UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Apostila de apoio às disciplinas de Física:

Aritmética, Álgebra e Geometria

Maringá, Paraná
2023

Este não é um material original, sendo aqui apresentado a revisão de uma coletânea de diversos materiais encontrados em livros-textos e apostilas de auxílio didático.

Sumário

1 Aritmética

1.1 Propriedade comutativa da adição

$$A + B = B + A$$

1.2 Propriedade associativa da adição

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

1.3 Primeira Lei da Multiplicação

O produto do número **zero** com outro número natural qualquer n é igual a **zero**.

$$0 \cdot n = 0$$

1.4 Segunda Lei da Multiplicação

O produto do número **um** com qualquer outro número natural n é igual ao número n.

$$1 \cdot n = n$$

1.5 Terceira Lei da Multiplicação

Dados três números naturais **a**, **b** e **c**, sabemos que:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

As multiplicações entre números naturais **maiores** ou **iguais** a dois podem ser definidas como a **adição de sucessivas parcelas iguais**. Por exemplo:

$$4 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5$$
$$5 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4$$

1.6 Propriedade comutativa da multiplicação

$$A \cdot B = B \cdot A$$

1.7 Propriedade associativa da multiplicação

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Potenciação: sucessivas multiplicações de fatores iguais. É aplicada a dois números apenas, sendo um deles a **base** que indica o valor destes fatores enquanto o outro número que é o **expoente** indica a quantidade de vezes que devemos multiplicar o número 1 pela base. Por exemplo:

$$7^0 = 1$$
$$7^1 = 1 \cdot 7 = 7$$
$$7^2 = 1 \cdot 7 \cdot 7 = 49$$
$$7^3 = 1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$$
$$7^4 = 1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2.401$$

Em uma expressão aritmética contendo adições, multiplicações e potenciações, as operações devem seguir a seguinte ordem: primeiro as potenciações, depois as multiplicações e por fim as adições.

2 Operações básicas no universo inteiro

- Considerando dois números naturais a e b, diferentes entre si, onde existe um outro número natural d que indica quanto falta para que o menor entre os números a e b alcance maior deles. Portando d seria a diferença entre a e b. Podemos intuir, então, que a sentença $b + d = a$, com $b < a$, significa que $d = a - b$.

- Na prática, quando escrevemos um número omitimos o sinal $(+)$ para as quantidades positivas e usamos o sinal (-) não como operador de subtração, mas sim para indicar o oposto de um número em relação à origem, isso quer dizer que para qualquer número inteiro **a** temos que **-a** indica o número oposto de **a** em relação ao zero. Assim, a expressão $-(-a) = a$.

- Além disso, pode-se considerar a subtração $8 - 5$ como a adição $8 + (-5)$ e proceder da seguinte forma: a partir do número oito, conta-se cinco posições no sentido da origem chagando ao número 3 e, para efetuar $5 - 8$, deve-se partir do número cinco e contar oito posições no sentido da origem, ultrapassando-a, e chegando ao número -3.

- Para quaisquer números inteiros **A, B** e **C**, são válidas as seguintes propriedades:

$$A - B = -B + A$$
$$A - B - C = A - (B + C)$$
$$A - (B - C) = A - B + C$$

- Deve-se entender que todo número negativo resulta do produto entre o número -1 e um número positivo. Com isso temos que o número -3, por exemplo, é o produto $-1 \cdot 3$, onde omitimos o fator 1.

- Para indicar uma potência com base negativa, devemos fazer o uso dos parênteses: $(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = 9$.

- Ainda no universo natural, a divisão é uma operação aplicada apenas a dois números (dividendo e divisor) que resulta em dois possíveis valores chamados de quociente e resto. Considere **N** e **d** dois números naturais, tais que **N** divido por **d** produz um quociente **q** e um resto **r**, onde esses quatro números obedecem às seguintes condições:

$$\begin{cases} N = q \cdot d + r \\ \quad 0 \leq r < d \end{cases}$$

  Desse modo, pode-se perceber que não existe divisão em que o divisor é zero, pois sendo $d = 0$, não existe número **r** que satisfaça à desigualdade $0 \leq r \leq 0$.

  Se na divisão de um número inteiro **N** por outro número inteiro **d** der zero, sabemos que o número **N** é divisível por **d** ou que **N** é múltiplo de **d**, e ainda que o número **d** é um divisor do numerador **N**.

- Há ainda mais duas operações básicas no universo dos números inteiros: o mínimo múltiplo comum (**mmc**) e máximo divisor comum (**mdc**), podendo ser aplicados a dois ou mais números inteiros e têm propriedades associativa e comutativa.

  Sendo **n** um número inteiro, considere os conjuntos **M(n)** e **D(n)** dos múltiplos e dos divisores comuns positivos do número **n** respectivamente. Por exemplo:

$$M(6) = [6, 12, 18, \mathbf{24}, 30...]$$
$$M(8) = [8, 16, \mathbf{24}, 32, 40...]$$
$$D(6) = [1, \mathbf{2}, 3, 6]$$
$$D(8) = [1, \mathbf{2}, 4, 8]$$

Assim, temos que o mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum entre o número 6 e o número 8 são, respectivamente, 24 e 2. Os resultados serão sempre positivos, mesmo quando essas operações sejam aplicadas a números negativos.

3 Operações básicas no universo racional

- A notação matemática para quantidades racionais possuem duas formas diferentes: a fracionária e a decimal.

- As operações básicas (adição, subtração e multiplicação) do universo racional são as mesmas do universo inteiro, uma vez que o universo inteiro está dentro do universo racional. Na divisão há uma grande diferença entre esses universos, onde nos números racionais a divisão de dois números só produz o quociente.

- Na divisão não exata entre dois números inteiros **N** e **d**, primeiro executamos a divisão no universo dos inteiros. Depois disso, escrevemos uma vírgula no quociente e acrescentamos zeros ao resto, continuando a divisão até que não haja mais resto ou que algum resto se repita (dízima periódica).

- Adições e subtrações de números racionais na forma decimal devem ser feitas alinhando-se os termos dessas operações pela vírgula.

- Na forma fracionária, as adições e subtrações de números racionais são executadas apenas entre seus numeradores quando todas têm o mesmo denominador. Quando não possuem o mesmo denominador, deve-se reescrevê-la com um denominador comum. Uma das formas para isso é realizar o produto dos denominadores; considere **a**, **b**, **c** e **d** números inteiros com $c \cdot d \neq 0$, temos que:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}$$

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} - \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}$$

  No lugar do produto $c \cdot d$ também pode ser usado o mínimo múltiplo comum dos denominadores das frações operadas.

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{d'} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c'}}{\mathbf{m}}$$

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} - \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{d'} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c'}}{\mathbf{m}}$$

- **Multiplicação** de números racionais na forma **decimal** podem ser executadas ignorando-se a vírgula de todos os fatores. Depois, é só decidir onde colocar a vírgula no produto, e o número de casas decimais do produto é igual à soma do número de casas decimais dos fatores.

  Por exemplo, para multiplicar **0,15** por **2,4**, basta efetuar $\mathbf{15 \cdot 24 = 360}$ e considerar essa cifra com três casas decimais, isto é, $\mathbf{0{,}15 \cdot 2{,}4 = 0{,}360}$ ou simplesmente **0,36**.

- Já a **multiplicação** de números racionais na forma **fracionária**, basta multiplicar os numeradores e denominadores dos fatores.

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} \cdot \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}$$

Sendo **a**, **b**, **c** e **d** inteiros, com $\mathbf{c \cdot d \neq 0}$.

- **Divisões** de números racionais na forma **decimal** se dá igualando o número de casas decimais do dividendo e do divisor, e depois executando a divisão dos números inteiros que se obtém ignorando as vírgulas do dividendo e divisor. Assim temos que a divisão do número **0,15** por **2,4** é, reescrevendo e igualando as casas decimais, $\mathbf{0{,}15 \div 2{,}40 = 15 \div 240 = 0{,}0625}$.

- Por fim, as **divisões** de números racionais na forma **fracionária** são resolvidas multiplicando a fração do dividendo pela fração **inversa** do divisor.

$$\mathbf{\frac{a}{c} \div \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b}}$$

4 Radiciação

- Na expressão $\sqrt[n]{a} = b$, temos que **n** é o índice do radical e **a** é o radicando e o resultado **b** é chamado de raiz enésima do número **a**.

- Uma vez que $\mathbf{n} \in \{1, 2, 3, 4, 5...\}$, podemos separá-la em casos:

  1) Se $\mathbf{n = 1}$ não é necessário indicar a radiciação, já que para todo número **a** temos que $\sqrt[1]{a} = a$.

  2) Se $\mathbf{n = 2}$ não é necessário indicar o índice do radical, ou melhor, $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

  3) Se **n** é par, então na expressão $\sqrt[n]{a} = b$ os números **a** e **b** são necessariamente positivos e tais que $b^n = a$.

  4) Se **n** é ímpar, então na expressão $\sqrt[n]{a} = b$ os números **a** e **b** têm o mesmo sinal, tais que $b^n = a$.

  Encontrar a raiz quadrada de um número inteiro costuma ser feita por meio de tentativas, onde é possível que o número seja um quadrado perfeito ou que resultem em números com infinitas casas decimais como resultado.

- Propriedade 1: $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

- Propriedade 2: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$ ou $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \div p]{a^{m \div p}}$

- Propriedade 3: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ ou $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, sendo $b \neq 0$.

- Propriedade 4: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

- Propriedade 5: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

- Simplificação de radicais:

  1) Fatorar o valor em números primos;

  2) Escrever o número em forma de potência;

  3) Colocar a potência no radical e dividir por um mesmo índice do radical e o expoente da potência.

5 Racionalização de denominadores

- 1) Denominador com raiz quadrada:

  $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5 \cdot 5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

- 2) Raiz com índice maior que 2 no denominador:

  $\frac{2}{\sqrt[5]{9}} = \frac{2}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2 \cdot 3^3}} = \frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2 \cdot 3^2}} = \frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{2\sqrt[5]{27}}{3}$

- 3) Adição ou subtração de radicais:

$\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} = \frac{3\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)} = \frac{3\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} =$

$\frac{3\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{6-3} = \frac{3\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{3} = \sqrt{6}+\sqrt{3}$

6 Operações com radicais

6.1 Soma e Subtração

- 1) Radicais semelhantes:

$A\sqrt[n]{x} + B\sqrt[n]{x} - C\sqrt[n]{x} = (A+B-C)\sqrt[n]{x}$

- 2) Radicais semelhantes após simplificação:

$8\sqrt{6} + 9\sqrt{24} = 8\sqrt{6} + 9\sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3} = 8\sqrt{6} + (9 \cdot 2)\sqrt{2 \cdot 3} =$

$8\sqrt{6} + 18\sqrt{6} = (8+18)\sqrt{6} = 26\sqrt{6}$

- 3) Radicais não semelhantes:

$\sqrt{81} + \sqrt{25} = \sqrt{9^2} + \sqrt{5^2} = 9 + 5 = 14$

6.2 Multiplicação e Divisão

- 4) Radicais com mesmo índice:

$\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{(7 \cdot 4)} = \sqrt[3]{28}$

- 5) Radicais com índices diferentes:

$\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[2\cdot 3]{6^1 \cdot 2} \cdot \sqrt[2\cdot 3]{3^3 \cdot 1} = \sqrt[6]{6^2} \cdot \sqrt[6]{3^3}$

$\sqrt[6]{36} \cdot \sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{36 \cdot 27} = \sqrt[6]{972}$

7 Álgebra

7.1 Equações do primeiro grau

- As equações de primeiro grau são abertas apenas a uma única variável que também pode ser chamada de incógnita. Vale lembrar que toda equação do primeiro grau admite somente uma solução.

  O formato da equação é descrita como $\mathbf{ax}+\mathbf{b}=0$, onde **a** é o coeficiente principal podendo ter qualquer valor real e diferente de zero, e **b** é o termo independente que pode ter qualquer valor real.

  As equações do primeiro grau podem ser resolvidas subtraindo o termo independente **b** de ambos os membros, ou seja, podendo assumir a forma $x=\frac{-b}{a}$.

  Note que a equação $5\,(x-1)+7=2\,(3x+7)-4x$ também é uma equação do primeiro grau, tendo em vista que a variável é elevada a 1, e por isso não precisamos expressar o expoente. Para equações como esta, é preciso que haja a manipulação algébrica da mesma, a fim de simplificá-la e encontrar o seu conjunto solução. Nesse sentido, faremos:

$$5\,(x-1)+7=2\,(3x+7)-4x$$

$$5x-5+7=6x+14-4x$$

$$5x-6x+4x=14+5-7$$

$$3x=12\ \therefore\ x=\{4\}$$

  Quando a equação do primeiro grau se apresenta de forma fracionária, geralmente a representamos genericamente como : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$ com $b\neq 0$ e $d\neq 0$. Nesse formato, apenas resolvemos o produto cruzado dos fatores.

  Assim como no caso não fracionário, aqui também temos variações da equação genérica expressa de diversas formas. A expressão $\frac{1}{6}-\frac{x-1}{4}=\frac{x+5}{5}+\frac{3}{2}$ também é uma equação do primeiro grau. Nesse caso, temos o MMC $(6,4,2,5)=60$, a partir dai dividimos este MMC pelo denominador de cada fração e indicamos as multiplicações dos quocientes obtidos pelos respectivos numeradores. Reescrevendo matematicamente:

$$\tfrac{1}{6}-\tfrac{x-1}{4}=\tfrac{x+5}{5}+\tfrac{3}{2}$$

$$\tfrac{10\cdot 1-15(x-1)}{60}=\tfrac{12(x+5)+30\cdot 3}{60}$$

  Simplificando os denominadores, obtemos:

$$10-15x+15=12x+60+90$$

$$-12x-15x=60+90-10-15$$

$$-27x=125\ \therefore\ x=\left\{-\tfrac{125}{27}\right\}$$

8 Desigualdades

Antes de entrar necessariamente em inequações do primeiro grau, é preciso ter noção de que o significado designado ao símbolo $\neq$ é o contrário ao do símbolo $=$. Nesse sentido, as relações de igualdade possuem algumas propriedades de ação reflexiva, simétrica e transitiva .

Reflexiva	Simétrica	Transitiva
$a = a$	$a = b \leftrightarrow b = a$	$\begin{cases} a = b \\ b = c \end{cases} \leftrightarrow a = c$

Na relação de desigualdade, apenas a propriedade simétrica é admitida, ou seja, $a \neq b \leftrightarrow b \neq a$.

8.1 Princípio da tricotomia

Considere x e y como quaisquer números reais, onde o princípio da tricotomia nos garante que: $x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$. Os símbolos de $(<)$ *menor que* e $(>)$ *maior que* representam as desigualdades e estabelece uma relação de ordem.

A simbologia ainda pode ter uma segunda representação com sentido semelhante, mas com uma consideração a mais, sendo ela os sinais de $(\geq)$ *maior ou igual* e $(\leq)$ *menor ou igual*.

8.2 Inequações do primeiro grau

Os processos de resolução das inequações de primeiro grau, expressa por relações de ordem, devem ser estudados separadamente em dois casos:

- Se o coeficiente principal é positivo $(a > 0)$:

$$ax + b > 0 \leftrightarrow ax > -b \leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a}\right\}$$

  Ou então,

$$ax + b < 0 \leftrightarrow ax < -b \leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\right\}$$

- Se o coeficiente principal for negativo $(a < 0)$:

$$ax + b > 0 \leftrightarrow ax > -b \leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\right\}$$

  Ou ainda,

$$ax + b < 0 \leftrightarrow ax < -b \leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a}\right\}$$

8.3 Sistemas de equações do primeiro grau

Para sistemas de equações do primeiro grau que possuem as mesmas variáveis, é possível resolvê-lo por três métodos.

- Método da eliminação por substituição:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \quad \textbf{(I)} \\ 2x - y = 3 \quad \textbf{(II)} \end{cases}$$

Isolando a variável x na equação **I**, temos:

$$x = 5 - 3y \quad \textbf{(III)}$$

Substituindo essa expressão na equação **(II)**, obtemos:

$$\begin{aligned} 2(5 - 3y) - y &= 3 \\ 10 - 6y - y &= 3 \\ -7y &= -7 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de y na equação **III**, temos:

$$x = 5 - 3 \cdot 1 = 2$$

Portanto: S $= (2, 1)$

- Método da eliminação por comparação:

  Em cada equação do sistema é tirado o valor de uma mesma variável em função de todas as outras para depois igualar as expressões obtidas.

$$\begin{cases} 5x - 2y = 1 \quad \textbf{(I)} \\ 2x + y = 13 \quad \textbf{(II)} \end{cases}$$

Isolando a variável x nas equações **(I)** e **(II)**, temos:

$$x = \tfrac{1+2y}{5} \quad \text{e} \quad x = \tfrac{13-y}{2} \quad \textbf{(III)}$$

Igualando as expressões obtidas, temos:

$$\tfrac{1+2y}{5} = \tfrac{13-y}{2}$$

Efetuando o produto cruzado:

$$\begin{aligned} 2(1 + 2y) &= 5(13 - y) \\ 2 + 4y &= 65 - 5y \\ 9y &= 63 \;\leftrightarrow\; y = 7 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de y na equação **(III)**, obtemos então:

$$x = \frac{13-7}{2} = 3$$

Portanto: S = (3, 7)

- Método da eliminação por redução ao mesmo coeficiente:

  Escolhe-se uma das variáveis e multiplica-se cada equação pelo coeficiente da variável escolhida na outra equação. Exemplo:

$$\begin{cases} 4x + 7y = 9 & \textbf{(I)} \\ 3x - 8y = 20 & \textbf{(II)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 7y = 9 & \times (3) \\ 3x - 8y = 20 & \times (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 21y = 27 & \textbf{(III)} \\ 12x - 32y = 80 & \textbf{(IV)} \end{cases}$$

  Depois as equações obtidas são somadas ou subtraídas a fim de eliminar a variável escolhida. Nesse caso, subtraindo as equações **(III)** e **(IV)**, temos:

$$53y = -53 \leftrightarrow y = -1$$

  Substituindo o valor encontrado da variável y na equação **I**, obtemos:

$$4x + 7(-1) = 9 \leftrightarrow 4x = 16 \leftrightarrow x = 4$$

  Portanto S=(4, -1)

8.4 Equações do segundo grau

É toda sentença matemática expressa por $ax^2+bx+c = 0$ com $a \neq 0$. Nessa expressão o termo **a** chama-se coeficiente principal, **b** chama-se coeficiente secundário e **c** é o termo independente. Em uma equação do segundo grau é possível que haja duas soluções distintas, onde podem ser obtidas pela fórmula de Bhaskara ($x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$).

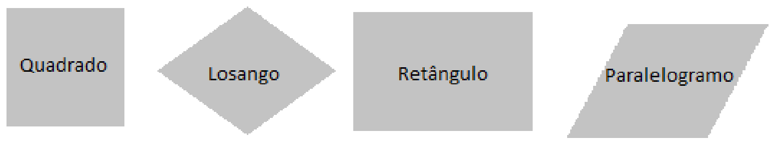
As soluções das equações do segundo grau também são chamadas de raízes da equação, podendo ter três configurações:

- Se ($\delta > 0$), a equação admite **duas** soluções reais distintas;
- Se ($\delta = 0$), a equação admite apenas **uma** solução real;
- Se ($\delta < 0$), a equação **não** admite solução real.

  Existem também equações do segundo grau no formato $ax^2+c = 0$ ou $ax^2+bx = 0$ com $a \neq 0$, chamadas de equações incompletas, onde também é possível resolvê-las pela fórmula de Bhaskara considerando apenas $b = 0$ e $c = 0$, respectivamente.

9 Geometria

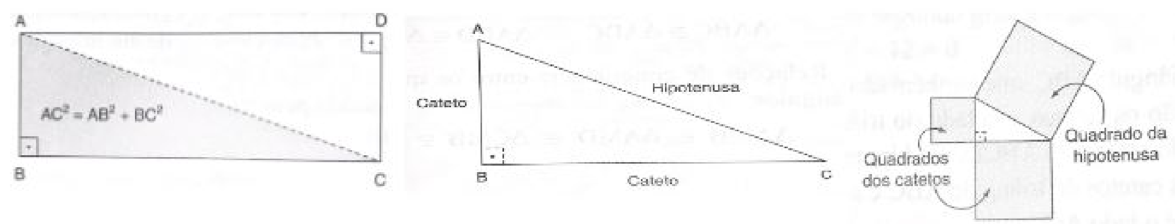
- Entre os quadriláteros mais importantes temos os paralelogramos e entre os paralelogramos estão os quadrados, os retângulos e os losangos:



- Dizemos que paralelogramo é qualquer quadrilátero que apresente dois pares de lados paralelos.
- Losango é um paralelogramo que possui os quatro lados com a mesma medida.
- Retângulo é o paralelogramo que têm todos os ângulos retos.
- Portanto, o quadrado é um losango e um retângulo ao mesmo tempo, já que possui os quatro lados de mesma medida e que têm todos os ângulos retos.

9.1 Teorema de Pitágoras

- O Teorema de Pitágoras é, em sua essência, uma afirmação que se refere às áreas de três quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo, podendo ser visualizado dessa forma:



9.2 Relações trigonométricas do triângulo retângulo

Na Geometria plana, temos que os ângulos que medem **menos** que 90° são ângulos agudos, os que medem exatamente 90° são ângulos retos e os que medem **mais** que 90° são ângulos obtusos.

O teorema angular de Tales mostra que as medidas dos ângulos internos (em graus) de qualquer triângulo é equivalente a 180°.

- Tendo em vista essa informação, existem três principais razões trigonométricas para definir o valor desses ângulos, sendo elas: o seno **(sen)**, o cosseno **(cos)** e a tangente **(tg)**. As relações são expressas da seguinte forma:

$$sen = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto}{medida\ da\ hipotenusa}$$

$$cos = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente}{medida\ da\ hipotenusa}$$

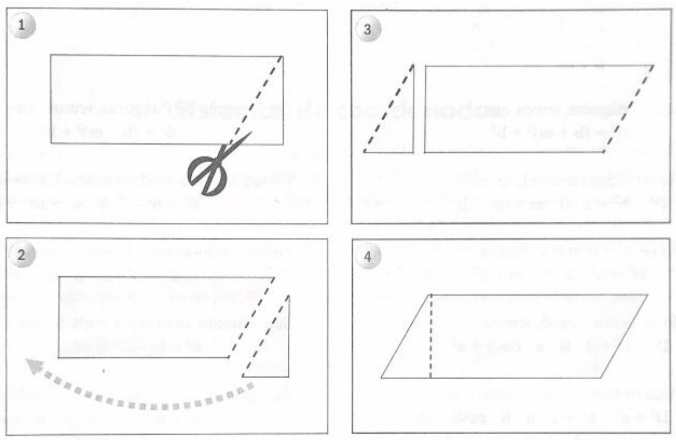
$$tg = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto}{medida\ do\ cateto\ adjacente}$$

Alguns ângulos costumam aparecer com mais evidência em exercícios e são chamados de **ângulos notáveis**, sendo eles os ângulos de 30° 45° 60°. Seus valores para *sen*, *cos* e *tg* são:

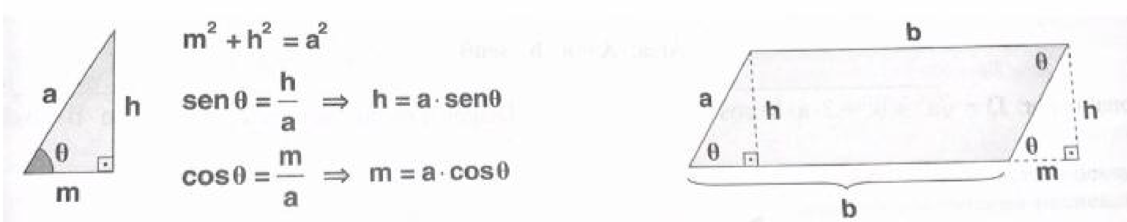
	30°	45°	60°
seno	$1/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1/2$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

9.3 Teorema dos cossenos

Na imagem a seguir temos a descrição de como construir um paralelogramo a partir de um pedaço de papel com a forma de um retângulo de base **b** e altura **h**.



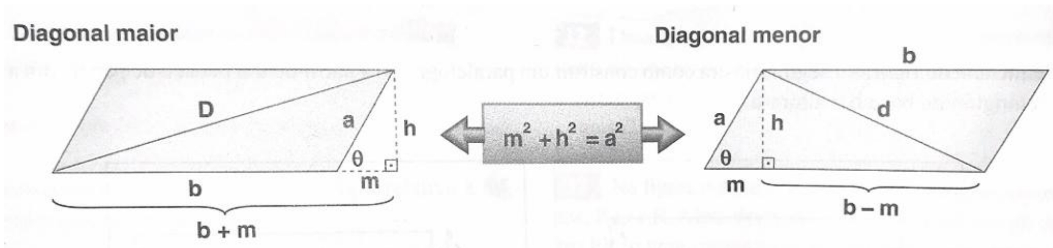
O triângulo retirado é um triângulo retângulo tal que um de seus catetos tem a medida **h** de altura do retângulo original. Sendo **m** o comprimento do outro cateto, **a** o comprimento da hipotenusa e θ a medida do ângulo agudo determinado na base do retângulo pelo recorte, temos:



Assim, as medidas dos lados do paralelogramo obtido nesse procedimento são a e b, e a medida dos seus ângulos agudos é θ. A área do retângulo original é dada pelo produto $b \cdot h$, e como o paralelogramo obtido é equivalente ao retângulo original, temos que sua área também é dada pelo produto $b \cdot h$. Como $h = a \cdot sen(\theta)$, podemos expressar a área do paralelogramo em função das medidas de seus dois lados e do seu ângulo agudo pela fórmula:

$$A = a \cdot b \cdot sen(\theta)$$

Agora, para calcular o comprimento de suas diagonais, devemos observar que cada uma delas é hipotenusa de um triângulo retângulo diferente.



Do Teorema de Pitágoras:
$D^2 = (b+m)^2 + h^2$
Efetuando o produto notável:
$D^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot m + m^2 + h^2$
Substituindo $m^2 + h^2$ por a^2:
$D^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot m + a^2$
Substituindo m por $a \cdot cos(\theta)$):
$D^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot a \cdot cos(\theta) + a^2$
Reorganizando, temos:
$D^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot cos(\theta)$

Do Teorema de Pitágoras:
$d^2 = (b-m)^2 + h^2$
Efetuando o produto notável:
$d^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot m + m^2 + h^2$
Substituindo $m^2 + h^2$ por a^2:
$d^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot m + a^2$
Substituindo m por $a \cdot cos(\theta)$:
$d^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot a \cdot cos(\theta) + a^2$
Reorganizando, temos:
$d^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos(\theta)$

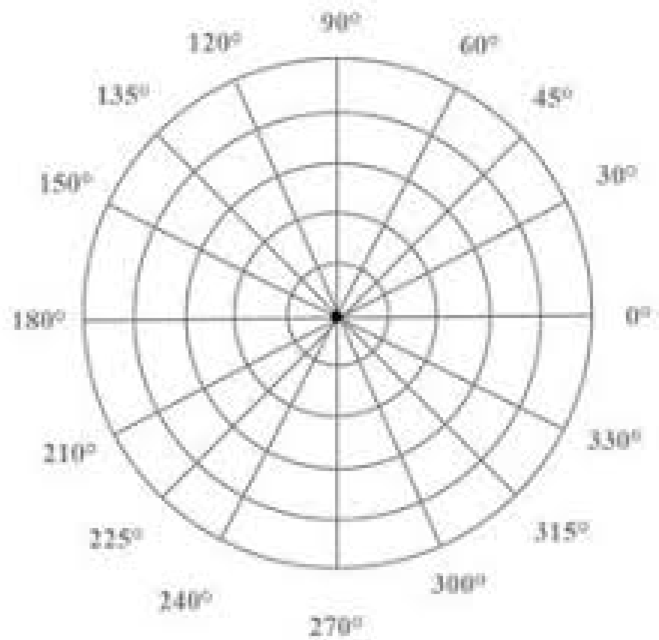
As duas expressões são conhecidas como *Teorema dos cossenos*, onde a diferença entre elas é apenas o sinal da última parcela que significa que para calcular a diagonal maior, usamos o sinal $(+)$ e para calcular a diagonal menor, usamos o sinal (-). Em resumo, temos: $A = a \cdot b \cdot sen(\theta)$.

10 Álgebra X Geometria

10.1 Sistema Polar

- Esse sistema parte de um ponto denominado polo, que é a origem de uma escala métrica chamada *eixo polar*, e de um arco de circunferência que tenha centro no polo e uma extremidade sobre o eixo polar. O raio da circunferência e a medida do arco variam.

- O eixo polar é geralmente representado da horizontal e orientado para a direita, de forma que os arcos de circunferência partam do eixo polar e cresçam no sentido anti-horário.



10.2 Sistema Cartesiano

- Os sistemas cartesianos de coordenadas definem a posição dos pontos de um plano por meio de duas escalas numéricas chamadas de eixo das abcissas (reta horizontal) e eixo das ordenadas (reta vertical).

- Há ainda uma terceira escala numérica envolvida, que é chamada de eixo das cotas. Portanto os pontos de coordenadas cartesianas espaciais (x, y, z) têm: abcissas (x), ordenada (y) e cota (z).

- Os sistemas cartesianos que apresentam dos eixos perpendiculares são chamados de sistemas de coordenadas ortogonais.

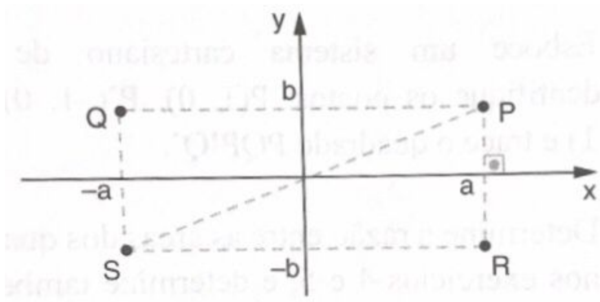
- O sistema cartesiano em que ambos os eixos representam escalas métricas de mesma unidade, interceptam-se em suas respectivas origens e são perpendiculares entre si, são chamados de *sistema de coordenada ortonormal*.

10.3 O plano cartesiano

- O sistema de coordenadas ortonormais define a posição de cada ponto do plano cartesiano usando um único par de números reais a e b. Esse par deve ser ordenado de forma que: se $a \neq b$, então $(a, b) \neq (b, a)$.

Isso significa que o ponto de coordenada (a, b) não é o mesmo que o ponto de coordenada (b, a), a não ser que os números a e b sejam iguais.

10.4 Simetrias no plano cartesiano



- **P(a, b)** e **Q(-a, b)** são simétricos em relação ao eixo das ordenadas: **Oy**.
- **P(a, b)** e **R(a, -b)** são simétricos em relação ao eixo das abcissas: **Ox**.
- **P(a, b)** e **S(-a, -b)** são simétricos em relação à origem do plano cartesiano: **O**.

11 Matemática no estudo da Física

11.1 Notação Científica

- A notação científica consiste em apresentar medidas ou quantidades estimadas na forma de uma expressão aritmética que envolve as operações de multiplicação e potenciação, tal que o primeiro fator seja um número racional entre 1 e 10, representado na forma decimal, e o segundo fator seja uma potência de base 10 e expoente inteiro.
- Assim, sendo x o valor atribuído a uma grandeza qualquer. Para escrever x em notação científica, deve-se encontrar o número racional α, tal que $1 \leq \alpha < 10$, e um número inteiro n tais que: $x = \alpha \cdot 10^n$.
- Uma vez representado em notação científica, a ordem de grandeza do número x é definida da seguinte forma:

$$\begin{cases} 10^n \ se \ \alpha < \sqrt{10} \\ 10^{n+1} \ se \ \alpha > \sqrt{10} \end{cases}$$

- Para efetuar adição de números expressos em notação científica é necessário reescrever a menor parcela usando a mesma potência de dez da parcela maior, e assim é possível efetuar essa adição colocando em evidência a potência comum às duas parcelas.
- Em uma multiplicação simplesmente faremos:

$$x = \alpha \times 10^m \ \text{ e } \ y = \beta \times 10^n$$

Com m e n inteiros e fatores α e β entre 1 e 10.

$$x \cdot y = (\alpha \cdot \beta) \times 10^{m+n}$$

- Se $y \neq 0$, então para determinar a razão entre os números x e y, faremos:

$$\frac{y}{y} = (\alpha \cdot \beta) \times 10^{m-n}$$

- Lembrando que os resultados obtidos dessas expressões não estão, necessariamente, em notação científica!

11.2 Grandezas Escalares

- Grandezas escalares são quantidades que podem ser totalmente descritas pelo seu valor e acompanhado de sua unidade de medida, sem especificar sua direção ou sentido.
- Alguns exemplos de grandezas escalares são: massa, temperatura, tempo, área, volume, pressão, resistência entre outras.
- Com exceção da unidade de tempo, todas as unidades de grandezas primárias do Sistema Internacional têm múltiplos e submúltiplos que obedecem à norma de prefixos do sistema decimal.

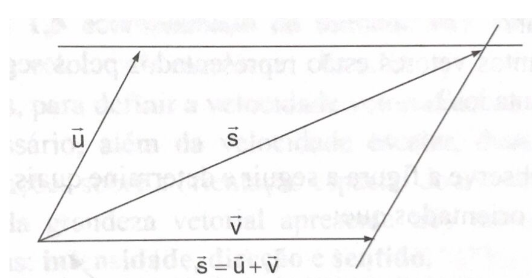
Múltiplos			Submúltiplos		
Factor	Prefixo	Símbolo	Factor	Prefixo	Símbolo
10^{1}	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^{2}	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^{3}	quilo	k	10^{-3}	mili	m
10^{6}	mega	M	10^{-6}	micro	µ
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

11.3 Grandezas Vetoriais

- Grandezas vetoriais são quantidades físicas que possuem intensidade, direção e sentido, representadas por vetores que são segmentos de reta orientados que possuem comprimento proporcional à magnitude da grandeza e direção.
- Alguns exemplos de grandezas vetoriais são: força, aceleração, velocidade, deslocamento, momento linear entre outros.

11.4 Vetor Soma

- Dado dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, definimos $\vec{s}$ como sendo o vetor resultante da soma dos vetores obedecendo a *regra do paralelogramo*. Assim, o vetor soma é representado pela seta sobre a diagonal do paralelogramo:



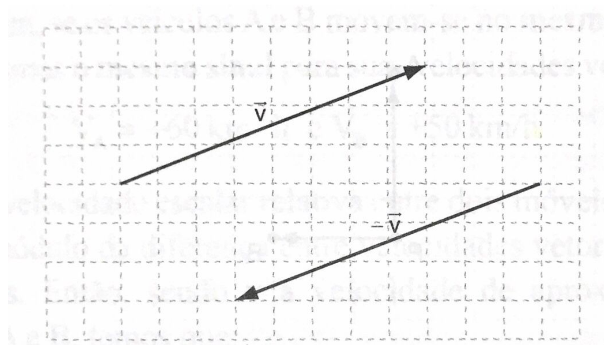
- Os lados do paralelogramo têm medidas u e v diretamente proporcionais às intensidades dos vetores que representam, da mesma forma que a intensidade do vetor soma é proporcional à medida **s** da diagonal desde paralelogramo. Ou seja:

$$\mid \vec{u} \mid = u \qquad \mid \vec{v} \mid = v \qquad \mid \vec{s} \mid = s$$

- Sabemos que em um paralelogramo, a soma total dos ângulos internos é $\alpha + \beta = 180°$. Assim, se um determinado exercício fornecer o ângulo obtuso entre as direções dos vetores, devemos tomar o ângulo θ nas fórmulas das diagonais do paralelogramo (Teorema dos cossenos) como sendo o suplemento do ângulo dado, e dessa forma evitamos a análise do sinal da função cosseno.

11.5 Vetor Oposto

- Vetores opostos são representados por setas de mesmo comprimento, paralelas entre si, mas tais que cada uma aponta num sentido diferente.



- A soma desses vetores opostos é chamada de vetor nulo, e a intensidade de um vetor nulo é zero:

$$-\vec{v} + \vec{v} = \vec{0} \qquad \text{e} \qquad \mid \vec{0} \mid = 0$$

- Dado dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, definimos $\vec{d}$ como sendo o vetor diferença entre os vetores dados da seguinte maneira:

$$\vec{d} = \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$