UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Apostila de apoio às disciplinas de Física:

Funções

Maringá, Paraná
2023

Este não é um material original, sendo aqui apresentado a revisão de uma coletânea de diversos materiais encontrados em livros-textos e apostilas de auxílio didático.

Sumário

1 Funções

A ideia de função está presente quando relacionamos duas grandezas variáveis. Nesse sentido, podemos pensá-las como uma máquina que transforma um objeto em outro através de uma relação lógica. Acompanhe alguns exemplos.

Exemplo 1: Número de litros de gasolina e preço a pagar.

A tabela abaixo relaciona o número de litros de gasolina comprados e o preço a pagar por eles (em março de 2005).

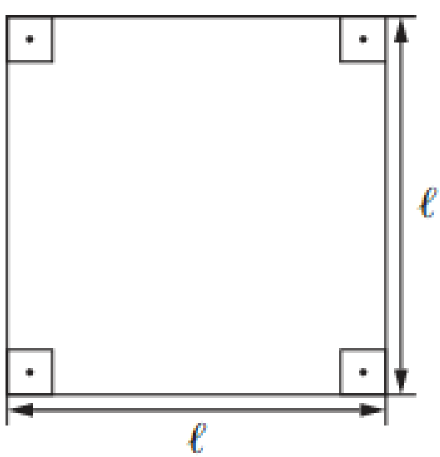
Número de litros	Preço a pagar(R$)
1	2,30
2	4,60
3	6,90
$\vdots$	$\vdots$
40	92,00
x	2,30x

Observe que o preço a pagar é dado em função do número de litros comprados, ou seja, o preço a pagar depende do número de litros comprados.

Preço a pagar (P) é R$ $2,30$ vezes o número de litros (x) comprados
ou seja,
P = 2,30x é lei da função, ou equação matemática da função, ou regra da função, ou ainda representação analítica da função.

Exemplo 2: Lado do quadrado e perímetro.

A tabela a seguir relaciona a medida do lado de um quadrado, em centímetros, e o seu perímetro (P), também em centímetros.



Medida de lado(l)	Perímetro(P)
1	4
2	8
2,5	10
4,1	16,4
$\vdots$	$\vdots$
l	4l

Observe que o perímetro do quadrado é dado em função da medida do seu lado, isto é, o perímetro depende da medida do lado. A cada valor dado para a medida do lado corresponde á um único valor para o perímetro.

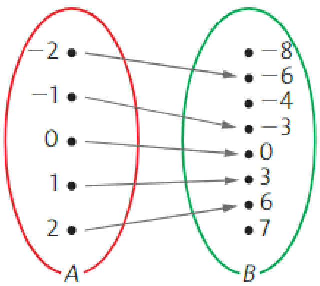
$$\text{Perímetro (P)} = 4 \text{ vezes a medida do lado (l)}$$
$$\text{ou}$$
$$\text{P} = 4\text{l é a lei da função.}$$

Como o perímetro depende da medida do lado, ele é a variável dependente, e a medida do lado é a chamada variável independente.

1.1 Função por Conjuntos

Vamos, agora, estudar essa mesma noção de função usando a nomenclatura de conjuntos. Considere os exemplos a seguir.

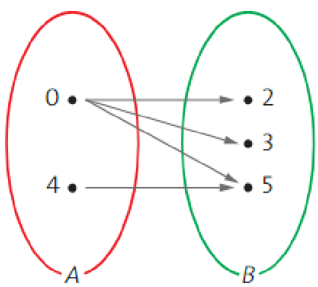
Exemplo 3: Observe os conjuntos A e B relacionados da seguinte forma: em A estão alguns números inteiros e em B, outros. Devemos associar cada elemento de A a seu triplo em B.



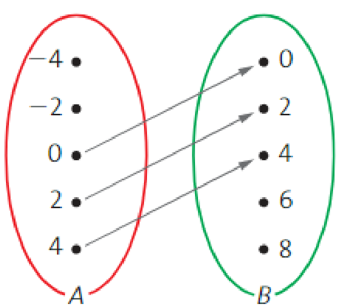
$x \in A$	$y \in B$
-2	-6
-1	-3
0	0
1	3
2	6

Notemos que todos os elementos de A têm correspondente em B e a cada elemento de A corresponde a um único elemento de B. Nesse caso, temos uma função de A em B, expressa pela equação $y = 3x$.

Exemplo 4: Dados $A = \{0, 4\}$ e $B = \{2, 3, 5\}$, relacionamos A e B da seguinte forma: cada elemento de A é menor do que um elemento de B:



Nesse caso, não temos uma função de A em B, pois ao elemento 0 de A correspondem três elementos de B (2, 3 e 5, pois $0 < 2, 0 < 3$ e $0 < 5$), e não apenas um único elemento de B.



Exemplo 5: Dados $A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, associamos os elementos de A aos elementos de igual valor em B: Observe que há elementos em A (os números -4 e -2) que não têm correspondente em B. Nesse caso, não temos uma função de A em B.

Podemos ver que não é toda associação que configura uma função. Existem condições a serem satisfeitas para que uma associação entre elementos de dois conjuntos configure uma função matemática.

Definição: Dados dois conjuntos não vazios **A** e **B**, uma função de **A** em **B** é uma regra que diz como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

Denota-se, costumeiramente, a função f que transforma **x** de **A** em **y** de **B** como

$$f\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$$
$$\mathrm{x} \mapsto \mathrm{y} = f(\mathrm{x})$$

O conjunto **A** chama-se domínio da função. Este é o maior conjunto sobre o qual a função está definida. O conjunto **B** é contradomínio da função e nele pode haver pontos que não se relacionam com outro ponto do domínio.

Exemplo 6: O domínio da função real $f(x) = 1/x$ é $\mathbb{R} - \{0\}$ pois f não está definida em $x = 0$. Sendo outra função real dada por $\mathrm{g(x)} = \sqrt{1-x}$, seu domínio é o intervalo $[-\infty, 1]$ pois para $\mathrm{x} > 1$, ela não está definida (se g fosse uma função à valores complexos, então D_g seria toda a reta real).

Para cada $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$, o elemento $\mathrm{y} \in \mathrm{B}$ chama-se imagem de x pela função f.

O conjunto de todos os y assim obtidos é chamado conjunto imagem da função f e é indicado por $\mathrm{Im}(f)$.

Ainda, o conjunto

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

denomina-se gráfico de f. Assim, o *gráfico* de f é um subconjunto de todos os pares (x, y) de números reais. Munindo-se do plano de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico de f pode então ser pensado como o *lugar geométrico* descrito pelo ponto $(x, f(x))$ quando x percorre o domínio de f.

É usual representar uma função f de uma variável real a valores reais e com domínio A simplesmente por

$$y = f(x), x \in A.$$

Neste caso, diremos que x é a *variável independente*, e y, a *variável dependente*. É usual, ainda, dizer que y é função de x.

1.2 Exemplos de Funções

EXEMPLO 1: Seja $y = f(x)$, $f(x) = x^3$. Tem-se que $D_f = \mathbb{R}$. Essa função associa a cada real x o número real $f(x) = x^3$. O gráfico de f $G_f = \{(x, y) \mid y = x^3, x \in \mathbb{R}\}$. Podemos ver que $f(-x) = -f(x)$, portanto seu gráfico, como pode ser observado na Figura 1, é simétrico em relação à origem

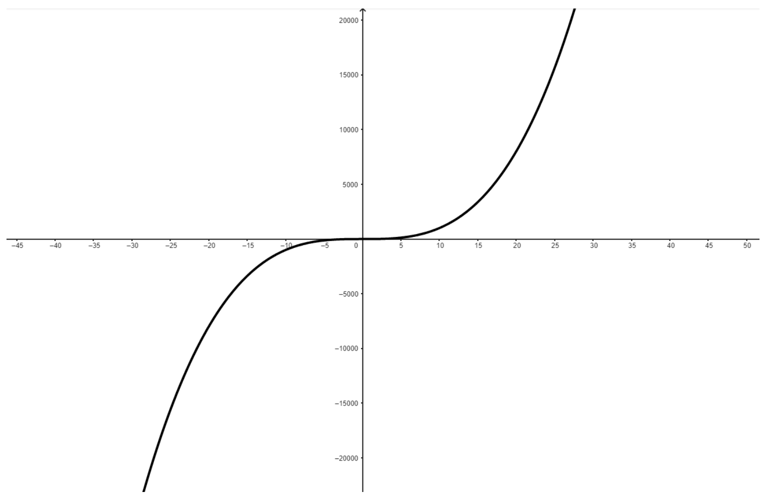


Figura 1: Gráfico da função $f(x) = x^3$.

Exemplo 2: Considere a função g dada por $y = \frac{1}{x}$. Tem-se que, como a função não está definida no ponto $x = 0$, portanto seu domínio é dado por $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ e seu gráfico é da forma como mostra a Figura 2.

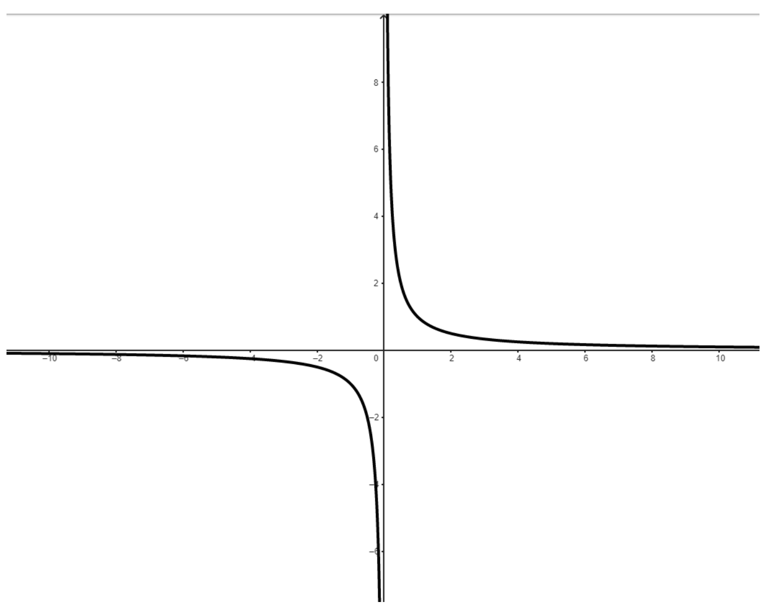


Figura 2: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$.

Exemplo 3:(*função constante*) Uma função $y = f(x), x \in A$, dada por $f(x) = k$, k sendo constante, denomina-se *função constante*. Seu domínio é $D_f = \mathbb{R}$ e seu gráfico é o conjunto $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ que configura uma reta horizontal, paralela ao eixo das abcissas, passando pelo ponto $y = k$. Se $k = 2$, temos um gráfico como representado na Figura 3.

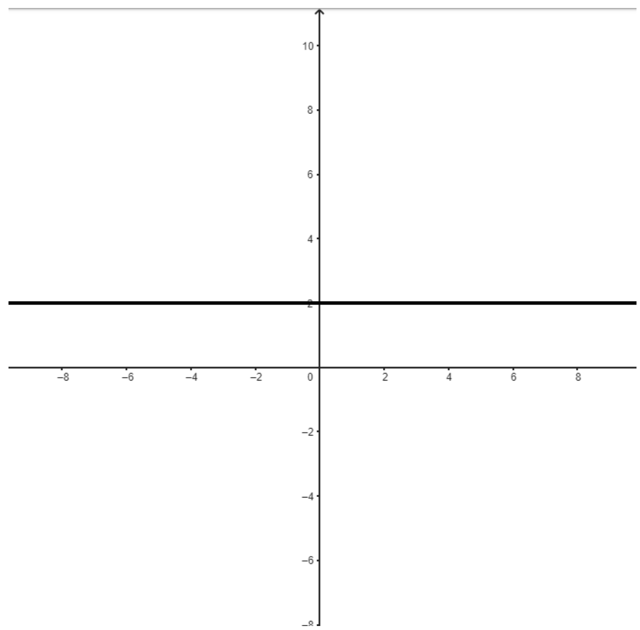


Figura 3: Gráfico da função constante.

Exemplo 4:(*Função afim*) Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $y = ax + b$, com a e b constantes, denomina-se *função afim*. Seu gráfico é a reta que passa pelo ponto ($x = 0$, $y = b$) e é paralela à reta $y = ax$ (reta que passa pela origem com inclinação a). Supondo $a = 2$ e $b = 3$, teremos um gráfico como representado pela Figura 4.

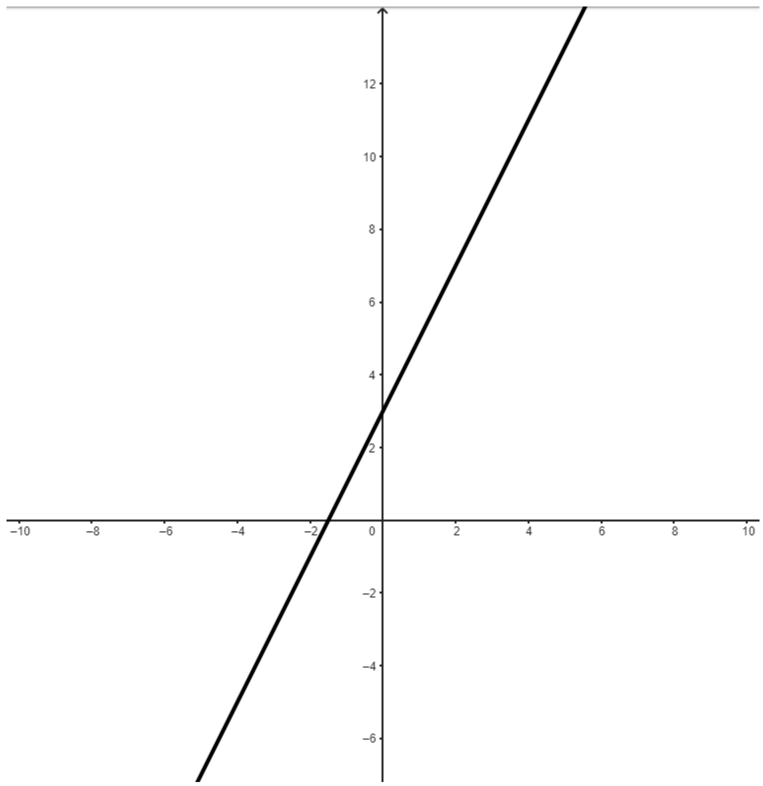


Figura 4: Gráfico da função $f(x) = 2x + 3$.

Vale lembrar que funções desse tipo que caracterizam o movimento retilíneo uniforme uma vez que a especificação da posição de uma partícula clássica no tempo é dada por $x(t) = x_0 + vt$ onde v é a velocidade em que esta viaja e x_0 é a posição inicial da mesma.

Exemplo 5:*(função polinomial)* Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

$a_0 \neq 0$, a_1, a_2,...,a_n são números reais fixos, denomina-se *função polinomial de grau* n ($n \in \mathbf{N}$).

Para o caso onde $n = 2$ tem-se uma função quadrática cujo gráfico é uma parábola que pode ser deslocada no plano cartesiano a depender dos coeficientes a_i. Esse tipo de função representa a posição de uma partícula clássica em um movimento uniformemente acelerado pois a posição desta é dada por $x(t) = x_0 + v_0t + \frac{a}{2}t^2$ onde v_0 e a é a velocidade inicial e a aceleração da partícula respectivamente.

Exemplo 6:(*Função modular*) Seja $f(x) = |x - 1| + 2$, para esboçar seu gráfico, primeiro eliminamos o módulo:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 + 2, & x \geq 1 \\ -(x - 1) + 2, & x < 0 \end{cases}$$

ou

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ -x+3 & x < 1 \end{cases}$$

Agora, basta desenhar cada uma das retas até os pontos convenientes a cada uma delas. O resultado deste gráfico é mostrado na Figura 5.

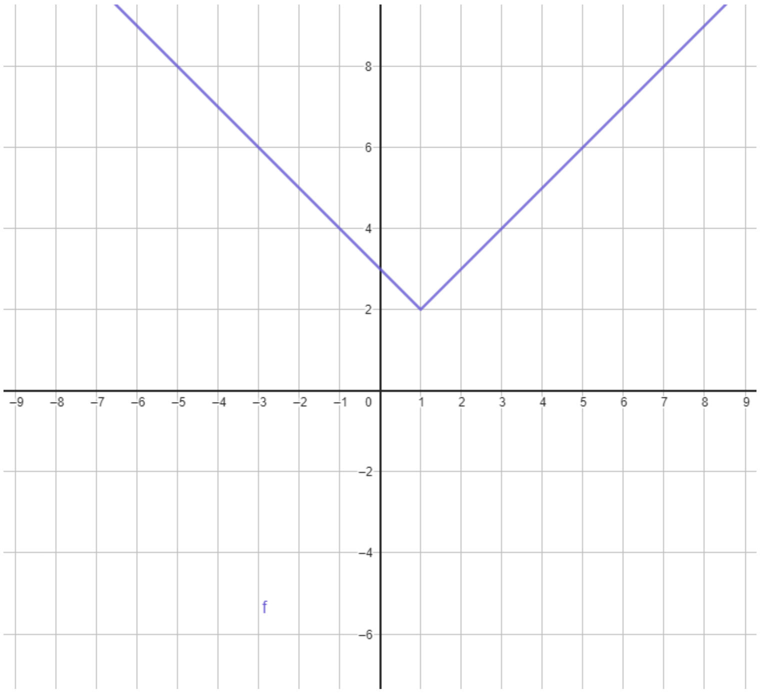


Figura 5: Gráfico da função $f(x) = |x-1| + 2$.

1.3 Funções injetivas, sobrejetoras e bijetoras

Definição: Uma função $f\colon A \to B$ é *injetiva* (ou *injetora*) quando elementos diferentes de **A** são transformados por f em elementos diferentes de **B**, ou seja,

$$f(x_1) = f(x_2) \text{ em } \mathbf{B} \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ em } \mathbf{A}.$$

ou ainda

$$x_1 \neq x_2 \text{ em } \mathbf{A} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ em } \mathbf{B}.$$

Exemplo 1: A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 1$ não é injetiva pois para $x = 1$ e $x = -1$, a função corresponde ao mesmo valor, $f(\pm 1) = 0$.

Exemplo 2: A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$ é injetora, pois faz corresponder a cada número real x o seu dobro $2x$ e não existem dois números reias diferentes que tenham o mesmo dobro.

Definição: Uma função $f\colon A \to B$ é *sobrejetiva* (ou *sobrejetora*) quando, para qualquer elemento $y \in B$, pode-se encontrar um elemento $x \in A$ tal quer $f(x) = y$. Ou seja, f é sobrejetiva quando todo elemento de **B** é imagem de pelo menos um elemento de **A**, isto é, quando $Im(f) = \mathbf{B}$.

Exemplo 3: A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 2$ é sobrejetiva, pois todo elemento de **R** é imagem de um elemento de **R** pela função $[x = f(x) - 2]$.

Exemplo 4: A função suceesor $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = n + 1$ não é sobrejetiva pois não há nenhum número no conjuntos dos naturais que resulte em 0.

Definição: Uma função $f\colon A \to B$ é *bijetiva* (ou *bijetora*) se ela é, simultaneamente, injetiva e sobrejetiva. Quando isso ocorre dizemos que há uma bijeção ou uma correspondência biunívoca entre **A** e **B**.

A partir dessa definição podemos dizer que dois coonjuntos possuem o mesmo caridal de existe uma bijeção entre eles.

1.4 Operações com funções

Sejam f e g duas funções tais que $D_f \cap D_g$ seja diferente do vazio. Definimos:

a) A função $f + g$ dada por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

denomina-se *soma* de f e g. O domínio de $f+g$ é $D_f \cap D_g$.

b) A função $f \cdot g$ dada por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

denomina-se *produto* de f e g. O domínio de $(f \cdot g)$ é $D_f \cap D_g$.

c) A função $\frac{f}{g}$ dada por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

denomina-se *quociente* de f e g. O domínio de $\frac{f}{g}$ é $x \in D_f \cap D_g | g(x) \neq 0$.

d) A função $k \cdot f$, k constante, dada por

$$(k \cdot f)(x) = kf(x)$$

é o *produto de f pela constante* k; $D_{kf} = D_f$.

Definição:(*função composta*) Dadas duas funções f: $A \to B$ e $g : B \to C$, denominamos função composta de **g** e **f** a função $g \circ f : A \to C$ definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Exemplo 1: Sejam $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x + 2$

Definição: Dada uma função f: $A \to B$, bijetiva, denomina-se função inversa de f a função $g : B \to A$ tal que, se $f(a) = b$, então $g(b) = a$, com $a \in A$ e $b \in B$.

Exemplo 2: Seja $f(x) = -3x + 5$. Para determinar sua inversa $f^{-1}(x)$, trocamos as variáveis de lugar, isto é, $y \to x$ e $x \to y$:

$$y = -3x + 5 \to x = -3y + 5.$$

Agora resolvemos para y:

$$y = \frac{-x+5}{3}.$$

Portanto,

$$f^{-1}(x) = \frac{-x+5}{3}.$$

que pode ser verificado colocando os valores $f(x=1) = -3 + 5 = 2$ e $f^{-1}(x=2) = \frac{-2+5}{3} = 1$.

1.5 Funções trigonométricas

Dado um número real x, podemos associar a ele o valor de Seno de um ângulo (ou arco) de x radianos. Assim, definimos a função Seno como sendo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = \operatorname{sen}(x) \end{aligned}$$

Da mesma forma, podemos definir a função que associa cada número real x o valor real Cosseno, ou seja,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = \cos(x) \end{aligned}$$

Essas funções são periódicas com período 2π. Os gráficos de sen e cos têm os seguintes aspectos:

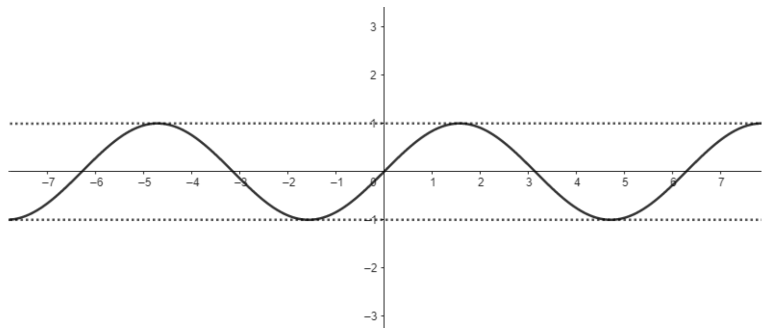


Figura 6: Gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

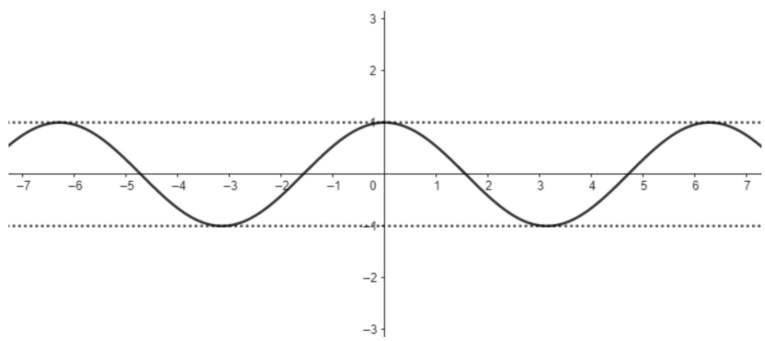


Figura 7: Gráfico da função $f(x) = \cos(x)$

A respeito dessas funções, podemos dizer que possuem o domomínio como sendo todos os números reais, $D = \mathbb{R}$ e o conjunto imagem igual à $Im = [-1, 1]$. Tanto a função Seno como Cosseno não é sobrejetivo tão pouco injetiva, como pode ser facilmente visualizado no gráfico de cada uma delas. Uma importante relação entre entre essas duas funções é que, para qualquer valor t, vale a relação

$$\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1.$$

Essa relação nos mostra que para qualquer valor t, o ponto $(\cos(t), \operatorname{sen}(t))$ pertence à circunferência de raio 1 centrada na origem. Isso pode ser visualizado na Figura 8.

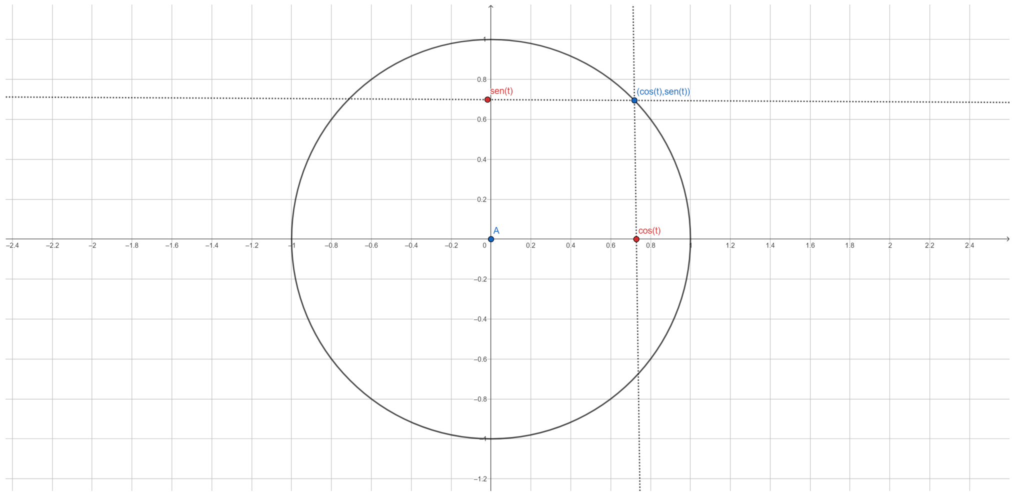


Figura 8: Circunferência trigonométrica.

As funções trigonométricas, em especial a senóide, são excelentes para descrever fenômenos periódicos. Isso acontece pelo fato dessas funções serem soluções de muitas equações diferenciais que descrevem muitas situações físicas. O exemplo mais padrão é o do *movimento harmônico simples* (MHS), cuja solução do seu movimento é da forma

$$x(t) = Asen(\omega t + \theta).$$

A constante A é a amplitude do movimento, ω representa a velocidade angular e θ uma fase. Essa expressão representa a posição de uma partícula em função do tempo realizando um MHS.

A *função tangente* é dada por $\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$; seu domínio é o conjunto de todos os x reais tais que $\cos(x) \neq 0$. O gráfico da tangente tem o seguinte aspecto:

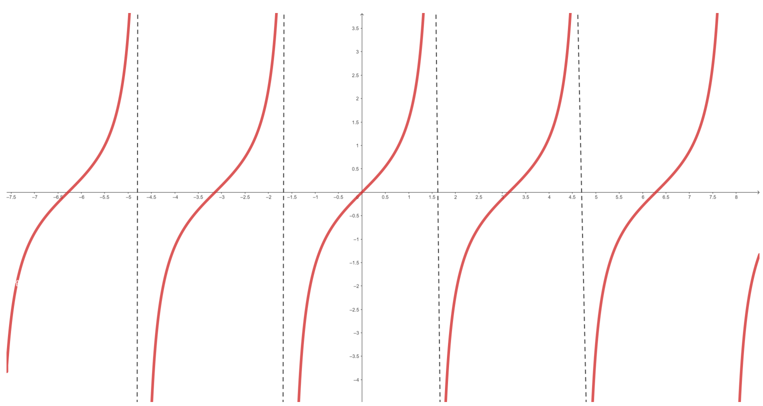


Figura 9: Gráfico da função $f(x) = \operatorname{tg}(x)$.

onde as equações das retas pontilhadas são do tipo $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, k é um valor inteiro.

As funções sec (*secante*), cotg(*co-tangente*) e cosec(*co-secante*) são dadas por

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)},\ \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)},\ \csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}.$$

O gráfico da secante tem o seguinte aspecto:

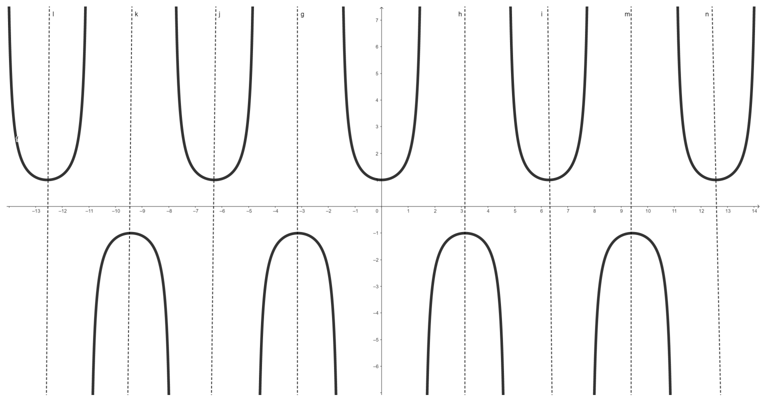


Figura 10: Gráfico da $f(x) = sec(x)$.

onde os extremos ocorrem quando nos valores mútiplos de π e as assintotas verticais em $x = \pi/2 + 2k\pi$.