Disciplina(s)/código atendida(s):
Lista 4

Data da lista	08 e 11 de Julho de 2024
Preceptor(a)	Felipe Yamamoto Tenedine
Curso(s) atendido(s)	Estatística
Orientador(a)	Walkiria M. de O. Macerau

Exercício

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N(0, \sigma^2)$.
(i) Encontre o limite inferior da variância dos estimadores não viciados de σ^2.
(ii) Encontre uma estatística suficiente para σ^2.
(iii) Obtenha a partir desta estatística um estimador não viciado para σ^2.
(iv) Verifique se este estimador é eficiente.

Solução

(i) Limite inferior da variância dos estimadores não viciados de σ^2

Para encontrar o limite inferior da variância dos estimadores não viciados de σ^2, usamos a desigualdade de Cramér-Rao.

Para uma variável aleatória $X \sim N(0, \sigma^2)$, a função de verossimilhança é dada por:

$$L(\sigma^2; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$$

O logaritmo da função de verossimilhança é:

$$\log L(\sigma^2; x_1, x_2, \ldots, x_n) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2$$

A informação de Fisher é dada por:

$$I(\sigma^2) = -E\left[\frac{\partial^2 \log L(\sigma^2; x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(\sigma^2)^2}\right]$$

Calculando a segunda derivada do logaritmo da função de verossimilhança:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial(\sigma^2)^2} = \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{(\sigma^2)^3}$$

Tomando a esperança da segunda derivada:

$$E\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial(\sigma^2)^2}\right] = \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{E\left[\sum_{i=1}^n x_i^2\right]}{(\sigma^2)^3}$$

Como $X_i \sim N(0, \sigma^2)$, temos $E[X_i^2] = \sigma^2$, então:

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] = n\sigma^2$$

Portanto:

$$I(\sigma^2) = \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{n\sigma^2}{(\sigma^2)^3} = \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{n}{\sigma^4}$$
$$= \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{2n}{2(\sigma^2)^2} = \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{2n}{2(\sigma^2)^2} = \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{n}{2(\sigma^2)^2}$$
$$I(\sigma^2) = \frac{n}{2(\sigma^2)^2}$$

O limite inferior da variância dos estimadores não viciados de σ^2 é dado por $\frac{1}{I(\sigma^2)}$:

$$\text{Var}(\hat{\sigma}^2) \geq \frac{1}{\frac{n}{2(\sigma^2)^2}} = \frac{2\sigma^4}{n}$$

(ii) Estatística suficiente para σ^2

Para determinar uma estatística suficiente para σ^2 usando o Teorema da Fatoração de Neyman-Fisher, precisamos escrever a função de verossimilhança e fatorá-la de forma que uma das partes dependa dos dados apenas por meio da estatística suficiente.

Dada uma amostra $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de uma variável normal $N(0, \sigma^2)$, a função de verossimilhança é:

$$L(\sigma^2; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

Vamos reescrever isso para aplicar o Teorema da Fatoração de Neyman-Fisher.

Podemos ver que:

$$L(\sigma^2; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}T\right)$$

onde $T = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Para verificar que T é suficiente para σ^2, podemos verificar se a função de verossimilhança pode ser fatorada na forma $g(T; \sigma^2)h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, onde g depende dos dados apenas através de T.

De fato, podemos escrever:

$$L(\sigma^2; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}T\right)$$

Aqui, $g(T; \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}T\right)$ e $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$.

Portanto, $T = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ é uma estatística suficiente para σ^2.

(iii) Estimador não viciado para σ^2

Agora, usaremos a estatística suficiente $T = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ para obter um estimador não viciado para σ^2.

Sabemos que $X_i \sim N(0, \sigma^2)$. Portanto, a esperança de X_i^2 é:

$$E[X_i^2] = \sigma^2$$

Utilizando a linearidade da esperança, temos:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} E[X_i^2] = n\sigma^2$$

Dividindo ambos os lados por n, obtemos:

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \sigma^2$$

Portanto, o estimador:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

é um estimador não viciado para σ^2.

(iv) Eficiência do estimador

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, podemos padronizar X para obter uma variável normal padrão Z. A padronização é feita subtraindo a média μ e dividindo pelo desvio padrão σ:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Essa transformação converte X, que tem média μ e variância σ^2, em uma variável normal padrão Z, que tem média 0 e variância 1:

$$Z \sim N(0, 1)$$

A distribuição qui-quadrado surge quando consideramos a soma dos quadrados de variáveis normais padrão independentes. Se $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição normal padrão ($Z_i \sim N(0, 1)$), então a soma dos quadrados dessas variáveis:

$$Y = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2$$

tem uma distribuição qui-quadrado com k graus de liberdade.

Para uma variável aleatória $Y \sim \chi^2(k)$: - A esperança de Y é $E[Y] = k$. - A variância de Y é $\text{Var}(Y) = 2k$.

Vamos utilizar essas propriedades para analisar a eficiência do estimador $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

Como $X_i \sim N(0, \sigma^2)$, sabemos que X_i^2 segue uma distribuição qui-quadrado escalada com 1 grau de liberdade. Portanto, $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ segue uma distribuição qui-quadrado escalada com n graus de liberdade:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \sigma^2 \chi^2(n)$$

Usando a propriedade da variância das distribuições qui-quadrado, temos que a variância de $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ é:

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right) = 2n\sigma^4$$

Dividindo por n^2 para encontrar a variância do estimador $\hat{\sigma}^2$:

$$\text{Var}\left(\hat{\sigma}^2\right) = \frac{1}{n^2} \cdot 2n\sigma^4 = \frac{2\sigma^4}{n}$$

O limite inferior da variância dos estimadores não viciados de σ^2, dado pela desigualdade de Cramér-Rao, é:

$$\text{Var}(\hat{\sigma}^2) \geq \frac{2\sigma^4}{n}$$

Como a variância do estimador $\hat{\sigma}^2$ é igual a este limite inferior, concluímos que:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

é um estimador eficiente para σ^2.