# $6^{\underline{a}}$ Lista de Mecânica Clássica I

| Horários e salas | | |
|---|---|---|
| Quarta-Feira | 17:15 - 19:15 | Bloco C34 - Sala 105 |

**Questão - 1** Uma partícula se movimenta sob a ação de uma força central do tipo $\vec{F} = \hat{r}F(r)$.

a) Mostre que o rotacional de $\vec{F}$ se anula independentemente da função $F(r)$;

b) Mostre que a energia potencial associada é uma função apenas de $r$, sendo dada por

$$V(r) = -\int_{r_s}^{r} F(r)dr, \tag{1}$$

com $r_s$ sendo um ponto de referência;

c) Mostre que o movimento ocorre num plano que contém o centro da força. A seguir, escreva a equação do movimento para o corpo em coordenadas polares;

d) Mostre que

$$mr^2\dot{\theta} = L, \tag{2}$$

com $L$ constante.

e) Mostre que

$$\dot{r} = \left[\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right)\right]^{1/2}, \tag{3}$$

com $E$ sendo a energia total.

f) Mostre que

$$m\ddot{r} = F(r) + \frac{L^2}{mr^3}. \tag{4}$$

Como podemos interpretar esta equação?

g) Tratando o movimento em $r$ como um movimento unidimensional, mostre que

$$V'(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}, \tag{5}$$

sendo $V'(r)$ a energia potencial efetiva.

h) Mostre que a trajetória ou órbita da partícula pode ser descrita pela equação

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right), \tag{6}$$

com $u = 1/r$.

i) Se a razão entre o período do movimento em $r$ e o período do movimento de revolução for um número inteiro, a órbita será uma curva fechada. Para este caso, mostre que $S = \tau L/2m$, onde $S$ é a área da órbita e $\tau$ é o período de revolução.

**Questão - 2** Uma partícula se move sob a ação de uma força central do tipo $\vec{F} = \frac{k}{r^2}\hat{r}$.

a) Mostre que o potencial efetivo é dado por

$$V'(r) = \frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}; \tag{7}$$

b) Para o caso $k < 0$ e $L \neq 0$, mostre que o valor mínimo do potencial efetivo ocorre em $r_0 = \frac{L^2}{(-km)}$ e vale $V'(r_0) = -\frac{k^2 m}{2L^2}$;

c) Mostre que a solução da equação da órbita é dada por

$$u = \frac{1}{r} = -\frac{mk}{L^2} + A\cos(\theta - \theta_0), \tag{8}$$

sendo $A$ e $\theta_0$ constantes;

d) Mostre que

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{mk}{L^2} + A, \quad \frac{1}{r_2} = -\frac{mk}{L^2} - A, \tag{9}$$

sendo $r_1$ e $r_2$ os pontos de retorno do movimento em $r$;

e) Para um dado $E$, os pontos de retorno do movimento em $r$ são soluções da equação $V'(r) = E$. Partindo desta equação, mostre que

$$A^2 = \frac{m^2k^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}. \tag{10}$$

**Questão - 3** Mostre que a equação da elipse em coordenadas polares com a origem em um dos focos é dada por

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta}, \tag{11}$$

em que $e$ é a excentricidade da elipse e $a$ é a metade do diâmetro maior.