped Cauchy-Ventcel problem with variable coefficients and dynamic boundary conditions. **J. Math. Anal. Appl.**, 328, n° 2, 900-930, 2007. 1, 4.4
- [7] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. **Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev**, DMA - UEM, Maringá, Brasil, 2009. 2.1.2
- [8] ——; KOMORNIK, V. **Introdução à Análise Funcional**, DMA - UEM, Maringá, Brasil, 2011. 2.3.1, 2.3.2

- [9] —; LASIECKA, I. Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping–source interaction. **Journal of Differential Equations**, 236, n° 2, 407-459, 2007. 1
- [10] —; FUKUOKA, R.; TOUNDYKOV, D. Stabilization of the damped wave equation with Cauchy-Ventcel boundary conditions. **J. Evol. Equ.**, 9, n° 1, 143-169, 2009. 1
- [11] —; SORIANO, J. A. Global solvability and asymptotic stability for the wave equation with nonlinear boundary damping and source term. Contributions to nonlinear analysis, **Progress in Nonlinear Differential Equations Applications**, 66, Birkhäuser, Basel, 2006.
- [12] CHARLES, WENDEN; SORIANO, J. A.; NASCIMENTO, F.A.F.; RODRIGUES, J. H. Decay rates for Bresse system with arbitrary nonlinear localized damping, **Journal of Differential Equations**, 255, n° 8, 2267-2290, 2013, ISSN 0022-0396. doi:10.1016/j.jde.2013.06.014 1, 4
- [13] CHEN, G.; FULLING, S. A.; NARCOWICH, F. J.; SUN, S. Exponential decay of energy of evolution equations with locally distributed damping. **SIAM Journal Appl. Math.**, 51, 266-301, 1991. 1
- [14] CODDINGTON, E.; LEVINSON, N. **Theory of Ordinary Differential Equations**, MacGraw-Hill, New York, 1955. 2.5.1
- [15] DAUTRAY, R.; LIONS, J. L., “*Analyse Mathématique et Calcul Numérique Pour les Sciences et les Techniques*”, vol. 8 (Evolution: semi-groupe, variationnel), Masson, Paris, 1984. 2.4
- [16] FATORI, L. H.; MONTEIRO, R. N. The optimal decay rate for a weak dissipative Bresse system. **Appl. Math. Lett.**, 25, n° 3, 600-604, 2012. 1
- [17] FATORI, L. H.; MUÑOZ RIVERA, J. E. Rates of decay to weak thermoelastic Bresse system. **IMA Journal of Applied Mathematics**, 75, 881-904, 2010. 1
- [18] —. Rates of decay to weak thermoelastic Bresse system. **IMA J. Appl. Math.**, 75, n° 6, 881-904, 2010. 1
- [19] FREITAS, P. On some eigenvalue problems related to the wave equation with indefinite damping. **Journal Differential Equations**, 127, 320-335, 1996. 1
- [20] —; ZUAZUA, E. Stability results for the wave equation with indefinite damping. **Journal Differential Equations**, 132, 338-353, 1996. 1
- [21] GOMES, A. M. **Semigrupos não lineares e Equações Diferenciais nos Espaços de Banach**, 2 ed., Instituto de Matemática - UFRJ, 2003. 2.6.1

- [22] HO, L. F. Exact Controllability of the One-Dimensional Wave Equation with Locally Distributed Control. **SIAM J. Control and Optimization**, 28, n° 3, 733-748, 1990. 4.3
- [23] LADYZHENSKAYA, O. A.; SOLONNIKOV, V. A.; URAL'TSEVA, N. N. **Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type**, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1968.
- [24] LASIECKA, I. **Mathematical Control Theory of Coupled PDE's**, CBMS-NSF Lecture Notes SIAM, 2002. 3.1
- [25] —; TATARU, D. Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping, **Differential and Integral Equations**, 6, 507-533, 1993. 1, 3.1, 3.4, 4.4, 4.4
- [26] LIMA, E. L. **Curso de Análise**, Vol. 2, 8 ed., Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2005. 2.5.3
- [27] LIONS, J. L. **Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires**. Dunod, Gauthier-Villars, 1969. 2.5.3
- [28] —; **Contrôlabilité Exacte Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués**. Tome 1, Masson, 1988. 2.5.2
- [29] LIONS, J. L.; MAGENES E. **Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications**, Vol. 1, Springer Verlag, Berlin, 1972. 2.4, 2
- [30] LIU, K.; RAO, B.; ZHANG, X. Stabilization of the wave equations with potential and indefinite damping. **Journal Math. Anal. Appl.**, 269, 747-769, 2002. 1
- [31] LIU, Z.; RAO, B. Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system. **Zeit. angew. Math. Phy.**, 60, 54-69, 2009. 1, 4.1
- [32] MEDEIROS, L. A. **Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações**, Textos de Métodos Matemáticos, vol. 16, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1983. 2.5.3
- [33] —; MELLO, E. A. **A Integral de Lebesgue**, Textos de Métodos Matemáticos, vol. 18, 4 ed., Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1989. 2.1.2, 2.1.2
- [34] MENZ, G. Exponential stability of wave equations with potential and indefinite damping. **Konstanzer Schriften Math. Inf.**, 224, 2007. 1
- [35] MUÑOZ RIVERA, J. E. **Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais**. Textos Avançados, LNCC, Petrópolis - RJ, 1999. 2.1.2
- [36] —; RACKE, R. Timoshenko systems with indefinite damping. **Journal of Math. Anal. Appl.**, 341, 1068-1083, 2008. 1

- [37] Nascimento, F. A. F. Existência, Não Existência global de Solução e Estabilidade Assintótica para a Equação da Onda com Memória. 2013. 100f. Tese de Doutorado, Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013. 4.4.2
- [38] PAZY, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**, Springer-Verlag, Berlin, 1986. 2.6.2, 3.1
- [39] Silva, F. R. D. Sobre o Decaimento da Equação da Onda com Dissipação Friccional versus Viscoelástica em Domínios Ilimitados de Medida Finita. 2014. Tese de Doutorado, Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2014. 4.4.2
- [40] SORIANO, J.A.; MUÑOZ RIVERA, J. E.; FATORI, L. H. Bresse system with indefinite damping. **Journal of Math. Anal. Appl.**, 387, 284-290, 2011. 1, 1, 4.1
- [41] —; CHARLES, WENDEN; SCHULZ, R. A. Asymptotic stability for Bresse systems, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 412, n° 1, 369-380, 2014, ISSN 0022-247X. doi:10.1016/j.jmaa.2013.10.019 1, 3
- [42] ZEIDLER, E. **Nonlinear Functional Analysis and its Applications III: Variational methods and Optimization**, Springer-Verlag, New York, 1985. 1, 2.3.3, 2.3.3