UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ANDRÉIA ARAÚJO DE FARIAS AQUINO

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA ENVOLVENDO A TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO MÉDIO

Maringá
2014

ANDRÉIA ARAÚJO DE FARIAS AQUINO

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA ENVOLVENDO A TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.
Área de concentração: Matemática

Orientadora: Prof. Dra. Lilian Akemi Kato

Maringá
2014

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá – PR., Brasil)

Aquino, Andréia Araújo de Farias
A657a Atividades de modelagem matemática envolvendo a teoria dos grafos no ensino médio / Andréia Araújo de Farias Aquino. -- Maringá, 2014.
85 f. : il., figs. + Apêndices.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Lilian Akemi Kato.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2014.

1. Matemática - Atividade de modelagem matemática - Ensino médio. 2. Teoria dos Grafos. 3. Modelagem matemática - Metodologia - Ensino de matemática. 4. Matemática - Ensino médio. I. Kato, Lilian Akemi, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD 21.ed. 511.5
MN-001388

ANDRÉIA ARAÚJO DE FARIAS AQUINO

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA ENVOLVENDO A TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Profa. Dra. Lilian Akemi Kato
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Profa. Dra. Irene Magalhães Craveiro
Universidade Federal da Grande Dourados – Dourados - MS

Prof. Dr. Laerte Bemm
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 7 de fevereiro de 2014.
Local de defesa: Auditório Adelbar Sampaio do Centro de Ciências Exatas, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Ao meu esposo André e ao meu filho Pedro.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por sempre colocar em meu caminho pessoas maravilhosas.

Ao meu esposo André, que com muito carinho e paciência me incentiva a realizar meus sonhos.

Ao meu filho Pedro, que com sua alegria me anima a ser uma pessoa melhor a cada dia.

Aos meus pais Heleno e Beatriz, que com seu exemplo de integridade e dignidade me ensinaram a lutar pelos meus objetivos.

Aos amigos do PROFMAT, pelos momentos de alegria, angústia, ansiedade passados juntos.

À professora Lilian, pela generosidade na orientação do trabalho.

Aos professores do PROFMAT, Claudete, Luciene, Wesley, Marcela, Gleb, Josinei, Emersom, Laerte, Juan, Marcos e Cícero pelo conhecimento compartilhado.

Aos colegas do grupo de estudos, Bárbara, Michele, Bruno, Marli, Renato, Valdinei, pelas valiosas sugestões em meu trabalho.

Atividades de Modelagem Matemática Envolvendo a Teoria dos Grafos no Ensino Médio

RESUMO

A sociedade contemporânea passa cada vez mais rapidamente por mudanças, muitas vezes recorrentes dos avanços tecnológicos, que causam grande impacto na vida das pessoas, mudando a forma de ver, compreender e agir com a realidade à nossa volta. A escola, como parte integrante desta sociedade, também deve adaptar o currículo e as metodologias de ensino às exigências desta nova realidade. Assim, este trabalho apresenta atividades de matemática, por meio da Modelagem Matemática que permitam a abordagem da Teoria dos Grafos no Ensino Médio, em consonância com os conteúdos já previstos no programa deste nível de Ensino, em especial o conteúdo Matrizes. Tendo em vista que os Grafos têm ganhado destaque justamente pelo potencial de aplicação a problemas típicos da sociedade atual como problemas de transporte, alocação, telecomunicações, entre outros, é importante que os alunos do Ensino Médio, preparando-se para os desafios da vida adulta, tenham contato com este conceito. Além disso, a opção pela Modelagem Matemática como metodologia para a introdução dos grafos, se deu pelo potencial de desenvolver habilidades de coleta, sistematização e análise de dados, investigação e problematização, bem como por permitir a resolução de problemas da realidade em sala de aula. Durante as atividades desenvolvidas também se utilizou recursos tecnológicos (aplicativo desenvolvido pelo IMECC – UNICAMP) com o objetivo de facilitar os cálculos necessários à resolução das atividades.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Teoria dos Grafos. Ensino Médio.

ABSTRACT

Contemporary society becomes ever more changing rapidly, often recurrent technological advances, which cause great impact on people's lives, changing the way we see, understand and act on the reality around us. The school, as an integral part of this society, should also tailor the curriculum and teaching methodologies to the requirements of this new reality. So, this paper presents the mathematical activities, though Mathematical Modeling enabling approach Graph Theory in high school, in line with the content already provided in the program at this level of education, in particular Matrices content. Considering that the Graphs have gained prominence precisely the potential for application to typical problems of contemporary society as transportation problems, allocation, telecommunications, among others, it is important for high school students, preparing for the challenges of adulthood , have contact with this concept. In addition, the option for Mathematical Modeling as a methodology for introducing graph if given the potential to develop skills of collection, organization and analysis of data, research and questioning, as well as allow troubleshooting of reality in the classroom. We also use technological means during the development of the activities (application developed by IMECC-UNICAMP) as a target of facilitate the calculations for the resolution of activities.

Key words: Mathematical Modeling. Graphs Theory. High School.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Um dos anseios de todo professor de matemática é que os alunos entendam e gostem, ou pelo menos, se interessem por sua disciplina. Na busca por realizar esse anseio, o professor põe-se constantemente a pesquisar novos recursos que tornem sua aula mais interessante e dinâmica.

Nossa experiência em sala de aula indica que essa atitude do professor de lançar mão de recursos que dinamizem as aulas é bem recebida pelos alunos. Embora não possamos afirmar que os alunos sentem-se mais motivados, visto que a motivação é algo que parte do indivíduo e não que é colocado nele, podemos sim, olhar para o processo de aprendizagem da matemática que decorre de ações que os alunos tenham interesse em fazer.

Uma pessoa motivada, que deseja alcançar um objetivo, ou realizar um sonho, não se abala caso em seu caminho apareça algo ou alguém de que não goste. Ela enfrenta o desafio e vence as suas dificuldades.

Em nosso convívio, por exemplo, já passaram numerosos alunos que tinham grandes dificuldades com a matemática e com esforço, determinação e força de vontade superaram as dificuldades e continuaram seu caminho. Outros que, no entanto, não apresentavam dificuldades, pelo comodismo e falta de motivação, tornaram-se alunos medíocres, preocupados apenas em passar de ano ou nem mesmo nisso.

O interesse pelo estudo da Teoria dos Grafos surgiu quando tivemos contato com o problema das pontes de Konigsber, que descreveremos no Capítulo 1, em uma das disciplinas do Mestrado, tratado no âmbito da Análise Combinatória. Posteriormente, estudando Álgebra Linear, revimos os grafos, desta vez relacionados a conceitos de Matrizes, o que despertou o interesse pela sua aplicação no Ensino Médio.

Os grafos são um conceito relativamente novo na matemática e que ganhou grande destaque entre os matemáticos na segunda metade do século XX, com o advento dos computadores e que possui muitas aplicações no mundo real.

Geralmente, quando pensamos em Matemática, nos vem à mente conceitos já consolidados há muito tempo. Podemos citar como exemplos, a geometria euclidiana, a geometria analítica, o cálculo integral e diferencial, entre outros. Pouco conhecemos ou recordamos da Matemática desenvolvida em nosso tempo, nos séculos XX e XXI, talvez porque essa nos pareça muito complicada ou fora de nossa realidade.

No entanto, muitos dos novos conceitos matemáticos desenvolvidos nos séculos XIX e XX estão ingressando nos conteúdos escolares tornando-se atrativos aos estudantes, e o estudo desses conceitos, bem como sua inserção na escola, devem ser objetivados pelo professor. Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 42) indicam que "[...] à medida que surgem novos conhecimentos e novas aplicações da matemática, têm surgido pesquisas sobre como estes poderiam ser ensinados e/ou aprendidos na escola. Um exemplo disso são os fractais".

Apesar da maior parte dos conceitos desenvolvidos nessas áreas de estudo serem inacessíveis a alunos do Ensino Médio, uma ideia geral do que tratam, ou mesmo problemas mais simples resolvidos através desses conceitos podem ser apresentados aos alunos, como uma forma de terem contato com essa "matemática contemporânea" e compreender que a matemática é uma ciência viva e dinâmica que busca, entre outras coisas, oferecer subsídios para o desenvolvimento humano e respostas para os anseios da sociedade.

Uma alternativa para inserir conceitos da matemática contemporânea na Educação Básica é buscar relações com conteúdos que já fazem parte do currículo. Os fractais, por exemplo, aparecem em alguns livros didáticos, em situações relacionadas ao conteúdo potência de números racionais, sequências, progressão geométrica. Da mesma forma, acreditamos que os grafos podem ser introduzidos a partir de conteúdos que já fazem parte do currículo.

Uma outra questão que devemos responder antes de propor a introdução dos grafos, é por que utilizar grafos na Educação Básica. Braicovich (2013) argumenta que os grafos são:

- Aplicáveis: nos últimos anos tem sido aplicado em diversas áreas;
- Acessíveis: em muitas situações é suficiente ter conhecimento de aritmética e em outras somente de álgebra elementar;
- Atrativos: podem levantar situações muito motivadoras para os alunos;
- Adequados: aos estudantes que não tem problemas em matemática, lhes dará maior preparo para as carreiras que escolherem, e aos que não vão bem nesta disciplina, pode dar a possibilidade de um novo começo.

Apesar de alguns autores como Braicovich (2013) e Bria (2004) defenderem que os grafos podem ser introduzidos a partir do Ensino Fundamental, trabalharemos com o Ensino Médio, por entender que neste nível de ensino os alunos têm maior maturidade e os temas discutidos em sala de aula podem ser mais amplos.

O que faz os grafos tão atrativos a ponto de algumas pessoas se referirem a uma "febre dos grafos" é o fato de vários problemas práticos poderem ser resolvidos com o auxílio desta área da Matemática. Podemos citar como exemplos: problemas de minimização ou maximização de percursos, problemas de coloração, determinação de pontos centrais, problemas de conexidade, entre outros.

O fato dos grafos serem aplicáveis a problemas do cotidiano nos remeteu à Modelagem Matemática, que é uma alternativa de ensino e aprendizagem de matemática fundamentada na resolução de problemas oriundos do mundo real, com temas de interesse dos alunos, através de modelos matemáticos.

A escolha da Modelagem Matemática justifica-se pelo fato de os objetivos da Educação Matemática no Ensino Médio estarem em consonância com o método de trabalho da Modelagem Matemática.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2000) :

> "propõe-se, no nível do Ensino Médio, a formação geral, em oposição à formação específica; o desenvolvimento de capacidades de pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las; a capacidade de aprender, criar, formular, ao invés do simples exercício de memorização". (BRASIL, 2000, p. 5)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 2001b, p.19) também destacam que "a atividade matemática escolar não é olhar para coisas prontas e definitivas, mas a construção e apropriação de um conhecimento pelo aluno que servirá deles para compreender e transformar sua realidade".

A Modelagem Matemática, por sua vez, propõe a resolução de problemas da realidade, onde é necessária coleta, sistematização e análise dos dados para a resolução da situação problema, ou seja, ela cria o ambiente ideal para que o aluno desenvolva as capacidades citadas acima.

As observações das potencialidades que a abordagem da Teoria dos Grafos tem na Educação e das possibilidades de abordar situações da realidade através da Modelagem Matemática, nos levou ao seguinte questionamento, que norteará nossa pesquisa: Como a Teoria dos Grafos, em atividades de Modelagem Matemática, pode ser desenvolvida no Ensino Médio?

Assim, este trabalho tem por objetivo delinear um caminho para que a Teoria dos Grafos possa ser desenvolvida no Ensino Médio, mesmo que em seus aspectos mais básicos, por meio de atividades de Modelagem Matemática. Para isso, descreveremos uma experiência de ensino com Modelagem, realizada em uma turma do Ensino Médio. No entanto, antes da descrição da experiência de ensino, devemos nos situar em todos os assuntos que permeiam essa pesquisa.

O Capítulo 1 presta-se à apresentação dos conteúdos trabalhados em nossa experiência de ensino: grafos e sua relação com matrizes. Primeiramente, apresentaremos aspectos históricos da Teoria dos Grafos, destacando os problemas que deram impulso ao desenvolvimento da teoria e alguns conceitos básicos que serão explorados em nossa experiência de ensino. Em seguida, faremos uma revisão bibliográfica de trabalhos (dissertações, artigos) sobre grafos no Ensino Médio.

O Capítulo 2 destina-se à apresentação e discussão dos recursos didáticos utilizados na experiência de ensino: Modelagem Matemática e Mídias Tecnológicas. Como ambas fazem parte das chamadas Tendências em Educação Matemática, iniciaremos com uma breve descrição das principais Tendências. Em seguida, daremos destaque à Modelagem Matemática, descrevendo sua origem na Matemática Aplicada, a passagem para a Educação Matemática, as principais perspectivas, concepções e usos na sala de aula, a concepção adotada em nosso trabalho, e às Mídias Tecnológicas.

No Capítulo 3 apresentamos a experiência de ensino realizada. Descrevemos detalhadamente o transcorrer das aulas, a condução das atividades, as resoluções dos alunos, fazendo em seguida sua análise.

CAPÍTULO I
Teoria dos Grafos

Neste capítulo apresentamos o conceito de grafo, segundo consta historicamente, a partir da solução do problema das sete pontes de Koenigsberg, proposto por Leonard Euler, seguido de uma retomada histórica do desenvolvimento dos grafos, apresentando os principais problemas que impulsionaram o estudo do tema. Em seguida, apresentamos alguns conceitos básicos da Teoria dos Grafos e a revisão bibliográfica de alguns trabalhos que tratam da abordagem da Teoria dos Grafos no Ensino Médio.

1.1.Um Breve Histórico

Segundo Boaventura e Jurkiewicz (2009) em 1736, o brilhante matemático suíço Leonard Euler, em visita à cidade de Koenigsberg, na Prússia Oriental (atualmente Kaliningrad, Rússia) foi apresentado a um problema que desafiava os moradores da cidade. No rio que corta a cidade, o Pregel, havia duas ilhas, interligadas entre si por uma ponte e que se interligavam às margens por mais seis pontes. O problema consistia em encontrar o percurso para um passeio que partisse de uma das margens e atravessando uma única vez cada uma das sete pontes, retornasse à margem de partida.

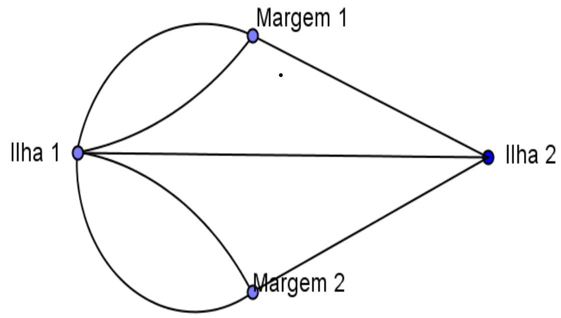
Euler, como um bom matemático que adorava resolver problemas, procurou (e conseguiu) resolver o problema das sete pontes de Koenigsberg, como ficou conhecido mais tarde o desafio. Como veremos, a solução não é tão complicada, o que justificaria que apenas um matemático do porte de Euler o tenha resolvido. Talvez, o que fez com que Euler resolvesse o problema rapidamente foi a forma como ele o abordou.

De posse dos dados do problema, que pode ser observado no mapa da cidade na época (Figura 1.1), Euler simplificou o problema representando as porções de terra (margens e ilhas) por pontos e as pontes por segmentos, gerando um modelo matemático (Figura 1.2.).

Figura 1.1: mapa da cidade de Koenigsberg.

Fonte: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/novos_conteudos/modulo_I/conteudos1a.htm. Último acesso em 19/01/2014.

Figura 1.2: modelo matemático elaborado por Euler

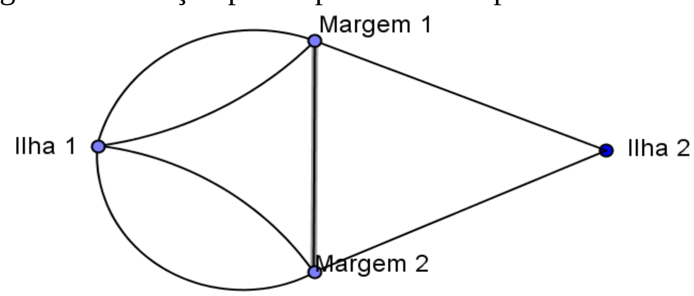


Fonte: Boaventura e Jurkiewics, 2009, p. 2.

Por meio do estudo analítico deste modelo, Euler apresentou uma solução para o problema das sete pontes. Concluiu que seria impossível fazer o passeio com as condições dadas. Na verdade, Euler observou que cada vértice (porção de terra) possui três arestas (ligações). Deste modo, ao chegar em um dos vértices por uma aresta, sobram duas opções para sair do vértice. Ao percorrer a última aresta não há como sair do vértice sem percorrer novamente uma das arestas.

Além disso, Euler mostrou que se o número de arestas que adjacentes a cada vértice é par o problema teria solução, ou seja, mostrou uma aplicação de sua análise, conforme podemos observar na figura Figura 1.3. Se de cada vértice partisse um número par de arestas uma solução possível para o problema partindo-se da ilha 2 seria: ilha 2 – margem 1 – ilha 1 – margem 2 – ilha 1 – margem 1 – margem 2 – ilha 2.

Figura 1.3: solução para o problema das pontes de Koenigsberg.



Fonte: Boaventura e Jurkiewics, 2009, p. 2.

O que Euler fez foi modelar o problema das sete pontes, algo muito comum naquela época em que procurava-se utilizar a Matemática para compreender e, ainda resolver problemas do mundo real.

Não se sabe porque o problema das sete pontes era importante para os moradores da cidade, ou se era realmente importante. Talvez não passasse de um desafio que alguém lançou e que a curiosidade humana procurou desvendar. O que se sabe é que, a partir da solução de Euler, ou melhor, do modelo matemático que utilizou para resolver o problema, surgiu uma nova área de estudo da Matemática, chamada Teoria dos Grafos.

Ao que parece, Euler não deu muita importância ao problema, tanto que sua resolução quase se perdeu entre sua notável produção científica. Somente um século depois os grafos foram utilizados novamente, desta vez para a representação de circuitos elétricos por Kirchhoff e para a representação de isômeros de hidrocarbonetos alifáticos (compostos de carbono e hidrogênio com cadeia abertas) por Cayley (BOAVENTURA; JURKIEWICZ, 2009).

O fato dos grafos terem surgido a partir da resolução de um problema real parece não ser coincidência, já que grande parte do desenvolvimento do que hoje chamamos Teoria dos Grafos se deu, segundo Braicovich (2013) pela resolução de quatro problemas: o problema das pontes de Koenigsberg (descrito acima), o problema da coloração de mapas, o problema do caixeiro viajante e o problema dos ciclos Hamiltonianos.

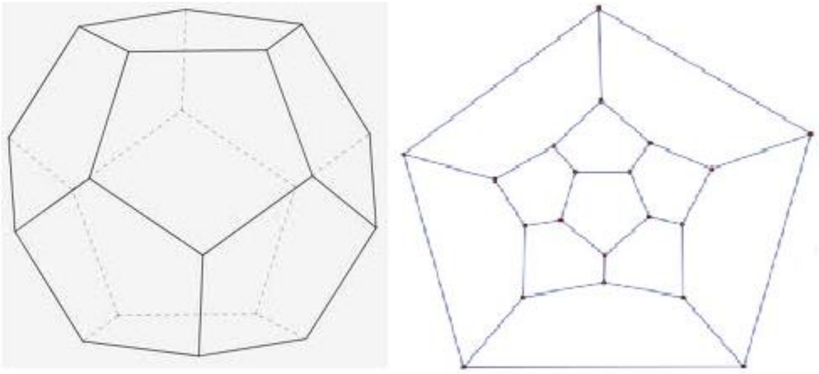
O problema da coloração de mapas surgiu da hipótese de cartógrafos de que, para colorir um mapa, seriam necessárias no máximo quatro cores. Em 1852, um estudante inglês de Matemática, Francis Guthrie, resolveu dar à hipótese uma abordagem matemática e representou as regiões do mapa por pontos e, caso duas regiões tivessem uma fronteira em comum, ligou-as por uma linha, em uma representação do que hoje chamamos grafo.

Apesar de o problema parecer simples, sua demonstração mostrou-se muito complexa, tanto que, apenas em 1976, Appel e Haken conseguiram mostrar sua validade e, mesmo assim, utilizando computadores. A tentativa de demonstrar o teorema das quatro cores deu impulso às pesquisas com grafos e foi responsável por grande parte do desenvolvimento de sua teoria.

O problema dos ciclos hamiltonianos surgiu com um jogo inventado pelo famoso matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865) em 1859 denominado *Icosian Game*. O jogo consistia em percorrer cada um dos 20 vértices de um dodecaedro regular (sólido regular com 12 faces pentagonais, 20 vértices e 30 arestas), passando por cada vértice apenas uma vez e começando e terminando pelo mesmo vértice. Os vértices eram nomeados com nomes de cidades importantes. Como o dodecaedro é incômodo de manejar, Hamilton o representou no plano, utilizando um grafo.

De acordo com Jurkiewicz (2009, p. 59), “o problema de saber se um grafo é ou não hamiltoniano é um dos mais estudados da Teoria dos Grafos por sua aplicabilidade em comunicação, transporte e planejamento”.

Figura 1.4. Dodecaedro regular e sua representação plana feita por Hamilton.



Fonte: http://www.thestudentroom.co.uk. Último acesso em: 19/01/2014.

O problema do caixeiro viajante (PCV) é uma aplicação do problema dos ciclos hamiltonianos e consiste em atribuir-se valores às ligações entre as cidades (geralmente o custo do deslocamento ou a distância entre elas) e determinar qual é o percurso que minimiza o deslocamento ou que torna a viagem mais econômica.

Novamente, apesar da simplicidade da formulação do problema, até hoje não foi possível encontrar um algoritmo que o resolva rapidamente. Malta (2008, p. 23) afirma que o problema do caixeiro viajante é uma representação genérica de "[...] problemas em que são conhecidos pontos de entrega/passagem/distribuição/coleta de produtos via algum transporte em que é necessário determinar a menor distância a ser percorrida ou o menor custo".

Os problemas descritos acima foram responsáveis por grande parte do desenvolvimento da Teoria dos Grafos. No entanto, foi no século XX, mais precisamente em sua segunda metade, que esse campo de estudo ganhou impulso, graças ao advento dos computadores. Boaventura e Jurkiewicz (2009, p. 4) destacam que, "[...] a partir da década de 1950, a Pesquisa Operacional – disciplina matemática envolvida com problemas de organização – começou a utilizar intensamente os modelos de grafos, em busca de melhores soluções para problemas de projeto, organização e distribuição".

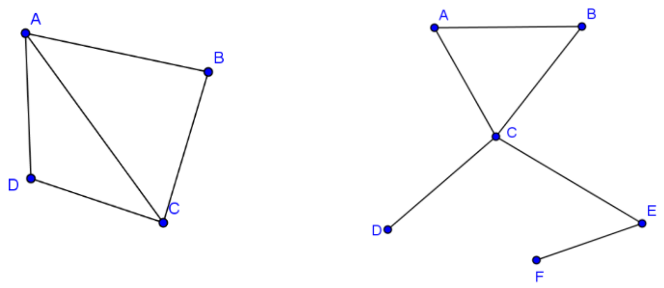
Atualmente, são publicadas centenas de artigos, dissertações e teses sobre grafos, muitos deles motivados pela solução de problemas reais, o que mostra a importância desse campo de estudo da Matemática Aplicada e que também justifica sua abordagem na Educação Básica e Superior.

1.2.Conceitos Básicos da Teoria dos Grafos

Nesta seção apresentamos alguns dos conceitos básicos da Teoria dos Grafos, que foram utilizados no desenvolvimento deste trabalho, em que o rigor das demonstrações é mediado pelo nível de escolaridade no qual a implementação foi proposta. No entanto, a teoria apresentada pode ser mais bem aprofundada em Boaventura e Jurkiewicz (2009) e Jurkiewicz (2009).

Definição 1.1. Um *grafo (G)* é uma coleção finita de pontos, chamados *vértices (V)*, juntamente com um conjunto finito de *arestas (A)* ligando pares de vértices.

Figura 1.5: Exemplos de grafos



(a) Grafo com 4 vértices e 5 arestas (b) grafo com 6 vértices e 6 arestas

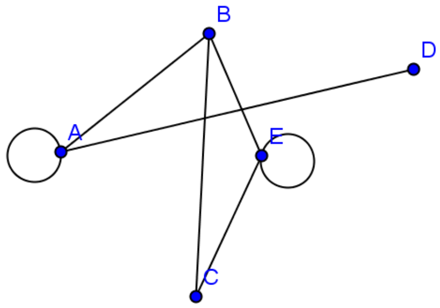
Fonte: Autora.

Dizemos que dois vértices são *adjacentes* quando existe uma aresta ligando-os. Neste caso, dizemos que a aresta é *incidente* aos vértices. Na figura 1.5(b), por exemplo, os vértices A e B são adjacentes. Já os vértices C e F não são adjacentes, pois não há uma aresta ligando-os diretamente. Apesar de não haver uma aresta incidente aos vértices C e F, isto não impossibilita o acesso ao vértice F a partir do vértice C, ou vice-versa.

Falaremos de acesso de um vértice a outro em *estágios*: existe uma forma de C ter acesso ao vértice F em dois estágios, basta seguir o percurso C-E-F. Note que o número de estágios é igual à quantidade de arestas que devem ser percorridas para acessar um vértice a partir de outro. Podemos falar então de acesso em um estágio (quando os vértices são adjacentes), dois estágios, três estágios, etc.

Uma aresta pode ainda ligar um vértice a ele mesmo. Neste caso, denominamos a aresta de *laço.*

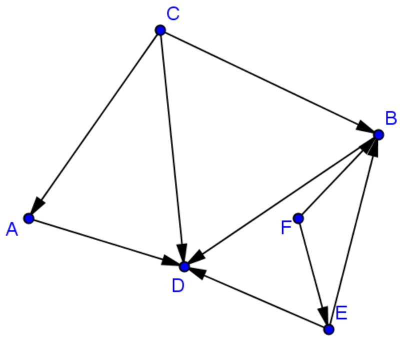
Figura 1.6. Grafo com laços nos vértices A e E.



Fonte: Autora.

Note que as arestas representam uma relação de transitividade. No grafo da figura 1.6., por exemplo, a aresta BC permite partir tanto de B para C quanto de C para B. No entanto, existem situações que exigem que o percurso seja feito em apenas um sentido. Nesses casos, usamos uma flecha que indica o sentido do percurso e as arestas passam a ser denominadas de *arcos*. O grafo passa a ser então um *dígrafo* ou *grafo orientado.*

Figura 1.7. Grafo orientado com 6 vértices e 9 arcos.



Fonte: Kolman, 1999, p. 343.

Definição 1.2. O número de arestas que incidem sobre um vértice é denominado *grau do vértice V.* Simbolizaremos o grau do vértice por *d(V).*

Dentre os graus de todos os vértices de *G*, o menor grau é chamado *grau mínimo de G* (denotado por $\delta(G)$) e o maior grau é dito *grau máximo de G* (denotado por $\Delta(G)$). Os laços devem ser contados duas vezes no grau do vértice que o contém.

Em um grafo orientado podemos distinguir o grau do vértice entre dois semigraus: o *semigrau exterior* $d^+(V)$ que é o número de arcos que partem de V e o *semigrau interior* $d^-(V)$ que é o número de arcos que chegam a V. Temos que $d^+(V) + d^-(V) = d(V)$.

Definição 1.3. A somatória dos graus dos vértices de um grafo é denominado *grau do grafo G*.

Na figura 1.5.(a), temos o grau dos vértices *d(A)* = 3, *d(B)* = 2, *d(C)* = 3 e *d(D)* = 2 e o grau do grafo $\sum d(V) = d(A) + d(B) + d(C) + d(D) = 10$.

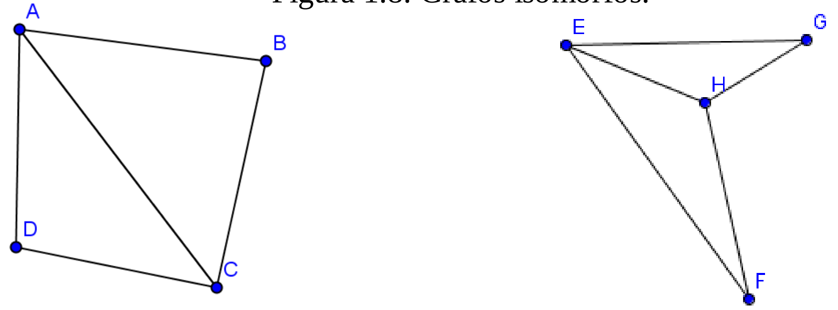
Teorema 1.1. Para todo grafo *G*, o grau do grafo é igual ao dobro do número de arestas.
Dem: Observe que o grau de um vértice é dado pelo número de arestas que incidem sobre o vértice. Mas cada aresta incide sobre dois vértices. Logo, no somatório do grau dos vértices de *G*, cada aresta é contada duas vezes. Portanto, o grau do grafo *G* é igual ao dobro do número de arestas do grafo *G*. $\square$

Corolário 1.1. Todo grafo *G* possui um número par de vértices de grau ímpar.
Dem: Suponha, por absurdo, que um grafo *G* possua um número ímpar de vértices de grau ímpar. A somatória desses graus resultará em um número ímpar. Mas isso contradiz o Teorema 1.1., já que o somatório dos graus de um grafo é par. Logo, todo grafo *G* possui um número par de vértices de grau ímpar. $\square$

Definição 1.4. Dois grafos G_1 e G_2 são ditos *isomorfos* se existe uma correspondência biunívoca entre seus conjuntos de vértices que preserve as adjacências.

Observe que os grafos abaixo são isomorfos, pois ambos possuem 4 vértices e 5 arestas e podemos fazer a correspondência entre os vértices A – E, B – G, C – H, D – F, de modo que as adjacências entre os vértices ficam preservadas.

Figura 1.8. Grafos isomorfos.



Fonte: Autora.

Os grafos podem ser classificados de acordo com características relativas às ligações entre os vértices. A seguir, descreveremos algumas dessas classificações.

Grafo Simples: é aquele que não possui laços e nem duas ligações distintas com o mesmo par de vértices.

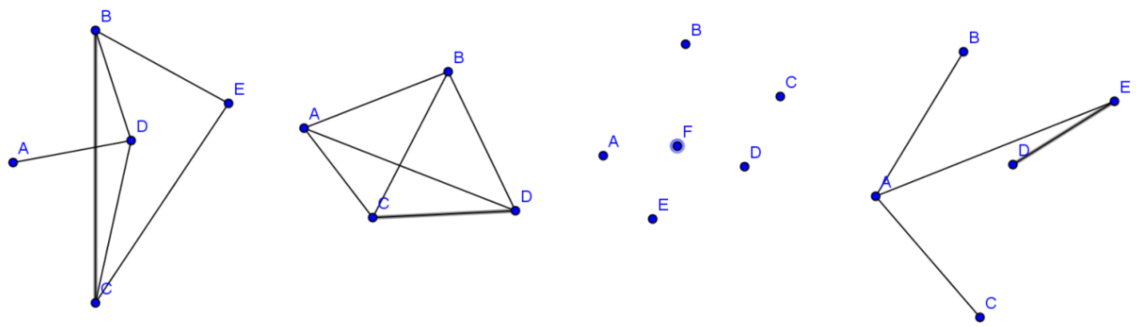
Grafo Completo: é o grafo em que todo par de vértices é ligado por uma aresta.

Grafo Regular: é o grafo em que todos os vértices têm o mesmo grau. Denotando por p o grau de cada vértice, podemos designar um grafo regular por *p-grafo*. O grafo da figura 2, que representa as pontes de Konigsberg é um 3-grafo, pois de cada vértice partem 3 arestas.

Grafo Complementar: O grafo complementar $\overline{G}$ do grafo G é o grafo que contém as ligações que não estão em G. Podemos escrever $A(G) \cap A(\bar{G}) = \emptyset$.

Grafo Nulo ou Vazio: é o grafo que não possui arestas.

Figura 1.9. Tipos de Grafos.

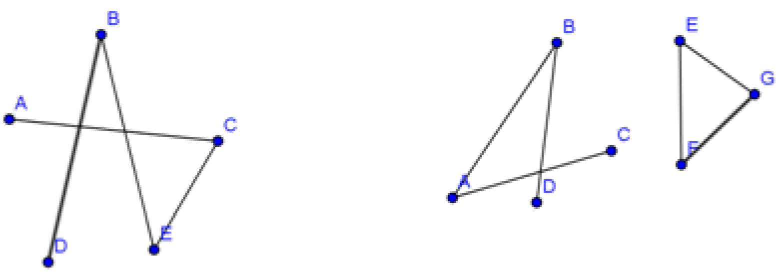


(a) Grafo Simples (b) 3-grafo (c) Grafo Nulo (d) Grafo complementar ao grafo (a)

Fonte: Autora.

Grafo Conexo: é aquele em que existe pelo menos uma forma de acessar um vértice a partir de qualquer outro vértice do grafo. Caso contrário será chamado *desconexo.*

Figura 1.10. Grafo conexo e desconexo.

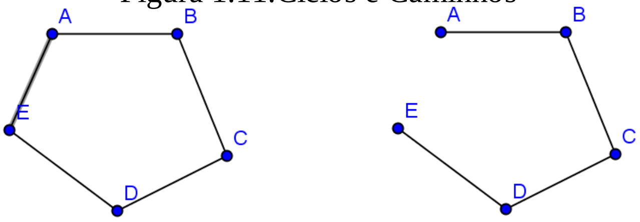


(a) Grafo conexo (b) Grafo desconexo

Fonte: Autora.

Como nos grafos podemo-nos "deslocar" de um vértice a outro pelas arestas, podemos ainda classificar diferentes tipos de percursos. Um *percurso* em um grafo é uma coleção de vértices (ou de ligações) sequencialmente adjacentes. *Percurso simples* é um percurso que não repete ligações. *Percursos elementares são aqueles* que não repetem vértices. Um *ciclo* é um percurso elementar fechado (é um 2-grafo conexo), e um *caminho* é um ciclo do qual retiramos uma aresta. O ciclo recebe a notação $C_{n,}$ e o caminho a notação P_n onde n é o número de arestas do ciclo ou caminho. O comprimento do caminho é dado pelo inteiro n que representa o número de arestas necessárias para percorrê-lo.

Figura 1.11.Ciclos e Caminhos



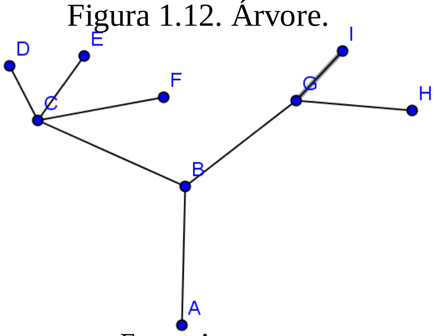
(a) Ciclo C_5 (b) Caminho P_4

Fonte: Jurkiewicz, 2009, p. 20 e 21.

Agora que classificamos os tipos de percursos podemos apresentar um outro tipo de grafo muito utilizado, a *árvore.* A árvore é a maneira de tornar um grafo conexo utilizando o menor número de arestas.

Árvore: é um grafo conexo e sem ciclos.

Figura 1.12. Árvore.



Fonte: Autora.

Um grafo pode ainda ser representado por uma matriz. Essa representação apresenta vantagens quando desejamos utilizar a linguagem de computador para representar um grafo. Existem duas matrizes que representam um grafo: a **matriz de adjacência** e a **matriz de incidência.**

Definição 1.5. Dado um grafo G de n vértices $V_1, V_2, \ldots, V_n$, a *matriz de adjacência* de G é a matriz quadrada $M(G)_{nxn}$, tal que o (i, j)-ésimo elemento da matriz é igual a 1 se existe pelo menos uma aresta ligando os vértices V_i e V_j. Caso contrário o (i, j)-ésimo elemento da matriz é igual a 0.

As matrizes de adjacência dos grafos das figuras 1.5.(a) e 1.5.(b) são respectivamente:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Definição 1.6. Dado um grafo G de n vértices $V_1, V_2, ..., V_n$ e m arestas $A_1, A_2, ..., A_m$, a *matriz de incidência* de G é a matriz $N(G)_{nxm}$, tal que o (i, j)-ésimo elemento da matriz é igual a 1 se a aresta A_j é incidente em V_i. Caso contrário o (i, j)-ésimo elemento da matriz é igual a 0.

As matrizes de incidência dos grafos das figuras 1.5.(a) e 1.5.(b) são respectivamente:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} AB & AC & AD & BC & CD \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} AB & AC & BC & CD & CE & EF \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

O teorema a seguir apresenta um resultado envolvendo a matriz de adjacência de um grafo que auxilia o estudo do número de formas de acessarmos um vértice a partir de outro em r estágios, ou em outras palavras, permite determinar quantos caminhos de comprimento fixado r existem entre dois vértices.

Teorema 1.2. Seja M_{nxn} a matriz de adjacência do grafo G e seja M^r_{nxn} a r-ésima potência de M_{nxn}. Então o (i,j)-ésimo elemento de M^r é o número de caminhos de comprimento r existentes entre os vértices i e j.

Dem: Seja m_{ij} o (i,j)-ésimo elemento da matriz de adjacência M_{nxn} do grafo G. Sabemos que $m_{ij} = 0$ se i e j não são adjacentes e $m_{ij} = 1$ se i e j são adjacentes. Denotamos por $m_{ij}^{(r)}$ a (i,j)-ésima entrada da matriz M^r_{nxn}. Vamos mostrar por indução, que $m_{ij}^{(r)}$ representa o número de caminhos de comprimento r ligando os vértices i e j. Primeiramente, vamos mostrar que o resultado é válido para $r = 2$.

Note que $m_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} m_{kj}$. Mas o produto $m_{ik}\, m_{kj}$ só será diferente de zero se $m_{ik} \neq 0$ e $m_{kj} \neq 0$. Mas neste caso teremos $m_{ik}\, m_{kj} = 1$, o que indica que existe um caminho ligando i a k e outro ligando k a j, ou seja, existe um caminho de comprimento 2 ligando i a j. Deste modo, cada elemento do somatório $\sum_{k=1}^{n} m_{ik} m_{kj} = m_{i1} m_{1j} + m_{i2} m_{2j} + \cdots + m_{in} m_{nj}$ que for igual a 1 indica um caminho de comprimento 2 ligando i a j. Portanto, $\mathrm{m}_{\mathrm{ij}}^2 = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{m}_{\mathrm{ik}} \mathrm{m}_{\mathrm{kj}}$ indica quantos caminhos de comprimento 2 ligam i a j.

Vamos supor que o resultado seja válido para $r = t$, isto é, a (i,j)-ésima entrada da matriz M_{ij}^t indica o número de caminhos de comprimento t que ligam i a j. Vamos mostrar que o resultado também é válido para $r = t+1$. Note que $m_{ij}^{t+1} = (m_{i1}^t).m_{1j} + (m_{i2}^t).m_{2j} + \cdots + (m_{in}^t).m_{nj}$. Pela hipótese de indução, cada um dos elementos m_{in}^t acima representa o número de caminhos de i a n de comprimento t. Se o elemento m_{nj} for igual a 1 haverá um caminho de comprimento t ligando i a n e um caminho de comprimento 1 ligando n a j. Logo, haverá um caminho de comprimento $t+1$ ligando i a j. □

1.3. Revisão Bibliográfica de Trabalhos Sobre Grafos no Ensino Médio

Nesta seção faremos uma revisão bibliográfica de artigos e dissertações, cujo tema é o ensino de grafos no Ensino Médio. Para esta análise, escolhemos trabalhos que assumam alguma metodologia de ensino para a inclusão dos grafos e também aqueles em que as atividades sejam direcionadas ao nível do Ensino Médio. A seguir, descrevemos as principais contribuições de cada trabalho.

Jurkiewicz e Muniz (2007) apresentam uma proposta de introdução à Teoria dos Grafos no Ensino Médio através da Resolução de Problemas. Justificam a introdução da Teoria dos Grafos no Ensino Médio como uma adequação do currículo às exigências do mundo contemporâneo, cada vez mais dependente do computador. Como os grafos estão intimamente ligados às novas tecnologias, compreendê-los seria uma forma de também compreender o mundo atual.

Os temas da Teoria dos Grafos escolhidos para as atividades aplicadas a alunos do 3º Ano do Ensino Médio, sob a forma de oficinas, foram escolhidos de forma que:

> 1) fossem simples em sua apresentação;
> 2) despertassem a curiosidade e apresentassem resultados que pudessem ser demonstrados;
> 3) contemplassem os primórdios da Teoria dos Grafos – Problema das Pontes de Koenigsberg;
> 4) apresentassem algoritmos que pudessem ser explicados e justificados convenientemente aos alunos;
> 5) contribuíssem para a apresentação das potencialidades e limitações do uso do computador, previamente programado, na resolução de problemas;
> 6) permitissem a interligação com outros assuntos presentes no Ensino Médio (JURKIEWICZ; MUNIZ, 2007, p. 426).

Em relação ao item seis descrito acima, os autores indicam a ligação dos grafos ao conteúdo Análise Combinatória. Destacam que o trabalho realizado tem por objetivo a investigação de situações-problema e exercícios que permitam a aprendizagem de conceitos de grafos, e a compreensão de ideias que facilitem a utilização de ferramentas computacionais na resolução destes problemas.

Malta (2008) apresenta uma proposta de inserção de Teoria dos Grafos no Ensino Médio utilizando a Resolução de Problemas como perspectiva metodológica. Para tanto, utiliza problemas que façam referência aos problemas históricos que impulsionaram o desenvolvimento da Teoria dos Grafos, como o problema das pontes de Koenigsberg, o problema da coloração de mapas e de caminhos hamiltonianos.

Associa os grafos à Análise Combinatória e às Matrizes, desenvolvendo as atividades, sob a forma de oficina, no decorrer de oito aulas com alunos do 2º Ano de Ensino Médio de uma escola particular.

Justifica a inclusão dos grafos como uma adequação do currículo aos avanços tecnológicos e à necessidade de tornar a matemática mais significativa para os alunos. Para justificar a escolha da Resolução de Problemas como perspectiva metodológica, pauta-se na indicação de documentos oficiais para o desenvolvimento da capacidade de aprender continuamente. "No nosso entendimento, a Resolução de Problemas é uma das alternativas capazes de proporcionar esta capacidade de aprender continuamente" (MALTA, 2008, p. 6).

Ferreira (2009) defende a inserção da Teoria dos Grafos no Ensino Médio utilizando a Modelagem Matemática como recurso didático. Justifica a escolha da Teoria dos Grafos por esta fazer parte da Matemática Discreta, que em função do uso dos computadores, vem ganhando cada vez mais importância na sociedade contemporânea.

Indica que algumas situações com grafos são facilmente adaptáveis a sala de aula, a partir de atividades de Modelagem Matemática e que estas atividades podem possibilitar o uso de novas tecnologias.

Aponta como objetivos da pesquisa realizada “divulgar a ideia central e alguns conceitos básicos sobre grafos, reforçar o uso de modelação matemática, alem de mostrar a viabilidade do ensino de Matemática Discreta no Ensino Médio usando Modelagem Matemática” (FERREIRA, 2009, p. 14).

Relata uma experiência com alunos do 1º e 2º anos do Ensino Médio, sob a forma de oficinas fora do horário regular de aula, aonde propôs quatro problemas cuja solução envolveria a Teoria dos Grafos.

O primeiro problema proposto, apresentado como problema motivador, consistia em montar horários de palestras sobre Ecologia, Doenças Sexualmente Transmissíveis, Teoria da Relatividade e Estatuto da Criança e Adolescente direcionadas a três públicos: Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior, com algumas restrições estabelecidas.

O segundo problema consistia na determinação do número mínimo de aeronaves para que uma empresa de taxi aéreo instalasse um projeto para a exploração do espaço aéreo das regiões Sul, Sudeste e Centro-Oeste do Brasil, sabendo-se as distâncias entre as cidades e que cada aeronave atende a um raio máximo de 1000 km.

No terceiro problema os alunos deveriam montar o quadro de horários de aulas para o ano letivo de 2009 de uma escola de Ensino Médio conhecendo-se as disciplinas e a quantidade de aulas de cada uma delas.

O quarto problema consistia na elaboração de uma tabela de dias e horários para a realização dos exames finais do curso de Engenharia Mecânica de uma universidade de modo a permitir que cada aluno pudesse fazer todos os exames necessários, sem que tivesse que fazer dois exames no mesmo dia e hora, procurando realizá-los no menor número de dias possível.

Apesar dos problemas terem referência na realidade, o autor não indica se são problemas reais ou se são problemas fictícios. Este é um ponto importante já que a metodologia utilizada é a Modelagem Matemática.

Esses trabalhos evidenciam a crescente preocupação em introduzir grafos no Ensino Médio com o intuito de oferecer aos jovens a oportunidade de contato com uma matemática contemporânea, que procura resolver problemas da atualidade.

Capítulo 2
Tendências em Educação Matemática: Modelagem Matemática[1] e Mídias Tecnológicas

A Educação Matemática é conceituada, segundo Pais (2001, p. 10), como "uma grande área de pesquisa educacional, cujo objeto de estudo é a compreensão, interpretação e descrição de fenômenos referentes ao ensino e à aprendizagem da matemática, nos diversos níveis da escolaridade, quer seja em sua dimensão teórica ou prática".

Esta área de pesquisa surgiu no Brasil, segundo Fiorentini e Lorenzato (2006) na década de 1970, com a publicação das primeiras dissertações de Mestrado e teses de Doutorado com temática ligada à Educação Matemática, ainda em programas de pós graduação em Educação, Matemática e Psicologia.

Ainda, segundo Fiorentini e Lorenzato, (2006), na década de 1980 foram criados os primeiros programas de pós graduação na área de Educação Matemática, com consequente aumento da produção científica nesta área. Também surgiram grupos de estudo e eventos com o objetivo de discutir questões pertinentes à Educação Matemática, além da criação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

Se nas décadas de 1970 e 1980 houve o nascimento e organização da Educação Matemática como área de atuação profissional e pesquisa, as décadas de 1990 e 2000 marcaram sua consolidação.

De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 34) "no início da década de 1990 retornam ao país mais de duas dezenas de educadores matemáticos que concluíram doutoramente nos Estados Unidos, França, Inglaterra e Alemanha em diversas áreas de investigação". Além disso, em 1997, houve o reconhecimento da Educação Matemática pela Associação Nacional de Pós Graduação e Pesquisa em Educação (Anped) e em 2000, a criação da área de Ensino de Ciências e Matemática pela Capes.

A Educação Matemática oferece diversos temas de pesquisa, indicados por Fiorentini e Lorenzato (2006) como tendências temáticas da pesquisa em Educação Matemática. Algumas dessas tendências, principalmente àquelas ligadas a metodologias de ensino e aprendizagem de matemática, tem ganhado destaque, inclusive sendo indicadas em documentos oficiais, como as Diretrizes Curriculares do Paraná para auxiliar a prática docente.

[1] A fim de evitar repetições, em nosso texto usaremos apenas Modelagem para nos referirmos à Modelagem Matemática.

> Os conteúdos propostos devem ser abordados por meio de tendências metodológicas da Educação Matemática que fundamentam a prática docente, das quais destacamos: resolução de problemas; modelagem matemática; mídias tecnológicas; etnomatemática; história da Matemática; investigações matemáticas. (PARANÁ, 2008, p. 63)

Cada tendência constitui uma diretriz para que o professor possa no ambiente da aula de matemática, facilitar o acesso dos alunos ao conhecimento matemático e também torná-lo mais significativo. É uma forma de aprimorar as aulas tradicionais, comumente guiadas por: apresentação do conteúdo – exemplos - exercícios padrão.

Skovsmose (2007) descreve uma aula tradicional de matemática como aquela dominada pelo uso do livro-texto, que é seguido, praticamente, página por página. Nesse tipo de aula, o professor expõe o conteúdo em uma aula plenária onde os alunos podem levantar a mão para fazer perguntas. Em seguida, fazem longas listas de exercícios do livro-texto na aula e em casa. Tais exercícios são corrigidos no quadro pelo professor ou entregues a ele por escrito para que faça a correção e, muitas vezes, atribua uma nota.

Skovsmose (2007) observa ainda que se lêssemos em voz alta todos os exercícios de matemática feitos por um estudante durante o Ensino Fundamental e Médio ouviríamos uma série de comandos que dificilmente trariam um convite à criatividade. E questiona: “De que maneira [os exercícios] podem ajudar o estudante a apreender algo da essência da matemática?” (SKOVSMOSE, 2007, p. 36).

Ainda, segundo Skovsmose (2007), esse tipo de aula exclui uma parte substancial dos estudantes (o autor destaca aqueles de desempenho médio), na medida em que muitos deles perdem o interesse pela matemática e acabam concluindo que “matemática não é para eles”. Isso faz com que fiquem submetidos a empregos que exijam o mínimo de matemática, notadamente, empregos de menor status social e ganho econômico.

O autor conclui que “o ensino tradicional de matemática pode também excluir um grupo de ‘pessoas dispensáveis’, que deveriam ficar satisfeitas com qualquer tipo de trabalho que lhes fosse dado”. (SKOVSMOSE, 2007, p. 38)

Nesse contexto, a inclusão de aulas mediadas por uma das tendências em Educação Matemática pode servir como alternativa para o uso exclusivo das aulas tradicionais que, de acordo com Skovsmose (2007), causa tantos prejuízos aos alunos.

Faremos uma breve descrição de cada uma das tendências indicadas pelas Diretrizes Curriculares do Paraná, para que o leitor possa ter uma ideia de como cada uma delas pode contribuir para o ensino e aprendizagem da Matemática.

1) Resolução de problemas: O estudo da resolução de problemas como estratégia de ensino começou no Brasil na segunda metade da década de 1980 (ZORZAN, 2007). Esta tendência tem por característica a resolução de problemas para a introdução e/ou utilização de conceitos matemáticos.

> Cabe ao professor assegurar um espaço de discussão no qual os alunos pensem sobre os problemas que irão resolver, elaborem uma estratégia, apresentem suas hipóteses e façam o registro da solução encontrada ou de recursos que utilizaram para chegarem ao resultado. Isso favorece a formação do pensamento matemático, livre do apego às regras. (PARANÁ, 2008, p. 63).

2) Modelagem Matemática: A Modelagem Matemática é um método de trabalho da Matemática Aplicada e que passou a fazer parte do cenário da Educação Matemática no final da década de 1970 (ZORZAN, 2007; BUENO, 2011). De maneira geral, procura trazer para a sala de aula, temas do mundo real, que possam gerar problemas que devem ser resolvidos pelos alunos por meio da matemática. Barbosa (2007) destaca o crescente número de publicações de artigos, dissertações, teses e relatos de experiência com esta temática e a consolidação de uma comunidade científica de Modelagem no país.

3) Mídias Tecnológicas ou Tecnologias da Informação ou Comunicação (TICs): Esta tendência nasceu como uma necessidade de adequação do ensino de matemática ao mundo contemporâneo, cada vez mais dependente da tecnologia e da informática. Defende o uso das mídias tecnológicas como facilitadoras do ensino e aprendizagem de matemática, muitas vezes associada a outras tendências, principalmente a Modelagem Matemática, como afirmam Borba e Penteado:

> O trabalho com a Modelagem e com o enfoque experimental sugere que há pedagogias que se harmonizam com as mídias informáticas de modo a aproveitar as vantagens de suas potencialidades. Essas vantagens podem ser vistas como sendo a possibilidade de experimentar, de visualizar, e de coordenar de forma dinâmica as representações algébricas, tabulares, gráficas e movimentos do próprio corpo. (BORBA; PENTEADO, 2001, p. 42).

4) Etnomatemática: A etnomatemática surgiu nos anos de 1970 a partir das propostas de Ubiratan D’Ambrósio de levar em consideração nos programas educacionais as matemáticas produzidas pelas diferentes culturas e não apenas a matemática acadêmica (PARANÁ, 2008). “Também é uma característica metodológica da etnomatemática a passagem do saber concreto para o abstrato” (ZORZAN, 2007, p. 81).

5) História da Matemática: Esta tendência busca trazer a história da matemática como elemento para que o aluno possa compreender que o desenvolvimento da matemática está associado a contextos econômicos, sociais, políticos e filosóficos.

> A história da Matemática é um elemento orientador na elaboração de atividades, na criação das situações-problema, na busca de referências para compreender melhor os conceitos matemáticos. Possibilita ao aluno analisar e discutir razões para aceitação de determinados fatos, raciocínios e procedimentos. (PARANÁ, 2008, p. 66).

6) Investigações Matemáticas: "Na investigação matemática, o aluno é chamado a agir como um matemático, não apenas porque é solicitado a propor questões, mas, principalmente, porque formula conjecturas a respeito do que está investigando" (PARANÁ, 2008, p. 67). Nesta tendência, o professor deve apresentar situações que dêem ao aluno a oportunidade de fazer observações, levantar hipóteses, experimentar, refutar, com o objetivo de compreender ou mesmo, introduzir conteúdos matemáticos.

Apesar de ainda predominar, no ambiente de aprendizagem de matemática, a aula tradicional, muitos professores já começam a inserir em sua prática alguma, ou algumas dessas tendências.

O crescente número de publicações, grupos de pesquisas na área da Educação Matemática e a inserção de disciplinas que abordam essas tendências nos cursos de formação de professores, seja em nível de graduação ou pós graduação contribui para a divulgação e uso dessas tendências em sala de aula (FIORENTINI; LORENZATO, 2006).

Além disso, quando o professor adota uma tendência em sua prática, isso não significa que escolheu apenas ela. O professor pode utilizar diferentes tendências para abordar diferentes conteúdos na medida em que julgar necessário.

Muitas vezes, contextos socioeconômicos e culturais específicos favorecem o uso de uma determinada tendência. Em uma escola indígena, por exemplo, o uso da etnomatemática pode ser bem vindo, já que considera as especificidades culturais, sociais e econômicas dos sujeitos da aprendizagem. Já em uma escola com um bom acesso a equipamentos de informática e tecnologia pode ter o uso das mídias tecnológicas estimulado, bem como das investigações matemáticas.

As próprias Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008) sugerem que haja uma articulação entre as tendências, sempre que possível, de forma a favorecer a abordagem dos conteúdos.

Entre as tendências citadas destacamos a Modelagem Matemática e as Mídias Tecnológicas, que nortearam as atividades desenvolvidas nesta pesquisa e por isso discutiremos alguns aspectos delas nas próximas seções.

A opção da Modelagem como metodologia se deu ao fato dela permitir a abordagem de problemas reais, o que favorece o interesse dos alunos pela matemática. Além disso, este tipo de atividade pode dar ao aluno a oportunidade de pesquisar, obter dados, conjecturar, refutar e analisar.

Já as Mídias Tecnológicas configuraram uma ferramenta para facilitar a análise dos dados colhidos, harmonizando-se com a Modelagem.

A seguir, apresentaremos o uso da Modelagem na Matemática Aplicada, as características que assume quando é utilizada neste campo da Matemática e a importância que tem em nossa sociedade. Depois apresentaremos algumas perspectivas, concepções e alternativas de uso da Modelagem em sala de aula presentes na literatura e a concepção adotada em nosso trabalho. Por fim, teceremos algumas considerações sobre as mídias tecnológicas e como podem ser utilizadas como recurso didático para o ensino da matemática.

2.1. Modelagem na Matemática Aplicada

A Modelagem Matemática tem sua origem na Matemática Aplicada e, de acordo com Bueno (2011), os primeiros modelos matemáticos surgiram há milênios quando o homem passou a fazer uso de modelos matemáticos para explicar a realidade, notadamente, na Grécia Antiga.

A Modelagem é um método de trabalho, um processo que permite ao pesquisador converter para a linguagem matemática (modelo) um problema não matemático da realidade e assim, analisá-lo e resolvê-lo.

De acordo com Bassanezi (2011) os passos percorridos por um “modelador” são:

1) Experimentação: obtenção dos dados;
2) Abstração: formulação do modelo matemático;
3) Resolução do modelo: o modelo é utilizado para propor uma resposta ao problema;
4) Validação: é a aceitação ou não da resposta obtida com a resolução do modelo;
5) Modificação: caso não haja validação, o modelo ou a resolução devem ser modificados;
6) Aplicação: o modelo pode ser utilizado para resolver situações similares.

Um exemplo de Modelagem no âmbito da Matemática Aplicada, conforme descrito por Bassanezi (2011), foi descrito no Capítulo 1 em que descrevemos a origem dos grafos a partir da resolução dos problemas das pontes de Konigsber por Leonard Euler.

Conforme citamos, Euler obteve os dados do problema (experimentação), simplificou-os obtendo um modelo matemático (abstração), apresentou uma resposta para o problema a partir do estudo analítico do modelo (resolução), mostrou que a resolução através do modelo era compatível com a resolução do problema real (validação) e, além disso, generalizou as condições para a solução (aplicação).

A Modelagem não é utilizada apenas por matemáticos, como Euler, para resolver problemas da realidade. Ela também serve como ferramenta para físicos, químicos, biólogos e vários outros profissionais para matematizar fenômenos, buscando a compreensão do mundo em que vivemos. Se tomarmos como exemplo a Física, teremos uma grande quantidade de fórmulas que descrevem fenômenos naturais. Barbosa (2001a, p. 12) destaca que esse uso da matemática serviu para identificá-la como "instrumento: o mundo poderia ser descrito em relações matemáticas".

Segundo Bueno (2011, p. 26) "o papel dos modelos matemáticos na sociedade é amplamente reconhecido devido as suas aplicações, que têm impactos diretos ou indiretos sobre o comportamento das pessoas". Sobre esse aspecto Barbosa (2001a, p. 16) afirma que "os modelos matemáticos são construídos para subsidiar a tomada de decisões e, portanto, participam da vida social".

Para ilustrar esse papel que os modelos matemáticos exercem sobre a vida das pessoas, tomemos como exemplo o Índice de Massa Corporal (IMC) utilizado por profissionais da área da saúde para determinar se uma pessoa está com o peso ideal.

Para o cálculo do IMC é utilizada uma fórmula matemática que relaciona massa e altura $\left(IMC = \frac{massa(kg)}{altura^2(m)}\right)$. De acordo com o valor obtido, classifica-se a pessoa com baixo peso, peso ideal, sobrepeso ou obesidade grau I, II ou III. Um médico ou um nutricionista sabe que para determinar se uma pessoa está saudável, apenas o IMC não é o suficiente, existem outros fatores que devem ser analisados: biotipo, sexo, taxa de colesterol, glicemia, circunferência abdominal, etc.

No entanto, a população em geral, tende a reconhecer o IMC como um fator preponderante e muitas vezes exclusivo para determinar se uma pessoa está saudável ou não.

Para Borba e Skovsmose in Skovsmose (2001), esse poder que a matemática exerce na tomada de decisões na vida das pessoas é sustentado pelo que denominam Ideologia da Certeza. De acordo com essa ideologia (implícita no pensamento das pessoas):

> 1) A matemática é perfeita, pura e geral no sentido de que a verdade de uma declaração matemática não se fia em nenhuma investigação empírica. A verdade matemática não pode ser influenciada por nenhum interesse social, político ou ideológico.
> 2) A matemática é relevante e confiável, porque pode ser aplicada a todos os tipos de problemas reais. A aplicação da matemática não tem limite, já que é sempre possível matematizar um problema. (BORBA; SKOVSMOSE in SKOVSMOSE, 2001, p. 131)

Os matemáticos sabem que a matemática só é pura nos domínios da própria ciência. Por isso mesmo dividem-na em Matemática Pura e Aplicada. Na Matemática Pura estudam-se os conceitos, propriedades, problemas da própria matemática, sem a influência do mundo real. Já na Matemática Aplicada, como o nome sugere, a matemática é uma ferramenta para a resolução de situações com referência na realidade e por isso fica sujeita às restrições do mundo real.

O problema é que as pessoas tendem a transferir a compreensão que têm da Matemática Pura para a Matemática Aplicada e, deste modo, confiam cegamente em tudo o que lhes é apresentado em forma de números, fórmulas, gráficos, ou seja, em linguagem matemática.

Não podemos deixar de destacar que a escola é responsável por disseminar a Ideologia da Certeza, já que apresenta aos alunos conceitos construídos no âmbito da Matemática Pura, que são utilizados para resolver problemas do "cotidiano". A grande questão é que tais "problemas do cotidiano" são cuidadosamente enunciados para serem resolvidos de maneira perfeita utilizando-se dos conceitos matemáticos apresentados pelo professor em sala de aula. Nesse tipo de situação, tudo se encaixa perfeitamente: situação-dados-algoritmos-resposta. E mais ainda, há apenas uma resposta correta. Assim também vemos a matemática em nosso dia a dia. A melhor solução para nossos problemas é sempre aquela apresentada pela matemática.

No entanto, o matemático aplicado sabe que as coisas não funcionam desta forma. Quem lida com a modelagem sabe que um modelo sempre apresenta limitações, já que depende dos dados coletados, das variáveis consideradas, das hipóteses levantadas, entre outros fatores.

Voltando ao exemplo do IMC, poder-se-ia criar um novo índice que levasse em conta o sexo, a quantidade de gordura e/ou massa muscular. Note que o aumento das variáveis criaria um novo modelo com o mesmo propósito do anterior.

Assim, se a Modelagem obriga o modelador a refletir sobre tantas questões, inclusive sobre os limites de seu modelo, é natural pensar na Modelagem como uma ferramenta de ensino de matemática, já que o objetivo da escola é formar cidadãos críticos capazes de atuar na transformação da sociedade.

Sobre esse aspecto, os Parâmetros Curriculares Nacionais afirmam:

> É necessário que, no processo de ensino e aprendizagem, sejam exploradas a aprendizagem de metodologias capazes de priorizar a construção de estratégias de verificação e comprovação de hipóteses na construção do conhecimento, a construção de argumentação capaz de controlar os resultados desse processo, o desenvolvimento do espírito crítico capaz de favorecer a criatividade, a compreensão dos limites e alcances lógicos das explicações propostas. (BRASIL, 2001a, p. 35)

Atentos ao potencial que a Modelagem tem para desenvolver as capacidades de investigação, argumentação, construção, verificação e comprovação de hipóteses, além do desenvolvimento do pensar crítico, os profissionais da área da Educação Matemática, sejam professores ou pesquisadores, passaram a olhar a Modelagem utilizada pela Matemática Aplicada como uma ferramenta para o ensino da matemática.

Essa transferência da Modelagem da Matemática Aplicada para a Educação Matemática percorreu (e ainda percorre) um longo caminho de discussões na tentativa de se adaptar aos objetivos do ensino de matemática. Nas últimas décadas muitos trabalhos foram publicados, experiências realizadas e grupos de estudos organizados, a fim de dar um referencial teórico para a Modelagem na Educação.

Na próxima seção, falaremos sobre o desenvolvimento da Modelagem na Educação Matemática no Brasil, as principais concepções de Modelagem e a concepção adotada em nosso trabalho.

2.2. Modelagem na Educação Matemática

A Modelagem começou a ser discutida como uma metodologia de Ensino de Matemática no Brasil a partir da década de 1970. Podemos dizer que ela foi “importada” da Matemática Aplicada. Bueno (2011) aponta Aristides Camargos Barreto, Ubiratan

D'Ambrósio e Rodney Carlos Bassanezi como os precursores da Modelagem Matemática com fins educacionais no Brasil.

Aristides Camargos foi o primeiro a aplicar, em 1976, atividades de Modelagem em uma turma do curso de Engenharia da PUC-RJ e a orientar dissertações de mestrado sobre o tema. Foi divulgador da Modelagem em eventos nacionais e internacionais de Educação Matemática.

Um de seus adeptos foi o professor Rodney Bassanezi, outro entusiasta do uso da Modelagem no Ensino. Autor de diversos livros sobre o tema e responsável pelo primeiro curso de pós-graduação em Modelagem Matemática do Brasil, em Guarapuava-PR, é um dos mais importantes nomes nessa área de estudo no Brasil.

Ubiratan D'Ambrósio, por sua vez, implantou na UNICAMP o primeiro programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, inspirado em um modelo interdisciplinar, o que favoreceu experiências em Modelagem e Etnomatemática (BUENO, 2011).

A partir desses primeiros esforços, a Modelagem ganhou força na área da Educação Matemática e muitos pesquisadores se empenham em dar a ela uma roupagem educacional. Isto quer dizer que se tem tentado conceituar o que é Modelagem no âmbito escolar, e essa tarefa perpassa o delineamento de uma atividade de Modelagem, bem como as diferentes formas de atuação de professores e alunos.

O conhecimento das diferentes caracterizações da Modelagem na Educação Matemática, pelo professor, torna-se importante na medida em que possibilita que ele esteja preparado e motivado para realizar as atividades de Modelagem em sala de aula.

Dado que a Modelagem na Educação Matemática veio importada da Matemática Aplicada, a sua inserção na sala de aula vem se modificando e adaptando ao contexto educacional conforme as diferentes práticas adotadas, tanto em nível nacional como internacional.

Hoje, são muitas as perspectivas de Modelagem na literatura. Entenda-se por perspectiva os diferentes propósitos aos quais as atividades de Modelagem podem ser submetidas em sala de aula. Kaiser e Sriramam identificaram cinco perspectivas de Modelagem apresentadas por autores em congressos sobre o tema:

1) **Perspectiva Realística:** os problemas são autênticos e os alunos devem desenvolver habilidades de resolução de problemas aplicados;
2) **Perspectiva Epistemológica:** os problemas são estruturados para o desenvolvimento da teoria matemática;
3) **Perspectiva Educacional:** os problemas são autênticos e servem para o desenvolvimento da teoria matemática;

> 4) **Perspectiva Sócio-crítica:** os problemas devem favorecer a análise da natureza dos modelos matemáticos e seu papel na sociedade;
> 5) **Perspectiva Contextual:** os problemas são direcionados para o desenvolvimento da teoria matemática, mas são sustentados nos estudos psicológicos sobre sua aprendizagem. (KAISER; SRIRAMAM, 2006, apud BARBOSA; SANTOS, 2007, p. 2).

Segundo Barbosa e Santos (2007) as perspectivas apresentam três objetivos didáticos: desenvolver a teoria matemática (epistemológica, educacional e contextual), desenvolver habilidades de resolução de problemas aplicados (realística) e analisar a natureza dos modelos e seu papel na sociedade (sócio-crítica).

Essas perspectivas descrevem algumas das diferentes formas como a Modelagem vem sendo adaptada no contexto do ensino e aprendizagem da Matemática. No entanto as discussões acerca de uma concepção que abarque o contexto da Modelagem na Educação Matemática ainda são bastante férteis.

Bueno (2011) indica quatro pesquisadores da área de Educação Matemática como as principais referências em termos de concepção de Modelagem: Maria Salett Biembengut, Dionísio Burak, Jonei Cerqueira Barbosa, Dale William Bean.

De acordo com a autora, a escolha desses pesquisadores como referências no tema se deu pelo fato dos mesmos assumirem uma concepção de Modelagem perante a comunidade educacional que os diferencia dos demais pesquisadores e trabalhar ou orientar trabalhos com Modelagem na Educação Básica atualmente. Resumimos a seguir os quadros em que Bueno (2011) sintetiza as concepções dos quatro pesquisadores:

Quadro 2.1: Concepções de Biembengut, Burak, Barbosa e Bean

Concepção / **Pesquisador**	**Modelagem na Educação**	**Modelo Matemático**	**Como fazer Modelagem em sala de aula**
Biembengut	É um método de ensino adaptado da Matemática Aplicada para promover ou ensinar conhecimentos acadêmicos.	É a representação do mundo real por meio de linguagem matemática que leve a solução ou permita a dedução da solução de um problema.	- Em grupo; - Estudo de um tema e segue três etapas básicas: interação, matematização e modelo matemático.

Burak	É uma metodologia de ensino que possibilita comparar e relacionar os fenômenos reais com a matemática e utilizá-la na tomada de decisões.	É uma representação em linguagem matemática que permite uma tomada de decisão.	- Em grupo; - Deve resultar em tomada de decisões; - Segue cinco etapas: escolha do tema pelos estudantes; pesquisa exploratória; levantamento dos problemas; resolução dos problemas e desenvolvimento da matemática relacionada; análise crítica da(s) solução(os).
Barbosa	É um ambiente de aprendizagem em que os alunos são convidados a investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade.	É qualquer representação matemática da situação em estudo.	- Em grupos; - Não existe um caminho predeterminado, podendo ser realizado de acordo com um dos três casos: Caso 1: o professor apresenta uma situação problema da realidade, devidamente relatado, para que os alunos solucionem com o auxílio do professor. Caso 2: o professor apresenta o problema aos alunos. Estes, por sua vez, deverão coletar e sistematizar os dados e solucionar o problema, com o auxílio do professor. Caso 3: a elaboração, coleta de dados e resolução do problema cabem aos alunos com o auxílio do professor.
Bean	É uma atividade humana na qual uma parte da	É uma construção simbólica conceitual,	- Em grupo; - Não estabelece diretrizes para o processo, mas defende a

	realidade está conceitualizada, de forma criativa, com algum objetivo em mente.	expressa principalmente na linguagem matemática, que auxilia na interpretação/compreensão e/ou tomada de decisões.	existência de múltiplos caminhos para que os alunos criem modelos.

Fonte: Bueno, 2011, p. 82-85.

Definidos os objetivos e a forma de realizar a atividade de Modelagem resta definir como introduzi-la em sala de aula. Blum e Niss (1991, apud ALMEIDA; VERTUAN, 2011) apontam algumas possibilidades de inclusão das atividades de Modelagem:

> 1) **Alternativa da separação:** desenvolvimento das atividades em cursos extracurrilares;
> 2) **Alternativa da combinação:** no decorrer das aulas de matemática, frequentemente, a Modelagem seja utilizada para auxiliar a introdução de novos conceitos matemáticos ou para a utilização de novos conceitos para a resolução das atividades;
> 3) **Alternativa da integração curricular:** os problemas são o ponto de partida e a matemática necessária para resolvê-los seria introduzida de acordo com a necessidade;
> 4) **Alternativa interdisciplinar integrada:** as atividades "extramatemáticas" e matemáticas seriam integradas através da interdisciplinaridade, a matemática não seria organizada como disciplina isolada, mas com os conteúdos das diferentes disciplinas curriculares, previamente identificados. (BLUM; NISS, 1991, apud ALMEIDA; VERTUAN, 2011, p. 24-25)

As alternativas permitem ao professor inserir a atividade de Modelagem de acordo com suas possibilidades. Em escolas de ensino integral ou que oferecem atividades em contraturno, por exemplo, a alternativa da separação pode ser utilizada de maneira sistemática. Já para os professores que só dispõem das aulas regulares, a alternativa da combinação parece ser a mais adequada, inclusive para a introdução ou utilização de conceitos matemáticos previstos no programa do ano letivo. Já as alternativas da integração curricular e interdisciplinar integrada podem figurar em escolas com programas mais abertos.

Diante da variedade de perspectivas, concepções e formas de introdução muitos podem achar que não há consenso em torno do uso da Modelagem na Educação. Pelo contrário. A preocupação em criar um referencial teórico reside justamente no reconhecimento de que atividades de Modelagem adaptadas ao contexto educacional auxiliam o ensino e aprendizagem da matemática. Do contrário, poderíamos considerar qualquer atividade de resolução de problema real como modelagem.

O professor só deve tomar o cuidado de definir seus objetivos e concepções, pois, conforme Araújo (2002, p.12) “devido à multiplicidade de definições, é importante que o pesquisador, ou quem estiver trabalhando com Modelagem Matemática, deixe claro o que entende por esse assunto”. É justamente isso que faremos a seguir: definiremos a concepção de Modelagem assumida em nosso trabalho.

2.3. Concepção de Modelagem Adotada

Em nosso trabalho adotaremos a concepção de Barbosa (2003), já enunciada no quadro 2.1., em que Modelagem é um “ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagarem e investigarem, por meio da matemática, situações com referência na realidade”. Antes de justificarmos a escolha dessa concepção para o desenvolvimento de nosso trabalho, devemos compreendê-la melhor.

Primeiramente devemos saber o significado do termo *ambiente de aprendizagem*. Ambiente aqui não se refere apenas a um espaço físico, mas às condições que são oferecidas aos alunos para que desenvolvam as atividades propostas.

Em uma aula que utilize a investigação matemática como recurso didático, por exemplo, o professor cria o ambiente propício para a aprendizagem dos alunos oferecendo a eles materiais e situações necessários à investigação. Vamos supor que o professor queira que os alunos investiguem como calcular o volume de um paralelepípedo. Ele faz vários paralelepípedos com cubos de madeira e pede aos alunos que determinem quantos cubos formam o empilhamento sem precisar contá-los um a um. Note que o ambiente (cubos, empilhamentos, as perguntas, a própria disposição da turma em grupos, semicírculo, etc.) favorece a investigação dos alunos e os objetivos do professor.

Da mesma forma podemos criar um ambiente de Modelagem. Barbosa (2003, p. 68) afirma que “o ambiente de Modelagem está associado à *problematização e investigação*. O primeiro refere-se ao ato de criar perguntas e/ou problemas enquanto que o segundo, à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas”.

Isto quer dizer que no ambiente de Modelagem os alunos devem ser estimulados a questionar, levantar hipóteses, argumentar, duvidar, investigar, buscar informações e decidir se são ou não relevantes, organizar e sistematizar tais informações, tudo isso com o intuito de resolver um problema da realidade. Para Barbosa (2001b, p. 6) "a investigação é o caminho pelo qual a indagação se faz. [...] É uma atividade que não conhece procedimentos *a priori*, podendo comportar a intuição e as estratégias informais".

No entanto, tudo isto só ocorrerá se os alunos aceitarem o *convite* para fazerem parte desse ambiente de aprendizagem. Barbosa (2001b, p. 6) argumenta que "o ambiente de aprendizagem que o professor organiza pode apenas colocar o convite. O envolvimento dos alunos ocorre na medida em que seus interesses se encontram com esse".

De fato, não há garantia de que os alunos irão problematizar e investigar. Eles só o farão se o convite feito pelo professor para a realização da atividade de Modelagem for realmente aceito, o que significa "tomar posse" da ideia, assumir como sua a tarefa de resolver o problema proposto. Por isso é importante que o tema a ser estudado seja sugerido pelos alunos ou que faça parte de seu universo de interesse. Também é essencial que a situação *tenha referência na realidade*.

Trazer situações reais para a sala de aula é, sem dúvida, um dos grandes atrativos da Modelagem como recurso didático. Afinal, todos têm interesse em "ver" como a matemática pode resolver problemas do nosso cotidiano. Falar simplesmente que "tudo é número" ou "os números estão em toda parte" são frases de efeito que não convencem a maioria das pessoas do porque é importante aprender matemática.

Assim, adotamos a concepção de Barbosa porque ela nos oferece um *ambiente de aprendizagem* no qual podemos criar as condições propícias para o desenvolvimento de problemas da *realidade*, que poderão suscitar nos alunos maior interesse pelo aprendizado da matemática e trarão a eles habilidades de *problematização* e *investigação*, o que, em nosso entender favorece a aprendizagem de novos conceitos ou a aplicação de conceitos já aprendidos.

Além disso, Barbosa não se prende a esquemas rígidos para fazer Modelagem em sala de aula. Ao contrário, apresenta três modos de conduzir a atividade, que denomina casos (conforme quadro 2.1), que podem ser desenvolvidos de acordo com o tempo disponível para a atividade e/ou familiaridade do professor e alunos com atividades de Modelagem. Para melhor compreensão dos três casos já descritos anteriormente, reproduziremos de Barbosa

(2003) um quadro que apresenta as atribuições de professor e alunos nas atividades de Modelagem conforme cada caso.

Quadro 2.2. Quadro comparativo dos casos de Modelagem

	Caso 1	**Caso 2**	**Caso 3**
Elaboração da situação-problema	Professor	Professor	Professor/aluno
Simplificação	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
Dados qualitativos e quantitativos	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
Resolução	Professor/aluno	Professor/aluno	Professor/aluno

Fonte: Barbosa, 2003, p. 71

Barbosa (2003, p. 71) comenta ainda que "do caso 1 para o 3, a responsabilidade do professor sobre a condução das atividades vai sendo mais compartilhada com os alunos [...] e os três casos ilustram a flexibilidade da Modelagem nos diversos contextos escolares".

Desenvolvemos as atividades de Modelagem em aulas regulares de matemática no Ensino Médio com o intuito de introduzir o conceito de grafos e relacioná-lo com matrizes e também para utilizar esses conceitos para resolver situações da realidade.

Essa forma de desenvolvimento de atividades de Modelagem situa-se na alternativa da combinação de acordo com Blum e Niss (1991, apud ALMEIDA; VERTUAN, 2011), conforme já apresentado na seção 2.2. Essas atividades serão descritas com detalhes no próximo capítulo. A seguir, falaremos sobre as mídias tecnológicas, que também foram utilizadas em nossas atividades.

2.4. Mídias Tecnológicas

A escola, como parte integrante da sociedade, deve acompanhar as mudanças que esta apresenta ao longo do tempo. E uma das mudanças que causaram maior impacto nas relações sociais, afetivas e do trabalho foram o computador e a internet. A própria Matemática beneficiou-se desses recursos, já que foi possível, a partir deles, explorar novas áreas, efetuar cálculos maçantes em poucos segundos, ou analisar gráficos de funções não elementares em três dimensões.

Acompanhando a tendência da sociedade, tem-se oferecido às escolas brasileiras, cada vez mais, acesso às tecnologias, com implantação de laboratórios de informática com acesso à internet e em alguns casos, como no estado do Paraná, TVs em todas as salas de aula e *tablets* para os professores.

No entanto, o acesso a essas mídias não significa melhoria na qualidade de ensino e nem mesmo que os mesmos serão utilizados. É preciso que os professores saibam como transformar os recursos tecnológicos em recursos didáticos. Desta forma, a tendência mídias tecnológicas apresenta-se como uma resposta da Educação Matemática ao crescente acesso da sociedade aos recursos tecnológicos, nas últimas décadas do século XX.

Borba e Penteado (2001) afirmam que o uso da informática em sala de aula não deve ser justificado pela motivação que traria, pois essa, segundo eles, é passageira, e nem para preparar o jovem para o mercado de trabalho. Os autores argumentam que:

> O acesso à informática na educação deve ser visto não apenas como um direito, mas como parte de um projeto coletivo que prevê a democratização de acessos a tecnologias desenvolvidas por essa mesma sociedade. É dessas duas formas que a informática na educação deve ser justificada: alfabetização tecnológica e direito ao acesso. (BORBA; PENTEADO, 2001, p. 17)

Quando ouvimos o termo “mídias tecnológicas” logo nos vêm à mente o computador com todos os seus recursos: internet, softwares, aplicativos, simuladores, etc. No entanto, essa tendência vai além dos computadores. Podemos pensar também na televisão, nas calculadoras, e porque não nos celulares. Tudo depende de <u>como</u> fazemos uso desses recursos.

Um exemplo bem típico do bom ou mal uso de um recurso tecnológico em sala de aula é a calculadora. Muitos advogam que não se deve deixar os alunos utilizarem a calculadora durante as aulas de matemática com o argumento de que ela os deixaria “preguiçosos” para a realização de cálculos. Isso, no entanto, só ocorrerá se a calculadora for utilizada de forma displicente, sem atividades direcionadas que estimulem, por exemplo, a observação de regularidades ou a facilitação de cálculos maçantes.

As Diretrizes Curriculares do Paraná (PARANÁ, 2008, p. 65) afirmam que “no contexto da Educação Matemática, os ambientes gerados por aplicativos informáticos dinamizam os conteúdos curriculares e potencializam o processo pedagógico”. Um exemplo é o uso de softwares de geometria para o estudo de funções. Ao invés de professor e alunos gastarem o tempo de aula esboçando gráficos com papel e lápis pode-se gerar os gráficos em um software e analisá-los, descrevendo características, prevendo alterações quando mudamos a lei de formação, observando o conjunto imagem, etc.

Além disso, "abordar atividades matemáticas com os recursos tecnológicos enfatiza um aspecto fundamental da disciplina, que é a experimentação" (PARANÁ, 2008, p. 66). Experimentar significa tentar, pôr em prática, executar, e como sabemos a experimentação está sujeita ao cometimento de erros, que é muito importante no processo de aprendizagem, e que muitas vezes é evitado por professor e alunos, por questões de tempo de aula ou motivação. Quem não se sente desestimulado ao tentar resolver um problema com uma ideia realmente original e descobrir após um longo tempo de trabalho que não chegou à resposta correta porque cometeu um erro de cálculo em uma operação de multiplicação que poderia ser evitado com o uso de uma calculadora?

Utilizar recursos tecnológicos facilita a experimentação, pois torna os erros menos custosos em termos de tempo e, além disso, coloca a atenção de professor e aluno no que realmente interessa: o raciocínio e procedimentos necessários para a resolução da questão proposta.

Não queremos dizer que saber resolver operações com lápis e papel, ou saber esboçar gráficos de funções não seja importante, mas em algumas situações, como na resolução de problemas, é mais importante saber por que e como utilizá-los, o que pode ser feito com a ajuda de recursos tecnológicos.

Em nosso trabalho utilizamos um aplicativo desenvolvido pelo Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) da Unicamp e que faz parte da coleção Matemática Multimídia que contém mais de 350 recursos educacionais no formato de vídeos, áudios, softwares e experimentos e que cobrem quase todo o conteúdo de matemática do Ensino Médio. A coleção pode ser acessada através do endereço eletrônico m3.ime.unicamp.br.

A utilização do aplicativo teve como objetivo facilitar o uso de um resultado relativo a grafos e matrizes (Teorema 1.2) e que exige a multiplicação de matrizes. Como sabemos, multiplicar matrizes, mesmo aquelas consideradas "pequenas", é um trabalho penoso. Como pretendíamos utilizar o teorema para resolver o problema proposto na atividade de Modelagem e o aplicativo gerava o grafo, a matriz de adjacência e apresentava as potências dessas matrizes, utilizamos o aplicativo para efetuar os cálculos ficando a cargo dos alunos a interpretação dos resultados.

Capítulo 3
A pesquisa

Neste capítulo descreveremos e analisaremos a experiência de ensino realizada em uma turma do 3ª Ano do Ensino Médio de uma escola pública com o objetivo de introduzir a Teoria dos Grafos no Ensino Médio mediante atividades de Modelagem Matemática.

Primeiramente, descreveremos a escola em que a experiência foi realizada e os sujeitos que participaram da pesquisa, além de como as aulas foram distribuídas e organizadas.

Depois, faremos a descrição das aulas, destacando a condução da professora para alcançar os objetivos desejados em cada aula e as resoluções, dúvidas e falas dos alunos no decorrer das atividades propostas.

Por fim, faremos a análise das aulas com o intuito de elencar elementos que possam indicar como a Teoria dos Grafos, em atividades de Modelagem Matemática, pode ser desenvolvida no Ensino Médio, que é o nosso problema de pesquisa. Também destacaremos outros aspectos que consideramos relevantes relativos às falas e resoluções dos alunos no ambiente de Modelagem.

3.1. A Escola, os Alunos e a Organização das Aulas.

A experiência de ensino foi realizada no Colégio Estadual São Vicente de Paula na cidade de Nova Esperança – PR. O colégio, de Ensino Fundamental e Médio, é o único que oferece Ensino Médio público na cidade e tem aproximadamente 1500 alunos nos três turnos. Também oferece os cursos profissionalizantes de Formação de Docente, Técnico em Informática e Técnico em Administração.

A implementação da pesquisa deu-se em uma turma de 3ª Ano do Ensino Médio, no período noturno, de 14 a 23 de agosto de 2013. As atividades foram realizadas no período regular, durante as aulas de matemática, totalizando 10 horas/aula.

Para esta pesquisa foram desenvolvidas duas atividades de Modelagem Matemática, cujo objetivo era introduzir conceitos da Teoria dos Grafos, além de utilizar conceitos de matrizes.

A Atividade 1 teve como tema os trajetos dos ônibus que fazem o transporte intermunicipal entre as cidades da região de moradia dos alunos e foi realizada no decorrer de 4 horas/aula, distribuídas em dois dias. A Atividade 2 teve como tema as redes sociais, mais especificamente o *facebook*, e também foi realizada no decorrer de 4 horas/aula, distribuídas em dois dias.

Tínhamos, a princípio, a intenção de realizar as atividades em uma turma de 2ª Ano de Ensino Médio, já que é nesta série que está previsto o conteúdo Matrizes e Determinantes, que abordaríamos juntamente com a introdução dos grafos. No entanto, a escola funciona, no Ensino Médio, com a divisão das matérias em blocos semestrais. Como nossa pesquisa ocorreu no 2º semestre de 2013 e os 2ª Anos haviam tido Matemática no 1º semestre, optamos por realizar as atividades no 3ª Ano.

As aulas em que as atividades foram desenvolvidas, estavam distribuídas da seguinte forma:

Quadro 3.1. Distribuição das Atividades Realizadas.

Aula	**Data**	**Nº de horas/aula**	**Objetivo**
1	14/08/2013	2	Resolução da Atividade 1 para introdução do conceito de grafo.
2	15/08/2013	2	Apresentação de resultados importantes de grafos e sua relação com matrizes.
3	16/08/2013	2	Obtenção dos dados e criação do modelo para resolução da Atividade 2.
4	21/08/2013	2	Discussão e análise do modelo obtido na aula anterior e resolução da Atividade 2.
5	23/08/2013	2	Prova individual escrita com questões sobre grafos e matrizes.

Fonte: Autora.

Apesar de estarem matriculados na turma 30 alunos, participaram das atividades propostas apenas 20. No período noturno, como muitos alunos trabalham durante o dia em serviços muitas vezes pesados, a escola apresenta uma alta taxa de evasão e muitos reprovam por faltas.

A fim de preservar a identidade dos alunos, os identificamos com letras maiúsculas, de A até T, de acordo com a primeira divisão dos alunos nas equipes, respeitando a ordem em que colocaram os nomes na folha de controle da pesquisadora. Isto quer dizer que o aluno A foi o primeiro a identificar-se na equipe 1, o aluno B o segundo a identificar-se na equipe 1, e assim por diante.

O perfil dos alunos é o seguinte: quatro alunos de 17 anos, todos trabalhando durante o dia; dez alunos de 18 anos, apenas dois deles não trabalham durante o dia; dois alunos de 19 anos e três de 21 anos todos trabalhando de dia e uma aluna de 49 anos que não trabalha durante o dia. Ou seja, os sujeitos da pesquisa são jovens estudantes que trabalham durante o dia.

O primeiro contato com os alunos ocorreu uma semana antes do início das atividades, quando a pesquisadora fez o convite para que os mesmos participassem da pesquisa. Em um primeiro momento os alunos mostraram-se desconfiados, mas na medida em que foram sendo explicadas como seriam as atividades e os objetivos da pesquisa eles passaram a se mostrar receptivos.

3.2. A Descrição das Aulas

Nesta seção, faremos a descrição das aulas de acordo com a organização apresentada na Tabela 3.1. Elencaremos os encaminhamentos feitos pela professora, as falas e resoluções dos alunos e o desenvolvimento das atividades.

3.2.1. Descrição da Aula 1

O objetivo dessa aula era que os alunos tivessem um primeiro contato com atividades de Modelagem Matemática a partir do desenvolvimento de uma atividade planejada segundo o caso 1 de Barbosa (2003). Nesta situação, o professor é responsável por toda condução da atividade (elaboração da situação-problema, simplificação, dados qualitativos e quantitativos), ficando a cargo do aluno, com o auxílio do professor, a resolução e interpretação do problema.

Segundo Blum e Niss (1991, apud ALMEIDA; VERTUAN, 2011) o desenvolvimento de atividades de Modelagem durante as aulas pode servir para introduzir ou acionar novos conceitos. Essa forma de realizar uma atividade de Modelagem é chamada alternativa da combinação, conforme já descrevemos na seção 2.2. Na atividade 1, a alternativa da combinação propiciou o introdução do conceito de grafo para a análise e discussão das soluções apresentadas pelos alunos.

O tema, bem como a elaboração da Atividade 1 foi feito pela pesquisadora. A escolha do tema “rotas de ônibus” deveu-se ao fato de que nos meses anteriores ao da realização das atividades em sala de aula, uma onda de protestos tomou conta das ruas de todo o Brasil, iniciada pela insatisfação com o aumento das passagens de ônibus na cidade de São Paulo. Isso desencadeou nos meios de comunicação e redes sociais várias discussões acerca do transporte coletivo e posteriormente outros problemas públicos, como saúde, educação, corrupção.

Assim, acreditou-se que os alunos teriam interesse em realizar uma atividade que abordasse o tema transporte coletivo, em destaque na mídia, e também porque fazia parte da realidade deles, já que os dados foram coletados da empresa que presta serviço de transporte coletivo na região de moradia dos alunos.

A professora[2] iniciou explicando aos alunos que as atividades que realizariam nas próximas aulas seriam atividades de Modelagem Matemática e que, por isso, as aulas não seguiriam o ritmo habitual: explicação do conteúdo pelo professor no quadro negro – exemplos – exercícios. O conteúdo seria desenvolvido de acordo com a necessidade de sua aplicação para a resolução de algumas questões que deveriam ser resolvidas pelos alunos com o auxílio da professora.

Em seguida, a professora conversou com os alunos sobre o transporte coletivo oferecido na região, direcionando a conversa a partir das seguintes questões:

- Você utiliza o transporte coletivo?
- Qual é a importância do transporte coletivo para a população?
- Quais são os principais problemas que você identifica no transporte coletivo na sua cidade/região?
- O que uma empresa de transporte coletivo deve levar em consideração ao estabelecer uma rota?

Os alunos disseram que utilizam o transporte coletivo para se deslocar para as cidades maiores da região, Maringá e Paranavaí, para fazer compras, fazer consultas médicas, para lazer, entre outros motivos. Observaram que é importante haver transporte coletivo para

---

[2] A partir de agora trataremos a pesquisadora como professora, já que durante a realização das atividades era assim que os alunos a identificavam.

as pessoas que não possuem veículo, para as que trabalham diariamente em cidades vizinhas e também porque é mais barato do que fazer o trajeto de carro.

A professora também chamou a atenção para o fato de que o transporte coletivo reduz muito o número de veículos nas vias, o que alivia o trânsito e reduz a emissão de poluentes.

Os problemas relativos ao transporte coletivo identificados pelos alunos foram: ônibus superlotados, na maioria das vezes transitam com quantidade de pessoas além da capacidade permitida, insuficiência de horários, trajetos que não suprem todas as necessidades da população.

Quanto às rotas, alguns disseram que seria melhor que os ônibus fizessem menos paradas, o que reduziria o tempo das viagens. Outros discordaram, dizendo que a empresa deve atender ao maior número possível de pessoas.

A professora distribuiu então, aos alunos, o mapa das rotas da empresa de ônibus que atende a região (mapa da Figura 3.1). No mapa, as cidades são identificadas com pontos claros e escuros. Os pontos claros indicam as cidades aonde há embarque e desembarque de passageiros em local (terminal rodoviário) e horário fixo. Os pontos escuros indicam as cidades aonde só há passagem dos ônibus, com o embarque e desembarque de passageiros em pontos no decorrer do trajeto, sem horário fixo, já que ficam sujeitos aos imprevistos da viagem.

Figura 3.1. Mapa das rotas de ônibus oferecidas por uma empresa na região Norte/Noroeste do Paraná.

Fonte: www.viacaogarcia.com.br.[3]

[3] http://www.viacaogarcia.com.br/outros-servicos/rotas-garcia/. Último acesso em: 05/08/2013.

Observando o mapa da Figura 3.1, é possível perceber que entre Maringá e Colorado existem várias cidades identificadas com pontos escuros e que, na maioria das vezes não tem atendimento de nenhuma empresa de transporte regular.

Motivados pela discussão sobre o transporte coletivo e a partir da observação do mapa, a professora propôs aos alunos que, divididos em grupos, determinassem:

a) O melhor trajeto entre Maringá e Colorado que a empresa pode oferecer aos seus clientes, justificando a escolha do trajeto.
b) Quantos e quais são os trajetos entre Maringá e Colorado que passe por exatamente uma outra cidade.
c) Quantos e quais são os trajetos entre Maringá e Colorado que passe por exatamente duas outras cidades.
d) Determine pelo menos três trajetos entre Maringá e Colorado que passe por exatamente três outras cidades.

Para a realização das atividades os alunos dividiram-se livremente em seis equipes, da seguinte forma:

Quadro 3.2: Distribuição dos alunos para realização da Atividade 1.

Equipe	Nº de Alunos/Identificação
1	3 alunos: A, B, C
2	3 alunos: D, E, F
3	3 alunos: G, H, I
4	3 alunos: J, K, L
5	5 alunos: M, N, O, P, Q
6	3 alunos: R, S, T

Fonte: Autora.

Ficou decidido que nas questões “b”, “c” e “d” só poderiam ser consideradas cidades representadas por pontos pretos, já que nestas não havia garantia de atendimento da população pela empresa de ônibus, sendo Maringá e Colorado pontos de embarque e desembarque com local e horários fixos.

Apesar de a primeira questão ser simples, com solução aberta, já que o critério para o trajeto deveria partir dos alunos, a sua resolução suscitou muitos questionamentos. Provavelmente o fato da questão não ter uma resposta única, levantou a desconfiança de muitos alunos. A seguir transcrevemos os diálogos entre a professora e os alunos sobre a questão “a”.

Equipe 3

Aluno G: *Professora, a gente falou assim, oh. Se ela* (circular/ônibus) *passar de Maringá aqui por dentro* (mostra no mapa as cidades) *ela vai passar por cinco cidades pra depois chegar em Colorado. E aqui por fora ela só passa em três cidades, quatro cidades.*

Professora: *Tá. Vocês podem estabelecer a rota que vocês quiserem.*

Aluno G: *Então a gente estabeleceu assim: ela vai sair de Maringá, vai passar em... onde que é aqui?*

Aluno H: *Iguaraçu.*

Aluno G: *Iguaraçu, Munhoz de Melo, Fernão Dias, Santa Fé, Nossa Senhora das Graças e Colorado.*

Professora: *E por que vocês escolheram essa rota?*

Aluno G: *Porque essa rota vai passar em cinco cidades, ela vai suprir a necessidade de mais pessoas.*

Equipe 4

Aluno J: *Oh professora. O melhor trajeto é aquele que vai ter mais paradas ou o que é o mais rápido?*

Professora: *Vocês decidem.*

Aluno K: *Ah! Porque a pergunta fala “o melhor trajeto entre Maringá e Colorado que a empresa pode oferecer aos seus clientes”.*

Aluno J*: Então, pra empresa fica melhor o quanto mais rápido possível, né?*

Professora: *Mas o critério são vocês que vão estabelecer. O critério é de vocês. Vocês vão pensar na empresa, vocês vão pensar nos usuários, ou vocês vão tentar juntar as duas coisas?*

Os alunos seguem discutindo entre si para estabelecer o critério.

Equipe 5

Aluno M: *Explica aí* [nome]. *Explica aí pra professora o que vocês estavam falando de ser mais perto ou mais rápido?*

Descrevem alguns trajetos possíveis.

Professora: *Então, vocês fazem o critério que vocês quiserem, se vocês quiserem atender mais pessoas, mais cidades, ou se vocês querem que o trajeto seja mais rápido.*
Aluno N: *Tem que pensar nas pessoas, né professora. A empresa não pode pensar só nela, tem que pensar nas pessoas.*
Professora: *Até porque ela depende das pessoas pra poder funcionar.*

Os alunos seguem discutindo o critério que vão utilizar.

Equipe 6
Aluno R: *Eu acho que o melhor caminho é de Maringá e passar por... aqui é Santa Fé, né? De Santa Fé pra Nossa Senhora e já ir pra Colorado. Porque se ele fosse por Atalaia ele* (ônibus) *ia ter que voltar tudo pra trás, e se ele passasse pelo meio dessas cidades* (mostra no mapa) *ele ia ter que passar por um monte de cidades e ia demorar mais pra chegar em Colorado.*
Professora: *Então você quer o trajeto mais rápido?*
Aluno R: *É, o mais rápido.*

As demais questões foram resolvidas pelos alunos sem maiores dificuldades ou discussões, apesar de algumas equipes não terem respondido satisfatoriamente a questão “d”, que pedia “pelo menos três trajetos”. Também, nenhuma equipe levantou a hipótese de haver mais do que três trajetos entre Maringá e Colorado, que passasse por três outras cidades. A seguir, apresentamos as resoluções das equipes para cada questão:

Quadro 3.3: Resolução das equipes para a Atividade 1.

Equipe 1	1- (a) Maringá → Fernão Dias → N. S. Graças → Colorado: se o proposito da empresa for a agilidade. Maringa → Ângulo → Atalaia → Lobato → Colorado; se o proposito for beneficiar mais cidades (B) Maringá → Lobato → Colorado (C) Maringá → Santa Fé → N Sr. das graças → Colorado (D) Maringá → Ângulo → Atalaia → Lobato → Colorado.

Equipe 2	a) O trajeto aonde sai de Maringá passa em Mandaguaçu, Castelo Branco, Nova Esperança, Paraná city e chegando ao destino em Colorado assim esse trajeto facilita a quem quer utilizar para trabalhar em alguma cidade, já no outro trajeto a mobilidade é melhor por só ter parada em somente Lobato sendo mais comodo e mais rapido trajeto b) O trajeto aonde há parada só na cidade de Lobato. c) 1 trajeto, sai de Maringá, passa em Santa Fé, Nossa Senhora das Graças chegando em Colorado d) 1 trajeto, aonde sai de Maringá passa em Angulo, Atalaia, Lobato chegando ao destino em Colorado.
Equipe 3	. ela saindo de Maringá, Passa em Iguaraçu, Munhoz de Melo, Fernão dias, santa Fé. guaraçay e N.S dos graças e destino final colorado. Passando por essa rota, suprirá há necessidade de mais pessoas. ' Maringá, Lobato, colorado. Apenas um Trajeto - Maringá, Santa Fé, N.S dos graças. Apenas um trajeto. - Maringa, Ângulo, Atalaia, Lobato, colorado. - Maringa, Santa Fé, guaraci, N.S dos graças, colorado. - São apenas dois trajetos.

Equipe 4	a) Porque neste trajeto terá mais lucro porque teríamos mais paradas e mais clientes b) Apenas um trajeto no caso, seria: Maringá, Lobato e Colorado c) Apenas um: Maringá, Santa Fé e N. S. Graças d) Só há dois trajetos = Maringá, Ângulo, Atalaia, Lobato e Colorado 2) Maringá, Santa Fé, Guaraci, N. S Graças e Colorado Não existe um terceiro trajeto
Equipe 5	a) O melhor trajeto escolhido pela nossa equipe é: sair de Maringá passar por Santa Fé e por N. S. Graças. Porque o caminho é mais curto e passa por duas cidades, na qual mais pessoas podem utilizar o transporte público. b) Somente um, o que sai de Maringá passa por Lobato chegando em Colorado. c) Somente um, o que passa em Santa Fé, passa por N. S da Graça chegando em Colorado. d) 1º Sai de Maringá, Santa Fé, Guaraçi, N. S. das Graças chegando em Colorado. 2º Angulo, Atalaia, Lobato chegando em Colorado. 3º Presidente Castelo Branco, Atalaia e Lobato.

Equipe 6	a) O melhor trajeto de Marunga à colorado seria com passagem em Santa Fé, e N. S. Graças. Porque é um caminho mais rapido. B) marungo, lobato e colorado. (C) marungo, Santa Fé, N. S. Graças, colorado. D) 1 Marungo, angulo, atalaio, lobato, colorado. 2 Marungo, Santa Fé, Guoraci, N. S. Graças, colorado 3 Marungo, Mandaguaçu, P.C. Branco, N. Esperança colorado.

Fonte: A autora.

Para resolver as questões propostas na Atividade 1 os alunos olharam exclusivamente o mapa da Figura 3.1. Nenhuma equipe tentou elaborar um modelo para que pudesse observar as rotas de uma outra forma.

3.2.2. Descrição da Aula 2

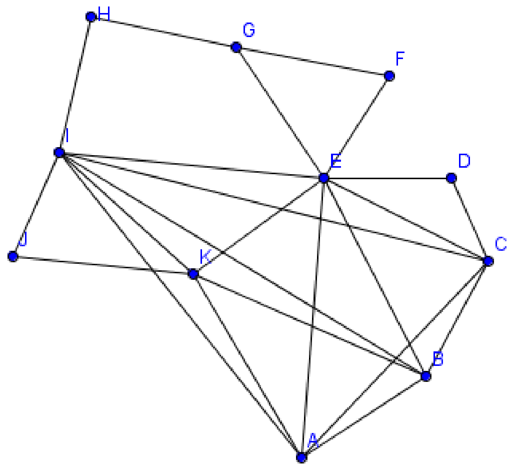
O objetivo dessa aula foi discutir (validar) as soluções das equipes para as quatro questões resolvidas na aula anterior e introduzir o conceito de grafo e alguns resultados que poderiam ajudar a analisar as soluções dos alunos.

A professora retomou o problema da rota de ônibus e comentou as soluções dos alunos. Chamou a atenção para o fato de que, apesar de todas as equipes terem apresentado uma solução satisfatória para as questões, muitos não descreveram todas as possibilidades de soluções, como o enunciado pedia.

A professora propôs então, uma nova forma de representar a situação onde as cidades continuariam a ser representadas por pontos, porém as ligações entre elas seriam feitas de forma a ligar diretamente duas cidades por um segmento de reta (desde que houvesse rodovia ligando as duas cidades diretamente), sem as preocupações do mapa em descrever a forma ou o tamanho do trajeto.

Deste modo, escreveu no quadro o seguinte grafo, onde cada ponto representa uma cidade: A – Maringá, B – Iguaraçu, C – Munhoz de Melo, D – Fernão Dias, E – Santa Fé, F – Guaraci, G – Nossa Senhora das Graças, H – Colorado, I – Lobato, J – Atalaia e K – Ângulo, como mostra a Figura 3.2.

Figura 3.2. Grafo representando as ligações entre cidades da Figura 3.1.



Fonte: Autora.

Com isso, a professora introduziu o conceito de grafo para a turma: *Grafo (G) é um conjunto de pontos chamados vértices (V), juntamente com um conjunto de arestas (A) ligando pares de vértices*.

Por meio desse conceito a professora juntamente com os alunos, descreveu todos os trajetos possíveis de A a H passando por outras duas cidades (questão c): A→B→I→H, A→E→G→H, A→C→I→H, A→E→I→H, A→K→I→H, cinco, no total. Também fizeram o mesmo para descrever três trajetos possíveis de A a H passando por outras três cidades (questão d): A→B→E→I→H, A→B→E→G→H, A→K→J→I→H.

A professora chamou a atenção dos alunos para o fato de que entre A e H não há acesso direto, como há entre A e B, por exemplo, mas que mesmo assim, A pode ter acesso a H em diferentes **estágios.** Na questão "b" determinou-se todas as formas de A ter acesso a H em dois estágios, ou seja, com duas ligações, na questão "c" determinou-se todas as formas de A ter acesso a H em três estágios, ou seja, com três ligações e, por fim, na questão "d" determinou-se três formas de A ter acesso a H em quatro estágios, ou seja, passando por quatro ligações.

A partir daí, a professora propôs algumas outras questões com o propósito de introduzir alguns resultados dos grafos. Perguntou se seria possível determinar o número de arestas do grafo. Muitos alunos se mostraram desanimados com a questão proposta, outros começaram a tentar resolver utilizando algumas estratégias. Um aluno rapidamente disse que havia contado 21 arestas. A seguir, transcrevemos o diálogo entre a professora e os alunos G da equipe 3 e N da equipe 5.

Aluno N: *Professora, eu contei 21.*
Professora: *Como você chegou a esse número?*
Aluno N: *Ah, eu fui contando quantos "risquinhos"* (arestas) *saem de cada ponto* (vértice).
Outro aluno comenta.
Aluno G: *Mas aí você tá contando cada um* (aresta) *duas vezes.*
Professora: *Mas se está contando cada aresta duas vezes o que a gente faz para saber o valor correto?*
Aluno G: *Divide por 2.*
Professora: *O que vocês falaram é a definição em um grafo do grau de um vértice e de como a gente determina o número de arestas de um grafo.*

A partir dos comentários dos alunos a professora definiu grau do vértice (*número de arestas que partem de cada vértice, designando-os por d(V))* e como determinar o número de arestas de um grafo (*somatório dos graus dos vértices dividido por 2*). No grafo construído teríamos: d(A)=5, d(B)=5, d(C)=5, d(D)=2, d(E)=8, d(F)=2, d(G)=3, d(H)=2, d(I)=7, d(J)=2, d(k)=5. O número de arestas seria, portanto, n(A) = (5+5+5+2+8+2+3+2+7+2+5):2 = 46:2 = 23.

Definido grafo, grau do vértice e como determinar o número de arestas de um vértice discutiu-se se não haveria outra maneira de representar as informações do grafo (ligações entre os vértices).

A professora perguntou se os alunos recordavam do conceito de matriz. Diante do silêncio dos alunos, a professora fez uma matriz no quadro e disse que matriz é uma tabela composta por linhas e colunas utilizada para a organização de informações. Alguns alunos disseram que haviam visto o conteúdo no ano anterior, mas que se lembravam vagamente do mesmo.

A professora escreveu no quadro a definição formal de matriz e disse que usariam uma matriz para representar as ligações entre os vértices do grafo, chamada **matriz de adjacência**, que é uma matriz onde o número de linhas e colunas é igual ao número de vértices do grafo e cada elemento é: 1, se os vértices são adjacentes, ou seja, se existe uma aresta ligando-os e 0, se os vértices não são adjacentes. A matriz de adjacência do grafo da Figura 3.2. é, portanto:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H & I & J & K \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \\ J \\ K \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccccccccc}
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

A professora retomou alguns conceitos de matrizes a partir da observação das características da matriz de adjacência: é uma matriz quadrada e simétrica com diagonal principal igual a zero. Além disso, podemos obter o número de arestas do grafo, contando quantos números 1 temos na diagonal superior ou inferior.

Também comentou que a vantagem da representação do grafo através da matriz de adjacência é que é ela torna possível a análise e manipulação através de alguns resultados de matrizes. O principal deles é a determinação do número de formas de acesso de um vértice a outro em diferentes estágios, justamente um dos itens das questões “b”, “c” e “d” do problema das rotas de ônibus.

Para a obtenção desse resultado, que utiliza a multiplicação da matriz de adjacência por ela mesma, a professora retomou o algoritmo de multiplicação de matrizes com um exemplo mais simples (matriz 3x3), lembrando também que quando multiplicamos um fator por ele mesmo (no caso a matriz) podemos utilizar a notação de potenciação para representar a multiplicação.

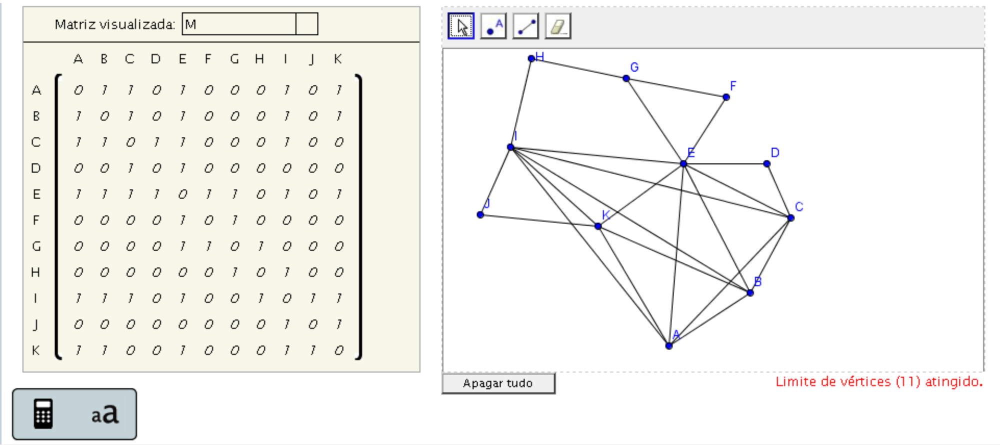
Em seguida, a professora comentou com os alunos que seria muito trabalhoso e demorado efetuar a multiplicação da matriz de adjacência do grafo por ela mesma, já que possui 11 linhas e 11 colunas e que, por isso, os cálculos seriam realizados com um aplicativo desenvolvido pelo Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) da Unicamp.

Aliás, essa é uma das vantagens da representação do grafo na matriz de adjacência: poder utilizar programas de computador que facilitam a análise e o cálculo.

No aplicativo, que é de acesso livre e gratuito, e pode ser acessado através do endereço eletrônico m3.ime.unicamp.br/app/webroot/media/software/1229/introducao.html é possível construir um grafo e obter, automaticamente sua matriz de adjacência, chamada matriz M. O aplicativo também calcula M^2, M^3 e M^4 e a soma dessas matrizes.

A professora levou os alunos ao laboratório de informática do colégio e mostrou como utilizar o aplicativo para construir o grafo.

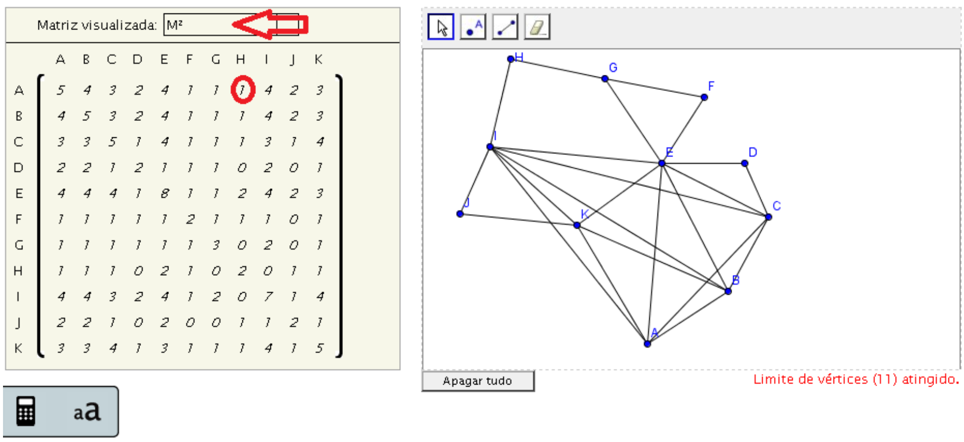
Figura 3.3. Grafo representando mapa da Figura 3.1. e matriz de adjacência gerados no aplicativo Grafos e Matrizes da Unicamp



Fonte: ime.unicamp.br/app/webroot/media/software/1229/introducao.html. Último acesso em 15/08/2013.

Mudando a matriz visualizada para M^2 obtemos a seguinte matriz, associada ao mesmo grafo:

Figura 3.4. Grafo representando mapa da Figura 3.1e matriz de adjacência elevada ao quadrado gerados no aplicativo Grafos e Matrizes da Unicamp.

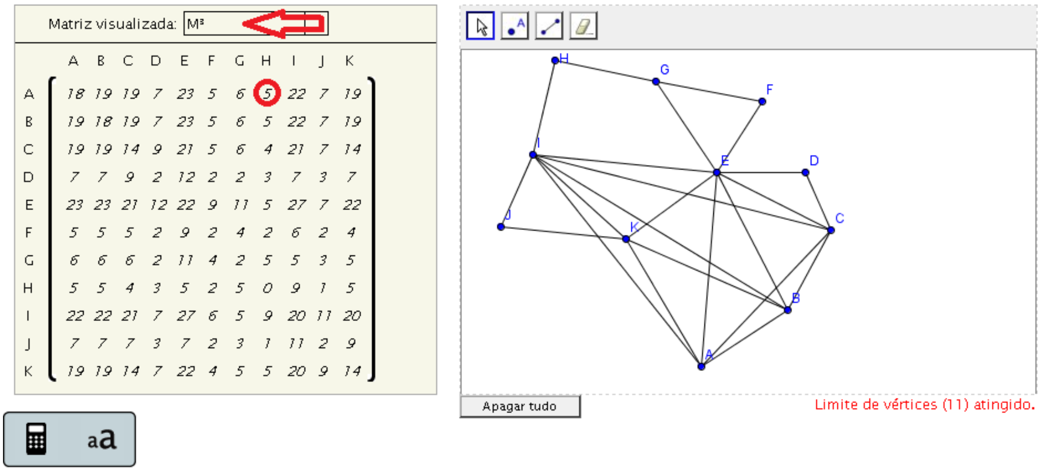


Fonte: ime.unicamp.br/app/webroot/media/software/1229/introducao.html. Último acesso em 15/08/2013.

A professora pediu que os alunos observassem que o elemento m_{AH} da Matriz M² (em destaque na Figura 3.4.) coincide com a número de formas de se deslocar de A até H passando por 2 estágios (questão “b” do problema dos trajetos de ônibus), ou seja 1 maneira.

Fez o mesmo para a Matriz M³ (Figura 3.5.), observando que o elemento m_{AH} coincide com o número de formas de se deslocar de A até H em três estágios (questão “c” do problema do trajeto de ônibus), ou seja, cinco maneiras.

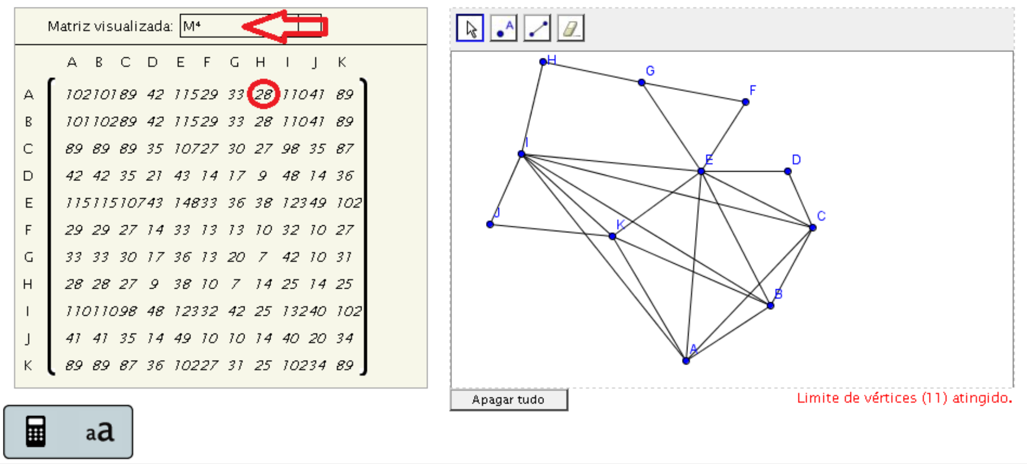
Figura 3.5. Grafo representando mapa da Figura 3.1e matriz de adjacência elevada ao cubo gerados no aplicativo Grafos e Matrizes da Unicamp.



Fonte: ime.unicamp.br/app/webroot/media/software/1229/introducao.html. Último acesso em 15/08/2013.

E por fim, na matriz M^4 (Figura 3.6.) observou-se que o elemento m_{AH} era 28, o que parecia não coincidir com o número de formas de se deslocar de A a H em quatro estágios (questão “d” do problema do trajeto de ônibus).

Figura 3.6. Grafo representando mapa da Figura 3.1. e matriz de adjacência elevada à quarta potência gerados no aplicativo Grafos e Matrizes da Unicamp.



Fonte: ime.unicamp.br/app/webroot/media/software/1229/introducao.html. Último acesso em 15/08/2013.

No entanto, a professora argumentou que muitos trajetos nessa questão não foram descritos, justamente pela elevada quantidade de formas de fazê-lo. Mostrou por exemplo, que A→B→C→I→H, A→I→E→G→H, A→K→J→I→H, A→C→E→G→H seriam alguns dos trajetos possíveis em quatro estágios.

A partir da observação e discussão desses resultados enunciou-se o seguinte resultado: *Seja M a matriz de adjacência do grafo G e seja* M^r *a r-ésima potência de M. Então o (i,j)-ésimo elemento de* M^r *é o número de maneiras segundo as quais I pode acessar J em r estágios.*

Esse resultado não foi demonstrado em sala de aula, pois os alunos não estavam acostumados com demonstrações. Na verdade, não estavam habituados nem mesmo com uma representação mais formal dos conceitos.

3.2.3. Descrição da Aula 3

Nesta aula iniciou-se uma segunda atividade de modelagem (Atividade 2) que tratava do tema relacionado às redes sociais, mais especificamente ao *facebook*. Ao contrário do primeiro problema, que tinha por objetivo introduzir o conceito de grafo, neste esperava-se que os alunos utilizassem grafos e matrizes como ferramenta na resolução das questões, também utilizando a alternativa da combinação para inclusão de atividades de Modelagem.

Como os alunos já haviam tido um primeiro contato com uma atividade de Modelagem, a atividade desta aula situou-se no caso 2 de Barbosa (2003) para atividades de Modelagem aonde cabe ao professor a elaboração da situação-problema, e ao aluno cabe a simplificação, a obtenção dos dados qualitativos e quantitativos e a resolução, que sempre é acompanhada pelo professor.

A escolha do tema redes sociais pela professora, deveu-se ao fato de relacionar-se ao primeiro tema, já que grande parte da mobilização para os protestos de rua desencadeados pelo descontentamento com o transporte coletivo e outros problemas sociais ocorreu via redes sociais e que o assunto é de amplo interesse dos jovens. Mais do que isso, as redes sociais fazem parte da vida deles.

O *facebook* foi escolhido como tema para a atividade, primeiramente porque é a rede social mais popular e também porque oferece ferramentas para o estudo de grafos e matrizes que foram introduzidos na Aula 2.

A aula iniciou com uma conversa entre professora e alunos sobre as redes sociais: quais eram as mais acessadas pelos alunos (apenas uma aluna não possuía *facebook*, a rede social mais utilizada), para que as usavam, o tempo médio diário de utilização, etc.

A professora chamou a atenção para o fato de que além da utilização das redes sociais para a troca de mensagens, divulgação de fatos da vida pessoal, de fotos entre amigos, muitos a utilizam como poderosa ferramenta de divulgação de ideias, mobilização de pessoas, de protestos, de campanhas para ajudar pessoas com alguma necessidade, etc. Lembrou que os protestos contra o aumento das passagens de ônibus em São Paulo, que desencadearam uma onda de passeatas pelo Brasil contra a corrupção, pela melhoria no sistema público de saúde e educação foi em grande parte organizada através das redes sociais.

A professora questionou os alunos então, se eles faziam ideia de como as notícias correm tão rapidamente nas redes sociais, mais especificamente no *facebook*. Uma aluna disse que é só "compartilhar". A professora lembrou que essa ferramenta permite que o conteúdo que esteja na página do *facebook* de uma pessoa seja publicada também na página de um amigo dessa pessoa na rede. Como é comum que uma pessoa tenha centenas de "amigos" no *facebook*, se alguns desses "amigos" compartilhar uma mensagem, por exemplo, um convocação para uma manifestação de rua, logo a mensagem chegará a um grande número de pessoas.

Além disso, essa ferramenta permite que mesmo que uma pessoa não seja "amigo" de outra no *facebook*, uma pode ter acesso ao conteúdo publicado pela outra, desde que ambas tenham pelo menos um amigo em comum que compartilhe o conteúdo (retomando a ideia do acesso em estágios, presente no primeiro problema).

Assim, a professora propôs o seguinte problema aos alunos: *Em um grupo de 6 pessoas, escolhidas de acordo com os critérios definidos pelo grupo, de quantas formas uma notícia divulgada na página do facebook de uma dessas pessoas pode chegar a cada uma das outras pessoas, considerando que todos os que tiverem acesso à mensagem irão compartilhá-la?*

Para realizar esta atividade os alunos dividiram-se desta vez em 5 grupos, organizados da seguinte forma:

Quadro 3.4: Distribuição dos alunos para realização da Atividade 2.

Equipe	**Nº de Alunos/Identificação**
1	3 alunos: D, E, F, B
2	3 alunos: G, H, I, C

3	3 alunos: J, K, L
4	5 alunos: M, N, O, P, Q
5	3 alunos: R, S, T, A

Fonte: Autora.

As equipes foram orientadas a escolher seis pessoas para que pudessem pesquisar a rede de amigos no *facebook*. Os grupos, de maneira geral, escolheram pessoas do próprio colégio: professores, funcionários, diretores, colegas. Em seguida, dirigiram-se ao laboratório de informática do colégio, que havia liberado o acesso ao *facebook* naquele dia a pedido da professora (o acesso é bloqueado), com o objetivo de coletar os dados para formar a rede de amigos no *facebook* dentre as seis pessoas escolhidas.

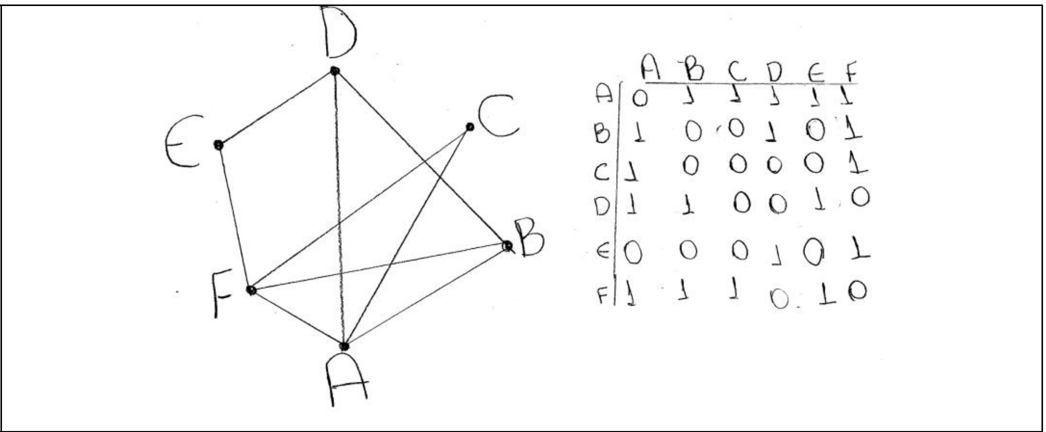
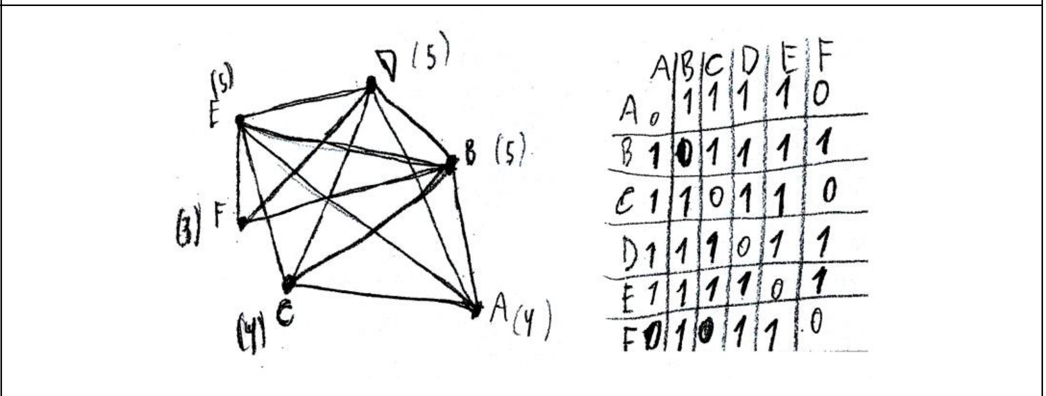
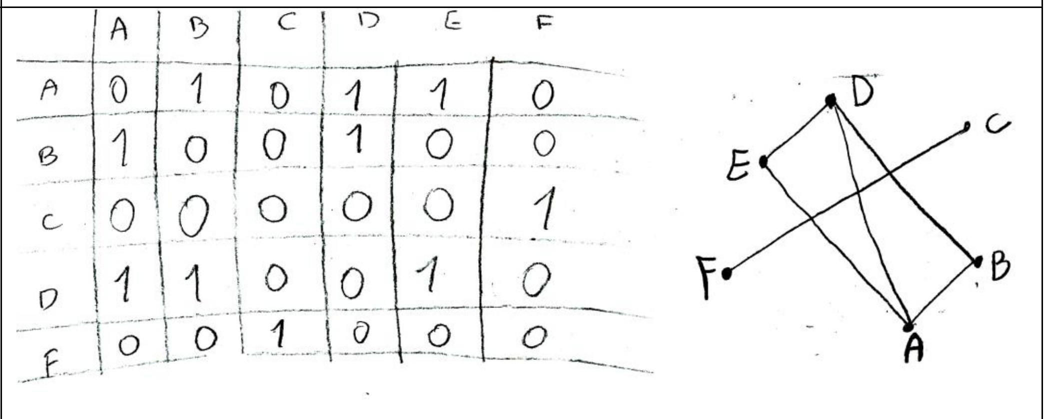
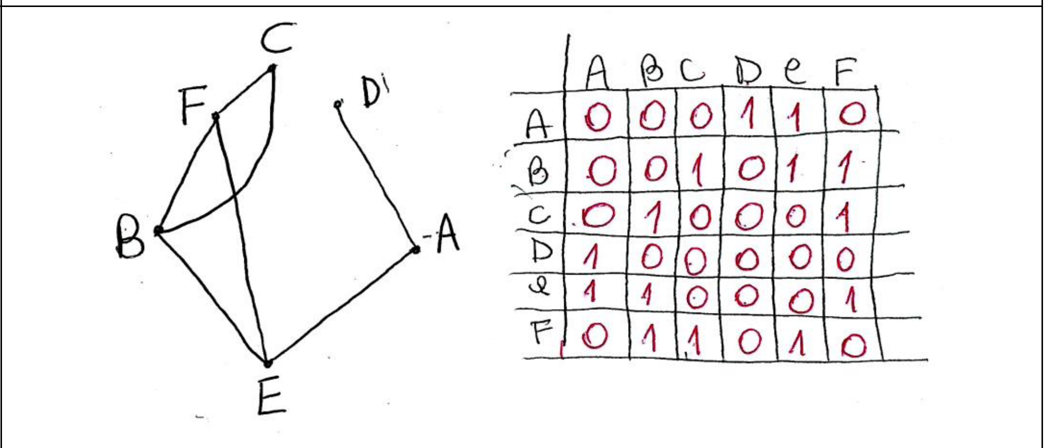
Com o auxílio da professora, os alunos procederam da seguinte forma para a coleta dos dados: acessavam a página de uma das pessoas e pesquisavam os amigos dela à procura dos outros cinco que o grupo havia escolhido; quando eram amigos, ligavam os nomes, formando um grafo. Os alunos não tiveram dificuldades para coletar os dados e formar o modelo matemático através do grafo.

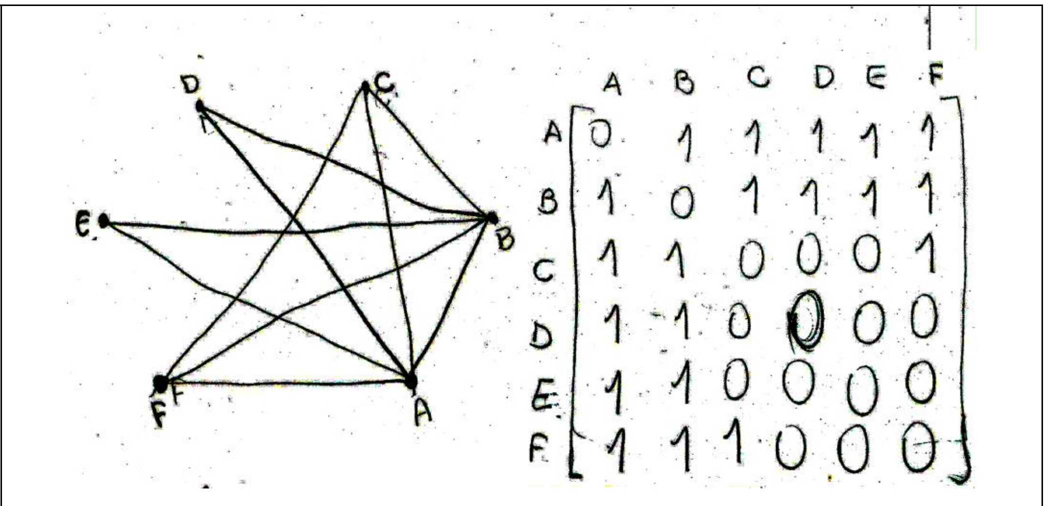
Em seguida, a professora lembrou os alunos que eles deveriam determinar de quantas formas uma mensagem divulgada na página do *facebook* de uma das pessoas escolhida poderia ser acessada pelas outras, considerando que o acesso pode ocorrer em diferentes estágios e para isso poderiam usar os resultados relativos à matriz de adjacência do grafo construído. Deste modo, cada equipe escreveu na folha de resolução a matriz de adjacência do grafo que havia construído, também sem dificuldades.

Para os alunos, cada vértice designado por uma letra, representa uma das seis pessoas pesquisadas. Na folha de resolução consta o nome dessas pessoas e a letra que a representa. No entanto, para preservar a identidade dessas pessoas, ocultamos os nomes.

No quadro a seguir encontram-se os modelos elaborados pelos alunos, representando a rede de amizade no *facebook* entre as seis pessoas escolhidas por eles.

Quadro 3.5. Modelo Matemático elaborado pelos alunos para resolução da Atividade 2

Equipe 1	
Equipe 2	
Equipe 3	
Equipe 4	

Equipe 5	

Fonte: Autora.

3.2.4. Descrição da Aula 4

A Aula 4 transcorreu como continuação da aula anterior, em que os alunos geraram o modelo matemático através de grafo e matriz. Porém, eles deveriam analisar o modelo e apresentar uma solução para a atividade proposta: *Em um grupo de 6 pessoas, escolhidas de acordo com os critérios definidos pelo grupo, de quantas formas uma notícia divulgada na página do facebook de uma dessas pessoas pode chegar a cada uma das outras pessoas, considerando que todos os que tiverem acesso à mensagem irão compartilhá-la?*

A professora lembrou os alunos que eles poderiam tentar responder a questão a partir do próprio grafo, mas que poderiam utilizar um dos resultados já vistos anteriormente, relativo às potências da matriz de adjacência e que para facilitar os cálculos poderiam utilizar no laboratório de informática do colégio o aplicativo da Unicamp apresentado pela professora na aula 2. Todos os alunos se dirigiram à sala de informática.

No laboratório, a professora orientou os alunos sobre como acessar e utilizar o aplicativo: deve-se gerar o grafo, com um limite de onze vértices, no lado direito da tela, com as ferramentas ponto (para fazer os vértices) e segmento de reta (para fazer as arestas) e automaticamente, do lado esquerdo da tela, visualiza-se a matriz de adjacência M. Depois, basta mudar em *matriz visualizada*, a matriz M para M^2, M^3 ou M^4.

Os alunos geraram no aplicativo os grafos que haviam feito na aula anterior para representar a rede de amizade entre as pessoas escolhidas por eles e visualizaram as matrizes M^2 e M^3. Depois fizeram a interpretação das entradas das matrizes.

Ficou decidido, por causa do tempo de aula, que cada equipe deveria escolher apenas duas pessoas (vértices nos grafos) para determinar de quantas formas é possível que uma tenha acesso às publicações da outra no *facebook* em diferentes estágios. A seguir, apresentamos os grafos e as matrizes geradas no aplicativo pelos alunos e transcrevemos suas soluções:

Quadro 3.6. Resolução dos alunos para a Atividade 2.

Equipe	**Matrizes M, M², M³, respectivamente, geradas no aplicativo**	**Solução dos alunos**
1	$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A\\B\\C\\D\\E\\F \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$ $\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A\\B\\C\\D\\E\\F \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$ $\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A\\B\\C\\D\\E\\F \end{matrix} & \begin{bmatrix} 6 & 7 & 6 & 8 & 3 & 9 \\ 7 & 4 & 3 & 7 & 2 & 9 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 7 & 4 & 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 6 & 0 & 7 \\ 9 & 9 & 6 & 3 & 7 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$	Entre A e E não existe acesso em 1 estágio. Entre A e E existem 2 formas de acesso em 2 estágios. Entre A e E existem 3 formas de acesso em 3 estágios.
2	$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A\\B\\C\\D\\E\\F \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$ $\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A\\B\\C\\D\\E\\F \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$ $\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A\\B\\C\\D\\E\\F \end{matrix} & \begin{bmatrix} 12 & 16 & 13 & 16 & 16 & 9 \\ 16 & 16 & 16 & 17 & 17 & 13 \\ 13 & 16 & 12 & 16 & 16 & 9 \\ 16 & 17 & 16 & 16 & 17 & 13 \\ 16 & 17 & 16 & 17 & 16 & 13 \\ 9 & 13 & 9 & 13 & 13 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$	Observamos através da matriz M que o D e o E só tem uma maneira de acesso em 1 estágio. Observamos através da matriz M² que o D e o E tem acesso em dois estágios de quatro formas. Observamos através da matriz M³ que o D e o E tem acesso em três estágios de 17 formas.
3	$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A\\B\\C\\D\\E\\F \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$ $\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A\\B\\C\\D\\E\\F \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$ $\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A\\B\\C\\D\\E\\F \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 & 5 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$	Entre A e B: 1 estágio – 1 forma de acesso 2 estágios – 1 forma de acesso 3 estágios – 1 forma de acesso (*os alunos não validaram o resultado da matriz "5 formas de acesso"*)

4	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$ $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$ $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 5 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$	F ao E: 1 forma do F ao E – 1 estágio 1 forma do F ao E – 2 estágios 6 formas do F ao E – 3 estágios
5	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$ $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$ $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{bmatrix} 10 & 11 & 11 & 9 & 9 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 9 & 9 & 11 \\ 11 & 11 & 6 & 4 & 4 & 7 \\ 9 & 9 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 9 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 11 & 11 & 7 & 4 & 4 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$	M: Observamos que na matriz M que a possibilidade de ter acesso entre D e F é zero. M^2: A possibilidade de ter acesso entre D e F é de 2 maneiras de se ligarem. M^3: A possibilidade de ter acesso entre D e F é de 4 maneiras de se ligarem.

Fonte: Autora.

Cada equipe preparou uma apresentação por meio de cartazes contendo o grafo, a matriz de adjacência e as soluções. Durante a apresentação a equipe 3 chamou a atenção para o fato de que o resultado apresentado pela matriz M^3 na célula de entrada $m_{AB} = 5$ não era condizente com a observação do grafo, pois só haviam encontrado 1 percurso em 3 estágios entre A e B, A-E-D-B.

Isso suscitou alguns questionamentos sobre porque o resultado não era válido para aquele caso. A professora pediu para que os alunos observassem que no grafo da equipe 3 haviam dois vértices, F e C, que se ligavam apenas entre si e que este tipo de grafo é chamado desconexo. Supôs-se, então, que talvez o resultado não fosse válido para este tipo de grafo.

Outra suposição feita, e que a equipe 4 utilizou para validar seu resultado para o número de acessos em 3 estágios foi o de que eram permitidos percursos com “ida e volta” ou passagem pelo próprio vértice de chegada. Ou seja, seriam permitidos percursos do tipo F-E-A-E (ver grafo da equipe 4 no quadro 3.5.). Posteriormente, a professora pesquisou alguma justificativa para os problemas encontrados, porém não encontrou nenhuma resposta satisfatória.

3.2.5. Descrição da Aula 5

O objetivo da Aula 5 foi de promover uma avaliação sobre os conteúdos trabalhados nas atividades de Modelagem nas aulas anteriores, grafos e matrizes. A avaliação pretendia aferir como os alunos definiriam grafos, se conseguiriam determinar a matriz de adjacência, o grau do vértice e o número total de arestas de um grafo e como fariam isso, se saberiam representar um grafo a partir da matriz de adjacência e se saberiam interpretar o significado dos elementos das potências da matriz de adjacência de um grafo.

Apesar dos alunos já terem feito uso dos conhecimentos sobre grafos e matrizes durante as atividades de Modelagem, achamos importante promover uma atividade individual para que pudéssemos perceber o que cada um tinha compreendido do conteúdo.

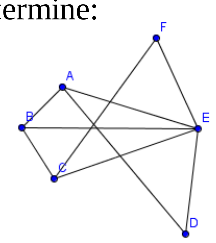
O resultado da avaliação foi satisfatória, já que apenas três alunos não conseguiram realizar integralmente os exercícios propostos. Atribuímos nota de 0 a 10 para a prova. Os alunos tiveram o seguinte desempenho: seis alunos obtiveram nota 10, três alunos obtiveram nota 9,5; um aluno obteve 9,0; três alunos obtiveram 8,5; três alunos obtiveram 8,0; um aluno obteve 6,5; dois alunos obtiveram 4,0 e um obteve 3,0.

A seguir, apresentamos as resoluções de alguns alunos:

Quadro 3.7. Resolução dos alunos N e B para Avaliação.

Questão	Resolução
1) O que é um grafo?	Grafo é um modo de representação de cidades, meios de comunic e etc. 1- É um conjunto de linhos e colunas, p que possa apresentar em grafico um territó

<table>
<tr>
<td>
2) Considere o grafo ao lado e determine:



a) A matriz de adjacência do grafo.

b) O grau de cada vértice (denote o grau do vértice A por d(A),

o grau do vértice B por d(B) e assim por diante).

c) O número total de arestas do grafo.
</td>
<td>
a)

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	1	1	0
B	1	0	1	0	1	0
C	0	1	0	0	1	1
D	1	0	0	0	1	0
E	1	1	1	1	0	1
F	0	0	1	0	1	0

b)
A ε(G) = 3
B ε(G) = 3
C ε(G) = 3
D ε(G) = 2
E ε(G) = 5
F ε(G) = 2

c) = 9 arestas.

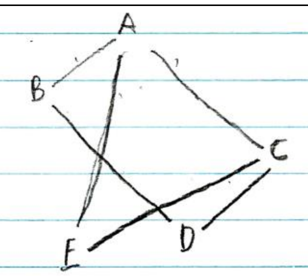
$\varepsilon = 6 = \frac{18}{2} = 9$

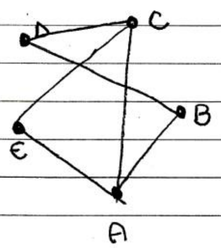
2-

a) A, B, C, d, e, f.

b) d(A) = 3, d(B) = 3, d(C) = 3, d(D) = 2, d(E) = 5, d(F) = 2

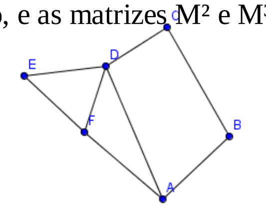
c) $3+3+3+2+5+2 = \frac{18}{2} = 9$
</td>
</tr>
<tr>
<td>
3) Desenhe uma representação do grafo cuja matriz de adjacência é:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$
</td>
<td>




</td>
</tr>
</table>

4) Considere que o grafo a seguir representa seis cidades e as ligações rodoviárias entre as mesmas. A seguir temos a matriz de adjacência M do grafo, e as matrizes M² e M³:



Matriz visualizada: M

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriz visualizada: M²

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriz visualizada: M³

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 8 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 6 & 4 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

a) Como podemos interpretar, na matriz M², o número obtido na linha F e coluna D?

b) Descreva as duas maneiras de A ter acesso a C em dois estágios.

c) Como podemos interpretar na matriz M³ o número obtido na linha D e coluna E?

d) Descreva as três maneiras de B ter acesso a E em três estágios.

4) É a forma de acesso de uma cidade a outra em dois estágios.

b) A-B-C
A-D-C

c) são 6 formas de acesso em 3 estágios.

d) B-C-D-E
B-A-D-E
B-A-F-E

4) a) 2 maneiras, percorrendo 2 estágios

b) A e D, A e B.

c) 6 maneiras, percorrendo 3 estágios

d) B,C e D. B,A e D. B,A e F.

Fonte: Autora.

Os alunos souberam utilizar os conceitos aprendidos nas atividades de Modelagem de maneira satisfatória, já que souberam associar um grafo com sua representação matricial. No entanto, tiveram dificuldades para conceituar grafo como um conjunto de vértices ligados por arestas. Na maioria das vezes, apresentaram aplicações dos grafos ao invés de sua definição.

3.3. Análise das Aulas

Nesta seção faremos a análise das aulas, ou seja, com um olhar crítico e minucioso procuraremos aspectos que possam nos auxiliar a responder nossa questão norteadora: como a Teoria dos Grafos, em atividades de Modelagem Matemática, pode ser desenvolvida no Ensino Médio?

Além disso, discutiremos outros aspectos que nos chamaram a atenção durante a realização das atividades de Modelagem e que consideramos pertinente abordar em um trabalho de Modelagem, além de como os alunos se portaram durante as aulas (não nos referimos aqui a aspectos comportamentais, mas àqueles relativos a participação nas atividades).

Primeiramente, faremos a análise das Aulas 1 e 2, que abarcam a resolução da Atividade 1 e conceitos de grafos e matrizes, depois das Aulas 3 e 4 que constituem a realização da Atividade 2 e, por fim da Aula 5 aonde os alunos resolveram a atividade 3. As Aulas 1 e 2 serão feitas de maneira conjunta pois, na verdade, constituem uma única atividade realizada durante dois encontros. Pelo mesmo motivo, faremos a análise das Aulas 3 e 4 de maneira conjunta.

3.3.1. Análise das Aulas 1 e 2

A Atividade 1, sobre as rotas de ônibus oferecidas na região de moradia dos alunos, permitiu que lançássemos mão de questões que trouxeram o conceito de grafos para a sala de aula de forma natural, mesmo sem este conceito fazer parte do currículo do Ensino Médio. Apesar das questões poderem ser resolvidas sem o modelo de grafo, em um determinado ponto, só pudemos responder a questão "quantos e quais são os trajetos entre Maringá e Colorado que passe por exatamente duas outras cidades" com o auxílio do grafo. Da mesma forma, a questão "determine pelo menos três trajetos entre Maringá e Colorado que passe por exatamente três outras cidades" ficou muito mais simples com a observação do grafo.

Além de permitir a elaboração de uma situação simples que culminou em um modelo matemático através de um grafo, a utilização do mapa da Figura 3.1. das rotas de ônibus oferecidas por uma empresa na região de moradia dos jovens, também favoreceu que o grafo parecesse um conceito simples e, até natural para os alunos, já que as cidades continuaram a ser representadas por pontos e as rodovias passaram a ser identificados como arestas, mas agora, sem a preocupação de representar os percursos ou distâncias reais.

Também foi possível inserir grafos no Ensino Médio sem sair do programa de Matemática deste nível de Ensino, que já é bem extenso e complexo. O fato de um grafo poder ser representado por uma matriz permite que o utilizemos dentro do conteúdo Matrizes e Determinantes.

Apesar de não termos precisado apresentar o conteúdo Matrizes, já que as Atividades ocorreram em uma turma de 3ª Ano, pode-se usar essa mesma atividade para apresentar a alunos de 2ª Ano do Ensino Médio o conceito de matriz, matriz quadrada e multiplicação de matrizes, tal como fizemos no decorrer da atividade. Pode-se inclusive trabalhar com outros tipos de matrizes, geradas por grafos valorados ou dígrafos. Tudo isso pode dar maior significado ao conteúdo Matrizes, que geralmente é trabalhado extensivamente com tratamento algébrico, ou com exercícios algorítmicos.

Além dos aspectos que nos levam a considerar que a Atividade 1 permitiu inserir o conceito de grafo no Ensino Médio, também chamou-nos a atenção o fato dos alunos, em sua grande maioria, estarem bastante envolvidos com a realização da Atividade 1 e posteriormente mostrarem-se interessados pela parte conceitual de grafos e matrizes, no transcorrer da Aula 2.

Isso vem ao encontro com o que Blum, (1995, apud BARBOSA, 2003, p. 66) aponta como uma das razões para inclusão de Modelagem no currículo: “os alunos sentir-se-iam estimulados para o estudo de matemática, já que vislumbrariam a aplicabilidade do que estudam na escola”.

Outro ponto importante foram as discussões que ocorreram para introduzir o tema “transporte coletivo” e para estabelecer os critérios para a resolução da questão “qual é o melhor trajeto entre Maringá e Colorado que a empresa pode oferecer aos seus clientes, justificando a escolha do trajeto”.

Para iniciarmos a Atividade os alunos expuseram suas opiniões e críticas em relação a um importante tema social: o transporte público. Esse tipo de discussão geralmente não está presente nas aulas de matemática, mas mesmo assim, os alunos sentiram-se bastante confortáveis em realizá-la, o que favorece o olhar crítico perante a realidade.

Outro aspecto que também não é muito discutido nas aulas de matemática é o estabelecimento de critérios para responder uma questão, ou seja, se for “assim” a resposta é esta, se for “assado” a resposta é aquela.

Quando se pergunta "qual é o melhor trajeto", a resposta depende do que cada indivíduo entende por "melhor". Pode ser o melhor para si, olhando individualmente a situação, o melhor para a empresa, olhando financeiramente a situação, ou melhor para a sociedade, olhando coletivamente para a situação. Esses questionamentos estão presentes nas falas dos alunos J e N, na Atividade 1: "*O melhor trajeto é aquele que vai ter mais paradas ou o que é o mais rápido?" "Tem que pensar nas pessoas, né professora. A empresa não pode pensar só nela, tem que pensar nas pessoas",* e nas resoluções do item "a" da Atividade 1 (ver Quadro 3.3.), quando os alunos justificam a escolha dos trajetos.

A Atividade 1 também oportunizou o uso de uma mídia tecnológica, mais especificamente um aplicativo disponível na rede mundial de computadores e que facilitou os cálculos de multiplicação de matrizes. É muito importante que os professores de matemática apresentem aos alunos instrumentos e recursos que facilitem o uso de conceitos matemáticos.

Provavelmente, os alunos sentir-se-iam desmotivados caso tivessem que efetuar todos os cálculos manualmente. Apesar de poder servir para introduzir a multiplicação de matrizes, na Atividade 1, os alunos precisavam saber interpretar os resultados relativos às potências da matriz de adjacência.

3.3.2. Análise das Aulas 3 e 4

O tema abordado durante as Aulas 3 e 4 por si já desperta grande interesse dos jovens. No entanto, os alunos foram convidados a entender como funciona uma parte dessa rede de relacionamento virtual denominada *facebook*, através da matemática, o que também nos remete a mais uma das razões apontadas por Blum, (1995, apud BARBOSA, 2003, p. 66) para a inclusão de atividades de Modelagem no currículo, que seria a "preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas: os alunos teriam a oportunidade de desenvolver a capacidade de aplicar matemática em diversas situações, o que é desejável para moverem-se no dia a dia e no mundo do trabalho".

A Atividade 2, realizada no decorrer das aulas 3 e 4, oportunizou a aplicação dos conceitos de grafo e matrizes. No entanto, também poderia ter sido utilizada para introduzi-los, como foi feito com a Atividade 1. Novamente, foi bastante natural aos alunos representar as relações de amizade no *facebook* através de um grafo. Aliás, o grafo pode remeter à ideia de "rede", utilizadas nas expressões "rede de computadores" ou "rede de amizade".

Novamente, o uso do aplicativo para obter as potências da matriz de adjacência foi essencial para a resolução da Atividade.

Outro ponto que chamou a atenção e que foi oportunizado pela Modelagem, foi a não validação da solução da equipe 3 para o acesso em 3 estágios (ver quadro 3.6.). O fato de não saber de antemão quais serão os modelos elaborados, expõe o professor ao “risco” do aluno não obter solução satisfatória ou mesmo não obter uma solução. No entanto, esse risco é positivo já que suscita questionamentos por parte dos alunos e pode desconstruir a ideia de que a matemática pode resolver qualquer situação.

Isso nos leva a refletir que as atividades de Modelagem têm um potencial de estabelecer discussões que podem desconstruir a chamada Ideologia da Certeza, já descrita no capítulo 2.

Também foi muito importante a busca pelos dados necessários para resolução do problema, já que normalmente, os problemas já trazem todas as informações necessárias à resolução, ficando a cargo dos alunos apenas a interpretação e utilização correta dos dados para a resolução. Este aspecto nos remete a mais uma das razões para a inclusão da Modelagem, o “desenvolvimento de habilidades gerais de exploração: os alunos desenvolveriam habilidades gerais de investigação” (BLUM, 1995, apud BARBOSA, 2003, p. 66).

3.3.3. Análise da Aula 5

Nesta aula não utilizamos a Modelagem Matemática. As atividades propostas foram mais tradicionais e ao contrário das aulas anteriores, foram individuais, tendo um aspecto de prova, apesar dos alunos poderem tirar dúvidas e/ou reafirmar conceitos com a professora.

Apesar de parecer contraditório realizar uma atividade com as características descritas acima depois de trabalhar com a Modelagem Matemática, os resultados obtidos com a atividade foram muito reveladores.

Os alunos, de maneira geral, resolveram as atividades de forma satisfatória. Isso nos faz pensar que talvez a Modelagem realmente facilite a aprendizagem, já que os alunos poderiam conectá-las a outros assuntos (BLUM, 1995, apud BARBOSA, 2003).

Quantas vezes, trabalhamos exaustivamente um conteúdo em sala de aula, pedindo que os alunos realizem dezenas de exercícios. Depois, pedimos que façam uma prova com exercícios similares aos que trabalhamos em sala e para decepção do professor, grande parte da turma apresenta resultados pífios.

Pode-se alegar que as questões propostas na Aula 5 não tinham grande grau de complexidade. No entanto, pode-se argumentar que os alunos nunca haviam tido contato com grafos e que a maioria não se lembrava do conceito de matrizes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando iniciamos nosso trabalho, criamos uma série de expectativas em relação às possibilidades de introdução da Teoria dos Grafos no Ensino Médio, todas pautadas em suposições, crenças, impressões, leituras prévias.

Ao nos debruçarmos sobre a parte teórica da pesquisa, em nosso caso, grafos e matrizes, mudamos muitas de nossas ideias e pretensões inicias em função do tipo de atividades a serem desenvolvidas e das limitações relativas ao conteúdo Matrizes e Grafos.

Este estudo preliminar, bem como as discussões no grupo de estudo foram imprescindíveis, já que foi a partir dela que conhecemos mais profundamente a Teoria dos Grafos e as potencialidades de sua utilização no Ensino Médio, seja isoladamente ou em conjunto com outros conteúdos do currículo.

Também tivemos a oportunidade de compreender mais profundamente a Modelagem no âmbito da Educação Matemática e todas as potencialidades de seu uso em sala de aula. Isso foi de especial importância para a elaboração das Atividades que foram implementadas em uma turma regular do 3º Ano do Ensino Médio.

No entanto, foi somente quando colocamos em prática nossa experiência de ensino, que nos demos conta de todas as potencialidades e limitações de nosso projeto, além de suscitar outras questões, novos pontos de vista e novos interesses de pesquisa.

As palavras do educador matemático brasileiro Ubiratan D'Ambrósio resumem bem essas impressões: "Toda teorização se dá em condições ideais e somente na prática serão notados e colocados em evidência certos pressupostos que não podem ser identificados apenas teoricamente. Isto é, partir para a prática é como um mergulho no desconhecido" (D'AMBRÓSIO, 1998, p. 79). E complementa: "a pesquisa é o elo entre a teoria e a prática" (D'AMBRÓSIO, 1998, p. 80).

Este estudo objetivou a obtenção de dados qualitativos para responder nosso problema de pesquisa: Como a Teoria dos Grafos, em atividades de Modelagem Matemática, pode ser desenvolvida no Ensino Médio?

Para tanto, foram desenvolvidas duas atividades de Modelagem Matemática para serem implementadas numa turma do 3º Ano do Ensino Médio, que tinham por tema transporte coletivo e redes sociais.

A análise do desenvolvimento das duas atividades nos permitiu fazer alguns apontamentos sobre “como” a Teoria dos Grafos pode ser desenvolvida no Ensino Médio e as contribuições da Modelagem Matemática para esse desenvolvimento.

Uma das justificativas mais apontadas para a inclusão da Teoria dos Grafos no Ensino Médio é sua aplicabilidade: os grafos estão presentes em diversas situações do cotidiano (ver Braicovich, 2013; Jurkiewicz e Muniz, 2007; Malta, 2008; Ferreira, 2009). Portanto, é natural pensarmos em problemas reais, em que os grafos estão presentes, para incluí-los no Ensino Regular.

Neste aspecto, A Modelagem Matemática propiciou a inclusão e discussão de temas e problemas da realidade e que fazem parte da vida dos alunos (transporte coletivo, redes sociais) em que os grafos estão presentes. Apesar de outras metodologias de ensino propiciarem atividades em que os grafos são acionados para a sua resolução, elas não exigem que os problemas sejam reais.

Outro aspecto relativo à Modelagem que julgamos ser importante para a introdução do conceito de grafos foi a adoção da concepção de Modelagem de Barbosa (2003) como ambiente de aprendizagem, que favoreceu introdução do conceito de grafo no decorrer de aulas regulares.

Além disso, o desenvolvimento das Atividades de acordo com os casos 1 e 2 de Barbosa (2003) permitiu que os alunos e a professora/pesquisadora pudessem se habituar com atividades de Modelagem, uma novidade para ambos.

A Modelagem também suscitou o uso das Mídias Tecnológicas que de acordo com Borba e Penteado (2001) são pedagogias que se harmonizam. O uso do recurso tecnológico (aplicativo que apresentava as potências das matrizes de adjacência do grafo) agilizou e facilitou a resolução dos alunos, que tiveram apenas que analisar os resultados.

Malta (2008) relata em uma atividade aplicada a alunos do Ensino Médio, em que fez uso do mesmo resultado (Teorema 1.2.) que utilizamos na Atividade 2, “que a questão operatória (multiplicação de matrizes) pode se tornar muito extensa quando um grafo tiver muitos vértices e que talvez naquele momento pudéssemos ter feito relação com algum software que facilitasse os cálculos” (MALTA, 2008, p. 80).

Nossa experiência de ensino também mostrou que a Teoria dos Grafos pode ser introduzida aos alunos dentro do currículo vigente, sem a necessidade da inclusão dos grafos como um novo conteúdo de estudo previsto no programa do Ensino Médio. Além do conteúdo Matrizes e Determinantes, pode-se incluir grafos em atividades relacionadas ao conteúdo Análise Combinatória.

Além dos aspectos diretamente relacionados à inclusão da Teoria dos Grafos no Ensino Médio, as atividades de Modelagem deram a oportunidade de discussão durante as aulas de matemática de temas contemporâneos e que fazem parte da realidade do aluno, algo incomum em aulas tradicionais de matemática.

Estas discussões são de extrema importância, já que despertam o senso crítico, a capacidade de argumentação e fazem o aluno perceber que a matemática faz parte do mundo real, que não é uma ciência à parte. Enfim, ajudam a educar para a cidadania.

A Modelagem também permitiu a ocorrência de algo incomum em atividades de matemática: a não obtenção de resposta satisfatória via conceito matemático. A não validação da resposta oferecida pelo Teorema 1.2 para a Atividade 2 (ver resolução da equipe 3 no Quadro 3.6) fez com que os alunos percebessem que nem sempre um problema pode ser resolvido com o ferramental matemático disponível.

Isso nos faz refletir sobre o potencial da Modelagem para discutir e até mesmo judar a desconstruir a Ideologia da Certeza na Educação Matemática, já descrita no capítulo 2. Como Borba e Skovsmose (2001, p. 143) argumentam: “A matemática não pode ser vista como onipresente (contexto neutro), onisciente (a verdade final) e onipotente (ela funciona em todo lugar)”.

Também nos chamou a atenção o interesse e comprometimento dos alunos durante a realização das atividades. Mesmo sem “valer nota” as atividades de Modelagem foram realizadas com muito empenho.

Este interesse pode ser ilustrado com a fala de um aluno ao término da experiência de ensino. Ele perguntou para a professora/pesquisadora se com grafos ele poderia conseguir um emprego. Isto revela que quando os alunos percebem que a matemática é importante para sua vida, o interesse é despertado.

Assim, acreditamos que a relevância de nosso trabalho se deve ao fato de apresentar uma proposta que vai de encontro com o que D’Ambrósio (1998, p. 52) propõe: “O grande desafio é desenvolver um programa dinâmico, apresentando a ciência de hoje relacionada a problemas de hoje e ao interesse dos alunos”.

REFERÊNCIAS

Almeida, L. M. W; Vertuan, R. E. **Discussões sobre "como fazer" Modelagem Matemática na sala de aula.** In: Almeida, L. M. W. et al. **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática.** Londrina: Eduel. 2011.

Araújo, J. de L. **Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática: As Discussões dos Alunos.** Tese (Doutorado em Educação Matemática). Rio Claro. 2002.

Barbosa, J. C. **Modelagem Matemática: Concepções e Experiências de Futuros Professores.** Tese (Doutorado em Educação Matemática). Rio Claro. 2001a.

Barbosa, J. C. **Modelagem na Educação Matemática: Contribuições para o Debate Teórico.** In: Reunião Anual da Anped, 24, Caxambu, Anais... Rio de Janeiro. 2001b.

Barbosa, J. C. **Modelagem Matemática na Sala de Aula.** Perspectiva. Vol. 27, n. 98, p. 65-74, junho. 2003.

Barbosa, J. C. **Sobre a Pesquisa em Modelagem Matemática.** In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 5, Ouro Preto. 2007.

Barbosa, J. C.; Santos, M. A. **Modelagem Matemática, perspectivas e discussões.** In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 9, Belo Horizonte. Anais... Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática. 2007.

Bassanezi, R. C. **Ensino Aprendizagem com Modelagem Matemática: Uma Nova Estratégia.** 3. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

Boaventura, P. O.; Jurkiewicz, S. **Grafos: Introdução e Prática.** São Paulo: Blucher. 2009.

Borba, M. C.; Penteado, M. G. **Informática e Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica. 2001. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Borba, M. C.; Skovsmose, O. **Ideologia da Certeza em Educação Matemática**. In: Skovsmose, O. **Educação Matemática Crítica: A Questão da Democracia.** Campinas: Papirus. 2001. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

Braicovich, T. **Algunos Conceptos de Grafos em la Enseñanza.** In: VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática. Canoas. 2013.

Brasil. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio.** Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação. Brasília. 2000.

Brasil. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** 3. ed. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação. Brasília. 2001a.

Brasil. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** 3. ed. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação. Brasília. 2001b.

Bria, J. **Conheça Grafos: Interdisciplinaridade e Contextualização.** In: Encontro Nacional de Educação Matemática. 8. Recife. 2004.

Bueno, V. C. **Concepções de Modelagem Matemática e Subsídios para a Educação Matemática: Quatro Maneiras de Compreendê-la no Cenário Brasileiro.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto. 2011.

D'Ambrósio, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática.** 4. ed. Campinas: Papirus. 1998.

Ferreira, G. P. **A Viabilidade do Ensino de Matemática Discreta no Ensino Médio Usando Modelagem.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências na Educação Básica). Universidade do Grande Rio "Prof. José de Souza Herdy". 2009.

Fiorentini, D.; Lorenzato, S. **Investigação em Educação Matemática: Percursos Teórico e Metodológicos.** Campinas: Autores Associados. 2006. (Coleção Formação de Professores).

Jurkiewicz, S. **Grafos - uma Introdução**. Rio de Janeiro: OBMEP. 2009.

Jurkiewicz, S.; Muniz, Ivail Jr. **Qual é o menor caminho? Conceitos, Aplicações e Experiências no Ensino Médio com Teoria dos Grafos e Algoritmos.** In: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 39, Fortaleza. 2009. Anais... p. 422-432

Kaiser, G.; Sriraman, B. **A global survey of internacional perspectives on modelling in mathematics education.** ZDM. vol. 38, n. 3, p. 302-310. 2006.

Kolman, B. **Algebra Linar com Aplicações.** Tradução: V. d. Iorio. Rio de Janeiro: LTC. 6ª ed. 1996.

Malta, G. H. S. **Grafos no Ensino Médio: uma Inserção Possível.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2008.

Pais, L. C. **Didática da Matemática: Uma Análise da Influência Francesa.** Belo Horizonte: Autêntica. 2001.

Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática.** Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Departamento de Educação Básica. Curitiba. 2008.

Skovsmose, O. **Educação Crítica: Incerteza, Matemática, Responsabilidade**. São Paulo: Cortez. 2007.

ZORZAN, A. S. L. **Ensino-Aprendizagem: Algumas Tendências na Educação Matemática.** Revista Ciências Humanas. v. 8, n. 10, p. 77-93. Junho/2007.

APÊNDICE A

Atividade 1

Abaixo podemos observar o mapa da região de Maringá – PR, que é atendida por uma empresa de transporte que faz o trajeto de ônibus entre as cidades. Note que entre as cidades de Paranavaí e Maringá uma rota viável é Paranavaí – Nova Esperança – Presidente Castelo Branco – Mandaguaçu – Maringá. No mapa, as cidades assinaladas com pontos claros são aquelas em que há o embarque e desembarque de passageiros no terminal com horário fixado. Na rota descrita acima, por exemplo, o passageiro embarca em Paranavaí, desembarca em Nova Esperança aonde embarca em outro ônibus para Maringá. Os passageiros das cidades assinaladas com pontos escuros também são atendidos, porém aguardam o ônibus em "pontos" ao longo do trajeto.

Observe que entre algumas cidades, no entanto, há vários trajetos possíveis. Entre Maringá e Colorado, por exemplo, a empresa pode optar por diferentes rotas que passem por diferentes cidades assinaladas com pontos escuros.

Questões para discutir:

- Você utiliza o transporte coletivo?
- Qual é a importância do transporte coletivo para a população?
- Quais são os principais problemas que você identifica no transporte coletivo de sua cidade/região?
- O que uma empresa de transporte coletivo deve levar em consideração ao estabelecer uma rota?

A partir das discussões realizadas e com base no mapa acima determine:

a) O melhor trajeto entre Maringá e Colorado que a empresa pode oferecer aos seus clientes. Justifique a escolha do trajeto.

b) Quantos e quais são os trajetos entre Maringá e Colorado que passe por exatamente uma outra cidade.

c) Quantos e quais são os trajetos entre Maringá e Colorado que passe por exatamente duas outras cidades.

d) Determine pelo menos três trajetos entre Maringá e Colorado que passe por exatamente três outras cidades.

APÊNDICE B

Atividade 2

Poucas coisas causaram uma revolução tão grande no ambiente virtual quanto as redes sociais. Em pouco tempo elas se tornaram o principal meio para encontrar e reencontrar amigos, divulgar fotos, ideias, opiniões, marcar encontros, etc.

São várias as redes sociais, dentre as quais se destaca o *facebook* ou simplesmente *face* para os íntimos. Hoje, a rede social criada por Mark Zuckerberg e Eduardo Saverin tem cerca de 900 milhões de usuários espalhados pelo mundo todo. Isto significa que, aproximadamente, 1 em cada 7 habitantes do planeta Terra estão conectados ao *facebook*. As redes sociais são tão envolventes que já existem estudos que indicam uma nova doença: o vício em redes sociais.

O funcionamento do *facebook* é bem simples. O indivíduo cadastra-se, gratuitamente, e a partir daí tem direito a uma página, na qual posta fotos, publica o que está pensando, notícias, conversa ou manda mensagens aos amigos, comenta ou curte o que os amigos estão postando, etc.

Essa rede de amigos é formada do seguinte modo: o sujeito pesquisa o nome de algum conhecido na área de busca do *facebook* e, encontrando-o, manda uma solicitação de amizade. Caso o conhecido aceite, um passa a visualizar tudo o que o outro publicar.

Além disso, o próprio *facebook* indica “pessoas que talvez você conheça". Se duas pessoas não são amigas na rede, mas tem uma quantidade razoável de amigos em comum, o *facebook* “entende” que provavelmente um conheça o outro.

Outras ferramentas que tornam o *face* tão atrativo são “curtir”, “comentar” e “compartilhar”. Essa última, aliás, explica porque ultimamente o facebook deixou de ser um espaço apenas de curtição entre amigos para se tornar um eficiente meio para divulgar ideias, mobilizar pessoas para uma causa e até mesmo promover revoluções.

A “Primavera Árabe”, como ficou conhecida a onda de protestos iniciados em 2010 e que levou milhares de pessoas às ruas em diversos países muçulmanos dominados por regimes autoritários teve boa parte de seus atos organizados nas redes sociais, em especial no *facebook*.

Até mesmo no Brasil, país conhecido pela passividade de seus cidadãos frente aos desmandos da classe política, o *facebook* foi o principal meio de divulgação das passeatas que tomaram as ruas do país em junho de 2013 pedindo a redução dos preços das passagens de ônibus do transporte público, a melhoria na saúde e educação, o fim da corrupção, entre outros.

A rapidez e eficiência com que as notícias correm na rede social podem ser ilustradas com o seguinte exemplo: Vamos imaginar que Adriana publica uma mensagem em sua página no *facebook*, por exemplo, uma convocação para uma passeata. Todos os amigos de Adriana, entre eles Beto, visualizarão a mensagem. Se Beto compartilhar a mensagem, todos os seus amigos também verão a mensagem de Adriana, incluindo Cláudia, que é amiga de Beto, mas não de Adriana.

Se Adriana tiver 200 amigos no *facebook*, e apenas 10%, ou seja, 20 pessoas compartilharem a convocação para a passeata, e cada um desses 20 amigos tiver outros 200 amigos que não são comuns, em poucos instantes 4200 pessoas saberão do evento.

Além de mostrar porque o *facebook* é a melhor forma de divulgação de ideias, o nosso exemplo mostra que mesmo que uma pessoa não tenha acesso direto a uma outra, ela poderá ter acesso em estágios. Conforme vimos, Adriana não tinha acesso direto a Cláudia, mas através de Beto, um amigo em comum, a mensagem de Adriana chegou a Cláudia. Dizemos então, que Adriana teve acesso a Cláudia em dois estágios: Adriana→Beto→Cláudia.

Também poderia acontecer que Adriana e Cláudia tivessem outros amigos em comum, e se algum deles compartilhasse a mensagem de Adriana, essa teria mais de uma forma de acessar Cláudia em dois estágios.

A partir dessas reflexões responda:

Em um grupo de 6 pessoas, escolhidas de acordo com os critérios definidos pelo grupo, de quantas formas uma notícia divulgada na página do facebook de uma dessas pessoas pode chegar a cada uma das outras pessoas, considerando que todos os que tiverem acesso à mensagem irão compartilhá-la?

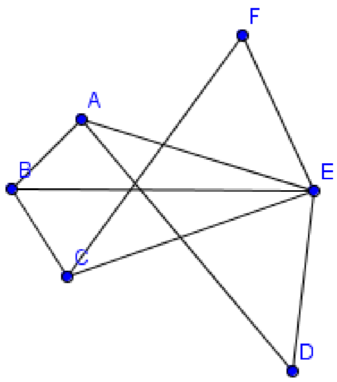
APÊNDICE C

Sexo: ( ) F ( ) M Idade:____________ Trabalha durante o dia? ( ) Sim ( ) Não

Avaliação

1) O que é um grafo?

2) Considere o grafo ao lado e determine:



a) A matriz de adjacência do grafo.

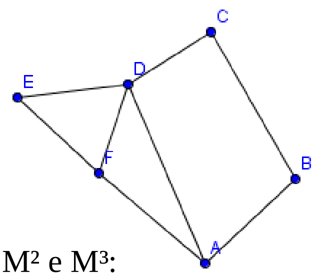
b) O grau de cada vértice (denote o grau do vértice A por d(A), o grau do vértice B por d(B) e assim por diante).

c) O número total de arestas do grafo.

3) Desenhe uma representação do grafo cuja matriz de adjacência é:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

4) Considere que o grafo a seguir represente seis cidades e as ligações rodoviárias entre as mesmas:



A seguir temos a matriz de adjacência M do grafo, e as matrizes M² e M³:

Matriz visualizada: M

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriz visualizada: M²

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriz visualizada: M³

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 8 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 6 & 4 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

a) Como podemos interpretar, na matriz M^2, o número obtido na linha F e coluna D?

b) Descreva as duas maneiras de A ter acesso a C em dois estágios.

c) Como podemos interpretar na matriz M^3 o número obtido na linha D e coluna E?

d) Descreva as três maneiras de B ter acesso a E em três estágios.