UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

LUCIANO XAVIER DE AZEVEDO

LOGARITMOS - CONSTRUÇÃO DA DEFINIÇÃO GEOMÉTRICA COM O USO DO GEOGEBRA

Maringá-PR
2013

LUCIANO XAVIER DE AZEVEDO

Logaritmos - Construção da definição geométrica com o uso do GeoGebra

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.
Área de concentração: Análise.

Orientadora: Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes

Maringá
2013

LOGARITMOS - CONSTRUÇÃO DA DEFINIÇÃO GEOMÉTRICA COM O USO DO GEOGEBRA

LUCIANO XAVIER DE AZEVEDO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

COMISSÃO JULGADORA

Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes - Orientadora
Universidade Estadual de Maringá (UEM)

Prof. NOME DO PROFESSOR
INSTITUIÇÃO

Prof. NOME DO PROFESSOR
INSTITUIÇÃO

Aprovada em: xx de março de 2013.
Local de defesa: Anfiteatro xxxxxx, Bloco F-67, *campus* da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho a todos que acreditaram e me apoiaram ao longo desses dois anos de estudos, em especial a meu filho Antonny, minha esposa Vânessa e minha família.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço

A Deus que iluminou o meu caminho em toda essa trajetória.

A professora Dra. Luciene Paron Gimenes Arantes, pela sua grande contribuição como orientadora, pelas sugestões e pleno apoio como também pela paciência em todo o processo.

A minha mãe Marilei a quem agradeço pelo apoio e confiança.

Aos meus irmãos Edson e Marcos e minha irmã Juliane pelo incentivo incondicional.

Aos amigos de turma no mestrado, que me incentivaram nessa jornada, Amarildo, Roberto, Lígia, Silvio, Fernado, Reinaldo, Alexandre, Leandro, Cleonice, Lucimeire, Priscila, Ana e Jair.

Aos professores que fizeram parte do projeto Profmat - UEM pelo empenho.

Aos alunos que participaram na aplicação do conteúdo deste trabalho em sala de aula pela oportunidade que nos deram de testar a sequência didática.

À CAPES, pelo fundamental apoio financeiro.

“Os grandes feitos são conseguidos não pela força,

mas pela perseverança.”

Samuel Johnson.

Resumo

O objetivo deste trabalho é mostrar uma sequência didática significativa para o ensino de Logaritmos aliada ao uso do software GeoGebra 4.2, favorecendo a formação do conceito geométrico deste conteúdo. Para tal, fizemos uma sequência de abordagem que permitisse uma referência construtivista. A séculos atrás, os logaritmos tiveram seu apogeu quando revelou-se um método que permitisse efetuar multiplicações, divisões, potenciações e extrações de raízes com certa presteza. Mas, hoje, com o uso das calculadoras eles perderam esta utilidade mas o desenvolvimento da matemática e da ciência de modo geral, tem nos revelado a existência de relações estreitas entre os diversos fenômenos químicos, físicos, biológicos, econômicos e os logaritmos. Discutiremos ideias de uma definição geométrica dos logaritmos para associarmos uma referência algébrica.

Palavras chave: Logaritmos, função logarítmica, software GeoGebra.

Abstract

The objective of this work is to show a sequence significant didactic teaching allied to the use of logarithms software GeoGebra 4.2, favoring the formation of geometric concept this content. To this end, we made a sequence approach allow a constructivist reference. The centuries ago, logarithms had its heyday when it proved to be a method that allow performing multiplications, divisions and potentiation extractions of roots with some alacrity. But today, with the use of calculating they lost this utility but the development of mathematics and science in general, we have revealed the existence close links between the various phenomena chemists, physicists, biological, economic and logarithms. We will discuss ideas of a geometrical definition of logarithms to associate a reference algebraic.

key words: Logarithms, logarithmic function, software GeoGebra.

Sumário

Introdução

No decorrer da vida estudantil percebemos que a Matemática tem rótulo de disciplina problemática, pois muitos alunos enfrentam obstáculos para entender e, consequentemente, aprender certos conteúdos. Em boa parte das escolas, tanto de ensino fundamental, médio e até mesmo superior, ela é representada socialmente como uma disciplina complicada e inacessível por grande parte dos alunos. Um fator que provavelmente ocorre, é que ela é ensinada de forma a inibir esses alunos. Nos dias atuais, a abordagem dos conteúdos é quase sempre realizada de forma mecânica, sem construção de conceitos, assim deixando de despertar a curiosidade para um estudo de forma crítica e reflexiva. Neste trabalho estaremos abordaremos um tópico encarado por muitos como um conteúdo de difícil entendimento.

O conteúdo de Logaritmo tem importância intrínseca no desenvolvimento dos estudos de Matemática e tem grande influência em várias áreas como biologia, física, química e outras. Isto já é, sem dúvida, uma grande motivação para se pensar e estudar a belíssima ideia dos logaritmos.

Vários aspectos podem ser abordados a respeito do tema, um deles é a dificuldade cognitiva dos alunos em sua compreensão. Neste trabalho, construíremos os conceitos de logaritmos usando um instrumento de grande valia, o software GeoGebra 4.2, uma forte ferramenta a ser usado em sala de aula. Uma forma diferente de construção de conceitos, buscando diferenciar-se dos métodos tradicionais, repetitivos e poucos construtivos que visam somente a transmissão do conteúdo de forma sistemática. Não pretendemos elaborar uma proposta de ensino, mas mostrar uma forma auxiliar que dirija uma base sólida na construção do conhecimento, trazendo algumas discussões e sugestões.

Outro objetivo é oferecer um suporte maior aos conhecimentos adquiridos no curso de graduação em licenciatura em Matemática indicando uma base teórica adequada, expondo o assunto de forma sistemática para que o leitor, continue, ou passe a dar a sua devida e merecida importância ao conceitos e as propriedades de logaritmo.

Nosso trabalho está dividido em 8 capítulos. No Capítulo 1, relataremos um pouco da História dos Logaritmos que tem como intuito a motivação do leitor. No Capítulo 2, abordaremos os conceitos básicos de potenciação, em especial as propriedades operatórias, e tem como objetivo oferecer um suporte para prosseguir nos capítulos seguintes. No Capítulo 3, apresentaremos uma abordagem sobre a forma tradicional de como logaritmo é apresentado ao aluno de ensino médio e também apresentamos de uma forma consistente a definição de função logarítmica e suas propriedades. O Capítulo 4 tratará de uma breve introdução ao GeoGebra, em especial, cálculos de áreas que é o foco de nosso estudo. Já no Capítulo 5, construiremos a definição geométrica de logaritmos através da faixa de uma hipérbole, e dessa faixa introduziremos um teorema importante na definição dos logaritmos, também definiremos o que chamamos de logaritmo natural. No Capítulo 6, comentaremos sobre a constante de Euler, não só como limite mas também um valor aproximado para o número real e. No Capítulo 7, veremos a relação que o logaritmo em qualquer base tem com uma faixa de hipérbole e definiremos ele como área e, finalmente no Capítulo 8, faremos um relato de uma experiência didática com um grupo de alunos de um colégio privado de Maringá.

Capítulo 1

O surgimento dos Logaritmos

Neste capítulo, retrataremos um pouco da história dos Logaritmos, em especial, o seu surgimento. Se pretendemos discutir um processo de construção do conhecimento, então cremos que é importante relembrarmos fatos históricos que motivem o estudo sobre Logaritmos.

Hoje, com os recursos que temos, nos parece estranho, mas realizar operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação já foi algo extremamente difícil. Isso se deu no final do século XVI, na Europa, quando o desenvolvimento da astronomia e da navegação exigiam cálculos aritméticos muito complexos para os padrões da época. Naquele período desenvolver um método que oferecesse mais agilidade nessas operações era essencial. O avanço da Matemática se deu principalmente em função do crescimento político, econômico e social. Também, nesse período, a trigonometria era muito estudada. Entre esses estudos havia um método chamado "prostaférese", o qual consistia em transformar multiplicação em adição usando fórmulas trigonométricas existentes na época, como $2\cos A\cos B = \ cos\,(A+B)+\cos\,(A-B)$. Evidentemente, é um método com dificuldades de aplicação para produto de três ou mais fatores. Nesse sentido, vários estudiosos da época se empenharam em facilitar esses cálculos, e com resultados satisfatórios se destacaram dois deles, John Napier (1550 – 1617) e Jost Burgi (1552 – 1632) que, independentemente, publicaram tabelas as quais ficaram conhecidas com "tábuas de Logaritmos". Uma grande descoberta científica da época.

John Napier, era um rico e inteligente lorde escocês. Ele era um teólogo, não matemático profissional e esteve algum tempo empenhado em escrever um livro para provar que o papa de sua época era o Anti-Cristo, baseado no Apocalipse de São João. Ele fazia Matemática por lazer e dedicou anos as suas tábuas de logaritmos e sentiu-se encorajado a publicá-las em 1614 intituladas de “Mirifi Logarithmorum Canonis Descriptio”. A palavra “LOGARITMO” foi inventada por Napier a partir das palavras gregas “LOGOS”– razão – e “ARITMOS”– número, mas o símbolo log, abreviação de “logarithm”, é atribuída ao astrônomo Kepler.

O método de Napier se baseou na associação dos termos da progressão geométrica, a^1, a^2, a^3, a^4, ... , a^n, ... , aos termos da progressão aritmética $1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$. Como a influência de Napier foi mais notória que a do inventor suíço Burgi, ele tornou-se mais conhecido.

Henry Briggs (1561 – 1631), um professor de Matemática, tomou conhecimento das tábuas de logaritmos de Napier. Henry em visita a Napier, no castelo de Merchiston, em Edinburgo na Escócia, discutiram sobre a utilidade de se construir uma tábua de base 10. Essa nova tábua foi publicada por Briggs após a morte de Napier. Uma tábua de logaritmos consiste, essencialmente, de duas colunas, onde cada número da coluna à esquerda corresponde a um número a direita, na mesma linha, que foi denominada seu logaritmo. É interessante que com essa tábua podemos multiplicar dois números utilizando-se apenas da soma de outros dois. Basta somarmos seus logaritmos e, com o resultado, procurarmos na coluna da esquerda o valor lá indicado, esse é o valor procurado. A construção inicial da possibilidade de se fazer reduções de uma multiplicação em uma adição ocorreu mediante a comparação dos termos de uma progressão aritmética com os termos de uma progressão geométrica. Observemos, por exemplo, uma progressão aritmética de razão 1 e uma geométrica de razão 2.

2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Para obtermos o resultado da multiplicação de 8 por 64, basta somarmos 3 e 6, correspondentes a eles na progressão aritmética, então teremos 512 que corresponde a 9. Neste caso, o fato desta tábua permitir o cálculo, somente, de produtos da forma 2^n, com n inteiro positivo, a torna insuficiente para muitos cálculos. Mesmo que troquemos a base 2 por outra, com número inteiro positivo arbitrário, ainda seria insuficiente. Com o desenvolvimento exponencial, o uso de potências com bases diferentes de 1 e expoentes racionais, motivo de termos introduzido alguns pré-requisitos no capítulo seguinte, tornaram as tábuas de logaritmos mais eficientes.

“A invenção dos logaritmos surgiu no mundo como um relâmpago. Nenhum trabalho prévio anunciava ou fazia prever a sua chegada. Surge isolada e abruptamente no pensamento humano sem que se possa considerar consequência de obras ou de pesquisas anteriores". Citação de Lord Moulton em [10].

Capítulo 2

Pré-requisitos

No Capítulo 1, para o entendimento de logaritmos, precisamos conhecer as propriedades de expoentes. Sendo assim apresentamos, neste capítulo, uma revisão sobre conceitos de exponenciais, em especial potenciação. Primeiramente, temos uma tabela composta em sua primeira linha por uma Progressão Geométrica e a segunda linha por uma Progressão Aritmética.

2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Para multiplicarmos dois termos da progressão geométrica acima, somamos os seus correspondentes na progressão aritmética e vemos qual o termo da progressão geométrica que corresponde a essa soma. Decorre que

$$a^m.a^n = a^{m+n}. \tag{2.1}$$

Mas, o estudo de exponencial como função foi desenvolvido pelo matemático suíço Johann Bernoulli (1667 - 1748), que publicou em 1697 a obra "Principia Calcutti Exponetialum", na qual apresenta diversos cálculos envolvendo exponenciais. Desta forma, os logaritmos foram construídos antes da notação de exponencial. Além disso, a regra anterior só permitia calcular produtos de números da forma a^n, onde n é um número natural. Após a difusão da notação exponencial, surgiu a ideia de se considerarem potências com expoentes negativos e fracionários. Faremos um breve estudo desses casos.

Seja a um número real positivo. Dado um número inteiro $n > 0$, a potência a^n é definida como o produto de n fatores iguais ao número a. Então,

$$a^n = \underbrace{a.a...a}_{n\ \ fatores}.$$

Para definirmos a^0, de modo que (2.1) continue sendo verdadeira, devemos convencionar que $a^0 = 1$, a fim de termos

$$a^0.a^n = a^{0+n} = a^n.$$

Notemos que, para preservarmos a validade de (2.1), quando os expoentes são negativos, devemos ter

$$a^{-n}.a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1 \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Consideremos $p \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\underbrace{a^m.a^m...a^m}_{p\ \ fatores} = (a^m)^p = a^{mp}.$$

Agora, seja $r \in \mathbb{Q}$. Então $r = p/q$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Assim,

$$(a^r)^q = (a^{p/q})^q = a^p.$$

Isto significa que $a^{p/q}$ é o número real positivo cuja q-ésima potência é igual a a^p. Por definição,

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Mostraremos, agora, que quando $r = p/q$ e $s = u/v$, com $p, q, u, v \in \mathbb{Z}$ e $q > 0$ e $v > 0$, ainda vale (2.1). Se

$$(a^r)^q = a^p \qquad \text{e} \qquad (a^s)^v = a^u,$$

temos

$$(a^r.a^s)^{qv} = (a^r)^{qv}.(a^s)^{qv} = a^{rqv}.a^{sqv} = a^{pv+uq}.$$

Portanto, $a^r.a^s$ é o número real positivo cuja qv-ésima potência é igual a a^{pv+uq}. Logo, $a^r.a^s = a^{(pv+uq)/qv}$. Uma vez que

$$\frac{pv+uq}{qv} = \frac{p}{q} + \frac{u}{v} = r + s,$$

vale $a^r.a^s = a^{r+s}$, com $r, s \in \mathbb{Q}$.

Como o conjunto dos números irracionais é denso em $\mathbb{R}$ todo número irracional, por exemplo $\sqrt{2}$, pode ser aproximado por um número racional. Então, $\sqrt{2}$, pode ser aproximado pelos racionais $1,4; 1,41; 1,414; 1,4142;$. Assim, $5^{1,4}$, $5^{1,41}$, $5^{1,414}$, $5^{1,4142}$ se aproximam de $5^{\sqrt{2}}$. Desta forma, quanto mais próximo o número k estiver de $\sqrt{2}$ mais próximo estará o número 5^k de $5^{\sqrt{2}}$. Com isto, podemos estender o conceito de expoentes irracionais. Logo a propriedade $a^r.a^s = a^{r+s}$ vale para todo expoente r e s reais.

Capítulo 3

Definição tradicional de Logaritmo

A definição dada a seguir é apresentada na maioria dos livros didáticos diferenciando apenas pela forma de escrita.

Definição 3.1. Dado um número real $a > 0$, chamamos de logaritmo de um número $b > 0$ na base a, o número y tal que

$$a^y = b.$$

O número a é chamado de *base* do logaritmo, b é o *logaritmando* e y o *logaritmo*. Escrevemos,

$$y = \log_a b.$$

3.1 Propriedades Operatórias

Para enunciarmos as propriedades operatórias de logaritmos, impomos $a, b, c > 0$ e $a \neq 1$. A primeira propriedade é conhecida como propriedade fundamental dos logaritmos.

Teorema 3.2. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ maiores que 0 e $a \neq 1$. Então, as seguintes propriedades valem:*

(P$_1$) $\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$;

(P$_2$) $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$;

(P$_3$) $\log_a b^n = n \log_a b, \qquad \textit{com} \quad n \in \mathbb{R}.$

Demonstração:

Sejam $\log_a b = x$ e $\log_a c = y$. Então, $a^x = b$ e $a^y = c$. Fazendo uso de (2.1), temos $b.c = a^x.a^y = a^{x+y}$. Então, $\log_a b.c = \log_a a^{x+y} = x + y$, provando ($P_1$).

Agora, para provarmos (P_2), notemos que $\dfrac{b}{c} = \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$. Daí,

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a a^{x-y} = x - y.$$

Sejam, agora, $\log_a b^n = x$ e $\log_a b = y$. Então, $a^x = b^n$ e $a^y = b$. Assim, $a^x = (a^y)^n = a^{yn}$, donde concluímos que $\log_a b^n = \log_a a^{ny} = n.y$. ■

Exemplo 3.3. Sejam x, y e z números reais positivos tais que seus logaritmos numa dada base k são números primos positivos satisfazendo

$$\log_k (x.y) = 49 \qquad \text{e} \qquad \log_k \left(\frac{x}{z}\right) = 44.$$

Então, $\log_k(xyz)$ é divisível por 13.

Pela aplicação da propriedade (P_1), temos $\log_k x + \log_k y = 49$. Então, existem duas possibilidades para essa soma.

Primeiro caso: $\log_k x = 2$ e $\log_k y = 47$. Isto se deve ao fato de que se $\log_k y$ fosse um número primo ímpar e diferente de 47, então $\log_k x$ seria par diferente de 2 e não será primo.

Segundo caso: $\log_k x = 47$ e $\log_k y = 2$ com justificativa semelhante ao caso anterior.

Agora, usando a propriedade (P_2), segue que $\log_k x - \log_k z = 44$, ou seja $\log_k x = \log_k z + 44$, o que exclui a possibilidade de $\log_k x = 2$. Logo $\log_k x = 47$, $\log_k y = 2$ e $\log_k z = 3$. Concluímos, pela propriedade (P_1), que $\log_k (xyz) = \log_k x + \log_k y + \log_k z = 47 + 2 + 3 = 52$ que é um múltiplo de 13.

3.2 Sistema de logaritmo ou Função logarítmica

Definição 3.4. Chamamos de um sistema de logaritmo ou função logarítmica, uma função $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, que possui duas propriedades especiais:

(a) L é crescente, ou seja, se $x < y$, então $L(x) < L(y)$;

(b) $L(x.y) = L(x) + L(y)$, para quaisquer x e y reais positivos.

Em geral, no Ensino Médio, define-se logaritmo, como a função $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, tal que $L(x) = y$ se, e somente se, $a^y = x$. Assim, chamamos de base de um sistema de logaritmos L, ao número a tal que $L(a) = 1$. Esta definição tem alguns inconvenientes.

(1) A definição de função logarítmica não permite apresentar, espontaneamente, o número e como uma base especial que se distingue naturalmente das demais, e "aparece" artificialmente na definição tradicional. Veremos que os logaritmos de base e surgem naturalmente com a definição geométrica.

(2) Existe a dificuldade de se estabelecer certas desigualdades fundamentais, por exemplo, $L(1 + x) < x$ (válida para logaritmos de base e).

A seguir, pontuamos algumas propriedades que o sistema de logaritmos apresenta.

Teorema 3.5. *Seja $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uma função logarítmica. Então,*

(P_1) L é injetiva.

(P_2) O logaritmo de 1 é zero.

(P_3) Os números reais positivos menores do que 1 tem logaritmos negativos e os números maiores que 1 têm logaritmos positivos.

(P_4) Para todo $x > 0$, tem-se $L(1/x) = -L(x)$.

(P_5) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+$, temos $L(x/y) = L(x) - L(y)$.

(P_6) Para todo $x \in \mathbb{R}_+$ e $r \in \mathbb{Q}$, tem-se $L(x^r) = rL(x)$.

(P_7) L é ilimitada, superiormente e inferiormente.

Demonstração: Sejam $x, y \in \mathbb{R}_+$, com $x \neq y$. Então se $x < y$, temos $L(x) < L(y)$. Da mesma forma, se $y < x$, então $L(y) < L(x)$. Assim, em qualquer hipótese, quando $x \neq y$ conclui-se que $L(x) \neq L(y)$.

(P_2) Segue do item (b) da Definição 3.4 que $L(1) = L(1.1) = L(1)+L(1)$. Portanto, $L(1) = 0$.

(P_3) Se L é crescente e $0 < x < 1$, segue do item (a) da Definição 3.4 que $L(x) < L(1) = 0$, sendo que a última igualdade segue da propriedade (P_2). Se L é crescente $1 < x$, então também do item (a) da Definição 3.4 e da propriedade (P_2), segue que $0 = L(1) < L(x)$.

(P_4) Como $x.(1/x) = 1$, para $x > 0$, utilizando o item (b) da Definição 3.4, obtemos $L(x) + L(1/x) = L(1) = 0$, donde $L(1/x) = -L(x)$. Ainda $L(x/y) = L(x.(1/y)) = L(x) + L(1/y) = L(x) - L(y)$ demonstrando (P_5).

(P_6) Em primeiro lugar, observamos que a propriedade $L(x.y) = L(x) + L(y)$ se estende para o produto de um número natural r de fatores. Então, $L(x^r) = L(x.x....x) = L(x) + L(x) + ... + L(x) = rL(x)$. Também vale quando $r = 0$, pois para todo número $x \in \mathbb{R}_+$, tem-se que $x^0 = 1$, logo $L(x^0) = L(1) = 0 = 0\, L(x)$.

Consideremos, agora, o caso em que $r = -n$, $n \in \mathbb{N}$. Como, para todo $x > 0$, temos $x^n.x^{-n} = 1$, segue que $L(x^n) + L(x^{-n}) = L(1) = 0$, e daí $L(x^{-n}) = -L(x^n) = -nL(x)$.

Finalmente, estudaremos o caso geral, em que $r = p/q$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, para todo $x \in \mathbb{R}_+$.

Notemos que $q.L(x^r) = L[(x^r)^q] = L(x^p) = p.L(x)$, em virtude do que já foi demonstrado. Da igualdade $q.L(x^r) = p.L(x)$, resulta que $L(x^r) = (p/q).L(x)$, ou seja,

$$L(x^r) = rL(x),\ r \in \mathbb{Q}.$$

A restrição de que o expoente r seja racional provém do fato de sabermos apenas definir potências com expoente racional.

(P_7) Esta propriedade significa que, dados quaisquer números reais a e b, é sempre possível encontrar números positivos x e y tais que $L(x) > b$ e $L(y) < a$.

Para demonstrar que L é ilimitada superiormente, suponhamos que nos seja dado um número real b e que sejamos desafiados a achar um número $x \in \mathbb{R}_+$ tal que $L(x) > b$. Procederemos da seguinte maneira: escolhemos um número natural n suficientemente grande que $n > b/L(2)$. Como $L(2)$ é positivo, (Propriedade P_3), temos $nL(2) > b$. Usando a Propriedade (P_6), vemos que $nL(2) = L(2^n)$. Portanto, $L(2^n) > b$. Escolhendo $x = 2^n$, o resultado segue. Logo $L(x) > b$.

Para demonstrarmos que L também é ilimitada inferiormente, usaremos que $L(1/x) =$

$-L(x)$, para $x > 0$. Dado qualquer número real a, como vimos acima, podemos encontrar $x \in \mathbb{R}_+$ tal que $L(x) > -a$. Então, fazendo $y = 1/x$, teremos $L(y) = -L(x) < a$. ■

Observação 3.6. Uma função logarítmica L não poderia estar definida para $x = 0$, pois caso contrário, para todo $x > 0$ teríamos $L(0) = L(x.0) = L(x) + L(0)$ e assim, $L(x) = 0$, o que nos dá uma função identicamente nula, contrariando o item (a) da Definição 3.4.

Evidentemente, se $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é uma função logarítmica e c é uma constante positiva arbitrária, então a função $M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, definida por $M(x) = c.L(x)$, é também uma função logarítmica. O teorema a seguir mostra que existe uma maneira de obtermos funções logarítmicas conhecendo uma delas. Em outras palavras, basta obter uma função crescente $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $L(x.y) = L(x)+L(y)$ e todas as demais funções logarítmicas (ou sistemas de logaritmos) resultarão de L, pela multiplicação por uma constante conveniente. Assim, temos a liberdade de escolher a definição da função L da maneira que nos apareça mais natural e intuitiva que nos permita apresentar demonstrações mais simples.

Teorema 3.7. *Dadas as funções logarítmicas $L, M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, existe uma constante $c > 0$ tal que $M(x) = c\,L(x)$, para todo $x > 0$.*

Demonstração: Suponhamos, inicialmente, que exista um número $a > 1$ tal que $L(a) = M(a)$. Mostraremos que, neste caso, $L(x) = M(x)$, para todo $x > 0$. Como $L(a) = M(a)$, segue que $L(a^r) = M(a^r)$, para todo $r \in \mathbb{Q}$, pois

$$L(a^r) = r\,L(a) \qquad \text{e} \qquad M(a^r) = r\;M(a).$$

Suponhamos, por absurdo, que exista algum $b > 0$ tal que $L(b) \neq M(b)$. Sem perda de generalidade, seja $L(b) < M(b)$. Escolhemos $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $n\,[M(b) - L(b)] > L(a)$. Então

$$L(a^{1/n}) = L(a)/n < M(b) - L(b).$$

Por simplicidade, escrevemos $c = L(a^{1/n})$. Os números $c, 2c, 3c, ...$, dividem $\mathbb{R}_+$ em intervalos justapostos, de mesmo comprimento c. Como $c < M(b) - M(b)$, pelo menos um desses números, digamos mc, pertence ao interior do intervalo $(L(b), M(b))$, ou seja, $L(b) < mc < M(b)$. Mas, $mc = mL(a^{1/n}) = L(a^{m/n}) = M(a^{m/n})$. Logo, $L(b) < L(a^{m/n}) = M(a^{m/n}) < M(b)$.

Como L é crescente, a primeira das desigualdades acima implica $b < a^{m/n}$. Por outro lado, como M também é crescente, a segunda desigualdade implica $a^{m/n} < b$, contradição. Logo, tal b não existe. Consequentemente, devemos ter $M(x) = L(x)$, para todo $x > 0$.

O caso geral reduz-se ao caso particular acima. Dadas L e M, funções logarítmicas arbitrárias, temos $L(2) > 0$ e $M(2) > 0$, pois $2 > 1$. Seja $c = M(2)/L(2)$. Consideremos a função logarítmica $N : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $N(x) = c\,L(x)$. Como

$$N(2) = cL(2) = \frac{M(2)}{L(2)}\,L(2) = M(2),$$

segue que $N(x) = M(x)$, para todo $x > 0$, ou seja, que $M(x) = cL(x)$, para todo $x > 0$. ■

Teorema 3.8. *Toda função logarítmica L é sobrejetiva.*

Demonstração: Observemos que a função L é crescente e ilimitada inferiormente e superiormente (Propriedade (P_7)).

Observação 3.9. Segue da propriedade $(P1)$ e do Teorema 3.8, que toda função logarítmica é bijetora.

Observação 3.10. Segue da Observação 3.6, que dada a função logarítmica $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, existe um único número $a > 0$, tal que $L(a) = 1$. Este número é chamado de base do sistema de logaritmos L.

Observação 3.11. Se L_a e L_b são funções logarítmicas, $L_a(a) = L_b(b) = 1$, então o Teorema 3.7 garante a existência de uma constante $c > 0$, tal que $L_b(x) = c\,L_a(x)$, para todo $x > 0$. Fazendo $x = a$, resulta que $L_b(a) = c$. Portanto, $L_b(x) = L_b(a)\,L_a(x)$, que é a fórmula de mudança de base.

Capítulo 4

Usando o software GeoGebra

Atualmente, é muito difícil trabalharmos com alguns conteúdos em sala de aula sem o auxílio de aparatos tecnológicos, principalmente, nas aulas de matemática onde aparecem problemas que a princípio se tornam abstratos para boa parte dos alunos. O uso de computadores vem contribuindo para a prática pedagógica, superando obstáculos de compreensão e gerando metas, fazendo com que a aula tenha uma direção dinâmica. Assim, o uso de ferramentas, como o uso de softwares tornam-se cada vez mais necessário. Com o uso do computador, o aluno pode aprender com seus erros e junto com seus colegas, trocando suas produções e comparando-as. Para auxiliar o trabalho do professor existem vários softwares no mercado, dentre eles, alguns são comercializados e outros são distribuídos gratuitamente, é o caso do GeoGebra 4.2 que por sua vez é mais acessível às escolas. Mesmo sendo uma ferramenta de grande valia, o que transparece é que a difusão e uso de computadores nas aulas tem provocado inquietações entre os professores que, ainda, se sentem inseguros ao tentarem uma mudança de postura. Nesse trabalho, mostraremos uma forma de usar o GeoGebra na construção geométrica de Logaritmos e mostrando que é possível melhorar a compreensão desse conteúdo.

O GeoGebra foi criado por Markus Hohenwarter. Este projeto, iniciado em 2001, na Universität Salzburg e tem prosseguido em desenvolvimento na Florida Atlantic University. É um software gratuito que reúne recursos tanto de geometria como de álgebra e cálculo. Ele possui todas as ferramentas tradicionais de um software de geometria dinâmica: pontos, segmentos, retas e seções cônicas. E nele encontramos, também, equações e coordenadas que podem ser inseridas diretamente em sua caixa de entrada e depois gerado para análise.

Para usarmos o GeoGebra em nosso trabalho, vamos construir um gráfico de uma função e a partir dele a área determinada pelo seu gráfico e o eixo x.

Sejam $x \in \mathbb{R}*$, $y > 0$ e $x^2 + y^2 = r^2$ a equação de uma circunferência de raio r e centro na origem. A curva gerada por essas condições é uma semi-circunferência, a parte superior, no plano cartesiano. Usando GeoGebra, vamos aproximar a área da região limitada por essa semi-circunferência de três formas.

Inicialmente, no GeoGebra, construímos dois controles deslizantes, denominados a e n. O controle a irá indicar o raio da semi-circunferência e n a quantidade de divisões que iremos fazer no intervalo $[-a, a]$. No controle a, usamos o incremento $0,1$ e o intervalo de $[0, 10]$. No controle n, usamos 1 como incremento e intervalo de $[0, 100]$. Na entrada, digitamos Função $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ definida no intervalo $[-a, a]$. Para tal, na entrada digitamos função, então irá aparecer Função[<Função>,<Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>], redigitamos Função $[sqrt(a^2 - x^2), -a, a]$, após um *enter* irá aparecer a seguinte figura:

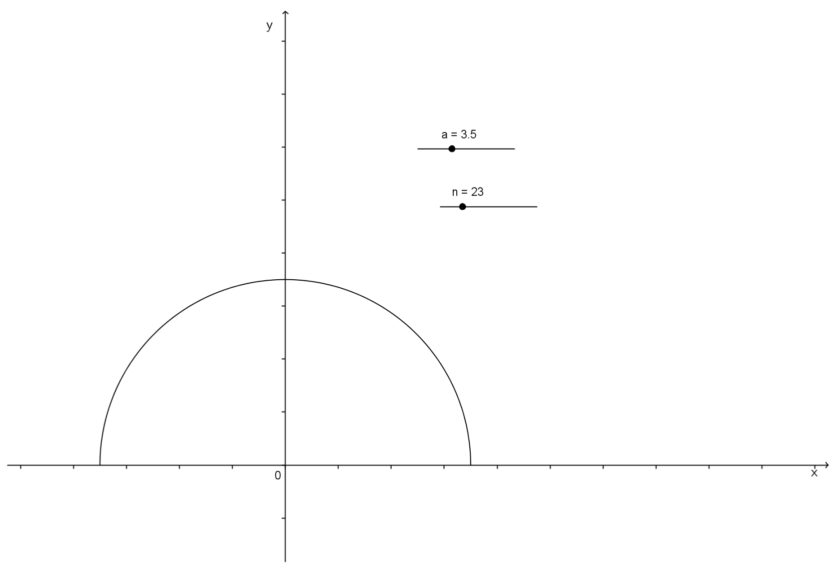


Figura 4.1: Gráfico da curva $y = \sqrt{a^2 - x^2}$

Agora aproximamos a área da região limitada superiormente pela semi-circunferência e pelo eixo x. Observemos os passos desta construção, os quais serão detalhados abaixo.

(1) *Soma de Riemann Inferior*: Digite na caixa de entrada SomaDeRiemannInferior, irá aparecer
SomaDeRiemannInferior[<Função>,<Valor de x Inicial>,<Valor de x Final>, <Número de Retângulos>] redigite SomaDeRiemannInferior $[f, -a, a, n]$ aperte a tecla *enter*,

então aparecerá na parte superior a soma das áreas de todos os n retângulos e aparecerá a figura:

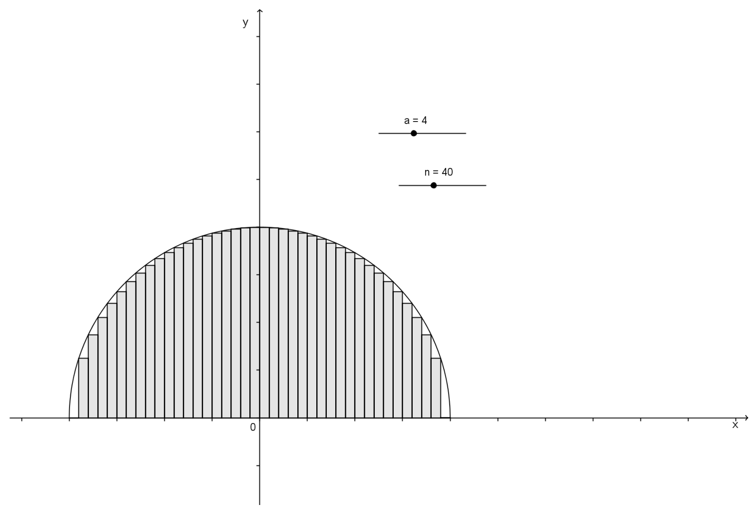


Figura 4.2: Área da semi-circunferência por soma inferior

O que está representado acima é uma semi-circunferência de raio 4 subdividida em 40 retângulos, tendo uma aproximação para essa área igual a 24,23 unidades de área.

(2) *Soma de Riemann Superior*: Fazemos um processo análoga ao anterior apenas mudamos na caixa de entrada a expressão para SomaDeRiemannSuperior$[f, -a, a, n]$.

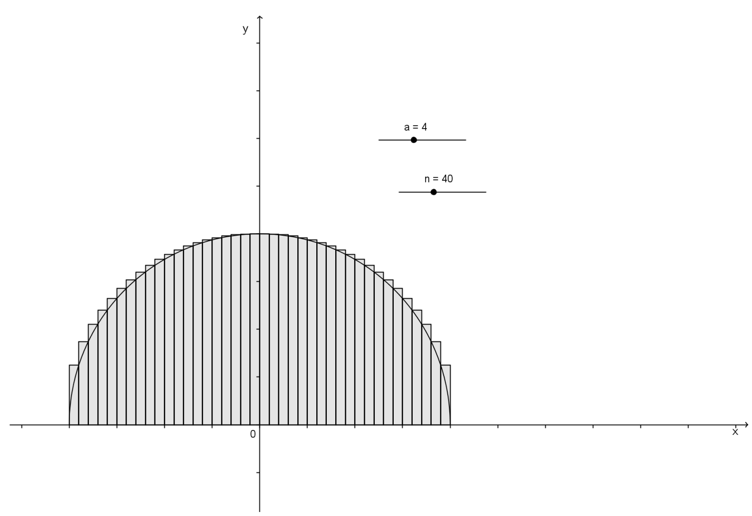


Figura 4.3: Área da semi-circunferência por soma superior

Vemos na figura, uma aproximação, por cima, da área de um semi-círculo de raio 4 subdividada em 40 retângulos, obtendo região com área de 25,83 unidades de área.

(3) *Soma Trapezoidal*: Para esse tipo de aproximação, usamos o seguinte processo: Soma-Trapezoidal $[f, -a, a, n]$.

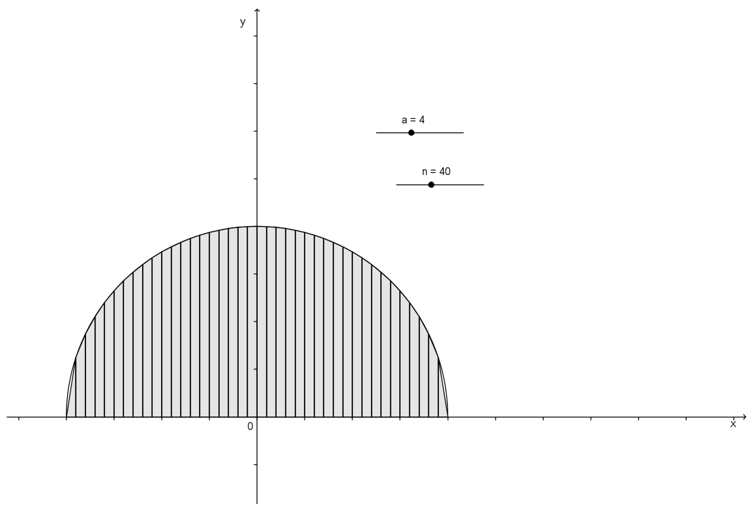


Figura 4.4: Área da semi-circunferência por soma trapezoidal

Nesse procedimento, usando o raio igual a 4 e fazendo 40 divisões como apresentado na figura anterior a área dessa semi-circunferência é aproximadamente 25,03 unidades de área.

Pelos princípios de geometria, sabemos que a área da região limitada por uma semi-circunferência é dada por $S = \frac{1}{2}.\pi R^2$, onde R é o seu raio. No exemplo acima , essa área é $S = \frac{1}{2}\pi\, 4^2$ que é equivalente a 25,13 unidades de área. Então, o terceiro procedimento, a Soma Trapezoidal, é mais próxima do que pretendemos. Assim, para nossas construções o melhor é aproximar a área através de Soma Trapezoidal.

Capítulo 5

Definição geométrica de Logaritmo

Nos livros de ensino médio [2, 4, 5, 6] o logaritmo é definido como sendo uma função inversa de uma função exponencial, vemos que isso tem certos incovenientes quando trabalhamos com expoentes irracionais. Apartir desse capítulo estaremos definindo o logaritmo com a área de uma faixa da hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$ com $x > 0$. Veremos que a definição geométrica de Logaritmo depende apenas do conceito da área dessa figura plana. Em 1647 isto não era tão simples assim. Nessa época a igreja permitiu que a obra do padre jesuíta Gregory Saint Vicent $(1584 - 1667)$, que já havia sido completada muitos anos antes, fosse publicada. Ele foi o primeiro a reconhecer a estreita relação entre a área de uma faixa de hipérbole e os logaritmos, embora ele não tenha concretizado esta identificação. Um pouco depois, em 1660 Isaac Newton também reconheceu essa relação. Suas observações segundo [3] mostraram que a concepção geométrica de uma função logaritmica é muito antiga.

Separamos esse capítulo em três tópicos, no primeiro trouxemos um estudo de processo para obtenção da área da faixa da hipérbole, o segundo se refere a uma propriedade importante em nossas definições, a chamada propriedade fundamental dessa faixas de hipérbole e por fim, no terceiro a definição geométrica de logaritmo natural que é referência de nosso trabalho.

5.1 A área de faixa hiperbólica

Definiremos o que chamamos *logaritmos naturais*. Inicialmente, faremos referência a respeito de área de uma faixa de hipérbole. Consideremos a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, com $x > 0$. Indicamos por $\mathbb{H}$ a parte do gráfico de f que associa cada número de seu domínio ao número $\dfrac{1}{x}$. Então, $\mathbb{H}$ é o subconjunto do plano no qual seus elementos são os pontos da forma $\left(x, \dfrac{1}{x}\right)$, $x > 0$. Simbolicamente,

$$\mathbb{H} = \left\{(x, y); x > 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}\right\}.$$

Graficamente, $\mathbb{H}$ está no primeiro quadrante e $xy = 1$ representa um ramo, a parte positiva da hipérbole.

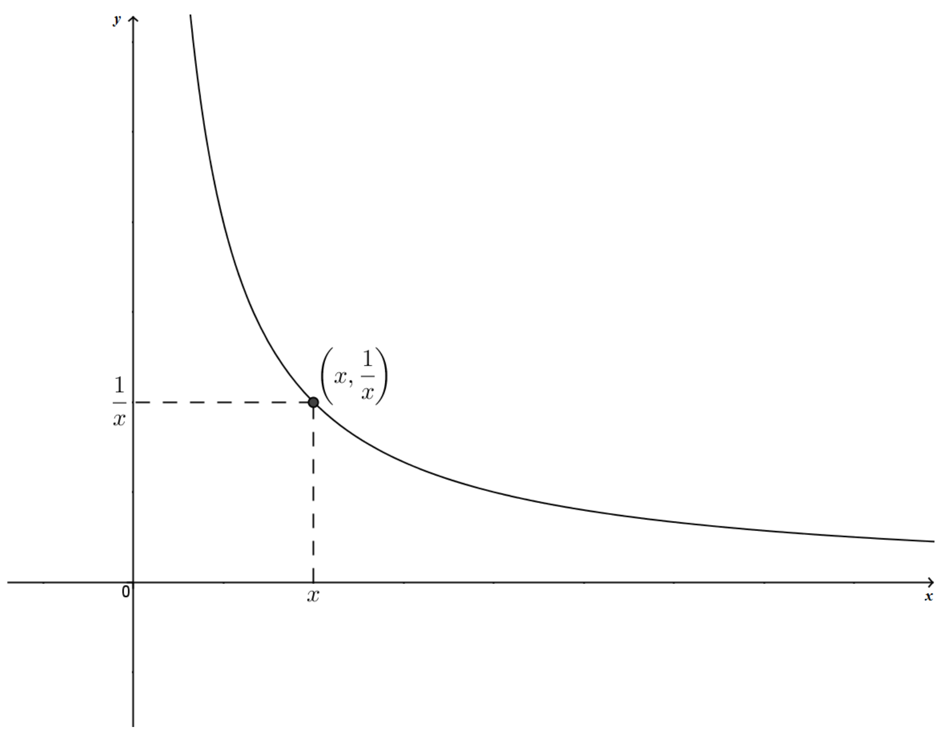


Figura 5.1: Gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, com $x > 0$

Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+$. A região do plano limitada pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e pela hipérbole é o número real A é representado por $\mathbb{H}_a^b$. Portanto, a faixa $\mathbb{H}_a^b$ é o conjunto de todos os pontos (x, y) do plano que satisfazem e $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq \dfrac{1}{x}$.

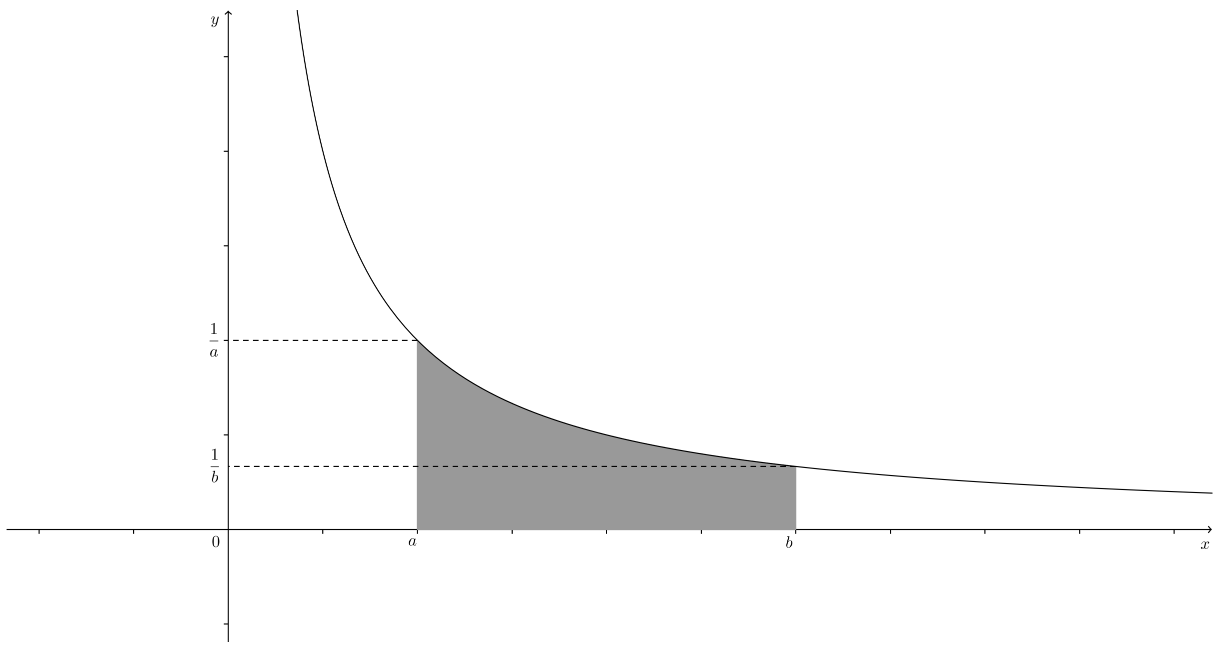


Figura 5.2: Faixa $\mathbb{H}_a^b$

Para que possamos definir a noção geométrica de logaritmos precisamos obter a área da faixa $\left(\mathbb{H}_a^b\right)$. Então faremos uma análise de dois processos para tal, um por meio de aproximação por retângulos inferiores e por trapézios inscritos como foi indicado no Capítulo 4.

Para calcularmos a Área de $\left(\mathbb{H}_a^b\right)$, a qual denotaremos apenas por, $A\left(\mathbb{H}_a^b\right)$, usaremos o seguinte procedimento: Em um número finito de intervalos justapostos, decompomos o intervalo $[a, b]$. Então, nessa decomposição, temos n intervalos na forma $[a_i, a_{i+1}]$ com $a_i < a_{i+1}$. Construímos retângulos com altura $f\left(a_{i+1}\right) = 1/a_{i+1}$. Os vértices desses retângulos tocarão a hipérbole nos pontos com coordenadas $(a_{i+1}, 1/a_{i+1})$. Por conveniência, chamamos cada um desses retângulos como inscritos na faixa $\mathbb{H}_a^b$ e terá área A_R, ainda, a junção de tais retângulos irá constituir o que indicaremos polígono retângular inscrito na faixa $\mathbb{H}_a^b$. A soma das áreas desses retângulos nos fornece uma aproximação por *falta*, para a área da faixa $\mathbb{H}_a^b$. Analisando a figura a seguir é fácil verificar que

$$\sum A_R < A\left(\mathbb{H}_a^b\right).$$

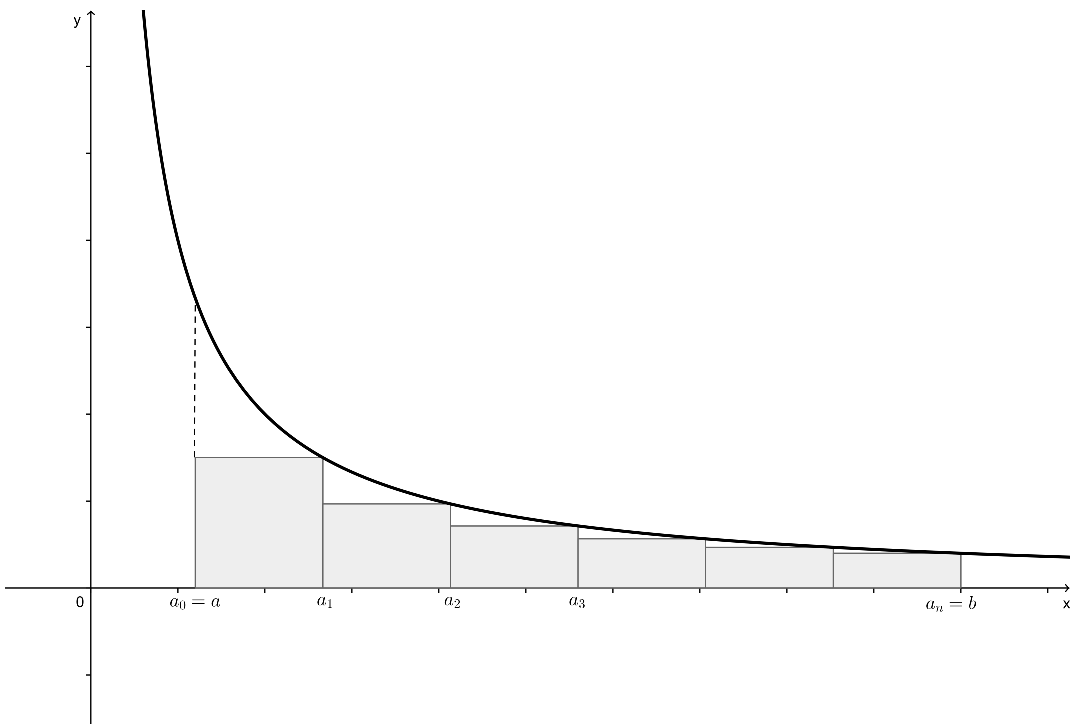


Figura 5.3: Área de $\mathbb{H}_a^b$ por falta

Exemplo 5.1. Se quisermos obter a área da faixa $\mathbb{H}_1^4$ usando o processo de aproximação por retângulos inferiores podemos fazer a decomposição do intervalo $[1,4]$ em partes iguais. Façamos a decomposição do intervalo $[1,4]$, no eixo x, através das retas $x = \frac{3}{2}$, $x = 2$, $x = \frac{5}{2}$, $x = 3$ e $x = \frac{7}{2}$. Assim, obtemos um polígono retângular cuja área é obtida pela soma das áreas dos retângulos mostrados na figura a seguir. Assim,

$$\begin{aligned} \sum A_R &= \frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{2}{7} + \frac{1}{2}\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = 1,219. \end{aligned}$$

Pelo fato dos lados superiores dos retângulos apresentados na figura ficarem abaixo do gráfico da hipérbole podemos concluir que

$$\sum A_R = 1,219 < A\left(\mathbb{H}_1^4\right).$$

Usando o GeoGebra, podemos verificar o que acabamos de fazer. Para isso a seguir,

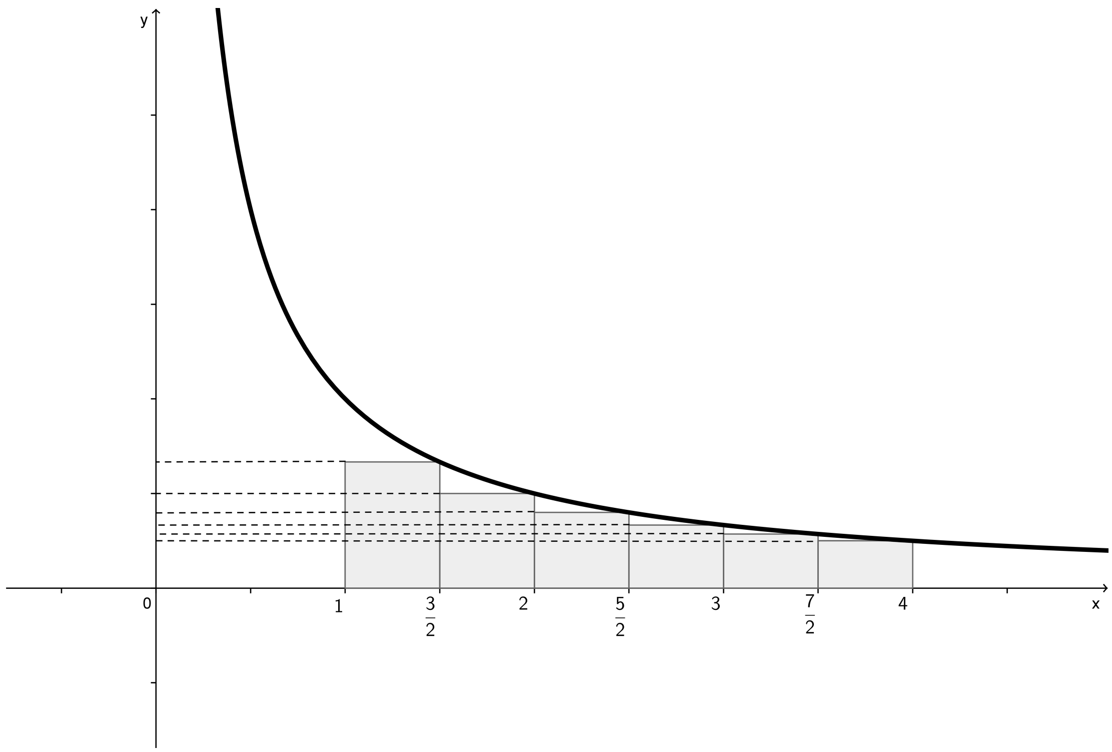


Figura 5.4: Área de $\mathbb{H}_1^4$ por falta

listaremos os passos desta construção.

Consideremos a função $y = \dfrac{1}{x}$, definida em um intervalo $(0, k]$, com esse k maior ou igual a 4. Aqui por questão de estética, faremos no intervalo $(0, 6]$. Para tal procedemos da seguinte forma:

Digitamos na caixa de entrada função e então irá aparecer Função[<Função>, <Valor de x Inicial>,<Valor de x Final>], então digitamos Função$[1/x, 0, 6]$ e dê um *enter*. Então, aparecerá uma parte da hipérbole. Agora digite, na caixa de entrada, SomaDeRiemannInferior, irá aparecer SomaDeRiemannInferior[<Função>,<Valor de x Inicial>,<Valor de x Final>,<Número de Retângulos>], redigitamos SomaDeRiemannInferior$[f, 1, 4, 6]$ e, novamente, dê um *enter*. Na parte superior do lado esquerdo, irá aparecer o valor da soma das áreas desses seis retângulos. Comparemos, com três casas decimais o resultado obtido anteriormente e esse.

Observe a figura a seguir.

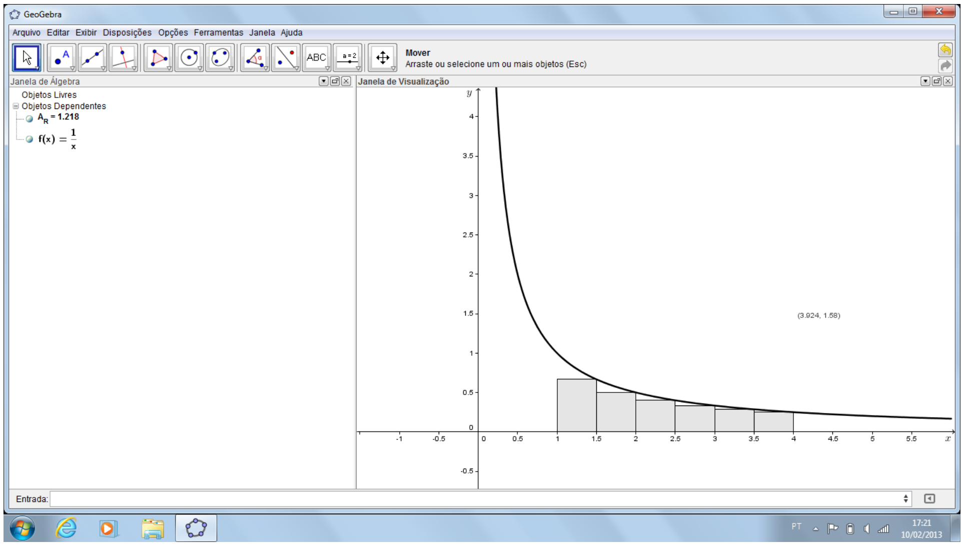


Figura 5.5: Área de $\mathbb{H}_1^4$ usando o GeoGebra

Agora, indicaremos um segundo modo de aproximação para o cálculo da área da faixa $\mathbb{H}_a^b$, o método de aproximação por trapézios inscritos a faixa da hipérbole como indicamos no Capítulo 3. Consideremos os trapézios de altura $a_{i+1} - a_i$ e bases medindo $f(a_{i+1}) = 1/a_{i+1}$ e $f(a_i) = 1/a_i$. Vemos que a área de cada um desses trapézios A_T é calculada por $A_T = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_{i+1}} + \dfrac{1}{a_i}\right)(a_{i+1} - a_i)$. Assim $A_T = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a_{i+1}}{a_i} - \dfrac{a_i}{a_{i+1}}\right)$. Vemos que esse trapézios tem vértices na hipérbole $f(x) = 1/x$. Como essa hipérbole tem concavidade para cima, temos que esses trapézios são secantes a ela, pois existe pontos acima de f que estão neles e ainda, dois vértices fazem parte da hipérbole. A reunião desses trapézios formam um polígono tapezoidal cuja soma da área de todos esses trapézios gera uma aproximação por *excesso* da faixa $\mathbb{H}_a^b$. Então

$$\sum A_T > A\left(\mathbb{H}_a^b\right).$$

Ilustramos esse resultado pela Figura 5.6. É mais interessante usarmos as aproximações obtidas pelos trapézios do que pelos retângulos pelo fato dos lados do trapézio se aproximarem mais da hipérbole $\mathbb{H}$ do que as bases superiores dos retângulos inscritos. Fato que pode ser verificado pela analise da figura a seguir.

Exemplo 5.2. Se quisermos obter a área da faixa $\mathbb{H}_1^4$ usando o processo de aproximação por

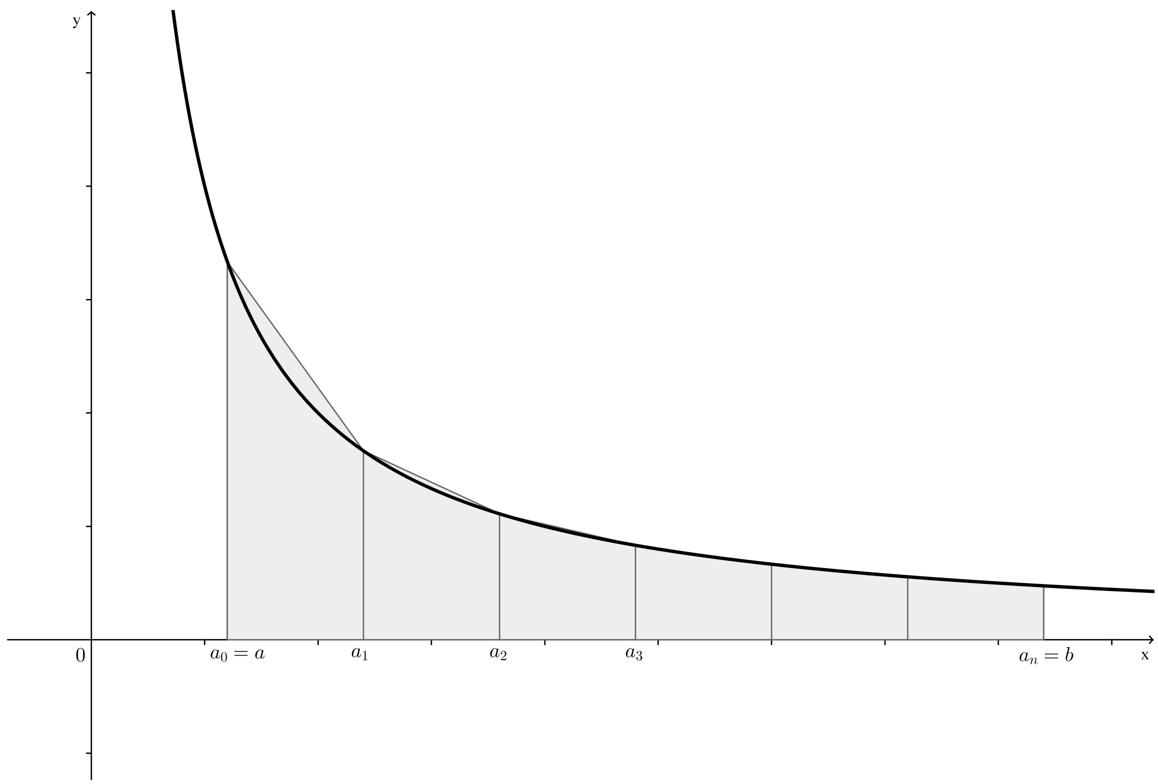


Figura 5.6: Área de $\mathbb{H}_a^b$ por excesso

trapézios inscritos apresentado no Capítulo 4, devemos fazer a decomposição do intervalo $[1, 4]$ em partes iguais. Para tal façamos a decomposição do intevalo $[1, 4]$, no eixo x, através das retas $x = 3/2$, $x = 2$, $x = 5/2$, $x = 3$ e $x = 7/2$, assim podemos obter seis trapézios inscritos na hipérbole para aproximar a área da faixa $\mathbb{H}_1^4$ conforme o que apresentamos na figura a seguir.

Observe que a base dos trapézios estão sobre as retas $x = 1$, $x = 3/2$, $x = 2$, $x = 5/2$, $x = 3$, $x = 7/2$ e $x = 4$. Assim temos

$$\begin{aligned}\sum A_T &= \frac{1}{4}.\left(1+\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{4}.\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)+\frac{1}{4}.\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)+\\ &\quad +\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{7}\right)\frac{1}{4}.\left(\frac{2}{7}+\frac{1}{4}\right)=1,405<A\left(\mathbb{H}_1^4\right).\end{aligned}$$

Pelos cálculos realizados nos Exemplo 5.1 e Exemplo 5.2, concluímos que

$$\sum A_R < \mathrm{A}(\mathbb{H}_1^4) < \sum A_T,$$

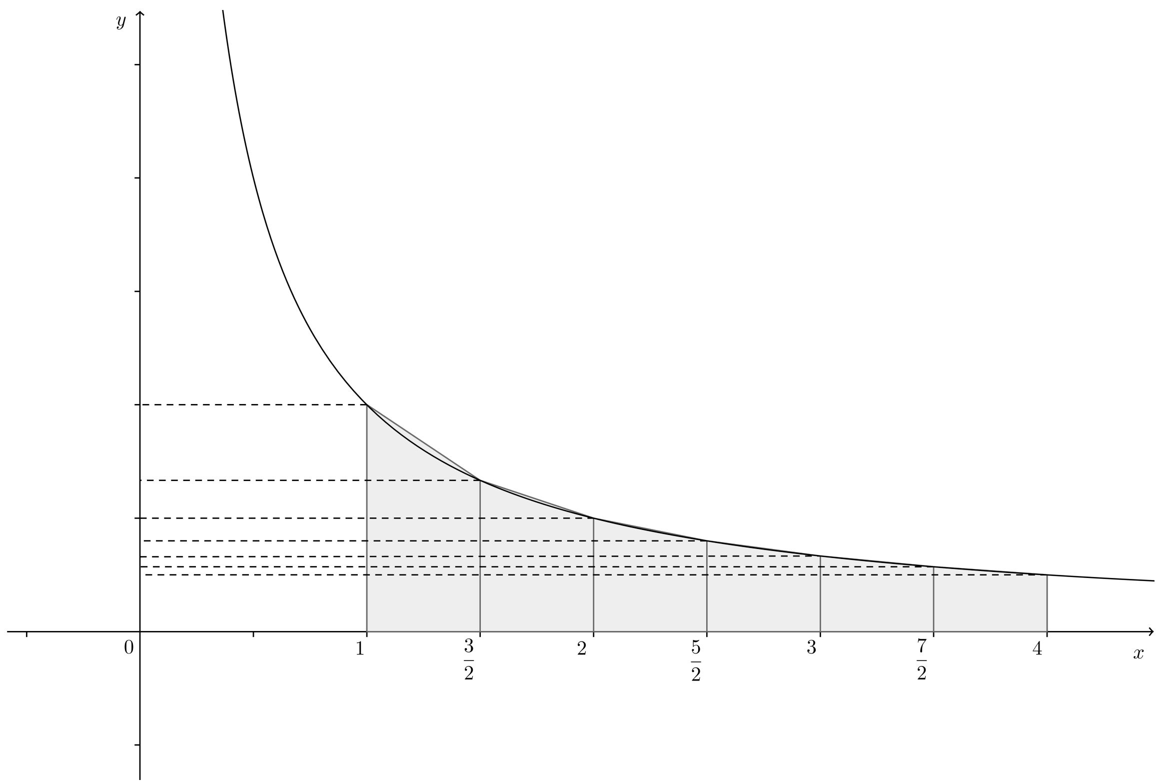


Figura 5.7: Área de $\mathbb{H}_1^4$ por excesso

ou seja, $1,219 < A\left(\mathbb{H}_1^4\right) < 1,405$.

Com o uso do GeoGebra, podemos verificar o que acabamos de fazer. Construa a função $y = 1/x$ em um intervalo $(0, k]$, com esse k maior ou igual a 4, como já fizemos, iremos usar o intervalo $(0, 6]$. Como no Exemplo 5.1. Agora, digite na caixa de entrada SomaTrapezoidal e, então, irá aparecer SomaTrapezoidal[<Função>,<Valor de x Inicial>,<Valor de x Final>,<Número de Trapézios>], então redigite SomaTrapezoidal[$1/x, 0, 4, 6$] e dê um *enter*. Na parte superior do lado esquerdo da tela do GeoGebra irá aparecer o resultado da soma das áreas dos seis trapézios. Comparemos, com três casas decimais, o resultado obtido anteriormente a esse, através da Figura 5.8.

5.2 Propriedade da área da faixa hiperbólica

A seguir, trataremos de uma propriedade importante das áreas das faixas de hipérbole. Ela nos dará suporte para que possamos definir logaritmos de forma geométrica. Então por sua

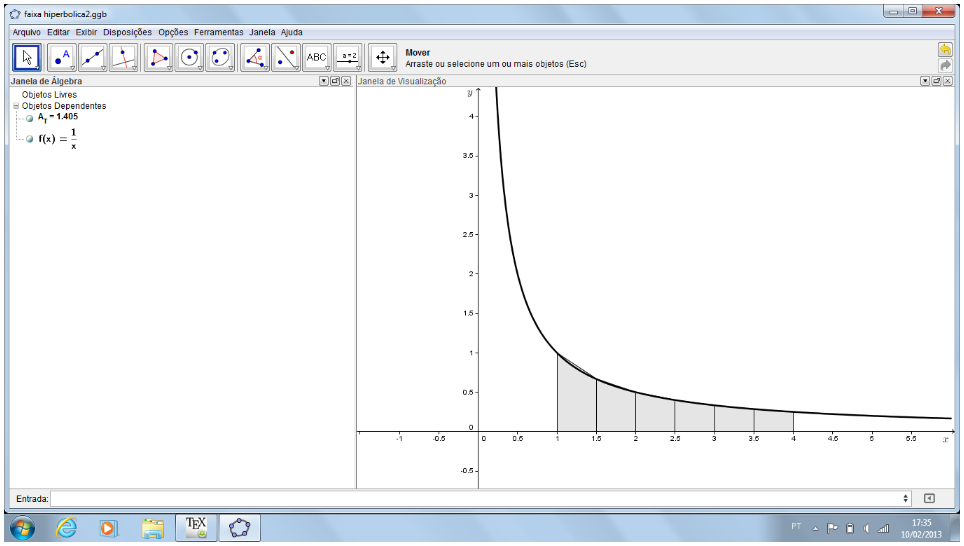


Figura 5.8: Área de $\mathbb{H}_1^4$ por trapézios usando GeoGebra

importância estatemos a chamando de propriedade fundamental das faixas de hipérbole, e é expressa pelo seguinte teorema:

Teorema 5.3. *Dado $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, as faixas $\mathbb{H}_a^b$ e $\mathbb{H}_{ak}^{bk}$ tem a mesma área.*

Demonstração: Sejam $[c, d]$ um intervalo contido em $[a, b]$ e $[ck, dk]$ ambos no eixo x. Considefemos dois retângulos inscritos na hipérbole $\mathbb{H}$, com bases $d - c$ e $dk - ck$. Veja Figura 5.9.

Observemos que o primeiro retângulo tem base $d - c$ e altura $\dfrac{1}{d}$. Assim, sua área é

$$(d - c).\frac{1}{d} = \frac{d - c}{d} = 1 - \frac{c}{d}.$$

O segundo retângulo tem base $dk - ck$ e altura $\dfrac{1}{dk}$. Logo, sua área é

$$(kd - kc).\frac{1}{kd} = \frac{d - c}{d} = 1 - \frac{c}{d}.$$

Podemos verificar que esses dois retângulos tem a mesma área. Usando o mesmo raciocínio, fazendo divisões no intervalo $[a, b]$, para os vários retângulos inscritos na faixa $\mathbb{H}_a^b$, teremos para cada um desses retângulos inscritos, multiplicando por k cada uma de suas abscissas, obteremos um retângulo inscrito em $\mathbb{H}_{ak}^{bk}$ com mesma área. Isto nos leva a concluir que

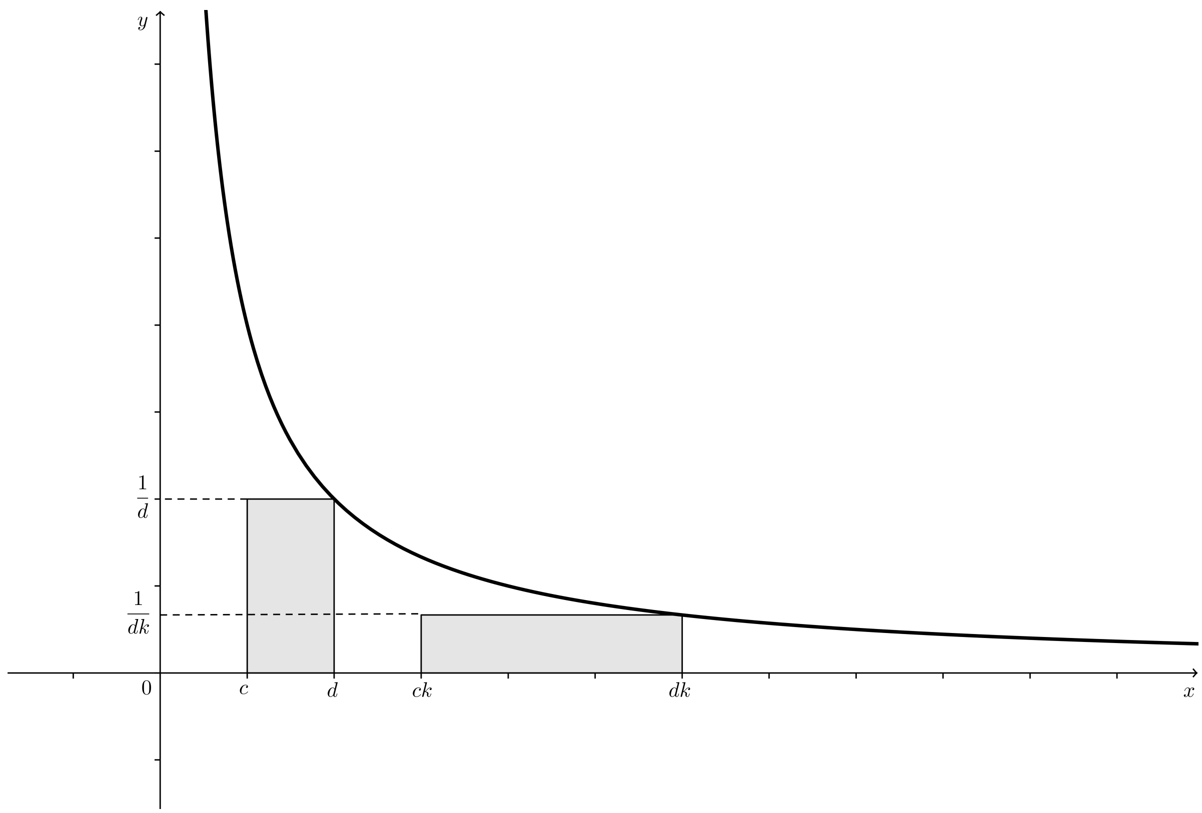


Figura 5.9: Comparativo de $A(\mathbb{H}_c^d)$ e $A(\mathbb{H}_{ck}^{dk})$

as áreas destas duas faixas são números que possuem exatamente as mesmas aproximações inferiores por retângulos inscritos e, portanto, são iguais. ■

Com o uso do software GeoGebra é constatamos o resultado do Teorema 5.3. Inicialmente, construimos três controles deslizantes, a, b e k, com valores maiores que zero e para facilitar nossos cálculos usamos intervalo $[0, 10]$ com incremento 1. Ainda construimos um quarto controle que daremos o nome de n, com incremento 1 e intervalo de 0 a 300 (ou mais). Façamos o esboço da hipérbole, na caixa de entrada digitamos Função$[1/x, 0, 10]$ e damos um *enter*. Na caixa de entrada digitamos SomaTrapezoidal$[1/x, a, b, n]$, damos um *enter* e agora SomaTrapezoidal$[1/x, a * k, b * k, n]$ e dando novamente um *enter* aparecerá a segunda região. Façamos os controles percorrerem os seus intervalos e você estará comprovando o Teorema 5.3.

Por consequência do Teorema 5.3, restringimos nossos estudos às faixas $\mathbb{H}_1^c$. Pelo Teorema

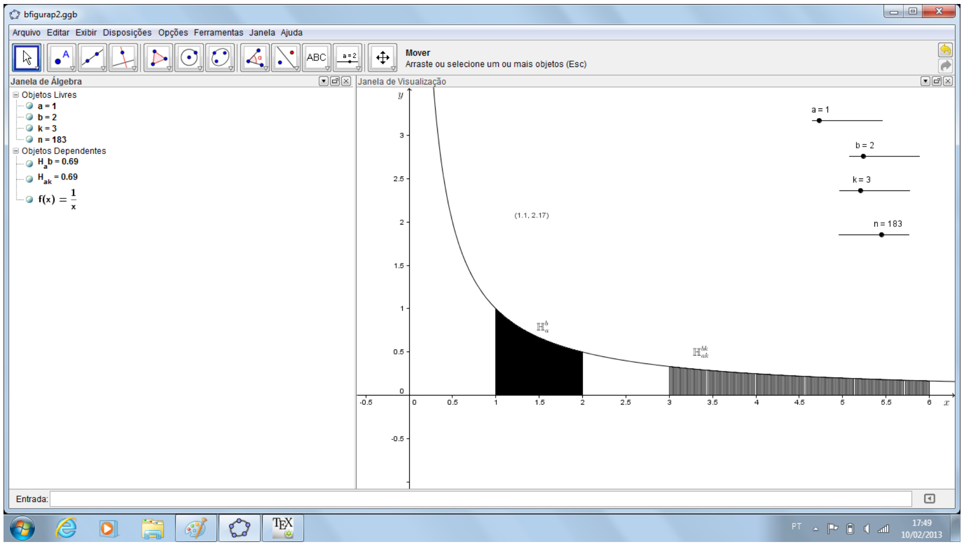


Figura 5.10: Comparativo de $A(\mathbb{H}_c^d)$ e $A(\mathbb{H}_{ck}^{dk})$ usando GeoGebra

5.3, $A(\mathbb{H}_a^b) = A(\mathbb{H}_{ak}^{bk})$, e se escolhermos $k = \dfrac{1}{a}$, teremos

$$A\left(\mathbb{H}_a^b\right) = A\left(\mathbb{H}_1^{b/a}\right).$$

Sendo $a < b < c$, é fácil verificar que

$$A\left(\mathbb{H}_a^b\right) + A\left(\mathbb{H}_b^c\right) = A\left(\mathbb{H}_a^c\right). \tag{5.1}$$

Se adotarmos as convenções $A\left(\mathbb{H}_a^a\right) = 0$ e $A\left(\mathbb{H}_b^c\right) = -A\left(\mathbb{H}_c^b\right)$, a igualdade anterior continua sendo válida para reais a, b e c. Evidentemente, que estamos considerando uma área negativa, algo não muito habitual.

A igualdade em (5.1) também é válida para a, b, $c \in \mathbb{R}$, com $a < c < b$, $b < a < c$, $b < c < a$ e $c < b < a$.

5.3 Logaritmo natural

Definiremos, a seguir, o que chamamos de logaritmo natural a partir da área de uma faixa de hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$, com $x > 0$.

Definição 5.4. Chamamos de logaritmo natural de $x > 0$, o valor atribuído a área da faixa $\mathbb{H}_1^x$. Indicamos por $\ln x$ o logaritmo natural de x.

Então,

$$A\left(\mathbb{H}_1^x\right) = \ln x.$$

Para $0 < x < 1$, convencionamos $A\left(\mathbb{H}_1^x\right) < 0$. Observamos que

(1) $\ln x > 0$, para $x > 1$, pois $\ln x = A\left(\mathbb{H}_1^x\right) > 0$.

(2) $\ln x < 0$, para $0 < x < 1$, pelo fato de estarmos convencionando $\ln x = A\left(\mathbb{H}_1^x\right) < 0$.

(3) $\ln 1 = 0$, pois $\mathbb{H}_1^1$ reduz-se a um segmento de reta, então $\ln 1 = A\left(\mathbb{H}_1^1\right) = 0$.

(4) $\ln x$ não está definido para $x < 0$.

Exemplo 5.5. Podemos obter um valor aproximado para $\ln 2$, usando Definição 5.4.

Pela Definição 5.4, sabemos que $\ln 2 = A\left(\mathbb{H}_1^2\right)$. Para uma boa aproximação do valor de $\ln 2$, dividiremos o intervalo $[1, 2]$ em dez partes iguais, que estão listados na tabela a seguir, juntamente com os valores de $\dfrac{1}{x}$ quando x assume valores limites de cada uma das divisões.

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$1/x$	1	0,909	0,833	0,769	0,714	0,666	0,625	0,588	0,555	0,526	0,500

Desta forma, usando aproximações por retângulos inferiores, formamos dez retângulos com base 0,1 e altura $1/x$. Então,

$$\begin{aligned} A\left(\mathbb{H}_1^2\right) &= 0,1.(0,909 + 0,833 + 0,769 + 0,714 + 0,666 + 0,625 + \\ &\quad 0,588 + 0,555 + 0,526 + 0,500) \\ &= 0,6685. \end{aligned}$$

Logo, o valor aproximado de $\ln 2$ é $0,6685$. Assim, se usarmos a soma trapezoidal para uma divisão em mais partes iguais do intervalo $[1, 2]$, teremos um valor mais próximo do valor de $\ln 2$. Faremos isso com o uso do GeoGebra.

Construímos a função $y = \dfrac{1}{x}$ para algum intervalo de extremo inferior $x > 0$, neste caso iremos usar $(0, k]$ com $k > 2$. Para tal digitamos na caixa de entrada Função$[1/x, 0, 5]$, esse último valor indica até onde irá o intervalo de construção da função, dando um *enter* irá aparecer a função que já estavamos trabalhando. Faça um controle deslizante n, com intervalo 1 a 300 (ou mais) e incremento $0,1$. Façamos, então, a soma trapezoidal para obtermos a $\mathrm{A}(\mathbb{H}_1^2)$. Digitamos SomaTrapezoidal$[f, 1, 2, n]$ e damos um *enter*. Aparecerá a região que estamos querendo e, fazendo n percorrer, teremos na parte superior esquerda da tela o valor aproximado de $\ln 2$.

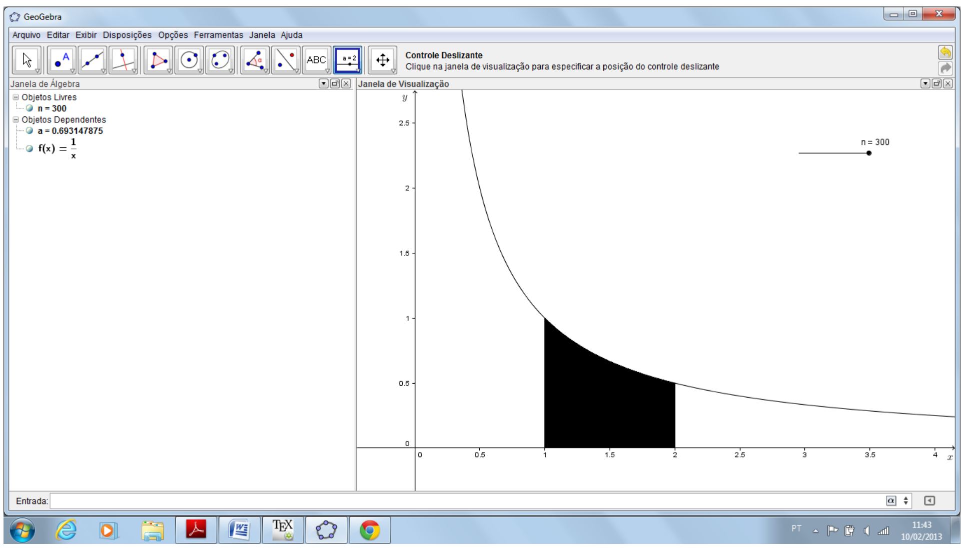


Figura 5.11: $\ln 2$ usando GeoGebra.

Teorema 5.6. *A função* $\ln x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *é logarítmica.*

Demonstração: Para que $\ln x$ seja logarítmica, ela deve gozar de duas propriedades: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, para todo $x, y > 0$ e também ser uma função crescente. Primeiramente, sabemos que $A\left(\mathbb{H}_a^b\right) = A\left(\mathbb{H}_{ak}^{bk}\right)$, para $k \in \mathbb{R}$ e $k > 0$. Então, $A\left(\mathbb{H}_x^{xy}\right) = A\left(\mathbb{H}_1^y\right)$. Independente da posição dos pontos 1, x e xy sobre o eixo das abscissas, vale

$$\begin{aligned} A\left(\mathbb{H}_1^{xy}\right) &= A\left(\mathbb{H}_1^x\right) + A\left(\mathbb{H}_x^{xy}\right) \\ &= A\left(\mathbb{H}_1^x\right) + A\left(\mathbb{H}_1^y\right). \end{aligned}$$

Por definição,

$$A\left(\mathbb{H}_1^{xy}\right) = \ln(xy),$$

temos $A(\mathbb{H}_1^x) = \ln x$ e $A(\mathbb{H}_1^y) = \ln y$. Então, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$. Agora, para provarmos que $\ln x$ é crescente, sejam $x, y \in \mathbb{R}_+$, com $x < y$. É fácil ver que existe $a > 1$ tal que $y = ax$. Então,

$$\ln y = \ln(ax) = \ln a + \ln x.$$

Como $a > 1$, temos $\ln a > 0$. Logo, $\ln y > \ln x$, como queríamos demonstrar. ■

Segundo [1], se f for uma função com domínio D, então o seu gráfico será o conjunto de pares ordenados $\{(x, f(x));\ x \in D\}$. Logo,o gráfico da função logaritmo natural é o conjunto G de pontos no plano cartesiano tal que

$$G = \{(x, \ln x); x > 0\}.$$

Com o auxílio do GeoGebra, podemos traçar o gráfico da função $f(x) = \ln x$, para $x > 0$. Digitamos, na caixa de entrada, $\ln x$ e após um *enter*, aparecerá o seguinte gráfico:

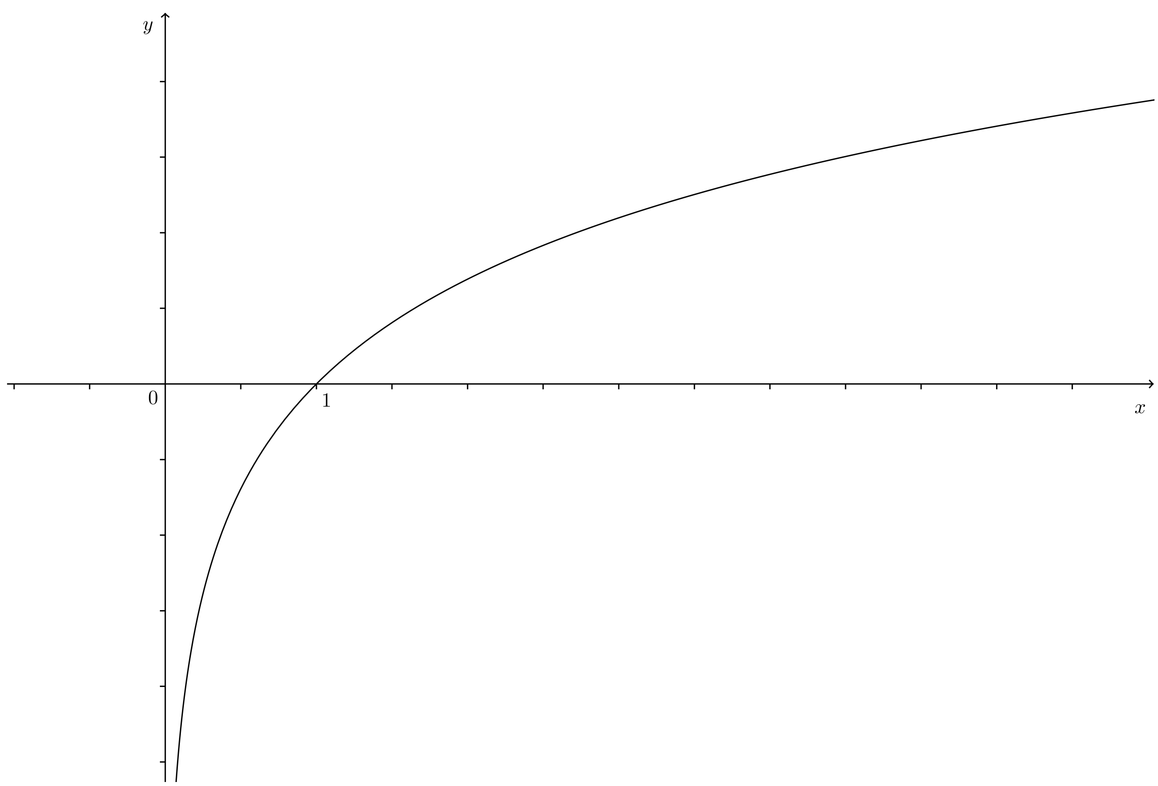


Figura 5.12: Gráfico de $f(x) = \ln x$, para $x > 0$

O conhecimento desse gráfico é importante para o estudo dos logaritmos. Lembramos que por ser uma função logarítmica, ela é crescente, ilimitada tanto inferiormente como superiormente e também é sobrejetora.

Capítulo 6

O número e

A função $\ln x$ é sobrejetora, por este motivo, existe um número real, representado por e, tal que

$$\ln e = 1.$$

Desta forma, definimos o número e como a base do logaritmo natural, chamado constante de Euler.

Observação 6.1. As expressões ln $x = 1$ e $x = e$ são equivalentes.

Teorema 6.2. *Para $x \neq 0$, tem-se* $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$.

Demonstração: Consideremos a definição de faixa da hipérbole apresentada no Capítulo 5 e mostraremos que o limites laterais existem e são iguais ao número e.

Suponhamos, primeiramente $x > 0$. A área da faixa $\mathbb{H}_1^{x+1}$ é representada por $\ln(x+1)$. Esta área está contida em um retângulo cuja base é x e cuja altura é 1. Assim, $\ln(x+1) < x$, para todo $x > 0$. Ainda a área da faixa $\mathbb{H}_1^{x+1}$ é maior que a área do retângulo de base x e altura $\dfrac{1}{1+x}$. Assim,

$$\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x,$$

para $x > 0$. Dividindo esta expressão por x, temos

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1)^{\frac{1}{x}} < 1, \quad \forall x > 0.$$

Sabendo que a função exponencial é crescente (veja [3]), temos $e^{\frac{1}{x+1}} < (x+1)^{\frac{1}{x}} < e$. Como

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x+1}} = e \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} e = e,$$

pelo Teorema do Confronto (por exemplo, veja [11]), concluímos que

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}=e.$$

Analogamente, suponhamos $x<0$. Então, $x+1>0$ e $\ln(x+1)$ está bem definido. Como $-\ln(x+1)$ é a área da faixa de hipérbole $\mathbb{H}_1^{x+1}$ a qual está contida em um retângulo cuja base é $-x$ e altura $\dfrac{1}{x+1}$, temos

$$-\ln(x+1)<\frac{-x}{x+1},\qquad \forall\, x>0.$$

Ainda, a área da faixa $\mathbb{H}_1^{x+1}$ é maior que a área do retângulo de base $-x$ e altura 1, logo $-\ln(x+1)>-x$, com $-x>0$, donde $-x<-\ln(x+1)<\dfrac{-x}{x+1}$. Dividindo essa expressão por $-x$ $(-x>0)$, temos

$$1<\frac{\ln(x+1)}{x}<\frac{1}{x+1}.$$

Como e^x é uma função crescente,

$$e<(x+1)^{1/x}<e^{\frac{1}{x+1}}.$$

Novamente, pelo Teorema do Confronto, concluímos que

$$\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{1/x}=e.$$

Consequentemente,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

■

Teorema 6.3. *Para $n\neq 0$, tem-se* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$

Demonstração: Seja $x=\dfrac{1}{n}$, $n\neq 0$. Para que $x\to 0$ devemos ter $n\to\infty$. Assim,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

■

Agora, estimaremos o valor de e usando o GeoGebra. Construímos a função $y=\dfrac{1}{x}$ com um intervalo de extremo inferior $x>0$, por exemplo, $(0,10]$.

Digitando na caixa de entrada Função$[1/x,0,10]$ e dando um *enter* aparecerá o gráfico da hipérbole. Construa um controle deslizante com nome a, incremento 0,0001 e com variação

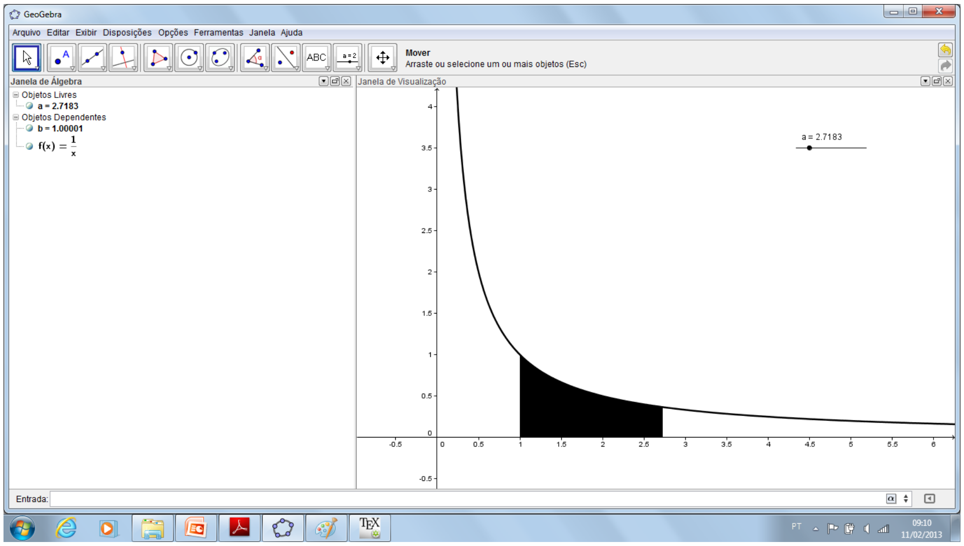


Figura 6.1: e obtido com uso de GeoGebra

de 0 a qualquer outro valor maior que 3. Usando soma trapezoidal construiremos a área da faixa $\mathbb{H}_1^a$. Digitamos na caixa de entrada SomaTrapezoidal$[f, 1, a, 300]$ dando um *enter* teremos a área desejada fazendo o controle deslizar até que apareça na parte superior o valor 1 para a área, o valor que aparecerá no controle será e. Observe a Figura 6.1.

Neste caso, usamos uma aproximação com quatro casas decimais e encontramos $2,7182 < e < 2,7183$. Havendo interesse em mais casas decimais, regulamos a aproximação desejada na parte superior, na barra de ferramentas do GeoGebra, em Opções - Arredondamento e selecionar o número de casas que precisar. Ressaltamos que é importante não esquecermos de refinar o incremento do controle.

Capítulo 7

Mudança de base

No capítulo anterior definimos que e é a base dos logaritmos naturais e é o valor de x para que $A(\mathbb{H}_1^x)$ seja 1. Estaremos mostrando o significado geométrico de logaritmos em outra base através das áreas das faixas da hipérbole $y = \dfrac{k}{x}$ com $k > 0$ e $x > 0$.

Para concluirmos nosso estudo sobre logaritmos, neste capítulo estaremos tratando de bases quaisquer, proporcionando mecanismos que associem essas outras bases como logaritmo natural. Para isso, considere k uma constante real positiva. Em vez de $y = \dfrac{1}{x}$, com $x > 0$, podemos considerar a hipérbole $y = \dfrac{k}{x}$, definida para $x > 0$, a fim de definirmos logaritmos. Para cada valor de k escolhido, teremos o que chamaremos de sistema de logaritmos de base k.

Para verificarmos a relação entre a hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$ e $y = \dfrac{k}{x}$ usaremos o GeoGebra. Escolhemos, por exemplo, $k = 2$. Construímos os gráficos de $y = \dfrac{1}{x}$ e $y = \dfrac{2}{x}$ com $x > 0$. Digitamos na caixa de entrada Função$[1/x, 0, 10]$, após um *enter*, faremos o mesmo processo digitando Função$[2/x, 0, 10]$. Agora, em ambas as funções construímos a soma trapezoidal em um intervalo $[1, b]$, com $b > 1$. Observemos a Figura 7.1.

Nesse caso, na figura, observando o lado superior esquerdo, comprovamos que a área de uma faixa é o dobro da outra. Ainda, se usarmos $k = 3$ teremos o triplo, e assim segue para qualquer valor k positivo, inclusive valores menos que 1, ou seja a proporção é mantida para qualquer escolha de k.

Quando $k = 1$, o que é uma escolha mais natural, segundo [3], chamamos os logaritmos de *logaritmo natural*.

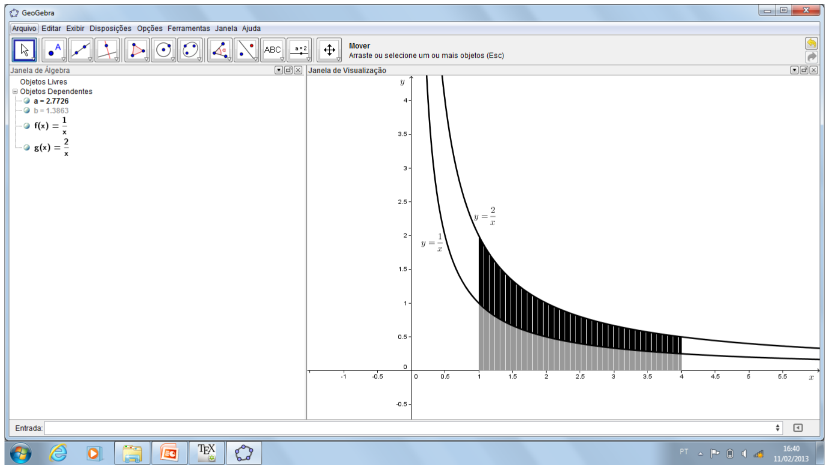


Figura 7.1: Comparativo das áreas das faixas $\mathbb{H}_a^b$ e $\mathbb{H}(2)_a^b$

Dados dois pontos de abscissa a e b no eixo x, indicaremos por $\mathbb{H}(k)_a^b$ a faixa da hipérbole $y = \dfrac{k}{x}$ compreendida entre as retas $x = a$ e $x = b$. Quando $k = 1$, não há necessidade de mudança em nossa notação.

Teorema 7.1. *A área de $\mathbb{H}(k)_a^b$ é igual a k vezes a área de $\mathbb{H}_a^b$.*

Demonstração: Consideremos $[c,d] \subset [a,b]$ e um retângulo de base $[c,d]$, inscrito na hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$ com altura igual a $\dfrac{1}{d}$. Um retângulo de mesma base, inscrito na hipérbole $y = \dfrac{k}{x}$, tem altura $\dfrac{k}{d}$. Logo, a área do segundo é k vezes a área do primeiro. Para toda subdivisão do intervalo $[a,b]$ determinamos dois polígonos retangulares, um inscrito na faixa $\mathbb{H}(k)_a^b$ e o outro inscrito na faixa $\mathbb{H}_a^b$. Segue que a área do segundo é k vezes a área do primeiro, ou seja,

$$A\left(\mathbb{H}(k)_a^b\right) = k\,A\left(\mathbb{H}_a^b\right).$$

∎

Escolhida a constante real $k > 0$, introduzimos um novo sistema de logaritmos, por definição, para cada $x > 0$

$$log x = A\left(\mathbb{H}(k)_1^x\right).$$

Como $A\left(\mathbb{H}(k)_1^x\right) = k\,A\left(\mathbb{H}_1^x\right) = k \ln x$, então

$$\log\, x = k \ln\, x.$$

Agora, como definimos, se a é a base então $\log\, a = 1$, assim encontramos uma relação para k substituindo em $\log\, x = k \ln\, x$, daí $\log\, a = k \ln\, a$, concluímos

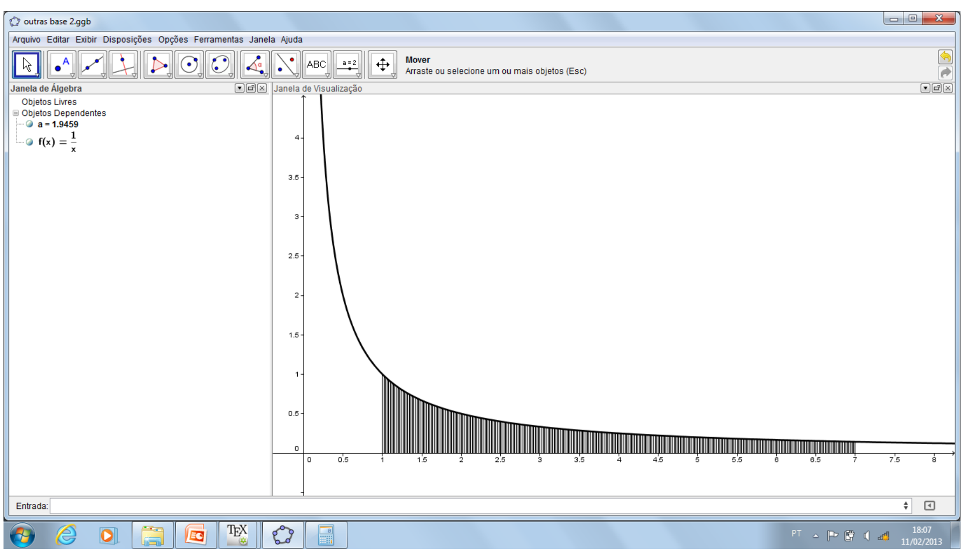
$$k = \frac{1}{\ln\, a}, \quad \text{ onde } a = e^{1/k}.$$

Desta forma, $\log\, x$ é a área da faixa da hipérbole $\mathbb{H}(k)_1^x$ e $k = \dfrac{1}{\ln\, a}$. Ainda, $\log\, x$ é a área compreendida entre 1 e x da faixa da hipérbole

$$y = \frac{1}{x \ln\, a}.$$

$\blacksquare$

Para indicarmos logaritmo de base a de um número real $x > 0$ usamos a notação $\log_a\, x$. E vemos que $\log_a\, x = \dfrac{\ln\, x}{\ln\, a}$. Assim, o significado de $\log_2\, 7$ é o número real associado a $\dfrac{\ln\, 7}{\ln\, 2}$ que é $\dfrac{1}{\ln\, 2} A\left(\mathbb{H}_1^7\right)$ que pode ser calculado usando o GeoGebra: na caixa de entrada digitamos Função$[1/x, 0, 10]$ e damos um *enter*. Fazemos a soma trapezoidal digitando SomaTrapezoidal$[f, 1, 7, 300]$, assim, teremos $A\left(\mathbb{H}_1^7\right)$.



Então, dividindo o resultado que aparece na parte superior esquerda da tela por $\ln\, 2 = 0,6931$, encontramos

$$\log_2\, 7 = \frac{1}{\ln\, 2} A\left(\mathbb{H}_1^7\right) = \frac{1}{0,6931} 1,9459 = 2,8075.$$

Um número $a > 0$ poderia ser tomado como base de um sistema de logaritmos. No início desse capítulo usamos a hipótese $k > 0$ e estamos levando em conta apenas base a maior do que 1, pelo fato de $a = e^{1/k}$. A relação

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

mesmo quando $0 < a < 1$, poderia definir logaritmo $\log_a x$, notando-se apenas que, neste caso, como $lna < 0$, os números entre 0 e 1, terão logaritmos positivos, enquanto os números maiores do que 1 terão logaritmos negativos. Quando $0 < a < 1$, podemos fazer $b = \dfrac{1}{a}$. Nesse caso, teremos $b > 1$ e

$$\log_a x = -\log_b x.$$

Assim, não existe necessidade de estudarmos logaritmos com base entre 0 e 1. Notemos, ainda, que se considerarmos $0 < a < 1$, então $log_a x$ será uma função decrescente, o que contradiz a definição de função logarítmica.

Teorema 7.2. *Seja $a > 1$, a função $\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é uma função logarítmica.*

Demonstração: Temos que $log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. Assim,

$$\log_a (xy) \quad = \quad \frac{\ln x + lny}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a} = \log_a x + \log_a y.$$

Ainda, $\ln a > 0$ pois $a > 1$. Agora, sejam $x, y \in \mathbb{R}_+$ com $x < y$. Então,

$$\ln x < ln\, y \Rightarrow \frac{\ln x}{\ln a} < \frac{\ln y}{\ln a} \Rightarrow \log_a x < \log_a y.$$

Por se tratar de uma função logarítmica, vale a fórmula de mudança de base que vimos no Capítulo 3.

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b x.$$

Exemplo 7.3. Usando $a = 10$ e $b = e$, na relação de mudança de base temos $\ln x = \log_{10} x \cdot \ln 10$. Para obtermos uma tábua de logaritmos de base 10, chamado decimais, citados em [3], p. 91, dividimos os logaritmos naturais por ln 10. No caso de uma tábua dos logaritmos naturais, multiplicamos os decimais por $\ln 10 = 2,3025$, valor facilmente verificado com o uso do GeoGebra.

Definição 7.4. Sejam $a, x \in \mathbb{R}$ com $a > 0$. A potência a^x é o único número real positivo cujo logaritmo natural é igual a $x \ln a$.

Quando $x \in \mathbb{Q}$, digamos $x = \dfrac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ e $q \neq 0$, o número real positivo $\sqrt[q]{a^p}$ terá logaritmo natural igual a $\dfrac{p}{q} \ln a$, ou seja, $x \ln a$, pois $\ln(a^r) = r \ln a$, para todo $a > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$. Logo, a Definição 7.4 vale para números racionais.

Tendo a^x definido para todo número x real, podemos calcular seu logaritmo em um sistema de base $b > 0$ qualquer da seguinte maneira

$$\log_b a^x = \frac{\ln a^x}{\ln b} = x \frac{\ln a}{\ln b} = x \log_b a.$$

Em especial, quando $a = b$, vem $\log_a (a^x) = x$. Logo,o logaritmo de um número $y = a^x$ é o expoente x ao qual se deve elevar a base a a fim de obter o número y. Em outras palavras, é a definição oferecida nos livros didáticos [2, 4, 5, 6].

Em particular,

$$\log_b a^x = x \log_b a,$$

para $b = e$ nos fornece $\ln a^x = x \ln a$, ou seja,

$$a^x = e^{x.\ln a}.$$

Capítulo 8

Usando o GeoGebra em sala de aula

Para testarmos a eficência da construção de conceitos geométricos de logaritmos usando o GeoGebra em sala de aula, resolvemos aplicá-los em aulas para alunos do ensino médio. Evidentemente não usamos a linguagem das aulas de graduação, mas não alteramos as definições apresentadas neste trabalho. Selecionamos alguns alunos do terceiro ano de um colégio privado de Maringá. A escolha dos sujeitos se deu pelo interesse dos mesmos quanto à explanação e convite para o trabalho, estes que já tiveram algum contato com logaritmos de forma tradicional como apresentado nos livros didáticos [2, 4, 5, 6] do ensino médio. Percebemos que após o convite, os alunos interessados foram aqueles que tinham uma certa afinidade com a Matemática. Para iniciarmos as atividades, cada aluno trouxe um notebook com o GeoGebra instalado. Essas atividades se deram em cinco semanas, nos dias 7, 14, 21 e 28 de novembro e 5 de dezembro de 2012, sempre as quartas-feira no período de 13:30h as 15:30h nas dependências do colégio.

Na primeira semana fizemos a introdução e revisão de alguns tópicos básicos de potenciação. Nesse dia foi notório a dificuldade dos alunos em usar expoente racional.

Na segunda semana começamos a trabalhar com o GeoGebra primeiramente com comandos básicos que iríamos utilizar em nossa construção. Percebemos a satisfação dos alunos em manusear o software e também foram discutidos alguns métodos de aproximação de área entre um intervalo do eixo x e curvas que eram oferecidas, como soma de Riemann e soma trapezoidal.

Na terceira semana definimos a área da faixa da hipérbole e a propriedade fundamental. Mostramos as variações que ocorrem na área quando variamos k, indicado no Capítulo 5.

Na quarta semana descrevemos o que é logaritmo natural e definimos o número e.

Por fim, na quinta semana, construímos a ideia de logaritmo em base qualquer mostrando o significado geométrico da expressão $\log_a b$ com $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$.

Com exceção do primeiro dia, sempre usamos o auxílio do GeoGebra em nossas construções. Os pontos positivos que foram evidentemente notados são: O interesse dos alunos em manusear o GeoGebra e buscar mecanismos para construções de gráficos; Os alunos fizeram ponte entre a sequência do conteúdo abordado; Houve uma reelaboração do conceito que eles tinham sobre logaritmos; Apesar das dificuldades apresentadas, em sua maioria as atividades foram realizadas.

As atividades realizadas demonstraram que o conteúdo de logaritmos nos trouxe várias possibilidades de trabalho de cunho pedagógico. Percebemos a satisfação dos alunos em ter um reconhecimento mais profundo sobre os conceitos e as propriedades dos logaritmos.

De acordo com esses resultados consideramos que nossos objetivos foram alcançados neste trabalho, pois as atividades foram desenvolvidas com sucesso e nos mostraram que a sequência aplicada contribuiu para que o aprendizado dos estudantes ocorresse de forma significativa e extremamente satisfatória.

Capítulo 9

Conclusão

Acreditamos que a aprendizagem é particularmente efetiva quando se constrói algo para outros experimentarem, que criar oportunidades, para que outras pessoas possam explorar seus conhecimentos através de atividades, é uma forma de possibilitar que percebam a contribuição que GeoGebra oferece, proporcionando momentos enriquecedores de estudo e construção de aprendizado. Esse trabalho evidenciou o uso do GeoGebra na construção dos conceitos de Logaritmos de forma construtiva buscando uma alternativa de ensino.

Evidentemente a aplicação primeira dos logaritmos hoje é substituída pelas calculadora, mas as vantagens que os os logaritmos apresentam para as outras ciências, de forma alguma, serão substituídas por qualquer advento eletrônico.

Esperamos que este trabalho tenha trazido ao leitor um momento de reflexão sobre o tema logaritmo e que ele possa levar essa sequência de abordagem para as demais esferas de estudos e trabalhos.

Bibliografia

[1] Stewart, J., *Cálculo*. Cengage Learning, São Paulo, Volume 1 - 6ª edição (2010).

[2] Dante, J. L., *Conecte Matemática*. Ática, São Paulo, Volume 1 (2012).

[3] Lima, E. L., *Logaritmos*. SBM, Rio de Janeiro (2010).

[4] Smole, K., Diniz, M. *Matemática*. Saraiva, São Paulo, Volume 1 (2003).

[5] Paiva, M. R., *Matemática*. Moderna - Plus, São Paulo, Volume 1 (2010).

[6] Dante, J. L., *Matemática, Contexto e Aplicações*. Ática, São Paulo, Volume 1 (2010).

[7] Anais do II Simpósio de Matemática e Matemática Industrial - SIMMI'2010, Vol. 1, ISSN 2175-7828.

[8] Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática - SBHM 2009.

[9] Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática Comunicação Científica - Salvador (2010).

[10] www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/napier.htm - Acesso em 12/01/2013

[11] Leithold, L., *O Cálculo com Geometria Analítica*. Harbra, São Paulo, Volume 1 - 3ª edição (1990).